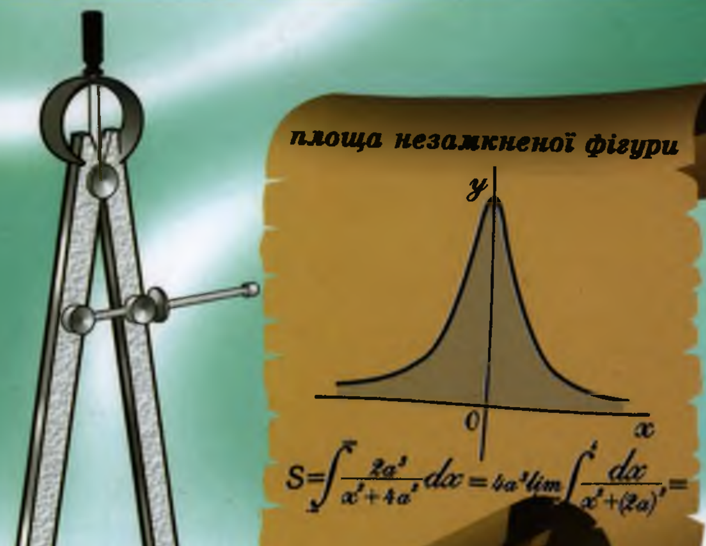
В. С. ГЕРАСИМЧУК, Г. С. ВАСИЛЬЧЕНКО, В. І. КРАВЦОВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА ПОВНИЙ КУРС У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Невизначений, визначений та невласні інтеграли
Звичайні диференціальні рівняння
Прикладні задачі



В.С. ГЕРАСИМЧУК, Г.С. ВАСИЛЬЧЕНКО, В.І. КРАВЦОВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ПОВНИЙ КУРС У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Невизначений, визначений та невласні інтеграли
Звичайні диференціальні рівняння
Прикладні задачі

Затверджено Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
технічних і технологічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Київ
Книги України ЛТД
2010

УДК 51 (075.8)
ББК 22.161я73
Г37

Затверджено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів (Гриф № 1.4/18-Г-50 від 10.01.09)

Рецензенти: кафедра вищої математики ім. В.В.Пака (Донецький національний технічний університет);
А.М. Самойленко, академік, директор Інституту математики НАН України;
А.І. Кононенко, канд. фіз.-мат. наук, доцент (Харківський державний технічний університет будівництва та архітектури)

Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І.

Г37 *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*
Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. – К.: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с.
ISBN 978-966-2331-05-9

Тритомне видання "Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах" являє собою *посібник з практичної частини* базового курсу вищої математики. Він містить виняткову за повнотою та ґрунтовністю розгляду добірку задач і прикладів (понад півтори тисячі) різного ступеня складності. Кожен параграф відповідає певній темі й включає короткий перелік основних теоретичних положень, велику кількість детально розв'язаних типових задач та прикладів, певну кількість ретельно підібраних задач і прикладів для самостійної роботи, а також контрольні запитання, які передбачають глибоке розуміння теоретичного матеріалу.

Видання структуроване за модульним принципом. Друга частина охоплює навчальний матеріал курсу вищої математики, що за існуючими програмами викладається в другому семестрі.

Навчальний посібник призначений для студентів і викладачів вищих навчальних закладів, а також для осіб, які займаються самоосвітою.

ББК 22.161я73

За редакцією докт. фіз.-мат. наук, професора *В.С. Герасимчука*

ISBN 978-966-2331-05-9

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 9
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

§ 9.1. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

Функція $F(x)$, зв'язана з функцією $f(x)$ співвідношенням

$$F'(x)=f(x) \quad \text{або} \quad dF(x)=f(x)\,dx, \qquad \text{де } x\in X,$$

називається *первісною* функції $f(x)$ на множині X.

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на множині X називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначається символом $\int f(x)\,dx$.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$ на множині X, то

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

де C – довільна стала.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq -1;$

2. $\int x^{-1}dx=\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\quad a>0,\ a\neq 1;$

4. $\int e^{x}dx=e^{x}+C;$

5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C;$

6. $\int \cos x\,dx=\sin x+C;$

7. $\int \operatorname{tg} x\,dx=-\ln|\cos x|+C;$

8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\ln|\sin x|+C;$

9. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C;$

10. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C;$

11. $\int\dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C;$

12. $\int\dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C;$

13. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C;$

14. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C;$

15. $\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C;$

16. $\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C;$

17. $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C=-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C^{*},\quad a\neq 0$

18. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C=-\arccos\dfrac{x}{a}+C^{*},\quad a>0;$

19. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right|+C,\quad a\neq 0;$

20. $\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C,\quad a\neq 0.$

Основні табличні інтеграли знаходять шляхом обернення відповідних формул таблиці похідних.

Основні властивості невизначеного інтеграла

I. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$; **III.** $\int dF(x)=F(x)+C$;

II. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$; **IV.** $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

V. $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, де A – стала, відмінна від нуля.

Теорема (*про інваріантність формул інтегрування*). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної x будь-якої диференційовної функції від неї $u=u(x)$, тобто

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \qquad \int f(u)\,du = F(u)+C.$$

Задача *безпосереднього інтегрування* полягає в тому, щоб звести заданий інтеграл до відомого табличного інтеграла[1], використовуючи властивості невизначеного інтеграла і тотожні перетворення.

Правильність результату інтегрування перевіряється диференціюванням знайденої первісної, оскільки $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

Приклад 1. Знайти інтеграли. Результати інтегрування у випадках г) і д) перевірити диференціюванням:

а) $\int dx$; **б)** $\int\left(5x^2+x-3\right)dx$;

в) $\int\frac{\left(x^4-1\right)\left(2x+1\right)}{x^2}\,dx$; **г)** $\int\left(4x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)dx$;

д) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}+t\sqrt{t}+2\right)dt$.

Розв'язання. Використовуємо властивості невизначеного інтеграла для зведення заданих інтегралів до табличних. Мета буде досягнута, якщо, порівнюючи заданий диференціал (підінтегральний вираз) з диференціалами таблиці основних інтегралів, ми знайдемо його серед табличних.

Наведені в цьому прикладі інтеграли зводяться в основному до інтеграла від *степеневої функції*, тобто до табличних інтегралів 1 і 2:

а) Можна скористатися табличним інтегралом 1 при $\alpha=0$ або застосувати властивість III:

$$\boxed{\int dx = x+C}$$

Значення цього інтеграла слід запам'ятати.

[1] "Інтегрування по суті є *процесом доцільно направлених гадань і спроб*, для полегшення яких складена таблиця так званих основних інтегралів" (акад. М.М.Лузін).

б) Спочатку застосуємо властивості невизначеного інтеграла IV і V, тобто представимо інтеграл від алгебраїчної суми у вигляді алгебраїчної суми інтегралів і винесемо сталі множники за знаки інтегралів. Потім скористаємося табличним інтегралом 1:

$$\int\left(5x^2+x-3\right)dx = 5\int x^2dx+\int x\,dx-3\int dx = 5\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+C.$$

Зауваження. Загалом, при кожному окремому інтегруванні слід писати довільну сталу. Ми ж пишемо тільки одну довільну сталу C у кінцевому результаті, позначаючи нею алгебраїчну суму всіх окремих довільних сталих.

в) Якщо в чисельнику розкрити дужки й отриманий вираз почленно поділити на знаменник, матимемо інтеграл від алгебраїчної суми степеневих функцій. Застосовуючи властивості IV і V і табличні інтеграли 1 і 2, знайдемо:

$$\int\frac{\left(x^4-1\right)\left(2x+1\right)}{x^2}\,dx = \int\frac{2x^5+x^4-2x-1}{x^2}\,dx = \int\left(2x^3+x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$=2\int x^3dx+\int x^2dx-2\int\frac{dx}{x}-\int x^{-2}dx = 2\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}+\frac{x^{2+1}}{2+1}-2\ln|x|-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=$$

$$=\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-2\ln|x|+\frac{1}{x}+C.$$

г) За допомогою властивостей IV і V зведемо інтеграл до алгебраїчної суми інтегралів. Усі вони відповідають табличному інтегралу від степеневої функції: для першої з них $\alpha=7$, для другої $\alpha=3/5$, для третьої $\alpha=-4$. Отже,

$$\int\left(4x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)dx = 4\int x^7dx-3\int x^{\frac{3}{5}}dx+2\int x^{-4}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{7+1}}{7+1}-3\cdot\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+2\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=\frac{x^8}{2}-\frac{15}{8}x^{\frac{8}{5}}-\frac{2}{3x^3}+C.$$

Переконаємося, що первісну знайдено правильно:

$$\left(\frac{x^8}{2}-\frac{15}{8}x^{\frac{8}{5}}-\frac{2}{3}\frac{1}{x^3}+C\right)'=$$

$$=\frac{8}{2}x^7-\frac{15}{8}\cdot\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}-\frac{2}{3}(-3)x^{-4}+0=4x^7-3x^{\frac{3}{5}}+2x^{-4}=4x^7-3\sqrt[5]{x^3}+\frac{2}{x^4}.$$

Дійсно, у результаті диференціювання одержали вихідну підінтегральну функцію.

д) Тут змінна інтегрування позначена буквою t. Зведемо цей інтеграл до алгебраїчної суми інтегралів від степеневої функції t^{α} і скористаємося табличним інтегралом 1:

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}}+t\sqrt{t}+2\right)dt=\int\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}+t^{\frac{3}{2}}+2\right)dt=\int\left(t^{-\frac{1}{3}}+t^{\frac{3}{2}}+2\right)dt=\int t^{-\frac{1}{3}}dt+\int t^{\frac{3}{2}}dt+2\int dt=$$

$$=\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2}+\frac{2}{5}\sqrt{t^5}+2t+C.$$

Перевіримо правильність інтегрування:

$$\left(\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t+C\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+2=t^{-\frac{1}{3}}+t^{\frac{3}{2}}+2=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}+t\sqrt{t}+2.$$

Приклад 2. Знайти інтеграли від показникових функцій. Результат інтегрування у випадку **б)** перевірити диференціюванням:

а) $\int\left(7^x-2e^x+4\right)dx$; **б)** $\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx$.

Розв'язання. **а)** Застосуємо властивості невизначеного інтеграла IV і V і скористаємося табличними інтегралами 1, 3 і 4:

$$\int\left(7^x-2e^x+4\right)dx=\int 7^x dx-2\int e^x dx+4\int dx=\frac{7^x}{\ln 7}-2e^x+4x+C.$$

б) Виконаємо почленне ділення і виділимо в підінтегральному виразі показникові функції:

$$\int\frac{2\cdot 3^x+3\cdot 2^x}{5^x}dx=\int\left(2\cdot\frac{3^x}{5^x}+3\cdot\frac{2^x}{5^x}\right)dx=\int\left[2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]dx=$$

$$=2\int\left(\frac{3}{5}\right)^x dx+3\int\left(\frac{2}{5}\right)^x dx=2\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}}+3\cdot\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}}+C.$$

За допомогою перевірки переконуємося в правильності знайденої первісної:

$$\left(\frac{2}{\ln\frac{3}{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{3}{\ln\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+C\right)'=\frac{2}{\ln\frac{3}{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\frac{3}{\ln\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}=2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int(\sin x-4\operatorname{ctg}x)\,dx$; **б)** $\int\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi$;

в) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}$; **г)** $\int\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 2x}dx$.

Розв'язання. Щоб звести задані інтеграли до табличних, будемо виконувати в міру необхідності прості тригонометричні перетворення.

а) $$\int(\sin x-4\operatorname{ctg}x)\,dx=\int\sin x\,dx-4\int\operatorname{ctg}x\,dx=\text{(табл. інтеграли 5 і 8)}=$$

$$=-\cos x-4\ln|\sin x|+C.$$

б) $$\int\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi=\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi=\int\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi=\int\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi=$$

$$=\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\int d\varphi=\text{(табл. інтеграли 14 і 1)}=\operatorname{tg}\varphi-\varphi+C.$$

в) Користуючись тригонометричною тотожністю $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, представимо заданий інтеграл у вигляді суми двох табличних інтегралів:

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\text{(табл. інтеграли 13 і 14)}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

г) Використовуючи тригонометричну формулу різниці косинусів

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

одержимо

$$\int\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 2x}dx=-\int\frac{2\sin x\sin 2x}{\sin 2x}dx=-2\int\sin x\,dx=2\cos x+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли і перевірити результати диференціюванням:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; **б)** $\int\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x^2+9}\right)dx$.

Розв'язання. **а)** Якщо позначити $25=a^2$, то дістанемо табличний інтеграл 18. Отже,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}=\arcsin\frac{x}{5}+C.$$

Диференціюючи результат

$$\left(\arcsin\frac{x}{5}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}\cdot\left(\frac{x}{5}\right)'=\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}},$$

знаходимо вихідну підінтегральну функцію.

б) Зводячи інтеграл від алгебраїчної суми до алгебраїчної суми інтегралів, одержимо відповідно табличні інтеграли 20 і 17, де $a^2=9$:

$$\int\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x^2+9}\right)dx=6\int\frac{dx}{x^2-9}-\int\frac{dx}{x^2+9}=6\cdot\frac{1}{2\cdot3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

Переконаємося в правильності отриманого результату:

$$\left(\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C\right)'=\frac{x+3}{x-3}\cdot\left(\frac{x-3}{x+3}\right)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=$$

$$=\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{x+3-(x-3)}{(x+3)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{9+x^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{9+x^2}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{9+x^2}.$$

Розглянемо *складніші* приклади. Щоб знайти невизначені інтеграли від запропонованих функцій, необхідно попередньо виконати тотожні перетворення, що зводять задані інтеграли до табличних.

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{10x^2+9}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\int\frac{dx}{3-2x^2}$.

Розв'язання. Наявність у підінтегральних виразах коефіцієнта при x^2 не дає змоги ототожнити задані інтеграли відповідно з табличними інтегралами 17, 18 і 20. Слід винести цей коефіцієнт за знак інтеграла:

а) $$\int\frac{dx}{10x^2+9}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\text{(табл. інтеграл 17, де } a=\frac{3}{\sqrt{10}}\text{)}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{10}}}+C=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}\,x}{3}+C;$$

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}}=\text{(табл. інтеграл 18, де } a=\frac{1}{2}\text{)}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\arcsin 2x+C;$$

в) $$\int\frac{dx}{3-2x^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}}=\text{(табл. інтеграл 20, де } a=\sqrt{\frac{3}{2}}\text{)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{3}{2}}}{x+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right|+C=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграли від алгебраїчних функцій:

а) $\int\frac{1+3x^2}{(x^2+1)x^2}dx$; б) $\int\left(1+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2dx$;

в) $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$; г) $\int\frac{dx}{1-x^4}$.

Розв'язання. а) Виділимо в чисельнику доданок $1+x^2$ і виконаємо почленне ділення:

$$\int\frac{1+3x^2}{(x^2+1)x^2}dx=\int\frac{(1+x^2)+2x^2}{(1+x^2)x^2}dx=\int\left(\frac{1+x^2}{(1+x^2)x^2}+\frac{2x^2}{(1+x^2)x^2}\right)dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{(табл. інтеграли 1 і 17)}$$

$$=-\frac{1}{x}+2\operatorname{arctg}x+C.$$

б) Піднесемо двочлен до квадрата і перейдемо до суми інтегралів:

$$\int\left(1+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2dx=\int\left(1+\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}+\frac{1}{4+x^2}\right)dx=\int dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}+\int\frac{dx}{4+x^2}=$$

$$=\text{(табл. інтеграли 1, 19 і 17)}=x+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Тут аргумент логарифма додатний, тому знак модуля опускаємо.

в) Розкриємо різницю квадратів у знаменнику і виконаємо почленне ділення:

$$\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{\left(2-x^2\right)\left(2+x^2\right)}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}-5\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=$$

$$=\text{(табл. інтеграли 18 і 19)}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-5\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)+C.$$

г) Знаменник підінтегральної функції розкладемо на множники, чисельник помножимо на 2 і, щоб вираз не змінився, помножимо інтеграл на $\frac{1}{2}$:

$$\int\frac{dx}{1-x^4}=\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}.$$

Тепер додамо і віднімемо в чисельнику x^2 і почленно поділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{1}{2}\int\frac{\left(1+x^2\right)+\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{(табл. інтеграли 17 і 20)}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Зауваження. У деяких випадках корисно записати в чисельнику підінтегральної функції взаємно знищувані доданки, маючи на увазі подальше почленне ділення чисельника на знаменник. Цей прийом і застосований в останньому прикладі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що слугує *первісною* для функції $f(x)$, заданої на множині X?
2. Чи можна стверджувати, що будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної тільки сталим доданком? Доведіть.
3. Що називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на деякій множині?
4. Чи має геометричне тлумачення невизначений інтеграл?
5. Сформулювати і довести *основні властивості* невизначеного інтеграла.
6. Перевірити справедливість *таблиці основних інтегралів* диференціюванням.
7. Чому в первісній табличного інтеграла $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ змінна x береться за модулем?

8. Відомо, що $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C=F(x)+C$ і в той же час

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C^*=\Phi(x)+C^*,\text{ де } F(x)\neq\Phi(x).$$

Як це пояснити? Чи не суперечить це теоремі про вигляд первісної?

9. Відомо, що $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C=F(x)+C$ тоді як

$$\int\frac{du}{a^2+u^2}=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a}+C^*=\Phi(x)+C^*,\text{ де } F(x)\neq\Phi(x).$$

Із чим це пов'язано? Чи не суперечить це теоремі про вигляд первісної?

10. Задано неперервну періодичну функцію $f(x)$, де $x\in R$. Чи можна стверджувати, що первісна цієї функції також буде періодичною функцією? Навести приклад.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int\left(x^2-3x+15\right)dx$;	2. $\int x\sqrt[3]{x}\,dx$;
3. $\int\left(4^x-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$;	4. $\int\frac{(x+2)^2}{x^2}dx$;
5. $\int\frac{4x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$;	6. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$;
7. $\int\left(2-5e^x\right)dx$;	8. $\int\frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx$;
9. $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$;	10. $\int\left(3\operatorname{tg}x-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)dx$;
11. $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$;	12. $\int\frac{\sin x-\sin 3x}{\cos 2x}dx$;
13. $\int\frac{2\cos^3 x}{1+\cos 2x}dx$;	14. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$;
15. $\int\frac{\cos 4x}{\cos 2x+\sin 2x}dx$;	16. $\int\frac{5+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}dx$;
17. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;	18. $\int\frac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$;
19. $\int\frac{4\sqrt{x^2-4}+1}{x^2-4}dx$;	20. $\int\frac{2x^2-1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx$;

21. $\int \frac{dx}{2+x^2}$;

22. $\int \frac{dx}{9x^2+2}$;

23. $\int \frac{5+2\,\mathrm{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx$;

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$;

25. $\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

26. $\int \left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$;

27. $\int \frac{5+x^2}{25-x^4}\,dx$;

28. $\int \frac{dx}{x^2-x^4}$;

29. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{1-3x^2+3x^4-x^6}}$;

30. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x^2+x^4}}$;

31. $\int \frac{x\,dx}{x-2}$;

32. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

ВІДПОВІДІ

1. $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+15x+C$. **2.** $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C$. **3.** $\frac{4^x}{\ln 4}+2\,\mathrm{arcctg}\,x+C$.

4. $x+4\ln|x|-\frac{4}{x}+C$. **5.** $4x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$. **6.** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x+C$.

7. $2x-5e^x+C$. **8.** $2\sin x+C$. **9.** $C-2\cos x$. **10.** $C-3\ln|\cos x|-\ln|\sin x|$.

11. $C-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,x$. **12.** $2\cos x+C$. **13.** $\sin x+C$. **14.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{2}x+C$.

15. $\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)+C$. **16.** $5\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+x+C$. **17.** $\arcsin\frac{x}{3}+C$.

18. $\arcsin\frac{x}{2}-\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$. **19.** $4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$.

20. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{x}+C$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **22.** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{3x}{\sqrt{2}}+C$.

23. $C-5\,\mathrm{ctg}\,x+2\,\mathrm{tg}\,x$. **24.** $\sin x+C$. **25.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln|x|+C$.

26. $\mathrm{arctg}\,x+C$. **27.** $C-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|$. **28.** $C-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

29. $\arcsin x+C$. **30.** $\arcsin x+C$, якщо $|x|<1$, $x\neq 0$; $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$, якщо $|x|>1$. **31.** $x+2\ln|x-2|+C$. **32.** $\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$.

§ 9.2. МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

Введення нової змінної, що називається *заміною змінної* або *підстановкою*, дає змогу в деяких випадках звести інтеграл, який не обчислюється безпосередньо, до табличного інтеграла.

Теорема (*про заміну змінної*)

Нехай функція $x=\varphi(t)$ неперервно диференційовна на деякому проміжку T (скінченному або нескінченному), а функція $f(x)$ – на проміжку X. Якщо на проміжку X функція $f(x)$ має первісну, то на проміжку T справедливою є формула

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (9.2.1)$$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі іноді виконується за формулою (9.2.1), прочитаної справа наліво:

$$\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}=\int f(x)\,dx, \qquad (9.2.2)$$

де функція $\varphi(x)$ строго монотонна.

I. Якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то справедливими є наступні рівності, що являють собою *найпростіші* випадки заміни змінної:

$\int f(kx)\,dx=\frac{1}{k}F(kx)+C$, мається на увазі заміна: $kx=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{k}$;

$\int f(x+b)\,dx=F(x+b)+C$, мається на увазі заміна: $x+b=t \Rightarrow dx=dt$;

$\int f(kx+b)\,dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$, мається на увазі заміна: $kx+b=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{k}$.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \cos 5x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x+4}$;

в) $\int \sin(3x+4)\,dx$; г) $\int \sqrt[3]{1-7x}\,dx$.

Розв'язання. Всі інтеграли належать указаному типу **I**. Тому їх первісні можуть бути записані безпосередньо. Вкажемо, однак, для кожного випадку відповідну заміну змінної:

а) $\int \cos 5x\,dx=\left[\begin{array}{l}5x=t\\ dx=\frac{dt}{5}\end{array}\Rightarrow \frac{1}{5}\int\cos t\,dt\right]=\frac{1}{5}\sin 5x+C$;

б) $\int \frac{dx}{x+4}=\left[\begin{array}{l}x+4=t\\ dx=dt\end{array}\Rightarrow \int\frac{dt}{t}\right]=\ln|x+4|+C$;

в) $\int \sin(3x+4)\,dx = \left[\begin{array}{l} 3x+4=t \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{array} \Rightarrow \dfrac{1}{3}\int \sin t\,dt\right] = -\dfrac{1}{3}\cos(3x+4)+C$;

г) $\int \sqrt[3]{1-7x}\,dx = \int (1-7x)^{1/3}dx = \left[\begin{array}{l} 1-7x=t \\ dx = -\dfrac{dt}{7} \end{array} \Rightarrow -\dfrac{1}{7}\int t^{1/3}dt\right] = C - \dfrac{3}{28}\sqrt[3]{(1-7x)^4}$.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int e^{-2u}\,du$;   б) $\int 10^{3-4x}\,dx$;

в) $\int \mathrm{tg}\dfrac{x}{3}\,dx$;   г) $\int \dfrac{dt}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

Розв'язання. Задані інтеграли також обчислюються за допомогою найпростішої заміни змінної **I**. Не виконуючи фактичної заміни змінної, а лише маючи на увазі її в кожному окремому випадку, знайдемо:

а) $\int e^{-2u}\,du = -\dfrac{1}{2}e^{-2u}+C$;

б) $\int 10^{3-4x}dx = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{10^{3-4x}}{\ln 10}+C$;

в) $\int \mathrm{tg}\dfrac{x}{3}\,dx = -3\ln\left|\cos\dfrac{x}{3}\right|+C$;

г) $\int \dfrac{dt}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)} = -2\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)+C$.

Рекомендуємо перевірити правильність знайдених результатів диференціюванням.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int (1-2x)^3\,dx$.

Розв'язання. Перший спосіб. Інтеграл належить типу **I**, тому можна відразу записати результат:

$$\int (1-2x)^3\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^4}{4}+C = C-\frac{1}{8}(1-2x)^4.$$

Другий спосіб. Зведемо двочлен $1-2x$ до куба і проінтегруємо отриманий многочлен:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int\left(1-3\cdot 2x+3\cdot 4x^2-8x^3\right)dx = x-3x^2+4x^3-2x^4+C.$$

Легко переконатися, що первісні відрізняються лише сталою. Дійсно,

$$-\frac{1}{8}(1-2x)^4+C = -\frac{1}{8}\left(1-8x+24x^2-32x^3+16x^4\right)+C = x-3x^2+4x^3-2x^4+C_1,$$

де позначено $-\dfrac{1}{8}+C=C_1$.

Аналогічно можна знайти будь-який інтеграл виду $\int (kx+b)^n\,dx$. Зауважимо, що перший спосіб при $n\ge 3$ є найпростішим.

II. Інтеграли виду:

(1) $\int f^n(x)\,f'(x)\,dx$,   **(2)** $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$,   **(3)** $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ і т.п.,

характеризуються наявністю в підінтегральному виразі *і функції* $f(x)$, *і її диференціала* $d\,f(x)=f'(x)\,dx$. Ефективним прийомом обчислення таких інтегралів є *внесення функції під знак диференціала.*

(1) Спираючись на теорему *про інваріантність формул інтегрування*, вносимо функцію $f(x)$ під знак диференціала і сприймаємо її як незалежну змінну (що рівносильно заміні $f(x)=t$):

$$\int f^n(x)\,f'(x)\,dx = \int f^n(x)\,df(x) = \left[\int t^n du = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C\right] = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C.$$

Наприклад,

$$\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx = \int \sin^5 x\,(\sin x)'\,dx = \int \sin^5 x\,d(\sin x) = \left[\int t^5 dt\right] = \frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

(2) Застосовуючи аналогічний прийом, запишемо

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int\frac{df(x)}{f(x)} = \left[\int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C\right] = \ln|f(x)|+C.$$

Наприклад,

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \int\frac{(e^x+4)'}{e^x+4}dx = \int\frac{d(e^x+4)}{e^x+4} = \left[\int\frac{dt}{t}\right] = \ln(e^x+4)+C.$$

Тут аргумент логарифма додатний, тому знак модуля опущений.

(3) Подібно до попереднього, маємо:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int\frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C\right] = 2\sqrt{f(x)}+C.$$

Наприклад,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\frac{(\ln x)'}{\sqrt{\ln x}}\,dx = \int\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \left[\int\frac{dt}{\sqrt{t}}\right] = 2\sqrt{\ln x}+C.$$

Приклад 4. Вивести формули:

а) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$;   б) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

Розв'язання. а) Представимо заданий інтеграл у вигляді

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Враховуючи, що $(\sin x)' = \cos x$, тобто $d(\sin x) = \cos x\, dx$, внесемо функцію $\sin x = t$ *під знак диференціала*. При цьому вже функція $\sin x$ виконує роль незалежної змінної, а інтеграл щодо цієї функції стає табличним:

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \left[\int \frac{dt}{t}\right] = \ln|\sin x| + C.$$

б) Передусім виконаємо тригонометричні перетворення:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Оскільки $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, тобто $d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, то внесемо функцію $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ *під знак диференціала*, зводячи у такий спосіб інтеграл до табличного

$$\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left[\int \frac{dt}{t}\right] = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x(1-x)^{10}\, dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція визначена на всій числовій осі. Виконаємо заміну змінної: $x = 1 - t$. Функція $x = 1 - t$ монотонна і має неперервну похідну $x'_t = -1$, отже, $dx = -dt$. У результаті заміни заданий інтеграл перетвориться до вигляду:

$$\int x(1-x)^{10}\, dx = -\int (1-t)\, t^{10} dt = -\int t^{10} dt + \int t^{11} dt = \frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} + C.$$

На закінчення слід повернутися до змінної x, підставивши замість змінної t вираз $(1-x)$:

$$\int x(1-x)^{10}\, dx = \frac{(1-x)^{12}}{12} - \frac{(1-x)^{11}}{11} + C.$$

Зауважимо, що введена нами змінна t, виконавши свою задачу, у кінцевому результаті відсутня.

Приклад 6. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;   б) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$;

в) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$,   де $x \in [-a; a]$, $a > 0$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція визначена для всіх $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Виконаємо заміну змінної: $x = 1/t$. Ця функція монотонна і має неперервну похідну $x'_t = -\frac{1}{t^2}$ при $t \in (-1;0) \cup (0;1)$, отже, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Припустивши для визначеності, що $x > 1$, запишемо процедуру інтегрування:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\, dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}} = \int \frac{-dt}{t\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = C - \arcsin t.$$

У результаті оберненої заміни $t = 1/x$ маємо:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = C - \arcsin\frac{1}{x}, \qquad x > 1.$$

б) Підінтегральна функція визначена на інтервалі $(0;\infty)$. Щоб позбутися ірраціональності, виконаємо підстановку: $x = t^2$, $t > 0$. Функція $x(t)$ монотонна і має неперервну похідну $x'_t = 2t$ в області визначення функції, $dx = 2t\, dt$. Підставляючи в заданий інтеграл замість x і dx їхні вирази, перейдемо до нової змінної:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Знайдену первісну виразимо через вихідну змінну x, виконуючи обернену заміну $t = \sqrt{x}$ $(x > 0)$:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

в) Виконаємо підстановку $x = a\sin t$, $t \in [-\pi/2; \pi/2]$. Ця функція монотонна і має неперервну похідну $x'_t = a\cos t$. При зміні змінної t від $-\pi/2$ до $\pi/2$ змінна x змінюється від $-a$ до a.

Знайдемо диференціал $dx = a\cos t\, dt$ і перейдемо в заданому інтегралі до нової змінної

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt.$$

Тут враховано, що арифметичне значення кореня $\sqrt{a^2 - x^2}$ дорівнює $a\cos t$, оскільки $\cos t \geq 0$ для всіх $t \in [-\pi/2;\ \pi/2]$.

Тригонометрична формула зниження степеня $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ дає змогу звести отриманий інтеграл до двох табличних:

$$a^2\int\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Тепер слід повернутися до вихідної змінної x. З рівності $x = a\sin t$ маємо $\sin t = \dfrac{x}{a}$, звідки $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ і

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Остаточно знаходимо:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Зауваження 1. У наступних прикладах ми не будемо настільки докладно зупинятися на обґрунтуванні законності тієї або іншої підстановки, надаючи це читачеві.

Зауваження 2. Якщо підінтегральна функція являє собою добуток двох множників, один із яких залежить від деякої функції $\psi(x)$, а інший є похідною від цієї функції (з точністю до сталого множника), то доцільно виконати заміну змінної за формулою $\psi(x) = t$ (формула (9.2.2) у вступній частині параграфа).

Приклад 7. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$;   б) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(5\ln x+1)}$.

*Розв'язання*. **а)** Перепишемо заданий інтеграл у вигляді

$$\int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}.$$

Похідна функції $\operatorname{arctg} x$ дорівнює $\dfrac{1}{1+x^2}$, тому введемо нову змінну:

$$\operatorname{arctg} x = t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{1+x^2} = dt.$$

У результаті інтеграл зводиться до табличного:

$$\int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \int\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C.$$

Повертаючись до змінної x, маємо:

$$\int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$$

Процедура *внесення під знак диференціала* дає змогу записати розв'язання заданого приклада, відповідно до **II(1)**, у такий спосіб:

$$\int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \int\sqrt{\operatorname{arctg} x}\,d(\operatorname{arctg} x) = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$$

б) Множник $\dfrac{1}{x}$ є похідною функції $\ln x$. Отже, можна зробити заміну змінної:

$$\ln x = t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x} = dt.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{x(5\ln x+1)} = \int\frac{1}{(5\ln x+1)}\cdot\frac{dx}{x} = \int\frac{dt}{5t+1}.$$

Користуючись формулою $\int f(kx+b)\,dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$, отримаємо

$$\int\frac{dt}{5t+1} = \frac{1}{5}\ln|5t+1| + C = \frac{1}{5}\ln|5\ln x+1| + C.$$

Інтеграл обчислюється ще простіше, якщо за нову змінну прийняти функцію $5\ln x + 1 = u$. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$du = 5\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{5}.$$

Переходячи до нової змінної, знаходимо:

$$\int\frac{dx}{x(5\ln x+1)} = \int\frac{1}{5\ln x+1}\cdot\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|5\ln x+1| + C.$$

Зауваження 3. Звідси, зокрема, випливає, що метод заміни змінної допускає різні варіанти заміни.

Вдалий вибір нової змінної спочатку викликає певні утруднення. Для їх подолання необхідно, по-перше, добре володіти технікою диференціювання, по-друге, твердо знати табличні інтеграли. Згодом з'явиться вміння аналізувати і ясніше уявляти, що дає та або інша підстановка.

Приклад 8. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$;   б) $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}}$.

*Розв'язання*. **а)** Оскільки $\cos x\,dx = d(\sin x)$, то інтеграл можна записати у вигляді

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}.$$

звідки легко вгадується заміна: $\sin x = t$. Тоді

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = C - \frac{1}{\sin x}.$$

б) Тут зручно зробити заміну:

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad -\sin x\, dx = dt.$$

У результаті:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = C - \arcsin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right).$$

Приклад 9. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}$; **б)** $\displaystyle\int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Розв'язання. Тут і надалі без зайвих слів заміну змінної в розрахунковій частині інтеграла оформлятимемо у такий спосіб:

$$\text{а)} \int \frac{x^2 dx}{1-x^3} = \left| \begin{array}{l} 1-x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = -dt/3 \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = C - \frac{1}{3}\ln\left|1-x^3\right|;$$

$$\text{б)} \int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int 10^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right| = 2\int 10^t dt = 2\frac{10^t}{\ln 10} + C = 2\cdot\frac{10^{\sqrt{x}}}{\ln 10} + C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; **б)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}$; **г)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

Розв'язання. Виконуючи перетворення підінтегральних виразів, зведемо інтеграл **а)** до табличного інтеграла 17 відносно функції e^x, інтеграл **б)** до табличного інтеграла 19 відносно функції e^{-x}:

$$\text{а)} \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \operatorname{arctg} e^x + C.$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}\left(e^{-2x}+1\right)}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}} = \left| \begin{array}{l} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x}dx \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C = C - \ln\left|e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right|.$$

Інтеграли **в)** і **г)** зводяться до одного і того самого табличного інтеграла 2 відносно функцій $\ln(\ln x)$ і $1+\sin^2 x$:

$$\text{в)} \int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{1}{\ln|\ln x|} \cdot \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(\ln x) \\ dt = \dfrac{dx}{x\ln x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|\ln|\ln x|\right| + C.$$

$$\text{г)} \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+\sin^2 x \\ dt = 2\sin x\cos x dx = \sin 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|1+\sin^2 x\right| + C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{4+x^6}\, dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\, dx$.

Розв'язання. **а)** Легко помітити, що x^2 є похідною від функції x^3 з точністю до коефіцієнта. Це спонукає записати x^6 у вигляді $(x^3)^2$. Тоді

$$\int \frac{5x^2}{4+x^6}\, dx = 5\int \frac{x^2 dx}{4+\left(x^3\right)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{3x^2 dx}{4+\left(x^3\right)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{4+\left(x^3\right)^2} = \left| \begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{5}{3}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C.$$

б) Якщо чисельник дробу почленно поділити на знаменник, то заданий інтеграл зводиться до алгебраїчної суми інтегралів:

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\, dx = 3\int \frac{dx}{5x^2+7} - 2\int \frac{x dx}{5x^2+7},$$

перший з яких обчислюється безпосередньо,

$$\int \frac{dx}{5x^2+7} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+\dfrac{7}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} + C,$$

а другий береться заміною змінної:

$$\int\frac{xdx}{5x^2+7}=\left|\begin{array}{l}t=5x^2+7\\ dt=10xdx\end{array}\right|=\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{10}\ln|t|+C=\frac{1}{10}\ln\left(5x^2+7\right)+C.$$

Таким чином,

$$\int\frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx=3\int\frac{dx}{5x^2+7}-2\int\frac{xdx}{5x^2+7}=\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}-\frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right)+C.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Якою є мета *методу заміни змінної*?
2. У чому полягає метод заміни змінної (метод підстановки)?
3. Чому при виконанні заміни змінної $x=\varphi(t)$ функція $\varphi(t)$ повинна бути *монотонною*?
4. У чому полягає прийом "*внесення під знак диференціала*"?
5. Невизначений інтеграл $I=\int\sin x\cdot\cos x\,dx$ можна обчислити трьома способами:

   а) за допомогою підстановки $x=\sin t$ дістанемо $I=\dfrac{\sin^2 x}{2}+C$;

   б) за допомогою підстановки $x=\cos t$ отримаємо $I=-\dfrac{\cos^2 x}{2}+C$;

   в) за допомогою перетворення $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ маємо $I=-\dfrac{\cos 2x}{4}+C$.

   Показати, що всі ці результати відрізняються лише видом довільної сталої.
6. Вказати *найраціональніший* спосіб знаходження інтегралів:

   а) $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,dx$; б) $\displaystyle\int f'(x)\cdot f''(x)\,dx$.
7. Чи є різниця між виразами $d\int f(x)\,dx$ і $\int dF(x)$? Якщо так, то в чому вона полягає?
8. На якій *властивості диференціала* ґрунтується метод заміни змінної?
9. При яких значеннях m і n інтеграли $\displaystyle\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ і $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^n}}$ знаходяться безпосередньо?
10. Довести, якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$ $(a\neq 0)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\displaystyle\int\sin\frac{x}{2}\,dx$;
2. $\displaystyle\int 7^{-\frac{x}{3}}\,dx$;
3. $\displaystyle\int e^{2-5x}\,dx$;
4. $\displaystyle\int\frac{dx}{4x+3}$;
5. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}$;
7. $\displaystyle\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx$;
8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;
9. $\displaystyle\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$;
10. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[4]{\operatorname{ctg}x}}$;
11. $\displaystyle\int\frac{(\operatorname{arctg}x)^4}{1+x^2}\,dx$;
12. $\displaystyle\int\frac{\sin(\operatorname{tg}x)}{\cos^2 x}\,dx$;
13. $\displaystyle\int e^x\operatorname{tg}e^x\,dx$;
14. $\displaystyle\int\sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x\,dx$;
15. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x}$;
16. $\displaystyle\int e^{-x^2}x\,dx$;
17. $\displaystyle\int 3x\cos\left(1-6x^2\right)dx$;
18. $\displaystyle\int x\sin\left(4-x^2\right)dx$;
19. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$;
20. $\displaystyle\int\operatorname{tg}4x\,dx$;
21. $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$;
22. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2+1\right)}$;
23. $\displaystyle\int\frac{2^x}{\sqrt{4^x-1}}\,dx$;
24. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$;
25. $\displaystyle\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;
26. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{a-x^2}\,dx$,

    Заміна: $\sqrt{a-x^2}=t$;
27. $\displaystyle\int\frac{5x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}}$;
28. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}\,dx$;
29. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;
30. $\displaystyle\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$;

31. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$;

32. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\,dx$,

Заміна: $x-2=t$;

33. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$,

Заміна: $\sqrt{2x-9}=t$;

34. $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,dx$;

35. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$;

36. $\int \frac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}$;

37. $\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,2x\,dx$;

38. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x}$.

ВІДПОВІДІ

1. $C-2\cos\frac{x}{2}$. **2.** $C-3\frac{7^{-\frac{x}{3}}}{\ln 7}$. **3.** $C-\frac{1}{5}e^{2-5x}$. **4.** $\frac{1}{4}\ln|4x+3|+C$.

5. $\frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\mathrm{arcin}\,x}+C$. **6.** $\ln|\mathrm{arctg}\,x|+C$. **7.** $e^{\mathrm{tg}\,x}+C$. **8.** $C-\mathrm{ctg}(\ln x)$.

9. $\cos\frac{1}{x}+C$. **10.** $C-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\mathrm{ctg}^3 x}$. **11.** $\frac{(\mathrm{arctg}\,x)^5}{5}+C$. **12.** $C-\cos(\mathrm{tg}\,x)$.

13. $C-\ln|\cos e^x|$. **14.** $\frac{3}{10}\sin 2x\sqrt[3]{\sin^2 2x}+C$. **15.** $C-\frac{1}{4\arcsin^2 2x}$.

16. $C-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **17.** $C-\frac{1}{4}\sin(1-6x^2)$. **18.** $\frac{1}{2}\cos(4-x^2)+C$. **19.** $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

20. $C-\frac{1}{4}\ln|\cos 4x|$. **21.** $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C$. **22.** $\frac{1}{2}\mathrm{tg}(x^2+1)+C$.

23. $\frac{1}{\ln 2}\ln\left(2^x+\sqrt{4^x-1}\right)+C$. **24.** $C-\sqrt{1-e^{2x}}$. **25.** $C-2\cos\sqrt{x}$.

26. $C-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(a-x^2)^4}$. **27.** $\frac{5}{4}\ln\left(x^4+\sqrt{x^8+1}\right)+C$. **28.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-4}\right|+C$.

29. $\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$. **30.** $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}-6\sqrt{\ln x}+C$. **31.** $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$.

32. $\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+C$. **33.** $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$.

34. $\frac{1}{4(\cos x+\sin x)^4}+C$. **35.** $\arcsin\frac{e^x}{4}+C$. **36.** $\frac{1}{\ln 3}\mathrm{arctg}\,3^x+C$. **37.** $\frac{2}{3}\mathrm{sh}^3 x+C$.

38. $C-(\mathrm{th}\,x+\mathrm{cth}\,x)$.

§ 9.3. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

І. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні на деякому проміжку функції, то має місце *формула інтегрування частинами*

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du, \tag{9.3.1}$$

яка дає змогу обчислення інтеграла $\int u\,dv$ звести до обчислення інтеграла $\int v\,du$.

Суть методу полягає в тому, щоб інтегрування *непростого* диференціального виразу $u\,dv$ замінити інтегруванням *простіших* диференціальних виразів dv і $v\,du$.

Щоб скористатися цим методом, необхідно в заданому підінтегральному виразі виділити два множники, приймаючи один з них за u, а другий – за dv. При цьому слід виходити з того, що частина u надалі диференціюється, а частина dv – інтегрується.

ІІ. Не існує загальних правил, що вказують, який саме співмножник підінтегрального виразу слід приймати за u, а який за dv.

Основні класи інтегралів, до яких можна застосувати метод інтегрування частинами і рекомендовані прийоми вибору частин:

а) $\int P_n(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$,

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня від x, $\alpha\neq 0$ – дійсне число.

За множник $u(x)$ приймають *многочлен* $P_n(x)$, степінь якого при диференціюванні понижується.

б) $\int R(x)\ln\alpha x\,dx$, $\int R(x)\arcsin\alpha x\,dx$, $\int R(x)\arccos\alpha x\,dx$, $\int R(x)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx$,

де $R(x)$ – алгебраїчна функція, $\alpha\neq 0$.

За множник $u(x)$ приймають *трансцендентну функцію* ($\ln\alpha x$, $\arcsin\alpha x$ і т.п.).

в) $\int \ln x\,dx$, $\int \arcsin x\,dx$, $\int \arccos x\,dx$, $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int \mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

За $u(x)$ приймають *підінтегральну функцію*, поклавши $dv=dx$.

Метод інтегрування частинами можна застосовувати стільки разів, скільки необхідно для знаходження первісної.

ІІІ. При обчисленні так званих *циклічних* інтегралів

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx,\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx,\quad \text{де}\quad \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0;$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx,\quad \int \cos(\ln x)\,dx$$

байдуже, який саме співмножник приймати за u, а який за dv. Після дворазового інтегрування частинами (на другий раз частини вибирають так само, як і на перший) отримують лінійне рівняння відносно заданого інтеграла, з якого й знаходять шукану первісну.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int x\sin x\,dx$; **б)** $\int (3x-1)\cos 2x\,dx$.

Розв'язання. **а)** Представимо підінтегральний вираз у вигляді добутку множників x і $\sin x\,dx$. Нехай $u=x$ і $dv=\sin x\,dx$. Продиференціюємо частину $u(x)$ і проінтегруємо частину dv:

$$du = dx, \qquad v = \int \sin x\, dx = -\cos x,$$

(тут прийнято, що стала інтегрування $C = 0$).

Підставляючи у формулу інтегрування частинами, одержимо:

$$\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\sin x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u} \cdot \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \overbrace{dx}^{du} = -x\cdot\cos x + \sin x + C.$$

б) Вибравши частини $u = 3x-1$ і $dv = \cos 2x\, dx$, знайдемо:

$$du = 3dx, \qquad v = \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

За формулою інтегрування частинами отримаємо:

$$\int \overbrace{(3x-1)}^{u} \overbrace{\cos 2x\, dx}^{dv} = \overbrace{(3x-1)}^{u} \cdot \overbrace{\frac{\sin 2x}{2}}^{v} - \int \overbrace{\frac{\sin 2x}{2}}^{v} \cdot \overbrace{3dx}^{du} = \frac{(3x-1)}{2}\cdot \sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C.$$

За $v(x)$ можна було взяти будь-яку функцію вигляду $\frac{1}{2}\sin 2x + C$, де C – довільна стала. Поклавши $v = \frac{1}{2}\sin 2x$, ми прийняли, як і в прикладі 1, $C = 0$. Покажемо, що врахування довільної сталої $C \neq 0$ не впливає на кінцевий результат:

$$\int (3x-1)\cos 2x\, dx = \left| \begin{matrix} u = 3x-1, & dv = \cos 2x dx, \\ du = 3dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x + C \end{matrix} \right| = (3x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right) -$$

$$-3\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)dx = (3x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right) - 3\left(-\frac{1}{4}\cos 2x + Cx\right) + C_1 =$$

$$= \frac{(3x-1)}{2}\sin 2x + 3xC - C + \frac{3}{4}\cos 2x - 3Cx + C_1 = \frac{(3x-1)}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C_1 - C.$$

Очевидно, що замість різниці $C_1 - C$ можна ввести сталу $C_2 = C_1 - C$, звідки й випливає, що в кінцевий результат входить лише одна довільна стала.

Тому при знаходженні функції $v(x)$ у розрахунковій частині методу інтегрування частинами сталу інтегрування можна не враховувати.

Зауваження 1. При оформленні розв'язання методом інтегрування частинами допоміжні записи прийнято виділяти вертикальними прямими.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

а) $\int x 3^x dx$; **б)** $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. **а)** Дотримуючись рекомендацій пункту **II** (а), візьмемо за $u(x)$ степеневу функцію, поклавши $u = x$ і $dv = 3^x dx$:

$$\int x 3^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = 3^x dx, \\ du = dx, & v = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = x\cdot\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx =$$

$$= x\cdot\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C = \frac{3^x}{\ln 3}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\right) + C.$$

б) Тут, відповідно до пункту **II** (б), за множник $u(x)$ слід взяти логарифмічну функцію, тобто покласти $u = \ln x$ і $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \\ du = \frac{dx}{x}, & v = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\ln x - \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = 2\left(\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right) + C = 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int x\, \mathrm{tg}^2 x\, dx$; **б)** $\int \frac{x \,\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Розв'язання. **а)** Безпосереднє застосування формули інтегрування частинами дає:

$$\int x\,\mathrm{tg}^2 x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = \mathrm{tg}^2 x dx, \\ du = dx, & v = \int \mathrm{tg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}\, x - x \end{matrix} \right| =$$

$$= x(\mathrm{tg}\, x - x) - \int(\mathrm{tg}\, x - x)\, dx = x(\mathrm{tg}\, x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= x\,\mathrm{tg} x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

б) Розіб'ємо підінтегральний вираз на множники і застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}x, & dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,\\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\sqrt{1+x^2}\end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

Зауваження 2. Часто доводиться комбінувати різні методи інтегрування. І лише досвід покаже, що краще: спочатку зробити заміну змінної, а потім інтегрувати частинами або навпаки.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int x^3e^{-x^2}dx$; **б)** $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. **а)** *Перший спосіб.* Насамперед доцільно зробити заміну змінної, поклавши $-x^2=t$. Тоді $-2x\,dx=dt$ і

$$\int x^3e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int te^t dt.$$

Тепер застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int te^t dt=\left|\begin{array}{ll} u=t, & dv=e^t dt,\\ du=dt, & v=e^t\end{array}\right|=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+C.$$

Виконуючи обернену заміну $t=-x^2$, знайдемо:

$$\int x^3e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(1+x^2\right)+C.$$

Другий спосіб. Втім, можна інтегрувати частинами відразу:

$$\int x^3e^{-x^2}dx=\left|\begin{array}{ll} u=-\dfrac{x^2}{2}, & dv=-2e^{-x^2}xdx,\\ du=-xdx, & v=-2\displaystyle\int e^{-x^2}xdx=\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=e^{-x^2}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x^2}+\int e^{-x^2}xdx=-\frac{x^2}{2}\cdot e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(1+x^2\right)+C.$$

б) *Перший спосіб.* Перш ніж застосувати метод інтегрування частинами, виконаємо заміну змінної: $\sqrt{x}=t$, звідки $x=t^2$, $dx=2tdt$. Тоді

$$\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ dx=2tdt\end{array}\right|=2\int t\operatorname{arctg}t\,dt=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}t, & dv=t\,dt,\\ du=\dfrac{dt}{1+t^2}, & v=\displaystyle\int t\,dt=\frac{t^2}{2}\end{array}\right|=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{1+t^2}\right)=t^2\operatorname{arctg}t-\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=t^2\operatorname{arctg}t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=t^2\operatorname{arctg}t-t+\operatorname{arctg}t+C=\left(x+1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

Другий спосіб. Якщо спочатку проінтегрувати частинами,

$$\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}\sqrt{x}, & dv=dx,\\ du=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, & v=x\end{array}\right|=x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

то інтеграл $\int vdu$ доведеться брати за допомогою заміни змінної:

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=2\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=2\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}dt=$$

$$=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=2\left(t-\operatorname{arctg}t\right)+C=2\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+C.$$

Отже,

$$\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx=x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C=\left(x+1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

Зауваження 3. Майстерність застосування формули інтегрування частинами полягає в тому, щоб вдало розбити підінтегральний вираз на два множники u і dv, що, зрозуміло, вимагає певних навичок і досвіду.

Невдалий вибір функції $u(x)$ призводить до *складнішого* інтеграла $\int vdu$, ніж заданий $\int udv$. У такому разі треба або прийняти за $u(x)$ іншу функцію, або застосувати інший метод інтегрування.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. Незважаючи на те, що підінтегральна функція являє собою добуток степеневої і тригонометричної функцій, метод інтегрування тут не застосовується. Дійсно, якщо вибрати частини як у прикладі 1а), тобто покласти $u=x$, $dv=\sin\left(1-x^2\right)dx$, то $du=dx$ і $v=\int\sin\left(1-x^2\right)dx$. Але останній інтеграл не береться в елементарних функціях!

Спробуємо навпаки: $u=\sin\left(1-x^2\right)$, $dv=x\,dx$, тоді $du=-2x\cos\left(1-x^2\right)$ і $v=\frac{x^2}{2}$. За формулою (9.3.1) отримуємо:

$$\int x\sin\left(1-x^2\right)dx=\frac{x^2}{2}\sin\left(1-x^2\right)+\int x^3\cos\left(1-x^2\right)dx.$$

Прийшли до інтеграла $\int v\,du$, який складніший, ніж вихідний, оскільки степінь многочлена зросла.

Вся справа в тому, що для обчислення цього інтеграла зовсім не потрібен метод інтегрування частинами. Заміна змінної

$$1-x^2=t \quad\Rightarrow\quad -2x\,dx=dt,$$

відразу приводить до табличного інтеграла:

$$\int x\sin\left(1-x^2\right)dx=-\frac{1}{2}\int\sin t\,dt=\frac{1}{2}\cos t+C=\frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right)+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. Тут, дотримуючись пункту **II** (в), беремо за $u(x)$ підінтегральну функцію: $u=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$, залишається $dv=dx$. Знаходимо

$$du=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx, \qquad v=x.$$

Підставляючи у формулу інтегрування частинами, одержуємо

$$\int\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=x\cdot\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=$$

$$=x\cdot\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(a^2+x^2\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}=x\cdot\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)-\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int x^2\arccos x\,dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. Нехай $u=\arccos x$, $dv=x^2dx$. Тоді

$$du=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad v=\frac{x^3}{3}.$$

Формула (9.3.1) дає:

$$\int x^2\arccos x\,dx=\frac{x^3}{3}\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad (*)$$

До останнього інтеграла можна знову застосувати формулу інтегрування частинами, розбивши підінтегральний вираз на множники:

$$u=x^2, \qquad dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Однак найпростіше обчислити цей інтеграл за допомогою заміни змінної:

$$\sqrt{1-x^2}=t \quad\Rightarrow\quad 1-x^2=t^2 \quad\Rightarrow\quad -2x\,dx=2t\,dt.$$

Тоді

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{\left(1-t^2\right)t\,dt}{t}=-\int\left(1-t^2\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}-\sqrt{1-x^2}+C=\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\frac{1-x^2}{3}-1\right)+C=-\frac{x^2+2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}+C.$$

Підставляючи цей результат у рівність (*), остаточно маємо:

$$\int x^2\arccos x\,dx=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}+C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\cos\frac{x}{3}\,dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. Покладемо $u=\frac{1}{2}x^2-x+6$ (при диференціюванні цей множник спроститься), тоді $dv=\cos\frac{x}{3}\,dx$. Звідси

$$du=(x-1)\,dx, \qquad v=\int\cos\frac{x}{3}\,dx=3\sin\frac{x}{3}$$

і за формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int\left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\cos\frac{x}{3}\,dx=3\left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\cdot\sin\frac{x}{3}-3\int(x-1)\sin\frac{x}{3}\,dx. \qquad (*)$$

Щоб обчислити останній інтеграл, знову застосуємо метод інтегрування частинами, поклавши $u=x-1$, $dv=\sin\frac{x}{3}\,dx$. Тепер

$$du=dx, \qquad v=\int\sin\frac{x}{3}\,dx=-3\cos\frac{x}{3}.$$

Отже,

$$\int (x-1)\sin\frac{x}{3}dx = -3(x-1)\cos\frac{x}{3} + 3\int \cos\frac{x}{3}dx = -3(x-1)\cos\frac{x}{3} + 9\sin\frac{x}{3} + C.$$

Підставимо цей результат у рівність (*):

$$\int\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 6\right)\cos\frac{x}{3}dx = 3\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 6\right)\sin\frac{x}{3} + 9(x-1)\cos\frac{x}{3} - 27\sin\frac{x}{3} + C.$$

Зауваження 4. Якщо для обчислення певного інтеграла формула інтегрування частинами застосовується двічі, то важливо простежити, щоб при її повторному застосуванні не були пророблені у оберненому порядку ті викладки, які вже виконані на першому кроці, що призвело б до тотожності.

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int(\arcsin x)^2 dx$.

Розв'язання. Поклавши $u = (\arcsin x)^2$ і $dv = dx$, матимемо:

$$du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad v = x.$$

За формулою інтегрування частинами

$$\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\, dx. \qquad (*)$$

Останній інтеграл знову беремо частинами:

$$-\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x, & dv = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = \displaystyle\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Підставляючи отриманий результат у рівність (*), знайдемо шуканий інтеграл:

$$\int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Зауваження 5. Метод повторного інтегрування частинами дає змогу легко знаходити так звані *циклічні інтеграли*. Особливістю цих інтегралів є те, що повторне інтегрування частинами приводить до певного проінтегрованого виразу і вихідного інтеграла. У результаті маємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

Розв'язання. Спочатку інтегруємо частинами, дотримуючись пункту **II** (в):

$$I = \int\sqrt{x^2+a}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2+a}, & dv = dx, \\ du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}, & v = x \end{array} \right| = x\cdot\sqrt{x^2+a} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Інтеграл $\int vdu$ простіший за вихідний. За допомогою простих перетворень він зводиться до алгебраїчної суми інтегралів – табличного і шуканого:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int\left(\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx =$$

$$= \int\sqrt{x^2+a}\,dx - a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = I - a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|.$$

У результаті маємо рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$2I = x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Звідси знаходимо:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C. \qquad (*)$$

Аналогічно обчислюється подібний інтеграл

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|a|}\right) + C, \qquad a \neq 0. \qquad (**)$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами (вибір частин ролі не відіграє):

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x}, & dv = \cos\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}dx, & v = \dfrac{\sin\beta x}{\beta} \end{array} \right| = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Отриманий інтеграл $\int vdu$ не простіший, але й не складніший за вихідний $\int udv$.

Ще раз скористаємося формулою інтегруванням частинами (тепер неодмінно слід вибирати частини так, як і в перший раз):

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x}, & dv = \sin\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}dx, & v = -\dfrac{\cos\beta x}{\beta} \end{array} \right| = -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

У результаті дворазового інтегрування частинами отримали лінійне рівняння відносно заданого інтеграла I:

$$I = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 I \quad \Rightarrow \quad I\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right).$$

Звідси знаходимо:

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\, e^{\alpha x}.$$

В окремому випадку $\alpha = 1$ і $\beta = 1$ маємо:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + C.$$

Зауваження 6. Метод інтегрування частинами має, можливо, вужчу область застосування, ніж метод інтегрування заміною змінної. Однак слід мати на увазі, що деякі типи інтегралів не можуть бути обчислені жодним іншим способом, крім як методом інтегрування частинами.

Приклад 12. Вивести рекурентну формулу для обчислення інтеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}, & dv = dx, \\ du = -\dfrac{2nx\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}, & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int\left[\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n} - \frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}\right]dx.$$

Запишемо отриманий вираз у вигляді:

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right),$$

звідки

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}I_n. \qquad (*)$$

Рекурентна формула (*) зводить обчислення інтеграла I_{n+1} до обчислення інтеграла I_n з меншим на одиницю індексом. Наприклад, знаючи табличний

інтеграл $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, за допомогою рекурентної формули можна обчислити інтеграл $I_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$, поклавши $n=1$ у формулі (*):

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}. \qquad (**)$$

Поклавши $n=2$ у формулі (*), одержимо

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{4a^2}I_2 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

Подібно до цього можна обчислити інтеграл I_n для будь-якого натурального n (попередньо обчисливши інтеграл I_{n-1}).

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію у такий спосіб:

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \int\frac{\left(x^2+4\right)-4}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \int\frac{dx}{x^2+4} - 4\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 4\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Для обчислення останнього інтеграла скористаємося результатом (**) прикладу 12, поклавши $a=2$:

$$\int\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 4\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) = \frac{-x}{2\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

У § 9.5 буде запропоновано інший спосіб знаходження подібних інтегралів.

Метод невизначених коефіцієнтів

Покажемо, як за допомогою *методу невизначених коефіцієнтів* можна знаходити інтеграли вигляду

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \qquad \int P_n(x)\sin\beta x dx, \qquad \int P_n(x)\cos\beta x dx,$$

не користуючись формулою інтегрування частинами.

Дійсно, нехай потрібно знайти інтеграл $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$. Очевидно, що первісна матиме вигляд $Q_n(x)e^{\alpha x}+C$, тобто

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = Q_n(x)e^{\alpha x}+C,$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того самого n-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Диференціюючи ліву і праву частини останньої рівності, отримаємо:

$$P_n(x)e^{\alpha x} = \left(Q_n(x)\right)' \cdot e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} \cdot Q_n(x) = e^{\alpha x}\left[\alpha Q_n(x) + Q_n'(x)\right].$$

Скорочуючи на спільний множник $e^{\alpha x} \neq 0$, приходимо до рівності двох многочленів $P_n(x) = \alpha Q_n(x) + Q_n'(x)$. Залишилося прирівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x в обох частинах рівності й із отриманої системи знайти коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$, визначивши у такий спосіб шукану первісну.

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int\left(8x^3 + x\right) e^{4x}\, dx$.

Розв'язання. Степені многочленів підінтегральної функції $P_n(x)$ і первісної $Q_n(x)$ повинні бути однакові, причому многочлен $Q_n(x)$ має бути повним, тобто містити всі степені x. Тому запишемо

$$\int\left(8x^3 + x\right) e^{4x} dx = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{4x} + C,$$

де A, B, C, D – невизначені коефіцієнти.

Диференціюючи тотожну рівність, отримаємо:

$$\left(8x^3 + x\right) e^{4x} = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) e^{4x} + 4\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) e^{4x},$$

$$8x^3 + x = 4Ax^3 + (4B + 3A)x^2 + (4C + 2B)x + 4D + C.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, приходимо до системи лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів A, B, C, D, з якої й визначаємо ці коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 8 = 4A \\ x^2 & 0 = 4B + 3A \\ x^1 & 1 = 4C + 2B \\ x^0 & 0 = 4D + C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = 2, \\ B = -3/2, \\ C = 1, \\ D = -1/4. \end{array}$$

Таким чином, не проводячи самої процедури інтегрування, знайшли:

$$\int\left(8x^3 + x\right) e^{4x} dx = \left(2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\right) e^{4x} + C.$$

Зауважимо, що інтегрувати частинами тут довелося б тричі!

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У яких випадках застосовують метод *інтегрування частинами*?
2. Довести, що $\int u dv = uv - \int v du$.
3. Що в методі інтегрування частинами зазвичай приймають за u і що за dv?

4. При інтегруванні яких диференціальних виразів доцільно використовувати метод інтегрування частинами?
5. Якщо в інтегралі $\int xe^{x^2} dx$ покласти $u = x$ і $dv = e^{x^2} dx$, то знайти первісну не має можливості. Чому?
6. Інтеграли яких типів не беруться інакше, крім як методом інтегрування частинами? Навести приклади.
7. Чому інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x} \sin\beta x\, dx$, $\int \sin(\ln x)\, dx$ і т.п. називаються *циклічними*?
8. Чи можна знайти інтеграли вигляду $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx$ або $\int P_n(x) \sin\beta x\, dx$, не вдаючись до методу інтегрування частинами? Якщо так, то як?
9. Знайти $\int \arcsin x\, dx + \int \arccos x\, dx$ і пояснити отриманий результат.
10. Вказати, які з наступних інтегралів доцільно інтегрувати частинами, а при обчисленні яких можна скористатися відповідною підстановкою:

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx, \quad \int \sqrt[7]{\sin^3 x} \cos x\, dx, \quad \int \cos x \ln(\sin x)\, dx, \quad \int x 5^x dx,$$

$$\int x^2 e^x dx, \quad \int x \cos^2 x\, dx, \quad \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int xe^x dx$;	2. $\int x \cos x\, dx$;
3. $\int \ln x\, dx$;	4. $\int x^3 \ln x\, dx$;
5. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$;	6. $\int \arcsin x\, dx$;
7. $\int x \cos^2 x\, dx$;	8. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$;
9. $\int \operatorname{arctg} 3x\, dx$;	10. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;
11. $\int \sin\sqrt{x}\, dx$;	12. $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$;
13. $\int\left(x^2 - 2x\right) e^{-x} dx$;	14. $\int\left(x^2 + 2x + 3\right) \cos x\, dx$;
15. $\int x^3 e^x dx$;	16. $\int x \ln^2 x\, dx$;
17. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$;	18. $\int x^5 e^{x^2} dx$;
19. $\int \cos(\ln x)\, dx$;	20. $\int e^{4x} \sin 3x\, dx$;

21*. $\int \sin x \operatorname{ch} x\,dx$;   22*. $\int x e^x \sin x\,dx$;

23*. $\int \frac{x e^x dx}{(1+x)^2}$;   24*. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

ВІДПОВІДІ

1. $e^x(x-1)+C$. **2.** $x\sin x+\cos x+C$. **3.** $x(\ln x-1)+C$.

4. $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+C$. **5.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$. **6.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

7. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **8.** $\frac{x^2+1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+C$.

9. $x\operatorname{arctg}3x-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$. **10.** $C-\frac{1+2\ln x}{4x^2}$.

11. $2(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x})+C$. **12.** $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C$.

13. $C-x^2e^{-x}$. **14.** $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$.

15. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **16.** $\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$.

17. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$. **18.** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$.

19. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$. **20.** $\frac{e^{4x}}{25}(4\sin 3x-3\cos 3x)+C$.

21*. $\frac{1}{2}(\sin x\operatorname{sh}x-\cos x\operatorname{ch}x)+C$. **22*.** $\frac{e^x}{2}[x\sin x+(1-x)\cos x]+C$.

23*. $\frac{e^x}{1+x}+C$. **24*.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$.

§ 9.4. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МАЮТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН У ЗНАМЕННИКУ

На практиці часто зустрічаються інтеграли вигляду:

1. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$,   2. $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,   3. $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$,   4. $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

При їх обчисленні слід дотримуватися такого алгоритму:

1) виділити в знаменнику повний квадрат двочлена;
2) зробити заміну змінної, приймаючи двочлен за нову змінну;
3) інтеграл представити у вигляді алгебраїчної суми інтегралів, якщо в цьому є необхідність;
4) визначити знайдені інтеграли і повернутися до вихідної змінної.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{x^2-2x-3}$;   б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+1/4}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграли вигляду 1 і 2. Дотримуючись наведеного алгоритму, перетворимо їх до табличних:

а) Виділимо в знаменнику повний квадрат різниці:

$$\int\frac{dx}{x^2-2x-3}=\int\frac{dx}{(x^2-2\cdot1\cdot x+1)-1-3}=\int\frac{dx}{(x-1)^2-4}.$$

Вираз у дужках приймемо за нову змінну. У результаті матимемо табличний інтеграл за змінною t:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2-4}=\left|\begin{array}{l}x-1=t\\dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$

б) Виділимо в знаменнику повний квадрат суми і приймемо її за нову змінну:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+\frac{1}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+\frac{1}{4}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-12}}=\left|\begin{array}{l}x+\frac{7}{2}=t\\dx=dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-12}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2-12}\right|+C=\ln\left|x+\frac{7}{2}+\sqrt{x^2+7x+\frac{1}{4}}\right|+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$.

Розв'язання. Дотримуємося вказаного алгоритму.

1. Виділимо повний квадрат суми в знаменнику підінтегральної функції:

$$\int \frac{6x+5}{x^2+2\cdot 2\cdot x+4-4+9}dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx.$$

2. Виконаємо заміну змінної, прийнявши виділений двочлен $x+2$ за нову змінну t:

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx = \left| \begin{matrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5}dt.$$

3. Представимо отриманий інтеграл у вигляді різниці двох інтегралів:

$$\int \frac{6t-7}{t^2+5}dt = \int \frac{6t}{t^2+5}dt - \int \frac{7dt}{t^2+5} = 3\int \frac{2t}{t^2+5}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+5}.$$

4. Другий з них є табличним, а для знаходження першого скористаємося формулою $\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)|+C$. У результаті матимемо:

$$3\int \frac{2t}{t^2+5}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+5} = 3\ln(t^2+5) - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C.$$

Тепер виконаємо обернену заміну змінної:

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx = 3\ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{2x^2+4x-7}$; **б)** $\int \frac{4x-8}{\sqrt{3x^2+x-3}}dx$.

Розв'язання. а) Винесемо коефіцієнт при x^2 за знак інтеграла, виділимо повний квадрат двочлена, приймемо двочлен за нову змінну і виконаємо інтегрування за новою змінною. Нарешті, в знайденій первісній виконаємо обернену заміну змінної:

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x-7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x-7/2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+2\cdot 1\cdot x+1-1-7/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2-9/2} = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2\cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}\cdot \ln\left| \frac{t-\frac{3}{\sqrt{2}}}{t+\frac{3}{\sqrt{2}}} \right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot \ln\left| \frac{\sqrt{2}t-3}{\sqrt{2}t+3} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot \ln\left| \frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}x+\sqrt{2}+3} \right| + C.$$

б) Спочатку винесемо коефіцієнт при x^2 з-під кореня і вже потім виділимо повний квадрат:

$$\int \frac{4x-8}{\sqrt{3x^2+x-3}}dx = \int \frac{4x-8}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-1}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{4x-8}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{1}{6}\cdot x+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}-1}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{4x-8}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{37}{36}}}dx.$$

Виконуючи заміну змінної, зведемо отриманий інтеграл до різниці двох інтегралів:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{4x-8}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{37}{36}}}dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{1}{6}=t \\ x=t-\frac{1}{6} \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{4\left(t-\frac{1}{6}\right)-8}{\sqrt{t^2-\frac{37}{36}}}dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2-\frac{37}{36}}} - \frac{26}{3\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{37}{36}}}.$$

Для знаходження першого з них скористаємося формулою

$$\int \frac{f'(t)}{\sqrt{f(t)}}dt = 2\sqrt{f(t)}+C.$$

Другий інтеграл – табличний. У результаті знаходимо:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2-\frac{37}{36}}} - \frac{26}{3\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{37}{36}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{t^2-\frac{37}{36}} - \frac{26}{3\sqrt{3}}\cdot \ln\left| t+\sqrt{t^2-\frac{37}{36}} \right| + C.$$

Залишилося виконати обернену заміну змінної:

$$\int \frac{4x-8}{\sqrt{3x^2+x-3}}dx = \frac{4}{3}\sqrt{3x^2+x-3} - \frac{26}{3\sqrt{3}}\ln\left| x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x-1} \right| + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{2x+3}{7-3x-x^2}dx$; б) $\int \frac{x+3}{\sqrt{2+4x-x^2}}dx$.

Розв'язання. а) Можна обчислити заданий інтеграл, використовуючи наведений вище алгоритм. Однак простіше зробити так: виділимо в чисельнику похідну знаменника і скористаємося формулою

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)| + C.$$

Оскільки $(7-3x-x^2)' = -2x-3$, то:

$$\int \frac{2x+3}{7-3x-x^2}dx = -\int \frac{-2x-3}{7-3x-x^2}dx = -\int \frac{d(7-3x-x^2)}{7-3x-x^2} = -\ln|7-3x-x^2| + C.$$

б) Тут коефіцієнт при x^2 у підкореневому виразі знаменника від'ємний. Для виділення повного квадрата виконаємо такі перетворення:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{2+4x-x^2}}dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{-(x^2-4x-2)}}dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{-(x^2-2\cdot 2x+4-4-2)}}dx =$$

$$= \int \frac{x+3}{\sqrt{-(x-2)^2+6}}dx = \int \frac{x+3}{\sqrt{6-(x-2)^2}}dx = \left| \begin{array}{c} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t+5}{\sqrt{6-t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{t\,dt}{\sqrt{6-t^2}} + 5\int \frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2t}{\sqrt{6-t^2}}dt + 5\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6-t^2} +$$

$$+5\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -\sqrt{6-t^2} + 5\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} = -\sqrt{2+4x-x^2} + 5\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} + C.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Який алгоритм обчислення інтегралів, що містять квадратний тричлен у знаменнику?
2. Проінтегрувавши функцію $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, отримали два доданки, перший із яких дорівнює $D\cdot\ln\left|x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right|$, де D – стала. Чому дорівнює другий доданок? Від чого залежить вигляд другого доданка?

3. У результаті інтегрування функції $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ одержали суму двох доданків, перший із яких дорівнює $D\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$, де D – стала. Чому дорівнює другий доданок? Від чого залежить вид другого доданка?
4. У якому випадку $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = D\cdot\ln|ax^2+bx+c|$, де $D = \text{Const}$?
5. У якому випадку $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = D\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}$, де $D = \text{Const}$?
6. Як знайти первісну інтеграла $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, якщо ax^2+bx+c є повним квадратом?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$;
2. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$;
3. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$;
4. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$;
5. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$;
6. $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}$;
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$;
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$;
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$;
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$;
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$;
13. $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$;
14. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$;
15. $\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx$;
16. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$;
17. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$;
18. $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$;
19. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$;
20. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$;

21. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$; 22. $\int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$;

23. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$; 24. $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$,

ВІДПОВІДІ

1. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{6}}+C$. **2.** $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **3.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+4}\right|+C$.

4. $\frac{2}{\sqrt{39}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{39}}+C$. **5.** $C-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{11}}$. **6.** $C-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+3}\right|$.

7. $\ln\left|x+\frac{5}{2}+\sqrt{x^2+5x+1}\right|+C$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x-\frac{2}{3}+\sqrt{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}}\right|+C$.

9. $\frac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{3}{4}}\right|+C$. **10.** $\arcsin\frac{x-1}{2}+C$. **11.** $\arcsin\frac{x-4}{\sqrt{20}}+C$.

12. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{3}+C$. **13.** $\frac{1}{4}\ln\left|2x^2+3x-4\right|+\frac{1}{4\sqrt{41}}\ln\left|\frac{4x+3-\sqrt{41}}{4x+3+\sqrt{41}}\right|+C$.

14. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-2\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. **15.** $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C$.

16. $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C$.

17. $C-\frac{1}{2}\ln\left|2x^2-x-3\right|+\frac{1}{10}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right|$.

18. $\frac{1}{5}\ln\left|5x^2+2x-10\right|+\frac{3}{35}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{7}+C$.

19. $3\sqrt{x^2+6x+13}-5\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C$.

20. $7\sqrt{x^2-5x+1}+\frac{31}{2}\ln\left|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+1}\right|+C$.

21. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3x^2-3x-16}}{\sqrt{3}}\right|+C$.

22. $C-7\sqrt{2-3x-x^2}-\frac{23}{2}\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17}}$. **23.** $C-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$.

24. $C-\sqrt{3-6x-x^2}+2\arcsin\frac{x+3}{\sqrt{12}}$.

§ 9.5. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

I. Многочлен з дійсними коефіцієнтами називається *раціональною функцією*. *Дробово-раціональною функцією* (*раціональним дробом*) називається відношення двох многочленів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0},$$

де a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_m – дійсні числа.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника $(n<m)$, у протилежному випадку $(n\ge m)$ дріб називається *неправильним*.

Неправильний раціональний дріб діленням многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ можна зобразити у вигляді суми цілої раціональної функції $W_{n-m}(x)$ і правильного раціонального дробу $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k<m)$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=W_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int W_{n-m}(x)dx+\int\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Інтегрування многочлена $W_{n-m}(x)$ утруднень не викликає.

Найпростішими раціональними дробами називаються дроби вигляду:

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \qquad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^m}.$$

Тут n і m – цілі додатні числа, а квадратний тричлен x^2+px+q має від'ємний дискримінант, тобто не може бути розкладений на лінійні множники.

II. Щоб проінтегрувати правильний раціональний дріб, слід зобразити його у вигляді суми скінченного числа *найпростіших дробів* (способи інтегрування яких нам уже відомі), розклавши знаменник $Q_m(x)$ на *лінійні* (за наявності дійсних коренів) і *квадратичні* (не мають дійсних коренів) множники.

Теорема. Многочлен $Q_m(x)$ з дійсними коефіцієнтами розкладається (і притому єдиним способом) на добуток *лінійних* і *квадратичних* множників, коефіцієнти яких також дійсні.

Таким чином, для обчислення інтеграла від правильного раціонального дробу необхідно:

1) розкласти знаменник $Q_m(x)$ правильного раціонального дробу на лінійні $x-a$ і квадратичні x^2+px+q множники;
2) зобразити правильний раціональний дріб у вигляді суми найпростіших раціональних дробів з невідомими буквеними коефіцієнтами;
3) застосувати *метод невизначених коефіцієнтів* або *метод частинних значень* для визначення коефіцієнтів розкладання;
4) обчислити інтеграл від правильного раціонального дробу $\int\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}dx$ як суму інтегралів від отриманих найпростіших раціональних дробів.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x+5}$; б) $\int \frac{dx}{(2-5x)^3}$; в) $\int \frac{x\,dx}{x+4}$;

г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$; д) $\int \frac{4x-1}{x^2-6x-7}\,dx$; е) $\int \frac{dx}{4x^2-x^4}$.

Розв'язання. Подібні приклади в § 9.1 і 9.2 ми розв'язували, зводячи інтеграли за допомогою елементарних перетворень до табличних або застосовуючи метод заміни змінної.

Ми, по суті, інтегрували *найпростіші раціональні дроби*, хоча й не називали їх такими. Нагадаємо прийоми їх обчислення:

а) $\int \frac{dx}{x+5} = \ln|x+5| + C$.

б) $\int \frac{dx}{(2-5x)^3} = \int (2-5x)^{-3}\,dx = -\frac{1}{5}\cdot\frac{(2-5x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{10(2-5x)^2} + C$.

в) $\int \frac{x\,dx}{x+4} = \int \frac{(x+4)-4}{x+4}\,dx = \int \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) dx = x - 4\ln|x+4| + C$.

Тут треба було спочатку виділити цілу частину неправильного дробу.

г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$.

д) $\int \frac{4x-1}{x^2-6x-7}\,dx = \int \frac{4x-1}{(x-3)^2-16}\,dx = \left| \begin{matrix} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{4t+11}{t^2-16}\,dt =$

$$= 2\int \frac{2t}{t^2-16}\,dt + 11\int \frac{dt}{t^2-16} = 2\ln|t^2-16| + 11\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + C =$$

$$= 2\ln|x^2-6x-7| + \frac{11}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+7}\right| + C.$$

е) $\int \frac{dx}{4x^2-x^4} = -\int \frac{dx}{x^2(x^2-4)} = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{1}{x}\right) + C$.

Тут скористалися найпростішим прийомом зображення раціонального дробу у вигляді суми дробів.

1. Знаменник дробу має *дійсні різні корені*

Якщо знаменник правильного раціонального дробу $Q(x)$ має тільки *дійсні різні* (прості) *корені*, то він розкладається на *неповторювані лінійні* множники.

Нехай a – один із *простих* дійсних коренів знаменника $Q(x)$. Цьому кореню в знаменнику дробу відповідає *лінійний* множник $x-a$, а в правильному раціональному дробі $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – *найпростіший дріб* $\frac{A}{x-a}$, де A – невизначений коефіцієнт.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Дотримуємося загальної схеми інтегрування правильного раціонального дробу.

1. Розкладемо знаменник дробу на лінійні множники. Виносячи за дужку загальний множник x, запишемо

$$x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right).$$

Звідси випливає, що один із коренів знаменника $x_1 = 0$. Корені квадратного тричлена $x^2 - x - 2$ знайдемо за теоремою Віста: $x_2 = 2$ і $x_3 = -1$. Таким чином, знаменник має три *дійсні різні* (прості) *корені*: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ і $x_3 = -1$ і, отже, може бути представлений у вигляді добутку *лінійних* множників:

$$x^3 - x^2 - 2x = x\cdot(x-2)\cdot(x+1).$$

2. Представимо правильний раціональний дріб у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами.

Кореню $x_1 = 0$ відповідає в знаменнику дробу множник x, а в правильному дробі – доданок $\frac{A}{x}$. Кореню $x_2 = 2$ відповідає множник $(x-2)$ і доданок $\frac{B}{x-2}$. Нарешті, кореню $x_3 = -1$ відповідає множник $(x+1)$ і доданок $\frac{C}{x+1}$. Отже,

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}. \qquad (*)$$

3. Оскільки ця рівність є тотожністю, звільнимося від знаменників, помноживши обидві його частини на $x(x-2)(x+1)$:

$$x + 2 = A(x+1)(x-2) + B(x+1)x + C(x-2)x.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосуємо *метод частинних значень*, підставляючи в праву і ліву частини тотожності по черзі значення $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ і $x_3 = -1$:

якщо $x = 0$, то $2 = -2A \Rightarrow A = -1$, якщо $x=2$, то $4=6B \Rightarrow B=2/3$,

якщо $x=-1$, то $1=3C \Rightarrow C=1/3$.

У такий спосіб коефіцієнти розкладання (*) визначені:

$$\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}=\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}.$$

4. У результаті заданий інтеграл від правильного раціонального дробу перетвориться до суми інтегралів від найпростіших дробів і дорівнює:

$$\int\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}\right)dx=-\int\frac{dx}{x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)}=$$

$$=-\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+C=\ln\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}}{x}+C.$$

Зауваження. Застосований тут *метод частинних значень* для знаходження невизначених коефіцієнтів особливо ефективний, якщо знаменник правильного раціонального дробу має лише неповторювані (прості) корені, тобто в його розкладі є тільки лінійні множники в першому степені.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$.

Розв'язання. Оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника, тобто дріб неправильний, то спочатку виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів:

$$\begin{array}{l|l}
x^5+x^4-8 & x^3-4x \\
\underline{x^5-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \\
\quad x^4+4x^3 & \\
\quad \underline{x^4-4x^2} & \\
\qquad 4x^3+4x^2 & \\
\qquad \underline{4x^3-16x} & \\
\qquad\quad 4x^2+16x-8. &
\end{array}$$

Отже,

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4(x^2+4x-2)}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\int(x^2+x+4)\,dx+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx.$$

Інтегрування цілої частини (многочлена) дає:

$$\int(x^2+x+4)\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+C.$$

Перейдемо до інтегрування правильного раціонального дробу

$$\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx. \qquad (*)$$

Для цього спочатку розкладемо знаменник дробу на *лінійні* множники

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2).$$

Звідси випливає, що $x=0$, $x=2$ і $x=-2$ – *прості дійсні корені* знаменника. Тому розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів має вигляд:

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Зводячи праву частину тотожності до спільного знаменника і звільняючись від нього, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Оскільки в розкладанні знаменника правильного раціонального дробу присутні тільки лінійні множники в першому степені, знову застосуємо *метод частинних значень* для знаходження невизначених коефіцієнтів:

якщо $x=0$, то $-2=-4A \Rightarrow A=1/2$,

якщо $x=2$, то $10=8B \Rightarrow B=5/4$,

якщо $x=-2$, то $-6=8C \Rightarrow C=-3/4$.

З урахуванням знайдених коефіцієнтів інтеграл від правильного раціонального дробу (*) представимо у вигляді суми інтегралів, кожний з яких тепер легко обчислюється:

$$\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx=\int\left(\frac{1/2}{x}+\frac{5/4}{x-2}-\frac{3/4}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+C.$$

Залишилося скласти цей результат з многочленом, знайденим при інтегруванні цілої частини:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\cdot\left(\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{5}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\ln|x+2|\right)+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}+C.$$

2. Знаменник дробу має *дійсні корені*, серед яких є *кратні*

Якщо знаменник правильного раціонального дробу $Q(x)$ має тільки *дійсні корені*, серед яких є *кратні* (повторювані), то він розкладається на *лінійні* множники, причому деякі з них *повторюються*.

Нехай a – n*-кратний* дійсний корінь знаменника $Q(x)$. Цьому кореню в знаменнику дробу відповідає n раз повторюваний *лінійний* множник

$$\underbrace{(x-a)\cdot(x-a)\cdot\ldots\cdot(x-a)}_{n}=(x-a)^n,$$

а в правильному раціональному дробі $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – сума n *найпростіших дробів*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n},$$

де A_1, A_2, …, A_n – невизначені коефіцієнти.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$.

Розв'язання. Тут степінь чисельника менший за степінь знаменника, тобто потрібно проінтегрувати правильний раціональний дріб. Відповідно до вказаного алгоритму, виконаємо перетворення підінтегральної функції. Передусім розкладемо знаменник на множники:

$$x^3-x^2-x+1=\left(x^3-x^2\right)-(x-1)=x^2(x-1)-(x-1)=$$
$$=(x-1)\left(x^2-1\right)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1).$$

Із розкладу видно, що знаменник має *простий корінь* $x_1=-1$ (йому відповідає множник $(x+1)$ і один доданок у розкладі на найпростіші дроби) і *двократний корінь* $x_{2,3}=1$ (йому відповідає множник $(x-1)^2$ і два доданки в розкладі на найпростіші дроби).

Тепер правильний раціональний дріб представимо у вигляді суми найпростіших дробів у такий спосіб:

$$\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{x+5}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}. \qquad (*)$$

Домножуючи обидві частини рівності (*) на знаменник $(x-1)^2(x+1)$, матимемо:

$$x+5=A(x+1)(x-1)+B(x+1)+C(x-1)^2.$$

Перший спосіб знаходження коефіцієнтів – *метод частинних значень*. Підставимо в ліву і праву частини тотожності значення коренів знаменника:

$$\text{якщо } x=1,\quad \text{то } 6=2B \quad\Rightarrow\quad B=3,$$
$$\text{якщо } x=-1,\quad \text{то } 4=4C \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Оскільки коренів більше немає, але коефіцієнт A ще не знайдений, надамо x будь-якого значення, наприклад, $x=0$:

$$\text{якщо } x=0,\quad \text{то } 5=-A+B+C \quad\Rightarrow\quad A=-1.$$

Другий спосіб знаходження коефіцієнтів – *метод невизначених коефіцієнтів*. Розташуємо многочлен у правій частині тотожності за степенями x:

$$x+5=(A+C)x^2+(B-2C)x+(B+C-A).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах тотожності, одержимо систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+C=0, \\ x^1 & B-2C=1, \\ x^0 & B+C-A=5 \end{array}\Bigg\},$$

яка має розв'язок: $A=-1$, $B=3$, $C=1$.

Коефіцієнти розкладання (*) визначені, тепер інтеграл від правильного раціонального дробу зведемо до суми інтегралів від найпростіших дробів:

$$\int\frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$=-\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln|x+1|+C=\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{x-1}+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Знаменник уже представлений у вигляді добутку *лінійних повторюваних* множників. Він має п'ять дійсних коренів: $x_{1,2,3}=0$ – *трикратний* (йому відповідають три доданки) і $x_{4,5}=-3$ – *двократний корінь* (йому відповідають два доданки). Отже, розкладання на суму найпростіших дробів повинно бути таким:

$$\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}.$$

Домножуючи обидві частини рівності на $x^3(x+3)^2$, матимемо:

$$x^4+2x^3-18x^2+54=Ax^2(x+3)^2+Bx(x+3)^2+C(x+3)^2+Dx^3(x+3)+Ex^3.$$

Скористаємося *комбінованим методом* для визначення коефіцієнтів розкладу. Спочатку підставимо в ліву і праву частини рівності корені знаменника:

$$\text{якщо } x=0, \quad \text{то} \quad 54=9C \quad \Rightarrow \quad C=6,$$

$$\text{якщо } x=-3, \quad \text{то} \quad -81=-27E \quad \Rightarrow \quad E=3.$$

Інші три коефіцієнти визначимо, прирівнюючи відповідні коефіцієнти при однакових степенях x. Звернемо увагу на те, що нам потрібні лише три рівняння, тому обмежимося степенями x^4, x^2 і x^1:

$$x^4+2x^3-18x^2+54=$$

$$=A\left(x^4+6x^3+9x^2\right)+B\left(x^3+6x^2+9x\right)+C\left(x^2+6x+9\right)+D\left(x^4+3x^3\right)+Ex^3$$

$$\begin{array}{l|ll} x^4 & 1=A+D, & (1) \\ x^2 & -18=9A+6B+C, & (2) \\ x^1 & 0=9B+6C. & (3) \end{array}$$

Тут ми обійшлися без розташування многочлена за степенями x у правій частині.

З урахуванням знайденого значення коефіцієнта C із рівняння (3), матимемо:

$$B=-\frac{2}{3}C=-\frac{2}{3}\cdot 6=-4.$$

Тепер з рівняння (2) знаходимо A:

$$-18=9A+6\cdot(-4)+6 \quad \Rightarrow \quad A=0.$$

Нарешті, з рівняння (1) маємо $D=1$.

Одержуємо наступне представлення у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2}=-\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x+3}+\frac{3}{(x+3)^2}.$$

Залишилося виконати інтегрування:

$$\int\frac{x^4+2x^3-18x^2+54}{x^3(x+3)^2}dx=\int\left(-\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{1}{x+3}+\frac{3}{(x+3)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}+\ln|x+3|-\frac{3}{x+3}+C=\ln|x+3|+\frac{x^2-9x-9}{x^2(x+3)}+C.$$

3. Знаменник дробу має *комплексно-спряжені корені*

I. *Комплексним числом* z називається впорядкована пара дійсних чисел $(x;y)$, тобто $z=(x;y)$. При цьому перше число x називається *дійсною*, а друге число y – *уявною* частиною комплексного числа. Комплексне число $(x;0)$ ототожнюють із дійсним числом x, а комплексне число вигляду $(0;y)$ називають уявним.

Комплексне число z можна представити в алгебраїчній формі $z=x+iy$, де число i, яке називається *уявною одиницею*, визначається зі співвідношення $i^2=-1$.

Комплексне число $\overline{z}=x-iy$ називається *комплексно-спряженим* числу $z=x+iy$.

Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, дискримінант якого $D=b^2-4ac<0$, має два комплексно-спряжені корені $x_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Наприклад,

$$x^2-6x+13=0, \qquad D=36-52=-16, \qquad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=3\pm 2i.$$

II. Якщо серед коренів знаменника правильного раціонального дробу $Q(x)$ є прості *комплексні корені*, то розклад знаменника містить *неповторювані квадратичні* множники.

Нехай $\alpha\pm i\beta$ – пара *простих комплексно-спряжених* коренів знаменника $Q(x)$. Цим кореням у знаменнику дробу відповідає *неповторюваний квадратичний* множник x^2+px+q (де $p=-2\alpha$, $q=\alpha^2+\beta^2$, $p^2-q<0$), а в правильному раціональному дробі $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – *найпростіший дріб* вигляду $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де A, B – невизначені коефіцієнти.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{4x-10}{x^3+6x+20}dx$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла знаходиться правильний раціональний дріб. При розкладанні знаменника дробу на множники виходитимемо з того, що всі *цілі корені наведеного алгебраїчного рівняння із цілочисловими коефіцієнтами є дільниками його вільного члена*. Це означає, що цілі корені рівняння $x^3+6x+20=0$ слід шукати лише серед дільників вільного члена, тобто числа 20. Такими є ±1, ±2, ±4, ±5, ±10, ±20. Безпосередньою підстановкою цих чисел у рівняння переконуємося, що коренем рівняння слугує число $x_1=-2$.

Відповідно до теореми Безу, многочлен, розташований у лівій частині рівняння, повинен без остачі ділитися на двочлен $x+2$, тобто

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x+20 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2-2x+10} \\ -2x^2+6x+20 & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ 10x+20 & \\ \underline{10x+20} & \\ 0 & \end{array}$$

Отже,

$$x^3+6x+20=(x+2)\left(x^2-2x+10\right).$$

Квадратний тричлен $x^2-2x+10$ не має дійсних коренів:

$$x^2-2x+10=0 \quad\Rightarrow\quad D=1-10=-9 \quad\Rightarrow\quad x_{2,3}=1\pm 3i,$$

тому не розкладається на лінійні множники.

Таким чином, знаменник заданого раціонального дробу має *дійсний простий корінь* $x_1=-2$ *і комплексно-спряжені корені* $x_{2,3}=1\pm 3i$. Розкладання раціонального дробу на суму найпростіших дробів у цьому випадку має вигляд:

$$\frac{4x-10}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звідси

$$4x-10=A\left(x^2-2x+10\right)+(Bx+C)(x+2).$$

Застосуємо комбінований метод знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\text{якщо } x=-2, \quad \text{то} \quad -18=18A \quad\Rightarrow\quad A=-1.$$

Тепер з тотожності

$$4x-10=(A+B)x^2+(2B-2A+C)x+(10A+2C)$$

візьмемо тільки два рівняння, наприклад,

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 0=A+B, \\ x^0 & -10=10A+2C \end{array}\Bigg\} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} B=-A=1, \\ C=0. \end{cases}$$

Отже,

$$\int\frac{4x-10}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}dx=\int\left(\frac{-1}{x+2}+\frac{x}{x^2-2x+10}\right)dx=-\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{xdx}{x^2-2x+10}.$$

Перший із отриманих інтегралів табличний

$$-\int\frac{dx}{x+2}=-\ln|x+2|+C.$$

Для обчислення другого інтеграла

$$\int\frac{xdx}{x^2-2x+10}$$

скористаємося алгоритмом інтегрування квадратного тричлена в знаменнику (див. § 9.4), для чого виділимо в знаменнику повний квадрат

$$x^2-2x+10=x^2-2\cdot 1\cdot x+1-1+10=(x-1)^2+9$$

і зробимо підстановку:

$$x-1=t \quad\Rightarrow\quad x=t+1 \quad\Rightarrow\quad dx=dt.$$

Тоді

$$\int\frac{xdx}{x^2-2x+10}=\int\frac{xdx}{(x-1)^2+9}=\left|\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int\frac{t+1}{t^2+9}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+9}dt+\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+9\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$$

З урахуванням останнього результату матимемо:

$$\int\frac{4x-10}{(x+2)\left(x^2-2x+10\right)}dx=-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+10\right)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+10}}{x+2}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C.$$

Зауваження. Оскільки квадратний тричлен x^2+px+q при $D<0$ завжди додатний, його можна логарифмувати й опускати знак модуля в записі $\ln\left(x^2+px+q\right)$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз являє собою правильний раціональний дріб, знаменник якого не має дійсних коренів. Дійсно, розв'язуючи біквадратне рівняння $x^4+5x^2+4=0$, маємо: $x_{1,2}^2=-4$ і $x_{3,4}^2=-1$. Отже, знаменник розкладається на два *квадратичні* множники

$$x^4+5x^2+4=\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+1\right),$$

кожному з яких відповідає один доданок:

$$\frac{x^2+2x+4}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}. \qquad (*)$$

Звідси випливає:

$$x^2+2x+4=(Ax+B)\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+4\right)=$$

$$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+(B+4D).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|lr} x^3 & 0 = A + C, & (1) \\ x^2 & 1 = B + D, & (2) \\ x^1 & 2 = A + 4C, & (3) \\ x^0 & 4 = B + 4D. & (4) \end{array}$$

З рівняння (3) системи віднімемо рівняння (1):

$$3C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2/3,$$

тепер з рівняння (1) знаходимо $A = -C = -2/3$.

З рівняння (4) системи віднімемо рівняння (2):

$$3D = 3 \quad \Rightarrow \quad D = 1,$$

і з рівняння (2) маємо $B = 1 - D = 0$.

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів у розкладання (*):

$$\frac{x^2+2x+4}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{-2/3x}{x^2+4} + \frac{2/3x+1}{x^2+1}.$$

Вся процедура обчислення заданого інтеграла матиме такий вигляд:

$$\int \frac{x^2+2x+4}{x^4+5x^2+4}dx = \int \frac{x^2+2x+4}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+1\right)}dx = \int \left(\frac{-\frac{2}{3}x}{x^2+4} + \frac{\frac{2}{3}x+1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{1}{3}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{3}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз являє собою правильний раціональний дріб, а серед коренів знаменника є як дійсні, так і комплексні. Отже, можна застосовувати до заданого інтеграла викладену вище методику, яка, як ми вже переконалися, дещо громіздка, однак завжди приводить до результату.

В той же час, завжди корисно спробувати взяти інтеграл яким-небудь іншим, штучним прийомом. Наприклад, заданий інтеграл береться і у такий спосіб:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^3+1\right)} = \int \frac{\left(x^3+1\right)-x^3}{x\left(x^3+1\right)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \ln|x| - \frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right| + C.$$

4. Знаменник дробу має *комплексно-спряжені корені, серед яких є кратні*

Якщо серед коренів знаменника правильного раціонального дробу $Q(x)$ є *кратні комплексні корені*, то розклад знаменника містить *повторювані квадратичні* множники.

Нехай $\alpha \pm i\beta$ – пара n*-кратних комплексно-спряжених* (повторюваних) *коренів* знаменника $Q(x)$. Цим кореням у знаменнику дробу відповідає n раз *повторюваний квадратичний* множник

$$\underbrace{\left(x^2+px+q\right)\cdot\left(x^2+px+q\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)}_{n} = \left(x^2+px+q\right)^n$$

(де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2+\beta^2$, $p^2 - q < 0$), а в правильному раціональному дробі $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – *сума* n *найпростіших дробів* вигляду

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{\left(x^2+px+q\right)^n},$$

де A_i, B_i $(i = 1,\ldots,n)$ – невизначені коефіцієнти.

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}dx$.

Розв'язання. При розкладанні знаменника заданого правильного раціонального дробу на множники застосуємо метод *групування*:

$$x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2 = x^4(x-2)+2x^2(x-2)+(x-2) =$$

$$= (x-2)\left(x^4+2x^2+1\right) = (x-2)\left(x^2+1\right)^2.$$

Звідси видно, що знаменник дробу містить один *лінійний* множник (йому відповідає один доданок) і пару *двократних квадратичних* (їм відповідають два доданки). Розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів має вигляд:

$$\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2} = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}. \quad (*)$$

Після зведення правої частини до спільного знаменника матимемо тотожну рівність:

$$2x^2+2x+13 = A\left(x^2+1\right)^2 + (Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2) + (Dx+E)(x-2) =$$

$$= (A+B)x^4 + (C-2B)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2 +$$

$$+(C-2B-2D+E)x + (A-2C+2E).$$

Визначимо відразу коефіцієнт A, скориставшись *методом частинних значень*. Підставляючи в тотожність значення $x=2$, маємо $25A=25$, тобто $A=1$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, одержимо систему чотирьох рівнянь із чотирма невідомими:

$$\begin{array}{l|ll} x^4 & A+B=0, & (1) \\ x^3 & -2B+C=0, & (2) \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, & (3) \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2. & (4) \end{array}$$

П'яте рівняння $A-2C+2E=13$, отримане прирівнюванням вільних членів, може замінити кожне із цих чотирьох (або слугувати для перевірки).

Підставляючи в рівняння (1) значення коефіцієнта A, знайдемо $B=-1$, далі визначаємо $C=-2$, $D=-3$ і $E=-4$.

Всі коефіцієнти розкладання (*) визначені:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

У результаті заданий інтеграл розпадається на суму простіших інтегралів, способи інтегрування яких розглянуті раніше:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx=$$

$$=\ln|x-2|-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}-4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2(x^2+1)}-4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

При обчисленні інтеграла $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ використане рекурентне співвідношення, отримане в § 9.3, приклад 11.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз являє собою правильний раціональний дріб, знаменник якого має *прості дійсні корені* $x_1=0$, $x_2=1$ і пару *комплексно-спряжених двократних коренів*. Тому можна відразу навести його розкладання на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}. \qquad (*)$$

Звідси маємо:

$$1=A(x-1)(x^2-x+1)^2+Bx(x^2-x+1)^2+(Cx+D)x(x-1)(x^2-x+1)+(Ex+F)\cdot$$

$$\cdot x(x-1)=(A+B+C)x^5+(-3A-2B-2C+D)x^4+(5A+3B+2C-2D+E)x^3+$$

$$+(-5A-2B-C+2D-E+F)x^2+(3A+B-D-F)x-A.$$

Поклавши тут $x=0$, знаходимо $A=-1$. Поклавши $x=1$, отримаємо $B=1$.

Для визначення чотирьох коефіцієнтів, що залишилися, складемо систему чотирьох рівнянь, прирівнюючи, наприклад, коефіцієнти при степенях 5, 4, 3 і 2:

$$\begin{array}{l|ll} x^5 & 0=A+B+C, & (1) \\ x^4 & 0=-3A-2B-2C+D, & (2) \\ x^3 & 0=5A+3B+2C-2D+E, & (3) \\ x^2 & 0=-5A-2B-C+2D-E+F. & (4) \end{array}$$

Підставляючи значення коефіцієнтів A і B у рівняння (1), знаходимо $C=0$, далі знаходимо $D=-1$, $E=0$ і $F=-1$.

У результаті розкладання (*) набуває вигляду:

$$\frac{1}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Запишемо процедуру інтегрування цієї суми дробів:

$$\int\frac{dx}{x(x-1)(x^2-x+1)^2}=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x^2-x+1}-\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=$$

$$=-\ln|x|+\ln|x-1|-\int\frac{d(x-1/2)}{(x-1/2)^2+3/4}-\int\frac{d(x-1/2)}{\left[(x-1/2)^2+3/4\right]^2}=$$

$$=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}-\int\frac{d(x-1/2)}{\left[(x-1/2)^2+3/4\right]^2}+C.$$

При обчисленні останнього інтеграла

$$\int \frac{d(x-1/2)}{\left[(x-1/2)^2+3/4\right]^2}=\int \frac{dt}{\left(t^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2\right)^2},$$

скористаємося рекурентними співвідношеннями, знайденими в § 9.3, приклад 11:

$$\int \frac{d(x-1/2)}{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}=\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{x-1/2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

У підсумку шуканий інтеграл дорівнює:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)\left(x^2-x+1\right)^2}=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2-2\right)}dx$.

<u>*Розв'язання*</u>. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Оскільки задана функція є *парною*, зручно при її розкладанні на прості дроби покласти $x^2=t$:

$$\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2-2\right)}=\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+4)(t-2)},$$

звідки видно, що знаменник у правій частині рівності має *неповторювані лінійні* множники відносно змінної t. Таким чином, задача зведена до розглянутого раніше випадку 1.

Тому представимо правильний раціональний дріб відносно змінної t у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+4)(t-2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+4}+\frac{C}{t-2}. \qquad (*)$$

Звідси маємо

$$t^2-t+1=A(t+4)(t-2)+B(t-1)(t-2)+C(t-1)(t+4).$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосуємо метод *частинних значень*, підставляючи в праву й ліву частини тотожності по черзі значення $t_1=1$, $t_2=-4$ і $t_3=2$:

якщо $t=1$, то $1=-5A \Rightarrow A=-1/5$,

якщо $t=-4$, то $21=30B \Rightarrow B=7/10$,

якщо $t=2$, то $3=6C \Rightarrow C=1/2$.

З урахуванням знайдених значень коефіцієнтів розкладання (*) набуває вигляду:

$$\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+4)(t-2)}=\frac{-1/5}{t-1}+\frac{7/10}{t+4}+\frac{1/2}{t-2}.$$

Виконуючи обернену заміну $t=x^2$, представимо заданий раціональний дріб у вигляді суми:

$$\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2-2\right)}=\frac{-1/5}{x^2-1}+\frac{7/10}{x^2+4}+\frac{1/2}{x^2-2}.$$

У результаті інтегрування зводиться до знаходження кількох табличних інтегралів:

$$\int \frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2-2\right)}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2-1}+\frac{7}{10}\int\frac{dx}{x^2+4}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-2}=$$

$$=-\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{7}{20}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Зауваження. Будь-яку раціональну функцію *завжди* можна звести до раціонального дробу, отже, будь-яку раціональну функцію можна представити (і притому єдиним способом) у вигляді алгебраїчної суми скінченної кількості цілих раціональних функцій і простих дробів. Оскільки і ті, й інші інтегруються в скінченному вигляді, ***інтеграл від будь-якої раціональної функції*** також ***виражається в скінченному вигляді*** – через елементарні функції (алгебраїчні, логарифмічні й обернені тригонометричні).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка функція називається *дробово-раціональною*?
2. Який раціональний дріб називається *правильним* (*неправильним*)?
3. Як неправильний раціональний дріб перетворити на правильний?
4. Що означає "виділити цілу частину неправильного дробу"?
5. Які множники називаються *лінійними* (*квадратичними*)?
6. Чи завжди многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається в добуток *лінійних* і *квадратичних* множників?
7. На які множники можна розкласти многочлен з дійсними коефіцієнтами?
8. Які раціональні дроби називаються *найпростішими*?

9. Сформулювати правило розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів у випадку:
   – *простих дійсних* коренів знаменника;
   – *кратних дійсних* коренів знаменника;
   – пари *простих комплексно-спряжених* коренів знаменника;
   – пари *кратних комплексно-спряжених* коренів знаменника.
10. У чому полягає *метод невизначених коефіцієнтів*?
11. У чому полягає *метод частинних значень*?
12. Коли користуються *комбінованим методом* визначення коефіцієнтів розкладання раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
13. У якому випадку найпростіше визначаються коефіцієнти розкладання раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
14. Чи можна визначити коефіцієнти найпростіших дробів, не підставляючи значення коренів знаменника і не прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x? Відповідь обґрунтувати.
15. Сформулювати алгоритм обчислення інтеграла від правильного раціонального дробу.
16. Через які функції виражається інтеграл від раціонального дробу?
17. Чи будь-який раціональний дріб інтегрується в елементарних функціях?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$;
2. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$;
3. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$;
4. $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}\,dx$;
5. $\int \frac{x^4dx}{(2+x)(x^2-1)}$;
6. $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$;
7. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$;
8. $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$;
9. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}\,dx$;
10. $\int \frac{5x^2-6x+5}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$;
11. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx$;
12. $\int \frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}\,dx$;
13. $\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx$;
14. $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$;
15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx$;
16. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;
17. $\int \frac{dx}{x^3-8}$;
18. $\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$;
19. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;
20. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$;
21. $\int \frac{dx}{x^3+1}$;
22. $\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$;
23. $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$;
24. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$;
25. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$;
26. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$;
27*. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;
28*. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;
29*. $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$;
30*. $\int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}\,dx$.

ВІДПОВІДІ

1. $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$. **2.** $\ln\left|\frac{C(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}\right|$.

3. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. **4.** $x^2+\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$.

5. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^3}\right|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$.

6. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$. **7.** $3\ln\left|\frac{C(x-1)}{x+2}\right|-\frac{2}{x+2}$.

8. $2\ln\left|\frac{C(x-2)}{x}\right|-\frac{1}{x-2}$. **9.** $C-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$.

10. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|-\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+1}+C$. **11.** $C-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$.

12. $C-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln|x+1|$.

13. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|+C$. **14.** $3\ln|x|-\frac{2}{x-1}-\ln|x-1|+C$.

15. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2-2x+2}}+2\operatorname{arctg}(x-1)+C$. **16.** $\frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

17. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. **18.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+C$.

19. $C-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$. **20.** $\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$.

21. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

22. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

23. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|}+C$. **24.** $x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

25. $x-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **26.** $x+\operatorname{arctg}x+\ln\frac{|x+1|}{x^2+1}+C$.

27*. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **28*.** $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$.

29*. $C-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right]$.

30*. $\frac{9}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{5}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2+3}+C$.

§ 9.6. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ПІДСТАНОВКИ ЧЕБИШЕВА ТА ЕЙЛЕРА

Інтегрування *алгебраїчних ірраціональностей* (виразів, що містять радикали) за допомогою відповідної заміни змінної в ряді випадків зводять до інтегрування *раціонального дробу* (див. § 9.5). Таке перетворення інтеграла прийнято називати його *раціоналізацією*.

Надалі основним прийомом інтегрування тих або інших класів диференціальних виразів буде пошук таких підстановок $t=\varphi(x)$, які дали б змогу звести підінтегральний вираз до раціонального вигляду і тим самим дали б можливість представити інтеграл у скінченному вигляді від функції t.

У цьому і наступному параграфах цього розділу функцію $R(x,y)$, складену із змінних x і y і деяких сталих, над якими здійснюються арифметичні дії, називатимемо *раціональною функцією* двох аргументів.

I. Інтегрування лінійних ірраціональностей

1. Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[k]{x^p}, \sqrt[l]{x^r}, \dots, \sqrt[m]{x^s}\right)dx$, де k, l, …, m – натуральні числа і R – раціональна функція аргументів x і $\sqrt[k]{x^p}, \sqrt[l]{x^r}, \dots, \sqrt[m]{x^s}$, раціоналізуються шляхом заміни $x=t^n$, де n – найменше спільне кратне показників коренів k, l, …, m.

2. Раціоналізація інтеграла $\int R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}\right)dx$ досягається підстановкою $\sqrt[k]{ax+b}=t$.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Перетворення лінійних ірраціональних функцій до раціональних здійснюється за допомогою відповідних підстановок.

а) Підінтегральна функція містить тільки ірраціональність $\sqrt{x}$, тому природно прийняти $\sqrt{x}=t$, $t>0$, тоді $x=t^2$, $dx=2tdt$. У результаті заданий інтеграл зводиться до інтеграла від *дробово-раціональної функції* (див. § 9.5):

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx=2\int\frac{t^2}{t^2+2}dt.$$

Виділяємо цілу частину та інтегруємо:

$$\int\frac{t^2}{t^2+2}dt=\int\left(1-\frac{2}{t^2+2}\right)dt=t-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Виконавши обернену заміну змінної $t=\sqrt{x}$, матимемо

$$\int\frac{\sqrt{x}}{x+2}dx=2\sqrt{x}-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2}}+C.$$

б) Підінтегральна функція містить ірраціональність у вигляді квадратного і кубічного коренів. Найменше спільне кратне чисел 2 і 3 дорівнює 6. Отже, звести заданий інтеграл до раціональної функції можна за допомогою заміни $x=t^6,\ t>0$. При цьому $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$ і $dx=6t^5dt$. Отже,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt.$$

Обчислюємо інтеграл від неправильного раціонального дробу відносно t:

$$\int\frac{t^3}{t+1}dt=\int\frac{\left(t^3+1\right)-1}{t+1}dt=\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|+C.$$

Залишилося повернутися до змінної x:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне чисел 3 і 6 дорівнює 6, тому виконуємо підстановку:

$$x=t^6,\ t>0\quad\Rightarrow\quad dx=6t^5dt.$$

Переходячи в заданому інтегралі до нової змінної, дістаємо інтеграл від неправильного раціонального дробу, що легко обчислюється:

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=6\int\frac{\left(t^6+t^4+t\right)}{t^6\left(1+t^2\right)}\cdot t^5\,dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\int\frac{t^3\left(t^2+1\right)+1}{t^2+1}dt=6\int\left(t^3+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=6\,\frac{t^4}{4}+6\,\mathrm{arctg}\,t+C=\frac{3}{2}t^4+6\,\mathrm{arctg}\,t+C.$$

Виконавши обернену заміну $t=\sqrt[6]{x}$, матимемо

$$\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне чисел 2, 3, 4 і 6 є 12. Тому, дотримуючись загальних рекомендацій, покладемо

$$x=t^{12},\ t>0\quad\Rightarrow\quad dx=12t^{11}dt.$$

Виконуючи заміну змінної, одержимо

$$\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx=\int\frac{t^6+t^4}{t^{15}-t^{14}}\cdot 12t^{11}dt=12\int\frac{\left(t^2+1\right)t^{15}}{(t-1)\,t^{14}}dt=12\int\frac{t^3+t}{t-1}dt.$$

Підінтегральна функція являє собою неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину, групуючи доданки у такий спосіб:

$$\frac{t^3+t}{t-1}=\frac{\left(t^3-1\right)+(t-1)+2}{t-1}=\frac{t^3-1}{t-1}+\frac{t-1}{t-1}+\frac{2}{t-1}=$$

$$=\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{t-1}+1+\frac{2}{t-1}=t^2+t+2+\frac{2}{t-1}.$$

У результаті отримуємо інтеграл від цілої раціональної функції й правильного раціонального дробу:

$$\int\frac{t^3+t}{t-1}dt=\int\left(t^2+t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|+C.$$

Залишилося виконати обернену заміну $t=\sqrt[12]{x}$:

$$\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx=4\sqrt[12]{x^3}+6\sqrt[12]{x^2}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C=$$

$$=4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$; **б)** $\int\frac{x^3+2}{\sqrt{x-1}}dx$.

Розв'язання. **а)** Маємо лінійну ірраціональність типу **2**. Застосуємо підстановку $\sqrt[3]{ax+b}=t$. Тоді

$$ax+b=t^3\quad\Rightarrow\quad x=\frac{t^3-b}{a}\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{3}{a}t^2dt.$$

Переходячи до змінної t, зведемо заданий інтеграл від ірраціональної функції до раціональної та виконаємо інтегрування:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}=\frac{3}{a^2}\int\frac{\left(t^3-b\right)}{t}\cdot t^2dt=\frac{3}{a^2}\int\left(t^4-bt\right)dt=\frac{3}{a^2}\left(\frac{t^5}{5}-b\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{3}{a^2}\left[\frac{\sqrt[3]{(ax+b)^5}}{5}-\frac{b}{2}\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]+C.$$

б) Позбудемося від ірраціональності, використовуючи підстановку $\sqrt{x-1}=t$:

$$x-1=t^2\quad\Rightarrow\quad x=t^2+1\quad\Rightarrow\quad dx=2tdt.$$

Отже,

$$\int\frac{x^3+2}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\left(t^2+1\right)^3+2}{t}\cdot 2t\,dt=2\int\left(t^6+3t^4+3t^2+3\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^7}{7}+\frac{3t^5}{5}+t^3+3t\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x, одержимо:

$$\int\frac{x^3+2}{\sqrt{x-1}}dx=2\cdot\left(\frac{\sqrt{(x-1)^7}}{7}+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{(x-1)^5}+\sqrt{(x-1)^3}+3\sqrt{x-1}\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{3}{5}(x-1)^2+(x-1)+3\right)+C.$$

II. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, k – натуральне число і R – раціональна функція аргументів x і $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, підстановкою $\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції за змінною t.

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$; **б)** $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція є раціональною функцією від змінної x і виразу $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тому введемо підстановку:

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t\quad\Rightarrow\quad\frac{2-x}{2+x}=t^3,$$

звідки

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3}\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt\quad\text{і}\quad 2-x=2-\frac{2-2t^3}{1+t^3}=\frac{4t^3}{1+t^3}.$$

У результаті заміни змінної інтеграл вдалося звести до табличного інтеграла відносно нової змінної:

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx=-\int\frac{2\left(1+t^3\right)^2\cdot t\cdot 12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=$$

$$=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

б) Щоб правильно вибрати нову змінну, попередньо перетворимо заданий інтеграл до інтеграла вигляду $\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$. Оскільки

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}}=\int\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)(x-2)},$$

то, поклавши $t=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$, отримаємо

$$t^2=\frac{x-2}{x-1}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{2-t^2}{1-t^2}\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Виконаємо заміну змінної, обчислимо інтеграл відносно змінної t і зробимо обернену заміну:

$$\int\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)(x-2)}=\int\frac{t}{\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-1\right)\left(\frac{2-t^2}{1-t^2}-2\right)}\cdot\frac{2t\,dt}{\left(1-t^2\right)^2}=$$

$$=2\int dt=2t+C=2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}$.

Розв'язання. Дотримуючись загальних вказівок, покладемо

$$t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}},$$

тоді

$$t^3=\frac{x-1}{x} \quad\Rightarrow\quad t^3=1-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{1-t^3} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{3t^2}{\left(1-t^3\right)^2}dt.$$

У результаті заміни змінної заданий інтеграл зводиться до інтеграла від правильного раціонального дробу

$$\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}=3\int \frac{t^2dt}{\left(1-t^3\right)(2+t)}.$$

Дотримуючись алгоритму інтегрування раціонального дробу (див. § 9.5), розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники:

$$\left(1-t^3\right)(2+t)=(2+t)(1-t)\left(t^2+t+1\right).$$

Маємо два лінійні множники і один квадратичний, тому розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів має вигляд:

$$\frac{t^2}{\left(1-t^3\right)(2+t)}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{2+t}+\frac{Ct+D}{t^2+t+1}.$$

Звідси

$$t^2=A(2+t)\left(t^2+t+1\right)+B(1-t)\left(t^2+t+1\right)+(Ct+D)(1-t)(2+t).$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів розкладання застосуємо комбінований спосіб. Підставимо спочатку в отриману тотожність корені знаменника $t_1=1$ і $t_2=-2$:

якщо $t=1$, то $1=9A \Rightarrow A=1/9$,

якщо $t=-2$, то $4=9B \Rightarrow B=4/9$.

Потім запишемо два з можливих співвідношень, прирівнюючи, наприклад, коефіцієнти при t^3 і вільні члени:

$$\left.\begin{array}{l|l} t^3 & 0=A-B-C \\ t^0 & 0=2A+B+D \end{array}\right\}.$$

Підставляючи в систему рівнянь значення коефіцієнтів A і B, знайдемо

$C=-1/3$ й $D=-1/3$. У результаті матимемо такий розклад раціонального дробу на суму найпростіших дробів:

$$\frac{t^2}{\left(1-t^3\right)(2+t)}=\frac{1/9}{1-t}+\frac{4/9}{2+t}+\frac{-1/3t-1/3}{t^2+t+1}.$$

Інтегруючи цю суму, одержимо

$$\int \frac{t^2dt}{\left(1-t^3\right)(2+t)}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{4}{9}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt=$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|1-t|+\frac{4}{9}\ln|t+2|-\frac{1}{6}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{9}\ln|1-t|+\frac{4}{9}\ln|t+2|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Повертаючись до вихідної змінної x, остаточно знаходимо:

$$\int \frac{dx}{x\left(2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}=-\frac{1}{3}\ln\left|1-\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right|+\frac{4}{3}\ln\left|2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

III. Вираз вигляду $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа, a і b – відмінні від нуля сталі, називається *біноміальним диференціалом*.

Інтеграл від біноміального диференціала

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

виражається *в скінченному вигляді* через алгебраїчні, логарифмічні і обернені тригонометричні функції тільки в таких трьох випадках:

1. Число p – ціле. Застосовується підстановка $x=t^k$, де k – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n.
2. Число $\frac{m+1}{n}$ – ціле. Застосовується підстановка $a+bx^n=t^k$, де k – знаменник дробу p.
3. Число $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле. Слід застосувати підстановку $ax^{-n}+b=t^k$, де k – знаменник дробу p.

Якщо *умови інтегрованості біноміального диференціала* не виконуються, тобто жодне із трьох указаних чисел не є цілим, то інтеграл від біноміального диференціала в скінченному вигляді не обчислюється (*П.Л. Чебишев*).

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

Розв'язання. Зведемо підінтегральний вираз до біноміального диференціала

$$\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{-10} dx.$$

Оскільки $p=-10$ – ціле число, то маємо *перший випадок* інтегрування біноміального диференціала, тому застосуємо підстановку $x=t^4$, де число 4 є найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$. Тоді $dx=4t^3dt$ і шуканий інтеграл зводиться до інтеграла від правильного раціонального дробу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}.$$

Для його обчислення використовуємо стандартний прийом – додамо і віднімемо одиницю в чисельнику, групуючи доданки у відповідний спосіб, а потім виконаємо почленне ділення:

$$\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}} = \int \frac{(t+1)-1}{(t+1)^{10}}dt = \int \left(\frac{1}{(t+1)^9} - \frac{1}{(t+1)^{10}}\right)dt = \int \left((t+1)^{-9} - (t+1)^{-10}\right)dt =$$

$$= \frac{(t+1)^{-8}}{-8} - \frac{(t+1)^{-9}}{-9} + C = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C.$$

Повертаючись до вихідної змінної $x=t^4$, маємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)} = 4\left(-\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C\right) = -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3\,dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{x^3}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} = x^3\left(4-x^2\right)^{-3/2}.$$

Порівнюючи цей вираз із біноміальним диференціалом, бачимо, що $m=3$, $n=2$ і $p=-\frac{3}{2}$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ – ціле число, то маємо *другий випадок* інтегрованості біноміального диференціала. Тому скористаємося заміною $4-x^2=t^2$, де 2 – знаменник дробу $-\frac{3}{2}$. Тоді

$$x^2=4-t^2 \quad\Rightarrow\quad x\,dx=-t\,dt$$

і процедура інтегрування матиме вигляд:

$$\int x^3\left(4-x^2\right)^{-3/2}dx = \int x^2\left(4-x^2\right)^{-3/2}x\,dx = \int\left(4-t^2\right)\cdot\left(t^2\right)^{-3/2}\cdot(-t\,dt) =$$

$$= -\int\left(4-t^2\right)\cdot t^{-3}\cdot t\,dt = \int t^{-2}\left(t^2-4\right)dt = \int\left(1-\frac{4}{t^2}\right)dt = t+\frac{4}{t}+C = \frac{t^2+4}{t}+C =$$

$$= \frac{4-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}+C = \frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Перетворивши підінтегральну функцію, одержимо інтеграл:

$$\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx.$$

Тут $m=-4$, $n=2$ і $p=-\frac{1}{2}$. Тоді $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ – ціле число. Отже, маємо *третій випадок* інтегрованості біноміального диференціала. Поклавши $x^{-2}+1=t^2$, матимемо

$$-2x^{-3}dx=2t\,dt \quad\Rightarrow\quad x^{-3}dx=-t\,dt.$$

Інтеграл обчислюється у такий спосіб:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-1/2}dx = \int x^{-4}\left[x^2\left(x^{-2}+1\right)\right]^{-1/2}dx =$$

$$= \int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-1/2}x^{-3}\,dx = -\int\left(t^2-1\right)\cdot t^{-1}\cdot t\,dt = \int\left(1-t^2\right)dt = t-\frac{t^3}{3}+C =$$

$$= \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3}+C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C = \frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left(1+x^4\right)^{-1/4}.$$

Тут $m=0$, $n=4$ і $p=-\frac{1}{4}$, тому $\frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{4}-\frac{1}{4}=0$. Знову має місце *третій випадок* інтегрованості біноміального диференціала.

Виконаємо заміну

$$x^{-4}+1=t^4,$$

звідки

$$-4x^{-5}dx=4t^3dt \quad \Rightarrow \quad x^{-5}dx=-t^3dt.$$

Для зручності введення нової змінної виконаємо необхідні перетворення в підінтегральному виразі:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\left(1+x^4\right)^{-1/4}dx=\int\left(x^4\left(x^{-4}+1\right)\right)^{-1/4}dx=\int x^{-1}\cdot\left(x^{-4}+1\right)^{-1/4}dx=$$

$$=\int\frac{\left(x^{-4}+1\right)^{-1/4}x^{-5}dx}{x^{-4}}=\int\frac{t^{-1}\cdot\left(-t^3dt\right)}{t^4-1}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}.$$

Отримали інтеграл від дробово-раціональної функції. Розкладемо її на суму найпростіших дробів і визначимо коефіцієнти розкладання:

$$\frac{t^2}{t^4-1}=\frac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}, \qquad (*)$$

звідки

$$t^2=A(t+1)\left(t^2+1\right)+B(t-1)\left(t^2+1\right)+(Ct+D)\left(t^2-1\right).$$

Спочатку скористаємося методом частинних значень:

якщо $t=1$, то $1=4A \Rightarrow A=1/4$,

якщо $t=-1$, то $1=-4B \Rightarrow B=-1/4$.

Відсутні два рівняння найпростіше знайти, прирівнюючи коефіцієнти при старшому степені t^3 і вільні члени

$$\begin{array}{c|l} t^3 & 0=A+B+C \\ t^0 & 0=A-B-D \end{array}\Bigg\}.$$

Звідси, з урахуванням A і B, знаходимо коефіцієнти $C=0$ і $D=1/2$.

Підставимо знайдені коефіцієнти розкладання в (*) і проінтегруємо:

$$-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\left(\frac{1/4}{t-1}-\frac{1/4}{t+1}+\frac{1/2}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Виконавши обернену заміну $t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}$, матимемо

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

Розв'язання. Зведемо заданий інтеграл до інтеграла від біноміального диференціала:

$$\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3}dx,$$

де $m=-1$, $n=5$ і $p=-\frac{1}{3}$. Тоді $\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{5}=0$ і маємо *другий випадок* інтегрованості біноміального диференціала. Отже, доцільно зробити заміну

$$1+x^5=t^3 \quad \Rightarrow \quad 5x^4dx=3t^2dt \quad \Rightarrow \quad x^4dx=\frac{3}{5}t^2dt.$$

Виконавши прості перетворення, перейдемо до нової змінної:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3}dx=\int\frac{x^5\cdot x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3}dx}{x^5}=\int\frac{\left(1+x^5\right)^{-1/3}x^4dx}{x^5}=$$

$$=\frac{3}{5}\int\frac{\left(t^3\right)^{-1/3}\cdot t^2}{t^3-1}dt=\frac{3}{5}\int\frac{t}{t^3-1}dt.$$

Одержали інтеграл від правильного раціонального дробу, знаменник якого розкладається на множники за формулою різниці кубів. Представлення раціонального дробу у вигляді суми найпростіших дробів має вигляд:

$$\frac{t}{t^3-1}=\frac{t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1},$$

звідки

$$t = A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right).$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти, поклавши $t=1$:

$$1=3A \quad \Rightarrow \quad A=1/3.$$

Інші коефіцієнти визначимо, наприклад, із системи

$$\left.\begin{array}{c|l} t^1 & 0=A+B \\ t^0 & 0=A-C \end{array}\right\}.$$

Підставляючи значення A, визначаємо $B=-1/3$ і $C=1/3$.

У підсумку інтеграл від раціонального дробу обчислюється у такий спосіб:

$$\int\frac{t}{t^3-1}\,dt = \int\left(\frac{1/3}{t-1}-\frac{1/3t-1/3}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t-1}{(t+1/2)^2+3/4}\,dt=\left|\begin{array}{l} t+\frac{1}{2}=z \\ dt=dz\end{array}\right|=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{3}\int\frac{z-3/2}{z^2+3/4}\,dz=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left(z^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Виконуючи обернену заміну $t=\sqrt[3]{1+x^5}$, знайдемо, нарешті, шуканий інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\sqrt[3]{1+x^5}-1\right|-\frac{1}{10}\ln\left(\sqrt[3]{\left(1+x^5\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+x^5\right)}+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

IV. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

де $a\neq 0$, R – раціональна функція аргументів x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою *підстановок Ейлера*.

Підстановки Ейлера застосовують у таких трьох випадках:

1. Якщо $a>0$, то використовується заміна $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t\pm\sqrt{a}\,x$, причому знаки можна брати в будь-якій комбінації.

2. Якщо $c>0$, то виконується підстановка $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.

3. Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c має два різні дійсні корені α і β, то вводиться заміна $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ або $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\beta)$.

Передбачається, що квадратний тричлен не має рівних коренів, так що радикал не може бути замінений раціональним виразом.

Інтеграли $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ *завжди* беруться в скінченному вигляді.

Приклад 12. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ $(x\neq -1)$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є функцією раціональною відносно x і $\sqrt{x^2+x+1}$. Оскільки коефіцієнт $a=1>0$, то застосовується *перша підстановка Ейлера*: $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$. Тоді

$$x^2+x+1=(t-x)^2,\qquad x^2+x+1=t^2-2xt+x^2,\qquad x(1+2t)=t^2+1,$$

звідки знаходимо умову зв'язку між змінною x і новою змінною t:

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t}\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,dt.$$

У результаті заданий інтеграл перетворюється до інтеграла від правильного раціонального дробу

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt,$$

знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні. Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{(1+2t)^2}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{t}.$$

Помноживши обидві частини рівності на $t(1+2t)^2$, отримаємо

$$2t^2+2t+2=At+Bt(1+2t)+C(1+2t)^2.$$

Для визначення коефіцієнтів A, B і C застосуємо комбінований метод:

якщо $t=0$, то $2=C$;

якщо $t=-\frac{1}{2}$, то $\frac{2}{4}-\frac{2}{2}+2=-\frac{A}{2}\quad\Rightarrow\quad A=3$.

Тепер найпростіше прирівняти коефіцієнти при t^2:

$$2=2B+4C\quad\Rightarrow\quad 2B=2-4C\quad\Rightarrow\quad 2B=-6\quad\Rightarrow\quad B=-3.$$

Таким чином, заданий інтеграл, що містить ірраціональність, зводиться до інтеграла від раціонального дробу:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt = \int\left(\frac{-3}{(1+2t)^2} - \frac{3}{1+2t} + \frac{2}{t}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2(1+2t)} - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + 2\ln|t| + C,$$

де $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Розв'язання. Тут $c = 1 > 0$, тому застосуємо *другу підстановку Ейлера*: $\sqrt{1-2x-x^2} = xt - 1$. Тоді

$$1-2x-x^2 = x^2t^2 - 2xt + 1; \qquad 2 + x = -xt^2 + 2t,$$

звідки

$$x = \frac{2t-2}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2(1+2t-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Переходячи до нової змінної, отримуємо інтеграл від раціонального дробу

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{2(1+2t-t^2)}{t\cdot\frac{2(t-1)}{1+t^2}\cdot(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt,$$

у знаменнику якого є як лінійні, так і квадратичні множники.

Дотримуючись § 9.5, розкладаємо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Зводимо до спільного знаменника і відкидаємо його:

$$-t^2+2t+1 \equiv A(t^3-t^2+t-1) + B(t^3+t) + (Ct+D)(t^2-t).$$

Підставимо в обидві частини тотожності корені знаменника $t=0$ і $t=1$:

якщо $t=0$, то $1=-A \Rightarrow A=-1$;

якщо $t=1$, то $2=2B \Rightarrow B=1$.

Для визначення двох інших коефіцієнтів складемо систему, прирівнявши, наприклад, коефіцієнти при t^3 і t:

$$\begin{array}{l|l} t^3 & 0 = A+B+C \\ t^1 & 2 = A+B-D \end{array}\Bigg\},$$

звідки $C=0$ і $D=-2$.

Таким чином, інтеграл з ірраціональністю за змінною x зводиться до табличних інтегралів відносно змінної t:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x+x^2}} = \int\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + C,$$

де $t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int \frac{(x-1)\;dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

Розв'язання. Квадратний тричлен має два дійсні різні корені: $\alpha = 0$ і $\beta = -2$. Доцільно застосувати *третю підстановку Ейлера*:

$$\sqrt{x^2+2x} = xt.$$

Тоді

$$x^2+2x = x^2t^2, \qquad x+2 = xt^2,$$

звідки

$$x = \frac{2}{t^2-1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-4t\,dt}{(t^2-1)^2} \quad \text{і} \quad x-1 = \frac{3-t^2}{t^2-1}.$$

Після переходу до нової змінної інтеграл відразу обчислюється:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int dt = \frac{3}{2t} + \frac{1}{2}t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+2x}} + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right) + C = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

Розв'язання. Легко встановити, що квадратний тричлен має дійсні різні корені $\alpha = -1$ і $\beta = -2$, тому знову застосуємо *третю підстановку Ейлера*, поклавши

$$\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1).$$

Щоб виразити із заданого співвідношення x, зручно розкласти квадратний тричлен на лінійні множники $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$. Тоді

$$(x+1)(x+2) = t^2(x+1)^2, \qquad x+2 = t^2(x+1),$$

звідки

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1} \quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}.$$

У результаті інтегрування ірраціональності зводимо до інтегрування раціонального дробу:

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx=\int\frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)}\cdot\frac{(-2t)\,dt}{\left(t^2-1\right)^2}=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,dt.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів, враховуючи, що корені знаменника $t=1$ і $t=2$ – прості, а корінь $t=-1$ – трикратний:

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{t-2},$$

звідки

$$-2t^2-4t=A(t-2)(t-1)+B(t-2)\left(t^2-1\right)+C\left(t^2-3t+2\right)\left(t^2+2t+1\right)+$$

$$+D(t-2)\left(t^3+3t^2+3t+1\right)+E(t-1)\left(t^3+3t^2+3t+1\right).$$

Застосовуючи комбінований метод визначення коефіцієнтів, спочатку підставимо в тотожність корені знаменника:

якщо $t=-1$, то $2=6A \Rightarrow A=1/3$,

якщо $t=1$, то $-6=-8D \Rightarrow D=3/4$,

якщо $t=2$, то $-16=27E \Rightarrow E=-16/27$.

Потім із системи (найпростіше простежити за коефіцієнтами при старшому степені t^4 і вільних членах)

$$\left.\begin{array}{l|l} t^4 & 0=C+D+E \\ t^0 & 0=2A+2B+2C-2D-E \end{array}\right\},$$

знайдемо інші коефіцієнти: $C=-\dfrac{17}{108}$ і $B=\dfrac{5}{18}$.

У підсумку інтеграл від ірраціонального виразу зводиться до табличних інтегралів:

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx=\int\left(\frac{1/3}{(t+1)^3}+\frac{5/18}{(t+1)^2}-\frac{17/108}{t+1}+\frac{3}{4(t-1)}-\frac{16/27}{t-2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C,$$

де $t=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$.

Приклад 16. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

<u>*Розв'язання*</u>. Тут коефіцієнт $c=1>0$, тому застосовується *друга підстановка Ейлера*: $\sqrt{x^2+x+1}=xt-1$, звідки

$$x^2+x+1=x^2t^2-2xt+1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2t+1}{t^2-1} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{-2\left(t^2+t+1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt.$$

Процедура обчислення інтеграла виглядає в такий спосіб:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{\frac{-2\left(t^2+t+1\right)}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt}{\left(\frac{2t+1}{t^2-1}\right)\left(t\cdot\frac{2t+1}{t^2-1}-1\right)}=-2\int\frac{dt}{t^2+2t}=-\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=$$

$$=\ln|t+2|-\ln|t|+C=\ln\left|\frac{t+2}{t}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{x}+2}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{x}}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1+2x}{\sqrt{x^2+x+1}+1}\right|+C.$$

Зауваження. Підстановки Ейлера зазвичай приводять до громіздких викладок, тому їх використання є доцільним лише в тих випадках, якщо не вдається обчислити інтеграл простішим способом.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які алгебраїчні вирази називаються *ірраціональними*?
2. Яка підстановка раціоналізує інтеграл від *дробово-лінійної ірраціональності*?
3. Яка підстановка раціоналізує інтеграл від *лінійної ірраціональності*?
4. Чому в прикладі 1**а)** виконана підстановка $\sqrt{x-1}=t$, а не $x-1=t^2$?
5. Чому, виконуючи заміну в інтегралах вигляду $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, слід вимагати, щоб $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ (тобто $ad\neq bc$)?

6. Чи будь-яка ірраціональна функція інтегрується в елементарних функціях?
7. Який вираз називається *біноміальним диференціалом*?
8. Яка підстановка застосовується для обчислення інтеграла $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, якщо p – ціле число?
9. Яку підстановку слід використовувати при обчисленні інтеграла $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число?
10. Яка підстановка використовується при обчисленні інтеграла $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число?
11. Чому дорівнює первісна, якщо в інтегралі від біноміального диференціала $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ сталі $a=0$ і $b\neq 0$?
12. Чому дорівнює первісна, якщо в інтегралі від біноміального диференціала $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ сталі $a\neq 0$ і $b=0$?
13. Чи можна інтеграл від біноміального диференціала виразити в скінченному вигляді, якщо не виконуються *умови інтегрованості біноміального диференціала*?
14. Нехай в інтегралі $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ коефіцієнти квадратного тричлена a і c відповідно дорівнюють 2 і 1. Яка з підстановок Ейлера найзручніша й чому?
15. Нехай в інтегралі $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ корені α і β квадратного тричлена ax^2+bx+c відповідно дорівнюють 0 і 2. Який корінь найзручніше використовувати в підстановці й чому?
16. Як обчислюється інтеграл $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, якщо корені квадратного тричлена ax^2+bx+c однакові?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1.1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$; 1.2. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt[6]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[4]{x^3}}\,dx$;

1.3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$; 1.4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

1.5. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$; 1.6. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$;

1.7. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x-5}}{x^3}\,dx$; 1.8. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$;

1.9. $\displaystyle\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx$; 1.10. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+4}+3}{(x+4)^2-\sqrt{x+4}}\,dx$;

1.11. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$; 1.12. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

2. Знайти інтеграли, використовуючи підстановки Чебишева або Ейлера:

2.1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2}$; 2.2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$;

2.3. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$; 2.4. $\displaystyle\int\sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$;

2.5. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; 2.6. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

2.7. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$; 2.8. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$;

2.9. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}$; 2.10. $\displaystyle\int\sqrt{x\left(3+4x^3\right)}\,dx$;

2.11. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$; 2.12. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$;

2.13. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; 2.14. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

2.15. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}$; 2.16. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **1.2.** $12\cdot\left[\sqrt[12]{x}+2\ln\dfrac{\left|\sqrt[12]{x}-1\right|}{\sqrt[6]{x}}\right]+C$.

1.3. $6\cdot\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\right]+C$.

1.4. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$.

1.5. $3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3+2x}+\sqrt[6]{3+2x}+\ln\left|\sqrt[6]{3+2x}-1\right|\right)+C$.

1.6. $4\cdot\left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right]+C$.

1.7. $\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{(x-5)\sqrt{x-5}}{x^2}-\dfrac{1}{20}\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}+\dfrac{1}{20\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5}}+C$.

1.8. $C-\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}$. **1.9.** $(x-15)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}-9\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}\right|+C$.

1.10. $\dfrac{4}{3}\ln\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-1\right)^2}{x+5+\sqrt{x+4}}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{3}}+C$. **1.11.** $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}+C$.

1.12. $C-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|$. **2.1.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+\ln\dfrac{x}{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^3}+C$.

2.2. $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\cdot\left[\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)+1\right]+C$.

2.3. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\left(\sqrt{1+x^3}-1\right)^2}{\left|x^3\right|}+C$. **2.4.** $\dfrac{1}{10}\sqrt{\left(5\sqrt[3]{x^4}+3\right)^3}+C$.

2.5. $\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\cdot\left[\dfrac{9}{5}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2-\dfrac{36}{7}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+\dfrac{9}{2}\right]+C$.

2.6. $12\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\dfrac{1}{4}\right)+C$. **2.7.** $C-\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{x^2}$.

2.8. $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+C$. **2.9.** $C-\dfrac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$.

2.10. $\dfrac{\sqrt{3+4x^3}}{\sqrt{3+4x^3}-4\sqrt{x^3}}-\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3+4x^3}-2\sqrt{x^3}}{\sqrt{3+4x^3}+2\sqrt{x^3}}\right|+C$.

2.11. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right|+C$. **2.12.** $C-2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right)$.

2.13. $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C$.

2.14. $2\ln|t|-\dfrac{1}{2}\ln|t-1|+\dfrac{3}{t+1}-\dfrac{3}{2}\ln|t+1|+C$, де $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$.

2.15. $\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{5(x-2)}{\sqrt{7x-10-x^2}}-\dfrac{2\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right)+C$. **2.16.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{-3+4x-x^2}+x-3}{\sqrt{-3+4x-x^2}-x+3}\right|+C$.

§ 9.7. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо основні випадки і прийоми інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

I. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція відносно синуса і косинуса, зводиться до інтеграла від раціональної функції (§ 9.5) за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$. При цьому:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad x=2\operatorname{arctg}t,\qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

тоді

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R^*(t)\,dt.$$

Приклад 1. Вивести формули:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

Розв'язання. **а)** Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Оскільки $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ і $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, то

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2\,dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Ця формула отримана в § 9.2, приклад 4**б)** дещо інакше.

б) Скористаємося формулою зведення $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ і одержаним вище результатом:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – раціональна відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, зводимо заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції, у заданому випадку до інтеграла, що містить квадратний тричлен у знаменнику:

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{1}{8-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-4)^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx=\int\frac{5+\frac{12t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(4+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}dt.$$

Отриманий у результаті заміни змінної раціональний дріб розкладемо на суму найпростіших дробів:

$$\frac{5t^2+12t+5}{t(7+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+7},\qquad (*)$$

звідки

$$5t^2+12t+5=A(t^2+7)+t(Bt+C).$$

Для визначення коефіцієнтів розкладання застосуємо комбінований метод:

якщо $t=0$, то $5=7A \Rightarrow A=5/7$.

Прирівнявши коефіцієнти при t^2 і t, матимемо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} t^2 & 5=A+B \\ t^1 & 12=C \end{array}\Bigg\},$$

звідки $B=5-A=5-\frac{5}{7}=\frac{30}{7}$ і $C=12$.

Враховуючи значення невизначених коефіцієнтів, обчислимо інтеграл від раціонального дробу (*):

$$\int\frac{5t^2+12t+5}{t(t^2+7)}dt=\int\left(\frac{5}{7t}+\frac{\frac{30t}{7}+12}{t^2+7}\right)dt=\frac{5}{7}\int\frac{dt}{t}+\frac{15}{7}\int\frac{2t}{t^2+7}dt+12\int\frac{dt}{t^2+7}=$$

$$=\frac{5}{7}\ln|t|+\frac{15}{7}\ln\left|t^2+7\right|+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}+C.$$

Виконуючи в останньому виразі обернену заміну змінної $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, отримаємо остаточний результат:

$$\int\frac{5+6\sin x}{\sin x(4+3\cos x)}dx=\frac{5}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{15}{7}\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+7\right|+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

Зауваження 1. Розглянута тригонометрична підстановка набула назви "універсальної" тому, що з її допомогою можна проінтегрувати практично будь-яку функцію вигляду $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$. Однак на практиці вона досить часто призводить до занадто громіздких раціональних функцій. Тому в тих випадках, де це можливо, намагаються використовувати інші прийоми інтегрування.

II. 1. Інтеграли вигляду $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, де m і n – *цілі числа* (зокрема, одне з них може дорівнювати нулю), беруться у такий спосіб:

а) Якщо m – *непарне число*, а n – будь-яке, то використовується заміна $\cos x=t$.

Дійсно, якщо $m=2k+1$ – непарне додатне число, то

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx=\int\sin^{2k}x\cdot\cos^n x\cdot\sin x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)^k\cdot\cos^n x\,d(\cos x)$$

і видно, що як змінна інтегрування виступає $\cos x$, тобто зручною є заміна $\cos x=t$.

б) Якщо n – *непарне число*, а m – будь-яке, то доцільною є заміна $\sin x=t$.

Справді, якщо $n=2k+1$ – непарне додатне число, то

$$\int\sin^m x\cdot\cos^n x\,dx=\int\sin^m x\cdot\cos^{2k}x\cdot\cos x\,dx=\int\sin^m x\cdot(1-\sin^2 x)^k\,d(\sin x)$$

і як нову змінну зручно прийняти $t=\sin x$.

в) Якщо m і n – *парні додатні числа*, то застосовують формули зниження степеня:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

2. Інтеграли вигляду $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, де $m+n$ – *парне від'ємне число*, беруться за допомогою заміни $\operatorname{tg}x=t$ або $\operatorname{ctg}x=t$.

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin^3 x\,dx$; б) $\int \sin^5 x\cos^4 x\,dx$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція містить $\sin x$ *у непарному степені*, тому застосовується заміна

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad -\sin x\,dx = dt.$$

Зручно спочатку перетворити підінтегральну функцію так, щоб виділити явно $\cos x$ і диференціал нової змінної $\sin x\,dx$, а вже потім виконати заміну змінної:

$$\int \sin^3 x\,dx = \int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx = -\int\left(1-t^2\right)dt = -t+\frac{t^3}{3}+C = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

б) Оскільки $m=5$ – *непарне число*, то реалізується випадок **(а)**, тому застосуємо заміну

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad -\sin x\,dx = dt.$$

У результаті інтегрування матимемо:

$$\int \sin^5 x\cdot\cos^4 x\,dx = \int \sin^4 x\cdot\cos^4 x\cdot\sin x\,dx = \int\left(1-\cos^2 x\right)^2\cos^4 x\,d(\cos x) =$$

$$= -\int\left(1-t^2\right)^2 t^4\,dt = -\int\left(1-2t^2+t^4\right)t^4\,dt = \int\left(-t^4+2t^6-t^8\right)dt = -\frac{t^5}{5}+\frac{2t^7}{7}-\frac{t^9}{9}+C =$$

$$= -\frac{\cos^5 t}{5}+\frac{2\cos^7 t}{7}-\frac{\cos^9 t}{9}+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,dx$; б) $\int \sin^7(ax+b)\cos^3(ax+b)\,dx$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція містить $\cos x$ *у непарному степені.* Тому скористаємося підстановкою

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = dt.$$

Попередньо перетворюючи підінтегральну функцію, перейдемо до нової змінної та проінтегруємо:

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\cos^4 x\cdot\cos x\,dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos x\,dx}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2 dt}{t^4} = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}\,dt = \int\left(\frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^2}+1\right)dt = -\frac{t^{-3}}{3}+\frac{2}{t}+t+C =$$

$$= -\frac{1}{3t^3}+\frac{2}{t}+t+C = \frac{-1}{3\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.$$

б) Виконавши заміну змінної

$$ax+b=\varphi \quad \Rightarrow \quad a\,dx = d\varphi,$$

отримаємо інтеграл типу **II**:

$$\int \sin^7(ax+b)\,\cos^3(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin^7\varphi\,\cos^3\varphi\,d\varphi,$$

де числа $m=7$ і $n=3$ – *непарні.* Отже, інтеграл задовольняє умови випадків **(а)** і **(б)** одночасно, тобто його можна брати як підстановкою $\cos\varphi = t$, так і підстановкою $\sin\varphi = t$.

У цьому випадку краще віддати перевагу другій підстановці. Дійсно,

$$\frac{1}{a}\int \sin^7\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{1}{a}\int \sin^7\varphi\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\,d\varphi = \left|\begin{matrix}\sin\varphi = t\\ \cos\varphi\,d\varphi = dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int t^7\left(1-t^2\right)dt = \frac{1}{a}\int\left(t^7-t^9\right)dt = \frac{1}{a}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^{10}}{10}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{8}\sin^8(ax+b)-\frac{1}{10}\sin^{10}(ax+b)\right]+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Скористаємося тією обставиною, що функція $\cos x$ входить у підінтегральний вираз *у непарному степені.* Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\cos x$ і виконаємо заміну

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = dt.$$

У результаті

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\left(1-\sin^2 x\right)\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)t^2}.$$

Отриманий раціональний дріб легко розкласти на суму найпростіших дробів, якщо додати і відняти в чисельнику t^2, а потім почленно поділити на знаменник:

$$\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)t^2} = \int \frac{\left(1-t^2\right)+t^2}{\left(1-t^2\right)t^2}\,dt = \int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

Другий спосіб. У чисельнику підінтегральної функції запишемо тригонометричну одиницю $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ і виконаємо почленне ділення:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}dx=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx.$$

Перший з отриманих тут інтегралів обчислений в прикладі 1**б**), а другий береться простою заміною $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$.

У результаті маємо:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C.$$

На перший погляд, відповіді не збігаються. Насправді вони зводяться одна до одної внаслідок тотожних перетворень і застосування формули $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

Зауваження 2. Подібний штучний прийом, пов'язаний із введенням тригонометричної одиниці, досить часто практикується при інтегруванні тригонометричних функцій.

Приклад 7. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$; **б)** $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$;

в) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

Розв'язання. **а)** Тут $m=-4$ – *парне від'ємне число.* Перетворимо підінтегральну функцію, скориставшись тригонометричною формулою $1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$, і застосуємо підстановку $\operatorname{ctg}x=t$:

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\frac{dx}{\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c}\operatorname{ctg}x=t\\ -\dfrac{dx}{\sin^2 x}=dt\end{array}\right|=$$

$$=-\int\left(1+t^2\right)dt=-\left(t+\frac{t^3}{3}\right)+C=C-\operatorname{ctg}x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$$

б) Сума показників тригонометричних функцій – *парне від'ємне число.* Перетворимо підінтегральну функцію у такий спосіб:

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right)\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Природно зробити заміну:

$$\operatorname{tg}x=t\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{\cos^2 x},$$

тоді

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}=\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+t^2\right)dt=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^2}dt=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^2}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^2}+2+t^2\right)dt=-\frac{1}{t}+2t+\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

в) *Перший спосіб.* Сума показників $\sin x$ і $\cos x$ у підінтегральній функції $m+n=3-5=-2$ – *парне від'ємне число.* Отже, можна скористатися заміною $\operatorname{tg}x=t$. Звідси випливає:

$$x=\operatorname{arctg}t\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dt}{1+t^2},\qquad\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Переходячи до нової змінної, знаходимо

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx=\int\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{-5}\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int t^3\left(1+t^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(1+t^2\right)^{\frac{5}{2}}\cdot\left(1+t^2\right)^{-1}dt=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$$

Другий спосіб. Відійдемо від запропонованої схеми і скористаємося тим, що

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}=\operatorname{tg}^3 x,\qquad\frac{dx}{\cos^2 x}=d\left(\operatorname{tg}x\right).$$

Тоді

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx=\int\operatorname{tg}^3 x\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\operatorname{tg}^3 x\,d\left(\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cdot\cos x}}$.

Розв'язання. Представимо інтеграл у вигляді

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cdot\cos x}}=\int\sin^{-\frac{11}{3}}x\cdot\cos^{-\frac{1}{3}}x\,dx.$$

Показники $m=-11/3$ й $n=-1/3$ – дробові від'ємні числа, а їх сума $m+n=-11/3-1/3=-4$ – *парне від'ємне число*. У цьому випадку доцільна заміна $\operatorname{ctg} x = t$, звідки

$$x=\operatorname{arcctg} t \quad \Rightarrow \quad dx=-\frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Тоді

$$\int \sin^{-\frac{11}{3}} x\cdot\cos^{-\frac{1}{3}} x\,dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{-\frac{11}{3}}\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{dt}{1+t^2}\right)=$$

$$=-\int(1+t^2)^{\frac{11}{6}}\cdot(1+t^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(1+t^2)^{-1}\cdot t^{-\frac{1}{3}}\,dt=-\int(1+t^2)\cdot t^{-\frac{1}{3}}\,dt=-\int\left(t^{-\frac{1}{3}}+t^{\frac{5}{3}}\right)dt=$$

$$=-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{8}t^{\frac{8}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}+C=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}\left(4+\operatorname{ctg}^2 x\right)+C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграли:

а) $\int\cos^2 2x\,dx$; **б)** $\int x\sin^2(x^2)\,dx$;

в) $\int\cos^4 x\sin^2 x\,dx$.

Розв'язання. Має місце випадок (**в**), оскільки показники степенів тригонометричних функцій – *парні додатні числа*.

а) Знижуючи степінь підінтегральної функції, дістаємо:

$$\int\cos^2 2x\,dx=\int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

б) Щоб спростити підінтегральну функцію, попередньо виконаємо заміну змінної

$$x^2=t \quad \Rightarrow \quad 2x\,dx=dt,$$

а потім застосуємо формулу зниження степеня:

$$\int x\sin^2(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\sin^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{1}{2}\sin 2x^2\right)+C.$$

в) Використовуючи тригонометричні формули зниження степеня, будемо послідовно зводити заданий інтеграл до табличного:

$$\int\cos^4 x\sin^2 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\sin^2 x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 2x)^2(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\cos^2 2x-\cos^3 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x-\frac{1+\cos 4x}{2}-\cos^3 2x\right)dx=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{2}+\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x-\cos^3 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right)-\frac{1}{8}\int\cos^3 2x\,dx=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{8}\int\cos^2 2x\cos 2x\,dx=$$

$$=\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{1}{16}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

Зазначимо, що випадок, коли m і n – *парні додатні числа*, є найпростішим для запам'ятовування, але, мабуть, найтрудомісткішим для виконання серед випадків пункту **II**.

Зауваження 3. Інтеграли вигляду $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ за допомогою заміни $\sin x=u$ зводяться до інтеграла від біноміального диференціала $\int u^m(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\,du$, отже, згідно з Чебишевим (див. § 9.6), беруться в елементарних функціях лише в таких трьох випадках:

$(n-1)/2$ – ціле, тобто n – непарне;

$(m+1)/2$ – ціле, тобто m – непарне;

$(m+1)/2+(n-1)/2$ – ціле, тобто $m+n$ – парне.

III. Якщо раціональна функція $R(\sin x,\cos x)$:

- *непарна відносно* $\sin x$, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то рекомендується підстановка $\cos x=t$;
- *непарна відносно* $\cos x$, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то рекомендується підстановка $\sin x=t$;
- *не змінюється* при одночасній заміні $\sin x$ на $-\sin x$ і $\cos x$ на $-\cos x$, тобто

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

то доцільна підстановка $\operatorname{tg} x=t$.

Приклад 10. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx$; **б)** $\int\sin^5 x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція – *непарна відносно* $\cos x$, тому застосуємо заміну

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x\,dx = dt$$

і зведемо заданий інтеграл до дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = -\int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = -\int \frac{\left(t^2+1\right)-2}{t^2+1}\,dt =$$

$$= -\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2+1} = -t + 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = -\sin x + 2\,\mathrm{arctg}(\sin x) + C.$$

б) Підінтегральна функція – *непарна відносно* $\sin x$, тому скористаємося заміною

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad -\sin x\,dx = dt.$$

У результаті маємо:

$$\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx = \int \sin^4 x \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin x\,dx =$$

$$= -\int \left(1-t^2\right)^2 \sqrt[3]{t^2}\,dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right)^2 \sqrt[3]{t^2}\,dt = -\int \left(t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{8}{3}} + t^{\frac{14}{3}}\right)dt =$$

$$= -\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + 2\cdot\frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{17}t^{\frac{17}{3}} + C = 3\sqrt[3]{t^2}\left(-\frac{1}{5}t + \frac{2}{11}t^3 - \frac{1}{17}t^5\right) + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{\cos^2 x}\left(-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{11}\cos^3 x - \frac{1}{17}\cos^5 x\right) + C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}$.

Розв'язання. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що заданий інтеграл *не змінюється* при одночасній заміні $\sin x$ на $-\sin x$ і $\cos x$ на $-\cos x$. Отже, застосовується підстановка $\mathrm{tg}\,x = t$.

Спочатку виконаємо такі перетворення:

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\left(3+2\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x}.$$

Тепер проведемо заміну змінної:

$$\mathrm{tg}\,x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \quad \Rightarrow \quad t = \mathrm{arctg}\,x.$$

У результаті знаходимо:

$$\int \frac{dx}{\left(3+2\,\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2+2t+3} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+2} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Зауваження 4. Зрозуміло, вибір підстановок у прикладах 4–6 пункту **II** можна було здійснити і на основі аналізу парності або непарності підінтегральних функцій відносно $\sin x$ і $\cos x$ відповідно до умов пункту **III**, що і рекомендується проробити самостійно. У свою чергу, положення пункту **II** не суперечать вибору підстановок у прикладах 10–11 пункту **III**.

IV. Інтеграли вигляду $\int \mathrm{tg}^n x\,dx$ $\left(\int \mathrm{ctg}^n x\,dx\right)$, де n – *ціле додатне число*, зводяться до інтеграла від раціональної функції за допомогою заміни $\mathrm{tg}\,x = t$ $(\mathrm{ctg}\,x = t)$.

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \mathrm{tg}^5 x\,dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $\mathrm{tg}\,x = t$, звідки

$$x = \mathrm{arctg}\,t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Тоді

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \int t^5 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^5}{t^2+1}\,dt.$$

Маємо неправильний дріб. Виділимо цілу частину, поділивши многочлени:

$$\begin{array}{r|l} t^5 & t^2+1 \\ \underline{t^5+t^3} & \overline{t^3-t} \\ -t^3 & \\ \underline{-t^3-t} & \\ t & \end{array}$$

У результаті

$$\int \mathrm{tg}^5 x\,dx = \int \frac{t^5}{t^2+1}\,dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \int \left(t^3-t\right)dt + \int \frac{t}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

Зауваження 5. Зрозуміло, у всіх прикладах пунктів **II–IV** можна було скористатися "універсальною" тригонометричною підстановкою. Рекомендується проробити це <u>самостійно</u>, порівняти отримані результати із наведеними, і висловити своє судження щодо доцільності застосування цієї підстановки в указаних прикладах.

V. Інтеграли вигляду $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$ і $\int \sin mx \sin nx dx$ при $m \neq n$ обчислюються безпосередньо, якщо скористатися тригонометричними формулами:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right].$$

Приклад 13. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin 7x \cdot \sin 2x\, dx$; **б)** $\int \cos^2 5x \cdot \sin 6x\, dx$.

Розв'язання. **а)** Безпосередньо підставляючи формулу добутку синусів, знаходимо:

$$\int \sin 7x \cdot \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int(\cos 5x - \cos 9x)\,dx = \frac{\sin 5x}{10} - \frac{\sin 9x}{18} + C.$$

б) Спочатку знизимо степінь косинуса, а потім, скориставшись властивостями невизначеного інтеграла і формулою, що перетворює добуток тригонометричних функцій на суму, дістанемо:

$$\int \cos^2 5x \cdot \sin 6x\, dx = \int \frac{1+\cos 10x}{2} \cdot \sin 6x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 6x + \cos 10x \cdot \sin 6x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\int\left[\sin 16x + \sin(-4x)\right]dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{64}\cos 16x + \frac{1}{16}\cos 4x + C.$$

Зауваження 6. Інтеграли, що раціонально залежать від гіперболічних функцій $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{ch} x$, обчислюються аналогічно до інтегралів, раціональних відносно тригонометричних функцій. При цьому використовуються основні співвідношення між гіперболічними функціями:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad \operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка функція називається *раціональною відносно синуса і косинуса*? Які існують прийоми інтегрування таких функцій?
2. Яка підстановка називається *універсальною тригонометричною підстановкою* і чому? У яких випадках вона застосовується?
3. Як виражаються синус і косинус через тангенс половинного аргументу?

4. Вказати найраціональніші підстановки при обчисленні інтеграла $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ залежно від *парності чи непарності* m і n.
5. Нехай в інтегралі $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ сума показників – *парне від'ємне число*. Яка підстановка краща, $\operatorname{tg} x = t$ чи $\operatorname{ctg} x = t$?
6. Як обчислюється інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, якщо m і n – *парні додатні числа*?
7. Що зв'язує інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ з інтегралом від біноміального диференціала $\int u^m\left(1-u^2\right)^{\frac{n-1}{2}} du$?
8. Вказати випадки, коли інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ береться в скінченному вигляді.
9. Яку підстановку можна застосувати при інтегруванні виразу, раціонального відносно синуса і косинуса і *непарного відносно* $\sin x$?
10. Яку підстановку можна застосувати при інтегруванні виразу, раціонального відносно синуса і косинуса і *непарного відносно* $\cos x$?
11. Яким чином зводяться до раціональної функції інтеграли від тангенса і котангенса?
12. Як обчислюються інтеграли від добутку тригонометричних функцій $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin mx\, dx$, якщо $m \neq n$?
13. Яким чином беруться інтеграли вигляду $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin mx\, dx$, якщо $m = n$?
14. Обчислити інтеграл $\int \sin 2x\, dx$ можна так:
$$\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$
З іншого боку,
$$\int \sin 2x\, dx = 2\int \sin x \cos x\, dx = 2\int \sin x\, d(\sin x) = \sin^2 x + C^*.$$
Як пояснити той факт, що результати не збігаються?
15. Чи можна взяти інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x}$, не вдаючись до універсальної тригонометричної підстановки? Якщо так, то як?
16. Які функції називається *раціональними відносно гіперболічних синуса і косинуса*? Які існують прийоми інтегрування таких функцій?
17. Чи можна ввести *універсальну гіперболічну підстановку*? Якщо так, то як?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;
2. $\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;
3. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x}$;
4. $\int\frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$;
5. $\int\sin^4 x\cos^5 x\,dx$;
6. $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$;
7. $\int\sin^2 3x\,dx$;
8. $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$;
9. $\int\cos^6 x\,dx$;
10. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$;
11. $\int\frac{dx}{1-\sin x}$;
12. $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^2 x}$;
13. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$;
14. $\int\sin^3 x\cos^2 x\,dx$;
15. $\int\sin^4 x\,dx$;
16. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$;
17. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$;
18. $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}\,dx$;
19. $\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}\,dx$;
20. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\,\sqrt[3]{\cos x}}\,dx$;
21. $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$;
22. $\int\frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$;
23. $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\,dx$;
24. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$;
25. $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,dx$;
26. $\int\sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^{13} x}}\,dx$;
27. $\int\mathrm{tg}^7 x\,dx$;
28. $\int\mathrm{ctg}^6 x\,dx$;
29. $\int\sin 2x\cos 5x\,dx$;
30. $\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$;
31. $\int\sin 3x\cdot\sin x\,dx$;
32. $\int\sin 2x\cdot\cos 3x\,dx$.

ВІДПОВІДІ

1. $C-\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2}$. **2.** $\frac{1}{5}\ln\left|5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$. **3.** $\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\frac{2-\sqrt5+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{2+\sqrt5+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$.

4. $\frac13\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac53\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C$. **5.** $\frac15\sin^5 x-\frac27\sin^7 x+\frac19\sin^9 x+C$.

6. $\frac18 x-\frac1{32}\sin 4x+C$. **7.** $\frac12\left(x-\frac16\sin 6x\right)+C$. **8.** $\frac12(x+\sin x)+C$.

9. $\frac{5}{16}x+\frac14\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

10. $C-\frac18\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac12\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac18\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}$. **11.** $C-\frac{2}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}$.

12. $\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{4(1-\cos x)}+4\ln|1+\cos x|+\frac{9}{4(1+\cos x)}+C$. **13.** $C-\frac13\mathrm{ctg}^3 x$.

14. $C-\frac13\cos^3 x+\frac15\cos^5 x$. **15.** $\frac38 x-\frac14\sin 2x+\frac1{32}\sin 4x+C$.

16. $\frac{1}{\cos x}-\mathrm{tg}\,x+x+C$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x+1-\sqrt2}{\mathrm{tg}\,x+1+\sqrt2}\right|+C$.

18. $\frac12\cos x-\frac{3}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2\cos x-1}{\sqrt2\cos x+1}\right|+C$. **19.** $\sin 2x-\frac{2}{\sin x}-6\,\mathrm{arctg}(\sin x)+C$.

20. $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac35\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x}+C$. **21.** $C-\frac{x}{17}+\frac14\ln|\sin x|-\frac1{68}\ln|\sin x+4\cos x|$.

22. $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac14\sin^4 x+C$. **23.** $C-\frac{1}{5\sin^5 x}+\frac{1}{3\sin^3 x}$.

24. $3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac17\cos^2 x-1\right)+C$. **25.** $C-\frac43\sqrt[4]{\cos^3 x}+\frac4{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x}$.

26. $\frac34\sqrt[3]{\mathrm{tg}^4 x}+\frac3{10}\sqrt[3]{\mathrm{tg}^{10} x}+C$. **27.** $\frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}-\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$.

28. $C-\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}-\mathrm{ctg}\,x-x$. **29.** $C-\frac1{14}\cos 7x+\frac16\cos 3x$.

30. $\frac32\cos\frac{x}{3}-\frac12\cos x+C$. **31.** $\frac14\sin 2x-\frac18\sin 4x+C$. **32.** $C-\frac1{10}\cos 5x+\frac12\cos x$.

§ 9.8. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

При обчисленні інтегралів вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\qquad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\qquad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

ефективними є *тригонометричні підстановки*, які перетворюють інтеграли, що містять ірраціональність, до інтегралів, раціональних відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Раціоналізація досягається за допомогою таких підстановок:

а) $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$,

$x=a\sin t$, тоді $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$, $dx=a\cos t\,dt$ або

$x=a\cos t$, тоді $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\cos^2 t}=a\sin t$, $dx=-a\sin t\,dt$;

б) $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$,

$x=a\,\mathrm{tg}\,t$, тоді $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\mathrm{tg}^2 t}=a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}=\dfrac{a}{\cos t}$, $dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$ або

$x=a\,\mathrm{ctg}\,t$. тоді $\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 t}=\dfrac{a}{\sin t}$, $dx=-\dfrac{a\,dt}{\sin^2 t}$;

в) $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$,

$x=\dfrac{a}{\sin t}$, тоді $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\,\mathrm{ctg}\,t$, $dx=-\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt$ або

$x=\dfrac{a}{\cos t}$, тоді $\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\,\mathrm{tg}\,t$, $dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$.

При цьому використовуються тригонометричні формули:

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1,\qquad 1+\mathrm{tg}^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},\qquad 1+\mathrm{ctg}^2 t=\mathrm{cosec}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція відповідає випадку **а**). Тому,

$$x=a\sin t\quad\Rightarrow\quad dx=a\cos t\,dt.$$

Зведемо задану підінтегральну функцію до раціональної функції відносно $\sin x$ і $\cos x$ і обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a^2\sin^2 t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}a\cos t\,dt=a^2\int\sin^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+C.$$

Щоб перейти назад до змінної x, скористаємося виконаною заміною $x=a\sin t$ і знайдемо відповідно $\sin t$, t і $\cos t$:

$$\sin t=\frac{x}{a}\quad\Rightarrow\quad t=\arcsin\frac{x}{a},\qquad \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Підставивши отримані вирази в первісну, матимемо:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Тут ми вважаємо, що $x\in(-a;a)$, тоді $t\in(-\pi/4;\pi/4)$, тому $t=\arcsin\dfrac{x}{a}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}{x^6}dx$.

Розв'язання. Знову має місце випадок **а**). Тут $a^2=5$, тому припускаємо:

$$x=\sqrt{5}\sin t\quad\Rightarrow\quad dx=\sqrt{5}\cos t\,dt.$$

Переходячи до нової змінної, одержимо:

$$\int\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\int\frac{\sqrt{\left(5-5\sin^2 t\right)^3}}{\left(\sqrt{5}\right)^6\sin^6 t}\cdot\sqrt{5}\cos t\,dt=\int\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3\cos^3 t}{\left(\sqrt{5}\right)^6\sin^6 t}\cdot\sqrt{5}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\,dt=\frac{1}{5}\int\mathrm{ctg}^4 t\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{5}\int\mathrm{ctg}^4 t\,d(\mathrm{ctg}\,t)=-\frac{1}{25}\mathrm{ctg}^5 t+C.$$

Повертаючись до змінної x, знайдемо:

$$\sin t=\frac{x}{\sqrt{5}}\quad\Rightarrow\quad \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{5}}=\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}},\qquad \mathrm{ctg}\,t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}.$$

Отже, шуканий інтеграл

$$\int\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}{x^6}dx=C-\frac{1}{25}\cdot\frac{\sqrt{\left(5-x^2\right)^5}}{x^5}.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

Розв'язання. Реалізується випадок **б**). Отже, застосовується підстановка

$$x=a\,\mathrm{tg}\,t\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

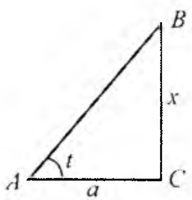
У результаті

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{dx}{a^2\mathrm{tg}^2t\sqrt{a^2+a^2\mathrm{tg}^2t}}\cdot\frac{a\,dt}{\cos^2t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos^2t}{\sin^2t\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}}\,\frac{dt}{\cos^2t}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2t}=\frac{1}{a^2}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2t}=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sin t}+C.$$

Залишилося виконати обернену заміну.

Наведемо ще один спосіб обертання. Із рівності $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ випливає, що $\mathrm{tg}\,t=\frac{x}{a}$. З іншого боку, із прямокутного ΔABC маємо $\mathrm{tg}\,t=\frac{BC}{AC}$. Отже, протилежний катет $BC=x$, прилеглий до $AC=a$ і гіпотенуза $AB=\sqrt{a^2+x^2}$.



Тепер можна визначити будь-яку функцію кута t. Зокрема,

$$\sin t=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Остаточна відповідь:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=C-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику:

$$1+x+x^2=\left(x+\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2.$$

Очевидно, має місце випадок **б**), тому застосовуємо підстановку:

$$x+\frac12=\frac{\sqrt3}{2}\mathrm{tg}\,t\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{\sqrt3}{2}\frac{dt}{\cos^2t}.$$

У результаті маємо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac{\sqrt3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac34\mathrm{tg}^2t+\frac34\right)^3}}\cdot\frac{dt}{\cos^2t}=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{\frac34\sqrt{\frac34}}\int\frac{\cos^3t}{\cos^2t}dt=$$

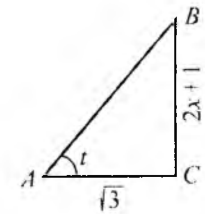
$$=\frac43\int\cos t\,dt=\frac43\sin t+C.$$

Виконуючи обернену заміну, знову скористаємося властивостями прямокутного трикутника. З умови заміни

$$x+\frac12=\frac{\sqrt3}{2}\mathrm{tg}\,t\quad\Rightarrow\quad\mathrm{tg}\,t=\frac{2x+1}{\sqrt3}.$$

Звідси $BC=2x+1$, $AC=\sqrt3$, тоді гіпотенуза

$$AB=\sqrt{(2x+1)^2+\left(\sqrt3\right)^2}=2\sqrt{x^2+x+1}$$



отже,

$$\sin t=\frac{BC}{AB}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Таким чином, шуканий інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac23\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Тут знову реалізується випадок **б**), але цього разу застосуємо підстановку:

$$x=\mathrm{ctg}\,t\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{dt}{\sin^2t}.$$

У результаті

$$\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{(1-x^2)(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{1}{(1-\mathrm{ctg}^2t)(1+\mathrm{ctg}^2t)^{3/2}}\cdot\frac{dt}{\sin^2t}=$$

$$=\int\frac{1}{\frac{\cos^2t-\sin^2t}{\sin^2t}\cdot\frac{1}{\sin^3t}}\cdot\frac{dt}{\sin^2t}=\int\frac{\sin^3t}{2\cos^2t-1}dt.$$

Одержали раціональну відносно $\sin t$ і $\cos t$ підінтегральну функцію. Непарність цієї функції відносно $\sin t$ диктує заміну

$$\cos t=u\quad\Rightarrow\quad-\sin t\,dt=du,$$

виконавши яку, після нескладних перетворень приходимо до табличних інтегралів:

$$\int\frac{\sin^3t}{2\cos^2t-1}dt=\int\frac{(1-\cos^2t)\sin t\,dt}{2\cos^2t-1}=-\int\frac{1-u^2}{2u^2-1}du=\frac12\int\frac{\left(u^2-\frac12\right)-\frac12}{u^2-\frac12}du=$$

$$=\frac{1}{2}\int du-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{\frac{1}{2}}}{u+\sqrt{\frac{1}{2}}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos t-1}{\sqrt{2}\cos t+1}\right|+C.$$

Насамкінець слід повернутися до вихідної змінної x. Дотримуючись прийому, викладеного в прикладах 3 і 4, знайдемо

$$\operatorname{ctg} t=x \quad\Rightarrow\quad \cos t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx$.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Оскільки підінтегральна функція відповідає випадку **в**), застосовується підстановка:

$$x=\frac{2}{\cos t} \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Тоді

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,dx=\int\frac{2}{\cos t}\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}\cdot\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt=8\int\frac{1}{\cos t}\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=8\int\frac{\sin^2 t}{\cos^4 t}dt=8\int\operatorname{tg}^2 t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=8\int\operatorname{tg}^2 t\,d(\operatorname{tg} t)=\frac{8}{3}\operatorname{tg}^3 t+C.$$

Виконуючи обернену заміну $\cos t=\frac{2}{x}$, виразимо $\operatorname{tg} t$ через x:

$$\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, \qquad \operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}.$$

Отже,

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,dx=\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}+C.$$

Стандартна підстановка привела до кінцевого результату. Однак можна запропонувати більш раціональний варіант розв`язання.

Другий спосіб. Наявність у чисельнику множника x, поряд з підкореневим виразом x^2-4, диференціал якого $d\left(x^2-4\right)=2x\,dx$, дає змогу застосувати простішу заміну (див. § 9.2):

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,dx=\left|\begin{matrix}x^2-4=t\\2xdx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t^{3/2}}{3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}+C.$$

Третій спосіб. Не менш вдалою підстановкою для заданого інтеграла виявляється така:

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x^2-4}=t\\x^2-4=t^2\\xdx=tdt\end{matrix}\right|=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}+C.$$

Зауваження 1. При обчисленні інтегралів

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx, \qquad \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx, \qquad \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

(як зрештою, і багатьох інших) не слід формально підходити до вибору заміни змінної. У кожному конкретному випадку вигляд підінтегральної функції може підказати заміну вдалішу, ніж стандартна.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Підінтегральна функція відповідає випадку **в**), тому можна покласти

$$x=\frac{1}{\sin t} \quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt.$$

Завдяки заміні, інтеграл, що містить ірраціональність, перетвориться до інтеграла, раціонального відносно $\sin t$:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{1}{\sin^2 t\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int\frac{\cos t}{\sin^4 t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}}dt=-\int\frac{dt}{\sin^3 t}.$$

До інтеграла, раціонального відносно $\sin t$, застосуємо універсальну тригонометричну підстановку (див. § 9.7):

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z \quad\Rightarrow\quad t=2\operatorname{arctg} z \quad\Rightarrow\quad dt=\frac{2dz}{1+z^2}, \qquad \sin t=\frac{2z}{1+z^2},$$

яка, у свою чергу, зводить задачу до інтегрування раціонального дробу:

$$-\int\frac{dt}{\sin^3 t}=-\int\frac{\left(1+z^2\right)^3}{(2z)^3}\cdot\frac{2dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z^3}dz=-\frac{1}{4}\int\frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}+z\right)dz=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2z^2}+2\ln|z|+\frac{z^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+C.$$

Спростимо отриманий вираз:

$$\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}+C=\frac{1}{8}\left(\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|\right)+C.$$

Тепер повернемося до вихідної змінної x. З первісної заміни маємо $\sin t=\frac{1}{x}$, звідки

$$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},\qquad \operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Отже,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

Другий спосіб. Тригонометричної підстановки і пов'язаних з нею перетворень можна уникнути, якщо зобразити заданий інтеграл у вигляді суми:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\left(x^2-1\right)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=\int\sqrt{x^2-1}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Перший із цих інтегралів може бути визначений за формулою (*), отриманою в прикладі 10, § 9.3

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)+C,$$

де слід покласти $a=-1$, тобто

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

Другий інтеграл взагалі табличний. Таким чином,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int\sqrt{x^2-1}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right)+C.$$

Зауваження 2. Інтеграли розглянутого типу виникають при інтегруванні функцій, раціональних відносно x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Дійсно, виділяючи у квадратному тричлені повний квадрат і вводячи нову змінну (див. § 9.4), можна, залежно від знака виразу $c-\frac{b^2}{4a}$, представити квадратний тричлен у вигляді

$$ax^2+bx+c=\underbrace{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{t^2}+\underbrace{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}_{\pm q^2}=at^2\pm q^2.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Якого виду *ірраціональності* інтегруються за допомогою тригонометричних підстановок?
2. Які *тригонометричні підстановки* застосовуються для інтегрування функцій, що раціонально залежать від x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$?
3. У якому випадку застосовуються підстановки $x=a\sin t$ і $x=a\cos t$?
4. При інтегруванні яких ірраціональних функцій слід використовувати заміну змінної: $x=a\operatorname{tg}t$ або $x=a\operatorname{ctg}t$?
5. За допомогою яких підстановок раціоналізуються інтеграли вигляду $$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx\ ?$$
6. У чому полягає прийом *оберненої заміни* змінної, що використовує властивості прямокутного трикутника?
7. Нехай для розглянутих типів інтегралів підінтегральна функція містить змінну інтегрування в непарному степені. Чи можна обчислювати такі інтеграли, не застосовуючи тригонометричні підстановки?
8. Чи можна при інтегруванні функцій, раціональних відносно $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і x, застосовувати *гіперболічні підстановки*? Відповідь обґрунтувати.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;	2. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$;
3. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;	4. $\int\frac{dx}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}$;
5. $\int\frac{dx}{\left(x^2+16\right)\sqrt{9-x^2}}$;	6. $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$;

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$;

8. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\, dx$;

9. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\, dx$;

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\, dx$;

11. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$;

12. $\int \frac{x^2-x+1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\, dx$;

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{6+x^2}}$;

14. $\int x^2\sqrt{x^2-1}\, dx$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)^3}}$;

16. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\, dx$.

ВІДПОВІДІ

1. $C-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\arcsin x$. **2.** $\frac{x\left(3-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

3. $\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{8}\left(a^2-2x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+C$. **4.** $\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}+C$.

5. $\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C$. **6.** $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\frac{x}{3}\right]+C$.

7. $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **8.** $C-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$. **9.** $\frac{1}{15}\left(3x^2-8\right)\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}+C$.

10. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$. **11.** $\frac{x^3}{3\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}+C$.

12. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$. **13.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}-\sqrt{6}}{x}\right|+C$.

14. $\frac{1}{8}x\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$. **15.** $C-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

16. $\frac{1}{4}\arccos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}+C$.

§ 9.9. ІНТЕГРУВАННЯ РІЗНИХ ФУНКЦІЙ

У попередніх параграфах цього розділу викладені основні *прийоми інтегрування*:
- *безпосереднє* інтегрування;
- метод *заміни змінної*;
- метод інтегрування *частинами*;
- інтегрування *раціонального дробу*.

Кожний із цих прийомів має чіткий алгоритм розв'язання і свою область застосування, де його використання є найефективнішим, а часом і єдино можливим. Особливе положення серед указаних прийомів інтегрування займає *метод заміни змінної*, якому присвячена більша частина матеріалу цього розділу. Цей метод є найпоширенішим, найгнучкішим і, внаслідок цього, найскладнішим і найнеоднозначнішим. Існує багато інтегралів, які допускають кілька варіантів заміни змінної, а отже, не завжди вдається відразу вказати найраціональнішу з них.

Мета цього параграфа навести деякі прийоми обчислення таких інтегралів, вказуючи, по можливості, різні варіанти заміни.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int 2^x e^x dx$.

Розв'язання. Інтеграл стає табличним, якщо розглядати $2e$ як основу степеня показникової функції. Дійсно,

$$\int 2^x e^x dx=\int (2e)^x dx=\frac{(2e)^x}{\ln(2e)}+C=\frac{2^x e^x}{\ln 2+1}+C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

Розв'язання. На перший погляд інтеграл слід брати частинами. Спробуємо, однак, зробити заміну змінної:

$$\arcsin\sqrt{x}=t \quad\Rightarrow\quad dt=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

Тоді

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=2\int t\,dt=t^2+C=\arcsin^2\sqrt{x}+C.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

Розв'язання. *Перший спосіб.* Введемо в чисельнику тригонометричну одиницю і виконаємо почленне ділення:

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx=$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Другий спосіб. Перетворивши вираз у знаменнику до синуса подвійного аргументу, матимемо табличний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{2\,dx}{2\sin x \cos x} = \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$.

Розв'язання. Тригонометричні формули

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

дають змогу позбутися від ірраціональності в підінтегральній функції:

$$\int \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx = \int \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\, dx = \sqrt{2}\int \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| dx =$$

$$= -2\sqrt{2}\int \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) d\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 4\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 4\pi n.$$

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{e^x\left(1-e^x\right)}$, б) $\int \sqrt{1-e^x}\, dx$.

Розв'язання. а) *Перший спосіб.* Здається природним покласти $e^x = t$. Тоді

$$x = \ln t, \qquad dx = \frac{dt}{t}.$$

Переходячи до нової змінної, маємо інтеграл від *раціонального дробу*:

$$\int \frac{dx}{e^x\left(1-e^x\right)} = \int \frac{dt}{t^2(1-t)}.$$

Інтегрування *раціонального дробу* (див. § 9.5) припускає розкладання дробу на суму найпростіших дробів. У даному випадку можна скористатися елементарними перетвореннями підінтегральної функції

$$\int \frac{dt}{t^2(1-t)} = \int \frac{(1-t)+t}{t^2(1-t)}\, dt = \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t(1-t)} = -\frac{1}{t} + \int \frac{(1-t)+t}{t(1-t)}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{t} + \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1-t} = -\frac{1}{t} + \ln t - \ln|1-t| + C.$$

Виконавши обернену заміну змінної $t = e^x$, знайдемо

$$\int \frac{1}{e^x\left(1-e^x\right)}\, dx = -e^{-x} + x - \ln\left|1-e^x\right| + C.$$

Другий спосіб. Будемо виходити з того, що підінтегральна функція – раціональний дріб відносно e^x. Тому спочатку в чисельнику віднімемо і додамо e^x, а потім виконаємо почленне ділення:

$$\int \frac{dx}{e^x\left(1-e^x\right)} = \int \frac{\left(1-e^x\right)+e^x}{e^x\left(1-e^x\right)}\, dx = \int \frac{dx}{e^x} + \int \frac{dx}{1-e^x}.$$

Повторимо ту саму процедуру в другому інтегралі:

$$\int e^{-x}dx + \int \frac{\left(1-e^x\right)+e^x}{1-e^x}\, dx = -e^{-x} + \int dx + \int \frac{e^x dx}{1-e^x} = -e^{-x} + x - \int \frac{d\left(1-e^x\right)}{1-e^x} =$$

$$= x - e^{-x} - \ln\left|1-e^x\right| + C.$$

б) *Перший спосіб.* Тут також можна покласти $e^x = t$, тоді

$$x = \ln t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{t}$$

і заданий інтеграл перетвориться до інтеграла від *ірраціональної функції* відносно змінної t:

$$\int \sqrt{1-e^x}\, dx = \int \frac{\sqrt{1-t}}{t}\, dt.$$

Тепер слід позбутися від ірраціональності. Застосуємо підстановку:

$$\sqrt{1-t} = u \quad \Rightarrow \quad 1-t = u^2 \quad \Rightarrow \quad t = 1-u^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2u\,du,$$

яка зводить останній інтеграл до інтеграла від *раціонального дробу*:

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t}\, dt = \int \frac{u}{1-u^2}(-2u\,du) = 2\int \frac{u^2du}{u^2-1} = 2\int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right) du =$$

$$= 2\int du + 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Первісна знайдена за допомогою двох послідовних замін змінної. Залишилося зробити обернені заміни

$$u = \sqrt{1-t} = \sqrt{1-e^x}$$

і записати відповідь:

$$\int \sqrt{1-e^x}\, dx = 2\sqrt{1-e^x} - \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-e^x}}{1+\sqrt{1-e^x}}\right| + C.$$

Другий спосіб. Зробимо підстановку, що дає змогу позбутися від ірраціональності

$$\sqrt{1-e^x}=u \quad \Rightarrow \quad e^x=1-u^2 \quad \Rightarrow \quad x=\ln\left|1-u^2\right|, \qquad dx=-\frac{2udu}{1-u^2}=\frac{2udu}{u^2-1}.$$

У результаті одержуємо інтеграл відразу від *раціонального дробу*:

$$\int\sqrt{1-e^x}\,dx=\int u\cdot\frac{2udu}{u^2-1}=2\int\frac{u^2du}{u^2-1}.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$.

Розв'язання. У § 9.8 (див. приклад 3) цей інтеграл був обчислений за допомогою тригонометричної підстановки $x=a\,\mathrm{tg}\,t$.

Пропонуємо інший спосіб його обчислення. Вважаючи $x>0$, покладемо:

$$x=\frac{a}{t} \quad \Rightarrow \quad dx=-\frac{adt}{t^2}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=-\int\frac{at^2dt}{a^2t^2\sqrt{a^2+\frac{a^2}{t^2}}}=-\frac{1}{a^2}\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\frac{1}{2a^2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sqrt{t^2+1}+C=C-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Перевага цього прийому в тому, що обернена заміна тут набагато простіша.

Приклад 7. Знайти інтеграли:

а) $\int\frac{x^5}{\sqrt{x^2-2}}dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання. Намагатимемося уникнути тригонометричних підстановок і неминучого в цих випадках інтегрування тригонометричних функцій. Оскільки інтегрування останніх, за винятком найпростіших випадків, полягає в попередньому перетворенні до *раціональних функцій* відносно x.

а) Якщо врахувати ту обставину, що змінна інтегрування x міститься в чисельнику в непарному степені, можна зробити так:

$$\int\frac{x^5}{\sqrt{x^2-2}}dx=\int\frac{x^4\cdot x\,dx}{\sqrt{x^2-2}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2}=t\\ x^2-2=t^2\\ x\,dx=t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^2+2\right)^2\cdot t\,dt}{t}=\int\left(t^2+2\right)^2dt=$$

$$=\int\left(t^4+4t^2+4\right)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+4t+C=\sqrt{x^2-2}\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{8}{15}x^2+\frac{32}{15}\right)+C.$$

б) Тут доцільно спочатку помножити і поділити підінтегральну функцію на x $(x\neq 0)$, а потім позбутися від ірраціональності за допомогою стандартної підстановки:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}=\int\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2+5}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x^2+5}=t\\ x^2+5=t^2\\ x\,dx=t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{t\,dt}{\left(t^2-5\right)t}=\int\frac{dt}{t^2-5}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$, $a>0$.

Розв'язання. Якщо намагатися позбутися від ірраціональності за допомогою заміни

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t,$$

матимемо раціональний дріб із кратними комплексними коренями знаменника і клопіт з його інтегруванням.

У той же час видно, що вихідна підінтегральна функція істотно спрощується, якщо чисельник і знаменник дробу помножити на $(a+x)$:

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\int\frac{|a+x|}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Визначимо знак множника $(a+x)$, провівши додаткове дослідження підінтегральної функції. Виходячи з того, що дріб під коренем має бути невід'ємним, знайдемо:

$$\frac{a+x}{a-x}\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}a+x\geq 0\\ a-x>0,\end{cases} \quad \begin{cases}a+x\leq 0\\ a-x<0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad -a\leq x\leq a,$$

звідки $a+x\geq 0$, тобто $|a+x|=a+x$. У підсумку маємо

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=\int\frac{|a+x|}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки інтегруємо раціональну функцію від $\cos x$, то, застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку (див. § 9.7)

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \quad \Rightarrow \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

приходимо до інтеграла

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{\left(1-t^2\right)^3}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1-t^2\right)^3}\,dt$$

від раціонального дробу, знаменник якого має дійсні кратні корені. Незважаючи на наявність чіткого алгоритму, розкладання раціонального дробу на суму найпростіших дробів у даному випадку є досить трудомісткою операцією (див. § 9.5), оскільки потребує знаходження шістьох невизначених коефіцієнтів.

Другий спосіб. Враховуючи непарність степеня підінтегральної функції, можна скористатися заміною $\sin x=t$, тоді

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x}=\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Розкладаючи підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів, матимемо проблему визначення чотирьох невизначених коефіцієнтів.

Третій спосіб. Спробуємо застосувати метод *інтегрування частинами* (див. § 9.3). Попередньо введемо в чисельнику тригонометричну одиницю і виконаємо почленне ділення:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx=\int \sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx+\int \frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\sin x, & du=\cos x\,dx \\ dv=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx, & v=\dfrac{1}{2\cos^2 x}\end{array}\right|=\sin x\cdot\frac{1}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}+\int \frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$$

Третій спосіб привів до результату набагато швидше.

Зауваження 1. Навіть за наявності чіткої теоретичної схеми обчислення інтеграла певного типу в кожному конкретному випадку слід шукати найпростіші прийоми обчислення. Не потрібно діяти за шаблоном. Очевидний метод інтегрування – не завжди найкращий. Свідченням тому слугує приклад 9.

Приклад 10. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$.

Розв'язання. **а)** Оскільки $\sin x$ і $\cos x$ у знаменнику дробу мають парні степені, спробуємо застосувати підстановку $\operatorname{tg}x=t$:

$$x=\operatorname{arctg}t \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

У результаті маємо

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx=\int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)^2+\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int \frac{2t\,dt}{1+t^4}=\int \frac{d\left(t^2\right)}{1+\left(t^2\right)^2}=\operatorname{arctg}t^2+C=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)+C.$$

Інший спосіб обчислення цього інтеграла враховує наявність у чисельнику множника $\sin 2x$. Це наводить на думку виділити в знаменнику дробу функцію $\cos 2x$.

Дійсно, застосовуючи формули зниження степеня, знаходимо:

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx=\int \frac{\sin 2x\,dx}{\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}=\int \frac{2\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\cos 2x=t \\ -2\sin 2x\,dx=dt\end{array}\right|=-\int \frac{dt}{1+t^2}=-\operatorname{arctg}t+C=C-\operatorname{arctg}(\cos 2x).$$

Будь-кого, хто прочитав попередні параграфи цього розділу, уже не повинно бентежити уявне розходження відповідей.

б) Якщо за аналогією із прикладом **а)** застосувати підстановку $\operatorname{tg}x=t$, отримаємо інтеграл від раціонального дробу $\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$ разом із проблемою розкладання знаменника на квадратичні множники.

Привабливішим у цьому випадку видається варіант, що використовує формули зниження степеня в знаменнику:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}=\int \frac{dx}{\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}=\int \frac{2\,dx}{1+\cos^2 2x}.$$

Після цього природно зробити підстановку:

$$\operatorname{tg}2x=t \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t, \qquad dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}, \qquad \cos^2 2x=\frac{1}{1+t^2},$$

з урахуванням якої знаходимо:

$$\int\frac{2dx}{1+\cos^2 2x}=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграли:

а) $\int e^{\arcsin x}dx$; **б)** $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$.

Розв'язання. **а)** Поклавши тут $\arcsin x=t$, знайдемо

$$x=\sin t \quad\Rightarrow\quad dx=\cos t\,dt.$$

У результаті заміни змінної матимемо:

$$\int e^{\arcsin x}dx=\int e^t\cos t\,dt.$$

Інтеграли такого типу беруться двократним інтегруванням частинами і називаються *циклічними*. Зокрема, отриманий тут інтеграл дорівнює (див. § 9.3, приклад 9):

$$\int e^t\cos t\,dt=\frac{e^t}{2}(\cos t+\sin t)+C.$$

Виконаємо обернену заміну:

$$\int e^{\arcsin x}dx=\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left[\cos(\arcsin x)+\sin(\arcsin x)\right]+C=\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)+C,$$

оскільки

$$\sin(\arcsin x)=x, \qquad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}.$$

б) Тут також попередньо виконаємо заміну змінної

$$\operatorname{arctg}x=t \quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{tg}t \quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t},$$

внаслідок чого інтеграл перетвориться до знайденого раніше:

$$\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx = \int\frac{e^t}{\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^{3/2}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{e^t}{\dfrac{1}{\cos^3 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int e^t\cos t\,dt.$$

Таким чином, задача зведена до попередньої. Щоб виконати обернену заміну, знайдемо:

$$\operatorname{tg}t=x \quad\Rightarrow\quad \cos t=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Отже,

$$\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx=\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{2}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Зауваження 2. У диференціальному численні похідна від будь-якої елементарної функції є функція елементарна. Інша справа – операція інтегрування. Існують такі елементарні функції, інтегрування яких не може бути виконане в скінченному вигляді. Первісна в цьому випадку не є функцією елементарною. Інтеграли від таких функцій називають *такими, що не інтегруються в елементарних функціях* або просто *такими, що не беруться*. До їх числа належать, наприклад, такі:

$$\int\frac{\sin x}{x}dx, \quad \int\frac{\cos x}{x}dx, \quad \int\frac{e^x}{x}dx, \quad \int\sin x^2dx, \quad \int\cos x^2dx, \quad \int e^{-x^2}dx.$$

Ці інтеграли (як і чимало інших) реально існують. Всі вони добре вивчені, табульовані і широко використовуються в різних застосуваннях. Зокрема, в теорії ймовірностей важливу роль відіграє первісна $\Phi(x)$ від функції $e^{-\frac{x^2}{2}}$, що відповідає додатковій умові $\Phi(0)=0$ і називається *інтегралом імовірностей*.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg}x-1}}$;
2. $\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx$;
3. $\int\left(x^3+1\right)\ln x\,dx$;
4. $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;
5. $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;
6. $\int e^{x^3+x+1}\left(3x^2+1\right)dx$;
7. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$;
8. $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$;
9. $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$;
10. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+6}}dx$;
11. $\int x^2\cos^2 3x\,dx$;
12. $\int\frac{2^x}{1-4^x}dx$;

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$;

14. $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$;

15. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

16. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$;

17. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

18. $\int \sqrt{x^2-9}\, dx$;

19. $\int \mathrm{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) dx$;

20. $\int \frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}\, dx$.

ВІДПОВІДІ

1. $2\sqrt{\mathrm{tg}\, x-1}+C$. **2.** $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C$. **3.** $\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\ln x-\frac{x^4}{16}-x+C$.

4. $\ln\left|1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **5.** $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$. **6.** $e^{x^3+x+1}+C$.

7. $C-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}$. **8.** $\frac{3}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

9. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|-\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}+C$. **10.** $\sqrt{x^2+6}\left(\frac{x^2}{3}-4\right)+C$.

11. $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)+C$. **12.** $C-\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right|$.

13. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{1+\sqrt{1-x^3}}\right|+C$.

14. $x\ln^2\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-2\sqrt{1+x^2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+2x+C$.

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x\right)+C$. **16.** $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$.

17. $\frac{x}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **18.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$.

19. $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$. **20.** $C-\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}+x-\ln\left(1+e^x\right)$.

РОЗДІЛ 10
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

§ 10.1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Розіб'ємо відрізок довільно точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n часткових відрізків завдовжки $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $i=0,1,\ldots,n-1$. Виберемо в кожному з них точку ξ_i: $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$, $i=0,1,\ldots,n-1$.

Сума вигляду $S_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ називається *n-ю інтегральною сумою* для функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Визначеним інтегралом від функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя інтегральної суми S_n, знайдена за умови, що довжина найбільшого часткового відрізка прямує до нуля:

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема (*про існування визначеного інтеграла*):

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку, тобто границя інтегральної суми при $\max\Delta x_i\to 0$ існує й не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові відрізки Δx_i, ні від вибору точок ξ_i.

Основні властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

2. $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

3. $\int_a^b A\,f(x)\,dx=A\int_a^b f(x)\,dx$, де $A=\mathrm{Const}$.

4. $\int_a^b\left[\,f(x)\pm\varphi(x)\,\right]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b\varphi(x)\,dx$.

5. *Адитивність відносно проміжку інтегрування*:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

6. Якщо $f(x)\ge 0$ при $x\in[a;b]$, $a<b$, то $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$, причому $\int_a^b f(x)\,dx=0$, якщо $f(x)\equiv 0$.

7. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$, $a<b$, то й функція $|f(x)|$ інтегровна на цьому відрізку, причому $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

8. Теорема (*про інтегрування нерівностей*). Якщо $f(x)\ge\varphi(x)$ при $x\in[a;b]$, $a<b$, то
$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

9. Теорема (*про оцінку визначеного інтеграла*). Якщо $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ і $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то
$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx \le M\cdot(b-a).$$

10. Теорема (*про середнє в інтегральному обчисленні*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, $a<b$, то на цьому відрізку існує хоча б одна точка $\xi\in[a;b]$ така, що
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$
Число $\overline{f}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ – називають *середнім значенням функції* на $[a;b]$.

11. Теорема (*про інтегрування в симетричних границях*).
Якщо функція $f(x)$ – парна, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
Якщо функція $f(x)$ – непарна, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

12. Теорема (*про інтеграл зі змінною верхньою межею*). Якщо функція $f(x)$ неперервна і $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, то $\Phi'(x)=f(x)$.

13. *Формула Ньютона–Лейбніца*. Якщо $F(x)$ – яка-небудь первісна неперервної функції $f(x)$, то:
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Приклад 1. Обчислити, виходячи з означення, інтеграли:

а) $\int_{-1}^{4}(x+1)\,dx$; **б)** $\int_0^1 e^x dx$.

Розв'язання. **а)** Насамперед зауважимо, що функція $f(x)=x+1$ неперервна на всій числовій осі. Тому на відрізку $[-1;4]$ інтеграл від цієї функції існує і його можна визначити, побудувавши інтегральну суму для будь-якого зручного розбиття і підходящого вибору точок ξ_i.

Розіб'ємо відрізок $[-1;4]$ на n рівних частин точками ділення $x_i=-1+\frac{5i}{n}$

$(i=0,1,2,\dots,n-1)$. Довжина кожного часткового відрізка $\Delta x_i=\frac{5}{n}$, причому $\frac{5}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

В якості точок ξ_i візьмемо середини часткових відрізків: $\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ $(i=0,1,2,\dots,n-1)$. Оскільки $x_i=-1+\frac{5i}{n}$, $x_{i+1}=-1+\frac{5(i+1)}{n}$ і $f(\xi_i)=1+\xi_i$, то інтегральна сума набуває вигляду
$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{5}{n}\cdot\left(1+\frac{-1+\frac{5i}{n}-1+\frac{5(i+1)}{n}}{2}\right)=\frac{5}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5i}{n}+\frac{5}{2n}\right)=\frac{25}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{25}{n^2}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}\right)=\frac{25}{n^2}\cdot\frac{n^2}{2}=\frac{25}{2}.$$

Тут враховано, що $\sum_{i=0}^{n-1} i=0+1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ – сума арифметичної прогресії, а $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n}=\frac{n}{2}$.

Інтегральна сума не залежить від n, її границя
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{2}=12{,}5 \quad\Rightarrow\quad \int_{-1}^{4}(x+1)\,dx=12{,}5.$$

Користуючись формулою Ньютона–Лейбніца, матимемо той самий результат:
$$\int_{-1}^{4}(x+1)\,dx=\int_{-1}^{4}x\,dx+\int_{-1}^{4}dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{25}{2}-0=12{,}5.$$

б) Функція $f(x)=e^x$ неперервна на всій числовій осі, тому інтеграл від цієї функції на відрізку $[0;1]$ існує. Складемо інтегральну суму, розбиваючи заданий відрізок $[0;1]$ на n рівних частин точками ділення $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$, при цьому $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, …, $x_i=\frac{i}{n}$, …, $x_n=1$. Довжина кожного часткового відрізка $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, причому $\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$.

За точки ξ_i візьмемо ліві кінці часткових відрізків $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0,1,2,\ldots,\ldots,n-1)$. Складемо інтегральну суму й обчислимо її, скориставшись формулою суми геометричної прогресії:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \ldots + e^{\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\left(e^{1/n}\right)^n}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{1/n}} = \frac{1-e}{n\left(1-e^{1/n}\right)}.$$

Використовуючи формулу $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{1/n} = 1$ (*друга визначна границя*), знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-e}{n\left(1-e^{1/n}\right)} = (e-1) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = e-1.$$

Безпосереднє застосування формули Ньютона–Лейбніца дає той самий результат:

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e-1.$$

Зауваження. Очевидно, що *формула Ньютона–Лейбніца* являє собою простий і ефективний засіб для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції.

Приклад 2. Показати, що функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне}, \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне} \end{cases}$$

не інтегровна на проміжку $[0;1]$.

Розв'язання. Нехай відрізок $[0;1]$ довільно розбитий на часткові інтервали.

1) Вибираючи на кожному частковому відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ ірраціональне ξ_i і враховуючи, що за означенням $f(\xi_i) = 0$, знайдемо

$$S_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n^{(1)} = 0.$$

2) Вибираючи ξ_i, що дорівнює раціональному числу, маємо

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n^{(2)} = 1.$$

Як бачимо, результат *залежить* від способу вибору точок ξ_i на частковому відрізку. Виходить, функція Діріхле не інтегровна на $[0;1]$.

Приклад 3. Знайти середнє значення функції $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ на відрізку $[1;5]$.

Розв'язання. Відповідно до *теореми про середнє* (властивість 10), знаходимо

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{5-1}\int_1^5 \left(3x^2+2x-1\right)dx = \frac{1}{4}\left(x^3+x^2-x\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(125+25-5)-(1+1-1)\right] = \frac{1}{4}\cdot 144 = 36.$$

Приклад 4. Не обчислюючи, встановити, який із заданих інтегралів більший:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \quad \text{чи} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx.$$

Розв'язання. Оскільки $0 \le \sin x \le 1$ при $x \in [0;\pi/2]$, то $\sin^n x \ge \sin^{n+1} x$, тому відповідно до *теореми про інтегрування нерівностей* (властивість 8)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx \ge \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x\,dx.$$

Приклад 5. Довести нерівність $\frac{2}{5} \le \int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо найбільше і найменше значення підінтегральної функції на відрізку $[1;2]$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Критичні точки заданої функції

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{і} \quad x_2 = -1.$$

Точка x_1 збігається з лівим кінцем відрізка інтегрування, а точка x_2 лежить за межами цього відрізка, тому вона нас не цікавить.

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка інтегрування:

$$f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2}{5}, \quad M = \frac{1}{2}.$$

Отже, у силу *теореми про оцінку визначеного інтеграла* (властивість 9), де $b-a = 2-1 = 1$, маємо

$$\frac{2}{5}\cdot 1 \le \int_1^2 \frac{x\ dx}{x^2+1} \le \frac{1}{2}\cdot 1,$$

що й потрібно довести.

Приклад 6. Оцінити інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ спадає на відрізку $[\pi/6;\ \pi/3]$, оскільки у всіх внутрішніх точках цього відрізка її похідна

$$f'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-\operatorname{tg} x)\cdot\cos x}{x^2}<0$$

Дійсно, покажемо (див. частина 1, § 6.8), що $x-\operatorname{tg}x<0$ при $x\in[\pi/6;\ \pi/3]$. Розглянемо функцію $\varphi(x)=x-\operatorname{tg}x$. Оскільки її похідна $\varphi'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=$ $=-\operatorname{tg}^2 x<0$ для всіх x, то функція $\varphi(x)$ спадає на проміжку $[\pi/6;\ \pi/3]$. Оскільки на лівому кінці $\varphi(\pi/6)=\pi/6-\operatorname{tg}(\pi/6)=\pi/6-\frac{1}{\sqrt{3}}<0$, то $\varphi(x)=x-\operatorname{tg}x<0$ при $x\in[\pi/6;\ \pi/3]$.

Отже, найменшого і найбільшого значення функція набуває на кінцях відрізка, тобто

$$m=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi};\qquad M=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{\pi}.$$

Отже,

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\le\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\sqrt{3}}{4}\le\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Визначити знак інтеграла $J=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція зазнає "усувного" розриву в точці $x=0$. Можна довизначити її в цій точці, надавши їй значення, що дорівнює 1 (див. частину 1, § 4.7, приклад 4). Тоді підінтегральну функцію можна вважати неперервною на всьому відрізку $[0;\ 2\pi]$.

Нехай $J=J_1+J_2$, де

$$J_1=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx,\qquad J_2=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Підінтегральна функція не перетворюється тотожно в нуль, причому оскільки $\frac{\sin x}{x}\ge 0$ на відрізку $[0;\ \pi]$, то $J_1>0$, а оскільки $\frac{\sin x}{x}\le 0$ на відрізку $[\pi;\ 2\pi]$, то $J_2<0$. Залишилося встановити співвідношення між J_1 і J_2.

Чисельники підінтегральних виразів рівні за абсолютною величиною. Знаменник у другому інтегралі більший, ніж у першому. Отже, $|J_2|<J_1$, а тому $J_1+J_2>0$. Таким чином,

$$J=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx>0.$$

Приклад 8. Оцінити абсолютну величину інтеграла $\int\limits_5^{15}\frac{\cos x}{x^5}\,dx$.

Розв'язання. Оскільки функція $\cos x$ обмежена $(|\cos x|\le 1)$, то при додатніх x маємо $\left|\frac{\cos x}{x^5}\right|\le\frac{1}{x^5}$. Отже, при $x\ge 5$ модуль підінтегральної функції менше за її максимальне значення $\left.\frac{1}{x^5}\right|_{x=5}=5^{-5}=M$, тобто $\left|\frac{\cos x}{x^5}\right|\le 5^{-5}$.

Користуючись властивістю 7 визначеного інтеграла, матимемо:

$$\left|\int\limits_5^{15}\frac{\cos x}{x^5}\,dx\right|\le\int\limits_5^{15}\left|\frac{\cos x}{x^5}\right|dx\le\int\limits_5^{15}\frac{1}{x^5}\,dx.$$

Відповідно до *теореми про оцінку визначеного інтеграла* (властивість 9) знайдемо:

$$\left|\int\limits_5^{15}\frac{\cos x}{x^5}\,dx\right|\le(15-5)\cdot 5^{-5}=10\cdot 2^5\cdot 10^{-5}=2^5\cdot 10^{-4}=32\cdot 10^{-4}.$$

Точне значення заданого інтеграла $2{,}08\cdot 10^{-4}$.

Приклад 9. Функції $F(x)=\operatorname{arctg}x$ і $\Phi(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ слугують первісними для функції $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Чи можуть обидві ці первісні бути використані при обчисленні інтеграла $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ за формулою Ньютона–Лейбніца ?

Розв'язання. Легко переконатися, що $F'(x)=f(x)$ і $\Phi'(x)=f(x)$.

Дійсно,

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \qquad \Phi'(x)=-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}.$$

З іншого боку,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=F(x)\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\Phi(x)\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\operatorname{arcctg}1-\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Прийшли до абсурдного результату, оскільки $\frac{\pi}{2}\neq-\frac{\pi}{2}$. Помилка викликана тим, що в точці $x=0$, яка належить відрізку $[-1;1]$, функція $\Phi(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ не визначена, отже, рівність $\Phi'(x)=f(x)$ при $x=0$ позбавлена змісту. Вся справа в тому, що в точці $x=0$ функція $\Phi(x)$ зазнає *розриву I роду*, оскільки

$$\lim_{x\to0-\varepsilon}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\pi, \qquad \lim_{x\to0+\varepsilon}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=0.$$

Наявність неусувного розриву функції $\Phi(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ у точці $x=0$ і призвело до того, що застосування формули Ньютона–Лейбніца виявилося незаконним.

Приклад 10. Чи можна застосувати формулу Ньютона–Лейбніца для обчислення інтеграла $\int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}$?

Розв'язання. З безпосереднього обчислення за формулою Ньютона–Лейбніца випливає, що:

$$\int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}\Big|_0^3=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}<0.$$

Але цей результат помилковий, тому що визначений інтеграл від додатної функції є додатним числом. Наявність помилки пояснюється тим, що підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ на відрізку $[0;3]$ зазнає *розриву II роду*, оскільки $\lim\limits_{x\to2+\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2-\varepsilon}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$.

Отже, порушення неперервності функції $f(x)$ хоча б в одній точці проміжку $[a;b]$ може призвести до помилкового результату.

Питання про обчислення подібних інтегралів детальніше розглянемо при вивченні *невласних інтегралів* (див. далі § 10.9).

Приклад 11. Довести, що:

а) $\int_{-\pi/8}^{\pi/8}x^6\sin^7x\,dx=0$; **б)** $\int_{-1}^{1}e^{\cos x}dx=2\int_0^1e^{\cos x}dx$.

Розв'язання. Доведення пов'язане з особливостями обчислення визначеного інтеграла *в симетричних межах* (властивість 11). Як відомо, якщо функція $f(x)$ – парна, то

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^af(x)\,dx;$$

якщо функція $f(x)$ – непарна, то $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$.

а) Легко помітити, що підінтегральна функція $f(x)=x^6\sin^7x$ – непарна, оскільки $f(-x)=-f(x)$, отже,

$$\int_{-\pi/8}^{\pi/8}x^6\sin^7x\,dx=0.$$

б) Підінтегральна функція $f(x)=e^{\cos x}$ – парна, оскільки $f(-x)=f(x)$, тому

$$\int_{-1}^{1}e^{\cos x}dx=2\int_0^1e^{\cos x}dx.$$

Приклад 12. Знайти похідну за змінної x від функцій:

а) $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$; **б)** $F(x)=\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt$.

Розв'язання. При знаходженні похідної $F'(x)$ скористаємося правилом диференціювання складної функції і теоремою про інтеграл *зі змінною верхньою межею* (властивість 12). Знаходимо відповідно:

а) $F'_x(x)=\left(\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right)'_x=\frac{\sin x}{x}$.

б) $F'_x(x)=\left(\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt\right)'_{2x}\cdot(2x)'_x=\frac{\sin2x}{2x}\cdot2=\frac{\sin2x}{x}$.

Приклад 13. Знайти похідну за x від функції $F(x)=\int\limits_{2/x}^{x^2}\frac{dt}{t},\ x>0$.

Розв'язання. Скориставшись *адитивністю* визначеного інтеграла відносно проміжку інтегрування (властивість 5) і властивістю 1, перепишемо заданий інтеграл у вигляді:

$$F(x)=\int\limits_{2/x}^{C}\frac{dt}{t}+\int\limits_{C}^{x^2}\frac{dt}{t}=\int\limits_{C}^{x^2}\frac{dt}{t}-\int\limits_{C}^{2/x}\frac{dt}{t},$$

де C $(C>0)$ – довільна стала.

Знайдемо похідну $F'(x)$, застосовуючи правило диференціювання складної функції і властивість 12. Дістаємо

$$F'_x(x)=\left(\int\limits_{C}^{x^2}\frac{dt}{t}\right)'_{x^2}\cdot\left(x^2\right)'_x-\left(\int\limits_{C}^{2/x}\frac{dt}{t}\right)'_{2/x}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'_x=\frac{1}{x^2}\cdot 2x-\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}.$$

Зауваження. У тих випадках, коли первісна неперервної функції виражається в скінченному вигляді через елементарні функції (див. розділ 9), визначений інтеграл обчислюється безпосередньо за формулою Ньютона–Лейбніца.

Приклад 14. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)dx$; **б)** $\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$; **в)** $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x+2}$;

г) $\int\limits_{0}^{1}e^{3x}dx$; **д)** $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{x^2}{x^2+1}dx$; **е)** $\int\limits_{0}^{2}|1-x|\,dx$.

Розв'язання. **а)** Представляючи інтеграл від алгебраїчної суми у вигляді алгебраїчної суми визначених інтегралів (властивість 4), матимемо:

$$\int\limits_{-1}^{1}(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{1}=(1+3)-(1-3)=6.$$

б) Виконуючи почленне ділення, зведемо заданий інтеграл до алгебраїчної суми табличних інтегралів і застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\limits_{1}^{4}\frac{1+x^{1/2}}{x^2}dx=\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{1}{x^2}+x^{-3/2}\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-2x^{-1/2}\right)\Big|_{1}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_{1}^{4}=\left(-\frac{1}{4}-1\right)-(-1-2)=-1\frac{1}{4}+3=\frac{7}{4}.$$

У прикладах **в)** і **г)** скористаємося найпростішими прийомами інтегрування і формулою Ньютона–Лейбніца:

в) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x+2}=\left(\ln|x+2|\right)\Big|_{2}^{3}=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}$.

г) $\int\limits_{0}^{1}e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$.

д) Підінтегральна функція являє собою неправильний дріб. Тому спочатку виділимо цілу частину функції (див. § 9.5), потім виконаємо інтегрування і, нарешті, скористаємося формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{x^2\,dx}{x^2+1}=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_{0}^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-1.$$

е) Враховуючи, що підінтегральна функція

$$f(x)=|1-x|=\begin{cases}1-x, & \text{якщо } 1-x\ge 0,\\ x-1, & \text{якщо } 1-x<0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{якщо } x\le 1,\\ x-1, & \text{якщо } x>1,\end{cases}$$

користуючись властивістю 5, матимемо

$$\int\limits_{0}^{2}|1-x|\,dx=\int\limits_{0}^{1}(1-x)\,dx+\int\limits_{1}^{2}(x-1)\,dx=-\frac{(1-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}+\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається *інтегральною сумою* функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$?
2. Чи можна в означенні границі інтегральної суми умову $\max\Delta x_i\to 0$ замінити умовою $n\to\infty$? Відповідь обгрунтувати.
3. Скільки інтегральних сум можна скласти для заданого способу розбиття проміжку $[a;b]$?
4. Що називається *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$?
5. Сформулювати *теорему існування* визначеного інтеграла.
6. Що є *результатом обчислення* визначеного інтеграла, функція чи число?
7. Сформулювати *властивість лінійності* визначеного інтеграла.
8. Сформулювати *властивість адитивності* визначеного інтеграла відносно проміжку інтегрування.
9. Відомо, що $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx\ge 0$. Чи випливає звідси, що $f(x)\ge 0$ для $x\in[a;b]$?

10. Сформулювати *теорему про інтегрування нерівностей.*
11. Сформулювати *теорему про оцінку* визначеного інтеграла.
12. Сформулювати *теорему про середнє* в інтегральному обчисленні. Дати її геометричну інтерпретацію.
13. Чому в теоремі про середнє точку ξ не можна вважати довільною точкою проміжку $[a; b]$?
14. Навести приклад функції, для якої теорема про середнє справедлива для будь-якої точки проміжку $[a; b]$.
15. Сформулювати властивість визначеного інтеграла про інтегрування функції *в симетричних межах.*
16. Довести, що $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(-x)\,dx$.
17. Довести, що для будь-якої неперервної функції $f(x)$ виконується рівність
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx.$$
18. Сформулювати *теорему про інтеграл зі змінною верхньою межею.*
19. Сформулювати і довести формулу *Ньютона–Лейбніца.*
20. Яка формула встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами? Відповідь обґрунтувати.
21. Чому формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца призводить до неправильного результату при обчисленні інтеграла $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$?
22. Виразити за допомогою визначеного інтеграла поняття площі криволінійної трапеції, пройденого шляху, роботи змінної сили, маси.
23. Знайти помилку в таких обчисленнях:
$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = 0.$$
(Підінтегральна функція неперервна на відрізку $[0;\pi]$ і набуває всюди на цьому відрізку, крім точки $x = \pi/2$, додатних значень, отже, повинні мати додатне число).
24. Чи існує $\int_a^b |f(x)|\,dx$, де
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне,} \\ -1, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Встановити (не обчислюючи), який з інтегралів більший:

1.1. $\int_0^1 e^{x^2} dx$ чи $\int_0^1 e^{x} dx$;

1.2. $\int_1^2 e^{x^2} dx$ чи $\int_1^2 e^{x} dx$;

1.3. $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ чи $\int_{-1}^1 x^2\,dx$;

1.4. $\int_0^1 x^3 \cos^2 x\,dx$ чи $\int_0^1 x^2 \cos^2 x\,dx$;

1.5. $\int_1^e x \ln x\,dx$ чи $\int_1^e x \ln^2 x\,dx$.

2. Оцінити інтеграли:

2.1. $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+4}\,dx$; 2.2. $\int_0^2 \sqrt{9+x^4}\,dx$;

2.3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{x}\,dx$; 2.4. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$;

2.5. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+2\cos x}$; 2.6. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

3. Знайти середнє значення функції на вказаному відрізку:

3.1. $f(x) = 3^x - 2x + 3$, $[0; 2]$; 3.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $[0; 1]$;

3.3. $f(x) = \cos^2 x$, $[0; \pi]$; 3.4. $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Знайти середнє значення сили струму за півперіод, якщо сила змінного струму змінюється за законом $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, де T – період.

5. Довести нерівності:

5.1. $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$; 5.2. $9 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2}\,dx < 9{,}5$;

5.3. $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e$.

6. Показати, що

6.1. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \sin^2 x \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0$; 6.2. $\int\limits_{-2}^{2} x^3 \cos^k x\, dx = 0$, де $k > 0$.

7. Знайти похідні таких функцій:

7.1. $F(x) = \int\limits_{2}^{\sqrt{x}} \frac{2\sin t}{t} dt$; 7.2. $F(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt \quad (x > 0)$.

8. Застосовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити такі інтеграли:

8.1. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x}\, dx$; 8.2. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$;

8.3. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$; 8.4. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

8.5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 8.6. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2x\, dx$;

8.7. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x}$; 8.8. $\int\limits_{0}^{1} (x - 2e^x)\, dx$;

8.9. $\int\limits_{0}^{8} (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\, dx$; 8.10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x-1}{x^3+x} dx$.

ВІДПОВІДІ

1.1. Другий. **1.2.** Перший. **1.3.** Перший. **1.4.** Другий. **1.5.** Перший. **2.1.** $2 \le I \le \sqrt{7}$. **2.2.** $6 \le I \le 10$. **2.3.** $0 \le I \le \frac{3}{2}$. **2.4.** $\frac{1}{10\sqrt{2}} \le I \le \frac{1}{10}$. **2.5.** $\frac{\pi}{6} \le I \le \frac{\pi}{4}$. **2.6.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}} \le I \le \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **3.1.** $f(\xi) = \frac{4}{\ln 3} + 1$. **3.2.** $f(\xi) = \frac{\pi}{6}$. **3.3.** $f(\xi) = \frac{1}{2}$. **3.4.** $f(\xi) = \frac{4}{\pi} - 1$. **4.** $I\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{2}{\pi} I_0 \cos\varphi$. **7.1.** $F'(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$. **7.2.** $F'(x) = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x$. **8.1.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **8.2.** 0. **8.3.** $\frac{3}{2}$. **8.4.** $\frac{\pi}{6}$. **8.5.** $\mathrm{arctg}\,3 - \mathrm{arctg}\,2$. **8.6.** 1. **8.7.** $\frac{3}{2}$. **8.8.** $\frac{5}{2} - 2e$. **8.9.** $33\frac{1}{3}$. **8.10.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8} + 2\left(\mathrm{arctg}\,2 - \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 10.2. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

I. Теорема. Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$ функція. Якщо функція $x = \varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\varphi(t)$ – диференційовна монотонна функція, задана на відрізку $[\alpha;\beta]$;
2) значення функції $x = \varphi(t)$ при зміні t у проміжку $[\alpha;\beta]$ не виходять за межі відрізка $[a;b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

то справедливою є *формула заміни змінної (підстановки)* у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{10.2.1}$$

Теорема справедлива також у тому випадку, якщо диференційовність і монотонність функції $\varphi(t)$ замінити неперервністю функцій $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$.

II. Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[a;b]$, то справедливою є *формула інтегрування частинами*:

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx \quad \text{або} \quad \int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{10.2.2}$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Нехай $x = 2\sin t$, тоді $dx = 2\cos t\,dt$. Визначимо нові межі інтегрування.

Якщо нижня межа $x_н = 0$, то $0 = 2\sin t$ і із рівняння $\sin t = 0$ випливає $t_н = 0$; якщо верхня межа $x_в = 2$, то $2 = 2\sin t$ і із рівняння $\sin t = 1$ випливає $t_в = \pi/2$, де $t_н$ і $t_в$ – нові значення нижньої і верхньої меж інтегрування відповідно. Отже, змінна t змінюється від 0 до $\pi/2$.

Переконаємося в законності цієї підстановки:

1) функція $x = 2\sin t$ диференційовна і монотонна на відрізку $[0;\pi/2]$;
2) при зміні t на проміжку $[0;\pi/2]$ значення функції $x = 2\sin t$ зростають і не виходять за межі $[0;2]$;
3) при цьому $\varphi(0) = 2\sin 0 = 0 = a$ і $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 = b$.

Зауважимо також, що функції $\varphi(t) = 2\sin t$ і $\varphi'(t) = 2\cos t$ неперервні на відрізку $[0;\pi/2]$.

Тепер заданий інтеграл за змінною x зведемо до інтеграла за змінною t і виконаємо інтегрування:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2\cdot\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Тут враховано, що $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$ при $t\in[0;\pi/2]$.

Зауваження 1. Відразу ж підкреслимо, що у визначеному інтегралі, відповідно до умов *теореми про заміну змінної*, крім безпосередньої заміни змінної інтегрування потрібно *змінити також межі інтегрування*. У зв'язку із цим відпадає необхідність оберненого перетворення до первісної змінної, обов'язкового у випадку невизначеного інтеграла.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Розв'язання. На цьому прикладі продемонструємо гнучкість і можливості методу заміни змінної у визначеному інтегралі.

Перший спосіб. Виконаємо *заміну змінної* $x=\cos t$, тоді $dx=-\sin t\,dt$. При цьому, якщо $x=0$, то $t=\frac{\pi}{2}$, якщо $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $t=\frac{\pi}{4}$, оскільки

$$t=\arccos x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_{в}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}, \\ t_{н}=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Переконаємося, що ця підстановка задовольняє всі умови *теореми про заміну змінної* у визначеному інтегралі. Дійсно:

1) функція $x=\varphi(t)=\cos t$ і її похідна $\varphi'(t)=-\sin t$ неперервні на всій числовій осі, а отже, і на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$;

2) якщо нова змінна t змінюється в межах $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, то значення змінної x пробігають відрізок $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, при цьому функція $\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}$ визначена і неперервна на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Виразимо підінтегральну функцію через нову змінну:

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}, \qquad \left(\text{оскільки } \operatorname{tg}\frac{t}{2}>0 \text{ при } t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Тепер заданий інтеграл послідовно зводиться до табличного:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = -\int_{\pi/2}^{\pi/4} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\sin t\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin^2\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\cos t)\,dt = (t-\sin t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Другий спосіб. Виконаємо попередні перетворення підінтегральної функції, помноживши і поділивши вираз під коренем на $(1-x)$, оскільки на відрізку інтегрування $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ різниця $(1-x)$ додатна:

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx .$$

Тепер перетворимо отриманий інтеграл на сумму інтегралів

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

перший з яких взагалі табличний

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4},$$

а другий береться за допомогою *оберненої заміни змінної* $\sqrt{1-x^2}=t$, яка також задовольняє умови *теореми про заміну змінної*. У цьому разі

$$1-x^2=t^2 \quad \Rightarrow \quad -x\,dx=t\,dt$$

і маємо такі нові межі інтегрування:

$$x_{н}=0 \quad \Rightarrow \quad t_{н}=\sqrt{1-0}=1, \qquad x_{в}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{в}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким чином,

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{t\,dt}{t} = \int_1^{\sqrt{2}/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Отже, вихідний інтеграл

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

Зауваження 2. Нарівні з підстановкою $x = \varphi(t)$ застосовують і обернену підстановку $t = \psi(x)$ (саме так і зроблено в наведеному вище прикладі, де заданий інтеграл обчислено двома способами).

У цьому випадку межі інтегрування $t_н$ і $t_в$ визначаються безпосередньо: $t_н = \psi(a)$ і $t_в = \psi(b)$, а функція $\varphi(t)$, як і раніше, має задовольняти всі умови теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі.

Приклад 3. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; б) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

Розв'язання. **а)** Виконаємо заміну змінної $\sqrt{1+x} = t$. Межі інтегрування зміняться так:

$$x_н = 3 \;\Rightarrow\; t_н = \sqrt{1+3} = 2, \qquad x_в = 8 \;\Rightarrow\; t_в = \sqrt{1+8} = 3,$$

тобто нова змінна $t \in [2;3]$.

Функція $x = t^2 - 1$, обернена до функції $t = \sqrt{1+x}$, і її похідна $x'_t = 2t$ є неперервними на відрізку $[2;3]$. Таким чином, умови *теореми про заміну змінної* дотримані.

Інтегруючи, одержуємо:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(9 - 3 - \frac{8}{3} + 2\right) = \frac{32}{3}.$$

б) Застосуємо підстановку $\sqrt{e^x - 1} = t$. Оскільки

$$x_н = 0 \;\Rightarrow\; t_н = \sqrt{e^0 - 1} = 0 \quad і \quad x_в = \ln 5 \;\Rightarrow\; t_в = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2,$$

то легко переконатися, що умови *теореми про заміну змінної* виконуються.

Дійсно, функція $x = \ln(1+t^2)$, обернена до функції $t = \sqrt{e^x - 1}$, разом зі своєю похідною $x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$ є неперервною в межах зміни змінної $t \in [0;2]$.

Переходячи до нової змінної, знайдемо:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = 2\int_0^2 \frac{t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - 2\,\mathrm{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2\cdot\left(2 - 2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграли:

а) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$; б) $\int_{2/3}^{10/3} \frac{x\ dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

Розв'язання. **а)** Застосуємо тригонометричну підстановку:

$$x = \frac{2}{\cos t} \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt \quad\Rightarrow\quad t = \arccos\frac{2}{x}.$$

Знайдемо нові межі інтегрування. Відповідність між старими і новими межами інтегрування оформимо у вигляді таблиці:

x	2	4
t	0	$\pi/3$

На відрізку $[0;\pi/3]$ функція $x = \frac{2}{\cos t}$ диференційована й монотонна, що забезпечує законність підстановки. Отже,

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}}{\frac{16}{\cos^4 t}} \cdot \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3} \sin^2 t\,d(\sin t) =$$

$$= \frac{1}{12}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{12}\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{1}{12}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

б) Заданий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\sqrt{3x-1} = t$:

$$3x - 1 = t^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{3}(t^2+1) \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2}{3}t\,dt.$$

Визначимо відповідність між межами інтегрування:

x	2/3	10/3
t	1	3

Тоді

$$\int_{2/3}^{10/3}\frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}=\int_1^3\frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}t}{t^2\cdot t}\,dt=\frac{2}{9}\int_1^3\frac{t^2+1}{t^2}\,dt=\frac{2}{9}\int_1^3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3=\frac{2}{9}\left(3-\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{16}{27}.$$

Зауваження 3. Якщо будь-яка з умов *теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі* не виконується, результат обчислень виявляється неправильним.

Приклад 5. Чи можна застосувати універсальну тригонометричну підстановку при обчисленні визначеного інтеграла $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+2\sin x}$?

Розв'язання. При обчисленні невизначеного інтеграла такого типу підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ є єдино можливою. Однак до заданого визначеного інтеграла її застосувати не можна, оскільки у внутрішній точці відрізка інтегрування $x=\pi$ функція $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не існує.

Зауваження 4. Надалі ми не зупинятимемося на обґрунтуванні законності застосовуваних підстановок, залишаючи це читачеві.

Приклад 6. Довести, що:

а) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; **б)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$.

Розв'язання. **а)** В інтегралі, що стоїть справа, виконаємо заміну змінної:

$$x=\frac{\pi}{2}-t \quad\Rightarrow\quad dx=-dt.$$

Тоді

$$x_н=0 \;\Rightarrow\; t_н=\pi/2, \qquad x_в=\pi/2 \;\Rightarrow\; t_в=0.$$

Отже,

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx=-\int_{\pi/2}^{0} f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt=\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt=\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx,$$

що й потрібно довести.

б) В інтегралі справа, спочатку перетворимо підінтегральний вираз, користуючись формулою зведення, а потім виконаємо заміну змінної:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\left|\begin{array}{c|cc} \frac{\pi}{2}-x=t & x & t\\ & 0 & \pi/2\\ dx=-dt & \pi/4 & \pi/4\end{array}\right|=-\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{dt}{\sin t}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}.$$

Оскільки величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin t}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}$, то $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$.

Приклад 7. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/4}\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$; **б)** $\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

Розв'язання. **а)** Покладемо $\operatorname{tg}\varphi=t$ і виразимо φ через t:

$$\varphi=\operatorname{arctg}t \quad\Rightarrow\quad d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Нові межі інтегрування:

φ	0	$\pi/4$
t	0	1

У результаті заміни змінної інтеграл легко обчислюється:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi=\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|\Big|_0^1=\ln 2.$$

б) Оскільки функція $\sin\varphi$ входить у підінтегральний вираз у непарному степені, можна застосувати заміну:

$$\cos\varphi=t \quad\Rightarrow\quad -\sin\varphi\,d\varphi=dt.$$

Тоді

φ	0	$\pi/2$
t	1	0

і заданий інтеграл зводиться до інтеграла за змінною t:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sqrt{\cos\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi=-\int_1^0\left(1-t^2\right)\sqrt{t}\,dt.$$

Переставимо місцями нижню і верхню межі інтегрування, скориставшись властивістю 1 визначеного інтеграла, і обчислимо інтеграл:

$$-\int_1^0\left(1-t^2\right)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1\left(1-t^2\right)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1\left(\sqrt{t}-t^2\sqrt{t}\right)dt=\left(\frac{t^{3/2}}{3/2}-\frac{t^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{2}{7}=\frac{8}{21}.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Межі інтегрування *симетричні відносно нуля*. Оскільки із симетричними межами пов'язана одна із властивостей визначеного інтеграла (властивість 11), то природно поцікавитися парністю підінтегральної функції.

Оскільки функція $f(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$ парна, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Тепер перейдемо до обчислення інтеграла, зробивши заміну змінної:

$$x = 3\sin t \quad \Rightarrow \quad dx = 3\cos t\,dt.$$

Тоді

x	0	3
t	0	$\pi/2$

і, отже, матимемо

$$2\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} 9\sin^2 t\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = 2\cdot 81\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt.$$

При інтегруванні парних додатних степенів функцій $\sin t$ і $\cos t$ застосовують формули зниження степеня. Тут $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$. Отже,

$$2\cdot 81\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{81}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{81}{4}\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{81}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81}{8}\pi.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{e} x^2\ln x\,dx$.

Розв'язання. Як відомо (див. § 9.2), інтеграли цього типу беруть *методом інтегрування частинами* (10.2.2).

Тому покладемо

$$u=\ln x,\quad dv = x^2dx \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{x},\quad v=\frac{x^3}{3}.$$

Тоді

$$\int\limits_{1}^{e} x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int\limits_{1}^{e}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e}x^2dx = \frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{9}\left(2e^3+1\right).$$

Приклад 10. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^3\operatorname{arctg} x\,dx$.

Розв'язання. **а)** Спочатку застосуємо підстановку $\sqrt{x}=t$:

$$x=t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt.$$

Визначимо нові межі інтегрування:

$$x_н = 0 \quad \Rightarrow \quad t_н = 0 \quad і \quad x_в = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t_в = \frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$\int\limits_{0}^{\pi^2/4}\sin\sqrt{x}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} t\sin t\,dt.$$

Останній інтеграл візьмемо частинами, поклавши

$$\begin{vmatrix} t=u, & du=dt \\ \sin t\,dt = dv, & v=-\cos t\end{vmatrix}.$$

У результаті

$$2\int\limits_{0}^{\pi/2} t\sin t\,dt = 2\left(-t\cos t\Big|_0^{\pi/2}+\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos t\,dt\right) = 2\sin t\Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

б) Застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{arctg} t = u, & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ x^3dx = dv, & v = x^4/4\end{vmatrix}.$$

Отже,

$$\int\limits_{0}^{1} x^3\operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx =$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-1+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}=\frac{-1+3}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

Розв'язання. Спочатку застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$:

$$x=2\operatorname{arctg}t \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

x	$\pi/6$	$\pi/2$
t	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$	1

Переходячи до нової змінної, отримаємо два інтеграли, один із яких слід брати частинами:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx=\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1} \frac{2\operatorname{arctg}t+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\operatorname{arctg}t\,dt+2\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}t, & du=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv=dt, & v=t\end{matrix}\right|=2t\operatorname{arctg}t\Big|_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}-2\cancel{\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}}+2\cancel{\int\limits_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}^{1}\frac{t\,dt}{1+t^2}}=$$

$$=2\operatorname{arctg}1-2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\cdot\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\cdot\left(3-\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right).$$

Щоб обчислити значення $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, скористаємося формулою $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt3\right)^2}{\left(2+\sqrt3\right)\left(2-\sqrt3\right)}}=2-\sqrt3.$$

Остаточно знаходимо:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx=\frac{\pi}{6}\left(1+\sqrt3\right).$$

Приклад 12. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

Розв'язання. Спочатку застосуємо метод інтегрування частинами. Поклавши $u=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ і $dv=dx$, матимемо $v=x$ і

$$du=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt x}{\sqrt{1+x}}}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{dx}{2\sqrt x(1+x)}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Bigg|_0^3-\frac12\int\limits_0^3\frac{x\,dx}{\sqrt x(1+x)}=3\arcsin\frac{\sqrt3}{2}-\frac12\int\limits_0^3\frac{\sqrt x}{1+x}\,dx.$$

Останній інтеграл візьмемо за допомогою заміни змінної:

$$\int\limits_0^3\frac{\sqrt x}{1+x}\,dx=\left|\begin{matrix}\sqrt x=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt\end{matrix}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 3 & \sqrt3 \\ \hline\end{array}\right|=2\int\limits_0^{\sqrt3}\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt3}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=2\left(t-\operatorname{arctg}t\right)\Big|_0^{\sqrt3}=2\left(\sqrt3-\operatorname{arctg}\sqrt3\right).$$

У підсумку знаходимо

$$\int\limits_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx=3\arcsin\frac{\sqrt3}{2}-\left(\sqrt3-\operatorname{arctg}\sqrt3\right)=3\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt3+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt3.$$

Приклад 13. Обчислити інтеграл $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx \quad (n\ge2)$.

Розв'язання. Інтегруючи частинами

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)=\underbrace{\left(-\cos x\cdot\sin^{n-1}x\right)\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}+(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx=$$

$$=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cdot\left(1-\sin^2x\right)dx=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx,$$

прийдемо до рекурентного співвідношення

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \quad\Rightarrow\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

Послідовно застосовуючи цю рівність, матимемо

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}I_{n-6}=\ldots$$

Звідси випливає, що, залежно від парності або непарності n, в остаточному підсумку заданий інтеграл зводиться до одного з інтегралів:

$$I_0=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\frac{\pi}{2} \qquad \text{або} \qquad I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1.$$

Користуючись означенням факторіала чисел однакової парності

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot5\cdot3\cdot1, \qquad (2k)!!=(2k)(2k-2)\cdot\ldots\cdot6\cdot4\cdot2$$

запишемо остаточний результат:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k\\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n=2k-1\end{cases} \qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає *метод заміни змінної* (*підстановки*) у визначеному інтегралі?
2. Чи треба змінювати *межі інтегрування* у визначеному інтегралі, якщо виконано заміну змінної? Яким чином?
3. Чи можна не міняти *межі інтегрування* у визначеному інтегралі, якщо виконано заміну змінної? Як це можна здійснити?
4. Довести, що $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$.
5. Довести, що $\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^{b-a} f(b-x)\,dx$.
6. Довести, що $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx \quad (a>0)$.
7. Довести, що для функції $f(x)$, неперервної і періодичної з періодом T, справедливою є рівність $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$.

8*. Чи припустимо в інтегралі $\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ робити заміну $x=\frac{1}{\cos t}$?

9*. Чи можна в інтегралі $\int_0^2\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ зробити підстановку $x=\cos t$?

10. Сформулювати *метод інтегрування частинами* у визначеному інтегралі. Навести формулу інтегрування частинами.

11. Довести, що якщо функція $f''(x)$ неперервна на $[a;b]$, то

$$\int_a^b x f''(x)\,dx=\left[b f'(b)-f(b)\right]-\left[a f'(a)-f(a)\right].$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Пояснити, чому формальна заміна змінної призводить до неправильних результатів, якщо

1.1. $\int_{-1}^1 dx, \quad t=x^{2/3}$; 1.2. $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}, \quad x=\frac{1}{t}$.

2. Довести, що $\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{1/x}\frac{dx}{1+x^2} \quad (x>0)$.

3. Чи можна в інтегралі $\int_1^7\left(x^2-6x+13\right)dx$ виконати заміну $x^2-6x+13=t$?

4. Обчислити визначені інтеграли за допомогою заміни змінної:

4.1. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\,dx$; 4.2. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

4.3. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$; 4.4. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

4.5. $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 4.6. $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

4.7. $\int_{-1}^0\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 4.8. $\int_0^3\sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$;

4.9. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}$; 4.10. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

5. Обчислити інтеграли за допомогою формули інтегрування частинами:

5.1. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; 5.2. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\,dx$;

5.3. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; 5.4. $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x\,dx$;

5.5. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$; 5.6. $\int\limits_1^{e} \sin(\ln x)\,dx$;

5.7. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$; 5.8. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;

5.9. $\int\limits_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$; 5.10. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx$.

6. Обчислити інтеграли:

6.1.* $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\cdot\cos nx\,dx$; 6.2.* $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\cdot\cos(n+2)x\,dx$.

ВІДПОВІДІ

4.1. $\frac{1}{3}$. **4.2.** $\operatorname{arctg} e-\frac{\pi}{4}$. **4.3.** $32\frac{2}{3}$. **4.4.** $\frac{\pi}{6}$. **4.5.** $\ln 2$. **4.6.** $2(2-\ln 3)$.
4.7. $\frac{3}{2}(\ln 4-1)$. **4.8.** $\frac{3(\pi-2)}{2}$. **4.9.** $\ln\frac{2e}{e+1}$. **4.10.** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. **5.1.** $1-\frac{2}{e}$.
5.2. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. **5.3.** $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **5.4.** $\pi\left(\pi^2-6\right)$. **5.5.** $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.
5.6. $\frac{1+e(\sin 1-\cos 1)}{2}$. **5.7.** $\pi\sqrt{2}-4$. **5.8.** $\frac{\pi}{2}-1$. **5.9.** $\ln 2-\frac{1}{2}$.
5.10. $2\ln 2-1$. **6.1.*** $\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $n\in N$. **6.2.*** $-\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi n}{2}$, $n\in N$.

§ 10.3. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР
§ 10.3.1. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Будь-яку обмежену множину точок площини називають *плоскою фігурою*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x)\ge 0$ на відрізку $[a;b]$, $a<b$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ являє собою *площу криволінійної трапеції* – фігури, обмеженої лініями $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ і $x=b$ (рис.10.3.1а):

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^b y\,dx. \qquad (10.3.1)$$

В окремому випадку відрізки прямих $x=a$ і $x=b$, кожний окремо або обидва відразу, можуть стягуватися в точку.

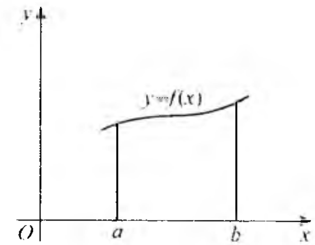


Рис. 10.3.1а

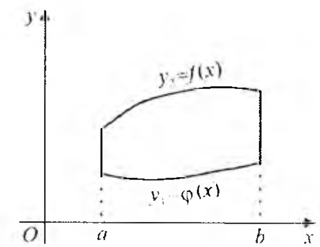


Рис. 10.3.1б

Якщо фігура обмежена двома неперервними кривими $y_1=\varphi(x)$ і $y_2=f(x)$, причому $f(x)\ge\varphi(x)$ (рис. 10.3.1б), то

$$S=\int\limits_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx=\int\limits_a^b\left(y_2-y_1\right)dx. \qquad (10.3.2)$$

Якщо $f(x)\le 0$ на відрізку $[a;b]$ (рис.10.3.1в), то

$$S=-\int\limits_a^b f(x)\,dx=\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|. \qquad (10.3.3)$$

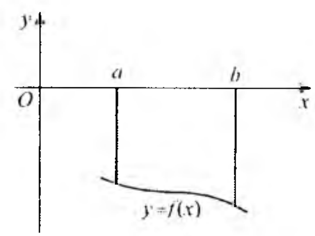


Рис 10.3.1в

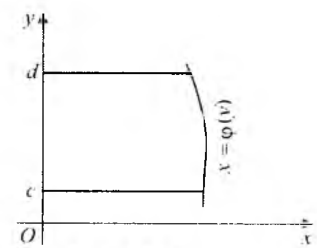


Рис. 10.3.1г

Якщо криволінійна трапеція обмежена лініями $x=\varphi(y)$, $x=0$, $y=c$ і $y=d$ (рис.10.3.1г), то формула для обчислення її площі має вигляд:

$$S=\int_c^d \varphi(y)\,dy=\int_c^d x\,dy,\qquad (\varphi(y)\ge 0). \qquad (10.3.4)$$

Деякі важливі окремі випадки розміщення криволінійної трапеції (рис. 10.3.1д-ж):

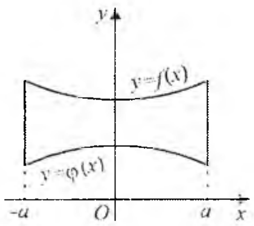


Рис. 10.3.1д

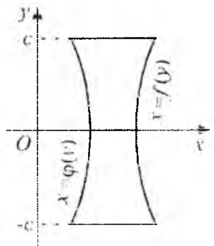


Рис. 10.3.1е

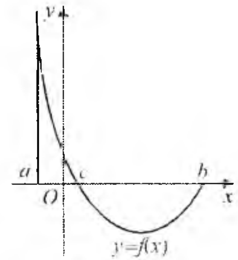


Рис. 10.3.1ж

$$S=\int_{-a}^{a}\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx=2\int_0^a\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx; \qquad (10.3.5)$$

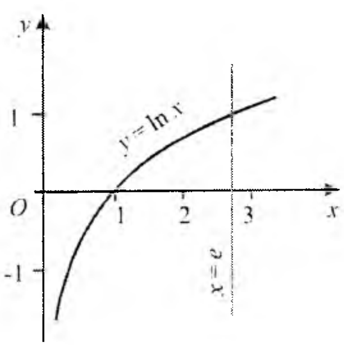
$$S=\int_{-c}^{c}\left[f(y)-\varphi(y)\right]dy=2\int_0^c\left[f(y)-\varphi(y)\right]dy; \qquad (10.3.6)$$

$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (10.3.7)$$

Приклад 1. Обчислити площу області, обмеженої віссю Ox, лінією $y=\ln x$ і прямою $x=e$.

Розв'язання. Щоб обчислити площу заданої області, необхідно:
а) побудувати область, обмежену вказаними лініями;
б) визначити межі інтегрування;
в) обчислити відповідний визначений інтеграл.

Основа побудованого криволінійного трикутника співпадає з віссю Ox, при цьому вся область лежить у верхній півплощині, тому можна застосовувати формулу



$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Проекція області на вісь Ox визначає межі зміни змінної x, тобто $x\in[1;e]$. Отже,

$$S=\int_1^e \ln x\,dx.$$

Для обчислення цього визначеного інтеграла скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$S=\int_1^e \ln x\,dx=\left|\begin{matrix}\ln x=u, & du=\dfrac{dx}{x}\\ dx=dv, & v=x\end{matrix}\right|=\left(x\ln x\right)\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{dx}{x}=\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=$$

$$=e\cdot\ln e-e-1\cdot\ln 1+1=e-e-0+1=1.$$

Приклад 2. Обчислити площі плоских фігур, обмежених лініями:

а) $y=x+2$, $x=0$, $y=0$, $y=x^2-6x+8$;

б) $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, якщо $x\in[0;\pi]$.

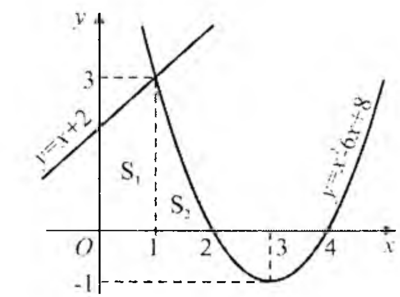
Розв'язання. **а)** Фігура обмежена прямими $y=x+2$, $x=0$, $y=0$ і параболою $y=x^2-6x+8$.

Вітки параболи $y=(x-3)^2-1$ напрямлені вгору, координати її вершини $(3;-1)$, парабола перетинає вісь Ox у точках $x=2$ і $x=4$. Знайдемо абсциси точок перетину прямої $y=x+2$ і параболи $y=x^2-6x+8$:

$$\begin{cases}y=x+2,\\ y=x^2-6x+8\end{cases}\Rightarrow\quad x+2=x^2-6x+8\quad\Rightarrow\quad x^2-7x+6=0\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{matrix}x_1=1,\\ x_2=6.\end{matrix}\right.$$

Заданій області належить лише точка з абсцисою $x=1$.

Побудуємо вказану фігуру. Її верхня межа складена із двох різних ліній. Тому представимо фігуру як об'єднання двох криволінійних трапецій S_1 і S_2. Площа шуканої фігури S дорівнює сумі площ цих областей:



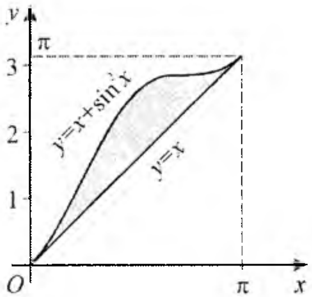
$$S=\int_0^1 (x+2)\,dx+\int_1^2\left(x^2-6x+8\right)dx=$$

$$=\frac{(x+2)^2}{2}\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right)\Bigg|_1^2=\frac{9}{2}-2+\left(\frac{8}{3}-12+16\right)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)=\frac{5}{2}+\frac{4}{3}=\frac{23}{6}.$$

Зауваження 1. Площу області S_1 можна обчислити як площу *трапеції* методами елементарної математики. Дійсно, основи трапеції $a=2$ і $b=3$, а висота $h=1$, отже, $S_1=\dfrac{a+b}{2}\cdot h=\dfrac{5}{2}$.

б) Кожна із заданих функцій неперервна на відрізку $[0;\pi]$. Крива $y=x+\sin^2 x$ у всіх внутрішніх точках відрізка лежить вище прямої $y=x$.

Підставивши значення $x=0$ і $x=\pi$ у рівняння заданих ліній, переконуємося, що вони перетинаються в точках $(0;0)$ і $(\pi;\pi)$, абсциси яких співпадають з кінцями вказаного відрізка.



Тому площу плоскої фігури визначимо за формулою (10.3.2):

$$S=\int_0^{\pi}\left(x+\sin^2 x-x\right)dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Зауваження 2. Щоб уточнити рисунок шуканої фігури, надалі будемо заздалегідь знаходити точки перетину заданих ліній. Тим більше, що абсциси (або ординати) цих точок нам знадобляться як межі інтегрування.

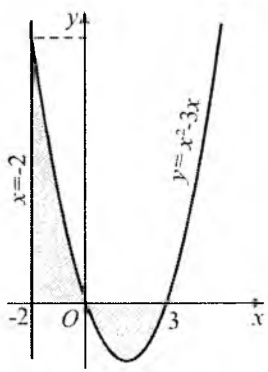
Приклад 3. Обчислити площі плоских фігур, обмежених лініями:

а) $x=-2$, $y=0$, $y=x^2-3x$;

б) $y=x$, $y=2-x^2$;

в) $x-y-1=0$, $y^2=2x+1$.

Розв'язання. **а)** Фігура обмежена взаємно перпендикулярними прямими $x=-2$, $y=0$ і параболою $y=x^2-3x$.



Вітки параболи $y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ напрямлені вгору, а вісь Ox парабола перетинає в точках $x=0$ і $x=3$. Шукана фігура складається із двох областей, одна з яких лежить вище осі абсцис, а інша – нижче.

Отже, можна скористатися формулою (10.3.6), відповідно до якої площа фігури дорівнює алгебраїчній сумі площ:

$$S=\int_{-2}^{0}\left(x^2-3x\right)dx+\left|\int_0^3\left(x^2-3x\right)dx\right|=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-\left(\frac{-8}{3}-6\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right)=\frac{8}{3}+6-9+\frac{27}{2}=\frac{79}{6}.$$

б) Фігура обмежена прямою $y=x$ і параболою $y=2-x^2$, вітки якої напрямлені вниз, а координати вершини $(0;2)$. Знайдемо точки перетину прямої і параболи, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow\quad x=2-x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ll} x_1=-2, & y_1=-2; \\ x_2=1, & y_2=1. \end{array}\right.$$

За двома знайденими точками будуємо пряму і за трьома точками (відомі координати вершини) – параболу (рис. 10.3.1.3б).

Проекція фігури на вісь Ox визначає межі зміни змінної x. Отже, $x_1=-2$ і $x_2=1$ – нижня і верхня межі інтегрування.

Користуючись формулою (10.3.2), знаходимо шукану площу:

$$S=\int_{-2}^{1}\left[\left(2-x^2\right)-x\right]dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{9}{2}.$$

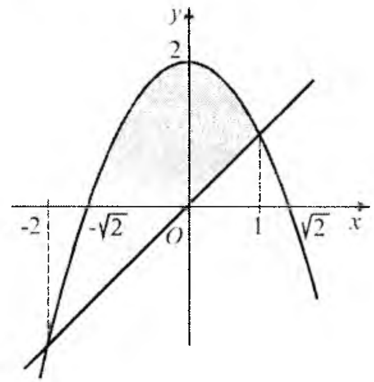


Рис. 10.3.1.3б

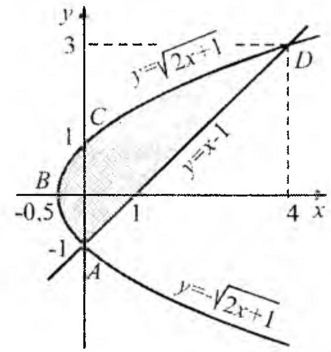


Рис. 10.3.1.3в

в) Фігура обмежена прямою $x-y-1=0$ і параболою $y^2=2x+1$. Вітки параболи напрямлені вправо, вершина знаходиться в точці $(-1/2;0)$, а вісь симетрії співпадає з віссю Ox (рис. 10.3.1.3в). Знайдемо координати точок перетину прямої і параболи:

$$\begin{cases} y^2=2x+1, \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow\quad (x-1)^2=2x+1 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ll} x_1=0, & y_1=-1; \\ x_2=4, & y_2=3. \end{array}\right.$$

Перший спосіб. Нижня межа фігури складена із двох різних ліній: дуги параболи BA і прямої AD. Тому представимо фігуру як об'єднання двох областей ABC і ACD. Очевидно, площа фігури дорівнює сумі площ кожної із цих областей. При обчисленні площі області ABC врахуємо, що зверху вона обмежена кривою $y=\sqrt{2x+1}$, а знизу – кривою $y=-\sqrt{2x+1}$. Отже,

$$S_{ABC}=\int_{-1/2}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx-\int_{-1/2}^{0}\left(-\sqrt{2x+1}\right)dx=2\int_{-1/2}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx.$$

Цей самий результат можна одержати, виходячи із симетрії області ABC відносно осі абсцис. Тоді

$$S=S_{ABC}+S_{ACD}=2\int_{-1/2}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx+\int_{0}^{4}\left[\sqrt{2x+1}-(x-1)\right]dx=$$

$$=2\int_{-1/2}^{0}(2x+1)^{1/2}\,dx+\int_{0}^{4}\left[(2x+1)^{1/2}-x+1\right]dx=2\cdot\frac{2}{3}\frac{(2x+1)^{3/2}}{2}\Bigg|_{-1/2}^{0}+$$

$$+\left[\frac{2}{3}\frac{(2x+1)^{3/2}}{2}-\frac{x^2}{2}+x\right]\Bigg|_{0}^{4}=\frac{2}{3}(1-0)+\left(\frac{1}{3}\cdot 27-8+4-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}.$$

Другий спосіб. Зауважимо, що відносно осі Oy задана фігура обмежена зліва параболою, а справа прямою. Отже, користуючись формулою (10.3.4), її площу можна обчислити за допомогою одного інтеграла.

Для цього виразимо змінну x з рівнянь прямої й параболи:

$$x_2=y+1,\qquad\qquad x_1=\frac{y^2-1}{2}.$$

Проекцією заданої області на вісь Oy є відрізок $[-1;3]$, отже,

$$S=\int_{c}^{d}(x_2-x_1)\,dy=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=\int_{-1}^{3}\left(y+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y^2\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{3}{2}y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}.$$

Приклад 4. Обчислити площі фігур, обмежених лініями

а) $y=e^{-|x|},\quad y=\dfrac{x^2}{e}$; **б)** $y=\ln\left(1+x^2\right),\quad y=\ln 5$.

<u>*Розв'язання*</u>. а) На проміжку $[0;+\infty)$ функція $y=e^{-|x|}$ монотонно спадає, а функція $y=x^2/e$ монотонно зростає. Кожного свого значення вони набувають один раз. Тому рівняння $e^{-x}=x^2/e$ має єдиний розв'язок $x=1$, що є абсцисою точки перетину графіків (рис. 10.3.1.4а).

Оскільки фігура симетрична відносно осі ординат (обидві функції парні), то скористаємося формулою (10.3.5). Шукана площа

$$S=\int_{-1}^{1}\left(e^{-x}-\frac{x^2}{e}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(e^{-x}-\frac{x^2}{e}\right)dx=2\left(-e^{-x}-\frac{x^3}{3e}\right)\Bigg|_{0}^{1}=2\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{3e}+1\right)=2-\frac{8}{3e}.$$

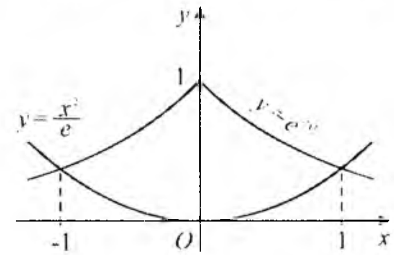


Рис. 10.3.1.4а

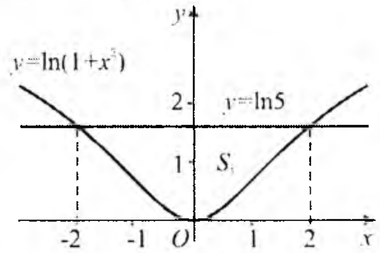


Рис. 10.3.1.4б

б) Знайдемо абсциси точок перетину вказаних ліній:

$$\ln\left(1+x^2\right)=\ln 5\quad\Rightarrow\quad 1+x^2=5\quad\Rightarrow\quad x^2=4\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm 2.$$

Перший спосіб. Враховуючи симетрію заданої області відносно осі Oy (рис. 10.3.1.4б), знаходимо площу згідно з формулою (10.3.5). При обчисленні другого інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами:

$$S=2\int_{0}^{2}\left[\ln 5-\ln\left(1+x^2\right)\right]dx=4\ln 5-2\int_{0}^{2}\ln\left(1+x^2\right)dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u=\ln\left(1+x^2\right), & du=\dfrac{2x\,dx}{1+x^2}\\ dv=dx, & v=x\end{array}\right|=4\ln 5-2\left(x\cdot\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{0}^{2}-2\int_{0}^{2}\frac{x^2dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=4\ln 5-4\ln 5+4\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=4\cdot(x-\operatorname{arctg}x)\Big|_{0}^{2}=4\cdot(2-\operatorname{arctg}2).$$

Другий спосіб. Обчислимо спочатку площу S_1 правої частини фігури, розглядаючи її як криволінійну трапецію, що прилягає до осі Oy (див. рис. 10.3.1.4б і формулу (10.3.4)).

Виразимо x з рівняння $y=\ln\left(1+x^2\right)$:

$$1+x^2=e^y\quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{e^y-1}.$$

Отже, зліва область обмежена віссю ординат, а справа – кривою $x=\sqrt{e^y-1}$. Площу S_1 у цьому випадку обчислює інтеграл (10.3.4):

$$S_1=\int_c^d x\,dy=\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^y-1}\,dy=\left|\begin{array}{l} e^y-1=t^2, \\ e^y dy=2t\,dt, \\ dy=\dfrac{2t\,dt}{t^2+1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline y & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \ln 5 & 2 \\ \hline\end{array}\right|=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

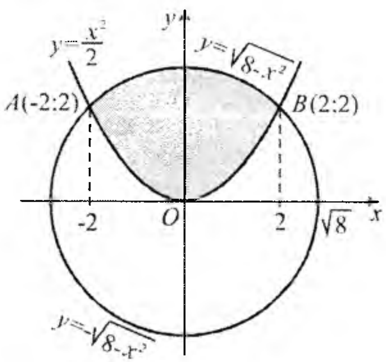
$$=2\int_0^2\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-\operatorname{arctg}t\right)\Big|_0^2=4-2\operatorname{arctg}2.$$

Отже, площа всієї фігури $S=2S_1=2\cdot\left(4-2\operatorname{arctg}2\right)$.

Приклад 5. Знайти площі частин кола $x^2+y^2=8$, розділених параболою $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину кола і параболи:

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ y=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}\Rightarrow\quad 8-x^2=\frac{x^4}{4}\quad\Rightarrow\quad x^4+4x^2-32=0\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 2, \\ y_{1,2}=2. \end{array}\right.$$



Враховуючи симетрію області AOB відносно осі ординат, матимемо

$$S_{AOB}=2\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{8}{3}.$$

Для обчислення інтеграла, що залишився справа, скористаємося методом заміни змінної у визначеному інтегралі. Покладемо

$$x=2\sqrt{2}\sin t\quad\Rightarrow\quad dx=2\sqrt{2}\cos t\,dt\quad\Rightarrow\quad t=\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} t_в=\pi/4, \\ t_н=0. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot 2\sqrt{2}\cos t\,dt=4\int_0^{\pi/4}2\cos^2 t\,dt=4\int_0^{\pi/4}\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=4\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\pi+2.$$

Отже, $S_{AOB}=2\left(\pi+2\right)-\dfrac{8}{3}=2\pi+\dfrac{4}{3}$.

Оскільки площа круга радіуса $R=2\sqrt{2}$ дорівнює $\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\pi$, то площа частини круга, що залишилася, очевидно, дорівнює:

$$8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

Таким чином, площі областей, на які парабола $y=\dfrac{x^2}{2}$ ділить коло $x^2+y^2=8$, відповідно дорівнюють $2\pi+\dfrac{4}{3}$ і $6\pi-\dfrac{4}{3}$.

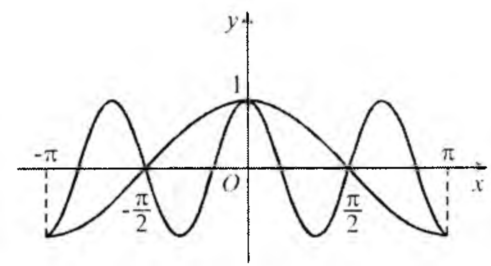
Приклад 6. Знайти площі фігур, обмежених графіками:

а) функцій $y=\cos 3x$, $y=\cos x$ при $x\in\left[-\pi,\pi\right]$;

б) функції $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ і відрізком осі Ox, що з'єднує дві послідовні точки перетину кривої з віссю.

Розв'язання. **а)** Побудуємо графіки функцій $y=\cos 3x$ і $y=\cos x$ на заданому відрізку.

Область, що міститься між ними, симетрична відносно осі Oy. При цьому в інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ вона обмежена зверху кривою $y=\cos x$, а знизу – кривою $y=\cos 3x$. В інтервалах $\left(-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\pi;\dfrac{\pi}{2}\right)$, навпаки, крива $y=\cos 3x$ обмежує область зверху, а крива $y=\cos x$ – знизу.



Тому шукана площа може бути представлена такою сумою:

$$S=2\int_0^{\pi/2}\left(\cos x-\cos 3x\right)dx+2\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\cos 3x-\cos x\right)dx=$$

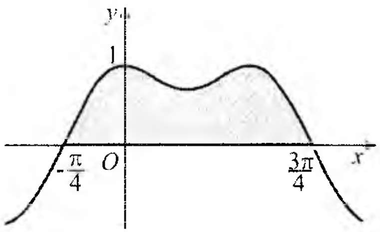
$$=2\cdot\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}+2\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3}-\sin x\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$= 2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3}\right) + 2\cdot\left(\frac{\sin 3\pi}{3} - \sin\pi\right) - 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{4}{3} + 0 - 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Зауважимо, що якщо на наведеному рисунку світліші області розгорнути в точках $\pm\pi/2$ на 180^0, то вони співпадуть з темнішими областями. Тому для обчислення площі фігури можна було інтегрувати, наприклад, у межах від 0 до $\pi/2$, а потім отриманий результат помножити на 4.

б) Екстремуми заданої функції відомі (див. частину 1, § 6.3, приклад 6). Знайдемо абсциси точок перетину графіка кривої з віссю Ox. Для цього розв'яжемо рівняння:



$$\sin^3 x + \cos^3 x = 0,$$

$$\mathrm{tg}^3 x = -1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}x = -1,$$

звідки

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ll} x_1 = -\pi/4, & \text{при } n = 0 \\ x_2 = 3\pi/4, & \text{при } n = 1. \end{array}\right.$$

Отже,

$$S = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) dx = -\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 - \cos^2 x\right) d\left(\cos x\right) + \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \left(1 - \sin^2 x\right) d\left(\sin x\right) =$$

$$= \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$= -\cos\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

Приклад 7. Знайти площі:

а) сегмента, що відтинається від кривої $y^2 = (4-x)^3$ хордою $x = 0$;

б) петлі кривої $y^2 = x^3 + 2x^2$.

Розв'язання. **а)** *Перший спосіб.* Область визначення неявної функції y є проміжок $x \le 4$. Оскільки рівняння кривої містить y в парному степені, то

крива симетрична відносно осі абсцис (рис. 10.3.1.7а).

Зверху фігура обмежена лінією $y = (4-x)\sqrt{4-x}$, а знизу – лінією $y = -(4-x)\sqrt{4-x}$. Тому її площу обчислює інтеграл:

$$S = \int_0^4 \left[\left(4-x\right)^{3/2} - \left(-\left(4-x\right)^{3/2}\right)\right] dx,$$

який, з урахуванням симетрії сегмента відносно осі Ox, можна представити у вигляді:

$$S = 2\int_0^4 \left(4-x\right)^{3/2} dx = -2\cdot\frac{\left(4-x\right)^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^4 = -\frac{4}{5}\cdot\left(4-x\right)^{5/2}\Big|_0^4 = \frac{4}{5}\cdot 4^{5/2} = \frac{128}{5}.$$

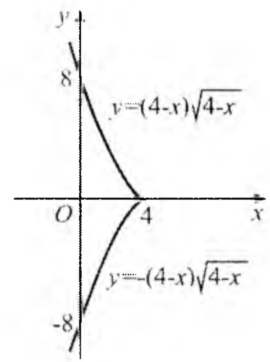


Рис. 10.3.1.7а

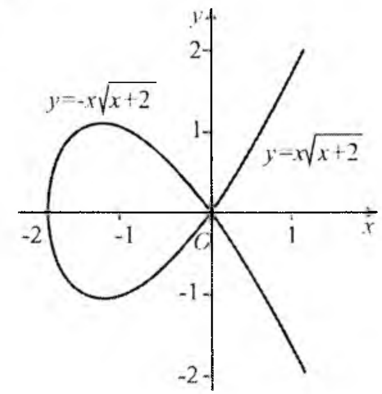


Рис. 10.3.1.7б

Другий спосіб. Урахування симетрії заданої фігури відносно осі абсцис дає змогу обчислити її площу інтегруванням за змінною y. Для цього слід розв'язати рівняння $y^2 = (4-x)^3$ відносно x:

$$x = 4 - y^{2/3}.$$

У цьому випадку фігура обмежена зліва віссю ординат, а справа – лінією $x = 4 - y^{2/3}$. Тому можна скористатися формулою (10.3.6):

$$S = \int_{-8}^{8}\left(4 - y^{2/3}\right)dy = 2\int_0^8\left(4 - y^{2/3}\right)dy = 2\cdot\left(4y - \frac{3}{5}y^{5/3}\right)\Bigg|_0^8 = 64\cdot\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{128}{5}.$$

б) З рівності $y^2 = x^2(x+2)$ випливає, що $x^2(x+2) \ge 0$, тому $x \ge -2$. Оскільки в рівняння кривої y входить у другому степені, то крива симетрична відносно осі Ox (рис. 10.3.1.7б).

Додатна вітка $y_1(x)$ задається рівнянням

$$y_1(x)=\begin{cases}-x\sqrt{x+2}, & -2\le x<0,\\ x\sqrt{x+2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Вона перетинає вісь абсцис у точках:

$$y_1(x)=x\sqrt{x+2}=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x_1=-2,\\ x_2=0.\end{array}\right.$$

Отже, інтервал інтегрування – відрізок $[-2;0]$. Симетрична вітка $y_2(x)=-y_1(x)$.

Площа петлі, з урахуванням її симетрії, виражається інтегралом:

$$S=\int_{-2}^{0}\left[\left(-x\sqrt{x+2}\right)-x\sqrt{x+2}\right]dx=-2\int_{-2}^{0}x\sqrt{x+2}\,dx.$$

Для його обчислення виконаємо заміну змінної:

$$\sqrt{x+2}=t \quad\Rightarrow\quad x+2=t^2 \quad\Rightarrow\quad x=t^2-2 \quad\Rightarrow\quad dx=2t\,dt$$

і знайдемо межі інтегрування: якщо $x=-2$, то $t_н=0$; якщо $x=0$, то $t_в=\sqrt{2}$. Отже, площа петлі

$$S=-2\cdot 2\int_0^{\sqrt2}\left(t^2-2\right)t^2dt=-4\int_0^{\sqrt2}\left(t^4-2t^2\right)dt=-4\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt2}=$$

$$=-4\cdot\left(\frac{4\sqrt2}{5}-\frac{4\sqrt2}{3}\right)=-4\cdot4\sqrt2\cdot\left(\frac{3-5}{15}\right)=\frac{32\sqrt2}{15}.$$

Приклад 8. Знайти площі фігур, обмежених:

а) параболою $y=x^2-2x+2$, дотичною до неї в точці $M(3;5)$ і віссю ординат;

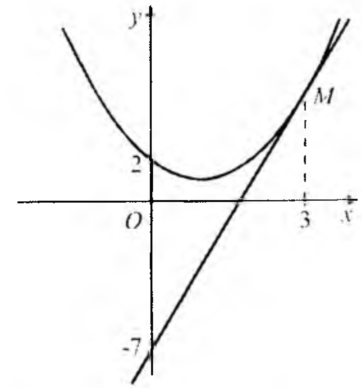
б) параболою $y^2=6x$ і нормаллю до неї, проведеною під кутом $\frac{3\pi}{4}$ до осі абсцис.

Розв'язання. **а)** Рівняння дотичної має вигляд:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

де $x_0=3$, $f(x_0)=5$, $f'(x)=2x-2$, $f'(3)=4$. Тоді

$$y=5+4(x-3) \quad\Rightarrow\quad y=4x-7.$$



Оскільки вітки параболи напрямлені вгору, то парабола лежить над дотичною, тобто

$$x^2-2x+2\ge 4x-7.$$

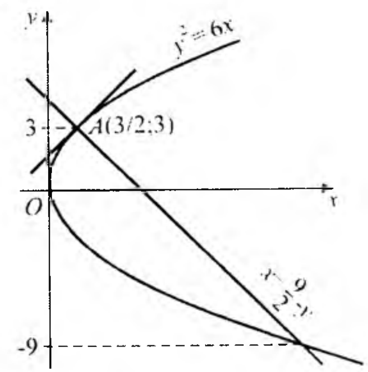
Отже,

$$S=\int_0^3\left[\left(x^2-2x+2\right)-\left(4x-7\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left(x^2-6x+9\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Bigg|_0^3=9.$$

б) Оскільки нормаль складає із додатним напрямом осі Ox кут $\frac{3\pi}{4}$, то дотична до параболи складає із віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$. Скористаємося *геометричним змістом похідної* (див. частину 1, § 5.1): похідна функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної (тангенсу кута нахилу дотичної):

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha.$$



Знайдемо координати точки дотику $A(x_0;y_0)$, для чого спочатку продиференціюємо рівняння параболи: $2yy'=6$.

У точці дотику

$$2y_0\cdot y'(x_0)=6 \quad\Rightarrow\quad 2y_0\cdot\mathrm{tg}\alpha=6.$$

Оскільки $\alpha=\frac{\pi}{4}$, то $y_0=\frac{6}{2\cdot\mathrm{tg}\,\pi/4}=3$, отже, $x_0=\frac{y_0^2}{6}=\frac{3}{2}$. Отже, точка дотику $A(3/2;3)$.

Тепер складемо рівняння нормалі

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-3=-\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad y+x-\frac{9}{2}=0$$

і побудуємо шукану область.

З рисунка видно, що задану фігуру зручно проектувати на вісь Oy: зліва вона обмежена параболою $x_1=\frac{y^2}{6}$, а справа – прямою $x_2=\frac{9}{2}-y$. Площу фігури обчислимо за формулою

$$S=\int_c^d (x_2-x_1)\,dy.$$

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y^2=6x,\\ y+x-\dfrac{9}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{6}=\frac{9}{2}-y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=3=y_0,\\ y_2=-9, \end{array}\right.$$

знаходимо ординату другої точки перетину параболи і нормалі. Отже,

$$S=\int_{-9}^{3}\left[\left(\frac{9}{2}-y\right)-\frac{y^2}{6}\right]dy=\left(\frac{9}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{18}\right)\Bigg|_{-9}^{3}=48.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що розуміють під *площею* плоскої фігури?
2. При якій умові значення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ співпадає з величиною *площі криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$?
3. Як обчислюється площа плоскої фігури *в декартовій системі координат*?
4. Як обчислюється площа плоскої фігури, обмеженої на відрізку $[a;b]$ кривими $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, якщо $f(x)>\varphi(x)$?
5. Як обчислюється площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями, $y=0$, $x=a$, $x=b$ і $y=f(x)$, якщо $f(x)\le 0$ при $x\in[a;b]$?
6. Як обчислюється площа плоскої фігури, обмеженої на відрізку $[a;b]$ кривими $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$, якщо $f(x)>\varphi(x)$, але $f(x)<0$ і $\varphi(x)<0$?
7. Нехай $\int_a^b f(x)\,dx=0$, $f(x)\neq 0$. Як витлумачити це *геометрично*?
8. Яким чином використовується *властивість адитивності* визначеного інтеграла відносно проміжку інтегрування при обчисленні площі плоскої фігури?
9. Як обчислити *площу криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=c$, $y=0$ і $y=\varphi(x)$, $x=c$, $x=b$, $y=0$?
10. Як найпростіше обчислити площу області площини xOy, *симетричної* відносно осі ординат?
11. Як обчислити *площу криволінійної трапеції*, обмеженої лініями $x=f(y)$, $y=c$, $y=d$, $x=0$?

12. Як найпростіше обчислити площу області площини xOy, *симетричної* відносно осі абсцис?
13. Якою є *геометрична* інтерпретація таких фактів:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{якщо } f(x) \text{ - парна},\\ 0, & \text{якщо } f(x) \text{ - непарна?} \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити площі плоских фігур, обмежених лініями:

1.1. $y=4-x^2$, $y=0$; 1.2. $y=x^2+4x$, $y=x+4$;

1.3. $y^2=x^3$, $y=8$, $x=0$; 1.4. $y^2=4x^3$, $y=2x^2$;

1.5. $xy=6$, $x+y-7=0$; 1.6. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;

1.7. $y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=3x-\dfrac{x^2}{2}$; 1.8. $y=x^2+1$, $y=9-x^2$;

1.9. $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 1.10. $x=0$, $x=2$, $y=2^x$, $y=2x-x^2$;

1.11. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$; 1.12. $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$, $x=\pm a$, $y=0$;

1.13. $y=x^2$, $y=4x$, $2x+y-3=0$ (нижче вказаних прямих).

2. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=x^4-2x^3+x^2+3$, віссю абсцис і двома ординатами, що відповідають точкам, у яких задана функція має мінімум.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{32}{3}$. **1.2.** $\frac{125}{6}$. **1.3.** $\frac{96}{5}$. **1.4.** $\frac{2}{15}$. **1.5.** $17{,}5-6\ln 6$. **1.6.** $8\ln 2$. **1.7.** 8. **1.8.** $\frac{64}{3}$. **1.9.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **1.10.** $\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}$. **1.11.** $\sqrt{2}-1$. **1.12.** $a^2\left(e-e^{-1}\right)$. **1.13.** $\frac{11}{12}$. **2.** $3\frac{1}{30}$.

§ 10.3.2. ПАРАМЕТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

Нехай межа області D задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[t_1;t_2]$. Якщо при русі вздовж межі від t_1 до t_2 область D залишається зліва, то її площа може бути обчислена за однією із таких формул:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,y'(t)\,dt\,; \qquad S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt\,; \tag{10.3.2.1}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left[x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\right] dt\,. \tag{10.3.2.2}$$

Приклад 1. Обчислити площу *круга* радіуса a.

Розв'язання. Припускаємо, що центр круга співпадає з початком координат. Оскільки круг симетричний відносно координатних осей, то можна обчислити площу його четвертої частини і потім помножити отриманий результат на чотири.

Використовуємо параметричне задання кола:

$$x = a\cos t\,, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Для чверті кола, що лежить у першому квадранті, $t \in [0;\pi/2]$. Скористаємося першою формулою (10.3.2.1). Оскільки $y'(t) = a\cos t$, то

$$S = 4\int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a\cos t\,dt = 4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2a^2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2a^2\cdot\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 2a^2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi a^2.$$

Той самий результат матимемо, якщо скористаємося другою формулою (10.3.2.1).

Приклад 2. Знайти площі фігур, обмежених:

а) однією аркою *циклоїди* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ і віссю Ox;

б) *астроїдою* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. **а)** При русі точки вздовж першої арки *циклоїди* (див. частину 1, § 1.7, приклад 6) параметр t змінюється в межах від 0 до 2π, оскільки $y(0) = y(2\pi) = 0$. В інших точках указаного проміжку $y > 0$.

Зауважимо, що при такому напрямі обходу межі сама область D залишається справа. Тому, застосовуючи другу формулу (10.3.2.1), змінимо її знак на протилежний. Отже,

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\cdot\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Якби ми скористалися першою формулою, то отримали б складнішу підінтегральну функцію. Природно, що на кінцевому результаті це не позначиться. Рекомендуємо переконатися в цьому *самостійно*.

Зауважимо, що площа області, обмеженої аркою циклоїди і її основою, дорівнює потроєній площі твірного круга (*теорема Галілея*).

Твірним називається коло, яке котиться і на якому є фіксована точка.

б) При русі точки вздовж *астроїди* параметр t змінюється в межах від 0 до 2π, при цьому область залишається зліва.

Астроїда симетрична відносно осей координат (див. частину 1, § 1.7, приклад 3**г**)), тому при обчисленні площі області, обмеженої астроїдою, візьмемо інтеграл у межах $0 \le t \le \pi/2$ і помножимо результат на 4.

Скористаємося формулою (10.3.2.2), де в даному випадку

$$x'(t) = -3a\sin t\cos^2 t\,dt\,, \qquad y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t\,dt\,.$$

У результаті маємо:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[a\cos^3 t\cdot 3a\cos t\sin^2 t - a\sin^3 t\cdot\left(-3a\sin t\cos^2 t\right)\right]dt =$$

$$= 2\cdot 3a^2\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right)dt = 6a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos 4t)}{2}\,dt = \frac{3a^2}{4}\cdot\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Приклад 3. Обчислити площі фігур, обмежених:

а) *кардіоїдою* $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$;

б) кривою $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$.

Розв'язання. **а)** При русі точки вздовж *кардіоїди* (див. частину 1, § 1.7, приклад 8**б**)) параметр t змінюється в межах від 0 до 2π, область залишається зліва. При цьому $x(0) = x(2\pi) = a$ і $y(0) = y(2\pi) = 0$. Для обчислення площі, обмеженої кардіоїдою (рис. 10.3.2.3а), застосуємо формулу (10.3.2.2).

Тут

$$x'(t) = -2a(\sin t - \sin 2t), \qquad y'(t) = 2a(\cos t - \cos 2t),$$

отже,

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) =$$

$$= 2a^2(2\cos t - \cos 2t)\cdot(\cos t - \cos 2t) + 2a^2(\sin t - \sin 2t)\cdot(2\sin t - \sin 2t) =$$

$$= 2a^2\left[3 - 3(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)\right] = 6a^2(1 - \cos t).$$

Тоді шукана площа

$$S = \frac{1}{2}\cdot 6a^2 \int_0^{2\pi}(1 - \cos t)\,dt = 3a^2(t - \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2.$$

Цікаво, що площа, обмежена кардіоїдою, дорівнює шести площам твірного круга. При цьому вона вдвічі перевищує площу області, обмеженої аркою циклоїди і її основою, і в 16 разів – площу астроїди (з тим самим твірним кругом).

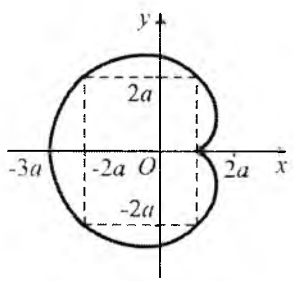


Рис. 10.3.2.3а

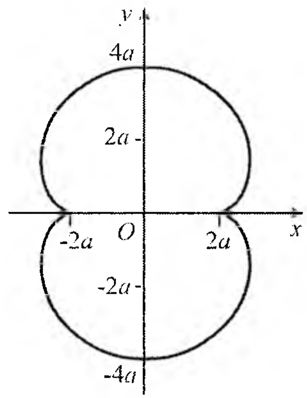


Рис. 10.3.2.3б

б) Оскільки $x(0) = x(2\pi) = 2a$ і $y(0) = y(2\pi) = 0$, при цьому $x(\pi/2) = 0$ і $y(\pi/2) = 4a$, то фігура обмежена замкнутою кривою і симетрична відносно осей координат (рис. 10.3.2.3б).

Послідовно обчислимо:

$$x'(t) = -3a(\sin t - \sin 3t), \qquad y'(t) = 3a(\cos t - \cos 3t);$$

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = 3a^2\left[4 - 4(\cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t)\right] = 12a^2(1 - \cos 2t).$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2}\cdot 12a^2 \int_0^{2\pi}(1 - \cos 2t)\,dt = 6a^2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi a^2.$$

Таким чином, площа фігури, обмежена кривою

$$x = a(3\cos t - \cos 3t), \qquad y = a(3\sin t - \sin 3t),$$

вдвічі перевищує площу, обмежену *кардіоїдою*

$$x = a(2\cos t - \cos 2t), \qquad y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

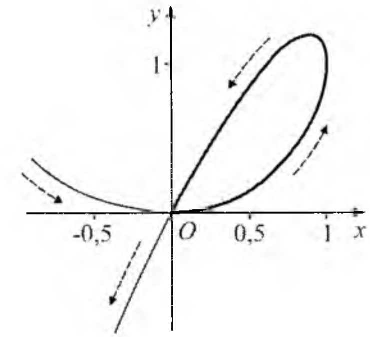
Приклад 4*. Обчислити площу петлі, утвореної кривою

$$x = 2t - t^2, \qquad y = 2t^2 - t^3.$$

Розв'язання. З рівнянь кривої видно, що областю існування заданих функцій є проміжок $(-\infty;\infty)$.

Знайдемо точки перетину кривої з осями координат, тобто значення параметра t, при яких змінні x і y перетворюються в нуль. Для цього спочатку покладемо $x = 0$:

$$2t - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0, \quad t = 2.$$



Підставляючи отримані значення t в друге рівняння, знайдемо точку $y = 0$, у якій крива перетинає вісь ординат. Потім, поклавши $y = 0$, знайдемо $t = 0$ і $t = 2$.

Підставляючи ці значення параметра t в перше рівняння, знайдемо точку $x = 0$ перетину кривої з віссю абсцис.

Таким чином, крива двічі проходить через початок координат (при $t = 0$ і $t = 2$) і, перетинаючи саму себе, утворює петлю.

З рівнянь кривої випливає: якщо $t \to +\infty$, то $x \to -\infty$, $y \to -\infty$, а якщо $t \to -\infty$, то $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Це означає, що крива має дві нескінченні вітки: одну – у другій чверті, іншу – у третій. При зростанні t від $-\infty$ до $+\infty$ точка M обходить криву так, як указано стрілками на рисунку.

Для обчислення площі фігури, обмеженої заданою петлею, скористаємося формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^2\left[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left[(2t - t^2)\cdot(4t - 3t^2) - (2t^2 - t^3)\cdot(2 - 2t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2\left(t^4 - 4t^3 + 4t^2\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = 4\left(\frac{4}{5} - 2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

§ 10.3.3. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Площа криволінійного сектора, обмеженого дугою кривої $\rho=\rho(\varphi)$ і відрізками променів $\varphi_1=\alpha$ і $\varphi_2=\beta$ $(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$, у полярних координатах виражається інтегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (10.3.3.1)$$

Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених:

а) полярною віссю і першим витком *спіралі Архімеда* $\rho=a\varphi$;

б) кардіоїдою $\rho=a(1-\cos\varphi)$ і колом $\rho=a$ (поза кардіоїдою).

Розв'язання. **а)** Оскільки полярний радіус робить повний оберт, то кут $\varphi\in[0;2\pi]$ (рис. 10.3.3.1а).

Підставляючи рівняння $\rho=a\varphi$ у формулу (10.3.3.1), одержуємо:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}a^2\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3a^2}{3}.$$

Зауважимо, що отримана величина в три рази менша за площу круга радіуса $2\pi a$.

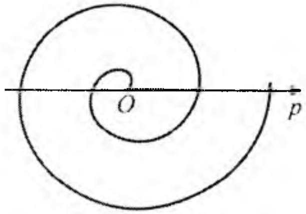


Рис. 10.3.3.1а

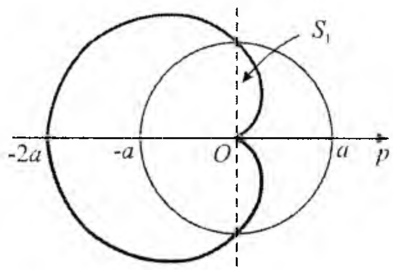


Рис. 10.3.3.1б

б) Щоб знайти шукану площу, треба від площі половини круга відняти площу, обмежену кардіоїдою і променями $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$. Враховуючи симетрію кардіоїди відносно полярної осі, обчислимо спочатку площу області S_1 (рис. 10.3.3.1б):

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\pi/2}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-2\right).$$

У результаті

$$S=\frac{1}{2}S_{\text{кр}}-2S_1=\frac{\pi a^2}{2}-a^2\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)=a^2\left(2-\frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад 2. Знайти площі фігур, обмежених:

а) *лемніскатою Бернуллі* $\rho^2=a^2\cos2\varphi$;

б) трипелюстковою *розою* $\rho=a\cos3\varphi$.

Розв'язання. **а)** Оскільки $\rho^2\ge0$, то $\cos2\varphi\ge0$. Знайдемо ті значення φ, для яких права частина рівняння невід'ємна:

$$2\pi n-\frac{\pi}{2}\le2\varphi\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\pi n-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi n\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l}-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\\ \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{5\pi}{4}.\end{array}\right.$$

Враховуючи симетрію фігури відносно координатних осей (рис. 10.3.3.2а), визначимо її площу за формулою:

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}\rho^2d\varphi=2\int_{0}^{\pi/4}a^2\cos2\varphi\,d\varphi=2a^2\cdot\frac{\sin2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi/4}=a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)=a^2.$$

Цікаво, що таку саму площу має і квадрат зі стороною a.

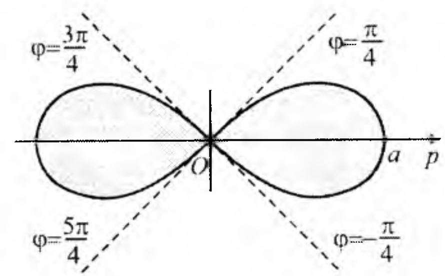


Рис. 10.3.3.2а

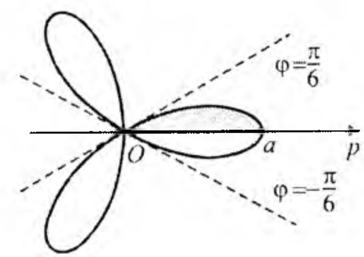


Рис. 10.3.3.2б

б) Функція $\rho=2a\cos3\varphi$ періодична з періодом $T=\frac{2\pi}{3}$, тому при зміні φ від $-\pi$ до π полярний радіус описує три рівні пелюстки кривої (рис. 10.3.3.2б). Припустимими для φ є ті значення, при яких $\cos3\varphi\ge0$:

$$2\pi n-\frac{\pi}{2}\le3\varphi\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi n}{3}-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},$$

звідки

$$-\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6} \qquad \text{при} \quad n=0;$$

$$\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{5\pi}{6} \qquad \text{при} \quad n=1;$$

$$\frac{7\pi}{6}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2} \qquad \text{при} \quad n=2.$$

Площа шостої частини фігури (половини однієї пелюстки) виражається інтегралом:

$$\frac{S}{6}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}a^2\cos^2 3\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\cdot\left(\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_0^{\pi/6}=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi a^2}{24}.$$

Тоді площа всієї фігури

$$S=6\cdot\frac{\pi a^2}{24}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

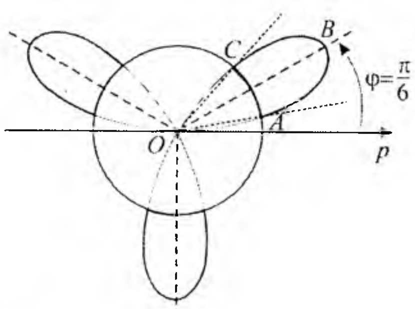
Приклад 3*. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho=2a\sin 3\varphi$, що лежить поза кругом $\rho=a$.

<u>*Розв'язання*</u>. Функція $\rho=2a\sin 3\varphi$ періодична з періодом $T=\dfrac{2\pi}{3}$, тому при зміні φ від $-\pi$ до π полярний радіус описує три рівні пелюстки кривої. Допустимими для φ є ті значення, при яких $\sin 3\varphi\ge 0$, тобто

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}, \qquad \frac{2\pi}{3}\le\varphi\le\pi, \qquad \frac{4\pi}{3}\le\varphi\le\frac{5\pi}{3}.$$

Вирізуючи з пелюстків частини, що належать кругу $\rho=a$, матимемо фігуру, площу якої й слід визначити. Очевидно, шукана площа дорівнює потроєній площі S_{ABCA}.

Знайдемо полярні координати точок перетину трипелюсткової рози і кола. Для цього розв'язжемо рівняння



$$2a\sin 3\varphi=a \quad\Rightarrow\quad \sin 3\varphi=\frac{1}{2},$$

$$\varphi=(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3}.$$

Сектору $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}$ належать корені

$$\varphi_1=\frac{\pi}{18}\quad(k=0), \qquad \varphi_2=\frac{5\pi}{18}\quad(k=1),$$

тобто точці A відповідає полярний

кут $\varphi_1=\dfrac{\pi}{18}$, а точці C – кут $\varphi_2=\dfrac{5\pi}{18}$. Проведемо промені OA і OC.

З рисунка видно, що

$$S_{ABCA}=S_{OABCO}-S_{OACO}^{\text{сект}}=\frac{1}{2}\int_{\pi/18}^{5\pi/18}4a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_{\pi/18}^{5\pi/18}a^2 d\varphi=$$

$$=a^2\int_{\pi/18}^{5\pi/18}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{4\pi}{18}=a^2\left(\frac{4\pi}{18}-\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Bigg|_{\pi/18}^{5\pi/18}\right)-\frac{\pi a^2}{9}=$$

$$=\frac{2\pi a^2}{9}-\frac{1}{6}a^2\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi a^2}{9}=\frac{\pi a^2}{9}-\frac{1}{6}a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{9}+\frac{a^2\sqrt{3}}{6}=a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

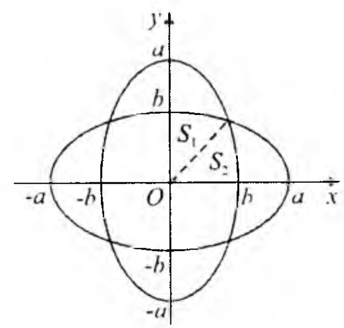
Отже, шукана площа

$$S=3S_{ABCA}=3\cdot a^2\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 4*. Знайти площу спільної частини еліпсів

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\text{і}\quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

<u>*Розв'язання*</u>. Задано рівняння двох однакових еліпсів із взаємно перпендикулярними фокальними осями. Знайдемо точки перетину еліпсів:



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\[2mm] \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\\ a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2.\end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння системи друге, матимемо:

$$x^2\left(b^2-a^2\right)+y^2\left(a^2-b^2\right)=0,$$

$$\left(b^2-a^2\right)\left(x^2-y^2\right)=0.$$

Оскільки $a\ne b$, то $x^2=y^2$, тобто $\pm x=\pm y$. Отримали 4 точки, що лежать на бісектрисах координатних кутів.

Перейдемо до полярної системи координат. Користуючись формулами переходу $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, знайдемо рівняння еліпсів у полярних координатах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad b^2\rho^2\cos^2\varphi+a^2\rho^2\sin^2\varphi=a^2b^2, \qquad \rho_1^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi};$$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad\Rightarrow\quad a^2\rho^2\cos^2\varphi+b^2\rho^2\sin^2\varphi=a^2b^2, \qquad \rho_2^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}.$$

Враховуючи симетрію отриманої області відносно координатних осей, обчислимо спочатку площу її четвертої частини. Вона дорівнює сумі площ S_1 і S_2, розділених променем $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Виходячи із симетрії задачі, площі S_1 і S_2 повинні бути рівні. Переконаємося в цьому, обчисливши кожну з них окремо:

$$S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho_2^2d\varphi=\frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=\frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\left(a^2+b^2\operatorname{tg}^2\varphi\right)}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\varphi=t \\ \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=dt\end{array}\quad \boxed{\begin{array}{c|c|c}\varphi & 0 & \pi/4 \\ \hline t & 0 & 1\end{array}}\right|=\frac{a^2b^2}{2}\int_0^1\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{a^2b^2}{2}\cdot\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bt}{a}\Bigg|_0^1=\frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a};$$

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\rho_1^2d\varphi=\frac{a^2b^2}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}.$$

Взяти цей інтеграл, як і попередній, підстановкою $\operatorname{tg}\varphi=t$ не вдається, оскільки $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не існує. Тому скористаємося підстановкою $\operatorname{ctg}\varphi=t$. Знаходимо

$$S_1=\frac{a^2b^2}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{b^2\operatorname{ctg}^2\varphi+a^2}\cdot\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\varphi=t \\ -\dfrac{d\varphi}{\sin^2\varphi}=dt\end{array}\quad \boxed{\begin{array}{c|c|c}\varphi & \pi/4 & \pi/2 \\ \hline t & 1 & 0\end{array}}\right|=$$

$$=\frac{a^2b^2}{2}\int_1^0\frac{dt}{b^2t^2+a^2}=\frac{a^2b^2}{2}\int_0^1\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Площі S_1 і S_2 дійсно рівні. Тепер визначимо площу спільної частини еліпсів

$$S=4\left(S_1+S_2\right)=4ab\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Рекомендуємо провести аналіз отриманого результату у випадку $a=b$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як обчислити площу області, межі якої задані *параметричними* рівняннями?
2. Площа якої області дорівнює потроєній площі твірного круга?
3. Як співвідносяться між собою площі астроїди і кардіоїди, утворені тим самим твірним кругом?
4. Що розуміють під *площею* криволінійного сектора?
5. Як обчислюється площа плоскої фігури *в полярній системі координат*?
6. Який геометричний об'єкт має таку саму площу, що і лемніската Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти площі плоских фігур, межі яких задані в параметричній формі:

1.1. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

1.2. $y=0$, $x=3(\cos t+t\sin t)$, $y=3(\sin t-t\cos t)$ – дуга *евольвенти* кола $(0\le t\le\pi)$.

2. Знайти площі плоских фігур, межі яких задані рівняннями в полярній системі координат:

2.1. $\rho^2=2\sin 2\varphi$;

2.2. $\rho=4\sin^2\varphi$;

2.3. $\rho=a\sin 3\varphi \quad (a>0)$;

2.4. $\rho=4\cos\varphi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi/4$;

2.5. $\rho=a$ і $\rho=2a\cos\varphi \quad (a<\rho<2a\cos\varphi)$;

2.6. кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$;

2.7. колами $\rho=2\sqrt{3}a\cos\varphi$, $\rho=2a\sin\varphi$.

ВІДПОВІДІ

1.1. πab. **1.2.** $29{,}25$. **2.1.** 1. **2.2.** 6π. **2.3.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **2.4.** $2+\pi$. **2.5.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **2.6.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **2.7.** $a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$.

§ 10.4. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ

Будь-яку обмежену множину точок простору називають *тілом*.

I. Нехай $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, у точці з абсцисою x. Якщо $S(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a,b]$, $a<b$, то *об'єм тіла* виражається інтегралом

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \qquad (10.4.1)$$

II. Якщо тіло утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$ $\left(f(x)\ge 0\right)$, віссю абсцис і прямими $x=a$ і $x=b$ відповідно навколо осей Ox (рис.10.4а) і Oy, то справедливими є формули:

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx \quad (a<b), \qquad V_y=2\pi\int_a^b xy\,dx \quad (0<a<b). \qquad (10.4.2)$$

Якщо тіло утворене обертанням фігури, обмеженої кривими $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, де $0\le y_1(x)\le y_2(x)$ і прямими $x=a$ і $x=b$ відповідно навколо осей Ox і Oy, то *об'єми тіл* V_x і V_y виражаються інтегралами:

$$V_x=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx, \qquad V_y=2\pi\int_a^b x\left(y_2-y_1\right)dx. \qquad (10.4.3)$$

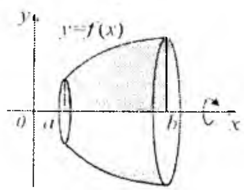


Рис. 10.4а

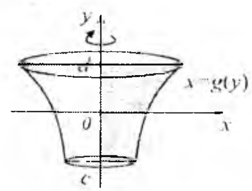


Рис. 10.4б

III. Якщо тіло утворене обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, обмеженої кривою $x=g(y)$ $\left(g(y)\ge 0\right)$, віссю ординат і прямими $y=c$ і $y=d$ $(c<d)$ (рис.10.4б), то об'єм *тіла*

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy. \qquad (10.4.4)$$

Якщо тіло утворене обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривими $x=x_1(y)$ і $x=x_2(y)$, де $0\le x_1(y)\le x_2(y)$ і прямими $y=c$ і $y=d$ $(c<d)$, то

$$V_y=\pi\int_a^b\left(x_2^2-x_1^2\right)dy. \qquad (10.4.5)$$

IV. Якщо крива задана в параметричному вигляді, в указаних формулах слід виконати відповідну заміну змінної.

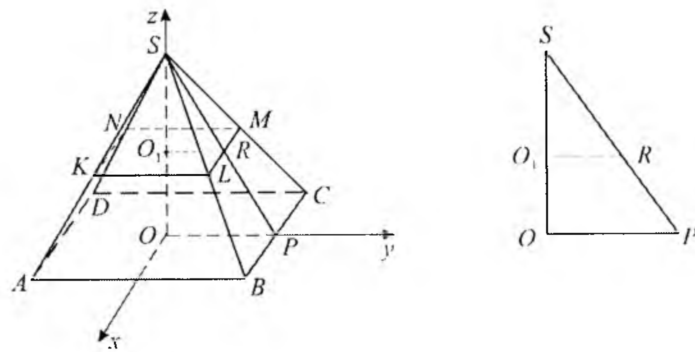
Якщо тіло утворене обертанням навколо полярної осі P криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ $(0\le\alpha<\beta\le\pi)$, то *об'єм тіла*

$$V_P=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (10.4.6)$$

Приклад 1. Обчислити об'єм чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник зі сторонами a і b, а висота піраміди дорівнює H.

Розв'язання. Для обчислення об'єму піраміди знадобиться знайти площу перерізу $S(z)$ піраміди площиною, перпендикулярною до осі симетрії Oz. Для цього розташуємо піраміду так, щоб її висота співпадала з віссю Oz, а основа лежала в площині xOy, причому сторони основи були паралельні осям координат Ox і Oy.

Проведемо площину перерізу, паралельну площині основи піраміди. Нехай відстань від площини перерізу до площини основи $OO_1=z$. Переріз являє собою прямокутник $KLMN$, площа якого є функцією координати z.



Для визначення сторін цього прямокутника, розглянемо два подібні трикутники SOP й SO_1R. З подібності трикутників знаходимо:

$$\frac{SO}{SO_1}=\frac{OP}{O_1R} \quad\Rightarrow\quad \frac{H}{H-z}=\frac{a/2}{O_1R} \quad\Rightarrow\quad O_1R=\frac{a(H-z)}{2H},$$

звідки $KL=\dfrac{a(H-z)}{H}$. Аналогічно визначимо $LM=\dfrac{b(H-z)}{H}$.

Таким чином, площа прямокутника $KLMN$

$$S(z)=\frac{ab(H-z)^2}{H^2}.$$

За відомою площею поперечного перерізу $S(z)$ і за допомогою формули (10.4.1) визначимо об'єм піраміди висотою H:

$$V=\int_0^H S(z)dz=\int_0^H\frac{ab(H-z)^2}{H^2}dz=\frac{ab}{H^2}\int_0^H(H-z)^2dz=-\frac{ab}{H^2}\cdot\frac{(H-z)^3}{3}\bigg|_0^H=$$

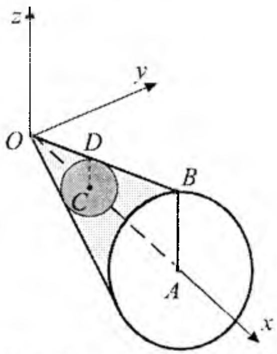
$$=\frac{ab}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\frac{abH}{3}=\frac{1}{3}S_{осн}H.$$

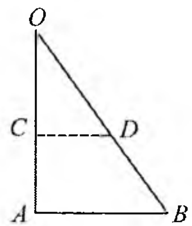
У випадку правильної ($a=b$) чотирикутної піраміди $V=\dfrac{a^2H}{3}$.

Приклад 2. Обчислити об'єм кругового конуса висотою H і радіусом основи R.

Розв'язання. Розташуємо конус так, щоб його вісь співпадала з віссю Ox. Відповідно до умови $AB=R$, $OA=H$.

На відстані $OC=x$ проведемо площину перерізу $S(x)$, перпендикулярну до осі конуса. Переріз являє собою круг радіуса CD, його площа дорівнює $S(x)=\pi\cdot CD^2$.





З подібності трикутників OCD і OAB знаходимо

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{OC} \quad\Rightarrow\quad \frac{R}{CD}=\frac{H}{x} \quad\Rightarrow\quad CD=\frac{Rx}{H}.$$

Отже, площа поперечного перерізу $S(x)=\dfrac{\pi R^2x^2}{H^2}$. Тоді об'єм конуса

$$V=\int_0^H S(x)dx=\int_0^H\frac{\pi R^2x^2}{H^2}dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{\pi R^2H}{3}=\frac13 S_{\text{осн}}H.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого тривісним еліпсоїдом

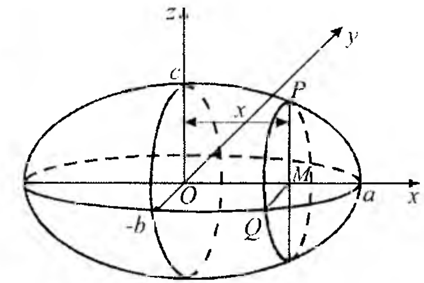
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розв'язання. У перерізі еліпсоїда площинами, перпендикулярними до осі Ox, матимемо фігури, обмежені еліпсом. Рівняння еліпса, що знаходиться на відстані x від площини yOz, має вигляд:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}.$$

Із цього рівняння визначимо довжини півосей еліпса:

$$MP=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \qquad MQ=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$



Отже, площа перерізу

$$S(x)=\pi\cdot MP\cdot MQ=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Об'єм тіла, обмеженого тривісним еліпсоїдом, обчислимо за формулою (10.4.1):

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\bigg|_{-a}^{a}=\pi bc\left(2a-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4\pi abc}{3}.$$

В окремому випадку $a=b=c=R$ дістаємо об'єм кулі $V=\frac43\pi R^3$.

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=4-x^2$ і $y=0$, навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy.

Розв'язання. Криволінійна трапеція обмежена зверху параболою $y=4-x^2$, знизу – віссю Ox, яку парабола перетинає в точках $x=-2$ і $x=2$ (рис. 10.4.4).

а) При обертанні криволінійної трапеції навколо осі Ox утвориться тіло, що нагадує за формою м'яч для гри в регбі (рис. 10.4.4а), його об'єм обчислимо за допомогою першої з формул (10.4.2):

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2dx=2\pi\int_0^2\left(16-8x^2+x^4\right)dx=2\pi\left(16x-\frac83x^3+\frac15x^5\right)\bigg|_0^2=\frac{512\pi}{15}.$$

При обчисленні інтеграла скористалися теоремою про інтегрування парної функції в симетричних межах.

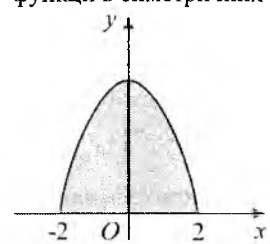


Рис. 10.4.4

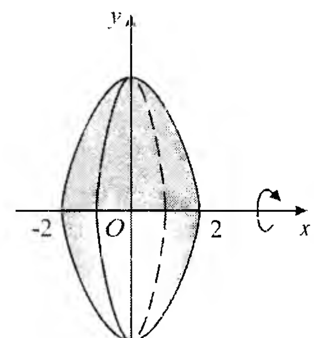


Рис. 10.4.4а

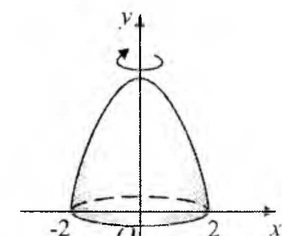


Рис. 10.4.4б

б) Очевидно, утвориться одне й те саме тіло обертання (рис. 10.4.4б), як при обертанні всієї заданої криволінійної трапеції навколо осі Oy, так і при обертанні тільки однієї її половини, наприклад, правої відносно осі ординат $(0 \le x \le 2)$. Тоді:

Перший спосіб. Об'єм тіла обертання можна обчислити за допомогою другої з формул (10.4.2). Дійсно,

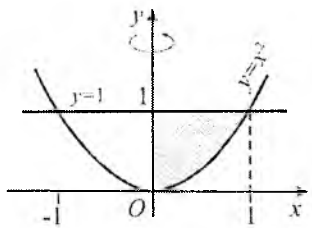
$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx = 4\pi \int_0^2 x\left(4 - x^2\right)dx = 2\pi \int_0^2 \left(4x - x^3\right)dx = 2\pi \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi.$$

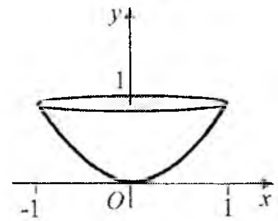
Другий спосіб. Якщо рівняння параболи записати у вигляді $x^2 = 4 - y$, то можна скористатися формулою (10.4.4). У цьому випадку $y \in [0;4]$ і

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_0^4 (4 - y)\,dy = \pi \left(4y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 8\pi.$$

Тіло, утворене обертанням параболи навколо її осі симетрії, називається *параболоїдом обертання.*

Приклад 5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої віссю Oy, параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$.





<u>Розв'язання</u>. *Перший спосіб.* Тіло утворене обертанням криволінійної трапеції $x = \sqrt{y}$ навколо *осі ординат*, тому скористаємося формулою (10.4.4):

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_0^1 y\,dy = \pi \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Другий спосіб. Спочатку знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійного трикутника, обмеженого кривою $y = x^2$, $x \in [0;1]$ і віссю абсцис (світліша область на рисунку зліва) навколо *осі ординат* за допомогою другої формули (10.4.2):

$$V_y = 2\pi \int_0^1 xy\,dx = 2\pi \int_0^1 x^3\,dx = 2\pi \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Тепер від об'єму циліндра одиничного радіуса і висотою $h = 1$ віднімемо знайдений об'єм:

$$V = V_ц - V_y = \pi r^2 h - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю Ox, параболою $y = 2x^2$ і прямою $y + x = 3$.

<u>Розв'язання</u>. Для побудови рисунка знайдемо спочатку абсциси точок перетину прямої і параболи (рис. 10.4.6), розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x + 3, \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x^2 + x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1; \\ x_2 = -3/2. \end{array} \right.$$

Другий розв'язок $x_2 = -3/2$ не задовольняє умову задачі.

Оскільки верхня межа фігури складена із двох різних ліній, то об'єм шуканого тіла визначимо як суму об'ємів тіл обертання, утворених обертанням навколо осі Ox криволінійних трапецій, обмежених: (**а**) кривою $y_1 = 2x^2$, прямою $x = 1$ і віссю абсцис і (**б**) прямими $y_2 = -x + 3$, $x = 1$ і віссю абсцис:

$$V_x = (V_x)_1 + (V_x)_2 = \pi \int_a^b y_1^2\,dx + \pi \int_b^c y_2^2\,dx,$$

де нижній межі "a" першого інтеграла відповідає $x = 0$ (як точка перетину параболи $y = 2x^2$ і осі Ox), а верхній межі "c" другого інтеграла відповідає $x = 3$ (як точка перетину прямої $y = -x + 3$ і осі Ox); $b = 1$. Отже,

$$V_x = \pi \int_0^1 y_1^2\,dx + \pi \int_1^3 y_2^2\,dx = \pi \int_0^1 4x^4 dx + \pi \int_1^3 (3 - x)^2 dx = \frac{4\pi x^5}{5}\Bigg|_0^1 - \frac{\pi(3 - x)^3}{3}\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{4\pi}{5} + \frac{8\pi}{3} = \frac{52\pi}{15}.$$

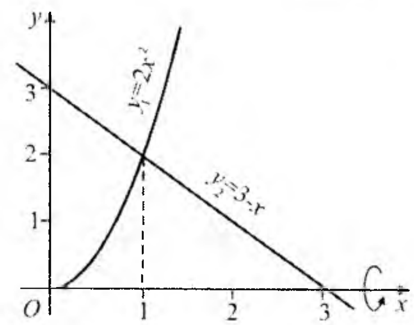


Рис. 10.4.6

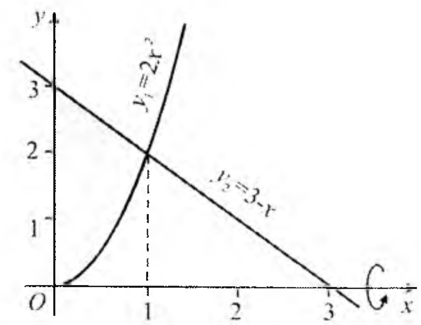


Рис. 10.4.7

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю Oy, параболою $y = 2x^2$ і прямою $y + x = 3$ $(x > 0)$.

Розв'язання. Абсциса точки перетину параболи і прямої (рис. 10.4.7) знайдена в прикладі 6.

Для обчислення об'єму заданого тіла обертання слід скористатися першою з формул (10.4.3):

$$V_x = \pi\int_0^1\left[(3-x)^2 - 4x^4\right]dx = \pi\left[-\frac{(3-x)^3}{3} - \frac{4x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \pi\left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{5} + 9\right) = \frac{83\pi}{15}.$$

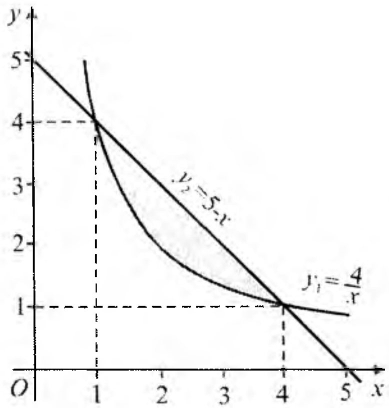
Зауваження. Об'єм конуса, утвореного обертанням прямої $y = 3 - x$ навколо осі Ox, є

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$$

і, зрозуміло, дорівнює сумі результатів, отриманих у прикладах 6 і 7: $V_{\text{кон}} = \dfrac{52\pi}{15} + \dfrac{83\pi}{15} = 9\pi$.

Приклад 8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $xy = 4$ і $x + y = 5$, навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy.

Розв'язання. Задана фігура безпосередньо не примикає до координатних осей. Для уточнення її рисунка знайдемо координати точок перетину гіперболи $y = \dfrac{4}{x}$ і прямої $y = 5 - x$, розв'язуючи систему рівнянь:



$$\begin{cases} xy = 4, \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x_1 = 1, & y_1 = 4; \\ x_2 = 4, & y_2 = 1. \end{array}\right.$$

а) Для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо осі Ox, скористаємося першою формулою (10.4.3).

У результаті знаходимо

$$V_x = \pi\int_a^b\left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_1^4\left[(5-x)^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2\right]dx = \pi\left(\frac{(5-x)^3}{-3} + \frac{16}{x}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16\right) = 9\pi.$$

б) Для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі Oy, слід скористатися другою формулою (10.4.3):

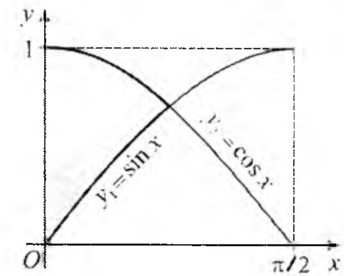
$$V_y = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)dx = 2\pi\int_1^4 x\left(5 - x - \frac{4}{x}\right)dx = 2\pi\int_1^4\left(5x - x^2 - 4\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = 2\pi\left(\frac{75}{2} - \frac{63}{3} - 12\right) = 9\pi.$$

Об'єм тіла обертання в цьому випадку не залежить від того, навколо якої осі координат обертається фігура.

Приклад 9*. Фігура обмежена дугами синусоїди $y = \sin x$, косинусоїди $y = \cos x$ і віссю ординат. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy.

Розв'язання. Фігура обмежена зверху графіком функції $y = \cos x$, а знизу – графіком функції $y = \sin x$.



Щоб знайти точку перетину графіків цих функцій у заданій області, розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \sin x \end{cases} \Rightarrow \quad \cos x = \sin x,$$

звідки

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

а) Об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо *осі абсцис* (рис. 10.4.9а), обчислюється за допомогою першої формули (10.4.3), де $x \in [0; \pi/4]$:

$$V_x = \pi\int_a^b\left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_0^{\pi/4}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx = \pi\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx = \pi\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}.$$

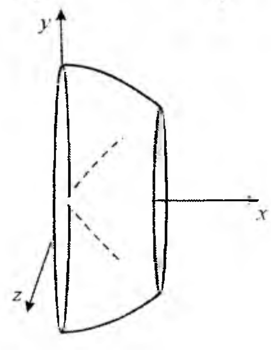


Рис. 10.4.9а

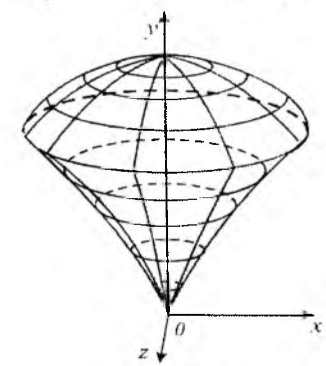


Рис. 10.4.9б

б) Об'єм тіла, утвореного обертанням заданої фігури навколо *осі ординат* (рис. 10.4.9б) слід розглядати як суму об'ємів двох тіл обертання, обмежених зверху, відповідно, графіками обернених тригонометричних функцій $x_1 = \arcsin y$ і $x_2 = \arccos y$, тобто

$$V_y = \left(V_y\right)_1 + \left(V_y\right)_2 = \pi \int_c^d x_1^2\, dy + \pi \int_d^b x_2^2\, dy,$$

де нижній межі "c" першого інтеграла відповідає ордината $y = 0$, а верхній межі "b" другого інтеграла – ордината $y = 1$.

Визначимо ординату точки перетину графіків заданих функцій, тобто значення межі інтегрування d:

$$y\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

У результаті шуканий об'єм виражається такою формулою:

$$V_y = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (\arcsin y)^2 dy + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 (\arccos y)^2\, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \arcsin y = t \\ y = \sin t \\ dy = \cos t\, dt \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline y & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{4} \\ \hline \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \arccos y = z \\ y = \cos z \\ dy = -\sin z\, dz \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline y & z \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{4} \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \right| =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} t^2 \cos t\, dt - \pi \int_{\pi/4}^0 z^2 \sin z\, dz.$$

Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто $\int_{\pi/4}^0 z^2 \sin z\, dz = \int_{\pi/4}^0 t^2 \sin t\, dt$, тому далі матимемо

$$\pi \int_0^{\pi/4} t^2 (\sin t + \cos t)\, dt = \pi \int_0^{\pi/4} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt.$$

Тепер отриманий інтеграл двічі беремо частинами:

$$\pi \int_0^{\pi/4} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = \left| \begin{array}{ll} t^2 = u, & du = 2t\, dt \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = dv, & v = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(-t^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \Big|_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} t \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt \right) =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} t \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = \left| \begin{array}{ll} t = u, & du = dt \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = dv, & v = \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi\left(t \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt \right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \Big|_0^{\pi/4} \right) = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\right).$$

Приклад 10. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої однією аркою *циклоїди* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю абсцис навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy.

<u>*Розв'язання*</u>. **а)** Застосовується перша формула (10.4.2). Оскільки крива задана *в параметричній формі* (див. частину 1, § 1.7, приклад 6), складемо із заданих рівнянь підінтегральний вираз для обчислення інтеграла $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Маємо:

$$y^2 = a^2 (1 - \cos t)^2, \qquad dx = a(1 - \cos t)\, dt.$$

У випадку першої арки циклоїди $x \in [0; 2\pi a]$. В указаному інтегралі слід перейти до нової змінної інтегрування t:

$$x_н = 0 \;\Rightarrow\; t_н = 0 \quad \text{і} \quad x_в = 2\pi a \;\Rightarrow\; t_в = 2\pi.$$

У результаті знаходимо:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right) dt - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 3\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right) d(\sin t) =$$

$$= \pi a^3 \cdot 5\pi - \pi a^3 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

б) У цьому випадку слід скористатися другою формулою (10.4.2). Використовуючи параметричне задання циклоїди, складемо підінтегральний вираз:

$$xy\,dx = a(t-\sin t)\cdot a\ (1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt$$

і обчислимо об'єм заданого тіла обертання:

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy\,dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t - \sin t + \sin 2t - 2t\cos t + \frac{1}{2}t\cos 2t - \cos^2 t\sin t\right)dt.$$

В останньому інтегралі всі доданки, крім першого, після інтегрування перетворюються в нуль (рекомендуємо перевірити самостійно), тому

$$V_y = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}t\,dt = 2\pi a^3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3.$$

Приклад 11. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лінією $x = 3\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$ $(0\le t\le \pi/2)$.

Розв'язання. Оскільки тіло утворене обертанням *навколо осі* Oy, то скористаємося формулою

$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy.$$

За заданими параметричними рівняннями складемо підінтегральний вираз

$$x = 3\cos^2 t,\quad dy = 8\sin t\cos t\,dt \quad\Rightarrow\quad x^2dy = 9\cos^4 t\cdot 8\sin t\cos t\,dt$$

і перейдемо до змінної інтегрування t, $t\in[0;\pi/2]$. Тоді:

$$V_y = \pi\int_0^{\pi/2} 9\cos^4 t\cdot 8\sin t\cos t\,dt = 72\pi\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\sin t\,dt = -72\pi\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\ d(\cos t) =$$

$$= -72\pi\cdot\frac{\cos^6 t}{6}\Bigg|_0^{\pi/2} = 12\pi.$$

Отриманий результат може бути перевірений засобами елементарної математики. Справді, задані параметричні рівняння легко зводяться до *рівняння прямої лінії у відрізках на осях* (див. частину 1, § 1.1):

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \cos^2 t\\ \frac{y}{4} &= \sin^2 t\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4} = 1.$$

Відповідно до умови відрізок прямої між точками її перетину з осями координат обертається навколо осі ординат. При його обертанні утворюється круговий конус, висота якого дорівнює 4, а радіус основи – 3. Об'єм цього конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 4 = 12\pi.$$

Приклад 12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням *кардіоїди* $\rho = a(1+\cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Оскільки крива задана в полярній системі координат (див. частину 1, § 1.6, приклад 12), то за формулою (10.4.6) матимемо

$$V_P = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi(1+\cos\varphi)^3\,d(1+\cos\varphi) = -\frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^4}{4}\Bigg|_0^\pi = \frac{8\pi a^3}{3}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що розуміють під *тілом* у просторі?
2. Як визначається *об'єм тіла* за відомою площею поперечного перерізу?
3. Вивести формулу для об'єму *тіла обертання*.
4. Як обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що спирається на цю вісь (прилягає до цієї осі)?
5. Як обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, що спирається на цю вісь?
6. Як обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, що спирається на вісь Ox ?
7. Як обчислюється об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, що спирається на вісь Oy ?
8. Як знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ $(0\le y_1(x)\le y_2(x))$ і прямими $x = a$ і $x = b$?
9. Як знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої кривими $x = x_1(y)$ і $x = x_2(y)$ $(0\le x_1(y)\le x_2(y))$ і прямими $y = c$ і $y = d$?

10. Як знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої, заданої *в параметричній формі*?
11. Як визначається об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі кривої, рівняння якої задане *в полярній системі координат*?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити об'єм правильної трикутної піраміди зі стороною основи a і висотою H.

2. Обчислити об'єм еліптичного конуса висотою H, якщо a і b – півосі еліпса.

3. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

3.1. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x=\pm 1$, $y=0$; 3.2. $y=\sin x$, $y=\dfrac{2}{\pi}x$;

3.3. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$; 3.4. $y=-x^2+3$, $y=x^2+1$;

3.5. $y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=\dfrac{x^3}{8}$; 3.6. $y=\dfrac{64}{x^2+16}$, $x^2=8y$;

3.7. $y^2=\dfrac{3}{2}x$, $x^2+y^2=1$; 3.8. $y=\sqrt{x}\,e^x$, $x=1$, $y=0$.

4. Знайти об'єм *тора*, утвореного обертанням навколо осі Ox круга $x^2+(y-b)^2=a^2$, $|x|\le a$, $0<a<b$.

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями:

5.1. $y=x(4-x)$, $y=0$; 5.2. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $x\in[0;\pi]$;

5.3. $y=x^3$, $x=0$, $y=8$; 5.4. $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+2$, $y=2$;

5.5. $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=2\sin t$; 5.6. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

6. Знайти об'єми тіл, утворених обертанням навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy фігур, обмежених кривими:

6.1. $y=\sin x$ (однією півхвилею) і віссю абсцис;

6.2. $x=at^2$, $y=a\ln t$, $a>0$ і осями координат;

6.3. $x=a\cos t$, $y=a\sin 2t$, $t\in[0;\pi/2]$ і віссю абсцис.

7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі кривої:

7.1. $\rho=\dfrac{5}{4}\sin^2\varphi$; 7.2. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

ВІДПОВІДІ

1. $\dfrac{a^2H}{4\sqrt{3}}$. **2.** $\dfrac{\pi abH}{3}$. **3.1.** $\dfrac{\pi(\pi+2)}{4}$. **3.2.** $\dfrac{\pi^2}{6}$. **3.3.** $\dfrac{3\pi}{10}$. **3.4.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **3.5.** $\dfrac{4\pi}{35}$.
3.6. $\dfrac{16\pi}{5}(5\pi+8)$. **3.7.** $\dfrac{19\pi}{48}$. **3.8.** $\dfrac{\pi}{4}(e^2+1)$. **4.** $2\pi^2a^2b$. **5.1.** $\dfrac{512\pi}{3}$.
5.2. $\dfrac{\pi^3}{2}$. **5.3.** $\dfrac{96\pi}{5}$. **5.4.** $\dfrac{64\pi}{3}$. **5.5.** 3π. **5.6.** $\dfrac{32}{105}\pi a^3$. **6.1.**(а) $\dfrac{\pi^2}{2}$;
(б) $2\pi^2$. **6.2.**(а) $\dfrac{\pi a^3}{2}$; (б) $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **6.3.**(а) $\dfrac{8}{15}\pi a^3$; (б) $\dfrac{\pi^2 a^3}{4}$. **7.1.** $\dfrac{25\pi}{21}$.
7.2. $\dfrac{\pi a^3}{12}\left[3\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-2\right]$.

.§ 10.5. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИН ДУГ ПЛОСКИХ КРИВИХ

I. Якщо гладка крива задана рівнянням $y = y(x)$, де функція $y(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$, то довжина кривої виражається інтегралом:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, dx, \qquad (10.5.1)$$

де a і b $(a < b)$ – абсциси кінців дуги кривої.

II. Якщо гладка крива задана рівняннями в параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[t_1;t_2]$ функції, то довжина дуги кривої дорівнює

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \qquad (10.5.2)$$

де t_1 і t_2 – значення параметра t, що відповідають кінцям дуги $(t_1 < t_2)$.

III. Довжина дуги кривої, заданої рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат, де функція $\rho(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha;\beta]$, виражається інтегралом:

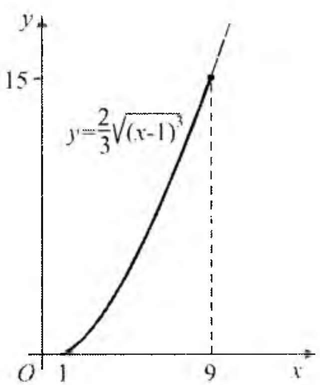
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi, \qquad (10.5.3)$$

де α і β – значення полярного кута на кінцях дуги $(\alpha < \beta)$.

Приклад 1. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ від точки з абсцисою $x_1 = 1$ до точки з абсцисою $x_2 = 9$.

Розв'язання. Крива задана в явному вигляді, тому можна застосувати формулу (10.5.1). Функція визначена і неперервна разом зі своєю похідною в усій області визначення $x \in [1;+\infty]$.

Знайдемо похідну функції



$$y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad y' = (x-1)^{1/2}$$

і складемо вираз

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+x-1} = \sqrt{x}.$$

Отже,

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx =$$

$$= \int_1^9 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{2}{3}\left(9^{3/2}-1\right) = \frac{52}{3}.$$

Приклад 2. Знайти довжину дуги кривої $y = \arcsin\left(e^{-x}\right)$ від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 1$ (рис. 10.5.2).

Розв'язання. Знайдемо похідну й обчислимо підінтегральну функцію:

$$y' = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

Тоді

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx = \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int_0^1 \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-1}} = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right).$$

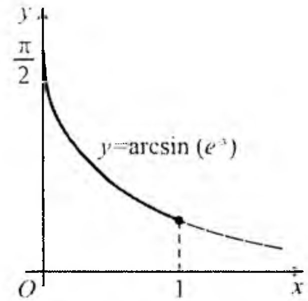


Рис. 10.5.2

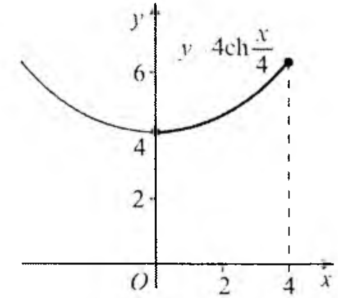


Рис. 10.5.3

Приклад 3. Обчислити довжину дуги *ланцюгової лінії*, заданої рівнянням $y = 2\left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right)$, від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 4$ (рис. 10.5.3).

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = 2\left(e^{x/4}-e^{-x/4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(e^{x/4}-e^{-x/4}\right)$$

і складемо підінтегральну функцію:

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{x/4}-e^{-x/4}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{x/2}-2+e^{-x/2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}e^{x/2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-x/2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right)^2} = \frac{e^{x/4}+e^{-x/4}}{2}.$$

Тепер обчислимо довжину дуги:

$$l = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right)dx = 2\left(e^{x/4}-e^{-x/4}\right)\Big|_0^4 = 2\left(e-e^{-1}\right).$$

Зауваження 1. Розв'язування можна спростити, якщо скористатися властивостями гіперболічних функцій. Дійсно,

$$y = 2\left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right) = 4\,\mathrm{ch}\frac{x}{4},$$

тоді

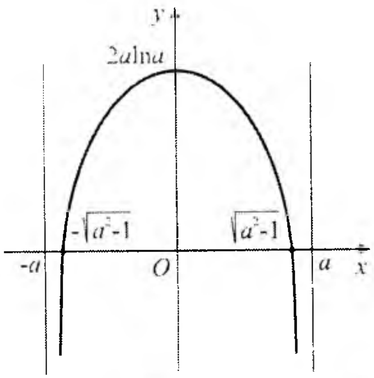
$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{4}}\,dx=\int_0^4 \mathrm{ch}\frac{x}{4}\,dx = 4\cdot\mathrm{sh}\frac{x}{4}\Big|_0^4 = 4\cdot \mathrm{sh}1 = 2\left(e-e^{-1}\right).$$

Приклад 4. Знайти довжину дуги кривої $y=a\ln\left(a^2-x^2\right)$ $(a>1)$, що лежить вище осі Ox.

Розв'язання. Функція визначена при $a^2-x^2>0$, тобто $|x|<a$. Крива симетрична відносно осі Oy і перетинає координатні осі в точках:

$x=0$, $\quad y=2a\ln a>0$, $\quad$ оскільки $a>1$;

$y=0$, $\quad \ln\left(a^2-x^2\right)=0 \;\Rightarrow\; a^2-x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{a^2-1}$.



Похідна $y'=-\dfrac{2ax}{a^2-x^2}$ при переході через критичну точку $x=0$ міняє знак з "+" на "–", отже, $x=0$ – точка максимуму функції.

Обчислимо $\sqrt{1+(y')^2}$:

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

Тоді

$$l=\int_{-\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{a^2-1}}\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,dx=2\int_0^{\sqrt{a^2-1}}\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\,dx=2\int_0^{\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{2a^2}{a^2-x^2}-1\right)dx=$$

$$=2\left(\frac{2a^2}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|-x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-1}}=2a\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-1}+a}{\sqrt{a^2-1}-a}\right|-2\sqrt{a^2-1}.$$

Приклад 5. Знайти периметр одного із криволінійних трикутників, обмежених віссю абсцис і кривими $y=\ln\cos x$ і $y=\ln\sin x$.

Розв'язання. Будемо розглядати криволінійний трикутник, основа якого співпадає з відрізком осі абсцис $[0;\pi/2]$.

Периметр цього трикутника (рис. 10.5.5) складається з довжин дуг OA і AB і відрізка OB довжиною $\pi/2$, тобто

$$l=OB+\overset{\frown}{OA}+\overset{\frown}{AB}.$$

Знайдемо абсцису точки перетину заданих кривих:

$$\ln\cos x=\ln\sin x \;\Rightarrow\; \cos x=\sin x,$$

$$\mathrm{tg}\,x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}.$$

Тепер визначимо довжину дуги $\overset{\frown}{OA}$:

$$\overset{\frown}{OA}=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\left[(\ln\cos x)'\right]^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+(-\mathrm{tg}x)^2}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=$$

$$=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}}=\ln\sqrt{\frac{1+\sin\frac{\pi}{4}}{1-\sin\frac{\pi}{4}}}=\ln\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}}.$$

Такий самий результат отримаємо для довжини дуги $\overset{\frown}{AB}$, виходячи з того, що $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}$ (див. § 10.2, приклад 6б):

$$\overset{\frown}{AB}=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1+\left[(\ln\sin x)'\right]^2}\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\ln\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}}.$$

Таким чином, периметр

$$l=\frac{\pi}{2}+2\ln\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}}=\frac{\pi}{2}+2\ln\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt2\right)^2}{4-2}}=\frac{\pi}{2}+2\ln\left(1+\sqrt2\right).$$

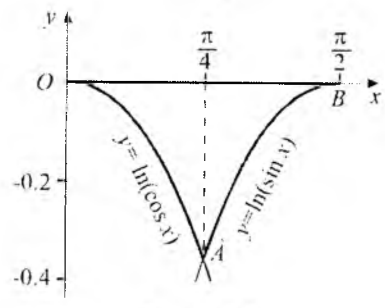


Рис. 10.5.5

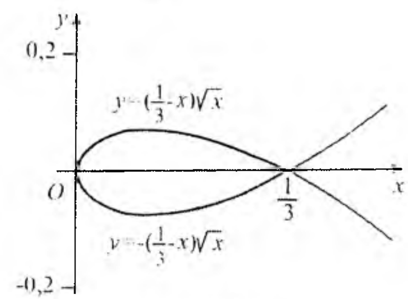


Рис. 10.5.6

Приклад 6. Знайти відношення площі, обмеженої петлею кривої $y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$, до площі круга, довжина кола якого дорівнює довжині контура цієї кривої.

Розв'язання. Область існування заданої функції $x \ge 0$. При цьому, якщо $x \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$, то крива описує петлю (рис. 10.5.6).

Обчислимо площу, обмежену цією петлею, враховуючи симетрію фігури відносно осі абсцис:

$$S_{\text{птл}} = 2\int_0^{1/3}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^{1/3}\left(\frac{1}{3}x^{1/2}-x^{3/2}\right)dx = 2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^{1/3} =$$

$$=4\left(\frac{1}{9}x\sqrt{x}-\frac{1}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^{1/3} = 4\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

Тепер обчислимо довжину петлі. Оскільки

$$y' = \pm\frac{1-9x}{6\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad 1+(y')^2 = \frac{1}{x}\left(\frac{9x+1}{6}\right)^2,$$

то

$$l_{\text{птл}} = 2\int_0^{1/3}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_0^{1/3}\frac{9x+1}{6\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\int_0^{1/3}\left(9x^{1/2}+x^{-1/2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{3}\left(9\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}\right)\Bigg|_0^{1/3} = \frac{2}{3}\left(3x\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^{1/3} = \frac{2}{3}\left(3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

За умовою задачі довжина дуги петлі дорівнює довжині кола, тобто $l_{\text{птл}} = 2\pi r$, де r – радіус кола. Отже,

$$r = \frac{l_{\text{птл}}}{2\pi} = \frac{4}{3\sqrt{3}\cdot 2\pi} = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}.$$

Тоді площа круга

$$S_{\text{крг}} = \pi r^2 = \frac{\pi\cdot 4}{9\cdot 3\cdot \pi^2} = \frac{4}{27\pi}.$$

Отже, відношення площ

$$\frac{S_{\text{птл}}}{S_{\text{крг}}} = \frac{8\cdot 27\pi}{135\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{2\cdot 3\pi}{15\sqrt{3}} = \frac{6\pi}{15\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{15}.$$

Приклад 7. Обчислити довжину однієї арки *циклоїди*:

$$x = a(t-\sin t), \qquad y = a(1-\cos t).$$

Розв'язання. Циклоїда (див. частину 1, § 1.7, приклад 6) задана в параметричній формі, тому скористаємося формулою (10.5.2).

Продиференціюємо по t параметричні рівняння циклоїди

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = a(1-\cos t), \qquad y'_t = \frac{dy}{dt} = a\sin t$$

і обчислимо підінтегральну функцію:

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} =$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)} = a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Одна арка циклоїди утворюється при зміні параметра t від 0 до 2π. Отже, $\sin\frac{t}{2} \ge 0$ і

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi-\cos 0) = 8a.$$

Зауважимо, що довжина однієї арки циклоїди дорівнює чотирьом діаметрам твірного кола (*теорема Рена*).

Приклад 8. Обчислити довжину *астроїди*: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Астроїда симетрична відносно координатних осей (див. частину 1, § 1.7, приклад 3**г**). Тому можна обчислити довжину дуги астроїди, розташованої в першій чверті, і результат помножити на 4.

Диференціюючи рівняння астроїди по параметру t, матимемо:

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad y'_t = \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t.$$

Звідси

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2} = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t} =$$

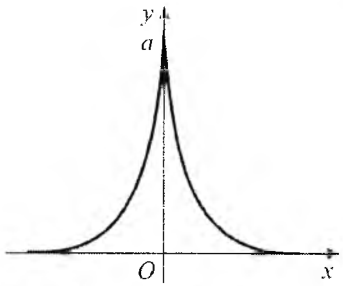
$$= 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)} = 3a|\sin t\cos t| = \frac{3a}{2}|\sin 2t|.$$

Оскільки $\sin 2t \ge 0$ при $t\in[0;\pi/2]$, то

$$l = 4\cdot\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = 6a\left(\frac{-\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 3a(-\cos\pi+\cos 0) = 6a.$$

Приклад 9*. Знайти довжину дуги *трактриси* $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t \quad (0 < t < \pi)$ від точки $(0;a)$ до точки $(x;y)$.

Розв'язання. Знайдемо межі зміни параметра t. Точці $(0;a)$ відповідає:



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t + \ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Поточна точка $(x;y)$ відповідає верхній межі інтегрування – поточному параметру t.

Продиференціюємо рівняння трактриси по параметру t:

$$x_t' = a\left(-\sin t + \frac{1}{\operatorname{tg} t/2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t/2}\cdot\frac{1}{2}\right) = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\frac{\cos^2 t}{\sin t}, \qquad y_t' = a\cos t.$$

Тоді

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\right)} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = a|\operatorname{ctg} t|.$$

Оскільки $\pi/2 = t_1 \le t \le \pi$, то $\operatorname{ctg} t < 0$, тобто $|\operatorname{ctg} t| = -\operatorname{ctg} t$ і довжина дуги трактриси

$$l = -\int_{\pi/2}^{t} a\frac{\cos t}{\sin t}\,dt = -a\int_{\pi/2}^{t}\frac{d(\sin t)}{\sin t} = -a\ln\sin t\Big|_{\pi/2}^{t} = -a\ln\sin t + a\ln\sin\frac{\pi}{2} = a\ln\frac{a}{y}.$$

Приклад 10. Довести, що довжина еліпса $x = \sqrt{2}\sin t$, $y = \cos t$ дорівнює довжині однієї хвилі синусоїди $y = \sin x$.

Розв'язання. При визначенні довжин заданих кривих будемо враховувати їхню симетрію. Для дуги еліпса одержуємо:

$$x_t' = \sqrt{2}\cos t, \qquad y_t' = -\sin t$$

і відповідно

$$l_1 = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \cos^2 t}\,dt.$$

Не будемо обчислювати знайдений інтеграл, а просто покажемо, що довжина однієї хвилі синусоїди виражається таким самим інтегралом. Дійсно, для синусоїди $y' = \cos x$ і

$$l_2 = \int_a^b\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx.$$

А оскільки інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, то маємо $l_1 = l_2$.

Приклад 11. Знайти довжину дуги кривої, заданої в параметричній формі

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz, \qquad y = \int_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz, \qquad 1 \le t \le 2$$

від початку координат до найближчої точки перетину з вертикальною дотичною.

Розв'язання. Скористаємося формулою довжини дуги в параметричній формі (10.5.2). Для цього знайдемо похідні від інтеграла по верхній межі, тобто

$$x_t' = \left(\int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz\right)' = \frac{\cos t}{t}, \qquad y_t' = \left(\int_1^t \frac{\sin z}{z}\,dz\right)' = \frac{\sin t}{t}$$

і обчислимо підінтегральну функцію:

$$\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

Крива має вертикальну дотичну, якщо $y_x' = \infty$. Похідна функції, заданої в параметричній формі,

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Отже, $\operatorname{tg} t = \infty$. Звідси випливає, що верхня межа інтеграла $t_в = \pi/2$. Нижня межа $t_н = 1$, оскільки точці $(0;0)$ відповідає значення параметра $t = 1$.

Таким чином,

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_1^{\pi/2}\frac{dt}{t} = \ln t\Big|_1^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2}.$$

ЗАДАННЯ КРИВОЇ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Приклад 12. Знайти довжину *кардіоїди* $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Розв'язання. Крива задана в полярних координатах (див. частину 1, § 1.6, приклад 12), тому можна застосувати формулу (10.5.3). Тут $\rho_\varphi' = -a\sin\varphi$, тоді

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2} = \sqrt{a^2(1 + \cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} = a\sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} =$$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=a\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Кардіоїда симетрична відносно полярної осі, тому знайдемо довжину її верхньої половини і помножимо на 2. Оскільки $\cos\frac{\varphi}{2}>0$ при $\varphi\in(0;\pi)$, то знак модуля в підінтегральній функції може бути опущений:

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi=2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=8a.$$

Зауваження 2. Звернемо увагу – *довжина кардіоїди* з діаметром a твірного круга *дорівнює довжині циклоїди* з радіусом a твірного круга (див. приклад 7).

Приклад 13. Знайти довжину дуги *гіперболічної спіралі* $\rho\varphi=1$ від точки A до точки B, полярні координати яких відповідно дорівнюють $\rho_A=2$, $\varphi_A=\frac{1}{2}$ і $\rho_B=\frac{1}{2}$, $\varphi_B=2$ (на рис. 10.5.13 радіанна міра кутів переведена в градусну).

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння спіралі відносно радіуса-вектора:

$$\rho=\frac{1}{\varphi}.$$

Звідси видно, що при $\varphi\to+\infty$ радіус-вектор спіралі необмежено зменшується. Отже, витки спіралі необмежено притискаються до полюса.

Нас натомість цікавить довжина дуги AB спіралі, що відповідає значенням полярного кута від $\varphi=1/2$ до $\varphi=2$.

З рівняння спіралі знаходимо

$$\rho'_\varphi=-\frac{1}{\varphi^2}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}=\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}=\frac{1}{\varphi}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (10.5.3), одержимо:

$$l=\int_{1/2}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}\cdot\frac{d\varphi}{\varphi}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}=t\\ \varphi=\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\\ d\varphi=\frac{-t\,dt}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}}\end{array}\right|=$$

φ	t
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{5}$
2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}/2}t\sqrt{t^2-1}\cdot\frac{t\,dt}{(1-t^2)\sqrt{t^2-1}}=\int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{5}}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{5}}=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}/2-1}{\sqrt{5}/2+1}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

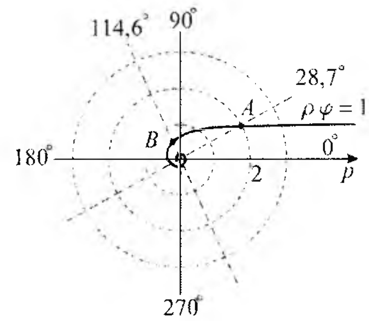


Рис. 10.5.13

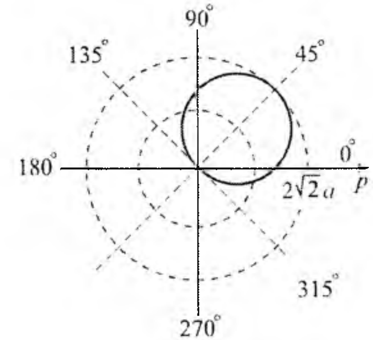


Рис. 10.5.14

Приклад 14. Знайти довжину замкнутої кривої $\rho=2a(\sin\varphi+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Задане рівняння описує коло (рис. 10.5.14). Перетворимо рівняння так, щоб можна було визначити межі зміни змінної φ:

$$\rho=2a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right)=2\sqrt{2}a\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right).$$

Оскільки $\rho\ge0$, то $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\ge0$. Тоді

$$2\pi n-\frac{\pi}{2}\le\varphi-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2\pi n\quad\Rightarrow\quad2\pi n-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,$$

звідки при $n=0$ маємо $-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}$.

Оскільки $\rho'=2a(\cos\varphi-\sin\varphi)$, то

$$\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}=\sqrt{4a^2(\sin\varphi+\cos\varphi)^2+4a^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2}=2\sqrt{2}a.$$

Отже,

$$l=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}2\sqrt{2}a\,d\varphi=2\sqrt{2}a\cdot\varphi\Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4}=2\sqrt{2}a\pi.$$

Зауваження 3. Розв'язок може бути знайдений засобами елементарної математики, якщо помітити, що отримане рівняння

$$\rho = 2\sqrt{2}a\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

описує коло, діаметр якого лежить на промені $\varphi = \frac{\pi}{4}$ і дорівнює $2\sqrt{2}a$. Звідси знаходимо радіус кола $R = \sqrt{2}a$ і його довжину $l = 2\pi R = 2\sqrt{2}\,\pi a$.

Приклад 15. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ від $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Розв'язання в полярній системі координат видається досить складним. Скористаємося формулами переходу від полярних координат до декартових:

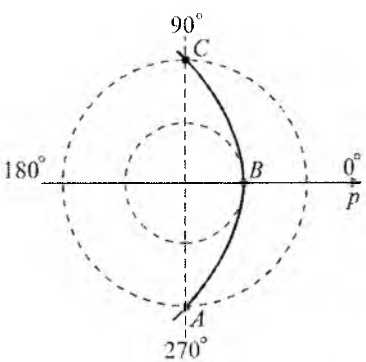
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тоді

$$\rho = \frac{p}{1+\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{p\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{x^2+y^2} = p$$

і задане рівняння в декартовій системі координат набуває вигляду:

$$y^2 = -2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$



Дістали рівняння параболи симетричної відносно осі абсцис, з вершиною в точці $B(p/2;0)$. Таким чином, потрібно визначити довжину дуги ABC параболи від точки $A(0;-p)$ до точки $C(0;p)$.

У даному випадку застосуємо формулу

$$l = \int_c^d \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy, \qquad \text{де } x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}y^2.$$

Оскільки похідна $x'_y = -\dfrac{y}{p}$, то

$$l = \int_c^d \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy = \int_{-p}^{p}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{2}{p}\int_0^p \sqrt{p^2+y^2}\,dy.$$

Процедуру обчислення невизначеного інтеграла такого типу наведено нами в § 9.3, приклад 10:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right) + C.$$

Тому

$$\frac{2}{p}\int_0^p\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{2}{p}\cdot\frac{1}{2}\left(y\sqrt{p^2+y^2} + p^2\ln\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_0^p =$$

$$= \frac{1}{p}\left[p^2\sqrt{2} + p^2\ln\left(p+p\sqrt{2}\right) - p^2\ln p\right] = p\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

Отже, довжина дуги кривої

$$l = p\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як обчислюється довжина дуги кривої *у декартовій системі координат*?
2. Як обчислити довжину дуги кривої, заданої *в параметричному вигляді*?
3. Скільки діаметрів твірного кола міститься в довжині однієї арки циклоїди?
4. Як обчислюється довжина дуги кривої *у полярній системі координат*?
5. Як співвідносяться між собою довжина *кардіоїди* й довжина однієї арки *циклоїди* з однаковими радіусами твірного кола?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти довжину дуги кривої:

1.1. $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ між точками її перетину з віссю Ox;

1.2. $y = \ln\sin x$ від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$;

1.3. $y = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,2x$ від $x = 0$ до $x = 3$;

1.4. $y = \frac{1}{2}x^2$ від $x = 0$ до $x = 1$;

1.5. $y^2 = x^3$, відтятої прямою $x = \frac{4}{3}$;

1.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*астроїда*);

1.7. $8a^2y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$ (замкнута крива);

1.8. $y^2 = 2x^3$, розташованої всередині кола $x^2 + y^2 = 20$.

2. Обчислити довжину дуги кривої, заданої в параметричному вигляді:

2.1. $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $\quad y = t^2 + 2 \quad$ від $t = 0$ до $t = 3$;

2.2. $x = e^t \cos t$, $\quad y = e^t \sin t \quad$ від $t = 0$ до $t = \ln\pi$;

2.3. $x = 5\cos^2 t$, $\quad y = 5\sin^2 t \quad$ від $t \in [0; \pi/2]$;

2.4. $x = a\left(t^2 + 1\right)$, $\quad y = \frac{a}{3}\left(t^3 - 3t\right) \quad$ (петля).

3. Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярній системі координат:

3.1. $\rho = 3\cos\varphi$;

3.2. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$;

3.3. $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$, $\quad \varphi \in [0; \pi/2]$;

3.4. $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$ усередині кола $\rho = 1$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$. **1.2.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **1.3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh} 6$. **1.4.** $\frac{\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}$. **1.5.** $\frac{112}{27}$.
1.6. $6a$. **1.7.** $\sqrt{2}\pi a$. **1.8.** $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) + 4\sqrt{5}\,\operatorname{arctg} 2$. **2.1.** 12.
2.2. $\sqrt{2}(\pi - 1)$. **2.3.** $5\sqrt{2}$. **2.4.** $4\sqrt{3}a$. **3.1.** 3π. **3.2.** 24. **3.3.** $0{,}14$.
3.4. $8\left(2 - \sqrt{3}\right)$.

§ 10.6. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

I. Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги l кривої $y = y(x)$, якщо функція $y(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$, $a < b$, виражається інтегралом

$$P_x = 2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}\,dx. \qquad (10.6.1)$$

Площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги l кривої $x = x(y)$, якщо функція $x(y)$ неперервно диференційовна на відрізку $[c;d]$, $c < d$, визначають за формулою:

$$P_y = 2\pi\int_c^d |x(y)|\sqrt{1 + \left[x'(y)\right]^2}\,dy. \qquad (10.6.2)$$

II. Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t)$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[t_1;t_2]$, $t_1 < t_2$, то площі поверхонь, утворених обертанням кривої навколо осей Ox і Oy, обчислюють за формулами:

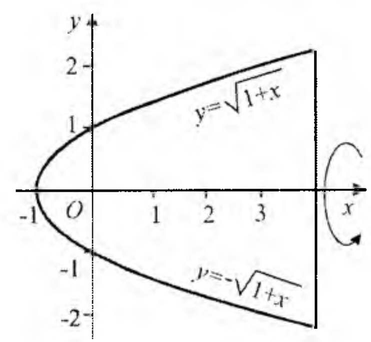
$$P_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt; \quad P_y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}\,dt. \qquad (10.6.3)$$

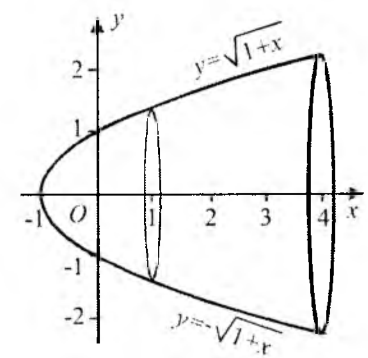
III. Якщо крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат і функція $\rho(\varphi)$ неперервно диференційовна на $[\alpha;\beta]$, то площа поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, виражається інтегралом:

$$P_\parallel = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,\sin\varphi\,d\varphi. \qquad (10.6.4)$$

Приклад 1. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox частини кривої $y^2 = 1 + x$, що відтинається прямою $x = 4$.

Розв'язання. Крива задана в явному вигляді, тому скористаємося формулою (10.6.1). Шукана поверхня утворюється у результаті обертання заданої кривої навколо осі Ox.





Крива симетрична відносно осі абсцис, тому поверхня може бути утворена обертанням тільки верхньої частини параболи $y=\sqrt{1+x}$. Звідси знаходимо:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)^2}=\frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{1+x}}.$$

Тоді

$$P_x=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{4}\sqrt{1+x}\cdot\frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{1+x}}\,dx=\pi\int_{-1}^{4}\sqrt{4x+5}\,dx=$$

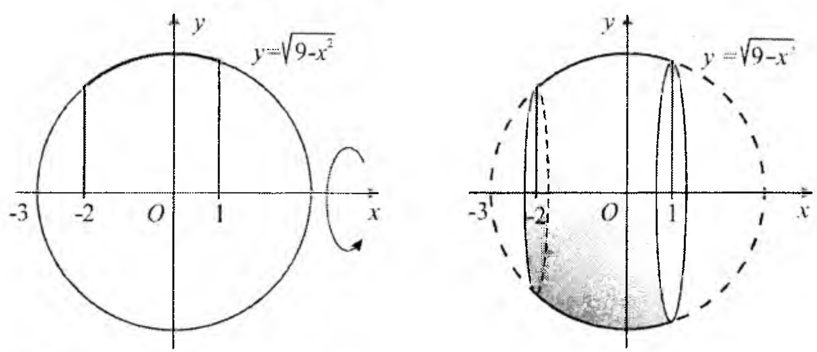
$$=\pi\cdot\frac{(4x+5)^{3/2}}{3/2\cdot 4}\Bigg|_{-1}^{4}=\frac{\pi}{6}\left(21\sqrt{21}-1\right).$$

Приклад 2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кола $x^2+y^2=9$ $(y>0)$ між точками з абсцисами $x=-2$ і $x=1$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння кола відносно y $(y>0)$:

$$y=\sqrt{9-x^2} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$y\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right)^2}=\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}=\sqrt{9-x^2+x^2}=3.$$



Отже,

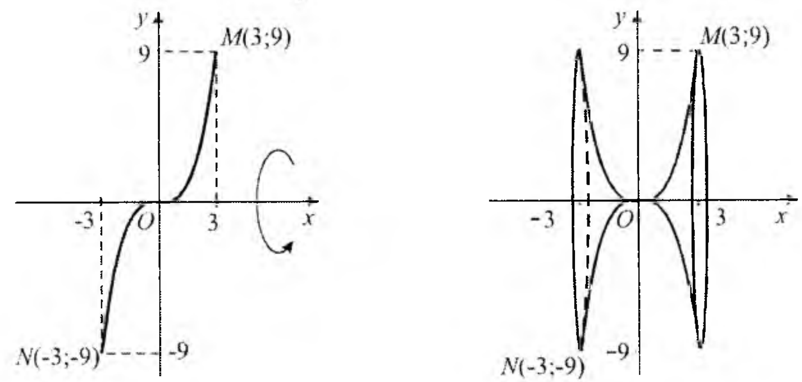
$$P_x=2\pi\int_{-2}^{1}3\,dx=6\pi\cdot 3=18\pi.$$

Зауваження. Дійсно, за формулами стереометрії площа бічної поверхні кульового пояса радіуса R і висоти h дорівнює $S_{біч}=2\pi Rh=2\pi\cdot 3\cdot 3=18\pi$.

Приклад 3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кубічної параболи $y=\frac{x^3}{3}$, поміщеної між прямими $x=-3$ і $x=3$.

Розв'язання. Побудувавши дугу параболи $y=\frac{x^3}{3}$ між точками $N(-3;-9)$ і $M(3;9)$, бачимо, що поверхня, утворена обертанням цієї дуги навколо осі Ox, складається із двох однакових частин. Тому

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^3 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \qquad y>0.$$



Знайдемо похідну заданої функції і складемо підінтегральний вираз:

$$y'=x^2 \quad\Rightarrow\quad y\sqrt{1+(y')^2}=\frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}.$$

У результаті маємо

$$P_x=\frac{4\pi}{3}\int_0^3 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx=\frac{\pi}{3}\int_0^3\left(1+x^4\right)^{1/2}d\left(1+x^4\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\left(1+x^4\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^3=\frac{2\pi}{9}\left(82\sqrt{82}-1\right).$$

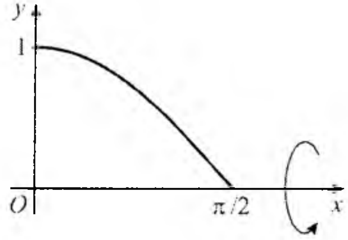
Приклад 4. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги косинусоїди $y=\cos x$ від $x=0$ до $x=\pi/2$.

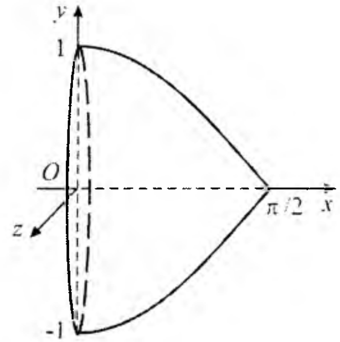
Розв'язання. Маємо $y'=-\sin x$. Тоді

$$P_x=2\pi\int_0^{\pi/2}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x & 0 & \pi/2\\ \hline t & 0 & 1\\ \hline\end{array}\right|=2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Невизначчний інтеграл такого вигляду обчислено в § 9.3, приклад 10:

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)+C.$$





Таким чином,

$$P_x = 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

Приклад 5. Обчислити площу поверхні *тора*, утвореного обертанням кола $x^2 + (y-2)^2 = 1$ навколо осі Ox.

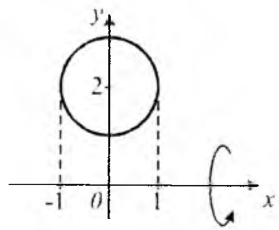
Розв'язання. Рівняння кола задане в неявному вигляді. Зручно записати це рівняння в параметричній формі і скористатися першою формулою (10.6.3):

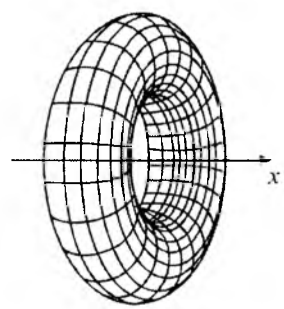
$$x = \cos t, \qquad y = 2 + \sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тоді

$$x'(t) = -\sin t, \qquad y'(t) = \cos t,$$

$$y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = (2+\sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2 + \sin t.$$





Отже, площа поверхні тора

$$P_x = 2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\,dt = 2\pi(2t - \cos t)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi(4\pi - 1 + 1) = 8\pi^2.$$

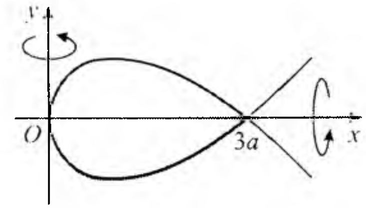
Приклад 6. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням петлі кривої $9ay^2 = x(3a-x)^2$ навколо: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy.

Розв'язання. Петля кривої симетрична відносно осі Ox, причому $x \in [0; 3a]$.

а) Шукана поверхня утворюється при обертанні петлі (або її верхньої половини) навколо осі Ox (рис. 10.6.6а).

Розв'язуючи рівняння кривої відносно y $(y > 0)$, знайдемо $y = \dfrac{(3a-x)\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}$. Тоді

$$y' = \frac{3(a-x)}{6\sqrt{ax}} \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = \frac{(a+x)^2}{4ax}.$$



Тепер скористаємося формулою (10.6.1):

$$P_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^{3a}\frac{\sqrt{x}(3a-x)}{3\sqrt{a}}\cdot\frac{(a+x)}{2\sqrt{ax}}\,dx = \frac{\pi}{3a}\int_0^{3a}\left(3a^2 + 2ax - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{3a}\cdot\left(3a^2x + ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{3a} = 3\pi a^2.$$

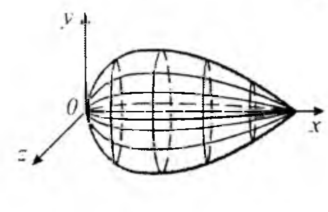


Рис. 10.6.6а

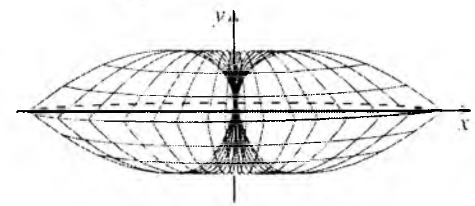


Рис. 10.6.6б

б) Щоб знайти площу поверхні, утвореної обертанням петлі навколо осі Oy (на рис. 10.6.6б показаний переріз тіла обертання площиною xOy), параметризуємо рівняння кривої, поклавши $x = at^2$, $t \in R$. Тоді

$$9ay^2 = at^2\left(3a - at^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{a^3t^2\left(3-t^2\right)^2}{9a} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{at\left(3-t^2\right)}{3},$$

при цьому $t \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$. Застосуємо другу формулу (10.6.3), для чого знайдемо:

$$x_t' = 2at, \qquad y_t' = a\left(1-t^2\right);$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = 4a^2t^2 + a^2\left(1-t^2\right)^2 = a^2\left(4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4\right) = a^2\left(t^2+1\right)^2.$$

Отже,

$$P_y = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} at^2\cdot a\left(t^2+1\right)dt = 4\pi a^2\int_0^{\sqrt{3}}\left(t^4+t^2\right)dt = 4\pi a^2\cdot\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$=4\pi a^2\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}+\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)=12\sqrt{3}\pi a^2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{56\sqrt{3}\pi a^2}{5}.$$

Приклад 7. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням однієї арки циклоїди $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ навколо: **а**) осі Ox; **б**) осі Oy.

<u>*Розв'язання.*</u> **а**) Задано параметричні рівняння *циклоїди* (див. частину 1, § 1.7, приклад 6), тому можна застосувати першу формулу (10.6.3). У цьому випадку

$$x_t' = 2(1-\cos t),\qquad y_t' = 2\sin t.$$

Тоді

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2 = 4(1-\cos t)^2+4\sin^2 t = 8(1-\cos t) = 16\sin^2\frac{t}{2},$$

$$y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2} = 2(1-\cos t)\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}} = 8(1-\cos t)\sin\frac{t}{2} = 16\sin^3\frac{t}{2}.$$

У результаті

$$P_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt = 32\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$=32\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt = -64\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-64\pi\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -64\pi\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = -64\pi\left(-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{256\pi}{3}.$$

б) Користуючись другою формулою (10.6.3), знаходимо

$$P_y = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi}2(t-\sin t)\cdot 4\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$=16\pi\int_0^{2\pi}\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin t\sin\frac{t}{2}\right)dt = 16\pi\int_0^{2\pi}\left(t\sin\frac{t}{2}-2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=t, & du=dt \\ dv=\sin\frac{t}{2}dt, & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{array}\right| = 16\pi\cdot\left(-2t\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}+2\int_0^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=16\pi\cdot\left(-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}-\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi\cdot 4\pi = 64\pi^2.$$

Приклад 8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$, $0\le t\le \pi/2$ навколо: **а**) осі Ox; **б**) осі Oy.

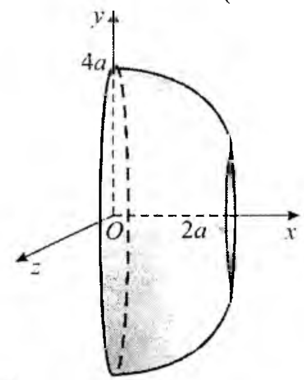
<u>*Розв'язання.*</u> Рівняння кривої задані *в параметричній формі* (див. частину 1, § 1.7). Рисунок кривої наведений в § 10.3.2, приклад 3**б**. Тут нас цікавить дуга, що відповідає параметру $t\in[0,\pi/2]$.

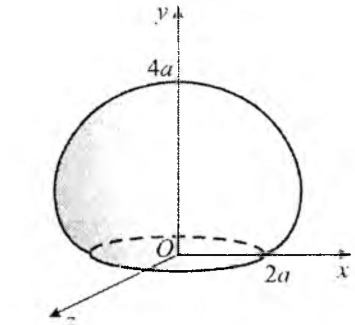
Щоб скористатися формулами (10.6.3), знайдемо похідні:

$$x_t' = a(-3\sin t+3\sin 3t),\qquad y_t' = a(3\cos t-3\cos 3t);$$

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2 = 9a^2\left(\sin^2 3t-2\sin t\sin 3t+\sin^2 t+\cos^2 t-2\cos t\cos 3t+\cos^2 3t\right)=$$

$$=18a^2(1-\cos 2t) = 18a^2\cdot 2\sin^2 t = 36a^2\sin^2 t.$$





Тоді

а) $$P_x = 2\pi\int_0^{\pi/2} a(3\sin t-\sin 3t)\sqrt{36a^2\sin^2 t}\,dt = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}(3\sin t-\sin 3t)\sin t\,dt =$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\left(3\sin^2 t-\sin t\sin 3t\right)dt = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\left(3\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-\frac{\cos 2t-\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=6\pi a^2\cdot\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 6\pi a^2\cdot\frac{3\pi}{2} = 9\pi^2 a^2.$$

б) $P_y = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} a(3\cos t - \cos 3t)\cdot 6a\sin t\,dt = 12\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/2} (3\cos t\sin t - \cos 3t\sin t)dt =$

$$= 12\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/2}\left(3\cos t\sin t - \frac{\sin 4t - \sin 2t}{2}\right)dt = 12\pi a^2\left(\frac{3\sin^2 t}{2} + \frac{\cos 4t}{8} - \frac{\cos 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

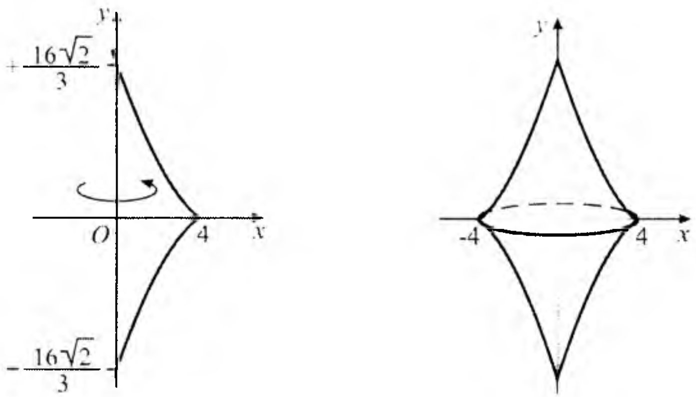
$$= 12\pi a^2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right) = 24\pi a^2.$$

Приклад 9. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy дуги напівкубічної параболи $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ між точками її перетину з віссю ординат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривої з осями координат. Покладемо $x = 0$, тоді

$$4 - \frac{t^2}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \pm 2\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad y = \pm\frac{(2\sqrt{2})^3}{3} = \pm\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Покладемо $y = 0$, тоді $t = 0$ і $x = 4$.



Напівкубічна парабола симетрична відносно осі Ox, тому поверхня, утворена її обертанням навколо осі Oy, складається із двох однакових порожнин. Оскільки крива задана в параметричній формі, то площу утвореної поверхні обертання обчислює другий інтеграл (10.6.3):

$$P_y = 2\cdot 2\pi\int\limits_{t_2}^{t_1} x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = 4\pi\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{t^2 + t^4}\,dt =$$

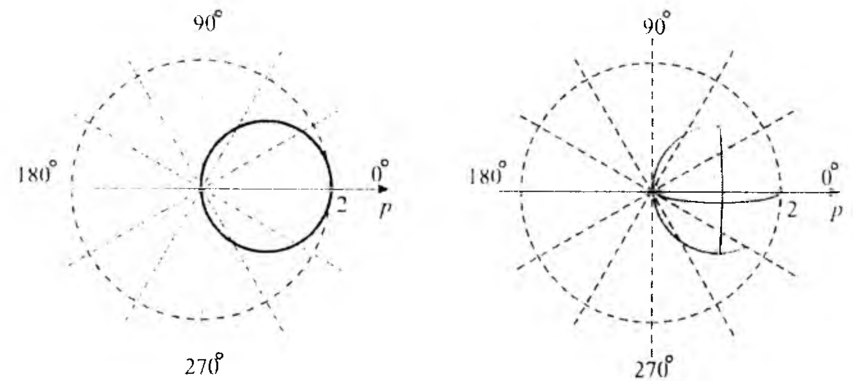
$$= 4\pi\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\left(4 - \frac{t^2}{2}\right)\sqrt{1+t^2}\;t\,dt = \left|\begin{array}{l|c|c|} \sqrt{1+t^2} = z & t & z \\ 1 + t^2 = z^2 & 0 & 1 \\ t\,dt = z\,dz & 2\sqrt{2} & 3 \end{array}\right| =$$

$$= 4\pi\int\limits_1^3\left(4 - \frac{z^2-1}{2}\right)z^2\,dz = 2\pi\int\limits_1^3\left(9z^2 - z^4\right)dz = 2\pi\left(3z^3 - \frac{1}{5}z^5\right)\Bigg|_1^3 = 59{,}2\pi.$$

Приклад 10. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кола $\rho = 2\cos\varphi$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Крива задана в полярних координатах, тому будемо користуватися формулою (10.6.4).

У результаті обертання кола навколо полярної осі (у даному випадку навколо діаметра) матимемо сферу одиничного радіуса. Можна вважати, що сфера утворена обертанням навколо полярної осі півкола, тому кут φ змінюється від 0 до $\pi/2$.



Оскільки $\rho' = -2\sin\varphi$, то підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = 2\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi} = 2\sin 2\varphi.$$

Отже,

$$P_{\|} = 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} 2\sin 2\varphi\,d\varphi = 4\pi\cdot\frac{\cos 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = -2\pi(\cos\pi - \cos 0) = 4\pi.$$

Дійсно, площа поверхні сфери $P = 4\pi R^2$, а в даному випадку $R = 1$.

Приклад 11. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати Бернуллі $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ навколо її осей симетрії.

Розв'язання. Осями симетрії *лемніскати Бернуллі* (див. частину 1, § 1.6, приклад 10) слугують:

а) полярна вісь;

б) вісь, яка перпендикулярна до полярної осі й проходить через полюс.

а) Оскільки $\cos 2\varphi \ge 0$, то $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$ (права вітка лемніскати) або $3\pi/4 \le \varphi \le 5\pi/4$ (ліва вітка лемніскати).

Обчислимо підінтегральну функцію:

$$\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\,\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \left(\frac{2a(-\sin 2\varphi)}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} =$$

$$= a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = a^2\sin\varphi\sqrt{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi} = a^2\sin\varphi.$$

Обертання четвертої частини лемніскати $(0 \le \varphi \le \pi/4)$ навколо полярної осі дає половину всієї шуканої площі поверхні обертання. Тому

$$P_{\parallel} = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} a^2\sin\varphi\,d\varphi = -4\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

б) Формула (10.6.4) отримана з першої формули (10.6.3), якщо в полярному рівнянні кривої $\rho = \rho(\varphi)$ розглядати φ як параметр. Дійсно, оскільки декартові і полярні координати зв'язані співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

то їх підстановка в (10.6.3) і приводить до формули (10.6.4).

Якщо ж обертання відбувається навколо осі, яка перпендикулярна до полярної осі й проходить через полюс, то задані рівняння слід підставити в другу формулу (10.6.3), що набуває вигляду:

$$P_{\perp} = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (10.6.5)$$

Отже,

$$P_{\perp} = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = 2\pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як обчислюється площа поверхні тіла обертання *в декартовій системі координат*, якщо поверхня утворена:
   а) обертанням дуги кривої $y = y(x)$ навколо осі Ox;
   б) обертанням дуги кривої $x = x(y)$ навколо осі Oy?
2. Як обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої *в параметричній формі*?
3. Як знайти площу поверхні тіла обертання *в полярній системі координат*, якщо поверхня утворена обертанням кривої $\rho = \rho(\varphi)$
   а) навколо полярної осі;
   б) навколо осі, що проходить через полюс і перпендикулярна до полярної осі?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox:

1.1. відрізка прямої $y = 3x$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$;

1.2. дуги кривої $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ між точками $x_1 = 1$ і $x_2 = 9$;

1.3. ланцюгової лінії $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ від точки $x_1 = 0$ до точки $x_2 = 1$;

1.4. петлі кривої $9y^2 = x(3-x)^2$.

2. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy:

2.1. частини кривої $y = \dfrac{x^2}{2}$, відтятої прямою $y = 3/2$;

2.2. астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

2.3. кривої $y^2 + 4x = 2\ln y$ від $y = 1$ до $y = 2$;

2.4. кривої $3x = y^3$ від $y = 0$ до $y = 2$.

3. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox:

3.1. дуги кривої $x = e^t\sin t$, $y = e^t\cos t$, $t = [0; \pi/2]$;

3.2. астроїди $x = \sqrt{5}\cos^3\frac{t}{4}$, $y = \sqrt{5}\sin^3\frac{t}{4}$, $0 \le t \le 2\pi$;

3.3. петлі кривої $x = a(t^2+1)$, $y = \dfrac{at}{3}(3-t^2)$;

3.4. кола $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

4. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі:

   4.1. кола $\rho = 2a\sin\varphi$;

   4.2. кардіоїди $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$.

5. Довести, що площа поверхні, утвореної обертанням лемніскати $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$ навколо полярної осі, дорівнює площі поверхні сфери радіуса a.

ВІДПОВІДІ

1.1. $12\sqrt{10}\,\pi$. **1.2.** $\frac{104\pi}{3}$. **1.3.** $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)$. **1.4.** 3π. **2.1.** $\frac{14\pi}{3}$. **2.2.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2.3.** $\frac{10\pi}{3}$. **2.4.** $\frac{\pi}{9}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$. **3.1.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi\left(e^{\pi} - 2\right)$. **3.2.** 12π. **3.3.** $3\pi a^2$. **3.4.** $4\pi a^2$. **4.1.** $4\pi^2 a^2$. **4.2.** $\frac{128}{5}\pi a^2$.

§ 10.7. ОБЧИСЛЕННЯ СТАТИЧНИХ МОМЕНТІВ І КООРДИНАТ ЦЕНТРА ВАГИ

І. Якщо дуга плоскої кривої L задана рівнянням $y = y(x)$, де функція $y(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$, $a < b$, то *статичні моменти* M_x і M_y *дуги кривої* відносно осей Ox і Oy дорівнюють:

$$M_x = \int_a^b y(x)\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx, \qquad M_y = \int_a^b x\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx. \tag{10.7.1}$$

Координати центра ваги дуги кривої L:

$$x_c = \frac{M_y}{l} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx}{l}, \qquad y_c = \frac{M_x}{l} = \frac{\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}\,dx}{l}, \tag{10.7.2}$$

де l – довжина дуги кривої L (див. § 10.5).

Якщо крива L задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_1;t_2]$, $t_1 < t_2$ функції, то координати центра ваги дуги кривої визначають за формулами:

$$x_c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt}{l}, \qquad y_c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt}{l}. \tag{10.7.3}$$

ІІ. Якщо криволінійна трапеція обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, $a \le x \le b$, прямими $x = a$ і $x = b$ і віссю Ox, то *статичні моменти* M_x і M_y *плоскої фігури* відносно осей Ox і Oy дорівнюють:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad M_y = \int_a^b xy\,dx. \tag{10.7.4}$$

Координати центра ваги криволінійної трапеції обчислюють за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S}, \qquad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{S}, \tag{10.7.5}$$

де S – площа криволінійної трапеції (див. § 10.3).

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривими, заданими параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1;t_2]$, де t_1 і t_2 – значення параметра t, що відповідають значенням $x = a$ і $x = b$, у формулах (10.7.4) слід виконати заміну змінних, поклавши $x = x(t)$, $y = y(t)$ і $dx = x'(t)dt$.

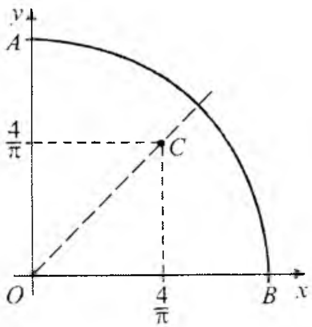
Якщо *плоска фігура* обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$, $a \le x \le b$, то

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\, f_2^2(x) - f_1^2(x) \,\right] dx, \qquad M_y = \int_a^b x\left[\, f_2(x) - f_1(x) \,\right] dx. \tag{10.7.6}$$

Зауваження. У цьому параграфі всюди передбачається, що маса фізичного тіла розподілена рівномірно, а густина дорівнює одиниці.

Приклад 1. Знайти статичні моменти і координати центра ваги дуги AB кола $x^2+y^2=4$, що лежить у першій чверті.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння кола відносно $y(x)$, $y\ge 0$:



$$y=\sqrt{4-x^2}, \qquad x\in[0;2],$$

звідки

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$\sqrt{1+(y'_x)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Користуючись формулами (10.7.1), знайдемо статичні моменти дуги AB:

$$M_x=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=2\int_0^2 dx=4;$$

$$M_y=\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-\int_0^2\frac{d\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}=-2\sqrt{4-x^2}\,\Big|_0^2=4.$$

Оскільки довжина чверті кола

$$l=\frac{2\pi R}{4}=\frac{2\pi\cdot 2}{4}=\pi,$$

то відповідно до формули (10.7.2) маємо такі координати центра ваги заданої дуги:

$$x_c=\frac{M_y}{l}=\frac{4}{\pi}, \qquad y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{4}{\pi}.$$

Приклад 2. Знайти статичні моменти і координати центра ваги дуги *ланцюгової лінії* $y=4\operatorname{ch}\frac{x}{4}$, $x\in[0;4]$.

Розв'язання. Обчислення довжини дуги заданої кривої і рисунок наведені в § 10.5, приклад 3, довжина дуги дорівнює $4\operatorname{sh}1$. Залишається знайти статичні моменти M_x і M_y. Щоб скористатися формулами (10.7.1), обчислимо:

$$y'=\left(4\operatorname{ch}\frac{x}{4}\right)'=\operatorname{sh}\frac{x}{4} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{4}}=\operatorname{ch}\frac{x}{4}.$$

Отже,

$$M_x=\int_0^4 4\operatorname{ch}\frac{x}{4}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{4}dx=4\int_0^4\operatorname{ch}^2\frac{x}{4}dx=4\int_0^4\frac{\operatorname{ch}\frac{x}{2}+1}{2}dx=2\int_0^4\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}+1\right)dx=$$

$$=2\int_0^4\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}+1\right)dx=2\cdot\left(2\operatorname{sh}\frac{x}{2}+x\right)\Big|_0^4=2(2\operatorname{sh}2+4)=4(\operatorname{sh}2+2);$$

$$M_y=\int_0^4 x\operatorname{ch}\frac{x}{4}dx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & du=dx \\ dv=\operatorname{ch}\frac{x}{4}\,dx, & v=4\operatorname{sh}\frac{x}{4}\end{array}\right|=4x\operatorname{sh}\frac{x}{4}\Big|_0^4-4\int_0^4\operatorname{sh}\frac{x}{4}dx=$$

$$=4\cdot\left(x\operatorname{sh}\frac{x}{4}-4\operatorname{ch}\frac{x}{4}\right)\Big|_0^4=16(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1).$$

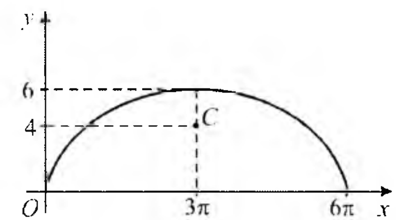
Тоді знаходимо координати центра ваги:

$$x_c=\frac{M_y}{l}=\frac{16(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{4\operatorname{sh}1}=4\,\frac{\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1}{\operatorname{sh}1}; \qquad y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{4(\operatorname{sh}2+2)}{4\operatorname{sh}1}=\frac{\operatorname{sh}2+2}{\operatorname{sh}1}.$$

Приклад 3. Знайти статичний момент відносно осі абсцис і координати центра ваги першої арки циклоїди $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$.

Розв'язання. Рівняння *циклоїди* задане в параметричній формі (див. частину 1, § 1.7, приклад 6), тому статичний момент відносно осі абсцис шукатимемо за формулою

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt.$$



Оскільки

$$x'_t=3(1-\cos t), \qquad y'_t=3\sin t,$$

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{9(1-\cos t)^2+9\sin^2 t}=3\sqrt{2(1-\cos t)}=3\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=6\sin\frac{t}{2}.$$

то

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}3(1-\cos t)\cdot 6\sin\frac{t}{2}\,dt=18\int_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=36\cdot(-2)\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-72\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-72\left(\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}\right)=72\cdot\frac{4}{3}=96.$$

Перша арка циклоїди розташована симетрично відносно прямої $x=3\pi$, отже, центр ваги циклоїди лежить на цій прямій, тобто $x_c=3\pi$.

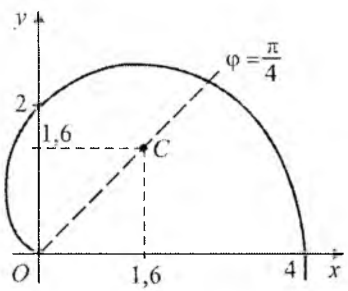
Довжина першої арки циклоїди $l=8a=8\cdot3=24$ (див. § 10.5, приклад 6). Отже, ордината її центра ваги

$$y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{96}{24}=4.$$

Таким чином, центр ваги першої арки циклоїди знаходиться в точці $C(3\pi;4)$.

Приклад 4. Обчислити статичні моменти і координати центра ваги верхньої дуги кардіоїди $\rho=2(1+\cos\varphi)$ від $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$.

Розв'язання. Рівняння *кардіоїди* задане в полярній системі координат (див. частину 1, § 1.6, приклад 12). Зручніше, однак, записати його в параметричній формі, де роль параметра виконує полярний кут φ:



$$x=\rho\cos\varphi=2(1+\cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$y=\rho\sin\varphi=2(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

Дійсно, при зміні параметра φ від 0 до π поточна точка $M(x;y)$ описує верхню частину кривої.

Знайдемо статичні моменти кривої. Оскільки

$$x'_\varphi=-2\sin\varphi\cos\varphi-2(1+\cos\varphi)\sin\varphi=-2(\sin\varphi+\sin2\varphi),$$

$$y'_\varphi=-2\sin^2\varphi+2(1+\cos\varphi)\cos\varphi=2(\cos\varphi+\cos2\varphi),$$

то

$$(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2=4\left[(\sin\varphi+\sin2\varphi)^2+(\cos\varphi+\cos2\varphi)^2\right]=8(1+\cos\varphi)=16\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

тоді

$$\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}=4\cos\frac{\varphi}{2},\quad\text{оскільки}\quad 0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$M_x=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}y(\varphi)\cdot\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}2\sin\varphi(1+\cos\varphi)\cdot4\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=32\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=32\cdot(-2)\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{64}{5}\cos^5\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{64}{5}.$$

Аналогічно

$$M_y=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}x(\varphi)\cdot\sqrt{(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}2(1+\cos\varphi)\cos\varphi\cdot4\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=16\int_0^{\pi}\cos\varphi\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=16\int_0^{\pi}\left(2\cos^5\frac{\varphi}{2}-\cos^3\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=16\cdot2\int_0^{\pi}\left[2\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2-\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=32\int_0^{\pi}\left(1-3\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\sin^4\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)=32\left(\sin\frac{\varphi}{2}-\sin^3\frac{\varphi}{2}+\frac{2}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{64}{5}.$$

Оскільки довжина всієї кардіоїди $L=8a=8\cdot2=16$ (див. § 10.5, приклад 12), то довжина половини дуги $l=L/2=8$.

Отже, центр ваги верхньої дуги кардіоїди знаходиться в точці з координатами:

$$x_c=\frac{M_y}{l}=\frac{64}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{8}{5};\qquad y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{64}{5}\cdot\frac{1}{8}=\frac{8}{5}.$$

Незважаючи на очевидну асиметрію верхньої половини кардіоїди, координати її центра ваги рівні, тобто центр ваги лежить на бісектрисі першого координатного кута.

Приклад 5*. Знайти декартові координати центра ваги дуги логарифмічної спіралі $\rho=ae^{\varphi}$ від $\varphi_1=\pi/2$ до $\varphi_2=\pi$.

Розв'язання. Рівняння *логарифмічної спіралі* задане в полярній системі координат. Запишемо його в параметричній формі, де роль параметра виконує полярний кут φ:

$$x=\rho\cos\varphi=ae^{\varphi}\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi=ae^{\varphi}\sin\varphi.$$

Скористаємося формулами (10.7.3). Оскільки

$$x'_\varphi=ae^{\varphi}(\cos\varphi-\sin\varphi),\qquad y'_\varphi=ae^{\varphi}(\sin\varphi+\cos\varphi),$$

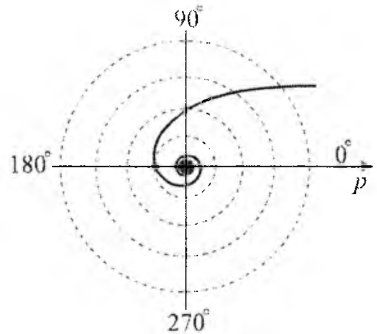
$$\sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2}=\sqrt{2a^2e^{2\varphi}}=a\sqrt{2}\,e^{\varphi},$$

то довжина дуги спіралі

$$l=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}a\sqrt{2}e^{\varphi}d\varphi=a\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right).$$

Перейдемо до обчислення статичних моментів:

$$M_y=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}x(\varphi)\sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2+\left(y'_\varphi\right)^2}\,d\varphi=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}ae^{\varphi}\cos\varphi\cdot a\sqrt{2}e^{\varphi}d\varphi=a^2\sqrt{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi.$$



Знайдений інтеграл $I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi$ є *циклічним*. Відповідний йому невизначений інтеграл (див. § 9.3, приклад 11) визначається виразом:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx=\frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}+C.$$

Тому для інтеграла $I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi$, де $\alpha=2$, $\beta=1$, матимемо:

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi=\frac{2\cos x+\sin x}{2^2+1^2}e^{2x}\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{5}(2\cos\pi+\sin\pi)e^{2\pi}-\frac{1}{5}\left(2\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{\pi}=-\frac{1}{5}\left(2e^{2\pi}+e^{\pi}\right).$$

Отже,

$$M_y=a^2\sqrt{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi=-\frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left(2e^{2\pi}+e^{\pi}\right).$$

Аналогічно знайдемо

$$M_x=a^2\sqrt{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}e^{2\varphi}\sin\varphi\, d\varphi=\frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left(e^{2\pi}-2e^{\pi}\right).$$

Таким чином, координати центра ваги заданої дуги дорівнюють:

$$x_c=\frac{-\frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left(2e^{2\pi}+e^{\pi}\right)}{a\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right)}=-\frac{ae^{\pi/2}\left(2e^{\pi}+1\right)}{5\left(e^{\pi/2}-1\right)},\quad y_c=\frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{5}\left(e^{2\pi}-2e^{\pi}\right)}{a\sqrt{2}\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right)}=\frac{ae^{\pi/2}\left(e^{\pi}-2\right)}{5\left(e^{\pi/2}-1\right)}.$$

Приклад 6. Обчислити статичні моменти і координати центра ваги криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y^2=4x$, прямою $x=4$ і віссю Ox.

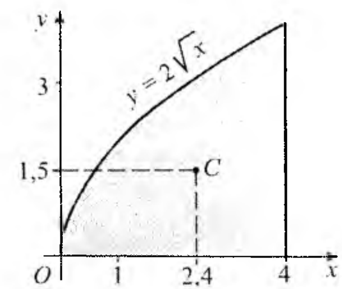
Розв'язання. Статичні моменти криволінійної трапеції визначимо за допомогою формул (10.7.4):

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 4x\,dx=2\int\limits_0^4 x\,dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=16;$$

$$M_y=\int\limits_a^b xy\,dx=\int\limits_0^4 x2\sqrt{x}\,dx=2\int\limits_0^4 x^{3/2}dx=2\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^4=\frac{4}{5}\cdot 32=\frac{128}{5}.$$

Тепер обчислимо площу заданої криволінійної трапеції:

$$S=\int\limits_0^4 2\sqrt{x}\,dx=2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^4=\frac{4}{3}\cdot 8=\frac{32}{3}.$$



Нарешті за формулами (10.7.5) знайдемо координати центра ваги:

$$x_c=\frac{M_y}{S}=\frac{128}{5}\cdot\frac{3}{32}=\frac{12}{5}=2,4;$$

$$y_c=\frac{M_x}{S}=16\cdot\frac{3}{32}=\frac{3}{2}=1,5.$$

Приклад 7. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y=x^2-6x+8$, $y=x+2$, $x=0$, $y=0$.

Розв'язання. У § 10.3.1, приклад 2**а** наведено рисунок і обчислена площа заданої фігури, яка дорівнює $S=\frac{23}{6}$. За допомогою рисунка легко встановити межі інтегрування при обчисленні статичних моментів.

Враховуючи, що верхня межа фігури складена із двох ліній $y_1=x+2$ і $y_2=x^2-6x+8$, користуючись формулами (10.7.4), знайдемо:

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y_1^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_1^2 y_2^2\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(x+2)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_1^2\left(x^2-6x+8\right)^2dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^5}{5}-3x^4+\frac{59}{3}x^3-48x^2+64x\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{19}{3}+\frac{38}{15}\right)=\frac{133}{30};$$

$$M_y = \int_0^1 xy_1\,dx + \int_1^2 xy_2\,dx = \int_0^1 x(x+2)\,dx + \int_1^2 x\left(x^2-6x+8\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3} + 1 + 4 - 16 + 16 - \frac{1}{4} + 2 - 4 = \frac{37}{12}.$$

Визначаємо координати центра ваги фігури:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{37}{12}\cdot\frac{6}{23} = \frac{37}{46}; \qquad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{133}{30}\cdot\frac{6}{23} = \frac{133}{115}.$$

Приклад 8. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої лініями $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Розв'язання. У § 10.3.1, приклад 3б наведено рисунок заданої фігури, визначені межі інтегрування і знайдена площа $S = \frac{9}{2}$.

За формулами (10.7.6) обчислимо статичні моменти фігури, враховуючи, що вона обмежена неперервними кривими $f(x) = 2 - x^2$ і $\varphi(x) = x$, причому $f(x) \ge \varphi(x)$:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left[\left(2-x^2\right)^2 - x^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left(4 - 4x^2 + x^4 - x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left(4 - 5x^2 + x^4\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(4x - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5} + 8 - \frac{40}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{9}{5};$$

$$M_y = \int_{-2}^{1} x\left(2 - x^2 - x\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 4 + 4 - \frac{8}{3} = -\frac{9}{4}.$$

Отже,

$$x_c = \frac{M_y}{S} = -\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9} = -\frac{1}{2}; \qquad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{9}{5}\cdot\frac{2}{9} = \frac{2}{5}.$$

Приклад 9. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої віссю абсцис і лінією $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0;\pi]$.

Розв'язання. Указана фігура являє собою область, обмежену віссю Ox і верхньою половиною еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Оскільки фігура симетрична відносно осі Oy, то $x_c = 0$. Для визначення y_c знайдемо статичний момент M_x і площу фігури S.

Площа половини еліпса обчислює інтеграл (див. § 10.3.2):

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} x'(t)\,y(t)\,dt = \int_0^{\pi} a\sin t\cdot b\sin t\,dt = ab\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\cdot\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi ab}{2}.$$

При обчисленні статичного моменту M_x скористаємося відповідною формулою (10.7.4), підставляючи замість x і y задані параметричні представлення (виконуючи, по суті, заміну змінної $x = a\cos t$):

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} b^2\sin^2 t\cdot d(a\cos t) = \frac{ab^2}{2}\int_{\pi}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) =$$

$$= \frac{ab^2}{2}\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{ab^2}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{ab^2}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2ab^2}{3}.$$

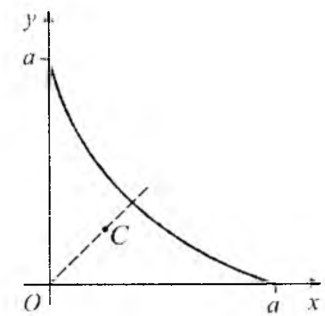
Отже,

$$y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{2ab^2\cdot 2}{3\cdot\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Таким чином, координати центра ваги верхньої половини еліпса

$$x_c = 0, \qquad y_c = \frac{4b}{3\pi}.$$

Приклад 10. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і дугою астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, розташованої в першому квадранті.



Розв'язання. Площа фігури, обмеженої астроїдою, дорівнює $S = \frac{3\pi a^2}{8}$ (див. § 10.3.2, приклад 2б). Отже, площа її четвертої частини становить

$$\frac{3\pi a^2}{32}.$$

Обчислимо статичні моменти даної фігури, межа якої задана параметричними рівняннями:

$$M_y=-\int_{\pi/2}^{0} a\cos^3 t\cdot a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\,dt=$$

$$=3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\cdot\sin^4 t\,dt=3a^3\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2 t\right)^2\sin^4 t\,d(\sin t)=$$

$$=3a^3\left(\frac{\sin^5 t}{5}-\frac{2\sin^7 t}{7}+\frac{\sin^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=3a^3\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{9}\right)=\frac{24a^3}{315}.$$

Тоді $x_c=\dfrac{24a^3}{315}:\dfrac{3\pi a^2}{32}=\dfrac{256a}{315\pi}$.

$$M_x=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{0}\left(a\sin^3 t\right)^2\cdot 3a\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=\frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^6 t\cos^2 t\cdot\sin t\,dt=-\frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 t\,d(\cos t)=$$

$$=-\frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1-3\cos^2 t+3\cos^4 t-3\cos^6 t\right)\cos^2 t\,d(\cos t)=$$

$$=-\frac{3a^3}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t\right)d(\cos t)=$$

$$=-\frac{3a^3}{2}\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{\cos^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3a^3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{24a^3}{315}.$$

Тому $y_c=\dfrac{24a^3}{315}:\dfrac{3\pi a^2}{32}=\dfrac{256a}{315\pi}$.

Як і слід було сподіватися, центр ваги $C\left(\dfrac{256a}{315\pi};\dfrac{256a}{315\pi}\right)$ лежить на бісектрисі першого координатного кута.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як знайти *статичні моменти* плоскої кривої, заданої в явному вигляді?
2. Як обчислюються *статичні моменти* плоскої кривої, заданої в параметричній формі?
3. Яким чином визначаються *координати центра ваги* дуги плоскої кривої?

4. Як знайти *координати центра ваги* дуги плоскої кривої, заданої в полярній системі координат?
5. Як знайти *статичні моменти* криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, $a\le x\le b$, прямими $x=a$ і $x=b$ і віссю Ox?
6. Як знайти *статичні моменти* криволінійної трапеції, межа якої задана параметричними рівняннями?
7. Як знайти *статичні моменти* плоскої фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, $f_1(x)\le f_2(x)$ і прямими $x=a$ і $x=b$, $a\le x\le b$?
8. Яким чином визначаються *координати центра* ваги криволінійної трапеції?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти статичні моменти і координати центра ваги:

1.1. *ланцюгової лінії* $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$, розміщеної між точками з абсцисами $x=-a$ і $x=a$;

1.2. дуги півкола $x^2+y^2=a^2$, розташованої під віссю Ox;

1.3. першої арки *циклоїди* $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;2\pi]$;

1.4. плоскої кривої $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$, $t\in[0;\pi/2]$.

2. Знайти статичні моменти і координати центра ваги плоскої фігури, обмеженої лініями:

2.1. $y=6-x^2$, $y=2$;

2.2. $y=x^2-2x$, $y=x$;

2.3. $y^2=20x$, $x^2=20y$;

2.4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$;

2.5. $y=\dfrac{2}{\pi}x$, $y=\sin x$ $(x>0)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\left(0;\dfrac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}\right)$. **1.2.** $\left(0;-\dfrac{2a}{\pi}\right)$. **1.3.** $\left(\pi a;\dfrac{4a}{3}\right)$.

1.4. $\left(\dfrac{2e^{\pi}+1}{5\left(e^{\pi/2}-1\right)};\dfrac{e^{\pi}-2}{5\left(e^{\pi/2}-1\right)}\right)$. **2.1.** $(0;36)$. **2.2.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{5}\right)$. **2.3.** $(9;9)$.

2.4. $\left(\dfrac{a}{5};\dfrac{a}{5}\right)$. **2.5.** $\left(\dfrac{12-\pi^2}{3(4-\pi)};\dfrac{\pi}{6(4-\pi)}\right)$.

§ 10.8. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ ПЕРШОГО РОДУ (З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ)

Невласним інтегралом 1-го роду від функції $f(x)$, неперервної при $a \le x < +\infty$ називається границя

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (10.8.1)$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (10.8.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (10.8.3)$$

Якщо вказані границі існують і є скінченними, то відповідний невласний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку кажуть, що "інтеграл *розбігається*".

Ознаки збіжності:

1. Якщо первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ має скінченну границю $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то існує й збігається невласний інтеграл
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a).$$
Якщо границя $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не існує, то невласний інтеграл розбігається.

2. *Ознака порівняння.* Нехай при $a \le x < +\infty$ визначені функції $0 \le f(x) \le g(x)$. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігається, то збігається і $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, причому $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то розбігається й інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
Іншими словами: якщо невласний інтеграл від більшої функції збігається, то інтеграл від меншої функції збігається тим більше; якщо невласний інтеграл від меншої функції розбігається, то інтеграл від більшої функції розбігається також.

3. *Гранична ознака порівняння.* Якщо при $a \le x < +\infty$ функції $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$ й існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

4. *Частинна ознака порівняння.* Якщо при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ є нескінченно малою порядку α в порівнянні з $1/x$, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

5. *Ознака абсолютної збіжності.* Нехай функція $f(x)$ є знакозмінною на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається й $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. У цьому випадку невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається *абсолютно збіжним*.

Якщо ж інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ називають *умовно збіжним*.

Геометричний зміст. Якщо функція $f(x)$ додатна й неперервна на інтервалі $[a;\infty)$ і невласний інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ збігається, то він обчислює *площу* нескінченної криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ і віссю Ox, що слугує асимптотою.

До невласних інтегралів можуть бути застосовані методи заміни змінної й інтегрування частинами.

Приклад 1. Спираючись на означення, обчислити невласні інтеграли 1-го роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; **б)** $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x+1}$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція визначена й неперервна при всіх $x \ne 0$, отже, має первісну у всіх точках інтервалу $[1;\infty)$. Відповідно до означення невласного інтеграла 1-го роду (10.8.1) маємо:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right)\Bigg|_1^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x^3}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Одержали скінченне значення, отже, заданий невласний інтеграл збігається.

б) Підінтегральна функція визначена і неперервна при $x \in [2;\infty]$, отже, має первісну. Відповідно до означення (10.8.1), знаходимо

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty}\ln(x+1)\big|_2^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b+1) - \ln 3 = \infty.$$

Скінченної границі не існує, отже, невласний інтеграл розбігається.

Приклад 2. Спираючись на означення, обчислити невласні інтеграли 1-го роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; **б)** $\int_0^{+\infty} x\cos x\,dx$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція визначена і неперервна при $x \in [e;+\infty)$, отже, має первісну.

Відповідно до означення невласного інтеграла 1-го роду маємо

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^b=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln b}+1=0+1=1.$$

Одержали скінченне значення, отже, невласний інтеграл збігається.

б) Відповідно до означення маємо

$$\int_0^{+\infty}x\cos x\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cos x\,dx.$$

Скористаємося методом інтегрування частинами. Покладемо

$$u=x,\quad dv=\cos x\,dx\quad\Rightarrow\quad du=dx,\quad v=\sin x.$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^{+\infty}x\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}x\cos x\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left(x\sin x\big|_0^b-\int_0^b\sin x dx\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(x\sin x+\cos x\right)\big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(b\sin b+\cos b\right)-1.$$

Однак остання границя не існує, оскільки не визначені значення синуса і косинуса на нескінченності. Отже, заданий невласний інтеграл розбігається.

Приклад 3. Обчислити невласні інтеграли 1-го роду або встановити їх розбіжність:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; **б)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^x dx$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція визначена і неперервна при $x\in R$, отже, має первісну.

Відповідно до означення (10.8.3), знаходимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+4x+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+2)\big|_0^b=$$

$$=\cancel{\operatorname{arctg}2}-\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a+2)+\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(b+2)-\cancel{\operatorname{arctg}2}=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Замість точки $x=0$ як проміжну межу інтегрування можна було взяти будь-яку іншу скінченну точку осі Ox. Однак при $x=0$ найзручніше обчислювати значення первісних.

б) Підінтегральна функція визначена і неперервна на всій числовій осі, тому

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^x dx=\int_{-\infty}^{0}e^x dx+\int_0^{\infty}e^x dx.$$

Обчислимо кожний із невласних інтегралів окремо:

$$\int_{-\infty}^{0}e^x dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx=\lim_{a\to-\infty}e^x\big|_a^0=1-\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{e^a}=1;$$

$$\int_0^{\infty}e^x dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^x dx=\lim_{b\to\infty}e^x\big|_0^b=\lim_{b\to\infty}e^b-1=\infty.$$

Виявилося, що перший інтеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^x dx$ збігається, а другий інтеграл $\displaystyle\int_0^{\infty}e^x dx$ розбігається. Їхня сума – інтеграл розбіжний.

Зауваження 1. На окремому прикладі ми переконалися в тому, що коли невласний інтеграл може бути представлений у вигляді алгебраїчної суми інтегралів і при цьому хоча б один невласний інтеграл із цієї суми розбігається, то розбігається й заданий невласний інтеграл.

Приклад 4. Визначити умови збіжності невласного інтеграла:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція визначена і неперервна при $x\in[1;+\infty)$. Залежно від значення параметра α розглянемо такі можливості:

а) Нехай $\alpha\neq1$. Тоді, дотримуючись означення (10.8.1), матимемо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{якщо } \alpha>1;\\ \infty, & \text{якщо } \alpha<1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha<1$.

б) З'ясуємо, як поводиться заданий інтеграл при $\alpha=1$, тобто розглянемо невласний інтеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$. У цьому випадку

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b=\infty .$$

Скінченної границі не існує, отже, інтеграл розбігається.

Таким чином, маємо такі умови збіжності:

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\text{збігається,} & \text{якщо } \alpha>1;\\ \text{розбігається,} & \text{якщо } \alpha\le 1.\end{cases}} \tag{10.8.4}$$

Інтеграл (10.8.4) використовується як *еталонний в частинній ознаці порівняння.*

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^\infty x^2e^{-x^3}dx$.

Розв'язання. Відповідно до означення:

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^3}x^2dx=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^3}d\left(-x^3\right)=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}e^{-x^3}\Big|_0^b=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{b^3}}-1\right)=\frac{1}{3}.$$

Часто вдала заміна змінної дає змогу звести невласний інтеграл з нескінченними межами до звичайного визначеного інтеграла. Так, якщо в цьому прикладі виконати заміну $e^{-x^3}=t$, то:

$$e^{-x^3}\left(-3x^2dx\right)=dt \quad\Rightarrow\quad e^{-x^3}\cdot x^2dx=-\frac{1}{3}dt.$$

Межі інтегрування зміняться у такий спосіб: якщо $x=0$, то $t_н=e^0=1$, а якщо $x=\infty$, то $t_в=\frac{1}{e^\infty}=0$. Отже,

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int_1^0 dt=\frac{1}{3}\int_0^1 dt=\frac{1}{3}.$$

Зауваження 2. Іноді в результаті заміни змінної невласний інтеграл 1-го роду перетворюється на визначений інтеграл (зі скінченними межами інтегрування). Можливим є також обернене: виконуючи заміну змінної, можна перетворити визначений інтеграл на невласний.

Приклад 6. Обчислити або встановити розбіжність інтеграла

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція визначена і неперервна при $x\in R$, тому

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx.$$

Виконаємо заміну змінної

$$\operatorname{arctg} x=t \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{1+x^2}=dt; \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}=\cos t$$

і змінимо межі інтегрування:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad t=0, \qquad x=+\infty \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\pi}{2}.$$

У результаті невласний інтеграл перетворюється на визначений, обчислюючи який знаходимо

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx=\int_0^{\pi/2}t\cos t\,dt=\begin{vmatrix}t=u, & du=dt\\ \cos t\,dt=dv, & v=\sin t\end{vmatrix}=\left(t\sin t+\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Звідси випливає, що заданий невласний інтеграл збігається.

Приклад 7. Показати, що для цілих додатних m

$$\int_0^\infty e^{-x}x^m dx=m!\ .$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл 1-го роду, який обчислюватимемо методом інтегрування частинами:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^m dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}x^m dx=\begin{vmatrix}u=x^m, & du=mx^{m-1}dx\\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x^m e^{-x}\Big|_0^b+m\int_0^b e^{-x}x^{m-1}dx\right)=-\lim_{b\to\infty}\frac{b^m}{e^b}+m\cdot\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}x^{m-1}dx.$$

Застосовуючи m раз правило Лопіталя до першої границі в правій частині, матимемо

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^m}{e^b}=\lim_{b\to\infty}\frac{mb^{m-1}}{e^b}=\lim_{b\to\infty}\frac{m(m-1)b^{m-2}}{e^b}=\ldots=\lim_{b\to\infty}\frac{m!}{e^b}=0.$$

Отже,

$$\int_0^\infty e^{-x}x^m dx=m\cdot\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}x^{m-1}dx.$$

Таким чином, проінтегрувавши один раз частинами, ми знизили степінь x у підінтегральному виразі на одиницю. При повторному інтегруванні границя першого доданка буде також дорівнювати 0, а перед інтегралом з'явиться множник $(m-1)$. Степінь x буде вже $(m-2)$. Виконавши цю операцію m раз, отримаємо необхідну рівність

$$\int_0^\infty e^{-x}x^m\,dx = m!\,.$$

Приклад 8. Дослідити збіжність невласних інтегралів:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{2x^4+1}$; б) $\int\limits_a^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$, $a>1$.

Розв'язання. У даному випадку не стоїть питання про безпосереднє обчислення заданих інтегралів, потрібно лише встановити, збігаються вони чи розбігаються. Це можна визначити за допомогою *ознак порівняння*.

а) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{x^2}{2x^4+1}$ при $x\ge 1$ задовольняє нерівность

$$\frac{x^2}{2x^4+1}\le\frac{x^2}{2x^4}=\frac{1}{2x^2}\quad\Rightarrow\quad f(x)\le g(x)=\frac{1}{2x^2}.$$

Оскільки збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ (див. формулу (10.8.4)) і при цьому виконується нерівність

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{2x^4+1}\le\frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2},$$

то і заданий інтеграл за ознакою порівняння також збігається.

б) У цьому випадку при $x\to\infty$ маємо $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4-1}}>\frac{x}{\sqrt{x^4}}=\frac{1}{x}=g(x)$.

Отже,

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}>\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}.$$

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ розбігається, оскільки $\alpha=1$ (див. формулу (10.8.4)). Але якщо розбігається менший інтеграл, то в силу ознаки порівняння розбігається й більший, тобто заданий невласний інтеграл.

Приклад 9. Дослідити збіжність невласних інтегралів:

а) $\int\limits_1^\infty\frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $\int\limits_1^\infty\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$.

Розв'язання. а) Підінтегральна функція задовольняє нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}<\frac{x}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

тобто $f(x)<g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Як відомо, інтеграл $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x}}$ розбігається $\left(\alpha=\frac{1}{2}<1\right)$.

Якщо ж інтеграл від більшої функції розбігається, то нічого певного не можна сказати про те, як поводиться інтеграл від меншої функції, тобто *ознака порівняння* (**2**) у цьому випадку не дає змогу вирішити питання про збіжність заданого інтеграла.

Застосуємо *граничну ознаку порівняння* (**3**). Знайдемо границю відношення функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}}=1\ne 0.$$

Границя відношення функцій – число, відмінне від нуля. Отже, обидва інтеграли поводяться однаково, тобто обидва розбігаються.

б) Перетворивши підінтегральну функцію, також застосуємо граничну ознаку, вибравши для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{x^2}$:

$$\int\limits_1^\infty\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx=2\int\limits_1^\infty\sin^2\frac{1}{x}\,dx.$$

Невласний інтеграл $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2}$ збігається, оскільки $\alpha=2>1$. Знайдемо границю відношення функцій $f(x)$ і $g(x)$, скориставшись першою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2=1\ne 0.$$

Звідси дійдемо висновку: оскільки збігається невласний інтеграл $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2}$, то заданий інтеграл $\int\limits_1^\infty\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$ також збігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція визначена, неперервна на проміжку $[1;+\infty)$ і знакозмінна. Разом з тим

$$\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3} \qquad \text{для} \quad x \in [1;+\infty).$$

При цьому інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ збігається, оскільки $\alpha = 3 > 1$. Тоді в силу *ознаки абсолютної збіжності* заданий інтеграл також збігається, причому абсолютно.

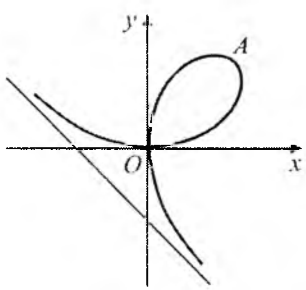
Приклад 11*. Знайти площу фігури, обмеженої петлею *листка Декарта*

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Розв'язання. Функція задана в неявному вигляді. Параметризуємо рівняння кривої (див. частину 1, § 1.7, приклад 3**в**), поклавши $y = tx$. Параметричні рівняння листка Декарта:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

При $t \in (-1;\infty)$ крива виходить із другого квадранта, через точку $O(t=0)$ приходить у точку $A(t=1)$ і повертається в точку $O(t=+\infty)$. При $t \in (-\infty;-1)$ крива, починаючись у точці O, повністю розміщується в четвертому квадранті. Таким чином, при $t \in (0;\infty)$ крива описує петлю.



Для обчислення її площі скористаємося формулою (10.3.2.2) і знайдемо:

$$x'_t = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \qquad y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}.$$

Тоді

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3a^2}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2}dt =$$

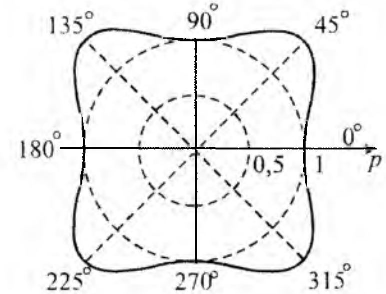
$$= -\frac{3a^2}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1+b^3} + \frac{3a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Приклад 12. Знайти площу фігури, обмеженої кривою

$$x^4 + y^4 = x^2 + y^2.$$

Розв'язання. Крива симетрична відносно координатних осей, оскільки її рівняння містить парні степені змінних, а також симетрична відносно двох бісектрис. Цим і скористаємося при знаходженні меж інтегрування.

Перейдемо від декартових координат до полярних, використовуючи формули:



$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi;$$

$$\rho^4\cos^4\varphi + \rho^4\sin^4\varphi = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi,$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}.$$

Перетворимо вираз у знаменнику:

$$\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi =$$

$$= \cos^2 2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi.$$

Враховуючи симетрію фігури, матимемо

$$S = 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\rho^2 d\varphi = 8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2d\varphi}{2\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi}.$$

Заміна змінної

$$\operatorname{tg} 2\varphi = t \quad \Rightarrow \quad \frac{2d\varphi}{\cos^2 2\varphi} = dt$$

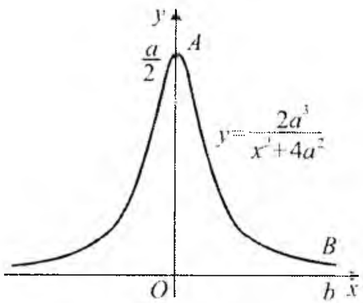
перетворить заданий визначений інтеграл на невласний. Дійсно, при $\varphi = 0$ маємо $t_н = 0$, а при $\varphi = \pi/4$ знаходимо $t_в = \infty$. Тому

$$S = 4\int\limits_0^{\pi/4}\frac{2d\varphi}{\cos^2 2\varphi(2+\operatorname{tg}^2 2\varphi)} = 4\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d(\operatorname{tg}2\varphi)}{2+\operatorname{tg}^2 2\varphi} = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{2+t^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{2}} - 0\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\infty = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

Приклад 13. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \frac{2a^3}{x^2+4a^2}$ (*локон Аньєзі*) й її асимптотою.

Розв'язання. Задана функція визначена і неперервна на всій числовій осі. Функція є парною, тому її графік симетричний відносно осі Oy. Оскільки



$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2a^3}{x^2+4a^2}=0$, то вісь Ox слугує горизонтальною асимптотою кривої.

Отже, цікава для нас фігура не замкнута ні зліва, ні справа, вона необмежено простягається вздовж осі Ox. Спробуємо обчислити її площу, спираючись на геометричний зміст невласного інтеграла 1-го роду:

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a^3}{x^2+4a^2}dx=4a^3\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4a^2}=4a^3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+(2a)^2}=$$

$$=4a^3\cdot\frac{1}{2a}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2a}\Big|_0^b=2a^2\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}=2a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi a^2.$$

Як виявилося, площа цієї *незамкнутої* фігури має *скінченне* значення!

Зміст отриманого результату полягає в тому, що визначений інтеграл

$$\int_0^b\frac{4a^3dx}{x^2+(2a)^2}=2a^2\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}$$

обчислює площу криволінійної трапеції $OABb$ (як показано на рисунку). Незалежно від того, як необмежено ордината Bb віддаляється вправо від осі симетрії, права частина останньої рівності завжди залишається величиною скінченною, яка прямує до визначеної границі:

$$\lim_{b\to+\infty}\left(2a^2\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}\right)=\pi a^2.$$

Яка відома замкнута геометрична фігура має таку саму площу?

Приклад 14. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y=\frac{1}{1+x^2}$ навколо осі абсцис.

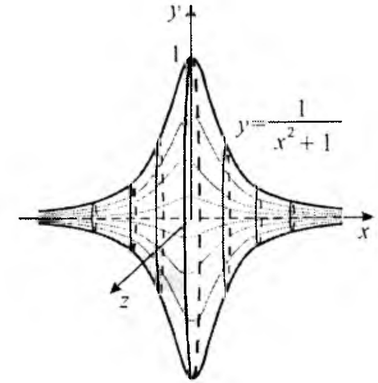
Розв'язання. Вісь абсцис є асимптотою кривої (*локон Аньєзі*), оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0.$$

Тут цікава для нас область необмежено простягається вздовж осі Ox. Оскільки вона симетрична відносно осі Oy, обчислимо об'єм тієї частини

тіла обертання, яка лежить справа від осі ординат, і потім подвоїмо отриманий результат.

Об'єм тіла обертання виражається невласним інтегралом 1-го роду:



$$\frac{1}{2}V_x=\pi\int_a^{\infty}y^2dx=\pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Виконаємо заміну змінної, поклавши

$$x=\operatorname{tg}t\quad\Rightarrow\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t},$$

тоді

x	0	∞
t	0	$\pi/2$

У результаті невласний інтеграл перетворюється на визначений:

$$\frac{1}{2}V_x=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^2}=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Об'єм усього тіла $V_x=\frac{\pi^2}{2}$. Таким чином, задане тіло обертання, *необмежене* ні зліва, ні справа, має *скінченний* об'єм.

Приклад 15. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y=xe^{-x/2}$ $(\text{при } x\ge 0)$ навколо своєї асимптоти.

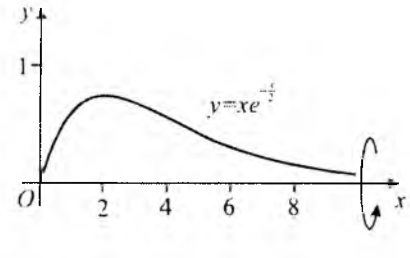
Розв'язання. Оскільки $y=0$ при $x=0$, то крива проходить через початок координат. Досліджуючи функцію засобами диференціального обчислення, знайдемо

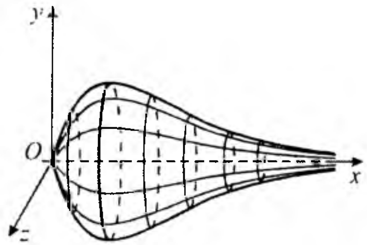
$$y_{\max}=y(2)=\frac{2}{e},\qquad y_{\text{перегину}}=y(4)=\frac{4}{e^2}.$$

Асимптотою кривої $y=xe^{-x/2}$ при $x\to\infty$ є вісь Ox, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}xe^{-x/2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{x/2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=0.$$

Отже, уточнюємо умови задачі – необмежена справа криволінійна трапеція обертається навколо осі абсцис.





Об'єм тіла обертання шукатимемо за формулою

$$V_x = \pi \int_a^{\infty} y^2 dx = \pi \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx .$$

Проінтегруємо двічі частинами. Якщо

$$u = x^2, \quad dv = e^{-x}dx, \quad \text{то} \quad du = 2x\,dx, \quad v = -e^{-x} .$$

Тоді

$$V_x = \lim_{b\to\infty}\left(-x^2 e^{-x}\Big|_0^b + 2\int_0^b x e^{-x} dx \right) = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^b} + 2\lim_{b\to\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-x}dx \right) = -2\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^b} - 2\lim_{b\to\infty} e^{-x}\Big|_0^b = -2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} + 2 = 2 .$$

Тут границя обчислена за правилом Лопіталя.

Таким чином, одержали *скінченну* величину об'єму тіла, утвореного обертанням *необмеженої* криволінійної трапеції навколо своєї асимптоти.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається *невласним інтегралом* по нескінченному інтервалу?
2. Сформулювати *ознаки збіжності* невласного інтеграла 1-го роду.
3. У чому полягає *ознака порівняння*?
4. Чи можна стверджувати, що невласний інтеграл від меншої функції збігається, якщо збігається невласний інтеграл від більшої функції?
5. Як поводиться невласний інтеграл від більшої функції, якщо невласний інтеграл від меншої функції розбігається?
6. Яким є зміст *граничної ознаки порівняння*?
7. Якщо розбігається інтеграл від більшої функції, то як поводиться інтеграл від меншої функції?

8. Якщо збігається невласний інтеграл від меншої функції, то чи збігається невласний інтеграл від більшої функції?
9. Що стверджує *частинна ознака порівняння*?
10. Який невласний інтеграл 1-го роду приймають як *еталонний* при використанні ознак порівняння?
11. Сформулювати поняття *абсолютної* й *умовної збіжності* невласного інтеграла.
12. Сформулювати *ознаку абсолютної збіжності*.
13. Яким є *геометричний зміст* невласного інтеграла з нескінченною верхньою (нижньою) межею від обмеженої функції?
14. Чи можна до невласного інтеграла 1-го роду застосовувати методи заміни змінної і метод інтегрування частинами?
15. Чи можливо, щоб у результаті заміни змінної невласний інтеграл 1-го роду став визначеним інтегралом (зі скінченними межами інтегрування)? Чи припустимим є обернене?
16. Довести, якщо $\int_0^{+\infty} x\,g\left(x^2\right)dx$ збігається, то $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,g\left(x^2\right)dx = 0$.
17. Довести, якщо $\int_0^{+\infty} g\left(x^2\right)dx$ збігається, то $\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x^2\right)dx = 2\int_0^{+\infty} g\left(x^2\right)dx$.
18. Показати, що $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^3\,dx = 3! = 6$.
19. Чи може мати *скінченну площу* область площини xOy, обмежена кривою і власною асимптотою, якщо крива необмежено простягається вздовж асимптоти?
20. Чи може бути *скінченним об'єм тіла*, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої зверху певною нескінченно протяжною кривою $y = f(x)$, а знизу віссю Ox?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1.1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$;

1.2. $\int_{-\infty}^{0} e^{-2x}dx$;

1.3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$;

1.4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

1.5. $\int_0^{+\infty} x^2\cos x\,dx$;

1.6. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2}dx$;

1.7. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; 1.8. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$;

1.9. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; 1.10. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$;

1.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$; 1.12. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

1.13. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$; 1.14. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$;

1.15. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$; 1.16. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x\ln x+1}}$.

2. Обчислити площу, розташовану між кривою $y=e^{-2x}\ (x>0)$ й осями координат.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy необмеженої фігури, розташованої між лініями $xy=4$, $y=1$, $x=0$.
4. Знайти об'єм і площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $y=e^{-x}$ і віссю Ox $(0\le x<+\infty)$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\frac{\pi}{4}$. **1.2.** Розбігається. **1.3.** Розбігається. **1.4.** π. **1.5.** Розбігається. **1.6.** 16. **1.7.** 1. **1.8.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **1.9.** 1. **1.10.** $-\frac{1}{2}$. **1.11.** Розбігається. **1.12.** Розбігається. **1.13.** Збігається. **1.14.** $\frac{\pi}{4}$ (підстановка $x=\operatorname{tg} t$). **1.15.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **1.16.** Розбігається (функція $\ln x$ зростає повільніше будь-якого додатного степеня x). **2.** $\frac{1}{2}$. **3.** 16π. **4.** $V_x=\frac{\pi}{2}$; $P_x=\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$.

§ 10.9. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ (ВІД НЕОБМЕЖЕНОЇ ФУНКЦІЇ)

Якщо функція $f(x)$ визначена при $a\le x<b$, інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ і необмежена в точці b, то границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ при $\varepsilon\to 0$ називається *невласним інтегралом 2-го роду*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (10.9.1)$$

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ необмежена в точці a, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a-\varepsilon}^{b} f(x)\,dx. \qquad (10.9.2)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідний невласний інтеграл називається *збіжним*. У протилежному випадку кажуть, що "інтеграл *розбігається*".

Якщо функція необмежена в околі внутрішньої точки c відрізка $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \qquad (10.9.3)$$

Якщо обидві границі в правій частині цієї рівності існують, то інтеграл називається *збіжним*. Якщо хоча б одна із указаних границь не існує, то інтеграл *розбігається*.

Якщо неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, за винятком деякої точки $c\in[a;b]$, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ – збігається і обчислюється за формулою Ньютона–Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

У загальному випадку на проміжку $[a;b]$ може бути скінченна кількість особливих точок, поблизу яких функція необмежена, тим часом як у кожному інтервалі цього проміжку, що не містить особливих точок, функція обмежена й інтегровна.

Для функцій, визначених і додатних на проміжках $(a;b]$ або $[a;b)$, справедливими є *ознаки збіжності*, аналогічні до ознак збіжності для невласних інтегралів 1-го роду.

Геометричний зміст. Збіжний невласний інтеграл 2-го роду (10.9.1) є *площею* фігури, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, $f(x)>0$, прямою $x=a$ і вертикальною асимптотою $x=b$.

За допомогою заміни змінної $t=(x-a)^{-1}$ невласний інтеграл 2-го роду (10.9.1) зводиться до невласного інтеграла 1-го роду.

Приклад 1. Виходячи з означення, обчислити невласні інтеграли 2-го роду або встановити їх розбіжність:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **б)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція необмежена в околі точки $x=1$. Однак вона неперервна й інтегровна на відрізку $[0;1-\varepsilon]$. Відповідно до означення (10.9.1) маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin x)\Big|_0^{1-\varepsilon}=\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0\right]=\frac{\pi}{2}.$$

Отримали скінченне значення, отже, інтеграл збігається.

б) Підінтегральна функція необмежена в околі точки $x=0$. Вона неперервна й інтегровна на відрізку $[0+\varepsilon;1]$. Відповідно до означення (10.9.2)

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1=\ln 1-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(0+\varepsilon)=\infty.$$

Інтеграл не має скінченної границі, отже, розбігається.

Приклад 2. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; **б)** $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2-x-2}$; **в)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\operatorname{ctg}x\,dx$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція необмежена в околі внутрішньої точки $x=0$ проміжку інтегрування $[-1;1]$.

Перетворимо підінтегральну функцію у такий спосіб:

$$f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2x^2+1}{x^{2/3}}=2x^{4/3}+x^{-2/3}.$$

Тоді заданий інтеграл розпадається на суму двох інтегралів

$$\int_{-1}^1\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^1\left(2x^{4/3}+x^{-2/3}\right)dx=2\int_{-1}^1x^{4/3}dx+\int_{-1}^1x^{-2/3}dx,$$

перший з яких є визначеним і обчислюється за допомогою формули Ньютона–Лейбніца:

$$2\int_{-1}^1x^{4/3}dx=2\cdot\frac{x^{7/3}}{7/3}\Big|_{-1}^1=\frac{6}{7}(1+1)=\frac{12}{7},$$

а другий – невласний; він збігається, оскільки

$$\int_{-1}^1x^{-2/3}dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}3\sqrt[3]{x}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}3\sqrt[3]{x}\Big|_{0+\varepsilon_2}^1=3\lim_{\varepsilon_1\to+0}\sqrt[3]{-\varepsilon_1}+3+3-3\lim_{\varepsilon_2\to+0}\sqrt[3]{\varepsilon_2}=6.$$

Отже, заданий невласний інтеграл збігається і дорівнює:

$$\int_{-1}^1\frac{2x^2+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\frac{12}{7}+6=\frac{54}{7}.$$

б) Підінтегральна функція має розрив у точках 2 і −1, всередину проміжку інтегрування $[1;3]$ потрапляє точка $x=2$. Тому скористаємося формулою (10.9.3). Представимо заданий інтеграл у вигляді суми інтегралів

$$\int_1^3\frac{dx}{x^2-x-2}=\int_1^2\frac{dx}{x^2-x-2}+\int_2^3\frac{dx}{x^2-x-2}\qquad(*)$$

і розглянемо кожний з них окремо:

$$\int_1^2\frac{dx}{x^2-x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right|\Bigg|_1^{2-\varepsilon}=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_1^{2-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon-2}{2-\varepsilon+1}\right|-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}=-\infty.$$

Оскільки перший з інтегралів у правій частині рівності (*) розбігається, то розглядати другий інтеграл вже не має сенсу. Вихідний невласний інтеграл $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{x^2-x-2}$ розбігається.

в) Підінтегральна функція $\operatorname{ctg}x$ розривна в точці $x=0$, а на відрізку $[\varepsilon;\pi/4]$ неперервна й інтегровна, тому згідно з формулою (10.9.2) маємо:

$$\int_0^{\pi/4}\operatorname{ctg}x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{\pi/4}\operatorname{ctg}x\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(\sin x)\Big|_{0+\varepsilon}^{\pi/4}=\ln\sin\frac{\pi}{4}-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(\sin\varepsilon)=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\infty)=\infty.$$

Скінченної границі не існує, отже, невласний інтеграл розбігається.

Приклад 3. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\displaystyle\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; **б)** $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Розв'язання. **а)** Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ неперервна й інтегровна на відрізку $[1+\varepsilon;e]$. Однак вона необмежена на нижній межі проміжку інтегрування, тому що $\ln 1=0$. Відповідно до формули (10.9.2):

$$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^e\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=2\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\varepsilon}^e=$$

$$=2\left(1-\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\ln(1+\varepsilon)}\right)=2(1-0)=2.$$

Отже, інтеграл збігається.

Звернемо увагу, що в цьому випадку можна було відразу застосувати формулу Ньютона–Лейбніца, оскільки *первісна* підінтегральної функції $2\sqrt{\ln x}$ *неперервна* на всьому відрізку $[1;e]$. Дійсно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_1^e = 2\left(\sqrt{\ln e} - \ln 1\right) = 2.$$

б) Підінтегральна функція необмежена на обох кінцях інтервалу $[0;1]$. Можна розбити заданий відрізок, наприклад, точкою $x = 1/2$ на дві частини і розглядати суму двох інтегралів.

Знайдемо первісну підінтегральної функції:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x - 1/2}{1/2} = \arcsin(2x-1).$$

Отримана *первісна неперервна* на всьому проміжку $[0;1]$, тому виправданим є безпосереднє застосування формули Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1)\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Приклад 4. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$; **б)** $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$.

Розв'язання. Обидва інтеграли мають одну і ту саму точку розриву $x = 0$.

Знайдемо первісну для функції $\frac{e^{1/x}}{x^3}$:

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x}, & du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \frac{e^{1/x}}{x^2}dx, & v = \int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{dx}{x^2} = dt \end{array} \right| = -\int e^t dt = -e^t = -e^{1/x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{e^{1/x}}{x} - \int e^{1/x}\frac{dx}{x^2} = -\frac{e^{1/x}}{x} + e^{1/x} = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Первісна розривна при $x = 0$, тому безпосереднє застосування формули Ньютона–Лейбніца є неправомірним.

Будемо діяти за означенням. Це не вимагатиме значних зусиль, оскільки первісна вже знайдена. При обчисленні границь скористаємося правилом Лопіталя:

а) $$\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{0-\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{0-\varepsilon}\right) - 2e^{-1} =$$

$$= -\frac{2}{e} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1 + \frac{1}{\varepsilon}}{e^{1/\varepsilon}} = -\frac{2}{e} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)'}{\left(e^{1/\varepsilon}\right)'} = -\frac{2}{e} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}{\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot e^{1/\varepsilon}\right)} = -\frac{2}{e} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{e^{1/\varepsilon}} = -\frac{2}{e}.$$

б) $$\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{0+\varepsilon}}\left(1 - \frac{1}{0+\varepsilon}\right) = \infty.$$

Отже, інтеграл $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx = -\frac{2}{e}$ збігається, а інтеграл $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$ розбігається.

Зауваження. В ряді випадків у результаті заміни змінної невласний інтеграл 2-го роду зводиться до визначеного інтеграла від неперервної функції зі скінченним інтервалом інтегрування, що обчислюється стандартно. Можливим є також обернене: у результаті заміни змінної визначений інтеграл може бути перетворений до невласного.

Приклад 5. Обчислити інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; **б)** $\int_1^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. **а)** Функція $y = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ зазнає розриву 2-го роду на верхній межі інтервалу інтегрування в точці $x = 1$.

Виконаємо заміну змінної $\sqrt{1-x} = t$, тоді

$$1 - x = t^2, \qquad dx = -2t\,dt$$

і підінтегральний вираз перетвориться до вигляду

$$\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{-2\,dt}{t^2+1}.$$

Відповідно змінятся й межі інтегрування:

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad t_н=1, \qquad x=1 \quad \Rightarrow \quad t_в=0.$$

Таким чином, у результаті заміни змінної приходимо до інтегрування неперервної функції на скінченному проміжку, тобто визначеного інтегралу

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int_1^0 \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)\cdot t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^1 = 2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

б) У точці $x=2$ підінтегральна функція зазнає розриву. Виконаємо заміну змінної $x=2\sin t$, $dx=2\cos t\,dt$:

x	1	2
t	$\pi/6$	$\pi/2$

Отримали визначений інтеграл від неперервної функції:

$$\int_1^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}2\cos t\,dt = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$=2\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 6. Визначити умови збіжності невласного інтеграла:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \qquad (\lambda>0).$$

<u>*Розв'язання*</u>. **а)** Підінтегральна функція необмежена на нижній межі проміжку інтегрування. Дотримуючись означення (10.9.2), знаходимо при $\lambda\neq 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b (x-a)^{-\lambda}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(x-a)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$=\frac{1}{1-\lambda}\cdot\left(\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}}-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{(1-\lambda)(b-a)^{\lambda-1}}, & \text{якщо } \lambda<1;\\ \infty, & \text{якщо } \lambda>1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$ *збігається* при $\lambda<1$ і *розбігається* при $\lambda>1$.

б) Щоб з'ясувати, як поводиться даний інтеграл при $\lambda=1$, розглянемо невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{x-a}$. У цьому випадку:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^b = \ln|b-a| - \lim_{\varepsilon\to+0}\ln|\varepsilon| = \infty,$$

тобто скінченної границі не існує, отже, цей інтеграл розбігається.

Таким чином, маємо такі умови збіжності:

$$\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases}\text{збігається,} & \text{якщо } \lambda<1;\\ \text{розбігається,} & \text{якщо } \lambda\geq 1.\end{cases}} \qquad (10.9.4)$$

Інтеграл (10.9.4) використовується як *еталонний у частинній ознаці порівняння.*

Приклад 7. Використовуючи ознаки порівняння, встановити збіжність або розбіжність невласних інтегралів:

а) $\int_e^{e^3} \frac{x\ln x}{(x-e)^3}dx$; **б)** $\int_0^1 \frac{dx}{5x^2+\sqrt{x}}$.

<u>*Розв'язання*</u>. **а)** Підінтегральна функція зазнає розриву на нижній межі в точці $x=e$. На відрізку $[e;e^3]$ чисельник дробу $x\ln x$ завжди більше одиниці, оскільки $e\leq x\leq e^3$, а $1\leq \ln x\leq 3$. Отже,

$$f(x)=\frac{x\ln x}{(x-e)^3} > \frac{1}{(x-e)^3} = g(x).$$

Обраний для порівняння невласний інтеграл $\int_e^{e^3} g(x)dx = \int_e^{e^3}\frac{dx}{(x-e)^3}$ має ту саму точку розриву $x=e$, що й заданий інтеграл, і той самий проміжок інтегрування $[e;e^3]$. Обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в інтервалі $(e;e^3]$.

Але інтеграл $\int_e^{e^3}\frac{dx}{(x-e)^3}$ розбігається, оскільки $\lambda=3>1$ (див. приклад 6).

Якщо інтеграл від меншої функції розбігається, то інтеграл від більшої функції розбігається тим більше. Отже, невласний інтеграл $\int_e^{e^3}\frac{x\ln x}{(x-e)^3}dx$ розбігається.

б) В околі точки $x=0$ підінтегральна функція необмежена. Застосуємо *ознаку порівняння*, скориставшись нерівністю

$$5x^2+\sqrt{x}>\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{5x^2+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}=g(x).$$

Інтеграл $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається, оскільки $\lambda=\frac{1}{2}<1$, $a=0$ (див. приклад 6).

Відповідно до ознаки порівняння, якщо інтеграл від більшої функції збігається, то інтеграл від меншої збігається тим більше. Отже, невласний інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{5x^2+\sqrt{x}}$ збігається.

Здавалося б, можна було взяти для порівняння функцію $g(x)=\frac{1}{x^2}$, враховуючи, що нерівність $\frac{1}{5x^2+\sqrt{x}}<\frac{1}{x^2}$ виконується. Однак скористатися ознакою порівняння в цьому випадку не можна, оскільки інтеграл від більшої функції $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ розбігається $(\lambda=2>1)$, а отже, нічого певного не можна сказати про те, як буде поводитися інтеграл від меншої функції.

Приклад 8. Довести, що:

а) площа області, розташованої між кривою $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, віссю абсцис і прямими $x=\pm1$, скінченна і дорівнює 6 (рис. 10.9.8а);

б) площа області, розташованої між кривою $y=\frac{1}{x^2}$, віссю абсцис і прямими $x=\pm1$, нескінченна (рис. 10.9.8б).

Розв'язання. **а)** Функція необмежена в околі точки $x=0$, що є внутрішньою точкою інтервалу інтегрування. Функція $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ парна, її графік симетричний відносно осі Oy. Крім того, вісь ординат є асимптотою кривої, оскільки

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty.$$

Область не обмежена зверху, тому чи має вона скінченну площу, з'ясуємо після дослідження на збіжність невласного інтеграла

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Оскільки первісна $\sqrt[3]{x}$ неперервна на відрізку $[0;1]$, можна застосувати формулу Ньютона–Лейбніца:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=2\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}dx=6\sqrt[3]{x}\Big|_0^1=6.$$

Інтеграл збігається, отже, задана необмежена область дійсно має скінченну площу $S=6$.

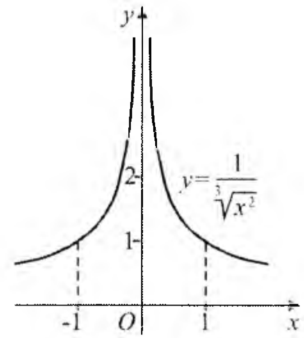


Рис. 10.9.8а

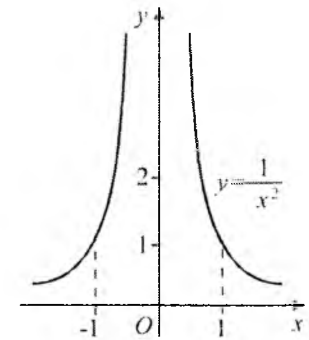


Рис.10.9.8б

б) Функція $y=\frac{1}{x^2}$ парна і має точку розриву $x=0$. Її асимптотою також слугує вісь ординат.

Як і у випадку **а**), маємо область, обмежену знизу віссю абсцис, з боків прямими $x=-1$ і $x=1$ і не обмежену зверху. Але на відміну від випадку **а**) ця область не має скінченної площі, оскільки

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=2\int_0^1\frac{dx}{x^2}=2\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 x^{-2}dx=-2\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{x}\Big|_\varepsilon^1=\infty,$$

тобто інтеграл розбігається.

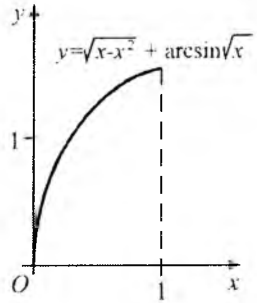
Якби ми "не помітили" особливість даної функції в точці $x=0$ і формально обчислили заданий інтеграл як визначений, то одержали б неправильний результат:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-(1+1)=-2.$$

Дійсно, інтеграл від додатної функції не може бути від'ємним.

Приклад 9. Знайти довжину кривої $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

Розв'язання. Визначимо передусім координати початку й кінця заданої кривої. Область визначення функції знайдемо, розв'язуючи систему нерівностей:



$$\begin{cases} x-x^2 \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \le 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0;1], \\ x \ge 0. \end{array}\right.$$

Отже, функція визначена на відрізку $[0;1]$. Оскільки вона неперервна на заданому відрізку, то межові точки відрізка і є абсцисами точок, що обмежують задану дугу.

Щоб скористатися формулою (10.5.1), яка визначає довжину дуги кривої, обчислимо попередньо:

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$1+(y')^2 = 1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}\right)^2 = 1+\frac{1-2x+x^2}{x-x^2} = \frac{1-x}{x-x^2} = \frac{1}{x}.$$

Маємо невласний інтеграл 2-го роду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

оскільки в точці $x=0$ підінтегральна функція зазнає розриву. За означенням

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Невласний інтеграл збігається, отже, задана крива має скінченну довжину $l=2$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається *невласним інтегралом* від розривної функції за заданим скінченним інтервалом?
2. Чи можна збіжний невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції $f(x)$, визначеної на $[a;b]$, розглядати як границю інтегральної суми $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?
3. Чи є правильним таке твердження: невласний інтеграл 2-го роду збігається, якщо підінтегральна функція необмежена лише в *кінцевих* точках (a або b) проміжку інтегрування, і розбігається, якщо підінтегральна функція необмежена в околі якоїсь *внутрішньої* точки проміжку інтегрування?

4. Чи є справедливою *ознака порівняння* для невласного інтеграла від необмеженої функції? Відповідь обґрунтувати.
5. Що можна сказати про невласний інтеграл 2-го роду від меншої функції, якщо невласний інтеграл від більшої функції збігається (розбігається)?
6. Як поводиться невласний інтеграл 2-го роду від більшої функції, якщо невласний інтеграл 1-го роду від меншої функції розбігається (збігається)?
7. Чи виконується *гранична ознака порівняння* для невласного інтеграла від необмеженої функції? Відповідь обґрунтувати.
8. Чи застосовна *частинна ознака* до невласного інтеграла від необмеженої функції? Відповідь обґрунтувати.
9. Який невласний інтеграл 2-го роду приймають як *еталонний* при використанні частинної ознаки порівняння?
10. Довести, що невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ $(b>a,\ \lambda>0)$ збігається за тих самих умов, що й невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$.
11. Чи виконується *ознака абсолютної* (*умовної*) *збіжності* для невласного інтеграла від необмеженої функції? Відповідь обґрунтувати.
12. Сформулювати *ознаки збіжності* невласного інтеграла 2-го роду.
13. У якому випадку для обчислення невласного інтеграла 2-го роду можливим є безпосереднє застосування *формули Ньютона–Лейбніца*?
14. Яким є *геометричний зміст* невласного інтеграла від додатної функції $f(x)$, визначеної й інтегровної на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ і необмеженої в точці b? визначеної й інтегровної на відрізку $[a+\varepsilon;b]$ і необмеженої в точці a?
15. Яким є *геометричний зміст* невласного інтеграла від додатної функції $f(x)$, визначеної й інтегровної на відрізку $[a;b]$, але необмеженої в околі деякої внутрішньої точки цього відрізка?
16. Чи можливо, щоб у результаті заміни змінної невласний інтеграл 2-го роду став визначеним інтегралом (від неперервної функції зі скінченним інтервалом інтегрування)? Чи припустимим є обернене?
17. Чи можливо, щоб незамкнута область мала скінченну площу?
18. Чи можна невласний інтеграл 2-го роду звести до невласного інтеграла 1-го роду? А навпаки?
19. Які з наведених нижче інтегралів є *невласними*?

$$\int_{-8}^3 \frac{dx}{\sqrt[7]{x^6}}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x+1}, \qquad \int_{-2}^1 \frac{dx}{x+1}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x-1}, \qquad \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1.1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; 1.2. $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;

1.3. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$; 1.4. $\displaystyle\int_{-2}^{4}\frac{x\,dx}{x^2-1}$;

1.5. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; 1.6. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

1.7. $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 1.8. $\displaystyle\int_{0}^{1}\ln x\,dx$;

1.9. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 1.10. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$;

1.11. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$; 1.12. $\displaystyle\int_{0,5}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

1.13. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}$; 1.14. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

1.15. $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{5+2\cos x}{(x-2)^2}\,dx$; 1.16. $\displaystyle\int_{3}^{6}\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}}$.

2. Встановити збіжність і обчислити *інтеграл Ейлера* $J=\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

3. Довести, що площа області, обмеженої кривою $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, осями координат і асимптотою $x=1$, скінченна і дорівнює $\pi/2$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $3\sqrt[3]{2}$. **1.2.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **1.3.** Розбігається. **1.4.** Розбігається. **1.5.** $14\frac{4}{7}$. **1.6.** $-\ln\left|\sqrt{3}-2\right|$. **1.7.** $2\sqrt{\ln 2}$. **1.8.** -1. **1.9.** $\pi^2/8$. **1.10.** Розбігається. **1.11.** Збігається. **1.12.** Збігається. **1.13.** Розбігається. **1.14.** $\frac{16}{3}$. **1.15.** Розбігається. **1.16.** Збігається. **2.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

РОЗДІЛ 11
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням n-го порядку відносно функції $y=y(x)$ називається будь-яке співвідношення, що зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ і її похідні (або диференціали):

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0.$$

Найвищий порядок похідної, що входить до рівняння, називається *порядком диференціального рівняння*.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*; якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається *рівнянням у частинних похідних* (тут такі рівняння не розглядаються).

Будь-яка функція $y=\varphi(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння, тобто така, що перетворює його на тотожність, називається *розв'язком* цього рівняння. Розв'язок диференціального рівняння називається *загальним*, якщо він містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння, і при будь-яких значеннях сталих задовольняє це рівняння.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням рівняння*.

§ 11.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

I. *Диференціальним рівнянням 1-го порядку* відносно функції $y=y(x)$ називається вираз вигляду $F(x,y,y')=0$ або

$$y'=f(x;y), \tag{11.1.1}$$

якщо він розв'язаний відносно похідної $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Загальним розв'язком рівняння 1-го порядку називається функція $y=\varphi(x,C)$, яка при будь-якому значенні довільної сталої C є розв'язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x,y,C)=0$, що містить розв'язок в неявному вигляді, називається *загальним інтегралом* рівняння (11.1.1). Розв'язок, отриманий із загального розв'язку (загального інтеграла) при певному (припустимому) значенні довільної сталої C називається *частинним розв'язком* (*частинним інтегралом*).

Графік розв'язку диференціального рівняння на площині xOy називається *інтегральною лінією* (*інтегральною кривою*). Загальному розв'язку (загальному інтегралу) відповідає сукупність (сімейство) інтегральних кривих.

Теорема Коші (*існування і єдиності розв'язку*).

Нехай у диференціальному рівнянні (11.1.1) функція $f(x;y)$ неперервна в точці $M_0(x_0;y_0)$ і її околі. Тоді в деякому околі точки x_0 існує розв'язок $y=y(x)$ рівняння такий, що $y(x_0)=y_0$. Якщо частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ даної функції неперервна в околі точки M_0, то цей розв'язок єдиний.

Часто серед всіх розв'язків диференціального рівняння потрібно знайти такий розв'язок, що задовольняє умову: $y=y_0$ при $x=x_0$, де x_0 і y_0 – задані числа. Така умова називається *початковою умовою* і коротко записується так:

$$y(x_0)=y_0 \qquad \text{або} \qquad y\big|_{x=x_0}=y_0. \tag{11.1.2}$$

Геометрично це означає, що із *сім'ї інтегральних кривих*, які визначаються загальним розв'язком (загальним інтегралом) рівняння, потрібно виділити інтегральну криву, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$.

Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову, називається *задачею Коші*.

Точки, у яких порушуються умови теореми Коші, називаються *особливими точками*. Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, називається *особливим*, інакше, особливий розв'язок складається лише з особливих точок. Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої C. Особливі розв'язки можуть виявитися серед розв'язків, загублених при перетвореннях заданого рівняння в процесі його інтегрування (наприклад, при відокремленні змінних).

II. *Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними* називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y'=f(x)\cdot g(y) \tag{11.1.3}$$

або

$$P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy=0, \tag{11.1.4}$$

якщо $P(x;y)=M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x;y)=M_2(x)N_2(y)$.

Інакше кажучи, у рівнянні з відокремлюваними змінними коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, що залежать лише від однієї змінної.

Розділимо обидві частини рівняння (11.1.4) на $N_1(y)\cdot M_2(x)$, виключивши з розгляду точки, у яких $N_1(y)=0$ і $M_2(x)=0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy.$$

Одержали рівняння, у якому, як кажуть, змінні відокремлені. Почленно інтегруючи, знайдемо загальний інтеграл рівняння (11.1.4):

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy+C.$$

Ділення на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ може призвести до втрати частинних розв'язків, що перетворюють цей добуток на нуль, тому випадки $N_1(y)=0$ і $M_2(x)=0$ розглядаються додатково.

Приклад 1. Довести, що функція $y=e^x-x-1$ слугує розв'язком диференціального рівняння $y'=x+y$ в інтервалі $(-\infty;+\infty)$.

Розв'язання. Функція $y=e^x-x-1$ і її похідна $y'=e^x-1$ визначені й неперервні на всій числовій осі.

Підставимо замість y і y' їхні вирази в дане диференціальне рівняння:

$$e^x-1=x+\left(e^x-x-1\right).$$

Одержали тотожність $0=0$, що виконується для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$. Отже, функція $y=e^x-x-1$ дійсно є розв'язком заданого диференціального рівняння.

Приклад 2. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл із загальним центром $O(0;1)$.

Розв'язання. Канонічне рівняння вказаної сім'ї кіл

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-1)^2=R^2.$$

Диференціюючи це співвідношення за змінною x як неявно задану функцію, знаходимо рівняння

$$2x+2(y-1)\frac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad (y-1)\frac{dy}{dx}+x=0 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{x}{1-y}.$$

Приклад 3. Знайти (відновити) диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція $y=Cxe^x$.

Розв'язання. Оскільки загальний розв'язок містить одну довільну сталу, то мова йде про диференціальне рівняння 1-го порядку.

Продиференціюємо задану функцію, вважаючи $y=y(x)$:

$$y'=C\left(e^x+xe^x\right) \quad\Rightarrow\quad y'=Ce^x(1+x). \tag{*}$$

Із двох співвідношень $y=Cxe^x$ і $y'=Ce^x(1+x)$ виключимо сталу C. Для цього з першого рівняння знайдемо $C=\dfrac{y}{xe^x}$ і підставимо в друге:

$$y'=\frac{y}{xe^x}\cdot e^x(1+x) \quad\Rightarrow\quad y'x-y(1+x)=0.$$

Це і є шукане диференціальне рівняння.

Приклад 4. Довести, що функція $y=\varphi(x)$, задана параметричними рівняннями $x=te^t$, $y=e^{-t}$, є розв'язком диференціального рівняння

$$(1+xy)\frac{dy}{dx}+y^2=0.$$

Розв'язання. Будь-яка функція є розв'язком рівняння, якщо вона перетворює його на тотожність. Знайдемо спочатку похідну $\frac{dy}{dx}$. Похідна параметрично заданої функції обчислюється за формулою (див. частину 1, § 5.2):

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{e^{-t}}{e^t+t\cdot e^t}=-\frac{e^{-2t}}{1+t}.$$

Підставимо в задане рівняння функції $x(t)$, $y(t)$ і знайдену похідну. При кожному значенні параметра t маємо

$$(1+xy)\frac{dy}{dx}+y^2=\left(1+te^t\cdot e^{-t}\right)\cdot\left(-\frac{e^{-2t}}{1+t}\right)+e^{-2t}=-\frac{(1+t)\cdot e^{-2t}}{(1+t)}+e^{-2t}=0.$$

Отже, задана функція $y=\varphi(x)$ є розв'язком цього рівняння.

Приклад 5. Переконатися в тому, що функція $\varphi(x)=x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ слугує розв'язком диференціального рівняння $x\frac{dy}{dx}-y=x^2\sin x^2$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку похідну функції $\varphi(x)$:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\int\limits_0^x \sin t^2 dt+x\sin x^2.$$

Підставляючи в ліву частину рівняння $y=\varphi(x)$ і $\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}$, матимемо

$$x\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)=x\int\limits_0^x \sin t^2 dt+x^2\sin x^2-x\int\limits_0^x \sin t^2 dt,$$

звідки

$$x\frac{d\varphi(x)}{dx}-\varphi(x)=x^2\sin x^2,$$

що збігається із правою частиною. Функція $y=\varphi(x)$ дійсно є розв'язком вказанного рівняння.

Приклад 6. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y\left(1+x^2\right)dy+x\sqrt{1+y^2}\,dx=0.$$

Розв'язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (11.1.4). Поділимо обидві частини рівняння на $\left(1+x^2\right)\sqrt{1+y^2}$, а потім рознесемо вирази, що містять x і y, у різні частини рівності:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Змінні відокремлені. Тепер виконаємо інтегрування:

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}=-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд:

$$\sqrt{1+y^2}=-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Зауваження 1. Записуємо одну сталу інтегрування C, що фактично є алгебраїчною сумою двох сталих інтегрування від кожного з невизначених інтегралів.

Тепер представимо розв'язок у явному вигляді. Для цього виразимо y як функцію від x:

$$\sqrt{1+y^2}=C-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \quad \Rightarrow \quad 1+y^2=\left[C-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]^2,$$

звідки і знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=\pm\sqrt{\left[C-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]^2-1}.$$

Приклад 7. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$\left(y^2x+x\right)dy+\left(x^2y+y\right)dx=0.$$

Розв'язання. Винесемо спільні множники в обох дужках:

$$x\left(y^2+1\right)dy+y\left(x^2+1\right)dx=0.$$

Тепер очевидно, що це рівняння з відокремлюваними змінними. Поділимо його почленно на $xy\neq 0$:

$$\frac{y^2+1}{y}dy=-\frac{x^2+1}{x}dx.$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=-\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx,$$

$$\frac{y^2}{2}+\ln|y|=-\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\ln|C| \quad\Rightarrow\quad \ln|xy|+\ln e^{\frac{x^2+y^2}{2}}=\ln|C|.$$

Стала інтегрування записана у вигляді $\ln|C|$. Тут і надалі довільну сталу будемо записувати так, щоб при наступних перетвореннях вираз спростився. У даному випадку:

$$\ln\left(|xy|e^{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)=\ln|C| \quad\Rightarrow\quad |xy|e^{\frac{x^2+y^2}{2}}=|C|.$$

Звідси знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$$xye^{\frac{x^2+y^2}{2}}=\pm C \quad\Rightarrow\quad xye^{\frac{x^2+y^2}{2}}=C_1 \qquad (C_1=\pm C)^1.$$

У процесі розв'язування рівняння ми припустили, що $x\neq 0$, $y\neq 0$. Однак функції $x=0$ і $y=0$ також є розв'язками вихідного рівняння, що легко перевірити безпосередньо. З іншого боку, вони утворюються із загального інтеграла при $C=0$. Отже, $x=0$ і $y=0$ – *частинні розв'язки* рівняння.

Приклад 8. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2\left(1+(y')^2\right)=1.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної y'. Отримали диференціальне рівняння вигляду (11.1.3):

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \qquad (y\neq 0). \qquad (*)$$

Оскільки $y'=\frac{dy}{dx}$, то змінні легко відокремлюються:

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{1-y^2}}=dx, \qquad \left(\sqrt{1-y^2}\neq 0\right).$$

Інтегруючи, знаходимо

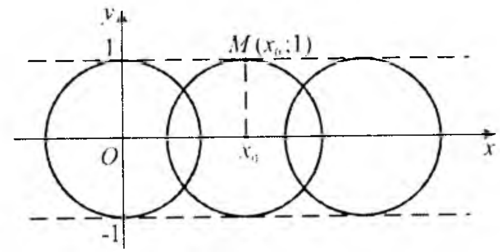
$$\pm\sqrt{1-y^2}=x-C.$$

[1] Вважаючи завжди можливим таке перепозначення надалі будемо відразу писати $\ln C$.

Це і є *загальний інтеграл* заданого рівняння. Підносячи до квадрата обидві частини рівності, представимо її у вигляді:

$$(x-C)^2+y^2=1. \qquad (**)$$

Це рівняння визначає сім'ю кіл одиничного радіуса із центрами в точках $(C;0)$, що лежать на осі Ox. Оскільки сталій C можна надавати довільних додатних і від'ємних значень, то центри кіл заповнюють всю вісь Ox.



Перевіримо, чи не відбулася втрата розв'язків при діленні на $\sqrt{1-y^2}$. Якщо $\sqrt{1-y^2}=0$, то $y=\pm1$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що й $y=1$, і $y=-1$ задовольняють рівняння, тобто є його розв'язками. Ці розв'язки не можуть бути отримані із загального інтеграла рівняння (**) при жодному значенні сталої C. Інакше: прямі $y=\pm1$ не входять до сім'ї інтегральних кривих (**).

Зауважимо, що через кожну точку $M(x_0;1)$ лінії $y=1$ проходить одна із кривих сім'ї (**), а саме коло $(x-x_0)^2+y^2=1$. Отже, кожна точка розв'язку $y=1$ (і розв'язку $y=-1$) є *особливою* – у ній порушується єдиність розв'язку. Це пояснюється тим, що права частина рівняння (*) не задовольняє умови теореми Коші в точках $(x_0;\pm1)$. Розв'язок, кожна точка якого є особливою, називається *особливим розв'язком*. Таким чином, функції $y=\pm1$ – особливі розв'язки вихідного рівняння.

Приклад 9. Розв'язати диференціальні рівняння:

а) $\frac{dy}{dx}=2\frac{y}{x}$; б) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

Розв'язання. а) Відокремимо змінні і проінтегруємо:

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln C \quad\Rightarrow\quad y=Cx^2.$$

Отриманий розв'язок визначає сім'ю напівпарабол, що виходять із початку координат, тобто з точки $O(0;0)$ виходить *множина* інтегральних кривих, отже, точка $O(0;0)$ – *особлива* (рис. 11.1.9а).

Пояснюється це тим, що права частина рівняння $y' = 2\dfrac{y}{x}$ не задовольняє умови *теореми Коші*: функції $f(x,y) = 2\dfrac{y}{x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{x}$ не є неперервними в околі точки $O(0;0)$.

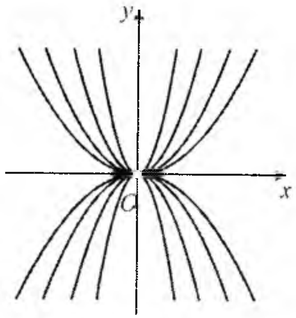


Рис. 11.1.9а

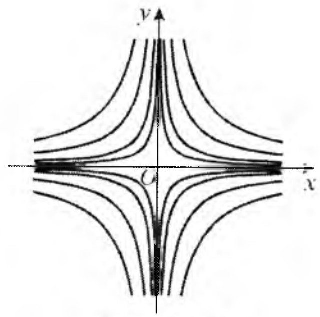


Рис. 11.1.9б

б) Після відокремлення змінних та інтегрування матимемо сім'ю рівнобічних гіпербол:

$$y = \frac{C}{x}.$$

При цьому через початок координат не проходить *жодна* інтегральна крива (крім прямої $y = 0$), тому точка $O(0;0)$ є *особливою* (рис. 11.1.9б).

Тут, як і у випадку **а**), для правої частини рівняння $y' = -\dfrac{y}{x}$ не виконуються умови *теореми Коші* в початку координат.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(x+1)dy + xydx = 0.$$

<u>*Розв'язання.*</u> Виконаємо почленне ділення рівняння на $y(x+1)$. У результаті змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{x\,dx}{x+1} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y} = -\int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx,$$

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{y}{C(x+1)}\right| = -x.$$

Потенціюючи, знаходимо загальний розв'язок:

$$\frac{y}{C(x+1)} = e^{-x} \quad\Rightarrow\quad y = C(x+1)\,e^{-x},$$

де C може набувати довільних значень.

Звернемо увагу на таку обставину. При діленні на добуток $y(x+1)$ ми могли втратити розв'язки, що перетворюють цей добуток на нуль, тобто значення $y = 0$ і $x = -1$.

Справді, функція $y = 0$ (тоді і $dy = 0$) задовольняє задане рівняння. Цей розв'язок міститься в загальному розв'язку при $C = 0$. Функція $x = -1$ (тоді $dx = 0$) також є розв'язком вихідного рівняння. Якби сталу інтегрування ми записали у вигляді $\ln C = \ln\dfrac{1}{C^*}$, то загальний розв'язок можна було б представити як

$$y = \frac{(x+1)e^{-x}}{C^*} \quad\Rightarrow\quad x + 1 = C^* y e^{x},$$

тобто при $C^* = 0$ він давав би $x = -1$.

Слід зауважити, що якби рівняння було записане у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xy}{x+1}$, то $x = -1$ вже не було б його розв'язком. А якби рівняння було записане у вигляді $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{x+1}{xy}$, то його розв'язком не могла б слугувати функція $y = 0$.

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Виразимо похідну в рівнянні через відношення диференціалів змінних $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Обчислити інтеграли досить просто:

$$\int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C.$$

На цьому можна б і поставити крапку, оскільки загальний інтеграл заданого рівняння знайдений. Однак можна записати загальний розв'язок і в простішому вигляді, якщо представити довільну сталу C як $\operatorname{arctg} C$. Тоді,

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C),$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} C)} = \frac{x + C}{1 - Cx}.$$

Зауваження 2. При розв'язуванні диференціальних рівнянь в окремих випадках відповіді формально можуть не збігатися з наведеними в підручнику. Вигляд загального розв'язку, як ми переконалися, істотно залежить від вибору форми запису довільної сталої C.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 10^{x+y}$.

Розв'язання. Записуючи $y' = \dfrac{dy}{dx}$, зведемо рівняння до вигляду

$$dy = 10^{x+y}dx \quad \Rightarrow \quad dy = 10^x \cdot 10^y dx.$$

Тепер змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{10^y} = 10^x dx.$$

Інтегруємо

$$\int 10^{-y}dy = \int 10^x dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{C}{\ln 10}$$

і знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$$10^x + 10^{-y} = C.$$

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок рівняння $e^{-S}\left(1 + \dfrac{dS}{dt}\right) = 1$.

Розв'язання. Похідна записана як $\dfrac{dS}{dt}$, отже, S – функція, а t – незалежна змінна. Виразимо $\dfrac{dS}{dt}$ із заданого рівняння:

$$1 + \frac{dS}{dt} = e^S \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = e^S - 1.$$

Тепер можна відокремити змінні:

$$\frac{dS}{e^S - 1} = dt.$$

Інтеграл зліва обчислимо окремо:

$$\int \frac{dS}{e^S - 1} = \int \frac{e^S - \left(e^S - 1\right)}{e^S - 1}dS = \int \frac{e^S}{1 - e^S}dS - \int dS = \int \frac{d\left(e^S - 1\right)}{e^S - 1} - S = \ln\left|e^S - 1\right| - S + \ln C.$$

Залишилося записати загальний інтеграл рівняння:

$$\ln\left|e^S - 1\right| + \ln C - S = t \quad \Rightarrow \quad \ln C\left|e^S - 1\right| = S + t \quad \Rightarrow \quad C\left(e^S - 1\right) = e^{S+t}.$$

Приклад 14. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' \sin x = y \ln y$$

за умови $y(\pi/2) = e$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, маємо

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y \ln y.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

й інтегруємо

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C.$$

Знайшли загальний розв'язок рівняння:

$$\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Підставимо в загальний розв'язок початкову умову $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $y_0 = e$ і знайдемо довільну сталу C:

$$e = e^{C \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Отже, частинний розв'язок (інтегральна крива, що проходить через задану точку $M_0(\pi/2; e)$) має вигляд:

$$y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Зауваження 3. У рівнянні вигляду $y' = f(ax + by + c)$ змінні відокремлюються, якщо виконати заміну змінних $z(x) = ax + by + c$.

Приклад 15. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \cos(x + y)$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінних, вводячи нову функцію

$$z(x) = x + y(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = z(x) - x.$$

Диференціюючи цю рівність, матимемо $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1$. Тоді задане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \cos z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{1 + \cos z} = dx,$$

звідки

$$\int\frac{dz}{1+\cos z}=\int dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dz}{2\cos^2\frac{z}{2}}=x+C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2}=x+C \quad\Rightarrow\quad z=2\cdot\left[\operatorname{arctg}(x+C)+n\pi\right].$$

Виконуючи обернену заміну змінної, знайдемо загальний розв'язок:

$$y=-x+2\operatorname{arctg}(x+C)+2\pi n.$$

У процесі розв'язування рівняння ми поділили обидві його частини на $1+\cos z$. Тому слід перевірити, чи не є розв'язками корені рівняння $1+\cos z=0$, тобто $z=(2n+1)\pi$, де n – ціле число. Підстановка показує, що функції $z=(2n+1)\pi$ (або $y=-x+(2n+1)\pi$ у вихідних змінних) справді є розв'язками рівняння, що не містяться в загальному розв'язку при жодних значеннях сталої C.

Приклад 16. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної

$$z(x)=4x+2y(x)-1 \quad\Rightarrow\quad y(x)=\frac{1}{2}z(x)-2x+\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-2.$$

У результаті у вихідному рівнянні змінні відлкремлюються:

$$\frac{dz}{dx}=4+2\sqrt{z} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dz}{\sqrt{z}+2}=2\int xdx, \qquad \sqrt{z}+2\neq 0.$$

Для обчислення інтеграла в лівій частині скористаємося підстановкою:

$$\sqrt{z}=u \quad\Rightarrow\quad z=u^2 \quad\Rightarrow\quad dz=2u\,du.$$

Тоді

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}+2}=\int\frac{2u\,du}{u+2}=2\int\frac{(u+2)-2}{u+2}du=2\int\left(1-\frac{2}{u+2}\right)du=2\left(u-2\ln|u+2|\right)+C_1.$$

Переходячи до змінної z, отримаємо

$$\sqrt{z}-2\ln\left(\sqrt{z}+2\right)=x+C, \qquad \text{де } C=\frac{C_1}{2}.$$

Повертаючись до вихідної змінної y, запишемо загальний інтеграл:

$$\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+C.$$

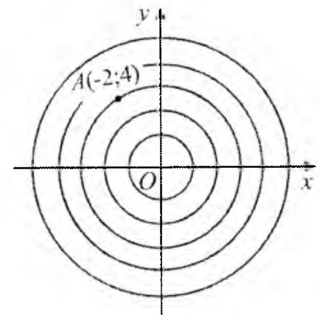
Приклад 17. Знайти інтегральну криву рівняння $yy'+x=0$, що проходить через точку $A(-2;4)$.

Розв'язання. Поставлено *задачу Коші*: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння за наявності початкової умови $x_0=-2$, $y_0=4$.

Відокремимо змінні і знайдемо загальний інтеграл:

$$y\frac{dy}{dx}+x=0 \quad\Rightarrow\quad ydy+xdx=0 \quad\Rightarrow\quad \int y\,dy+\int x\,dx=0,$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=C_1 \quad\Rightarrow\quad y^2+x^2=C, \quad C=2C_1.$$



Отримано сім'ю інтегральних кривих, що являють собою множину концентричних кіл із центром в початку координат і радіусом $R=\sqrt{C}$.

З початкової умови $y(-2)=4$ маємо:

$$4^2+(-2)^2=C \quad\Rightarrow\quad C=20.$$

Таким чином, шукана крива – коло

$$x^2+y^2=20.$$

Приклад 18. Крива $y=f(x)$ проходить через точку $(1;2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай $(x;y)$ – довільна точка заданої кривої. Рівняння дотичної, проведеної до кривої в цій точці, має вигляд:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

де X і Y – поточні координати точки дотичної.

З умови, що дотична перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою $2x$, знаходимо диференціальне рівняння:

$$1-y=\frac{dy}{dx}(2x-x) \quad\Rightarrow\quad x\frac{dy}{dx}=1-y.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, матимемо загальний розв'язок рівняння:

$$y=1+\frac{C}{x}.$$

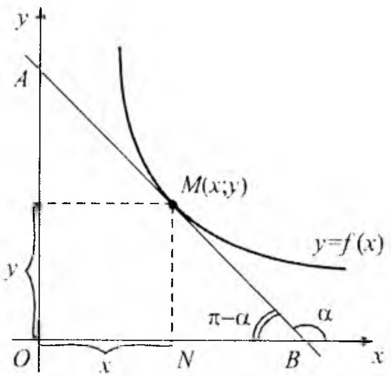
Залишилося знайти розв'язок *задачі Коші*. Шукана крива проходить через точку $(1;2)$, тому

$$2=1+\frac{C}{1} \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Отже, крива визначається рівнянням $y=1+\dfrac{1}{x}$.

Приклад 19. Знайти сім'ю інтегральних кривих, для яких відрізок дотичної, що лежить між координатними осями, ділиться навпіл у точці дотику. Скласти рівняння кривої сім'ї, що проходить через точку $M_0(3;4)$.

<u>*Розв'язання.*</u> На рисунку дотична до кривої перетинає координатні осі в точках A і B. Відповідно до умови $ON = x$, $MN = y$, $AM = MB$. Тоді $ON = NB$. Отже, $NB = MN \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$, тобто



$$x = \frac{y}{-\operatorname{tg}\alpha} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{y}{y'}.$$

Звідси $y' = -\frac{y}{x}$. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні й проінтегруємо:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Це сім'я гіпербол. Визначимо C. Використовуючи початкову умову $y(3) = 4$, знайдемо

$$4 = \frac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad C = 12.$$

Таким чином, шукана гіпербола задана рівнянням $y = \frac{12}{x}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Назвіть відомі вам фізичні закони, які записуються у формі диференціальних рівнянь.
2. Що називається *звичайним* диференціальним рівнянням?
3. Що називається *загальним розв'язком* диференціального рівняння?
4. Що розуміють під *загальним інтегралом* диференціального рівняння?
5. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням 1-*го порядку*? Чим визначається порядок диференціального рівняння?
6. Сформулювати *теорему існування і єдиності розв'язку* диференціального рівняння 1-го порядку.
7. Дати визначення *загального* й *частинного розв'язків* диференціального рівняння 1-го порядку.

8. Що називають *задачею Коші*? Яким є зміст *початкової умови* для диференціального рівняння 1-го порядку?
9. Дати *геометричну інтерпретацію* загального й частинного розв'язків диференціального рівняння 1-го порядку.
10. Чи завжди загальний розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку містить усі частинні розв'язки?
11. Який розв'язок називають *особливим* і чому?
12. У чому полягає процедура розв'язування диференціального рівняння?
13. Дати означення диференціального рівняння *з відокремлюваними змінними* і сформулювати метод його інтегрування.
14. Чи можна стверджувати, що через точку $(0;2)$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$?
15. Що можна сказати про порядок диференціального рівняння, якщо його загальний інтеграл має вигляд:

а) $\varphi(x, y, C) = 0$; **б)** $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$; 1.2. $2x^2yy' + y^2 = 2$;

1.3. $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$; 1.4. $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$;

1.5. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$; 1.6. $xy' = y^2 + 1$;

1.7. $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5+y^2}\,dx = 0$; 1.8. $(1+e^x)y' = ye^x$;

1.9. $3e^x \sin y\,dx + (1-e^x)\cos y\,dy = 0$; 1.10. $y' - y = 2x - 3$;

1.11. $(\cos(x-2y) + \cos(x+2y))y' = \frac{1}{\cos x}$; 1.12. $y' = (x+y)^2$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $dy = \sqrt[3]{y}dx$. Чи має це рівняння особливий розв'язок?

3. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих:

3.1. $y = Cx$; 3.2. $x^2 - y^2 = Cx$;

3.3. $y = Cx + C^2$; 3.4. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$;

3.5. $y = Cx^2$; 3.6. $y = Ce^x$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкову умову:

4.1. $e^x dx - \left(1+e^x\right) y dy = 0$, $\quad y(0)=1$;

4.2. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $\quad y(0)=-1$;

4.3. $\left(1+e^{2x}\right) y^2 y' = e^x$, $\quad y(0)=1$;

4.4. $\left(1+x^3\right) y' = 3x^2 y$, $\quad y(0)=1$;

4.5. $(x+2y) y' = 1$, $\quad y(0)=-1$;

4.6. $\left(x^2+1\right) dy = \left(y^2-1\right) dx$, $\quad y(\pi/4)=0$;

4.7. $2yy'\sqrt{1-x^2} - e^{y^2} = 0$, $\quad y(0)=0$;

4.8. $y'e^x = x$, $\quad y(0)=-1$;

4.9. $y' + y\sin 2x = 0$, $\quad y(\pi/4)=1$;

4.10. $e^x\left(1+e^y\right) + y'e^y\left(1+e^x\right) = 0$, $\quad y(0)=0$;

4.11. $1+y^2 = y'\sqrt{x}$, $\quad y\left(\pi^2/4\right)=0$.

5. Чи є функція $y=\varphi(x,C)$, де C – довільна стала, розв'язком заданого диференціального рівняння:

5.1. $y = x^2\left(1+Ce^{1/x}\right)$, $\quad x^2 y' + (1-2x)y = x^2$;

5.2. $y = Ce^x - e^{-x}$, $\quad xy'' + 2y' - xy = 0$;

5.3. $y = \dfrac{2+Cx}{1+2x}$, $\quad 2\left(1+x^2 y'\right) = y - xy'$;

5.4. $y = Cx^2$, $\quad xy' - 2y = 0$;

5.5. $y = \sqrt{x^2+C}$, $\quad yy' = x$.

6. Чи є співвідношення $\Phi(x,y,C)=0$, де C – довільна стала, інтегралом заданого диференціального рівняння:

6.1. $x^2 + y^4 = Cy^2$, $\quad xy\,dx = \left(x^2 - y^4\right) dy$;

6.2. $y^3 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^3}$, $\quad xy^2 dy + y^3 dx = \dfrac{dx}{x}$;

6.3. $x = y^2 + Cy$, $\quad \left(x+y^2\right) dy = y dx$.

7. Визначити криву, що проходить через точку $A(-1;1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює квадрату ординати точки дотику.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$. **1.2.** $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$. **1.3.** $\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{4}\right| = C - 2\sin\dfrac{x}{2}$.

1.4. $\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right) = Cx^2$. **1.5.** $x^2 + t^2 - 2t = C$. **1.6.** $\operatorname{arctg} y = \ln|Cx|$.

1.7. $y = \pm\dfrac{1}{16}(C - \operatorname{arctg} x)^2 - 5$. **1.8.** $y = C\left(1+e^x\right)$. **1.9.** $\sin y = C\left(e^x - 1\right)^3$.

1.10. $2x + y - 1 = Ce^x$. **1.11.** $\sin 2y = \operatorname{tg} x + C$. **1.12.** $\operatorname{arctg}(x+y) = x + C$.

2. $y = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}(x-C)^3}$, $\quad y \equiv 0$ – особливий розв'язок. **3.1.** $y = xy'$.

3.2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$. **3.3.** $y = y'x + (y')^2$. **3.4.** $y'' - y' - 2y = 0$.

3.5. $xy' - 2y = 0$. **3.6.** $y' = y$. **4.1.** $y = \sqrt{1 + 2\ln\dfrac{1+e^x}{2}}$. **4.2.** $y = 2 - 3\cos x$.

4.3. $y = \sqrt[3]{1 - \dfrac{3\pi}{4} + 3\operatorname{arctg} e^x}$. **4.4.** $x = \sqrt{y} - 1$. **4.5.** $x + 2y + 2 = 0$.

4.6. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = \operatorname{arctg} x - 1$. **4.7.** $\arcsin x = 1 - e^{-y^2}$. **4.8.** $y = -e^{-x}(x+1)$.

4.9. $y = e^{\frac{\cos 2x}{2}}$. **4.10.** $y = \ln\left|\dfrac{3-e^x}{1+e^x}\right|$ **4.11.** $y = \operatorname{tg} 2\sqrt{x}$. **5.1.** Так.

5.2. Немає. **5.3.** Так. **5.4.** Так. **5.5.** Так. **6.1.** Так. **6.2.** Немає. **6.3.** Так. **7.** $xy = -1$.

§ 11.2. ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ Й ТАКІ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО НИХ

Функція $f(x;y)$ називається *однорідною* функцією n-го виміру (n – натуральне число), якщо при будь-якому k справедливою є тотожність:

$$f(kx;ky) \equiv k^n f(x;y). \qquad (11.2.1)$$

Диференціальне рівняння 1-го порядку $y' = f(x;y)$ називається *однорідним* відносно шуканої функції y і аргументу x, якщо $f(x;y)$ є однорідною функцією нульового виміру відносно y і x.

I. Однорідне диференціальне рівняння

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (11.2.2)$$

де $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ – однорідні функції однакового виміру, може бути перетворене до рівняння, права частина якого є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (11.2.3)$$

За допомогою підстановки $\frac{y}{x} = t(x)$ однорідні рівняння (11.2.2) і (11.2.3) зводяться до рівняння з *відокремлюваними змінними*.

II. Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \qquad (11.2.4)$$

зводиться до однорідного рівняння за допомогою перенесення початку координат у точку перетину прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $ax + by + c = 0$.

Якщо ж прямі не перетинаються, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$, рівняння набуває вигляду $y' = F(ax + by)$ і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $z = ax + by$ або $z = ax + by + c$.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задану початкову умову (*задача Коші*):

$$xy' = y + \frac{x}{\sin y/x}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x $(x \neq 0)$:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin y/x}.$$

Одержали однорідне рівняння вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Для його розв'язання введемо нову функцію

$$t(x) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = t(x)\cdot x, \qquad y' = t'x + t.$$

У результаті цієї заміни одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t'x + t = t + \frac{1}{\sin t},$$

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{1}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \sin t dt = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо його:

$$\int \sin t\, dt = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\cos t = \ln|x| + C,$$

звідки

$$-\cos\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Скористаємося початковою умовою для визначення C:

$$-\cos\frac{\pi}{2} = \ln 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$\ln x = -\cos\frac{y}{x}.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задану початкову умову (*задача Коші*):

$$xy' = y\ln\frac{x}{y}, \qquad y(1) = e^{-1}.$$

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння до вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, для чого поділимо обидві його частини на x $(x \neq 0)$:

$$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y}.$$

Поклавши $\frac{y}{x} = t$, одержимо $y = tx$, $y' = t'x + t$ і $\frac{x}{y} = \frac{1}{t}$. Підставимо в останнє рівняння замість y', $\frac{y}{x}$ і $\frac{x}{y}$ відповідні вирази:

$$t'x + t = t\ln\frac{1}{t}.$$

З урахуванням того, що $\ln\frac{1}{t}=-\ln t$, маємо

$$t'x=-t\ln t-t \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dx}x=-t(\ln t+1).$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні, проінтегруємо:

$$\int\frac{dt}{t(\ln t+1)}=-\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{d(\ln t+1)}{\ln t+1}=-\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|\ln t+1|=-\ln|x|+\ln C,$$

звідки

$$\ln t+1=\frac{C}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln t=\frac{C}{x}-1 \quad\Rightarrow\quad t=e^{\frac{C}{x}-1}.$$

Виконуючи обернену заміну $t=\frac{y}{x}$, отримаємо *загальний розв'язок* рівняння:

$$\frac{y}{x}=e^{\frac{C}{x}-1} \quad\Rightarrow\quad y=xe^{\frac{C}{x}-1}.$$

Визначимо довільну сталу C, скориставшись початковою умовою:

$$y(1)=e^{-1} \quad\Rightarrow\quad e^{-1}=e^{C-1} \quad\Rightarrow\quad C=0.$$

Підставляючи це значення в загальний розв'язок, знайдемо шуканий *частинний розв'язок*

$$y=xe^{-1}.$$

Приклад 3. Знайти сім'ю інтегральних кривих рівняння

$$\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0.$$

Розв'язання. У цьому випадку $P(x;y)=x^2-y^2$ і $Q(x;y)=2xy$. Легко помітити, що обидві функції є однорідними функціями виміру 2, отже, маємо однорідне рівняння.

Поділимо рівняння на x^2dx:

$$1-\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}\cdot y'=0.$$

Тепер виконаємо заміну змінної $\frac{y}{x}=t$. Звідки

$$y=tx \quad\Rightarrow\quad y'=t'x+t.$$

У результаті підстановки приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$1-t^2+2t(t'x+t)=0 \quad\Rightarrow\quad \left(1+t^2\right)dx+2tx\,dt=0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2tdt}{1+t^2}.$$

При цьому сума квадратів $1+t^2\neq 0$, а $x=0$ – очевидний розв'язок.

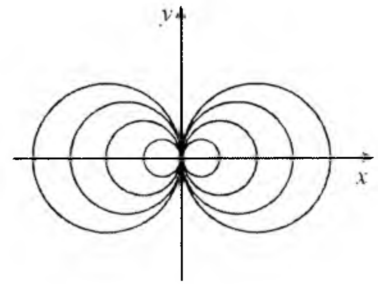
Інтегруємо отриманий вираз

$$\ln|x|=-\ln\left(1+t^2\right)+\ln C$$

і потенціюємо:

$$x\left(1+t^2\right)=C.$$

При $C=0$ звідси одержуємо $x=0$, тобто втрати розв'язку немає.



Виконаємо тепер обернену заміну змінної $t=\frac{y}{x}$:

$$x^2+y^2=Cx.$$

Виділяючи повний квадрат за змінною x, легко знайти канонічне рівняння сім'ї інтегральних кривих:

$$\left(x-\frac{C}{2}\right)^2+y^2=\frac{C^2}{4}.$$

Це сім'я кіл з радіусами $\frac{C}{2}$ і центрами в точках $\left(\frac{C}{2};0\right)$. Кола дотикаються до осі ординат в початку координат, тобто через початок координат $(0;0)$ проходить множина інтегральних кривих. Оскільки сталі C можуть набувати як додатних, так і від'ємних значень, то центри кіл симетричні відносно початку координат.

Точка $O(0;0)$ є *особливою* для заданого рівняння, оскільки через неї проходить множина інтегральних кривих.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

Розв'язання. Тут $P(x;y)=x-y$ і $Q(x;y)=x+y$. Обидві функції – однорідні першого виміру, отже, рівняння однорідне.

Введемо функцію t, поклавши $\frac{y}{x}=t$, звідки $y=tx$ і $dy=xdt+tdx$. Задане рівняння перетвориться до рівняння з відокремлюваними змінними в такий спосіб:

$$(x-xt)dx+(x+tx)(xdt+tdx)=0 \quad\Rightarrow\quad x\left[(1-t)dx+(1+t)(xdt+tdx)\right]=0,$$

оскільки $x\neq 0$, то

$$\left(1-t+t+t^2\right)dx+\left(1+t\right)xdt=0,$$

$$\left(1+t^2\right)dx+\left(1+t\right)xdt=0.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1+t}{1+t^2}dt \quad\Rightarrow\quad \ln|x|=-\operatorname{arctg} t-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C.$$

Виконуючи обернену заміну $t=\dfrac{y}{x}$, знайдемо:

$$\ln|x|=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+C,$$

$$\ln|x|=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\ln|x|+C,$$

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\left(x^2+y^2\right)=C_1, \qquad \text{де } C_1=2C.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx-\left(3y^2+2xy-x^2\right)dy=0.$$

<u>Розв'язання.</u> Перетворимо задане рівняння до вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+2xy-y^2}{3y^2+2xy-x^2}.$$

Поділимо чисельник і знаменник правої частини рівняння на x^2:

$$y'=\frac{3+2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\dfrac{y}{x}-1}.$$

У правій частині дістали однорідну функцію нульового виміру. Отже, маємо однорідне рівняння. Введемо нову функцію $t=\dfrac{y}{x}$, звідки $y=tx$, $y'=t'x+t$. Тоді

$$t'x+t=\frac{3+2t-t^2}{3t^2+2t-1}.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t'x=\frac{3+2t-t^2}{3t^2+2t-1}-t \quad\Rightarrow\quad t'x=\frac{-3t^3-3t^2+3t+3}{3t^2+2t-1}.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{3t^2+2t-1}{-3\left(t^3+t^2-t-1\right)}dt=\frac{dx}{x}$$

і проінтегруємо:

$$-\frac{1}{3}\int\frac{3t^2+2t-1}{\left(t^3+t^2-t-1\right)}dt=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{3}\ln\left|t^3+t^2+t-1\right|=\ln|x|+\ln C.$$

Звідси

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+t^2-t-1}}=Cx \quad\Rightarrow\quad t^3+t^2-t-1=\frac{C_1}{x^3}, \qquad \text{де } C_1=\frac{1}{C^3}.$$

Замінивши в останній рівності t на $\dfrac{y}{x}$, матимемо остаточно:

$$\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}-1=\frac{C_1}{x^3} \qquad \text{або} \qquad y^3+xy^2-x^2y-x^3=C_1.$$

Зауваження 1. У деяких випадках при розв'язуванні однорідних диференціальних рівнянь 1-го порядку зручно x вважати функцією від y і користуватися підстановкою $t(y)=\dfrac{x(y)}{y}$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y\,dx-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0.$$

<u>Розв'язання.</u> Тут $P(x;y)=y$, $Q(x;y)=-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Обидві функції – однорідні першого виміру, отже, рівняння однорідне.

Перший спосіб. Поділимо обидві частини рівняння на $x\,dx$:

$$\frac{y}{x}-\left(1+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)y'=0, \qquad x>0.$$

За допомогою стандартної заміни $\dfrac{y}{x}=t$ це однорідне рівняння зведемо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t-\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)\left(t'x+t\right)=0 \quad\Rightarrow\quad t'x\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)=-t\sqrt{1+t^2}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dt}{dx}x\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)=-t\sqrt{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}dt=-\int\frac{dx}{x}.$$

Інтеграл зліва обчислимо окремо, виконуючи заміну змінної:

$$\sqrt{1+t^2}=z \quad\Rightarrow\quad 1+t^2=z^2 \quad\Rightarrow\quad t^2=z^2-1 \quad\Rightarrow\quad t\,dt=z\,dz.$$

Маємо:

$$\int\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t\sqrt{1+t^2}}dt=\int\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t^2\sqrt{1+t^2}}t\,dt=\int\frac{(1+z)z\,dz}{(z^2-1)z}=\int\frac{dz}{z-1}=$$

$$=\ln|z-1|-\ln C=\ln\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)-\ln C.$$

Розв'язок диференціального рівняння набуває вигляду:

$$\ln\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)-\ln C=-\ln x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{1+t^2}-1=\frac{C}{x}.$$

Виконаємо обернену заміну $t=\frac{y}{x}$:

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}-1=\frac{C}{x}.$$

Спрощуючи, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\sqrt{x^2+y^2}-x=C.$$

З останнього виразу можна явно виразити y як функцію x і C, тобто знайти загальний розв'язок:

$$x^2+y^2=(C+x)^2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{C^2+2Cx}.$$

Інтегральні криві цього рівняння – висхідні вітки парабол зі змінним параметром C, вершини яких зміщені вгору по осі ординат на C^2.

Другий спосіб. Поділимо рівняння на ydy і перетворимо його в такий спосіб:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}, \qquad y>0.$$

Введемо змінну t, поклавши на цей раз, що $\frac{x(y)}{y}=t(y)$, звідки

$$x(y)=t(y)\cdot y \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{dt}{dy}y+t.$$

Тоді

$$\frac{dt}{dy}y+t=t+\sqrt{t^2+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dy}y=\sqrt{t^2+1}.$$

Легко помітити, що в останньому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{dy}{y}.$$

Інтегруючи, маємо

$$\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)=\ln|y|+\ln C \quad\Rightarrow\quad t+\sqrt{t^2+1}=Cy.$$

Виконуючи обернену заміну $t=\frac{x}{y}$, знайдемо

$$\frac{x}{y}+\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}=Cy \quad\Rightarrow\quad x+\sqrt{x^2+y^2}=Cy^2.$$

Остання рівність є загальним інтегралом рівняння. Перетворюючи його, дістаємо

$$y^2=\frac{1}{C^2}-\frac{2x}{C},$$

що з точністю до позначення сталої інтегрування збігається з попереднім результатом.

Зауваження 2. Перевага другого способу розв'язання даного рівняння полягає в тому, що в другому випадку одержали простіше рівняння з відокремлюваними змінними і табличні інтеграли.

Приклад 7. Знайти криву, що проходить через точку $A(1;-1)$, якщо відомо, що добуток абсциси будь-якої точки кривої на кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в цій точці дорівнює потроєній сумі координат заданої точки.

Розв'язання. Щоб знайти рівняння кривої, що задовольняє задані умови, слід спочатку скласти відповідне диференціальне рівняння. Будемо виходити з того, що $y=f(x)$ – шукана крива, а $M(x;y)$ – поточна точка кривої.

Відповідно до умови задачі

$$x\cdot y'=3(x+y).$$

Це однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку, яке зручно представити у вигляді:

$$y'=3\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

Виконавши заміну $\frac{y}{x}=t$, $y=tx$ і $y'=t'x+t$, одержимо:

$$t'x+t=3(1+t) \quad\Rightarrow\quad t'x=3+2t.$$

В останньому рівнянні змінні відокремлюються. Інтегруємо його:

$$\frac{dt}{dx}x=3+2t \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dt}{3+2t}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln|3+2t|=\ln|x|+\ln C.$$

Після потенціювання матимемо:

$$\sqrt{3+2t}=Cx.$$

Тепер виконаємо обернену заміну $t=\frac{y}{x}$ і запишемо *загальний інтеграл*:

$$\sqrt{3+\frac{2y}{x}}=Cx,$$

який визначає сім'ю інтегральних кривих. Використовуючи початкову умову, знайдемо ту з інтегральних кривих, що проходить через точку $A(1;-1)$:

$$\sqrt{3-2}=C \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Отже, шукана крива задається рівнянням

$$\sqrt{3+\frac{2y}{x}}=x \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}\left(x^3-3x\right).$$

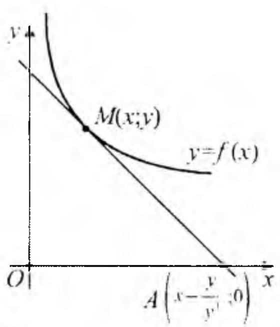
Приклад 8. Знайти криву, для якої точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.

Розв'язання. Складемо рівняння дотичної до кривої $y'=y(x)$ (див. частину 1, § 5.1)

$$Y=y+y'(X-x),$$

де X і Y – поточні координати дотичної; x і y – координати точки дотику.

Нехай A – точка перетину дотичної з віссю Ox. Знайдемо її координати. Якщо $Y=0$, то $X=x-\frac{y}{y'}$. Тоді за умовою задачі $MA=AO$, тобто



$$\sqrt{\left(x-x+\frac{y}{y'}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{y}{y'}\right)^2},$$

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=x^2-\frac{2xy}{y'}+\left(\frac{y}{y'}\right)^2,$$

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Це однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Виконаємо стандартну заміну $y=tx$:

$$t'x+t=\frac{2tx^2}{x^2-t^2x^2} \quad\Rightarrow\quad t'x+t=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$t'x=\frac{2t}{1-t^2}-t \quad\Rightarrow\quad t'x=\frac{2t-t+t^3}{1-t^2},$$

$$t'x=\frac{t+t^3}{1-t^2}.$$

Тепер маємо рівняння з відокремлюваними змінними, тому

$$\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t\left(1+t^2\right)}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{1-t^2}{t\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{dx}{x}.$$

Для обчислення інтеграла зліва додамо і віднімемо в чисельнику t^2:

$$\int\frac{\left(1+t^2\right)-2t^2}{t\left(1+t^2\right)}dt=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{2t\,dt}{1+t^2}.$$

Тоді

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2t}{1+t^2}\right)dt=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|t|-\ln\left(1+t^2\right)=\ln|x|+\ln C,$$

$$\frac{t}{1+t^2}=Cx \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=Cx,$$

$$\frac{yx}{x^2+y^2}=Cx \quad\Rightarrow\quad y=C\left(x^2+y^2\right).$$

Отримали сім'ю кривих $y=C\left(x^2+y^2\right)$, що задовольняє задану умову. Перетворюючи її до вигляду

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2C}\right)^2=\frac{1}{4C^2},$$

бачимо, що це сім'я кіл, центри яких заповнюють вісь ординат, причому кожне коло дотикається до початку координат (порівняй з прикладом 3).

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$(x+y-3)dy+(2x-4y+6)dx=0.$$

Розв'язання. Задано рівняння вигляду (11.2.4). Зведемо його до однорідного рівняння. Для цього знайдемо координати точки перетину прямих $2x-4y+6=0$ і $x+y-3=0$, розв'язуючи систему рівнянь:
$$\begin{cases} x-2y=-3, \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2; \\ x=1. \end{array}\right.$$
Прямі перетинаються в точці $(1;2)$.

Введемо нові змінні u і v так, щоб початок системи координат uOv співпадав з точкою перетину цих прямих:
$$u=x-1, \qquad v=y-2.$$
Дійсно, якщо $x=1$, $y=2$, то $u=0$, $v=0$. Інакше кажучи, виконана заміна змінних:
$$x=1+u, \qquad y=2+v \quad \Rightarrow \quad dx=du, \qquad dy=dv.$$
У нових змінних задане рівняння зводиться до вигляду:
$$(1+u+2+v-3)dv+(2+2u-8-4v+6)du=0,$$
$$(u+v)dv+(2u-4v)du=0$$
або
$$v'=\frac{4v-2u}{u+v} \quad \Rightarrow \quad v'=\frac{4\frac{v}{u}-2}{1+\frac{v}{u}}.$$
Отримане рівняння є однорідним відносно u і v, тому покладемо:
$$\frac{v}{u}=t \quad \Rightarrow \quad v(u)=tu \quad \Rightarrow \quad v'=t'u+t.$$
Тоді
$$t'u+t=\frac{4t-2}{1+t} \quad \Rightarrow \quad t'u=\frac{4t-2}{1+t}-t \quad \Rightarrow \quad t'u=-\frac{t^2-3t+2}{1+t}.$$
В останньому рівнянні змінні відокремлюються:
$$-\frac{(1+t)dt}{t^2-3t+2}=\frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad -\int\frac{1+t}{t^2-3t+2}dt=\int\frac{du}{u},$$
$$-\int\frac{1+t}{(t-1)(t-2)}dt=\int\frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{3}{t-2}\right)dt=\int\frac{du}{u},$$
$$2\ln|t-1|-3\ln|t-2|=\ln|u|+\ln C,$$

звідки
$$Cu=\frac{(t-1)^2}{(t-2)^3}.$$
Після оберненої заміни $t=\frac{v}{u}$ матимемо
$$Cu=\frac{\left(\frac{v}{u}-1\right)^2}{\left(\frac{v}{u}-2\right)^3} \quad \Rightarrow \quad Cu=\frac{(v-u)^2\cdot u}{(v-2u)^3} \quad \Rightarrow \quad C(v-2u)^3=(v-u)^2,$$
а повертаючись до вихідних змінних x і y за формулами $v=y-2$, $u=x-1$, знайдемо:
$$C(y-2-2x+2)^3=(y-2-x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad C(y-2x)^3=(y-x-1)^2.$$

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0.$$

Розв'язання. Легко переконатися, що прямі $2x+y+1=0$ і $4x+2y-3=0$ не перетинаються. Тому в заданому рівнянні виконаємо заміну $z=2x+y$. Тоді $dz=2dx+dy$ і рівняння набуває вигляду:
$$(z+1)dx-(2z-3)(dz-2dx)=0 \quad \Rightarrow \quad 5(z-1)dx=(2z-3)dz.$$
Це рівняння з відокремлюваними змінними:
$$5dx=\frac{2z-3}{z-1}dz \quad \Rightarrow \quad 5\int dx=\int\left(2-\frac{1}{z-1}\right)dz,$$
$$5x=2z-\ln|z-1|+\ln C \quad \Rightarrow \quad 2z-5x=\ln\frac{|z-1|}{C},$$
$$z-1=Ce^{2z-5x}.$$
Повертаючись до вихідних змінних, знаходимо
$$2x+y-1=Ce^{2(2x+y)-5x} \quad \Rightarrow \quad 2x+y-1=Ce^{2y-x}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка функція називається *однорідною*?
2. Що можна сказати про деяку функцію, якщо вона отримана в результаті:
   а) додавання двох однорідних функцій одного виміру?
   б) добутку однорідних функцій одного виміру?

в) ділення однорідних функцій одного виміру?

3. Чи є наведені нижче функції однорідними? Якщо так, то вкажіть ступінь (вимір) однорідності:

3.1. $\dfrac{4x^2-xy+y^2}{2y+x}$; 3.2. $\dfrac{\left(\sqrt{xy}+2y\right)^3}{x^2+y^2}$;

3.3. $\ln\dfrac{2x+y}{3x+5y}$; 3.4. $\ln\dfrac{x}{y}+4x$;

3.5. $x\ln\dfrac{2x}{y}-y$.

4. Дати означення *однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.*

5. Вказати й обґрунтувати *метод* знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.

6. Диференціальне рівняння записане у вигляді $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$:

а) за якої умови це рівняння буде *однорідним*?

б) у якому випадку воно є рівнянням *з відокремлюваними змінними*?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

1.1. $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$, $y(1)=0$;

1.2. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$, $y(2)=\pi$;

1.3. $y\,dx+\left(\sqrt{xy}-x\right)dy=0$, $y(1)=1$;

1.4. $(xy'-y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x$, $y(1)=0$;

1.5. $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $y(1)=-1$.

2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

2.1. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+9\dfrac{y}{x}+9$; 2.2. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$;

2.3. $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$; 2.4. $x^2y'=y(x+y)$;

2.5. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$; 2.6. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$;

2.7. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$; 2.8. $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$;

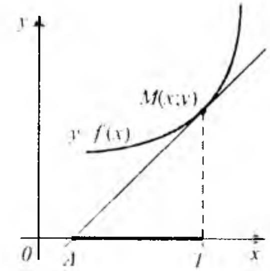
2.9. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$; 2.10. $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$;

2.11. $(x+4y)y'=2x+3y-5$; 2.12. $x-y-1+(y-x+2)y'=0$.

3. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;0)$, для якої відрізок на осі ординат, який відтинається будь-якою дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.

4. Знайти криву, яка проходить через точку $(2;1)$, знаючи, що кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює квадрату кутового коефіцієнта радіуса-вектора точки дотику.

5. Визначити криву, що проходить через точку $M(4;3)$, якщо *піддотична* AT будь-якої її точки є середнім арифметичним координат точки дотику.



(*Вказівка. Піддотичною* називається проекція відрізка дотичної, розташованого між точкою дотику й точкою перетину з віссю Ox, на вісь абсцис).

ВІДПОВІДІ

1.1. $y=\dfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)$. **1.2.** $y=2x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. **1.3.** $2-\ln|y|=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

1.4. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **1.5.** $y=-x$. **2.1.** $y=x-\dfrac{3x}{C+\ln|x|}$.

2.2. $y^2=x^2\ln(Cx)^2$. **2.3.** $y^2-x^2=Cx$, $y=0$. **2.4.** $y=-\dfrac{x}{\ln(Cx)}$.

2.5. $e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx$. **2.6.** $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$, $y=0$. **2.7.** $x\ln Cx=2\sqrt{xy}$, $y=0$.

2.8. $\sin\dfrac{y}{x}+\ln|x|+C$. **2.9.** $y=xe^{1+Cx}$. **2.10.** $x^2+y^2=Cy$, $y=0$.

2.11. $(y-x+5)^5(x+2y-2)=C$. **2.12.** $(y-x+2)^2+2x=C$. **3.** $y=-x\ln x$.

4. $y=\dfrac{2x}{2+x}$. **5.** $y=3(x-y)^2$.

§ 11.3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

I. *Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку* називається рівняння лінійне відносно невідомої функції y і її похідної y':

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (11.3.1)$$

Тут $p(x)$ і $q(x)$ – неперервні функції.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння (11.3.1) набуває вигляду

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (11.3.2)$$

і називається *лінійним однорідним*. Воно є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

і має загальний розв'язок

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (11.3.3)$$

II. *Метод Бернуллі.* Розв'язок лінійного диференціального рівняння (11.3.1) шукатимемо у вигляді добутку двох функцій:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x), \qquad (11.3.4)$$

диференціюючи який

$$y' = u'v + v'u$$

і підставляючи в рівняння (11.3.1), матимемо:

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x). \qquad (A)$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб дужка в лівій частині рівняння (A) перетворилася в нуль. Це приводить до системи двох рівнянь для функцій $v(x)$ і $u(x)$:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, & (1) \\ u'v = q(x). & (2) \end{cases} \qquad (B)$$

Перше з них є лінійним однорідним рівнянням вигляду (11.3.2) із загальним розв'язком:

$$v(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}.$$

Підставляючи знайдену функцію $v(x)$ у друге рівняння системи (B), отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} C_1 e^{-\int p(x)dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{C_1} q(x)\cdot e^{\int p(x)dx},$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$u(x) = \frac{1}{C_1}\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_2.$$

У підсумку знаходимо *загальний розв'язок* лінійного диференціального рівняння (11.3.1):

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx, \qquad C = C_1C_2.$$

Процедура розв'язування лінійних диференціальних рівнянь *методом Бернуллі* припускає використання вказаного алгоритму, а не визначеної формули.

III. *Метод Лагранжа* (*метод варіації довільної сталої*). Спочатку інтегруємо лінійне однорідне рівняння (11.3.2), розв'язок якого дається формулою (11.3.3). Далі припускаємо, що

$$y(x) = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (*)$$

де замість сталої C введена невідома функція $C(x)$, що задовольняє неоднорідне рівняння (11.3.1). Диференціюючи вираз (*) за змінною x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot p(x)\,e^{-\int p(x)dx}$$

і підставляючи у вихідне рівняння (11.3.1), отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$:

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + \overline{C}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (*), дістаємо *загальний розв'язок* рівняння (11.3.1):

$$y(x) = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + \overline{C}\right)\cdot e^{-\int p(x)dx} = \overline{C}e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx, \qquad (11.3.5)$$

який являє собою суму загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння (11.3.3) і частинного розв'язку y^* заданого неоднорідного рівняння: $y = \overline{y} + y^*$.

При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь *методом Лагранжа* також слід використовувати наведений алгоритм, а не кінцеву формулу (11.3.5).

IV. *Рівнянням Бернуллі* називається диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad (11.3.6)$$

де $n \neq 1$ і $n \neq 0$ (при $n = 1$ рівняння (11.3.6) є рівнянням з відокремлюваними змінними, а при $n = 0$ – лінійним (11.3.1)).

Щоб знайти розв'язок рівняння (11.3.6), можна безпосередньо скористатися методом Бернуллі. Однак краще спочатку звести це рівняння до лінійного рівняння (11.3.1) за допомогою введення нової функції $z(x) = y^{-n+1}$, а потім застосувати або метод Бернуллі, або метод Лагранжа.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{5}{x}y = \frac{1}{x^2}$.

Розв'язання. Задане рівняння лінійне відносно шуканої функції y і її похідної y', тут $p(x) = -5/x$, $q(x) = 1/x^2$.

Дотримуючись *методу Бернуллі*, шукатимемо розв'язок у вигляді $y = u(x)\cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні функції від x.

Диференціюючи передбачуваний розв'язок, маємо:

$$y = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Підставимо тепер $y = uv$ і $y' = u'v + uv'$ у вихідне рівняння

$$u'v + uv' - \frac{5}{x}uv = \frac{1}{x^2}.$$

Для визначення двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ одного рівняння недостатньо. Оскільки одна з функцій, наприклад $v(x)$, може бути обрана довільно, визначимо її так, щоб коефіцієнт при функції $u(x)$ у виразі

$$u'v + u\left(v' - \frac{5}{x}v\right) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{(A)}$$

перетворився в нуль, тобто зажадаємо, щоб

$$v' - \frac{5}{x}v = 0.$$

У результаті рівняння (A) спрощується

$$u'v = \frac{1}{x^2}.$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{5}{x}v = 0, & (1) \\ u'v = \dfrac{1}{x^2}. & (2) \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

Оскільки рівняння (1) містить одну шукану функцію, то розв'язування системи (B) почнемо саме із цього рівняння. Це рівняння з відокремлюваними змінними, відокремивши які

$$v' = \frac{5}{x}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{5v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 5\frac{dx}{x}$$

і проінтегрувавши, одержимо

$$\int \frac{dv}{v} = 5\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 5\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v(x) = x^5.$$

Тут досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, тому ми прийняли сталу інтегрування $C = 0$. Найчастіше беруть частинний розв'язок саме при $C = 0$, щоб спростити подальше розв'язання.

Тепер підставимо функцію $v = x^5$ у друге рівняння системи (B). Знову отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u' \cdot x^5 = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^7},$$

інтегруючи яке, знайдемо:

$$\int du = \int x^{-7}dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{6x^6} + C.$$

Отже, *загальний розв'язок* заданого рівняння запишемо у вигляді:

$$y = u(x)\cdot v(x) = \left(-\frac{1}{6x^6} + C\right)\cdot x^5 \qquad \text{або} \qquad y = Cx^5 - \frac{1}{6x}.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задану початкову умову (*задача Коші*):

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}, \qquad y(0) = 1.$$

Розв'язання. Маємо рівняння лінійне відносно функції y і її похідної y'. Застосовуючи метод Бернуллі, покладемо $y = u(x)\cdot v(x)$ і знайдемо $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - v\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Підберемо функцію $v(x)$ так, щоб $v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, тоді $u'v = \dfrac{1}{\cos x}$. Отже, маємо систему двох рівнянь для визначення функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0, & (1) \\ u'v = \dfrac{1}{\cos x}. & (2) \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|\cos x|,$$

звідки

$$\ln|v| = \ln|\cos x|^{-1} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Підставимо функцію $v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int du = \int dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = x + C.$$

У результаті *загальний розв'язок* заданого рівняння

$$y = u(x)\cdot v(x) = \frac{x + C}{\cos x}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок. Підставляючи в загальний розв'язок початкову умову $y=1$ при $x=0$, знаходимо $C=1$. Таким чином, шуканий *частинний розв'язок* (розв'язок *задачі Коші*) має вигляд:

$$y=\frac{x+1}{\cos x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2y'+(1-2x)y=x^2$.

Розв'язання. Задано лінійне рівняння. Поділивши обидві частини рівняння на x^2, зведемо його до вигляду (11.3.1):

$$y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1.$$

Покладемо $y=uv$, тоді $y'=u'v+uv'$ і рівняння перетвориться на таке:

$$u'v+uv'+\frac{1-2x}{x^2}uv=1 \quad\Rightarrow\quad u'v+u\left(v'+\frac{1-2x}{x^2}v\right)=1.$$

Зажадавши $v'+\frac{1-2x}{x^2}v=0$, зведемо задане рівняння до системи:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{1-2x}{x^2}v=0, & (1)\\ u'v=1. & (2)\end{cases}$$

Інтегруємо перше рівняння:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2x-1}{x^2}v \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{2x-1}{x^2}dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|v|=2\ln|x|+\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln\frac{v}{x^2}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad v(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}.$$

Підставимо $v=x^2e^{1/x}$ у друге рівняння і проінтегруємо його:

$$u'x^2e^{1/x}=1 \quad\Rightarrow\quad \int du=\int\frac{dx}{x^2e^{1/x}},$$

$$u(x)=\int\frac{dx}{x^2e^{1/x}}=\int\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx=\left|\begin{matrix}-\dfrac{1}{x}=t\\ \dfrac{dx}{x^2}=dt\end{matrix}\right|=\int e^t dt=e^t+C=e^{-1/x}+C.$$

Таким чином, *загальним розв'язком* цього рівняння є функція:

$$y=u(x)\cdot v(x)=x^2\left(1+Ce^{1/x}\right).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$t\left(1+t^2\right)dx=\left(x+xt^2-t^2\right)dt,$$

який задовольняє умову $x|_{t=1}=-\frac{\pi}{4}$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на dt, потім виконаємо ділення на $t\left(1+t^2\right)$:

$$t\left(1+t^2\right)\frac{dx}{dt}=x\left(1+t^2\right)-t^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dt}-\frac{x}{t}=-\frac{t}{1+t^2}.$$

Одержали лінійне рівняння вигляду (11.3.1) *відносно функції* $x(t)$ і її похідної $\frac{dx}{dt}$. Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, поклавши $x=u(t)\cdot v(t)$, тоді $\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}v+u\frac{dv}{dt}$. Отже,

$$\frac{du}{dt}v+u\frac{dv}{dt}-\frac{uv}{t}=-\frac{t}{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dt}v+u\left(\frac{dv}{dt}-\frac{v}{t}\right)=-\frac{t}{1+t^2}.$$

Отримане рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}-\dfrac{v}{t}=0, & (1)\\ \dfrac{du}{dt}v=-\dfrac{t}{1+t^2}. & (2)\end{cases}$$

Інтегруємо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{v}{t} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dt}{t} \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=\ln|t| \quad\Rightarrow\quad v(t)=t.$$

Знайдену функцію $v=t$ підставимо в друге рівняння і визначимо його розв'язок:

$$\frac{du}{dt}t=-\frac{t}{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad \int du=-\int\frac{dt}{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad u(t)=-\operatorname{arctg}t+C.$$

Отже, *загальний розв'язок* цього рівняння має вигляд:

$$x=u(t)\cdot v(t)=(C-\operatorname{arctg}t)\cdot t.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, визначивши сталу C за допомогою початкової умови. Підставляючи $t=1$ і $x=-\frac{\pi}{4}$ у загальний розв'язок, маємо:

$$-\frac{\pi}{4}=C-\operatorname{arctg}1 \quad\Rightarrow\quad C=0, \qquad \text{оскільки } \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

При $C=0$ із загального розв'язку знаходимо $x=-t\,\mathrm{arctg}\,t$ – шуканий *частинний розв'язок* заданого рівняння (розв'язок *задачі Коші*).

Приклад 5. Розв'язати лінійні диференціальні рівняння методом варіації довільної сталої:

а) $x^2y'-5xy-1=0$; **б)** $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=1$.

Розв'язання. Обидва ці рівняння розв'язані нами раніше *методом Бернуллі* (див. приклади 1 і 2). Розв'яжемо тепер їх *методом Лагранжа*.

а) Спочатку знайдемо *загальний розв'язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$x^2y'-5xy=0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y}=\frac{5}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|y|=5\ln|x|+\ln C \quad\Rightarrow\quad y=Cx^5.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y=C(x)x^5, \qquad (*)$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x. Тоді

$$y'=C'(x)\cdot x^5+5x^4\cdot C(x).$$

Підставляючи y і y' у задане рівняння, одержимо:

$$C'(x)x^7+\cancel{5x^6C(x)}-\cancel{5C(x)x^6}-1=0.$$

Звідси знаходимо:

$$C'(x)\cdot x^7=1 \quad\Rightarrow\quad C'(x)=x^{-7} \quad\Rightarrow\quad C(x)=\frac{x^{-6}}{-6}+\bar{C}.$$

Підставивши знайдене значення функції $C(x)$ у вираз (*), отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння*:

$$y=x^5\left(-\frac{1}{6x^6}+\bar{C}\right) \quad\Rightarrow\quad y=\bar{y}+y^*=\bar{C}x^5-\frac{1}{6x}.$$

Тут $\bar{y}=\bar{C}x^5$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $y^*=-\dfrac{1}{6x}$ – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

б) Знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, що відповідає заданому неоднорідному:

$$y'-y\cdot\mathrm{tg}\,x=0.$$

У цьому рівнянні змінні відокремлюються:

$$\frac{dy}{y}=\mathrm{tg}\,x\,dx,$$

Інтегруючи, знаходимо *загальний розв'язок однорідного рівняння*:

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+\ln C \quad\Rightarrow\quad y=\frac{C}{\cos x}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y=\frac{C(x)}{\cos x}. \qquad (*)$$

Диференціюючи вираз (*), знайдемо

$$y'=\frac{C'(x)\cos x+C(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Підставивши значення y і y' у задане рівняння, матимемо:

$$\frac{C'(x)\cos x+C(x)\sin x}{\cos^2 x}-\frac{C(x)}{\cos x}\cdot\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x}+\cancel{\frac{C(x)}{\cos x}\cdot\mathrm{tg}x}-\cancel{\frac{C(x)}{\cos x}\cdot\mathrm{tg}x}=\frac{1}{\cos x}.$$

Звідси випливає:

$$C'(x)=1 \quad\Rightarrow\quad dC(x)=dx \quad\Rightarrow\quad C(x)=x+\bar{C}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (*), отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y=\frac{x+\bar{C}}{\cos x},$$

а з урахуванням початкової умови $y(0)=1$ визначимо *частинний розвязок*:

$$y=\frac{x+1}{\cos x}.$$

Зауваження. Деякі диференціальні рівняння стають лінійними, якщо поміняти місцями функцію й незалежну змінну.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1+y^2\right)dx=\left(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy\right)dy.$$

Розв'язання. Рівняння не є лінійним відносно функції $y(x)$, оскільки містить нелінійні члени y^2, $\sin y$.

Перевіримо, чи не є воно лінійним відносно функції $x(y)$. Поділимо обидві частини рівняння на dy, перенесемо xy вліво і виконаємо ділення на $(1+y^2)$:

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy}=\sqrt{1+y^2}\sin y-xy \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}-\frac{xy}{1+y^2}=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Дійсно, маємо лінійне рівняння *відносно функції* $x(y)$. Для його розв'язання природно скористатися методом Бернуллі, поклавши:

$$x=u(y)\cdot v(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}-\frac{uvy}{1+y^2}=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{vy}{1+y^2}\right)=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Складемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{vy}{1+y^2}=0, & (1)\\[2ex] \dfrac{du}{dy}v=\dfrac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}. & (2)\end{cases}$$

Інтегруємо перше з них і визначаємо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy}=\frac{vy}{1+y^2} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{y\,dy}{1+y^2} \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| \quad\Rightarrow\quad v(y)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Із другого рівняння системи, з урахуванням $v=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, матимемо:

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \quad\Rightarrow\quad \int du=\int\sin y\,dy \quad\Rightarrow\quad u(y)=-\cos y+C.$$

У результаті *загальний розв'язок* заданого рівняння запишемо у вигляді

$$x=u(y)v(y)=\frac{C-\cos y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'+2y-y^2=0$.

<u>*Розв'язання.*</u> Поділимо обидві частини рівняння на x (припускаючи, що $x\neq 0$):

$$y'+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x}y^2.$$

Це – *рівняння Бернуллі* (11.3.6). Відповідно до рекомендації зведемо це рівняння до лінійного, для чого спочатку поділимо обидві частини рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad y'y^{-2}+\frac{2}{x}y^{-1}=\frac{1}{x} \qquad (A)$$

і введемо нову змінну

$$z(x)=y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$\frac{dz}{dx}\equiv z'=-y^{-2}\cdot y' \quad\Rightarrow\quad y'y^{-2}=-z'.$$

Переходячи в рівнянні (A) до нової змінної z, матимемо:

$$-z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad z'-\frac{2}{x}z=-\frac{1}{x}. \qquad (B)$$

Це *лінійне рівняння 1-го порядку* відносно функції $z(x)$, і для знаходження його загального розв'язку скористаємося методом Бернуллі, поклавши

$$z=u(x)\cdot v(x) \quad\Rightarrow\quad z'=u'v+uv'.$$

Підставляючи z' і z у рівняння (B), маємо:

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad u'v+u\left(v'-\frac{2}{x}v\right)=-\frac{1}{x}. \qquad (C)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ таку, що $v'-\dfrac{2}{x}v=0$, внаслідок чого рівняння (C) зводиться до системи:

$$\begin{cases}v'-\dfrac{2}{x}v=0, & (1)\\[2ex] u'v=-\dfrac{1}{x}. & (2)\end{cases}$$

Відокремлюючи змінні в рівнянні (1) і інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dv}{v}=\frac{2}{x}dx \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=2\ln|x| \quad\Rightarrow\quad v(x)=x^2.$$

Підставимо функцію $v(x)=x^2$ у рівняння (2):

$$u'x^2=-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad u'=-\frac{1}{x^3}.$$

Інтегруючи це рівняння, визначимо функцію $u(x)$:

$$du=-\frac{dx}{x^3} \quad\Rightarrow\quad \int du=-\int\frac{dx}{x^3} \quad\Rightarrow\quad u(x)=\frac{1}{2x^2}+C.$$

У результаті знаходимо загальний розв'язок *лінійного рівняння* (B):

$$z = u(x)\cdot v(x) = x^2\left(\frac{1}{2x^2} + C\right) = \frac{1}{2} + Cx^2.$$

Щоб записати розв'язок рівняння (A), слід повернутися до змінної y. Оскільки $z = 1/y$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} + Cx^2 \quad \text{або} \quad y = \frac{2}{1+2Cx^2}.$$

Це і є *загальний розв'язок* заданого рівняння Бернуллі.

Можна легко розв'язати це рівняння і безпосередньо *методом Бернуллі*, що ми й рекомендуємо зробити самостійно.

Приклад 8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = y^4\left(1-x^2\right)$$

за умови $y(1) = 1$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Задано *рівняння Бернуллі*. Поділимо обидві частини рівняння на y^4:

$$y'y^{-4} + \frac{1}{x}y^{-3} = 1 - x^2. \qquad (A)$$

Застосуємо підстановку $z = y^{-3}$, звідки

$$z' = -3y^{-4}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-4}y' = -\frac{z'}{3}.$$

Для функції $z(x)$ дістали рівняння:

$$-\frac{z'}{3} + \frac{1}{x}z = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{3}{x}z = 3\left(x^2-1\right). \qquad (B)$$

Це лінійне рівняння, для розв'язку якого може бути застосований метод Бернуллі:

$$z = u(x)\cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv'.$$

Рівняння (B) набуде вигляду:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = 3\left(x^2-1\right) \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}v\right) = 3\left(x^2-1\right).$$

Підбираючи $v(x)$ так, щоб коефіцієнт при $u(x)$ перетворився в нуль, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3}{x}v = 0, & (1) \\ u'v = 3\left(x^2-1\right). & (2) \end{cases}$$

Відокремимо змінні в рівнянні (1) і проінтегруємо:

$$v' = \frac{3v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dv}{v} = 3\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 3\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v(x) = x^3.$$

З урахуванням знайденої функції $v(x)$ із другого рівняння системи знаходимо:

$$u' = 3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \int du = 3\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = 3\left(\ln|x| + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

Отже, розв'язок рівняння (B) має вигляд:

$$z = u(x)\cdot v(x) = x^3\left[3\left(\ln|x| + \frac{1}{2x^2}\right) + C\right] = 3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x + Cx.$$

Виконаємо обернену заміну змінної. Оскільки $z = \dfrac{1}{y^3}$, то

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x + Cx^3}}.$$

Це *загальний розв'язок* заданого рівняння. Щоб знайти його частинний розв'язок, слід знайти значення сталої C, скориставшись початковою умовою $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3\cdot 1^3\ln 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 + C\cdot 1^3}} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2} + C}} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Тоді шуканий *частинний розв'язок*:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3x^3\ln|x| + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3}}.$$

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y\,dx + 2x\,dy = 2y\sqrt{x}\sec^2 y\,dy$$

за умови $y(0) = \pi$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Якщо поділити обидві частини рівняння на $y\,dy$, то матимемо рівняння Бернуллі відносно функції $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2x}{y} = 2\sqrt{x}\sec^2 y.$$

Застосуємо метод Бернуллі безпосередньо до заданого рівняння, поклавши

$$x=u(y)v(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}+\frac{2v}{y}\right)=2\sqrt{uv}\sec^2 y. \qquad \text{(A)}$$

Покладемо $\frac{dv}{dy}+\frac{2v}{y}=0$ і знайдемо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{2v}{y} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=-2\ln|y| \quad\Rightarrow\quad v=\frac{1}{y^2}.$$

Далі функцію $v=\frac{1}{y^2}$ підставимо в рівняння (A) і відокремимо змінні:

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{y^2}=2\sqrt{u}\cdot\frac{1}{y}\sec^2 y \quad\Rightarrow\quad \int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\int y\sec^2 y\,dy.$$

Інтеграл справа беремо частинами, попередньо замінивши $\sec y$ на $\frac{1}{\cos y}$:

$$\int y\sec^2 y\,dy=\int\frac{y\,dy}{\cos^2 y}=\left|\begin{matrix} u=y, & du=dy \\ dv=\dfrac{dy}{\cos^2 y}, & v=\operatorname{tg} y\end{matrix}\right|=y\operatorname{tg} y-\int\operatorname{tg} y\,dy=$$

$$=y\operatorname{tg} y+\ln|\cos y|+C.$$

У результаті знаходимо функцію $u(y)$:

$$\sqrt{u}=y\operatorname{tg} y+\ln|\cos y|+C. \qquad u=\left(y\operatorname{tg} y+\ln|\cos y|+C\right)^2.$$

Отже, *загальний розв'язок* рівняння має вигляд:

$$x(y)=u(y)v(y)=\left(y\operatorname{tg} y+\ln|\cos y|+C\right)^2\cdot\frac{1}{y^2}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що заовольняє початкову умову $x=0$ при $y=\pi$:

$$0=\left(\pi\operatorname{tg}\pi+\ln|\cos\pi|+C\right)^2\cdot\frac{1}{\pi^2} \quad\Rightarrow\quad C=0,$$

оскільки $\operatorname{tg}\pi=0$, $\ln 1=0$. Отже, *частинний розв'язок* заданого рівняння має вигляд:

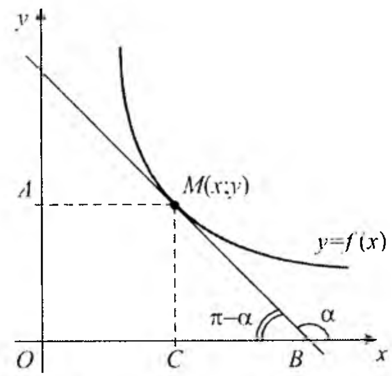
$$x=\frac{\left(y\operatorname{tg} y+\ln|\cos y|\right)^2}{y^2}.$$

Приклад 10. Знайти криві, для яких площа трапеції, обмеженої осями координат, дотичною і відрізком прямої, що проходить через точку дотику паралельно осі Ox, є величиною сталою і дорівнює $3a^2$.

Розв'язання. Відповідно до умови

$$S_{OAMB}=\frac{AM+OB}{2}\cdot OA,$$

де $OC=AM=x$, $OA=CM=y$, $OB=OC+CB$.



Із прямокутного ΔMCB маємо:

$$CB=CM\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-y\cdot\operatorname{ctg}\alpha=$$

$$=-\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{y}{y'}.$$

Тоді $OB=x-\frac{y}{y'}$. Отже,

$$S_{OAMB}=\frac{x+x-\frac{y}{y'}}{2}\cdot y=3a^2.$$

Таким чином, склали диференціальне рівняння

$$\left(2x-\frac{y}{y'}\right)y=6a^2 \quad\Rightarrow\quad y'\left(2xy-6a^2\right)=y^2 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y^2}{2xy-6a^2},$$

інтегральні криві якого задовольняють необхідні умови.

Зручно вважати x функцією від y. У цьому випадку

$$x'=\frac{2xy-6a^2}{y^2} \quad\Rightarrow\quad x'-\frac{2x}{y}=-\frac{6a^2}{y^2}.$$

Для розв'язання цього лінійного рівняння застосуємо метод Бернуллі. Нехай $x(y)=u(y)\cdot v(y)$, тоді $\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}$.

Після підстановки цих виразів в останнє рівняння одержимо:

$$\frac{du}{dy}v+u\frac{dv}{dy}-\frac{2uv}{y}=-\frac{6a^2}{y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dy}v+u\left(\frac{dv}{dy}-\frac{2v}{y}\right)=-\frac{6a^2}{y^2},$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dy}-\dfrac{2}{y}v=0, & (1) \\ \dfrac{du}{dy}v=-\dfrac{6a^2}{y^2}. & (2)\end{cases}$$

Інтегруємо рівняння (1)

$$\frac{dv}{v}=\frac{2dy}{y}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dy}{y}\quad\Rightarrow\quad v(y)=y^2$$

і знаходимо розв'язок рівняння (2):

$$\frac{du}{dy}y^2=-\frac{6a^2}{y^2}\quad\Rightarrow\quad u=-6a^2\int y^{-4}dy\quad\Rightarrow\quad u(y)=\frac{2a^2}{y^3}+C.$$

У результаті

$$x=u(y)\cdot v(y)=y^2\left(\frac{2a^2}{y^3}+C\right)\quad\text{або}\quad xy=Cy^3+2a^2.$$

Отже, маємо *рівняння сім'ї кривих*, які володіють вказаними властивостями.

Приклад 11. Знайти криву, кожна дотична до якої перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної у вигляді

$$Y=y+y'(X-x),$$

де X і Y – поточні координати дотичної, x і y – координати точки дотику.

Відповідно до умови, якщо $Y=1$, то $X=2x$. Ця умова приводить нас до диференціального рівняння:

$$1=y+y'(2x-x)\quad\Rightarrow\quad y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x}.\qquad (*)$$

Це лінійне[1] рівняння, його розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y=u(x)v(x)\quad\Rightarrow\quad y'=u'v+uv'.$$

Підставляючи y і y' в останнє рівняння, знаходимо:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{1}{x},$$

звідки маємо:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, & (1)\\ u'v=\dfrac{1}{x}. & (2)\end{cases}$$

Розв'язок першого рівняння системи $v(x)=\frac{1}{x}$. Тоді із другого рівняння знаходимо $u(x)=x+C$.

[1] Рівняння (*) можна розглядати і як рівняння з відокремлюваними змінними.

Отже, криві, що характеризуються вказаними властивостями, визначаються рівнянням

$$y=u(x)v(x)=\frac{x+C}{x}\quad\text{або}\quad y=1+\frac{C}{x},$$

і являють собою *сім'ю гіпербол*.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку*?
2. Яке рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку*?
3. Переконатися в тому, що лінійне рівняння $y'+p(x)y=q(x)$ задовольняє умови *теореми існування і єдиності розв'язку.*
4. Навести схему *методу Бернуллі* розв'язання лінійного диференціального рівняння.
5. Викласти *метод Лагранжа* (*метод варіації довільної сталої*) розв'язання лінійного диференціального рівняння.
6. Записати загальний розв'язок рівняння $y'+p(x)y=0$, де функція $p(x)$ – неперервна в деякому інтервалі, якщо відомий ненульовий частинний розв'язок y^* цього рівняння.
7. Якою є *структура загального розв'язку* лінійного диференціального рівняння 1-го порядку?
8. Нехай y_1 і y_2 – два різні розв'язки рівняння $y'+p(x)y=q(x)$. Довести, що $y=y_1+C(y_2-y_1)$ є загальним розв'язком цього рівняння.
9. Нехай y_1 і y_2 – два різні розв'язки рівняння $y'+p(x)y=q(x)$. При якому співвідношенні між сталими α і β лінійна комбінація $\alpha y_1+\beta y_2$ є розв'язком даного рівняння?
10. Яке рівняння називається *рівнянням Бернуллі*? Як воно розв'язується?
11. Чи припустимим є розв'язувати рівняння Бернуллі безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його до лінійного рівняння?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння 1-го порядку, користуючись методом Лагранжа або Бернуллі:

1.1. $y'+2xy=xe^{-x^2}$; 1.2. $y'+\frac{2y}{x}=2x^3$;

1.3. $y'(2x+1)=4x+2y$; 1.4. $x(y'-y)=e^x$;

1.5. $x^2y'+xy+1=0$; 1.6. $y=x(y'-x\cos x)$;

1.7. $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$;   1.8. $y'\left(2e^y - x\right) = 1$;

1.9. $y'\left(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y\right) = 1$;   1.10. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$.

2. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову:

2.1. $y' + x^2 y = x^2$, $y(2) = 1$;   2.2. $y' - 3x^2 y = x^5 + x^2$, $y(0) = 1$;

2.3. $y'\left(1 - x^2\right) + xy = 1$, $y(0) = 1$;   2.4. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 62$;

2.5. $y' + 4y = x^2 e^{-4x}$, $y(0) = \dfrac{1}{3}$;   2.6. $xy' + y = \cos x$, $y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

2.7. $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 0$.

3. Знайти розв'язок рівняння Бернуллі:

3.1. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4$;   3.2. $y' - \dfrac{2xy}{1 + x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1 + x^2}}\operatorname{arctg} x$;

3.3. $yx' + x = x^2 \ln y$;   3.4. $y' - \dfrac{y}{x - 1} = \dfrac{y^2}{x - 1}$.

4. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;-1)$, для якої відрізок, що відтинається дотичною на осі ординат, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$. **1.2.** $y = Cx^2 + x^4$. **1.3.** $y = (2x+1)\left(C + \ln|2x+1|\right) + 2$.

1.4. $y = e^x\left(\ln|x| + C\right)$. **1.5.** $xy = C - \ln|x|$. **1.6.** $y = x\left(C + \sin x\right)$.

1.7. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$. **1.8.** $x = e^y + Ce^{-y}$. **1.9.** $x = \sin y\,(C - \cos y)$.

1.10. $y = (x + C)\left(1 + x^2\right)$. **2.1.** $y = 1$. **2.2.** $y = \dfrac{5}{3}e^{x^3} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}$.

2.3. $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. **2.4.** $y = \dfrac{2}{x^5} - \dfrac{1}{x}$. **2.5.** $y = \dfrac{1}{3}e^{-4x}\left(1 + x^3\right)$.

2.6. $y = \dfrac{1 + \sin x}{x}$. **2.7.** $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$. **3.1.** $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{3\ln\dfrac{C}{x}}}$.

3.2. $y = \left(1 + x^2\right)\left(\operatorname{arctg}^2 x + C\right)^2$. **3.3.** $x = \dfrac{1}{\ln y + 1 - Cy}$. **3.4.** $y = \dfrac{x - 1}{C - x}$.

4. $y = -x^2$.

§ 11.4. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

І. Диференціальне рівняння

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0, \tag{11.4.1}$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x;y)$, а саме рівняння може бути записане у вигляді $dU(x;y) = 0$, де

$$P(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x;y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Необхідною і достатньою умовою того, що (11.4.1) є рівнянням у повних диференціалах, слугує рівність частинних похідних:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{11.4.2}$$

Щоб знайти функцію $U(x;y)$, слід проінтегрувати рівність $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x;y)$ за змінною x при фіксованій змінній y:

$$U(x;y) = \int P(x;y)\,dx + \varphi(y). \tag{*}$$

Для визначення невідомої функції $\varphi(y)$, що з'явилася замість сталої інтегрування, залишається рівність $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y)$. Диференціюємо (*) за змінною y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)\,dx + \varphi'(y).$$

Прирівнюючи знайдену похідну $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ до заданої функції $Q(x;y)$, отримаємо рівняння для визначення функції $\varphi'(y)$:

$$Q(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)dx + \varphi'(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x;y)\,dx.$$

Інтегруючи, визначимо функцію $\varphi(y)$. Підставляючи $\varphi(y)$ у (*), знайдемо функцію $U(x;y)$.

У результаті загальний інтеграл рівняння (11.4.1), тобто рівняння $dU = 0$, набуває вигляду $U(x;y) = C$, де C – довільна стала.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(2x + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0.$$

Розв'язання. Переконаємося в тому, що задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Дійсно,

$$P(x;y) = 2x + 3x^2 y, \qquad Q(x;y) = x^3 - 3y^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x+3x^2y\right)=3x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-3y^2\right)=3x^2.$$

Умова (11.4.2) виконується.

Знайдемо функцію $U(x;y)$, повний диференціал якої

$$dU=U'_x dx+U'_y dy$$

дорівнював би лівій частині заданого рівняння. У даному випадку:

$$U'_x=P(x;y)=2x+3x^2y, \qquad U'_y=Q(x;y)=x^3-3y^2.$$

Проінтегруємо перше співвідношення $U'_x=2x+3x^2y$ за змінною x, вважаючи y фіксованою. При цьому стала інтегрування може залежати від y, тобто з'являється невідома функція від y:

$$U=\int\left(2x+3x^2y\right)dx=x^2+x^3y+\varphi(y).$$

Диференціюючи цю рівність за змінною y і підставляючи в друге співвідношення $U'_y=x^3-3y^2$, знайдемо спочатку $\varphi'(y)$, а потім і $\varphi(y)$:

$$\left(x^2+x^3y+\varphi(y)\right)'_y=x^3-3y^2 \quad\Rightarrow\quad x^3+\varphi'(y)=x^3-3y^2$$

$$\varphi'(y)=-3y^2 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=-y^3+C_0,$$

де покладемо $C_0=0$.

Отже, шукана функція $U(x,y)=x^2+x^3y-y^3$, а *загальний інтеграл* рівняння $dU=0$ має вигляд

$$U(x;y)=C \quad\Rightarrow\quad x^2+x^3y-y^3=C.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\frac{e^y}{1+x^2}dy=0.$$

Розв'язання. Це рівняння в повних диференціалах. Справді,

$$P(x;y)=\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}, \qquad Q(x;y)=\frac{e^y}{1+x^2}$$

і легко переконатися, що $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2xe^y}{\left(1+x^2\right)^2}$, а це і є умовою того, що вираз $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x;y)$.

Щоб розв'язати це рівняння, слід знайти таку функцію, для якої ліва частина рівняння буде її повним диференціалом. Нехай такою функцією буде $U(x;y)$, тоді

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x;y)=\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Інтегруємо цю рівність за змінною x, вважаючи y фіксованим:

$$U(x;y)=\int\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left(1-e^y\right)\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\left(1-e^y\right)\frac{1}{1+x^2}+\varphi(y)$$

(замість сталої інтегрування беремо функцію від y).

Отже, ми визначили функцію $U(x;y)$ з точністю до доданка, який містить лише y, а саме:

$$U(x;y)=-\frac{1-e^y}{1+x^2}+\varphi(y). \qquad (*)$$

Щоб знайти функцію $\varphi(y)$, скористаємося тією обставиною, що

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x;y)=\frac{e^y}{1+x^2}.$$

Тепер знайдемо $\frac{\partial U}{\partial y}$, використовуючи умову (*):

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'(y).$$

Порівнюємо ці два вирази для $\frac{\partial U}{\partial y}$:

$$\frac{e^y}{1+x^2}+\varphi'(y)=\frac{e^y}{1+x^2},$$

звідки

$$\varphi'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=C_0.$$

Покладемо $C_0=0$ і підставимо $\varphi(y)$ у вираз (*). Остаточно маємо:

$$U(x;y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}.$$

Загальним інтегралом рівняння $dU=0$ буде $U(x;y)=C$, у розглядуваній задачі:

$$\frac{e^y-1}{1+x^2}=C.$$

Приклад 3. Виділити інтегральну криву диференціального рівняння

$$2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2\sin 2y\right)dy = 0,$$

що проходить через точку $O(0;0)$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Тут

$$P(x;y) = 2x\cos^2 y, \qquad Q(x;y) = 2y - x^2\sin 2y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cdot 2\cos y(-\sin y) = -2x\sin 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin 2y.$$

Отже, задане рівняння в повних диференціалах.

Оскільки алгоритм визначення функції $U(x;y)$, повний диференціал якої заданий, досить докладно описаний у попередніх прикладах, наведемо схематичне розв'язання:

$$U'_x = 2x\cos^2 y, \qquad U'_y = 2y - x^2\sin 2y,$$

$$U = \int 2x\cos^2 y\,dx = x^2\cos^2 y + \varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2\cdot 2\cos(-\sin y) + \varphi'(y) = -x^2\sin 2y + \varphi'(y).$$

Тоді

$$-x^2\sin 2y + \varphi'(y) = 2y - x^2\sin 2y,$$

звідки

$$\varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = y^2.$$

Тому шукана функція $U(x;y) = x^2\cos^2 y + y^2$. *Загальний інтеграл* рівняння $d\left(x^2\cos^2 y + y^2\right) = 0$ має вигляд $x^2\cos^2 y + y^2 = C$.

Знайдемо *частинний інтеграл*, виділяючи із сім'ї інтегральних кривих ту, яка проходить через початок координат. З урахуванням початкової умови $y(0) = 0$ одержимо $C = 0$. Отже, шукана крива

$$x^2\cos^2 y + y^2 = 0.$$

II. *Інтегрувальним множником* для рівняння

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0$$

називається така функція $\mu(x;y) \neq 0$, множення на яку перетворить це рівняння на рівняння в повних диференціалах, тобто

$$\left[\mu P(x;y)\right]'_y = \left[\mu Q(x;y)\right]'_x. \qquad (11.4.3)$$

Інтегрувальний множник існує, якщо функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і не обертаються на нуль одночасно. Однак не існує загального методу знаходження інтегрувального множника.

У деяких випадках для його знаходження корисними є такі прийоми:

а) якщо $\frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \Phi(x)$, то $\ln\mu = \int \Phi(x)\,dx$;

б) якщо $\frac{1}{P}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \Phi_1(y)$, то $\ln\mu = \int \Phi_1(y)\,dy$;

в) інтегрувальний множник можна знайти з рівняння

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y} - Q\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Приклад 4. Звести рівняння $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + y\,dy = 0$ до рівняння в повних диференціалах і знайти його розв'язок.

Розв'язання. Спробуємо знайти інтегрувальний множник $\mu(x;y)$, такий, щоб виконувалася умова (11.4.3).

1. У даному випадку $P(x;y) = x^2 + y^2 + x$ і $Q(x;y) = y$. Знайдемо відповідні частинні похідні і скористаємося прийомом **а**):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Q}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{2y}{y} = 2 = \Phi(x).$$

Звідси випливає, що інтегрувальний множник можна знайти за формулою:

$$\ln\mu = \int 2\,dx = 2x \quad \Rightarrow \quad \mu(x;y) = e^{2x}.$$

2. Домножимо на e^{2x} обидві частини заданого рівняння

$$e^{2x}\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + e^{2x}y\,dy = 0 \qquad (*)$$

і переконаємося в тому, що одержали рівняння в повних диференціалах. Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{2x}\cdot 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{2x}\cdot 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то рівняння (*) дійсно є рівнянням у повних диференціалах.

3. Перейдемо до його розв'язування, застосовуючи розглянутий вище алгоритм. Маємо:

$$U'_x = e^{2x}\left(x^2 + y^2 + x\right), \qquad U'_y = e^{2x}y.$$

Тут зручніше інтегрувати функцію $U'_y = e^{2x}y$ за змінною y, вважаючи x фіксованим:

$$U = \int e^{2x} y\,dy = \frac{e^{2x}}{2}y^2 + \varphi(x).$$

У цьому випадку з'явилася невідома функція $\varphi(x)$. Диференціюємо цю рівність за x:

$$U'_x = e^{2x}y^2 + \varphi'(x)$$

і прирівняємо до коефіцієнта при dx:

$$e^{2x}y^2 + \varphi'(x) = e^{2x}\left(x^2 + y^2 + x\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = \left(x^2 + x\right)e^{2x}.$$

Інтегруючи двічі частинами, знаходимо:

$$\varphi(x) = \int\left(x^2 + x\right)e^{2x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 + x, & du = (2x+1)dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\int(2x+1)e^{2x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+1, & du = 2dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2 + x - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2x}}{2}x^2.$$

Отже, $U(x;y) = \frac{e^{2x}}{2}\left(y^2 + x^2\right)$ і *загальний інтеграл* заданого рівняння має вигляд

$$\frac{e^{2x}}{2}\left(y^2 + x^2\right) = C \quad \Rightarrow \quad e^{2x}\left(x^2 + y^2\right) = C_1,$$

де $C_1 = 2C$.

Приклад 5. Звести рівняння $2x\,\mathrm{tg}\,y\,dx + \left(x^2 - 2\sin y\right)dy = 0$ до рівняння в повних диференціалах і знайти його розв'язок.

Розв'язання. 1. Для розв'язання поставленої задачі знову потрібно знайти інтегрувальний множник. Тут $P = 2x\,\mathrm{tg}\,y$, $Q = x^2 - 2\sin y$.

Застосуємо прийом **б)**:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{2x - \frac{2x}{\cos^2 y}}{2x\,\mathrm{tg}\,y} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 y}}{\mathrm{tg}\,y} = \Phi_1(y).$$

Отже, інтегрувальний множник можна знайти з рівняння

$$\ln\mu = \int\frac{1 - \frac{1}{\cos^2 y}}{\mathrm{tg}\,y}dy = \int\left(\frac{\cos y}{\sin y} - \frac{1}{\mathrm{tg}\,y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\right)dy = \int\frac{d(\sin y)}{\sin y} - \int\frac{d(\mathrm{tg}\,y)}{\mathrm{tg}\,y} =$$

$$= \ln|\sin y| - \ln|\mathrm{tg}\,y| = \ln|\cos y|,$$

звідки $\mu(x;y) = \cos y$.

2. Тепер, домноживши задане рівняння на $\cos y$, матимемо рівняння в повних диференціалах:

$$2x\sin y\,dx + \left(x^2\cos y - 2\cos y\sin y\right)dy = 0,$$

де $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos y$.

3. Тоді

$$U'_x = 2x\sin y, \qquad U'_y = x^2\cos y - 2\sin y\cos y,$$

$$U = \int 2x\sin y\,dx = x^2\sin y + \varphi(y),$$

$$U'_y = x^2\cos y + \varphi'(y).$$

Прирівнюючи коефіцієнта при dy

$$x^2\cos y + \varphi'(y) = x^2\cos y - \sin 2y,$$

знайдемо

$$\varphi'(y) = -\sin 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = \frac{1}{2}\cos 2y.$$

Отже, $U(x;y) = x^2\sin y + \frac{1}{2}\cos 2y$, а *загальний інтеграл* має вигляд

$$x^2\sin y + \frac{1}{2}\cos 2y = C.$$

Приклад 6. Знайти розв'язок рівняння $\left(y^4 - 4xy\right)dx + \left(2xy^3 - 3x^2\right)dy = 0$.

Розв'язання. Склавши деякий вираз $z = \varphi(x,y)$, що залежить від x і y (наприклад, $z = x$, $z = y$, $z = xy$, $z = \frac{x}{y}$ і т.д.), можна встановити наявність для цього рівняння інтегрувального множника, що залежить лише від z. І якщо такий існує, знайти його. Для цього слід підставити $\mu = \mu(z)$ у рівняння (11.4.3).

Якщо в отриманому рівнянні вдається позбутися x і y, тобто звести рівняння до вигляду

$$F\left(\mu,\mu'_z,z\right)=0, \qquad (**)$$

то інтегрувальний множник, що залежить від z, існує і його можна знайти з рівняння (**).

Нехай $\mu=\mu(z)$, де $z=xy$, тоді з рівняння

$$\left[\mu\cdot P(x;y)\right]'_y=\left[\mu\cdot Q(x;y)\right]'_x$$

дістанемо

$$\left(\mu\left(y^4-4xy\right)\right)'_y=\left(\mu\left(2xy^3-3x^2\right)\right)'_x.$$

Оскільки

$$\mu'_y=\mu'_z\cdot z'_y=\mu'_z\cdot x, \qquad \mu'_x=\mu'_z\cdot z'_x=\mu'_z\cdot y,$$

то

$$\mu'_z x\left(y^4-4xy\right)+\mu\left(4y^3-4x\right)=\mu'_z y\left(2xy^3-3x^2\right)+\mu\left(2y^3-6x\right),$$

$$\mu'_z\left(xy^4+x^2y\right)=\mu\left(2y^3+2x\right),$$

$$xy\mu'_z\left(y^3+x\right)=2\mu\left(y^3+x\right).$$

Скорочуючи останню рівність на спільний множник y^3+x і виконуючи заміну $xy=z$, отримаємо

$$z\mu'_z=2\mu.$$

Ми позбулися x і y, отже, інтегрувальний множник $\mu=\mu(z)$ існує.

Інтегруючи останнє рівняння, знайдемо

$$\mu(z)=Cz^2.$$

Поклавши $C=1$, матимемо інтегрувальний множник у вигляді $\mu(x;y)=x^2y^2$.

Тоді рівняння

$$\left(y^4-4xy\right)x^2y^2dx+\left(2xy^3-3x^2\right)x^2y^2dy=0$$

стає рівнянням у повних диференціалах, оскільки

$$P(x;y)=x^2y^6-4x^3y^3, \qquad Q(x;y)=2x^3y^5-3x^4y^2;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y^5-12x^3y^2.$$

Визначимо функцію $U(x,y)$, враховуючи, що

$$U'_x=x^2y^6-4x^3y^3, \qquad U'_y=2x^3y^5-3x^4y^2.$$

Знаходимо:

$$U=\int\left(x^2y^6-4x^3y^3\right)dx=\frac{x^3y^6}{3}-x^4y^3+\varphi(y),$$

$$U'_y=\cancel{2x^3y^5}-\cancel{3x^4y^2}+\varphi'(y)=\cancel{2x^3y^5}-\cancel{3x^4y^2},$$

$$\varphi'(y)=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi(y)=0.$$

Отже, $U(x;y)=\dfrac{x^3y^6}{3}-x^4y^3$, а загальний інтеграл

$$x^3y^6-3x^4y^3=C.$$

Зауваження. Немає підстав вважати, що для певного рівняння існує єдино можливий інтегрувальний множник. Наприклад, для рівняння

$$2y\,dx+x\,dy=0$$

інтегрувальними множниками слугують

$$\mu_1=x, \qquad \mu_2=\frac{1}{xy}, \qquad \mu_3=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Справді,

для $\mu_1=x$: $\quad 2xy\,dx+x^2dy=0 \;\Rightarrow\; d\left(x^2y\right)=0 \;\Rightarrow\; x^2y=C$;

для $\mu_2=\dfrac{1}{xy}$: $\quad 2\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}=0 \;\Rightarrow\; d\left(\ln x^2y\right)=0 \;\Rightarrow\; \ln x^2y=C,\; x^2y=e^C$;

для $\mu_3=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$: $\quad \sqrt{y}dx+\dfrac{x}{2\sqrt{y}}dy=0 \;\Rightarrow\; d\left(x\sqrt{y}\right)=0 \;\Rightarrow\; x\sqrt{y}=C,\; x^2y=C^2$.

Наведені загальні інтеграли відрізняються лише формою запису довільної сталої.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке диференціальне рівняння називається *рівнянням у повних диференціалах*?
2. У чому полягає метод розв'язання *рівняння в повних диференціалах*?
3. Якими повинні бути функції $P(x;y)$ і $Q(x;y)$, щоб диференціальне рівняння $P(x;y)\,dx+Q(x;y)\,dy=0$ було рівнянням:
   а) з відокремлюваними змінними;
   б) однорідним;
   с) у повних диференціалах?
4. На підставі якої властивості інтеграла зі змінною верхньою межею стверджується, що $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x;y)$ якщо $U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x;y)\,dx+\varphi(y)$?
5. Що розуміють під *інтегрувальним множником*?

6. Назвати *основні прийоми* знаходження інтегрувального множника.
7. Чи можна стверджувати єдиність інтегрувального множника для певного рівняння?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Переконатися, що задані рівняння є рівняннями в повних диференціалах і розв'язати їх:

1.1. $2xy\,dx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$; 1.2. $\left(2-9xy^2\right)x\,dx+\left(4y^2-6x^3\right)y\,dy=0$;

1.3. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$; 1.4. $\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0$;

1.5. $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x\,dy=0$.

2. Виділити інтегральні криві, що проходять через задані точки:

2.1. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$, $M(1;1)$;

2.2. $3x^2e^4y+\left(x^3e^4-1\right)y'=0$, $M(0;1)$.

3. Проінтегрувати рівняння $ydx+xdy=0$ $(x>0,\ y>0)$ як:

3.1. рівняння в повних диференціалах;

3.2. рівняння з відокремлюваними змінними (не потенціюючи).

Чи можна стверджувати, що отримано *різні загальні розв'язки*?

4. Знайти інтегрувальний множник, що залежить від x або y, і розв'язати рівняння:

4.1. $\left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy$; 4.2. $2xy\,dx+\left(y^2-3x^2\right)dy=0$;

4.3. $x\,dy+\left(\sin y-3x^2\cos y\right)\cos y=0$; 4.4. $\left(\ln y+2x-1\right)dy=2y\,dx$.

5. Знайти інтегрувальний множник, що залежить від добутку xy, і розв'язати рівняння:

5.1. $x(xy-3)dy+\left(xy^2-y\right)dx=0$; 5.2. $xy^2dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $3x^2y-y^3=C$. **1.2.** $x^2-3x^3y^2+y^4=C$. **1.3.** $xe^{-y}-y^2=C$.
1.4. $4y\ln x+y^4=C$. **1.5.** $x-y^2\cos^2 x=C$. **2.1.** $y=x$. **2.2.** $x^3e^4-y=-1$.
3.1. $yx+C=0$. **3.2.** $\ln y+\ln x=\ln C_1$. **4.1.** $x-\frac{y^2}{x}=C$. **4.2.** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$.
4.3. $x\operatorname{tg}y-x^3=C$. **4.4.** $2x+\ln y=Cy$. **5.1.** $xy-\ln x-3\ln y=C$.
5.2. $xy-\ln y=C$.

§ 11.5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

I. Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (11.5.1)$$

або, якщо воно розв'язане відносно старшої похідної,

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}\right). \qquad (11.5.2)$$

де функція f визначена, однозначна і неперервна в області зміни своїх аргументів.

Теорема Коші (*існування та єдиності розв'язку*).

Якщо в диференціальному рівнянні (11.5.2) функція $f\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}\right)$ і її частинні похідні за аргументами $y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області, що містить значення

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad y'=y_0',\quad y''=y_0'',\quad y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)},$$

то існує і притому єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ вказаного рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad y''(x_0)=y_0'',\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (11.5.2) називається функція

$$y=\varphi\left(x,C_1,C_2,\dots,C_n\right),$$

яка визначена в деякій області зміни змінних $x,C_1,C_2,\dots,C_n$ і має неперервні частинні похідні за змінною x до порядку n включно, що задовольняє рівняння при будь-яких значеннях сталих.

Загальним інтегралом диференціального рівняння n-го порядку називається співвідношення, що неявно визначає його загальний розв'язок

$$\Phi\left(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n\right)=0,$$

Частинним розв'язком рівняння (11.5.2) називається розв'язок, отриманий із загального розв'язку при певних значеннях довільних сталих $C_1,C_2,\dots,C_n$.

II. Найпростіший випадок інтегрування *рівняння вищого порядку* має місце тоді, коли рівняння *містить тільки похідну n-го порядку і незалежну змінну x*:

$$y^{(n)}=f(x).$$

Розв'язок такого рівняння знаходиться послідовним n-кратним інтегруванням.

У деяких випадках диференціальне рівняння n-го порядку (11.5.1) вдається звести до диференціального рівняння нижчого порядку за рахунок уведення нової невідомої функції.

1. Якщо рівняння *не містить шуканої функції* y і її похідних до $(k-1)$-го порядку включно

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)}\right)=0,$$

то його порядок *може бути знижений до* $(n-k)$-го заміною змінної $y^{(k)}=p(x)$.

Порядок рівняння, що містить *дві послідовні* похідні $F\left(y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0$, знижується введенням функції $y^{(n-1)}=p(x)$.

2. Якщо рівняння *не містить незалежної змінної* x

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то його порядок можна *знизити на одиницю* підстановкою $y' = p(y)$. У цьому випадку за незалежну змінну беруть y. Тому всі похідні рівняння слід виразити через похідні від нової невідомої функції $p(y)$ за змінною y.

Цей самий метод розв'язання може бути застосований до рівнянь, що містять дві похідні, порядки яких *відрізняються на дві одиниці* $F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$.

3. Якщо рівняння *однорідне відносно аргументів* $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, тобто функція $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right)$ задовольняє тотожність

$$F\left(x, ky, ky', ky'', \dots, ky^{(n)}\right) = k^{\lambda} F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right),$$

то його порядок може бути *знижений на одиницю* заміною $\dfrac{y'}{y} = p(x)$.

4. Якщо ліва частина рівняння (11.5.1) є *повною похідною* за змінною x від деякої функції $(n-1)$-го порядку $\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$, то порядок такого рівняння автоматично знижується на одиницю, оскільки

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

звідки

$$\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) = C.$$

III. У випадку *рівняння 2-го порядку* **задача Коші** полягає у знаходженні розв'язку диференціального рівняння

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (11.5.3)$$

що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'.$$

Геометричний зміст початкових умов.

Початкові умови виділяють із сім'ї інтегральних кривих певну криву, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ і має заданий кут нахилу дотичної до осі Ox $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = y_0'$.

IV. Щодо *рівнянь 2-го порядку* (11.5.3) методи, викладені в п. **II**, можуть бути переформульовані в такий спосіб:

Якщо рівняння містить тільки незалежну змінну x і другу похідну шуканої функції, тобто

$$y'' = f(x),$$

то його розв'язок знаходять послідовним двократним інтегруванням.

1. Якщо рівняння *не містить шуканої функції* y:

$$y'' = f(x, y'),$$

то його порядок може бути знижений за рахунок уведення нової невідомої функції від x:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

2. Якщо рівняння *не містить незалежної змінної* x

$$y'' = f(y, y'),$$

то його порядок може бути знижений за рахунок уведення нової невідомої функції від y:

$$y'(x) = p(y) \quad \Rightarrow \quad y''(x) = p(y) \cdot \frac{dp(y)}{dy}.$$

3. Якщо рівняння *однорідне відносно аргументів* y, y', y'', то його порядок може бути знижений за рахунок заміни $\dfrac{y'}{y} = p(x)$.

4. Якщо ліва частина рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$ є *повною похідною* 1-го порядку за змінною x від деякої функції $\Phi(x, y, y')$, тобто

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y') = 0, \quad \text{то} \quad \Phi(x, y, y') = C.$$

Приклад 1. З'ясувати, чи є розв'язком заданих диференціальних рівнянь вказані функції:

а) $y'' = x^2 + y^2$, $\qquad y = \dfrac{1}{x}$;

б) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, $\qquad x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

Розв'язання. а) Знайдемо похідні 1-го і 2-го порядків від функції $y = \dfrac{1}{x}$:

$$y' = -\frac{1}{x^2}, \qquad y'' = \frac{2}{x^3}.$$

Підставляючи в задане рівняння $y = \dfrac{1}{x}$ і $y'' = \dfrac{2}{x^3}$, ми не одержимо тотожну рівність

$$\frac{2}{x^3} \neq x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Отже, функція $y = \dfrac{1}{x}$ не є розв'язком рівняння $y'' = x^2 + y^2$.

б) Продиференціюємо двічі функцію $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ за змінною t:

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -C_1\omega^2\cos\omega t - C_2\omega^2\sin\omega t.$$

Підставимо в дане рівняння функцію x і її другу похідну:

$$-C_1\omega^2\cos\omega t - C_2\omega^2\sin\omega t + \omega^2\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right) = 0.$$

Отримана в результаті тотожність $0 \equiv 0$ свідчить про те, що функція $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ є розв'язком заданого рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = 6x + \cos x$.

Розв'язання. Задано диференціальне рівняння 2-го порядку вигляду $y'' = f(x)$. Його загальний розв'язок знайдемо послідовним двократним інтегруванням за змінною x:

$$y' = \int (6x + \cos x)\,dx = 3x^2 + \sin x + C_1,$$

$$y = \int \left(3x^2 + \sin x + C_1\right) dx = x^3 - \cos x + C_1 x + C_2 .$$

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови (*задача Коші*):

$$y'' = \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}; \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння вигляду $y'' = f(x)$, двічі проінтегрувавши його:

$$y' = \int \frac{x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-2} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{-1} + C_1 = C_1 - \frac{1}{2\left(1+x^2\right)},$$

$$y = \int \left[C_1 - \frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right] dx = C_1 x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C_2 .$$

Підставляючи в отримані вирази відповідні початкові умови, визначимо довільні сталі C_1 і C_2:

якщо $y'(0) = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{2} = C_1 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1;$

якщо $y(0) = 3$, то $3 = C_2$.

Отже, *частинний розв'язок* заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y = x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + 3 .$$

Зауваження 1. Розв'язуючи задачу Коші на тому етапі, коли знайдений *перший інтеграл*, тобто рівняння проінтегроване один раз, можна відразу визначити довільну сталу C_1, використовуючи відповідну початкову умову для старшої похідної. Подібну процедуру можна проводити після кожного інтегрування. Це істотно спрощує подальші перетворення.

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння $y''' = -24e^{-2x}$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 4$, $y'(0) = -8$, $y''(0) = 22$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Це рівняння має вигляд $y''' = f(x)$, тобто містить тільки похідну 3-го порядку й незалежну змінну. Його розв'язок знайдемо послідовним трикратним інтегруванням.

1. При першому інтегруванні маємо

$$y'' = -24\int e^{-2x} dx \quad \Rightarrow \quad y'' = 12e^{-2x} + C_1 .$$

Перш ніж інтегрувати ще раз, доцільно визначити довільну сталу C_1, використовуючи початкову умову для другої похідної $y''(0) = 22$:

$$22 = 12e^0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 10 .$$

2. Тепер інтегруємо рівняння $y'' = 12e^{-2x} + 10$:

$$y' = \int \left(12e^{-2x} + 10\right) dx \quad \Rightarrow \quad y' = -6e^{-2x} + 10x + C_2 .$$

Знайдемо довільну сталу C_2, використовуючи початкову умову для першої похідної $y'(0) = -8$:

$$-8 = -6e^0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2 .$$

3. Нарешті, інтегруємо рівняння $y' = -6e^{-2x} + 10x - 2$:

$$y = \int \left(-6e^{-2x} + 10x - 2\right) dx \quad \Rightarrow \quad y = 3e^{-2x} + 5x^2 - 2x + C_3$$

і визначаємо довільну сталу C_3 з початкової умови $y(0) = 4$:

$$4 = 3 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 1 .$$

Отже, розв'язок *задачі Коші* має вигляд

$$y = 3e^{-2x} + 5x^2 - 2x + 1 .$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''x + y' + 1 = 0$.

Розв'язання. Наведемо алгоритм розв'язання диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.

а) Задане рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$, тобто не містить явно шуканої функції y, отже, реалізується випадок **1**. Порядок такого рівняння можна знизити за рахунок уведення нової невідомої функції $p(x)$, яку визначимо в такий спосіб:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

б) У результаті маємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p'x+p+1=0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dx}x=-(1+p) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p+1}=-\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{dp}{p+1}=-\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p+1|=-\ln|x|+\ln C_1.$$

Потенціюючи, одержимо

$$p(x)+1=\frac{C_1}{x}.$$

Допоміжна функція $p(x)$ знайдена.

в) Тепер слід повернутися до вихідної функції $y(x)$. Оскільки $p(x)=y'$, то

$$y'=\frac{C_1}{x}-1.$$

Це також рівняння 1-го порядку з відокремлваними змінними, але вже відносно функції $y(x)$:

$$dy=\left(\frac{C_1}{x}-1\right)dx \quad \Rightarrow \quad \int dy=\int\left(\frac{C_1}{x}-1\right)dx.$$

Його розв'язок і слугує *загальним розв'язком* заданого рівняння 2-го порядку:

$$y=C_1\ln|x|-x+C_2.$$

Таким чином, процедура інтегрування рівняння 2-го порядку звелася до інтегрування двох рівнянь 1-го порядку.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'''+y''-x-1=0$.

Розв'язання. Знову має місце випадок **1**, оскільки рівняння не містить ні шуканої функції y, ні похідної y'. Отже, його порядок може бути знижений заміною $y''=p(x)$.

Тоді $y'''=p'(x)$ і задане рівняння зводиться до такого:

$$xp'+p-x-1=0 \quad \Rightarrow \quad p'+\frac{p}{x}=\frac{x+1}{x}.$$

Це лінійне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$ (див. § 11.3). Розв'язуємо його методом Бернуллі, поклавши

$$p=u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad p'=u'v+uv'.$$

Тоді

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{x+1}{x}.$$

Звідси визначаємо систему рівнянь для функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, & (1) \\ u'v=\dfrac{x+1}{x}. & (2) \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння, знайдемо:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v|=-\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v(x)=\frac{1}{x}.$$

Із другого рівняння системи маємо

$$u'\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \quad u'=x+1 \quad \Rightarrow \quad u(x)=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C_1.$$

Отже, функції $p(x)$ дорівнює:

$$p(x)=u(x)v(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x+C_1\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}+1.$$

Однак $p(x)=y''$, тому

$$y''=\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}+1.$$

Це диференціальне рівняння 2-го порядку вигляду $y''=f(x)$. Щоб знайти загальний розв'язок, слід двічі проінтегрувати дане рівняння:

$$y'=\int\left(\frac{x}{2}+\frac{C_1}{x}+1\right)dx \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{x^2}{4}+C_1\ln x+x+C_2,$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{4}+C_1\ln x+x+C_2\right)dx=\frac{x^3}{12}+C_1(x\ln x-x)+\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Інтеграл $\int\ln x\,dx$ обчислений частинами.

Якщо припустити, що $C_2-C_1=\overline{C_2}$, то *загальний розв'язок* цього рівняння можна трохи спростити:

$$y=\frac{x^3}{12}+C_1x\ln x+\frac{x^2}{2}+\overline{C_2}x+C_3.$$

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$, що задовольняє початкові умови $y(2)=0$, $y'(2)=4$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Диференціальне рівняння не містить у явному вигляді шуканої функції y, тому його порядок доцільно знижувати за допомогою заміни $y'=p(x)$, тоді $y''=p'(x)$.

У результаті одержуємо рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p'-\frac{p}{x}=\frac{x^2}{p}.$$

Це *рівняння Бернуллі* (див. § 11.3), що за допомогою відповідної заміни (якої саме?) може бути зведене до лінійного.

Однак можна і безпосередньо застосувати метод Бернуллі до заданого рівняння, поклавши

$$p=u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad p'=u'v+uv'.$$

Дістаємо

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=\frac{x^2}{uv} \quad \Rightarrow \quad u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{x^2}{uv}.$$

Складемо систему рівнянь для функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v'-\dfrac{v}{x}=0, & (1) \\ u'v=\dfrac{x^2}{uv}. & (2) \end{cases}$$

Її розв'язання:

$$(1)\quad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v|=\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v(x)=x;$$

$$(2)\quad u'x=\frac{x^2}{u\cdot x} \quad \Rightarrow \quad u'=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad u\,du=dx,$$

$$\frac{u^2}{2}=x+C_1 \quad \Rightarrow \quad u(x)=\pm\sqrt{2(x+C_1)}.$$

Отже,

$$p=u(x)v(x)=\pm x\sqrt{2(x+C_1)}.$$

Оскільки $p(x)=y'$, то маємо рівняння 1-го порядку відносно функції $y(x)$:

$$y'=\pm x\sqrt{2(x+C_1)}.$$

На цьому етапі скористаємося *початковими умовами*, щоб спростити отримане рівняння. Визначимо сталу C_1.

Із другої початкової умови $y'(2)=4$ знаходимо: $4=\pm2\sqrt{2(2+C_1)}$. Ця рівність справедлива при $C_1=0$, причому права її частина повинна бути додатною. Отже,

$$y'=x\sqrt{2x}.$$

Інтегруючи це рівняння з відокремлюваними змінними, маємо:

$$y=\sqrt{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}+C_2.$$

Для визначення сталої C_2 скористаємося першою початковою умовою $y(2)=0$:

$$0=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot4\sqrt{2}+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{16}{5}.$$

У підсумку розв'язок *задачі Коші* набуває вигляду:

$$y=\frac{2}{5}\left(x^2\sqrt{2x}-8\right).$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

Розв'язання. Задане рівняння вигляду $F(y,y',y'')=0$ не містить явно незалежної змінної x, тобто має місце випадок **2**.

а) Рівняння цього типу допускають зниження порядку за рахунок уведення нової невідомої функції $p(y)$, аргументом якої слугує сама шукана функція $y(x)$. Нехай $y'(x)=p(y)$, тоді за правилом обчислення похідної складної функції

$$y''(x)\equiv\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}p(y)=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p.$$

б) У результаті задане рівняння зводиться до рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$\frac{dp}{dy}\cdot p\cdot\operatorname{tg}y=2p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy}\cdot\operatorname{tg}y=2p.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його, знайдемо

$$\int\frac{dp}{p}=\int2\operatorname{ctg}y\,dy \quad \Rightarrow \quad \ln|p|=2\ln|\sin y|+\ln C_1 \quad \Rightarrow \quad p(y)=C_1\sin^2 y.$$

в) Враховуючи, що $p(y)=y'$, дістаємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y'=C_1\sin^2 y.$$

Інтегруючи це рівняння

$$\frac{dy}{dx}=C_1\sin^2 y \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{\sin^2 y}=C_1\int dx \quad\Rightarrow\quad -\operatorname{ctg} y=C_1x-C_2,$$

знайдемо *загальний розв'язок* вихідного рівняння:

$$y=\operatorname{arcctg}(C_2-C_1x).$$

Приклад 9. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''=2-y$, що задовольняє початкові умови $y(0)=2$, $y'(0)=2$ (*задача Коші*).

Розв'язання. *Перший спосіб*. Знову реалізується випадок **2**, оскільки рівняння не містить змінної x. Знизити його порядок можна за допомогою заміни

$$y'(x)=p(y) \quad\Rightarrow\quad y''(x)=\frac{dp}{dy}\cdot p.$$

У результаті маємо рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$\frac{dp}{dy}\cdot p=2-y.$$

Відокремимо змінні й виконаємо інтегрування:

$$\int p\,dp=\int(2-y)\,dy \quad\Rightarrow\quad \frac{p^2}{2}=2y-\frac{y^2}{2}+\frac{C_1}{2} \quad\Rightarrow\quad p^2=4y-y^2+C_1.$$

Отже, функція $p(y)$ визначається виразом

$$p(y)=\pm\sqrt{4y-y^2+C_1}.$$

Оскільки $p(y)=y'$, то

$$y'=\pm\sqrt{4y-y^2+C_1}. \qquad (*)$$

Спростимо отримане рівняння, скориставшись початковими умовами. Оскільки $y=2$ і $y'=2$ при $x=0$, то

$$2=\pm\sqrt{8-4+C_1} \quad\Rightarrow\quad 2=\pm\sqrt{4+C_1},$$

звідки випливає, що $C_1=0$ і перед коренем слід брати знак "+".

Таким чином, знову маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y'=\sqrt{4y-y^2}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{4y-y^2}}=\int dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{\sqrt{4-(y-2)^2}}=x+C_2 \quad\Rightarrow\quad \arcsin\frac{y-2}{2}=x+C_2.$$

Знову звертаючись до початкових умов, визначимо сталу C_2. Враховуючи, що $y=2$ при $x=0$, знайдемо $C_2=0$. У підсумку матимемо такий розв'язок *задачі Коші*:

$$y-2=2\sin x \qquad \text{або} \qquad y=2(\sin x+1).$$

Другий спосіб. Оскільки задане рівняння має вигляд $F(y,y'')=0$, тобто порядки похідних *відрізняються на дві одиниці* (див. п. **II**, **2**), то його перший інтеграл може бути отриманий іншим способом.

Помножимо обидві частини заданого рівняння на $2y'dx$:

$$y''\cdot 2y'dx=(2-y)\cdot 2y'dx \quad\Rightarrow\quad 2y'y''dx=2(2-y)y'dx,$$

звідки

$$d(y')^2=2(2-y)dy,$$

оскільки $d(y')^2=2y'y''dx$, $dy=y'dx$.

Інтегруючи останнє рівняння

$$\int d(y')^2=2\int(2-y)dy \quad\Rightarrow\quad (y')^2=2\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)+C_1,$$

знаходимо

$$y'=\pm\sqrt{4y-y^2+C_1},$$

що збігається з (*).

Зауваження 2. Не слід вважати, що використовувані заміни, які призводять до зниження порядку вихідного рівняння, є єдино можливими. Вони лише *рекомендовані*. Вся справа в тому, що в результаті однієї підстановки можна відразу одержати рівняння з відокремлюваними змінними, а в результаті іншої – складніше рівняння, наприклад, лінійне або однорідне, яке потім однаково доведеться зводити до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 10. Розв'язати диференціальне рівняння $y''+(y')^2+1=0$.

Розв'язання. Задане рівняння не містить у явному вигляді ні x, ні y. Щоб знизити його порядок, можна ввести або функцію $p(x)$, або функцію $p(y)$.

Покладемо $y'=p(x)$, тоді $y''=p'(x)$ і рівняння набуває вигляду

$$p'+p^2+1=0.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними. Тому

$$\int \frac{dp}{p^2+1} = -\int dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} p = -x + C_1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \operatorname{tg}(C_1 - x).$$

Отже,

$$y' = \operatorname{tg}(C_1 - x).$$

Інтегруючи, матимемо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \ln\left|\cos(C_1 - x)\right| + C_2.$$

Вибір заміни $y' = p(y)$ також привів би нас до загального розв'язку, однак у цьому випадку процедура інтегрування була б складнішою (рекомендуємо переконатися в цьому самостійно).

Приклад 11. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$yy'' = 2x(y')^2; \qquad y(2) = 2, \qquad y'(2) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Задане рівняння *однорідне відносно* y, y' і y'', тобто має місце випадок **3**.

а) Виконаємо заміну $\dfrac{y'}{y} = p(x)$, звідки

$$y' = p\,y \quad \Rightarrow \quad y'' = p'y + py' = p'y + p^2 y.$$

Підставимо отримані значення y' і y'' у вихідне рівняння:

$$y\left(p'y + p^2 y\right) = 2x \cdot p^2 y^2.$$

б) Скоротивши на $y^2 \neq 0$, зведемо задане рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $p(x)$:

$$p' = -p^2(1-2x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{-p^2} = (1-2x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p} = x - x^2 + C_1.$$

в) Оскільки $p = \dfrac{y'}{y}$, дістаємо рівняння 1-го порядку відносно шуканої функції $y(x)$:

$$\frac{y}{y'} = x - x^2 + C_1.$$

Визначимо відразу C_1, використовуючи обидві початкові умови:

$$4 = 2 - 4 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 6.$$

Тоді

$$\frac{y'}{y} = \frac{-1}{x^2 - x - 6} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-3)(x+2)}.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, одержимо

$$\frac{dy}{y} = \frac{-1}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right) \quad \Rightarrow \quad 5\ln|y| = \ln|x+2| - \ln|x-3| + \ln C_2,$$

$$y^5 = \frac{C_2(x+2)}{x-3} \quad \Rightarrow \quad y^5(x-3) = C_2(x+2).$$

Враховуючи початкову умову $y(2) = 2$, визначимо сталу C_2:

$$-32 = 4C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -8.$$

Таким чином, шуканий розв'язок неявно заданий співвідношенням

$$y^5(3-x) = 8(x+2).$$

Приклад 12. Розв'язати диференціальне рівняння

$$yy'' - (y')^2 = y^2 y'.$$

Розв'язання. Задане рівняння відповідає випадку **2**, тому для зниження його порядку можна ввести нову функцію $y' = p(y)$.

Однак простіше і витонченіше знайти його розв'язок у такий спосіб. Розділимо обидві частини рівняння на $y^2 \neq 0$:

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = y'.$$

Тепер легко помітити, що вираз у лівій частині рівняння являє собою *повну похідну 1*-го порядку за змінною x від функції $\dfrac{y'}{y}$.

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = y'.$$

Звідси відразу одержуємо рівняння 1-го порядку відносно функції y:

$$\frac{y'}{y} = y + C_1.$$

Відокремимо змінні й виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{dy}{y(y+C_1)} = \int dx. \qquad (*)$$

Розкладаючи підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів, матимемо:

$$\int\frac{dy}{y(y+C_1)}=\frac{1}{C_1}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+C_1}\right)dy=\frac{1}{C_1}\ln\frac{y}{y+C_1},\qquad C_1\neq 0.$$

Таким чином, *загальний інтеграл* рівняння має вигляд

$$\frac{1}{C_1}\ln\frac{y}{y+C_1}=x+C_2\quad\Rightarrow\quad\frac{y}{y+C_1}=e^{C_1(x+C_2)}.$$

Ще один розв'язок дістаємо з формули (*) при $C_1=0$:

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int dx\quad\Rightarrow\quad-\frac{1}{y}=x+C_2\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{x+C_2}.$$

Безпосередньо із заданого рівняння знаходимо ще один розв'язок: $y=0$.

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна розглядати як *однорідне* відносно аргументів y, y', y''.

Однак розв'язок можна знайти простіше, якщо помітити, що

$$\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{y'x-y}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Тоді задане рівняння зводиться до повної похідної:

$$y''+\left(\frac{y}{x}\right)'=0\quad\Rightarrow\quad\left(y'+\frac{y}{x}\right)'=0,$$

звідки випливає, що

$$y'+\frac{y}{x}=C_1.$$

Останнє рівняння розв'язуватимемо як лінійне, застосовуючи метод Бернуллі: $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv+\frac{uv}{x}=C_1,\qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=C_1,$$

звідки

$$(1)\quad v'+\frac{v}{x}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad v(x)=\frac{1}{x};$$

$$(2)\quad u'v=C_1\quad\Rightarrow\quad u'=C_1x\quad\Rightarrow\quad u=C_1\frac{x^2}{2}+C_2.$$

Отже,

$$y=u(x)v(x)=\frac{C_1}{2}x+\frac{C_2}{x}\quad\text{або}\quad y=\overline{C_1}x+\frac{C_2}{x},\quad\text{де}\quad\overline{C_1}=\frac{C_1}{2}.$$

Приклад 14. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови (*задача Коші*):

$$y''(x^2+1)=2xy',\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=3.$$

Розв'язання. Поділимо спочатку обидві частини заданого рівняння на $(x^2+1)^2\neq 0$, перенесемо все в один бік і зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{y''}{x^2+1}=\frac{2xy'}{(x^2+1)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{y''(x^2+1)-2xy'}{(x^2+1)^2}=0.$$

Легко переконатися, що вираз зліва являє собою повну похідну функції $\frac{y'}{x^2+1}$, тобто:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x^2+1}\right)=0.$$

Отже, сама функція

$$\frac{y'}{x^2+1}=C_1.$$

У такий спосіб порядок заданого рівняння знижений на одиницю, тобто

$$y'=C_1(x^2+1).$$

Використовуючи другу початкову умову $y'(0)=3$, визначимо довільну сталу C_1: $3=C_1$.

Таким чином, маємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$y'=3(x^2+1),$$

інтегруючи яке, знайдемо

$$y=x^3+3x+C_2.$$

Нарешті, визначимо довільну сталу C_2, використовуючи першу початкову умову $y(0)=1$: $1=C_2$. Отже, розв'язок *задачі Коші* має вигляд

$$y=x^3+3x+1.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xyy''+x(y')^2=3yy'.$$

Розв'язання. *Перший спосіб.* Задане рівняння містить у явному вигляді як x, так і y. Отже, порядок рівняння можна знизити введенням нової функції вигляду $p(x)$ або $p(y)$ (рекомендуємо проробити це самостійно).

Разом з тим, задане рівняння є *однорідним* відносно аргументів y, y', y''. Отже, знизити його порядок можна також заміною

$$\frac{y'}{y}=p(x) \quad \Rightarrow \quad y'=y\cdot p \quad \Rightarrow \quad y''=y'p+yp'=yp^2+yp'.$$

У результаті маємо рівняння Бернуллі відносно функції $p(x)$:

$$p'-\frac{3p}{x}=-2p^2,$$

і клопіт з його інтегруванням.

Другий спосіб. Розділимо обидві частини рівняння на $x\neq 0$:

$$xyy''+x(y')^2=3yy' \quad \Rightarrow \quad yy''+(y')^2=\frac{3}{x}yy'.$$

Ліва частина рівняння являє собою *повну похідну 1*-го порядку за змінною x від функції yy'. Отже, рівняння можна переписати у вигляді

$$(yy')'=\frac{3}{x}(yy').$$

Розглядаємо його як рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції yy' й інтегруємо:

$$\frac{d(yy')}{dx}=\frac{3}{x}(yy') \quad \Rightarrow \quad \int\frac{d(yy')}{(yy')}=3\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(yy')=3\ln x+\ln C_1.$$

Одержали рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними вже відносно шуканої функції $y(x)$: $yy'=C_1x^3$. Знаходимо його *загальний інтеграл*:

$$\int ydy=C_1\int x^3dx \quad \Rightarrow \quad y^2=\frac{C_1}{2}x^4+2C_2$$

або

$$y^2=\overline{C_1}x^4+\overline{C_2},$$

де $\overline{C_1}=\frac{C_1}{2}$, $\overline{C_2}=2C_2$.

Приклад 16. Із сім'ї інтегральних кривих рівняння $y''=2x-3x^2$ виділити криву, що проходить через точку $(2;0)$ і дотикається в ній до прямої $y-x+2=0$.

Розв'язання. Пряма $y-x+2=0$ слугує дотичною до шуканої кривої в точці $(2;0)$. Кутовий коефіцієнт прямої $k=1$, отже, $y'(2)=1$.

Фактично потрібно знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=2x-3x^2$, що задовольняє початкові умови:

$$y(2)=0, \qquad y'(2)=1.$$

Оскільки рівняння має вигляд $y''=f(x)$, то досить його двічі проінтегрувати:

$$y''=2x-3x^2 \quad \Rightarrow \quad y'=x^2-x^3+C_1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C_1x+C_2.$$

Визначимо сталі C_1 і C_2, скориставшись початковими умовами:

$$\text{якщо} \quad y'(2)=1, \quad \text{то} \quad 1=4-8+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=5;$$

$$\text{якщо} \quad y(2)=0, \quad \text{то} \quad 0=\frac{8}{3}-4+10+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{26}{3}.$$

Отже, рівняння шуканої *інтегральної кривої*:

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+5x-\frac{26}{3}.$$

Приклад 17. Знайти криві, для яких радіус кривизни обернено пропорційний косинусу кута між дотичною і віссю абсцис.

Розв'язання. *Радіус кривизни кривої* визначається за формулою:

$$R=\frac{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}{y''}.$$

Позначимо через α кут, що утворює дотична з віссю абсцис. Тоді

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Тут ми скористалися геометричним змістом похідної функції в точці $y'(x)=\mathrm{tg}\alpha$.

Тепер, вводячи коефіцієнт пропорційності k, складемо диференціальне рівняння, що відповідає заданій умові:

$$\frac{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}{y''}=\frac{k}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}{y''}=k\sqrt{1+(y')^2},$$

звідки

$$\frac{1+(y')^2}{y''}=k \quad \Rightarrow \quad 1+(y')^2=ky''.$$

Отримане рівняння 2-го порядку не містить ні x, ні y. Знизимо його порядок, поклавши $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$. У результаті маємо

$$1 + p^2 = kp'.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $p(x)$:

$$\int \frac{dp}{1+p^2} = \frac{1}{k}\int dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} p = \frac{1}{k}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + C_1\right).$$

Виконуючи обернену заміну $p(x) = y'$, матимемо

$$y' = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + C_1\right).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знайдемо *сім'ю інтегральних кривих*, що володіють необхідною властивістю:

$$y = -k\ln\left|\cos\left(\frac{x}{k} + C_1\right)\right| + C_2.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке рівняння називається *диференціальним рівнянням n-го порядку*?
2. Сформулювати *теорему існування й єдиності* розв'язку для диференціального рівняння n-го порядку.
3. Що називається *загальним розв'язком* (*загальним інтегралом*) диференціального рівняння n-го порядку?
4. Який розв'язок диференціального рівняння n-го порядку називається *частинним*?
5. У якому випадку розв'язок диференціального рівняння вищого порядку знаходиться безпосереднім інтегруванням?
6. У чому полягає *сенс зниження порядку* диференціального рівняння вищого порядку?
7. Перелічити *основні випадки* зниження порядку диференціального рівняння n-го порядку?
8. Як знизити порядок рівняння, що *не містить шуканої функції y*?
9. Яким чином можна знизити порядок рівняння, що містить *дві послідовні* похідні?
10. Як знизити порядок рівняння, що *не містить незалежної змінної x*?
11. Яким чином можна знизити порядок рівняння, що містить дві похідні, порядки яких *відрізняються на дві одиниці*?
12. Як знизити порядок рівняння *однорідного відносно аргументів* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$?

13. Як діяти в тому випадку коли ліва частина рівняння є *повною похідною* $(n-1)$-го порядку за змінною x від деякої функції?
14. Як формулюється *задача Коші* для рівняння 2-го порядку?
15. Скільки сталих інтегрування містить *загальний розв'язок* диференціального рівняння 2-го порядку?
16. Яким є *геометричний зміст початкових умов* для диференціального рівняння 2-го порядку?
17. Як знайти розв'язок диференціального рівняння вигляду $y'' = f(x)$?
18. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $y' = p(x)$?
19. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння застосовують заміну $y' = p(y)$?
20. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $\frac{y'}{y} = p(x)$?
21. Як знизити порядок диференціального рівняння вигляду $F(y', y'') = 0$?
22. У § 11.4 введено поняття *інтегрувального множника*, множення на який перетворює рівняння 1-го порядку в рівняння в повних диференціалах. Обґрунтуйте або спростуйте можливість використання цього прийому для *зниження порядку* диференціального рівняння.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

1.1. $y'' = \sin 2x$;	1.2. $2xy'' = y'$;
1.3. $2yy'' - y'^2 = 1$;	1.4. $yy'' - y'^2 = 0$;
1.5. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$;	1.6. $2y'^2 = (y-1)y''$;
1.7. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$;	1.8. $(1-x^2)y'' - xy' = 2$;
1.9. $(x-3)y'' + y' = 0$;	1.10. $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$;
1.11. $xy^{IV} - y''' = 0$;	1.12. $yy'' = y'(y'+1)$;
1.13. $y'' = xy' + y + 1$;	1.14. $xy'' - y' = x^2yy'$;
1.15. $xyy'' - xy'^2 = yy'$;	1.16. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

2. Знайти розв'язки диференціальних рівнянь, що відповідають початковим умовам:

2.1. $y'' = \frac{6}{x^3}$, $\quad y(1) = 2$, $\quad y'(1) = 1$;

2.2. $y'' = xe^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2.3. $(y''x - y')y' = x^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$;

2.4. $y^3 y'' + 1 = 0$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$;

2.5. $yy'' + y'^2 = 1$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;

2.6. $3yy'y'' = 1 + y'^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2.7. $y'' = 1 + \dfrac{x(y'-x)}{1-x^2}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2.8. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$;

2.9. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

2.10. $y''' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-1$.

3. Із сім'ї інтегральних кривих рівняння $yy'' = y'$ виділити криву, що проходить через точку $(1;1)$ і дотикається в цій точці до бісектриси першого координатного кута.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$. **1.2.** $y = \frac{2}{3}C_1 x^{3/2} + C_2$. **1.3.** $y = \frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2$.

1.4. $y = C_2 e^{C_1 x}$. **1.5.** $y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1 \sin 2x + C_2$. **1.6.** $y = 1 - \frac{1}{C_1^2 (x + C_2)}$.

1.7. $y = \frac{1}{C_1} x e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_2} e^{1+C_2 x} + C_2$. **1.8.** $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$.

1.9. $y = C_1 \ln|x-3| + C_2$. **1.10.** $y = C_2 - \cos(x + C_1)$.

1.11. $y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$. **1.12.** $C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x}$.

1.13. $y = e^{x^2/2}\left(C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2\right) - 1$. **1.14.** $y = 4C_1 \operatorname{tg}(C_1 x^2 + C_2)$.

1.15. $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. **1.16.** $y^2 = C_1 x^3 + C_2$. **2.1.** $y = \frac{3}{x} + 4x - 5$.

2.2. $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$. **2.3.** $225(y-1)^2 = 8(x-1)^3(3x+2)^2$.

2.4. $y^2 + x^2 = 2x$. **2.5.** $x + y - 1 = 0$. **2.6.** $2x = 3(y-1)^{2/3}$. **2.7.** $y = \frac{x^2}{2} + 1$.

2.8. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(3x-1)^{2/3}$. **2.9.** $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. **2.10.** $y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{4}$.

3. $y = e^{x-1}$.

§ 11.6. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

I. *Лінійним однорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку *зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння, *лінійне відносно невідомої функції* $y(x)$ *й її похідних* y', y'', ..., $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{11.6.1}$$

де всі коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ є числами (деякі з них можуть бути нулями).

Функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються *лінійно залежними* на відрізку $[a;b]$, якщо знайдуться сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$, які не всі дорівнюють нулю й такі, що для всіх x відрізка $[a;b]$ виконується тотожність

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0.$$

У протилежному випадку функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними.*

Сукупність n лінійно незалежних розв'язків $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ лінійного однорідного рівняння n-го порядку утворює його *фундаментальну систему* розв'язків. Якщо відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (11.6.2), то його *загальний розв'язок* має вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{11.6.2}$$

де C_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – довільні сталі.

Визначником Вронського системи функцій $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ називається визначник n-го порядку

$$W(y_i) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Для того щоб система розв'язків $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ однорідного рівняння (11.6.1) була *лінійно незалежною* на відрізку $[a;b]$, необхідно й достатньо, щоб визначник Вронського на цьому відрізку був відмінний від нуля.

II. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням* 2-го порядку *зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{11.6.3}$$

Умова лінійної незалежності двох функцій може бути сформульована так: дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ *лінійно незалежні*, якщо їхнє відношення не є сталою величиною, тобто $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{Const}$. У протилежному випадку вони *лінійно залежні.*

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння 2-го порядку має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{11.6.4}$$

де y_1 і y_2 – два *частинні лінійно незалежні* розв'язки рівняння (11.6.3).

Частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння шукають у вигляді $y=e^{kx}$, тоді $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$. Підставляючи значення y, y' і y'' в рівняння (11.6.3) дістають квадратне рівняння відносно k:

$$k^2+a_1k+a_2=0, \tag{11.6.5}$$

яке називається *характеристичним* для лінійного однорідного рівняння (11.6.3).

Залежно від коренів характеристичного рівняння (11.6.5) можливі такі розв'язки рівняння (11.6.3):

1. Корені k_1 і k_2 характеристичного рівняння *дійсні й різні*, тобто $k_1 \neq k_2$. Частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1=e^{k_1x}, \qquad y_2=e^{k_2x}.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.6.3) буде таким:

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}. \tag{11.6.6}$$

2. Корені характеристичного рівняння *дійсні й кратні*, тобто $k_1=k_2$.

Частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1=e^{k_1x}, \qquad y_2=xe^{k_1x}.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y=e^{k_1x}(C_1+C_2x). \tag{11.6.7}$$

3. Корені характеристичного рівняння *суто уявні*, тобто $k_1=ib$, $k_2=-ib$, $b\neq 0$.

Частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1=\cos bx, \qquad y_2=\sin bx.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.6.3) буде таким:

$$y=C_1\cos bx+C_2\sin bx. \tag{11.6.8}$$

4. Корені характеристичного рівняння *комплексно спряжені*, тобто $k_1=a+ib$, $k_2=a-ib$, $b\neq 0$.

Частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1=e^{ax}\cos bx, \qquad y_2=e^{ax}\sin bx.$$

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx). \tag{11.6.9}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y'-6y=0$.

Розв'язання. Задано лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Щоб записати загальний розв'язок цього рівняння, слід знайти фундаментальну систему розв'язків.

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді $y=e^{kx}$. Тоді

$$y'=ke^{kx}, \qquad y''=k^2e^{kx}.$$

Підставимо значення y, y' і y'' в задане рівняння:

$$k^2e^{kx}+ke^{kx}-6e^{kx}=0 \quad \Rightarrow \quad e^{kx}\left(k^2+k-6\right)=0$$

і скоротимо на відмінний від нуля множник e^{kx}. У результаті одержимо *характеристичне рівняння*, що відповідає заданому однорідному:

$$k^2+k-6=0.$$

Це рівняння є квадратним відносно k. Знаходимо його корені: $k_1=2$, $k_2=-3$. Оскільки корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 *дійсні й різні*, то реалізується випадок **1**. Отже, функції

$$y_1(x)=e^{2x}, \qquad y_2(x)=e^{-3x},$$

є частинними розв'язками рівняння. Ці розв'язки *лінійно незалежні*, оскільки визначник Вронського

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix}=-5e^{-x}\neq 0.$$

Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків. Таким чином, *загальний розв'язок* рівняння дається формулою (11.6.6). Отже,

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-6y'+9y=0$.

Розв'язання. Знайдемо фундаментальну систему розв'язків заданого рівняння, для чого частинні розв'язки шукатимемо у вигляді:

$$y=e^{kx} \quad \Rightarrow \quad y'=ke^{kx} \quad \Rightarrow \quad y''=k^2e^{kx}.$$

Підставляючи значення y, y' і y'' в задане рівняння, отримаємо

$$e^{kx}\left(k^2-6k+9\right)=0.$$

Отже, характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, має вигляд

$$k^2-6k+9=(k-3)^2=0.$$

Як бачимо, корені характеристичного рівняння *дійсні й кратні* $k_{1,2}=3$. Виходить, маємо дві однакові функції $y_{1,2}=e^{3x}$. Але такі функції не утворюють фундаментальну систему розв'язків, оскільки вони *лінійно залежні* (їхнє відношення дорівнює $\dfrac{y_1}{y_2}=1=\text{Const}$).

Отже, щоб частинні розв'язки не збігалися, необхідно "підправити" функцію y_2 так, щоб вона стала лінійно незалежною відносно функції $y_1=e^{3x}$. За таку функцію можна взяти функцію $y_2=xe^{3x}$, як найпростішу. Дійсно, знову скориставшись умовою лінійної незалежності двох функцій, маємо $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^{3x}}{xe^{3x}}=\dfrac{1}{x}\neq \mathrm{Const}$.

Отже, загальний розв'язок заданого однорідного рівняння дається формулою (11.6.7):

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}=e^{3x}\left(C_1+C_2x\right).$$

Зауваження 1. Істотним є те, що, розв'язуючи диференціальне рівняння, ми знаходимо його загальний розв'язок, не інтегруючи!

Приклад 3. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y''+4y=0$; **б)** $y''+2y'+5y=0$.

Розв'язання. Дотримуючись викладеної вище схеми розв'язку лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, шукаємо їхні розв'язки у вигляді $y=e^{kx}$.

а) Характеристичне рівняння для заданого однорідного рівняння має *суто уявні* корені:

$$k^2+4=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} k_1=2i; \\ k_2=-2i. \end{array}\right.$$

Отже, реалізується випадок **3** і частинні лінійно незалежні розв'язки заданого рівняння мають вигляд:

$$y_1(x)=\cos 2x, \qquad y_2(x)=\sin 2x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо так:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Зауваження 2. Лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=0$$

називається рівнянням *гармонічного осцилятора* (див. § 12.2.4.). Його загальний розв'язок описує гармонічні коливання з амплітудою A, власною частотою ω і початковою фазою φ:

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t=A\sin\left(\omega t+\varphi\right).$$

б) Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню:

$$k^2+2k+5=0.$$

Корені цього квадратного рівняння – *комплексно спряжені* числа $k_{1,2}=-1\pm 2i$. Отже, має місце випадок **4**, де дійсна частина $a=-1$ і уявна $b=2$. Виходить, частинними розв'язками заданого рівняння є такі:

$$y_1(x)=e^{-x}\cos 2x, \qquad y_2(x)=e^{-x}\sin 2x.$$

Оскільки ці розв'язки лінійно незалежні (у чому легко переконатися самостійно), то шуканий *загальний розв'язок* заданого рівняння набуває вигляду

$$y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right).$$

Зауваження 3. Лінійні однорідні рівняння вищих порядків розв'язуються аналогічно.

Приклад 4. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

а) $y'''+y''-5y'+3y=0$; **б)** $y^{IV}-13y''+36y=0$;

в) $y^{IV}+8y''+16y=0$; **г)** $y^{IV}-2y''=0$.

Розв'язання. Задано лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами вищих порядків. Використовуючи ту саму схему розв'язання, що й для рівнянь 2-го порядку, шукатимемо їхні частинні розв'язки у вигляді $y=e^{kx}$.

а) У цьому випадку

$$y'=ke^{kx} \quad\Rightarrow\quad y''=k^2e^{kx} \quad\Rightarrow\quad y'''=k^3e^{kx}$$

і маємо таке характеристичне рівняння:

$$k^3+k^2-5k+3=0.$$

Один корінь цього кубічного рівняння легко вгадується: $k_1=1$. Тому

$$(k-1)\left(k^2+2k-3\right)=0.$$

Корені квадратного рівняння $k^2+2k-3=0$ знаходимо за теоремою Вієта:

$$k_2=1, \qquad k_3=-3.$$

Таким чином, корені характеристичного рівняння – дійсні числа. При цьому корені k_1 і k_2 – кратні. Отже, маємо такі частинні розв'язки даного однорідного рівняння:

$$y_1(x)=e^x, \qquad y_2(x)=xe^x, \qquad y_3(x)=e^{-3x}.$$

Ці функції лінійно незалежні. Отже, вони утворюють фундаментальну систему розв'язків і *загальний розв'язок* заданого диференціального рівняння має вигляд

$$y=e^x\left(C_1+C_2x\right)+C_3e^{-3x}.$$

б) Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому лінійному однорідному рівнянню 4-го порядку:

$$k^4-13k^2+36=0.$$

Одержали біквадратне рівняння. Поклавши $k^2=z$, зводимо його до квадратного рівняння відносно z і визначаємо його корені:

$$z^2-13z+36=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} z_1=4; \\ z_2=9. \end{array}\right.$$

Тоді корені біквадратного рівняння

$$k_1 = 2, \qquad k_2 = -2, \qquad k_3 = 3, \qquad k_4 = -3.$$

Всі корені характеристичного рівняння дійсні й різні числа. Отже, частинні розв'язки однорідного рівняння мають вигляд:

$$y_1(x) = e^{2x}, \qquad y_2(x) = e^{-2x}, \qquad y_3(x) = e^{3x}, \qquad y_4(x) = e^{-3x}.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація дає *загальний розв'язок* заданого диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}.$$

в) Задано диференціальне рівняння 4-го порядку. Складемо характеристичне рівняння:

$$k^4 + 8k^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k^2 + 4)^2 = 0.$$

Звідси знаходимо: $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$, тобто корені характеристичного рівняння суто уявні і кратні. У цьому випадку $b = 2$, а кратність кореня дорівнює двом.

Виходить, частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд:

$$y_1(x) = \cos 2x, \qquad y_2(x) = x\cos 2x, \qquad y_3(x) = \sin 2x, \qquad y_4(x) = x\sin 2x.$$

Отже, *загальний розв'язок* диференціального рівняння

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x.$$

г) Характеристичне рівняння $k^4 - 2k^2 = 0$, що відповідає заданому диференціальному рівнянню, має корені $k_{1,2} = 0$, $k_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

Оскільки корені k_1 і k_2 дійсні й кратні, то їм відповідають частинні розв'язки:

$$y_1(x) = e^{0\cdot x} = 1, \qquad y_2(x) = x e^{0\cdot x} = x.$$

Корені k_3 і k_4 дійсні й різні, отже,

$$y_3(x) = e^{\sqrt{2}x}, \qquad y_4(x) = e^{-\sqrt{2}x}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння матиме вигляд

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Приклад 5. Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють задані початкові умови (*задача Коші*):

а) $3y'' - 2y' - 8y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 6;$

б) $\rho''_{\varphi\varphi} + 3\rho'_{\varphi} = 0, \qquad \rho(0) = 1, \qquad \rho'_{\varphi}(0) = 3;$

в) $\dfrac{d^2 s}{dt^2} - 2\dfrac{ds}{dt} + 10s = 0, \qquad s\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0, \qquad \dfrac{ds}{dt}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = e^{\pi/6}.$

Розв'язання. Спочатку слід знайти фундаментальну систему розв'язків, потім скласти загальний розв'язок, нарешті, використовуючи початкові умови, знайти частинний розв'язок.

а) Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, і знайдемо його корені:

$$3k^2 - 2k - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 2; \\ k_2 = -\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Отже, $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-4x/3}$ і *загальний розв'язок* однорідного рівняння буде таким:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x/3}.$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами, для чого попередньо знайдемо

$$y' = 2C_1 e^{2x} - \frac{4}{3} C_2 e^{-4x/3}.$$

У результаті маємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 6 = 2C_1 - \dfrac{4}{3} C_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{11}{5}, \\ C_2 = -\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Підставляючи значення сталих C_1 і C_2 в загальний розв'язок, знаходимо шуканий *частинний розв'язок* однорідного рівняння:

$$y = \frac{11}{5} e^{2x} - \frac{6}{5} e^{-4x/3}.$$

б) Оскільки функція ρ залежить від змінної φ, то частинні розв'язки шукаємо у вигляді:

$$\rho = e^{k\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho'_{\varphi} = k e^{k\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho''_{\varphi\varphi} = k^2 e^{k\varphi}.$$

Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 + 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 0; \\ k_2 = -3. \end{array}\right.$$

Отже, $\rho_1(\varphi) = e^{0\varphi} = 1$, $\rho_2(\varphi) = e^{-3\varphi}$ і *загальний розв'язок* заданого рівняння має вигляд

$$\rho(\varphi)=C_1+C_2e^{-3\varphi}.$$

Знайдемо $\rho'_\varphi=-3C_2e^{-3\varphi}$. Тепер, використовуючи початкові умови, визначимо сталі C_1 і C_2:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\ 3=-3C_2\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned}&C_1=2,\\ &C_2=-1.\end{aligned}\right.$$

Таким чином, розв'язок рівняння, що задовольняє задані початкові умови,

$$\rho(\varphi)=2-e^{-3\varphi}.$$

в) Частинні розв'язки цього рівняння шукаємо у вигляді $s=e^{kt}$. Дістаємо таке характеристичне рівняння:

$$k^2-2k+10=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=1\pm 3i.$$

Оскільки його корені комплексні, то загальним розв'язком заданого однорідного рівняння є:

$$s=e^t\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right).$$

Для знаходження частинного розв'язку, що задовольняє початкові умови, визначимо спочатку $\dfrac{ds}{dt}$:

$$\frac{ds}{dt}=e^t\left(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t\right)+3e^t\left(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t\right).$$

Поклавши $t=\dfrac{\pi}{6}$ у формулах для s і $\dfrac{ds}{dt}$, маємо:

$$\begin{cases}0=e^{\pi/6}\left(C_1\cos\dfrac{\pi}{2}+C_2\sin\dfrac{\pi}{2}\right), & (1)\\ e^{\pi/6}=e^{\pi/6}\left(C_1\cos\dfrac{\pi}{2}+C_2\sin\dfrac{\pi}{2}\right)+3e^{\pi/6}\left(-C_1\sin\dfrac{\pi}{2}+C_2\cos\dfrac{\pi}{2}\right). & (2)\end{cases}$$

З рівняння (1) випливає $C_2=0$. Тоді з рівняння (2) знаходимо:

$$e^{\pi/6}=-3e^{\pi/6}C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=-\frac{1}{3}.$$

Отже, розв'язок *задачі Коші* має вигляд

$$s=-\frac{1}{3}e^t\cos 3t.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням* n-го порядку?
2. Яке диференціальне рівняння називається *лінійним однорідним* рівнянням *зі сталими коефіцієнтами*?
3. Довести, що для лінійних однорідних рівнянь виконуються умови *теореми існування і єдиності розв'язку*.
4. Які функції називаються *лінійно незалежними*?
5. Який визначник називається *визначником Вронського*?
6. Яким чином умови *лінійної незалежності* системи функцій $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ пов'язані з *визначником Вронського*?
7. Що можна сказати про функції y_1 і y_2, задані на відрізку $[a;b]$, якщо для цих функцій визначник Вронського $W\left(y_1(x),y_2(x)\right)$ дорівнює нулю?
8. Які два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння 2-го порядку називаються *лінійно незалежними*?
9. Чи є функції $y_1=\sin^2 x$ і $y_2=\cos x$ лінійно незалежними в будь-якому проміжку?
10. Чи можуть функції $y_1=x^k$ і $y_2=x^m$, де k і m – натуральні, $k\neq m$, бути лінійно незалежними в якому-небудь проміжку?
11. У якому вигляді слід шукати *частинні розв'язки* лінійного однорідного диференціального рівняння?
12. Яке рівняння називається *характеристичним*?
13. Що розуміють під *фундаментальною системою розв'язків* лінійного однорідного рівняння?
14. Якою є структура *загального розв'язку* лінійного однорідного рівняння?
15. Доведіть або спростуйте таке твердження: щоб знайти *загальний розв'язок* лінійного однорідного рівняння n-го порядку достатньо знайти n його *частинних* лінійно незалежних на відрізку $[a;b]$ *розв'язків*, помножити кожен з них на довільну сталу й всі ці добутки скласти.
16. Як записується загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння 2-го порядку, якщо корені характеристичного рівняння:
    а) дійсні, $k_1\neq k_2$; **б**) дійсні, $k_1=k_2$;
    в) уявні, $k_{1,2}=\pm ib$, **г**) комплексні, $k_{1,2}=a\pm ib$.
17. Сформулювати *алгоритм розв'язання* лінійного однорідного диференціального рівняння.
18. Чи може функція $y=\ln x$ бути розв'язком рівняння $y''+py'+qy=0$, де $p=\mathrm{Const}$, $q=\mathrm{Const}$?
19. Що таке *гармонічний осцилятор*? Яке диференціальне рівняння його описує?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $y''-2y'=0$; 1.2. $y''+12y'+37y=0$;
1.3. $9y''-6y'+y=0$; 1.4. $y''+16y=0$;
1.5. $6y''+7y'-3y=0$; 1.6. $9y''+3y'-2y=0$;
1.7. $y''+9y'=0$; 1.8. $y''+8y'+25y=0$;
1.9. $y''-y=0$; 1.10. $y''-4y'+4y=0$;
1.11. $y'''-y''+4y'-4y=0$; 1.12. $y^{IV}-6y''+9y=0$.

2. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови:

2.1. $y''-10y'+25y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;
2.2. $9\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\rho=0$, $\rho\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2$, $\dfrac{d\rho}{d\varphi}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$;
2.3. $y''+3y'=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;
2.4. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+s=0$, $s(0)=4$, $\dfrac{ds}{dt}(0)=2$;
2.5. $y''+2y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;
2.6. $y''-4y'+4y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$;
2.7. $\dfrac{d^2s}{dt^2}+4\dfrac{ds}{dt}+29s=0$, $s(0)=0$, $\dfrac{ds}{dt}(0)=15$;
2.8. $y^{V}-y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=1$, $y^{IV}(0)=2$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y=C_1+C_2e^{2x}$. **1.2.** $y=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **1.3.** $y=e^{x/3}(C_1+C_2x)$.
1.4. $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$. **1.5.** $y=C_1e^{x/3}+C_2e^{-3x/2}$.
1.6. $y=C_1e^{x/3}+C_2e^{-2x/3}$. **1.7.** $y=C_1+C_2e^{-9x}$.
1.8. $y=e^{-4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **1.9.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.
1.10. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)$. **1.11.** $y=C_1e^{x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.
1.12. $y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2xe^{\sqrt{3}x}+C_3e^{-\sqrt{3}x}+C_3xe^{-\sqrt{3}x}$. **2.1.** $y=xe^{5x}$. **2.2.** $\rho=2\sin\dfrac{\varphi}{3}$.
2.3. $y=\dfrac{1}{3}\left(5-2e^{-3x}\right)$ **2.4.** $s=e^{t}(4-2t)$. **2.5.** $y=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$.
2.6. $y=e^{2x}(3-7x)$. **2.7.** $s=3e^{-2t}\sin 5t$. **2.8.** $y=e^{x}+\cos x-2$.

§ 11.7. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

I. *Лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку *зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (11.7.1)$$

де $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n$ – дійсні числа, а $f(x)\neq 0$.

Теорема (*про структуру загального розв'язку*). *Загальний розв'язок* рівняння (11.7.1) являє собою суму *загального розв'язку* $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння (11.6.2) і якого-небудь *частинного розв'язку* y^* рівняння (11.7.1)

$$y=\overline{y}+y^*, \qquad (11.7.2)$$

II. *Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку* називається рівняння

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x). \qquad (11.7.3)$$

Його *загальний розв'язок* визначається формулою

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*, \qquad (11.7.4)$$

де $C_1y_1+C_2y_2=\overline{y}$ – *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння 2-го порядку (11.6.3), а y^* – *частинний розв'язок* неоднорідного рівняння (11.7.3).

Методика знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння докладно викладена в § 11.6. Зупинимося на знаходженні частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

РІВНЯННЯ ІЗ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ. МЕТОД ПІДБОРУ ЧАСТИННОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Якщо права частина рівняння (11.7.1) має спеціальний вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right], \qquad (11.7.5)$$

де α і β – сталі; $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени від x степеня m і n відповідно, то частинний розв'язок рівняння (11.7.1) слід шукати у вигляді

$$y^*=x^{\ell}e^{\alpha x}\left[p_s(x)\cos\beta x+q_s(x)\sin\beta x\right]. \qquad (11.7.6)$$

Тут ℓ дорівнює показнику кратності пари коренів $\alpha\pm\beta i$ характеристичного рівняння

$$k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

(якщо характеристичне рівняння такої пари коренів не має, то слід покласти $\ell=0$); $p_s(x)$ і $q_s(x)$ – повні многочлени від x степеня s з невизначеними коефіцієнтами, причому s дорівнює найбільшому із чисел m і n, тобто $s=\max\{m;n\}$; числа α і β у формулах (11.7.5) і (11.7.6) ті самі.

Окремі випадки:

1. Нехай $\alpha = 0$, $\beta = 0$, тобто права частина неоднорідного рівняння – многочлен

$$f(x) = P_m(x).$$

а) Якщо серед коренів характеристичного рівняння немає кореня $k = 0$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$y^* = p_m(x).$$

б) Якщо серед коренів характеристичного рівняння є корінь $k = 0$ кратності ℓ (*резонансний випадок*), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^\ell p_m(x).$$

Тут $p_m(x)$ – повний многочлен степеня m (тобто того самого степеня, що й заданий) з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 36y = -36x^3 + 66x + 36.$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку такого рівняння (11.7.2) знайдемо спочатку загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння

$$y'' + 36y = 0.$$

Характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, має суто уявні корені

$$k^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 6i.$$

Отже, фундаментальну систему складають функції $\cos 6x$ і $\sin 6x$, а *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$\overline{y} = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x.$$

Тепер за виглядом правої частини цього неоднорідного рівняння підберемо його частинний розв'язок y^*. Права частина заданого рівняння представлена многочленом 3-го степеня $P_3(x)$, а серед коренів характеристичного рівняння $k_{1,2}$ немає нуля. Має місце випадок **1а**. Отже, частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді многочлена того самого 3-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, що містить всі степені незалежної змінної x:

$$y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Підкреслимо, що многочлен має бути повним, тобто містити всі степені x від 3 до 0. Щоб знайти невизначені коефіцієнти A, B, C, D, необхідно підставити у вихідне рівняння передбачуваний розв'язок y^* і зрівняти коефіцієнти при однакових степенях змінної x в обох частинах рівності.

Знайдемо похідні функції y^*:

$$(y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad (y^*)'' = 6Ax + 2B$$

і підставимо y^* і $(y^*)''$ у вихідне рівняння:

$$6Ax + 2B + 36\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = -36x^3 + 66x + 36,$$

$$36Ax^3 + 36Bx^2 + (36C + 6A)x + 36D + 2B = -36x^3 + 66x + 36.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 36A = -36, \\ x^2 & 36B = 0, \\ x^1 & 36C + 6A = 66, \\ x^0 & 36D + 2B = 36, \end{array}$$

звідки $A = -1$, $B = 0$, $C = 2$, $D = 1$.

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* має вигляд

$$y^* = -x^3 + 2x + 1.$$

Тоді *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння буде таким:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' = 1 + 2x - 4x^2.$$

Розв'язання. Оскільки загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = \overline{y} + y^*,$$

то послідовно шукатимемо $\overline{y}$ і y^*.

1. Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 0, \\ k_2 = 2. \end{array}\right.$$

Дійсним і різним кореням характеристичного рівняння відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = e^{2x}.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

2. Права частина заданого лінійного неоднорідного рівняння містить многочлен 2-го степеня, а серед коренів характеристичного рівняння є однократний $(\ell = 1)$ простий корінь $k_1 = 0$. Отже, маємо випадок **1б** (резонанс).

Частинний розв'язок y^* цього рівняння слід шукати у вигляді повного многочлена 2-ого степеня з невизначеними коефіцієнтами, помноженого на змінну x:

$$y^* = x \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо:

$$(y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad (y^*)'' = 6Ax + 2B.$$

Маємо:

$$6Ax + 2B - 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -4x^2 + 2x + 1,$$

$$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = -4x^2 + 2x + 1.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, знайдемо:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -6A = -4, \\ x^1 & 6A - 4B = 2, \\ x^0 & 2B - 2C = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{2}{3}, \\ B = \dfrac{1}{2}, \\ C = 0. \end{array}\right.$$

Тоді *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y^* = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

3. *Загальний розв'язок* вихідного неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(V)} + y''' = x^2 - 1.$$

Розв'язання. 1. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 5-го порядку. Частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння

$$y^{(V)} + y''' = 0,$$

як завжди (див. § 11.6), шукатимемо у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}, \quad \ldots, \quad y^{(V)} = k^5 e^{kx}.$$

Характеристичне рівняння $k^5 + k^3 = 0$ має корені: $k_{1,2,3} = 0$ – дійсні кратності 3 і суто уявні $k_{4,5} = \pm i$. Дійсним кореням відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$, а уявним – $y_4(x) = \cos x$, $y_5(x) = \sin x$. Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*:

$$\overline{y} = e^{0x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) + C_4 \cos x + C_5 \sin x = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x$$

2. За виглядом правої частини заданого рівняння підберемо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*. Оскільки в правій частині рівняння маємо многочлен 2-го степеня, а характеристичне рівняння має корені $k = 0$ кратності 3, тобто $\ell = 3$, то відповідно до пункту **1б** маємо

$$y^* = x^3 \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3.$$

Нам знадобляться похідні від y^* до 5-го порядку включно:

$$(y^*)' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2, \qquad (y^*)'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx,$$

$$(y^*)''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C, \qquad (y^*)^{(IV)} = 120Ax + 24B, \qquad (y^*)^{(V)} = 120A.$$

Підставляючи знайдені похідні у вихідне рівняння, одержимо:

$$120A + 60Ax^2 + 24Bx + 6C = x^2 - 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 60A = 1, \\ x^1 & 24B = 0, \\ x^0 & 120A + 6C = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{60}, \\ B = 0, \\ C = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

У результаті маємо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y^* = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3.$$

3. *Загальний розв'язок* заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння 5-го порядку запишемо у вигляді

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3.$$

2. Нехай у виразі (11.7.5) $\beta=0$, тобто права частина неоднорідного рівняння являє собою добуток показникової функції на многочлен

$$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x).$$

а) Якщо серед коренів характеристичного рівняння немає кореня $k=\alpha$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$y^*=e^{\alpha x}p_m(x).$$

б) Якщо серед коренів характеристичного рівняння є корінь $k=\alpha$ кратності ℓ (*резонансний випадок*), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y^*=x^{\ell}e^{\alpha x}p_m(x),$$

де $p_m(x)$ – повний многочлен степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-6y'+10y=17e^{-x}.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд $y=\overline{y}+y^*$.

1. Складемо відповідне однорідне рівняння

$$y''-6y'+10y=0.$$

Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2-6k+10=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=3\pm\sqrt{-1}=3\pm i.$$

Для комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x)=e^{3x}\cos x, \qquad y_2(x)=e^{3x}\sin x.$$

Тому *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд

$$\overline{y}=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

2. Права частина рівняння являє собою добуток показникової функції e^{-x} на многочлен нульового степеня $P_0(x)=17$. При цьому число $\alpha=-1$ не є коренем характеристичного рівняння, тобто $k_{1,2}\neq\alpha$. Отже, реалізується випадок **2а**, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $y^*=Ae^{-x}$. Тоді

$$(y^*)'=-Ae^{-x}, \qquad (y^*)''=Ae^{-x}.$$

Після підстановки y^* і його похідних у вихідне рівняння знайдемо

$$Ae^{-x}+6Ae^{-x}+10Ae^{-x}=17e^{-x} \quad\Rightarrow\quad 17Ae^{-x}=17e^{-x} \quad\Rightarrow\quad A=1.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y^*=e^{-x}.$$

3. *Загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$y=\overline{y}+y^*=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'''-y''=3xe^{x}.$$

Розв'язання. 1. Задано лінійне неоднорідне рівняння 3-го порядку. Відповідне однорідне рівняння $y'''-y''=0$ зводиться до характеристичного рівняння $k^3-k^2=0$, що має дійсні корені $k_{1,2}=0$, $k_3=1$. Виходить, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють лінійно незалежні функції $y_1(x)=1$, $y_2(x)=x$, $y_3(x)=e^{x}$. Складемо *загальний розв'язок* однорідного рівняння:

$$\overline{y}=C_1+C_2x+C_3e^{x}.$$

2. Права частина неоднорідного рівняння являє собою добуток многочлена першого степеня $P_1(x)=3x$ на експоненту e^{x}, причому $\alpha=1$ збігається з одним з коренів характеристичного рівняння ($\ell=1$). Отже, маємо резонанс. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, відповідно до пункту **2б**, шукатимемо у вигляді

$$y^*=x\cdot(Ax+B)e^{x}=(Ax^2+Bx)e^{x}.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку y^*:

$$(y^*)'=e^{x}(Ax^2+2Ax+Bx+B), \qquad (y^*)''=e^{x}(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B),$$

$$(y^*)'''=e^{x}(Ax^2+6Ax+Bx+6A+3B)$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$e^{x}(Ax^2+6Ax+Bx+6A+3B)-e^{x}(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)=3xe^{x},$$

$$2Ax+4A+B=3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності, знайдемо невизначені коефіцієнти A і B:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 2A=3, \\ x^0 & 4A+B=0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} A=\dfrac{3}{2}, \\ B=-6. \end{array}\right.$$

Тоді *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y^*=\left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)e^{x}.$$

3. Отже, *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння буде таким:

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 + C_2 x + \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x + C_3\right)e^x .$$

Зауваження 1. Задане рівняння (як і деякі інші) допускає зниження порядку. Дійсно, якщо ввести функцію $p(x) = y''$, то $y''' = p'(x)$ і дістаємо лінійне рівняння 1-го порядку (див. § 11.3) відносно функції $p(x)$:

$$p' - p = 3xe^x .$$

Його загальний розв'язок: $p(x) = e^x\left(\frac{3}{2}x^2 + C_1\right)$. Виконуючи обернену заміну, отримаємо рівняння 2-го порядку відносно функції $y(x)$:

$$y'' = e^x\left(\frac{3}{2}x^2 + C_1\right),$$

загальний розв'язок якого знаходиться двократним інтегруванням.

Перший спосіб (підбору частинного розв'язку) кращий, оскільки диференціювати вираз, що містить добуток многочлена на експоненту, простіше, ніж інтегрувати його частинами.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 12y' + 36y = 12xe^{6x} .$$

Розв'язання. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y = \overline{y} + y^* .$$

1. Знайдемо загальний розв'язок $\overline{y}$ лінійного однорідного рівняння

$$y'' - 12y' + 36y = 0 .$$

Відповідне характеристичне рівняння має дійсні кратні корені:

$$k^2 - 12k + 36 = (k-6)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 6,$$

яким відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння $y_1(x) = e^{6x}$, $y_2(x) = xe^{6x}$. *Загальний розв'язок* набуває вигляду

$$\overline{y} = e^{6x}(C_1 + C_2 x) .$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 12xe^{6x}$, де $\alpha = 6$ і $P_1(x) = 12x$. При цьому $k_{1,2} = \alpha$, тобто число 6 є двократним коренем $(\ell = 2)$ характеристичного рівняння. Отже, маємо резонанс і частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння, відповідно до пункту **2б**, слід шукати у вигляді

$$y^* = x^2 \cdot (Ax + B)e^{6x} = \left(Ax^3 + Bx^2\right)e^{6x} .$$

Щоб знайти невизначені коефіцієнти A і B, двічі продиференціюємо передбачуваний розв'язок y^*:

$$(y^*)' = \left(3Ax^2 + 2Bx\right)e^{6x} + 6e^{6x}\left(Ax^3 + Bx^2\right) = e^{6x}\left(6Ax^3 + 3Ax^2 + 6Bx^2 + 2Bx\right),$$

$$(y^*)'' = e^{6x}\left(36Ax^3 + 36Ax^2 + 36Bx^2 + 6Ax + 24Bx + 2B\right)$$

і підставимо отримані похідні в задане неоднорідне рівняння:

$$e^{6x}\left(36Ax^3 + 36Ax^2 + 36Bx^2 + 6Ax + 24Bx + 2B\right) -$$

$$-12e^{6x}\left(6Ax^3 + 3Ax^2 + 6Bx^2 + 2Bx\right) + 36e^{6x}\left(Ax^3 + Bx^2\right) = 12xe^{6x} .$$

Спрощуючи, знайдемо:

$$6Ax + 2B = 12x \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = 2, \\ B = 0. \end{array}\right.$$

Отже, маємо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y^* = 2x^3 e^{6x} .$$

3. Загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння запишемо так:

$$y = \overline{y} + y^* = e^{6x}(C_1 + C_2 x) + 2x^3 e^{6x} = e^{6x}\left(C_1 + C_2 x + 2x^3\right).$$

3. Нехай у виразі (11.7.5) $\alpha = 0$, тобто права частина неоднорідного рівняння являє собою суму добутків многочленів на тригонометричні функції:

$$f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x .$$

а) Якщо серед коренів характеристичного рівняння немає пари $k = \pm\beta i$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$y^* = p_s(x)\cos\beta x + q_s(x)\sin\beta x .$$

б) Якщо серед коренів характеристичного рівняння є пара $k = \pm\beta i$ кратності ℓ (*резонансний випадок*), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y^* = x^\ell\left[p_s(x)\cos\beta x + q_s(x)\sin\beta x\right],$$

де $p_s(x)$ і $q_s(x)$ – повні многочлени степеня s ($s = \max\{m; n\}$) з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 7. Знайти розв'язки диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови (*задача Коші*):

$$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 0 .$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі Коші спочатку потрібно знайти загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, а потім за допомогою початкових умов виділити з нього частинний розв'язок. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, як і раніше, шукатимемо у вигляді:

$$y=\overline{y}+y^*.$$

1. Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y''-2y'+y=0.$$

Характеристичне рівняння $k^2-2k+1=0$ має дійсний двократний корінь $k_{1,2}=1$, тому фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння складають функції $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=xe^x$.

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2xe^x.$$

2. Права частина неоднорідного рівняння являє собою алгебраїчну суму добутків многочленів нульового степеня $P_0(x)=-12$ і $Q_0(x)=-9$ на тригонометричні функції $\sin\beta x=\sin 2x$ і $\cos\beta x=\cos 2x$, тобто $\beta=2$. Враховуючи ту обставину, що числа $\pm\beta i=\pm 2i$ не є коренями характеристичного рівняння, маємо випадок **3а**. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Знайдемо

$$(y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\qquad (y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$$

і підставимо у вихідне рівняння:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4A\sin 2x-4B\cos 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=$$

$$=-12\cos 2x-9\sin 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$\begin{array}{c|c} \sin 2x & 4A-3B=-9, \\ \cos 2x & 3A+4B=12 \end{array}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} A=0, \\ B=3. \end{array}\right.$$

З урахуванням знайдених невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y^*=3\sin 2x.$$

3. Отже, *загальний розв'язок неоднорідного рівняння* запишемо так:

$$y=\overline{y}+y^*=e^x(C_1+C_2x)+3\sin 2x.$$

4. Щоб задовольнити обидві початкові умови, слід знайти похідну від загального розв'язку:

$$y'=e^x(C_1+C_2+C_2x)+6\cos 2x.$$

Тепер визначимо довільні сталі, для чого скористаємося початковими умовами:

$$\begin{array}{l} y(0)=-2, \\ y'(0)=0 \end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} -2=C_1, \\ 0=C_1+C_2+6 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} C_1=-2, \\ C_2=-4. \end{array}\right.$$

У підсумку одержуємо розв'язок *задачі Коші*:

$$y=-2e^x(1+2x)+3\sin 2x.$$

Приклад 8. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$y''+6y'+13y=-75\sin 2x.$$

<u>*Розв'язання*</u>. 1. Для лінійного однорідного рівняння $y''+6y'+13y=0$, що відповідає заданому неоднорідному, маємо таке характеристичне рівняння:

$$k^2+6k+13=0\quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=-3\pm 2i,$$

де $a=-3$ і $b=2$. Отже, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x)=e^{-3x}\cos 2x$, $y_2(x)=e^{-3x}\sin 2x$, а його *загальний розв'язок* має вигляд

$$\overline{y}=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

2. Права частина заданого неоднорідного рівняння є добуток многочлена нульового степеня $Q_0(x)=-75$ на тригонометричну функцію $\sin\beta x=\sin 2x$, тобто $\beta=2$:

$$f(x)=-75\sin 2x.$$

Оскільки числа $\pm\beta i=\pm 2i$ не є коренями характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння, відповідно до пункту **3а**, шукатимемо у вигляді

$$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Тоді

$$(y^*)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\qquad (y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Підставивши y^* і його похідні у вихідне рівняння, отримаємо:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-12A\sin 2x+12B\cos 2x+13A\cos 2x+13B\sin 2x=$$

$$=-75\sin 2x,$$

$$(9B-12A)\sin 2x+(12B+9A)\cos 2x=-75\sin 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$\begin{array}{c|c} \sin 2x & 9B-12A=-75, \\ \cos 2x & 12B+9A=0. \end{array}$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь із двома невідомими, знаходимо $A=4$, $B=-3$. Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* має вигляд:

$$y^*=4\cos 2x-3\sin 2x.$$

3. Тоді, відповідно до теореми про структуру *загального розв'язку* лінійного неоднорідного рівняння, маємо:

$$y=\overline{y}+y^*=e^{-3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+4\cos 2x-3\sin 2x.$$

Зауваження 2. Звернемо увагу, що навіть тоді, коли права частина рівняння містить лише одну тригонометричну функцію $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, у передбачуваний частинний розв'язок слід включати обидві ці функції. Інакше кажучи, з того, що $f(x)$ не містить $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, зовсім не випливає, що й y^* не містить будь-якої із цих функцій.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''+y=-4x\cos x.$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок лінійного однорідного рівняння $y''+y=0$, що відповідає заданому неоднорідному.

Корені характеристичного рівняння $k^2+1=0$ суто уявні: $k_{1,2}=\pm i$. Їм відповідає пара лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Права частина заданого неоднорідного рівняння – добуток многочлена першого степеня $P_1(x)=-4x$ на функцію $\cos\beta x=\cos x$, тобто $\beta=1$. При цьому числа $\pm\beta i=\pm i$ є простими коренями характеристичного рівняння, тобто $\ell=1$. Отже, має місце резонанс (частота власних коливань збігається із частотою вимушених коливань, (див. далі § 12.2.4)). Відповідно до пункту **3б**, частинний розв'язок y^* слід шукати у вигляді

$$y^*=x\cdot\left[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x\right]=\left(Ax^2+Bx\right)\sin x+\left(Cx^2+Dx\right)\cos x.$$

Тоді

$$(y^*)'=\left(2Ax+B-Cx^2-Dx\right)\sin x+\left(2Cx+D+Ax^2+Bx\right)\cos x,$$

$$(y^*)''=\left(2A-2D-Ax^2-Bx-4Cx\right)\sin x+\left(2B+2C-Cx^2-Dx+4Ax\right)\cos x.$$

Після підстановки в рівняння матимемо рівність:

$$(2A-2D-4Cx)\sin x+(2B+2C+4Ax)\cos x=-4x\cos x$$

або

$$(2A-2D)\sin x+(2B+2C)\cos x-4Cx\sin x+4Ax\cos x=-4x\cos x.$$

Складемо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x\sin x & -4C=0,\\ x\cos x & 4A=-4,\\ \sin x & 2A-2D=0,\\ \cos x & 2B+2C=0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C=0,\\ A=-1,\\ D=-1,\\ B=0. \end{cases}$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду

$$y^*=-x^2\sin x-x\cos x,$$

а *загальний розв'язок* вихідного неоднорідного рівняння

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\sin x-x\cos x=\left(C_1-x\right)\cos x+\left(C_2-x^2\right)\sin x.$$

Зауваження 3. Привабливість *методу підбору частинного розв'язку* полягає в тому, що звична (але не завжди проста) процедура інтегрування диференціального рівняння заміняється більш простішими операціями диференціювання передбачуваного частинного розв'язку й подальшого розв'язання системи алгебраїчних рівнянь із невизначеними коефіцієнтами. Сам частинний розв'язок підбираємо за виглядом правої частини лінійного неоднорідного рівняння, керуючись певними правилами.

Приклад 10. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''-6y'+13y=13e^{-3x}\sin 2x.$$

Розв'язання. 1. Запишемо однорідне рівняння

$$y''-6y'+13y=0$$

й складемо характеристичне рівняння:

$$k^2-6k+13=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=3\pm 2i.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то згідно з (11.6.8) маємо такий *загальний розв'язок однорідного рівняння*:

$$\overline{y}=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right).$$

2. Права частина заданого неоднорідного рівняння $f(x)=13e^{-3x}\sin 2x$ не відповідає жодному з розглянутих вище окремих випадків, оскільки являє собою добуток многочлена нульового степеня $Q_0(x)=13$ на показникову функцію $e^{\alpha x}=e^{-3x}$ і тригонометричну функцію $\sin\beta x=\sin 2x$, тобто $\alpha=-3$, $\beta=2$. Таким чином, має місце загальний випадок (11.7.5).

При цьому числа $\alpha\pm\beta i=-3\pm 2i$ не збігаються з коренями характеристичного рівняння $k_{1,2}$. Отже, $\ell=0$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y^*=e^{-3x}\left(A\sin 2x+B\cos 2x\right).$$

Тоді

$$(y^*)' = e^{-3x}\left[(2A-3B)\cos 2x-(3A+2B)\sin 2x\right],$$

$$(y^*)'' = e^{-3x}\left[(5B-12A)\cos 2x+(5A+12B)\sin 2x\right].$$

Підставляємо у вихідне рівняння і скорочуємо на спільний множник e^{-3x}:

$$(5B-12A)\cos 2x+(5A+12B)\sin 2x-(12A-18B)\cos 2x+(18A+12B)\sin 2x+$$
$$+13A\sin 2x+13B\cos 2x=13\sin 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$\begin{array}{l|l} \sin 2x & 36A+24B=13, \\ \cos 2x & -24A+36B=0. \end{array}$$

Розв'язуючи отриману систему двох рівнянь із двома невідомими, знайдемо $A=\dfrac{1}{4}$ і $B=\dfrac{1}{6}$. Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y^* = e^{-3x}\left(\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{6}\cos 2x\right).$$

3. *Загальний розв'язок* вихідного рівняння має вигляд:

$$y=\bar{y}+y^*=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+e^{-3x}\left(\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{6}\cos 2x\right).$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-2y'+2y=-2e^x\sin x.$$

Розв'язання. 1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-2y'+2y=0$, для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$k^2-2k+2=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=1\pm i.$$

Маємо *загальний розв'язок однорідного рівняння*:

$$\bar{y}=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right).$$

2. Права частина неоднорідного рівняння $f(x)=-2e^x\sin x$ є функцією спеціального вигляду (11.7.5), де $P_0(x)=-2$, $\alpha=1$, $\beta=1$. Причому числа $\alpha\pm\beta i=1\pm i$ збігаються з коренями характеристичного рівняння $k_{1,2}$ (маємо резонанс). Отже, частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді (11.7.6), де $\ell=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$:

$$y^*=x\cdot\left[e^x\left(A\cos x+B\sin x\right)\right].$$

Тоді

$$(y^*)'=e^x\left\{(A\cos x+B\sin x)+x\left[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x\right]\right\},$$

$$(y^*)''=2e^x\left\{\left[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x\right]+x(-A\sin x+B\cos x)\right\}.$$

Після підстановки у вихідне рівняння скоротимо обидві частини рівності на спільний множник $2e^x$ і дістанемо:

$$\left[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x\right]+x(-A\sin x+B\cos x)-(A\cos x+B\sin x)-$$
$$-x\left[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x\right]+x(A\cos x+B\sin x)=-\sin x,$$
$$B\cos x-A\sin x=-\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, визначимо $A=1$, $B=0$. З урахуванням значень невизначених коефіцієнтів запишемо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y^*=xe^x\cos x.$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого рівняння має вигляд

$$y=\bar{y}+y^*=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x+x\cos x\right).$$

Зауваження 4. Взагалі кажучи, немає особливої потреби щоразу звертатися до окремих випадків вираження спеціального вигляду (11.7.5). Будь-яку праву частину лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна безпосередньо порівнювати із цим виразом і робити відповідні висновки відносно вигляду частинного розв'язку неоднорідного рівняння (11.7.6). Покажемо це в наступних прикладах.

Приклад 12. Вказати вигляд частинних розв'язків диференціальних рівнянь:

а) $y''-4y=x^2e^{2x}$; **б)** $y''+9y=\left(x^2+1\right)e^{3x}$;

в) $y''+2y'+2y=e^x\cos x$; **г)** $y'''-3y''+3y'-y=2e^x$.

Розв'язання. Щоб указати частинний розв'язок неоднорідного рівняння y^* необхідно насамперед перевірити, чи не збігається вираз $\alpha\pm\beta i$ із коренями характеристичного рівняння, як це ми робили в розглянутих вище прикладах. А це означає, що слід скласти однорідне рівняння, яке відповідає заданому неоднорідному, одержати характеристичне рівняння і знайти його корені. І лише після цього скористатися формулою (11.7.6) або будь-яким її окремим випадком.

а) Характеристичне рівняння $k^2-4=0$ має корені $k_{1,2}=\pm 2$. Права частина неоднорідного рівняння являє собою добуток многочлена другого степеня $P_2(x)=x^2$ на показникову функцію e^{2x}. У цьому випадку $\alpha=2$, $\beta=0$

і вираз $\alpha \pm \beta i = 2$ співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння $k_1 = 2$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд (11.7.6), де слід взяти $\ell = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $s = 2$, тобто

$$y^* = x \cdot e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

б) Корені характеристичного рівняння $k^2 + 9 = 0$ суто уявні: $k_{1,2} = \pm 3i$. Функція $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{3x}$ – це добуток многочлена $P_2(x) = x^2 + 1$ на експоненту e^{3x}. Отже, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ і вираз $\alpha \pm \beta i = 3$ не збігається з коренями характеристичного рівняння. У частинному розв'язку неоднорідного рівняння вигляду (11.7.6) слід покласти $\ell = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $s = 2$, тобто

$$y^* = e^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

в) Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 2 = 0$ має комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = -1 \pm i$. З виразу $f(x) = e^x \cos x$ випливає, що $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Складений за цим значенням вираз $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i \neq k_{1,2}$. Тому, поклавши у формулі (11.7.6) $\ell = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $s = 0$, матимемо:

$$y^* = e^x\left(A\sin x + B\cos x\right).$$

г) Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = (k-1)^3 = 0$ має корінь $k = 1$ кратності 3. Права частина неоднорідного рівняння – добуток многочлена нульового степеня на експоненту, тобто $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $s = 0$. Вираз $\alpha \pm \beta i = 1$ співпадає з коренем характеристичного рівняння, причому $\ell = 3$. З урахуванням указаних значень ℓ, α, β, s за формулою (11.7.6) знаходимо

$$y^* = x^3 \cdot Ae^x.$$

Зауваження 5. Якщо права частина вихідного рівняння дорівнює сумі декількох функцій спеціального вигляду, то знаходження частинного розв'язку такого рівняння робиться за допомогою *теореми накладання розв'язків*: знаходять частинні розв'язки, що відповідають окремим доданкам правої частини, й додають їх: $y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots$.

Приклад 13. Знайти розв'язки диференціального рівняння:

$$y'' - 2y' = 3e^x + 8x.$$

Розв'язання. Права частина заданого рівняння являє собою суму двох функцій спеціального вигляду: $f_1(x) = 3e^x$ і $f_2(x) = 8x$. Отже, при підборі частинного розв'язку слід скористатися *теоремою накладання*. Загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння можна представити у вигляді

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^*.$$

1. Запишемо однорідне рівняння

$$y'' - 2y' = 0,$$

що відповідає заданому неоднорідному. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 2.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

2. Частинний розв'язок y_1^*, що відповідає першому доданку правої частини неоднорідного рівняння – добутку многочлена нульового степеня на експоненту, шукатимемо у вигляді

$$y_1^* = Ae^x,$$

оскільки $\alpha = 1$ не є коренем характеристичного рівняння $(\ell = 0)$.

Продиференціюємо передбачуваний частинний розв'язок y_1^*:

$$\left(y_1^*\right)' = Ae^x, \qquad \left(y_1^*\right)'' = Ae^x$$

і підставимо в задане неоднорідне рівняння, обмежившись у правій частині лише функцією $f_1(x)$:

$$Ae^x - 2Ae^x = 3e^x,$$

звідки

$$-Ae^x = 3e^x \quad \Rightarrow \quad A = -3.$$

Отже, перший *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* матиме вигляд

$$y_1^* = -3e^x.$$

Другий доданок правої частини – многочлен першого степеня, і оскільки серед коренів характеристичного рівняння є простий корінь $k_1 = 0$, частинний розв'язок y_2^* слід шукати у вигляді

$$y_2^* = x \cdot (Bx + C) = Bx^2 + Cx.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами:

$$\left(y_2^*\right)' = 2Bx + C, \qquad \left(y_2^*\right)'' = 2B$$

і підставляємо в задане рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцію $f_2(x)$:

$$2B - 4Bx - 2C = 8x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|c} x & -4B = 8, \\ x^0 & 2B - 2C = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} B = -2, \\ C = -2. \end{array}\right.$$

У результаті знаходимо другий *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y_2{}^* = -2x(x+1).$$

3. *Загальний розв'язок* вихідного неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y = \overline{y} + y_1{}^* + y_2{}^* = C_1 + C_2 e^{2x} - 3e^x - 2x(x+1).$$

Приклад 14. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови (*задача Коші*):

$$y'' + y = 4e^x + 6\sin x, \qquad y(0) = 4, \qquad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Права частина рівняння являє собою суму двох функцій спеціального вигляду:

$$f_1(x) + f_2(x) = 4e^x + 6\sin x.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо, знову користуючись *теоремою накладання*.

Для відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$ маємо характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$, що має уявні корені: $k_{1,2} = \pm i$. Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння* буде таким:

$$\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Враховуючи вигляд функції $f_1(x)$ у правій частині неоднорідного рівняння і корені характеристичного рівняння, відповідний частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y_1{}^* = Ae^x.$$

Тоді

$$(y_1{}^*)' = Ae^x, \qquad (y_1{}^*)'' = Ae^x.$$

Підставляючи значення $y_1{}^*$ і $(y_1{}^*)''$ у вихідне рівняння із правою частиною $f_1(x)$, матимемо

$$Ae^x + Ae^x = 4e^x,$$

звідки

$$2Ae^x = 4e^x \quad \Rightarrow \quad A = 2.$$

Таким чином, маємо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*, що відповідає правій частині $f_1(x)$:

$$y_1{}^* = 2e^x.$$

Враховуючи вигляд функції $f_2(x)$ у правій частині неоднорідного рівняння і корені характеристичного рівняння (рекомендуємо провести аналіз самостійно), відповідний частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_2{}^* = x \cdot (B\sin x + C\cos x).$$

Тоді

$$(y_2{}^*)' = B\sin x + C\cos x + x(B\cos x - C\sin x),$$

$$(y_2{}^*)'' = 2(B\cos x - C\sin x) + x(-B\sin x - C\cos x).$$

Підставимо значення $y_2{}^*$ й $(y_2{}^*)''$ у вихідне рівняння із правою частиною $f_2(x)$:

$$2(B\cos x - C\sin x) + x(-B\sin x - C\cos x) + x(B\sin x + C\cos x) = 6\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, знайдемо:

$$\begin{array}{l|c} \sin x & -2C = 6, \\ \cos x & 2B = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C = -3, \\ B = 0. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*, що відповідає правій частині $f_2(x)$,

$$y_2{}^* = -3x\cos x.$$

Таким чином, *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \overline{y} + y_1{}^* + y_2{}^* = C_1\cos x + C_2 \sin x + 2e^x - 3x\cos x.$$

Тепер зажадаємо, щоб отриманий розв'язок задовольняв задані початкові умови. Знайдемо

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2e^x - 3\cos x + 3x\sin x.$$

Тоді

$$\begin{array}{l} y(0) = 4, \\ y'(0) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4 = C_1 + 2, \\ 0 = C_2 + 2 - 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{array}\right.$$

Таким чином, одержуємо розв'язок *задачі Коші*:

$$y = 2\cos x + \sin x + 2e^x - 3x\cos x.$$

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\ddot{x} + 2m\dot{x} + 2m^2 x = 5m^2 \sin mt, \qquad \text{де } m = \mathrm{Const}.$$

Розв'язання. Такі рівняння руху часто зустрічаються в задачах динаміки в курсі теоретичної механіки. Тут шукана функція позначена буквою x, а незалежна змінна – t.

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x} + 2m\dot{x} + 2m^2 x = 0$$

шукатимемо у вигляді $x = e^{kt}$, тоді $\dot{x} = ke^{kt}$, $\ddot{x} = k^2 e^{kt}$. Його характеристичне рівняння $k^2 + 2km + 2m^2 = 0$ має комплексно-спряжені корені: $k_{1,2} = m(-1 \pm i)$. Отже, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $x_1 = e^{-mt}\cos mt$, $x_2 = e^{-mt}\sin mt$ і загальний розв'язок має вигляд:

$$\overline{x} = e^{-mt}\left(C_1\cos mt + C_2\sin mt\right).$$

Права частина заданого рівняння – добуток многочлена нульового степеня $Q_0(t) = 5m^2$ на функцію $\sin mt$, тобто $\alpha = 0$, $\beta = m$. Оскільки $\alpha \pm \beta i = \pm mi \neq \neq k_{1,2}$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$x^* = A\cos mt + B\sin mt.$$

Тоді

$$\dot{x}^* = -Am\sin mt + Bm\cos mt, \qquad \ddot{x}^* = -Am^2\cos mt - Bm^2\sin mt.$$

Підставимо функцію x^* й її похідні в задане рівняння:

$$-Am^2\cos mt - Bm^2\sin mt - 2Am^2\sin mt + 2Bm^2\cos mt + 2Am^2\cos mt +$$

$$+2Bm^2\sin mt = 5m^2\sin mt.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin mt$ і $\cos mt$:

$$\begin{array}{l|c} \sin mt & -2A + B = 5, \\ \cos mt & A + 2B = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -2, \\ B = 1. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$x^* = -2\cos mt + \sin mt.$$

Тоді *загальний розв'язок* заданого лінійного неоднорідного рівняння набере вигляду:

$$x = \overline{x} + x^* = e^{-mt}\left(C_1\cos mt + C_2\sin mt\right) - 2\cos mt + \sin mt.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням 2-го порядку зі *сталими коефіцієнтами*?
2. Якою є *структура загального розв'язку* лінійного неоднорідного диференціального рівняння?
3. Який *спеціальний вигляд* правої частини лінійного неоднорідного рівняння дає змогу застосовувати *метод підбору* частинного розв'язку?
4. Чи до будь-якого лінійного неоднорідного диференціального рівняння може бути застосований *метод підбору* частинного розв'язку?
5. Чи існує зв'язок між коренями характеристичного рівняння і видом частинного розв'язку неоднорідного рівняння? Якщо так, то в чому він проявляється?

6. Чи можна вважати, що *загальний випадок* у вступній частині параграфа узагальнює всі *окремі випадки*? Якщо так, то чи не можна всі приклади цього параграфа аналізувати з позицій лише загального випадку?
7. У чому привабливість *методу підбору* частинного розв'язку?
8. Що робити у тому випадку, якщо права частина неоднорідного рівняння являє собою *алгебраїчну суму функцій* спеціального вигляду?
9. Визначити вигляд *частинного розв'язку* лінійного неоднорідного рівняння, якщо відомі корені його характеристичного рівняння й права частина:

9.1.	$k_1 = -1$,	$k_2 = 1$,	$f(x) = e^{-x}(ax + b)$;
9.2.	$k_1 = -1$,	$k_2 = -1$,	$f(x) = e^{-x}(ax + b)$;
9.3.	$k_1 = 2i$,	$k_2 = -2i$,	$f(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$;
9.4.	$k_1 = 1$,	$k_2 = 0$,	$f(x) = ax^2 + bx + c$;
9.5.	$k_1 = 2i$,	$k_2 = -2i$,	$f(x) = e^x(\cos 2x + \sin 2x)$;
9.6.	$k_1 = -1$,	$k_2 = 0$,	$f(x) = ae^{-x} + bx + c$;
9.7.	$k_1 = 2$,	$k_2 = 1$,	$f(x) = e^{2x} + e^x$;
9.8.	$k_1 = 2 - i$,	$k_2 = 2 + i$,	$f(x) = e^{2x} + \sin x$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $y'' - 4y = 8x^3$;	1.2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$;
1.3. $y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x$;	1.4. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;
1.5. $y'' + 9y = e^x\cos 3x$;	1.6. $y'' + 4y' + 3y = \left(8x^2 + 84x\right)e^x$;
1.7. $y'' - 2y = xe^{-x}$;	1.8. $y'' + 6y' + 9y = 14e^{-3x}$;
1.9. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$;	1.10. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$;
1.11. $y'' + 3y' = 9x$;	1.12. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$;
1.13. $y'' + 4y = 12\cos 2x$;	1.14. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$;
1.15. $y'' + y = x + 2e^x$;	1.16. $y'' + y = 4\cos x + \left(x^2 + 1\right)e^x$;
1.17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$;	1.18. $y^{(IV)} + y'' = x^2 + x$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

2.1. $y'' - 2y' = e^x\left(x^2 + x - 3\right)$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 2$;
2.2. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$,	$y(0) = 2$,	$y'(0) = 3$;
2.3. $y'' + 2y' - 8y = (12x + 20)e^{2x}$,	$y(0) = 0$,	$y'(0) = 1$;
2.4. $y'' + 4y = \cos 2x$,	$y(0) = 0$,	$y'(\pi/4) = 0$;

2.5. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2.6. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$;

2.7. $y'' + 4y = 1 + \sin 2x$, $y(0) = 1/4$, $y'(0) = 0$;

2.8. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

2.9. $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$. **1.2.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$.

1.3. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x + \frac{1}{2}\sin x$. **1.4.** $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x + e^{2x}$.

1.5. $y = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{37}(\cos 3x + 6\sin 3x)\, e^x$.

1.6. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + (x^2 + 9x - 7)\, e^x$. **1.7.** $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} - (x-2)\, e^{-x}$.

1.8. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x} + 7x^2 e^{-3x}$. **1.9.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

1.10. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$. **1.11.** $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$.

1.12. $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-2x}$. **1.13.** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 3x \sin 2x$.

1.14. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}$. **1.15.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x$.

1.16. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \sin x + e^x\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2\right)$.

1.17. $y = e^x\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)$.

1.18. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$.

2.1. $y = e^x\left(e^x - x^2 - x + 1\right)$. **2.2.** $y = e^{2x}(\cos x - 2\sin 2x) + (x+1)^2 e^x$.

2.3. $y = \frac{1}{3}e^{-4x} - \frac{1}{3}e^{2x} + (x^2 + 3x)\, e^{2x}$. **2.4.** $y = \frac{1}{16}(4x - \pi)\sin 2x$.

2.5. $y = \frac{1}{2}x(x+2)\, e^{4x}$. **2.6.** $y = xe^x(\sin x - \cos x)$.

2.7. $y = \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}(x\cos 2x - 1)$. **2.8.** $y = e^{-2x} - 3e^{-x} + 4$.

2.9. $y = e^x(3x - 5) + 2(\sin x + \cos x) + 4$.

§ 11.8. МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ (МЕТОД ЛАГРАНЖА)

Метод варіації довільних сталих може бути застосований у тому випадку, якщо права частина $f(x)$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння не має спеціального вигляду, розглянутого в § 11.7.

При розв'язуванні лінійного неоднорідного диференціального рівняння *2-го порядку*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (11.8.1)$$

насамперед розглядають відповідне *однорідне рівняння*

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (11.8.2)$$

із *загальним розв'язком*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (11.8.3)$$

де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння (див. § 11.6).

Далі припускають, що *загальний розв'язок неоднорідного рівняння* (11.8.1) має такий самий вигляд, як і розв'язок (11.8.3), з тією лише різницею, що C_1 і C_2 є деякими, поки невідомими функціями від x, які слід підібрати так, щоб функція

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \qquad (11.8.4)$$

задовольняла неоднорідне рівняння (11.8.1).

Для визначення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ необхідно спочатку знайти розв'язки $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = f(x). \end{cases} \qquad (11.8.5)$$

Визначник цієї системи – визначник Вронського. Для лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння визначник Вронського $W(y_1, y_2) \neq 0$. Отже, система (11.8.5) має єдиний розв'язок, що може бути знайдений, наприклад, за формулами Крамера або будь-яким іншим способом:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx + \bar{C}_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx + \bar{C}_2, \qquad (11.8.6)$$

де $\bar{C}_1$ і $\bar{C}_2$ – сталі інтегрування.

Підставляючи значення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (11.8.4), отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного рівняння* (11.8.1):

$$y = \bar{C}_1 y_1(x) + \bar{C}_2 y_2(x) - y_1(x)\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx + y_2(x)\int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx. \qquad (11.8.7)$$

Розв'язок (11.8.7) задовольняє теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, тобто має вигляд

$$y = \bar{y} + y^*,$$

де $\bar{y} = \bar{C}_1 y_1(x) + \bar{C}_2 y_2(x)$ – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (11.8.2) і

$$y^* = -y_1(x)\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

– частинний розв`язок лінійного неоднорідного рівняння (11.8.1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

Розв'язання. Права частина рівняння не має спеціального вигляду, що дає змогу скористатися методом підбору частинного розв'язку. Тому застосуємо *метод варіації довільних сталих*.

1. Дотримуючись вказаного алгоритму, знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, що відповідає заданому:

$$y'' - y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння й визначимо його корені:

$$k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 1.$$

Для дійсних і різних коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = e^{-x}.$$

Отже, *загальним розв'язком однорідного рівняння* є:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукатимемо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}. \tag{*}$$

Оскільки $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ і $y_1'(x) = e^x$, $y_2'(x) = -e^{-x}$, дістаємо таку систему для визначення функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, & (1) \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}. & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Склавши рівняння (1) і (2), матимемо:

$$2C_1'(x)e^x = \frac{2e^x}{e^x - 1} \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = \frac{1}{e^x - 1},$$

звідки

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{1 - e^x + e^x}{e^x - 1}dx = -\int \frac{e^x - 1}{e^x - 1}dx + \int \frac{e^x}{e^x - 1}dx = -x + \ln\left|e^x - 1\right| + \bar{C}_1.$$

Віднімаючи від рівняння (1) рівняння (2), дістанемо:

$$2C_2' e^{-x} = \frac{-2e^x}{e^x - 1} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x - 1},$$

звідки

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1}dx = -\int \frac{\left(e^{2x} - 1\right) + 1}{e^x - 1}dx = -\int\left(e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)dx =$$

$$= -e^x - x + x - \ln\left|e^x - 1\right| + \bar{C}_2 = -e^x - \ln\left|e^x - 1\right| + \bar{C}_2.$$

3. Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у передбачуваний розв'язок (*), знайдемо *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\ln\left|e^x - 1\right| - x + \bar{C}_1\right)\cdot e^x + \left(\bar{C}_2 - e^x - \ln\left|e^x - 1\right|\right)\cdot e^{-x} =$$

$$= \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{-x} + \left(e^x - e^{-x}\right)\ln\left|e^x - 1\right| - xe^x - 1.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Розв'язання. Тут, як і в прикладі 1, права частина рівняння не може бути зведена до спеціального вигляду, розглянутому в попередньому параграфі. Тому розв'язання заданого рівняння можливе тільки методом варіації довільних сталих.

1. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + 4y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має суто уявні корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Їм відповідають такі лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = \cos 2x, \qquad y_2(x) = \sin 2x.$$

Тоді *загальним розв'язком однорідного рівняння* є:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2. *Загальний розв'язок* заданого *неоднорідного рівняння* шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x, \tag{*}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – функції, що підлягають визначенню. Оскільки в цьому випадку $y_1(x)=\cos 2x$, $y_2(x)=\sin 2x$ і $y_1'(x)=-2\sin 2x$, $y_2'(x)=2\cos 2x$, то система (11.8.5) набуває вигляду:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, застосовуючи правило Крамера. Визначник системи Δ, складений з коефіцієнтів при невідомих функціях $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}, \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Інтегруючи, визначимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + \bar{C}_2.$$

3. Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у вираз (*), одержимо *загальний розв'язок* неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \bar{C}_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + \bar{C}_2\right)\sin 2x =$$

$$= \bar{C}_1\cos 2x + \bar{C}_2\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4}\cdot\ln|\cos 2x| + \frac{x}{2}\cdot\sin 2x.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2ay' + a^2y = e^{-ax}\ln x$.

Розв'язання. Вигляд правої частини рівняння вказує на те, що слід скористатися методом варіації довільних сталих.

1. Складемо однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному:

$$y'' + 2ay' + a^2y = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k^2 + 2ak + a^2 = 0$ дійсні й кратні: $k_{1,2} = -a$. Отже, маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння $y_1(x) = e^{-ax}$ і $y_2(x) = xe^{-ax}$. *Загальний розв'язок однорідного рівняння*:

$$y = C_1e^{-ax} + C_2xe^{-ax}.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^{-ax} + C_2(x)xe^{-ax}. \qquad (*)$$

Складемо систему для визначення функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Оскільки похідні $y_1'(x) = -ae^{-ax}$ і $y_2'(x) = e^{-ax}(1-ax)$, то

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot e^{-ax} + C_2'(x)xe^{-ax} = 0, \\ -aC_1'(x)\cdot e^{-ax} + C_2'(x)e^{-ax}(1-ax) = e^{-ax}\ln x, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0, \\ -aC_1'(x) + C_2'(x)(1-ax) = \ln x. \end{cases}$$

Звідси знаходимо:

$$C_1'(x) = -x\ln x, \qquad C_2'(x) = \ln x.$$

Інтегруючи частинами, визначимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - x + \bar{C}_2.$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого диференціального рівняння набуває вигляду

$$y = \left(\bar{C}_1 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right)e^{-ax} + \left(x\ln x - x + \bar{C}_2\right)xe^{-ax} = e^{-ax}\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 5.$$

Розв'язання. 1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, для чого складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2 - 4k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2 \pm i.$$

Отже, функції $y_1(x) = e^{2x}\cos x$ і $y_2(x) = e^{2x}\sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, а його *загальний розв'язок*

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукатимемо у вигляді

$$y = C_1(x)e^{2x}\cos x + C_2(x)e^{2x}\sin x. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Після скорочення на множник e^{2x} одержимо:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot(2\cos x - \sin x) + C_2'(x)\cdot(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Для визначення функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ застосуємо правило Крамера. Визначник системи дорівнює:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = \cancel{2\sin x\cos x} + \cos^2 x - \cancel{2\sin x\cos x} + \sin^2 x = 1.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2\cos x - \sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Отже,

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\cos x| + \bar{C}_1,$$

$$C_2'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \int dx = x + \bar{C}_2.$$

3. Підставивши знайдені значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в формулу (*), матимемо *загальний розв'язок* заданого рівняння

$$y = \left(\ln|\cos x| + \bar{C}_1\right)e^{2x}\cos x + \left(x + \bar{C}_2\right)e^{2x}\sin x =$$
$$= e^{2x}\left(\bar{C}_1\cos x + \bar{C}_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x\right).$$

4. Щоб знайти його частинний розв'язок, що задовольняє задані початкові умови, знайдемо попередньо похідну

$$y' = 2e^{2x}\left(\bar{C}_1\cos x + \bar{C}_2\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x\right) +$$
$$+ e^{2x}\left(-\bar{C}_1\sin x + \bar{C}_2\cos x - \sin x\ln|\cos x| + \cos x\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \sin x + x\cos x\right).$$

Тепер визначимо довільні сталі $\bar{C}_1$ й $\bar{C}_2$, скориставшись початковими умовами: підставимо значення $x = 0$, $y = 3$ і $y' = 5$ в $y(x)$ і $y'(x)$:

$$\begin{matrix} y(0) = 3, \\ y'(0) = 5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 = \bar{C}_1, \\ 5 = 2\bar{C}_1 + \bar{C}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{C}_1 = 3, \\ \bar{C}_2 = -1. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені $\bar{C}_1$ і $\bar{C}_2$ у загальний розв'язок неоднорідного рівняння, знаходимо розв'язок *задачі Коші*:

$$y = e^{2x}\left(3\cos x - \sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x\right).$$

Зауваження 1. Слід мати на увазі, що й система (11.8.5), і формули, що випливають із неї, (11.8.6)–(11.8.7) справедливі лише в тому випадку, якщо коефіцієнт при старшій похідній у заданому лінійному неоднорідному рівнянні дорівнює 1. Якщо це не так, то треба або спочатку розділити на цей коефіцієнт обидві частини заданого рівняння, або в системі (11.8.5) розділити на нього $f(x)$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Дотримуючись схеми методу варіації довільних сталих, спочатку потрібно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, потім, уважаючи довільні сталі C_1 і C_2 функціями, скласти систему (11.8.5), знайти її розв'язки й, інтегруючи їх, визначити $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Нарешті, отримані функції підставити в передбачуваний загальний розв'язок.

Однак, застосувати метод варіації до заданого рівняння безпосередньо не можна, тому що коефіцієнт при старшій похідній відмінний від одиниці, тоді як система (11.8.5) складена для рівняння вигляду (11.8.1). Тому насамперед почленно розділимо це рівняння на 2 (коефіцієнт при старшій похідній):

$$y'' + \frac{y'}{2} - \frac{y}{2} = e^x.$$

Далі дотримуємося викладеної раніше схеми. Знайдемо розв'язок однорідного рівняння:

$$y''+\frac{y'}{2}-\frac{y}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad k^2+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{aligned} &k_1=-1,\\ &k_1=\frac{1}{2}. \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

Припустимо існування розв'язку неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{x/2}$$

і складемо систему (11.8.5):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{x/2}=0,\\ -C_1'(x)e^{-x}+\frac{1}{2}C_2'(x)e^{x/2}=e^x. \end{cases}$$

Знайдемо її розв'язки й, інтегруючи, визначимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1'(x)=-\frac{2}{3}e^{2x} \quad\Rightarrow\quad C_1(x)=-\frac{1}{3}e^{2x}+\bar{C}_1,$$

$$C_2'(x)=\frac{2}{3}e^{x/2} \quad\Rightarrow\quad C_2(x)=\frac{4}{3}e^{x/2}+\bar{C}_2.$$

Отже, *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння

$$y=\left(\bar{C}_1-\frac{1}{3}e^{2x}\right)e^{-x}+\left(\bar{C}_2+\frac{4}{3}e^{x/2}\right)e^{x/2}=\bar{C}_1e^{-x}+\bar{C}_2e^{x/2}+e^x.$$

У правильності отриманого результату легко переконатися, застосувавши для розв'язання цього рівняння *метод підбору* частинного розв'язку (див. § 11.7), оскільки його права частина відповідає спеціальному вигляду (11.7.5). Дійсно, розв'язок однорідного рівняння залишається тим самим, а частинний розв'язок у цьому випадку шукатимемо у вигляді (*чому*?):

$$y^*=Ae^x.$$

Тоді $(y^*)'=Ae^x$, $(y^*)''=Ae^x$ і після підстановки в рівняння знаходимо коефіцієнт $A=1$. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y=\bar{y}+y^*=\bar{C}_1e^{-x}+\bar{C}_2e^{\frac{x}{2}}+e^x.$$

Якби ми, розв'язуючи це рівняння *методом варіації*, не звернули увагу на ту обставину, що коефіцієнт при старшій похідній відмінний від одиниці, то одержали б неправильний результат (рекомендуємо переконатися в цьому самостійно).

Зауваження 2. Застосування методу варіації довільних сталих не обмежується рівняннями 2-го порядку. Метод може бути застосований і до розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків. Для рівняння n-го порядку невідомі функції $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x)+C_2'(x)\,y_2(x)+\ldots+C_n'(x)\,y_n(x)=0,\\ C_1'(x)\,y_1'(x)+C_2'(x)\,y_2'(x)+\ldots+C_n'(x)\,y_n'(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x)=0,\\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases}$$

Визначник цієї системи – вронскіан $W(y_1,y_1,\ldots,y_n)$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y'''+y'=0$$

має такі корені характеристичного рівняння:

$$k^3+k=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{aligned} &k_1=0,\\ &k_{2,3}=\pm i. \end{aligned}\right.$$

Виходить, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x)=1$, $y_2(x)=\cos x$, $y_3(x)=\sin x$. Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1+C_2'(x)\cos x+C_3'(x)\sin x=0,\\ C_1'(x)\cdot 0-C_2'(x)\sin x+C_3'(x)\cos x=0,\\ C_1'(x)\cdot 0-C_2'(x)\cos x-C_3'(x)\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos x}. \end{cases}$$

Зручно розв'язувати її за правилом Крамера. Визначник системи дорівнює:

$$\Delta=W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -\sin x & \cos x\\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \bar{C}_1;$$

$$C_2'(x) = -\operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = -\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\cos x| + \bar{C}_2;$$

$$C_3'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = -\operatorname{tg} x + x + \bar{C}_3.$$

Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз (*), знаходимо *загальний розв'язок* заданого рівняння:

$$y = \bar{C}_1 + \frac{1}{\cos x} + \left(\bar{C}_2 + \ln|\cos x|\right)\cos x + \left(\bar{C}_3 + x - \operatorname{tg} x\right)\sin x =$$

$$= \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \cos x + \bar{C}_3 \sin x + \sec x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + (x - \operatorname{tg} x)\sin x.$$

Зауваження 3. Зрозуміло, всі приклади попереднього параграфа можуть бути розв'язані розглянутим тут методом варіації довільних сталих. Однак складності, що виникають при інтегруванні функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (11.8.6) у тому випадку, якщо права частина лінійного неоднорідного рівняння має спеціальний вигляд (11.7.5), роблять використання методу варіації здебільшого недоцільним.

З другого боку, на відміну від *методу підбору частинного розв'язку*, що може бути застосований лише до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, *метод варіації довільних сталих* можна використовувати при інтегруванні лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (див. далі § 11.10).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. У чому полягає *метод варіації довільних сталих*?
2. Виходячи з того, що функція (11.8.4) відповідає лінійному неоднорідному рівнянню (11.8.1), вивести систему рівнянь (11.8.5) для визначення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$.
3. Що гарантує існування єдиного розв'язку системи (11.8.5)?
4. Як складається система для визначення функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ у випадку рівняння n-го порядку?
5. Який метод є *більш загальним* для визначення загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:
   а) метод *підбору частинного розв'язку* за виглядом правої частини і коренями характеристичного рівняння;
   б) метод *варіації довільних сталих*?
6. У чому перевага методу варіації порівняно з методом підбору частинного розв'язку? У чому його недоліки?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1.1. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$; 1.2. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{ctg} x$;

1.3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; 1.4. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$;

1.5. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$; 1.6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$;

1.7. $y'' - y' = e^{2x}\cos\left(e^x\right)$; 1.8. $y'' + y = \operatorname{ch} x$.

2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють початкові умови (*задача Коші*):

2.1. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

2.2. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;

2.3. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y=\bar{C}_1\cos x+\bar{C}_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-2$.

1.2. $y=e^{-x}\left(\bar{C}_1\cos x+\bar{C}_2\sin x+\sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right)$.

1.3. $y=\left(\bar{C}_1-x\right)e^x+\left(\ln|x|+\bar{C}_2\right)xe^x$.

1.4. $y=\left(\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)+\bar{C}_1\right)e^x\cos x+\left(\frac{1}{\sin x}+\bar{C}_2\right)e^x\sin x$.

1.5. $y=\left(-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}+2\sqrt{(x+3)^3}+\bar{C}_1\right)\cdot e^{-x}+\left(2\sqrt{(x+3)^3}+\bar{C}_2\right)xe^{-x}$.

1.6. $y=\bar{C}_1e^{-x}+\bar{C}_2xe^{-x}+\frac{1}{4}e^x(x-1)+xe^{-x}(\ln x-1)$.

1.7. $y=\bar{C}_1+\bar{C}_2e^x-\cos\left(e^x\right)$.

1.8. $y=\bar{C}_1\sin x+\bar{C}_2\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{ch}x$.

2.1. $y=-(2+\ln 2)+(3-\ln 2)e^x+\left(1+e^x\right)\ln\left|e^{-x}+1\right|$.

2.2. $y=\left(\ln|\cos\pi x|+3\right)\cos\pi x+\pi x\sin\pi x$.

2.3. $y=e^{4x}\ln\left(\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)+e^{2x}\ln\left(\frac{2}{1+e^{2x}}\right)$.

§ 11.9. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканих функцій і їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)\,y_1+a_{12}(x)\,y_2+\ldots+a_{1n}(x)\,y_n+f_1(x), \\ y_2'=a_{21}(x)\,y_1+a_{22}(x)\,y_2+\ldots+a_{2n}(x)\,y_n+f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=a_{n1}(x)\,y_1+a_{n2}(x)\,y_2+\ldots+a_{nn}(x)\,y_n+f_n(x), \end{cases} \tag{11.9.1}$$

де функції $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ визначені й неперервні при $x\in(a;b)$.

Якщо всі a_{ij} – сталі, то (11.9.1) називається лінійною системою рівнянь *зі сталими коефіцієнтами*.

Розв'язком системи (11.9.1) в інтервалі $a<x<b$ називається сукупність n функцій

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\quad \ldots,\quad y_n=y_n(x), \tag{11.9.2}$$

що неперервно диференційовні в $(a;b)$ і перетворюють рівняння системи на тотожності.

Задача Коші для системи (11.9.1) полягає в тому, щоб знайти такі функції (11.9.2), які при $x=x_0$ набували б заданих значень $y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20}$, …, $y_n(x_0)=y_{n0}$.

Загальним розв'язком системи (11.9.1) називається сукупність n функцій від незалежної змінної x і n довільних сталих C_1, C_2, …, C_n:

$$y_k=y_k\,(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)\qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{11.9.3}$$

які задовольняють усі рівняння системи. Розв'язок, що утворюється із загального при певних значеннях сталих C_1, C_2, …, C_n, називається *частинним розв'язком* системи.

Лінійна система називається *однорідною*, якщо при всіх $x\in(a;b)$ функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)\,y_1+a_{12}(x)\,y_2+\ldots+a_{1n}(x)\,y_n, \\ y_2'=a_{21}(x)\,y_1+a_{22}(x)\,y_2+\ldots+a_{2n}(x)\,y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'=a_{n1}(x)\,y_1+a_{n2}(x)\,y_2+\ldots+a_{nn}(x)\,y_n. \end{cases} \tag{11.9.4}$$

Загальний розв'язок $\bar{y}_k$ *однорідної лінійної системи* в інтервалі $(a;b)$ являє собою лінійну комбінацію

$$\bar{y}_k=\sum_{i=1}^{n}C_iy_{ik}\qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{11.9.5}$$

n її частинних лінійно незалежних розв'язків $y_{1k},y_{2k},\ldots,y_{nk}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, що утворюють *фундаментальну систему розв'язків*.

Система функцій $y_{1k}(x),y_{2k}(x),\ldots,y_{nk}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ називається *фундаментальною*, якщо її визначник Вронського

$$W(y_{ik})=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу $(a;b)$.

Загальний розв'язок y_k *неоднорідної системи* (11.9.1) в інтервалі $(a;b)$ являє собою суму загального розв'язку $\overline{y}_k$ *відповідної однорідної системи* (11.9.4) і будь-якого частинного розв'язку y_k^* неоднорідної системи:

$$y_k=\overline{y}_k+y_k^*=\sum_{i=1}^{n}C_i y_{ik}+y_k^* \qquad (k=1,2,\dots,n). \qquad (11.9.6)$$

Розв'язання системи (11.9.1) зводиться до послідовного виключення невідомих функцій з рівнянь системи, внаслідок чого система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку від однієї невідомої функції.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2y+z, \\ \dfrac{dz}{dx}=y+2z \end{cases} \qquad y(0)=3, \qquad z(0)=1.$$

Розв'язання. Щоб знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно передусім знайти її загальний розв'язок і потім домагатися, щоб він задовольняв початкові умови.

Маємо *однорідну систему* двох диференціальних рівнянь, де $y(x)$ і $z(x)$ – шукані функції. Звести задану систему до одного диференціального рівняння 2-го порядку можна кількома способами. Розглянемо один з них, так званий *метод виключення*.

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз $\dfrac{dz}{dx}$ із другого рівняння системи:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+y+2z.$$

3. Замінимо функцію z її виразом з першого рівняння системи, тобто

$$z=\frac{dy}{dx}-2y. \qquad (*)$$

Тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+y+2\left(\frac{dy}{dx}-2y\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=0.$$

4. Одержали *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y(x)$. Метод розв'язання таких рівнянь викладений в § 11.6.

Складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2-4k+3=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} k_1=1, \\ k_2=3. \end{array}\right.$$

Отже, частинні лінійно незалежні розв'язки (фундаментальна система розв'язків) – $y_1(x)=e^x$ і $y_2(x)=e^{3x}$, а загальний розв'язок

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

5. Щоб знайти $z(x)$, підставимо в рівняння (*) знайдену функцію $y(x)$ й її похідну:

$$\frac{dy}{dx}=C_1e^x+3C_2e^{3x}.$$

Маємо:

$$z(x)=C_1e^x+3C_2e^{3x}-2\left(C_1e^x+C_2e^{3x}\right)=-C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

Сукупність двох знайдених функцій є загальним розв'язком заданої системи:

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}, \qquad z(x)=-C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

Запишемо його у вигляді

$$\begin{Bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{Bmatrix}=C_1\begin{Bmatrix} e^x \\ -e^x \end{Bmatrix}+C_2\begin{Bmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{Bmatrix}.$$

Тут $\begin{Bmatrix} y_1(x) \\ z_1(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} e^x \\ -e^x \end{Bmatrix}$ і $\begin{Bmatrix} y_2(x) \\ z_2(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{Bmatrix}$ – два лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

6. Тепер скористаємося початковими умовами для визначення довільних сталих:

$$\begin{array}{l} y(0)=3, \\ z(0)=1, \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 3=C_1+C_2, \\ 1=-C_1+C_2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} C_1=1, \\ C_2=2. \end{array}\right.$$

Підставляючи знайдені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок системи, матимемо її частинний розв'язок:

$$y(x)=e^x+2e^{3x}, \qquad z(x)=2e^{3x}-e^x.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що отримані функції задовольняють обидва рівняння заданої системи.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x, \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x \end{cases} \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$

Розв'язання. Задано *неоднорідну систему* лінійних диференціальних рівнянь.

1. Застосовуючи метод виключення, диференціюємо перше рівняння системи за змінною x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 2.$$

2. Підставляючи в цю рівність вираз $\dfrac{dz}{dx}$ із другого рівняння системи, маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4x + 4y + 4z = 2.$$

3. Нарешті, заміняючи функцію z її виразом з першого рівняння системи

$$z = \frac{1}{4}\left(2x - 3y - \frac{dy}{dx}\right), \qquad (*)$$

дістанемо *лінійне неоднорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 4x + 4y + 2x - 3y - \frac{dy}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2 - 6x. \quad (**)$$

4. Дотримуючись схеми розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь (див. § 11.7) знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

якому відповідає характеристичне рівняння з дійсними кратними коренями:

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -1.$$

Отже,

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 + C_2 x).$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння з правою частиною спеціального вигляду. Оскільки $P_1(x) = -6x + 2$ і $k_{1,2} \neq 0$, то функцію y^* шукатимемо у вигляді

$$y^* = Ax + B.$$

Тоді

$$\frac{dy^*}{dx} = A, \qquad \frac{d^2y^*}{dx^2} = 0.$$

Підставляючи y^* й знайдені похідні в неоднорідне рівняння, матимемо таке співвідношення для визначення коефіцієнтів A і B:

$$2A + Ax + B = 2 - 6x,$$

звідки

$$\begin{array}{c|l} x & A = -6, \\ x^0 & 2A + B = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -6, \\ B = 14. \end{cases}$$

Отже,

$$y^* = -6x + 14.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного неоднорідного (**) рівняння має вигляд

$$y(x) = \bar{y} + y^* = e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 6x + 14.$$

5. Щоб визначити функцію $z(x)$, підставимо у вираз (*) функцію $y(x)$ й її похідну:

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-x} - 6 = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) - 6.$$

Маємо

$$z(x) = \frac{1}{4}\left[2x - 3e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 42 + 18x - e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 6\right] =$$

$$= 5x - 9 - \frac{1}{4}e^{-x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x).$$

6. Знайдені функції $y(x)$ і $z(x)$ слугують *загальним розв'язком* даної системи. Щоб знайти частинний розв'язок, скористаємося початковими умовами:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = C_1 + 14, \\ 0 = -9 - \frac{1}{4}(2C_1 + C_2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -14, \\ C_2 = -8. \end{cases}$$

Підставивши C_1 і C_2 у загальний розв'язок системи, матимемо шуканий *частинний розв'язок*:

$$y(x) = 14 - 6x - e^{-x}(14 + 8x), \qquad z(x) = 5x - 9 + e^{-x}(9 + 4x).$$

Зауваження 1. Як видно з наведених прикладів, метод виключення може бути застосований як до однорідних систем, так і неоднорідних. Різниця лише в тому, що в першому випадку система зводиться до *лінійного однорідного* рівняння, а в другому – найчастіше до *неоднорідного*. Причому, якщо всі коефіцієнти a_{ij} лінійної системи були сталими, то й отримані рівняння будуть зі сталими коефіцієнтами. Цими прикладами представлено загальний спосіб зведення системи лінійних рівнянь до одного рівняння. Зовсім не обов'язково дотримуватися цієї схеми, у кожному конкретному випадку можливі варіанти.

Зауваження 2. Метод виключення для систем лінійних алгебраїчних рівнянь фактично привів до правила Крамера. Покажемо, як аналогічне правило діє при розв'язуванні систем лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_t' = y + t, \\ y_t' = -x + 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$

Розв'язання. У запропонованих прикладах незалежною змінною слугує t, а шуканими функціями $x(t)$ і $y(t)$.

а) *Перший спосіб*. Маємо лінійну *неоднорідну систему* рівнянь. Виразимо з першого рівняння системи змінну y:

$$y(t) = x_t' - t. \qquad (*)$$

Підставимо цей вираз у друге рівняння, попередньо обчисливши $y_t' = x_{tt}'' - 1$. Після очевидних перетворень матимемо

$$x_{tt}'' + x = 2.$$

Це *лінійне неоднорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Структура його загального розв'язку (див. § 11.7) така:

$$x = \overline{x} + x^*,$$

де $\overline{x}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x_{tt}'' + x = 0,$$

а x^* – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння $x_{tt}'' + x = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння й визначимо його корені:

$$k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm i.$$

Отже,

$$\overline{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння $x_{tt}'' + x = 2$, застосуємо метод підбору частинного розв'язку за виглядом правої частини.

У даному випадку $P_0(x) = 2$, причому $k_{1,2} \neq 0$, тому частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $x^* = A$. Маємо:

$$x^* = 2.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$x(t) = \overline{x} + x^* = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2.$$

Тепер знайдемо похідну функції $x(t)$:

$$x_t' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

і підставимо її в рівняння (*):

$$y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - t.$$

Отримали загальний розв'язок *неоднорідної системи*:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2, \qquad y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - t,$$

який фактично являє собою суму загального розв'язку відповідної однорідної системи й частинного розв'язку неоднорідної системи:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ -t \end{Bmatrix}.$$

Другий спосіб. Визначимо лінійний оператор диференціювання $\frac{d}{dt} = p$ і перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} px - y = t, \\ x + py = 1. \end{cases}$$

Обчислимо визначники системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 + 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = pt + 1 = \frac{d}{dt}t + 1 = 2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p \cdot 1 - t = \frac{d}{dt}1 - t = -t.$$

У повній відповідності до правила Крамера результат виключення функції y приводить до рівняння

$$\Delta x = \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad (p^2 + 1)x = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 2,$$

а результат виключення функції x – до рівняння

$$\Delta y = \Delta_2 \quad \Rightarrow \quad (p^2 + 1)y = -t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + y = -t.$$

Ці рівняння різняться лише правими частинами. Далі розв'язуємо одне з них (природно, вибираючи рівняння з найпростішою правою частиною). Потім, повертаючись до заданої системи, знаходимо іншу функцію.

б) Задано лінійну *неоднорідну систему* диференціальних рівнянь. Диференціюємо перше рівняння системи:

$$x''_{tt} = y'_t .$$

Підставивши замість y'_t його значення із другого рівняння, матимемо *лінійне неоднорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку відносно функції $x(t)$:

$$x''_{tt} - x = e^t + e^{-t} . \qquad (*)$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$x''_{tt} - x = 0 .$$

Корені його характеристичного рівняння $k^2 - 1 = 0$ дорівнюють $k_1 = 1$ і $k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overline{x} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (*) найпростіше шукати методом підбору. Права частина рівняння являє собою суму функцій спеціального вигляду

$$f(t) = e^t + e^{-t} ,$$

тому частинний розв'язок x^* слід шукати, користуючись *теоремою накладання*, тобто

$$x^* = x_1^* + x_2^* .$$

Розв'язок x_1^*, що відповідає доданку e^t в правій частині, шукаємо у вигляді Ate^t, оскільки $\alpha_1 = 1$ співпадає з коренем $k_1 = 1$ характеристичного рівняння. Розв'язок x_2^*, що відповідає доданку e^{-t}, шукаємо у вигляді Bte^{-t}, тому що $\alpha_2 = -1$ співпадає з коренем $k_2 = -1$. Отже, частинний розв'язок x^* має бути таким:

$$x^* = Ate^t + Bte^{-t} .$$

Звідси знаходимо:

$$(x^*)'_t = Ae^t + Ate^t + Be^{-t} - Bte^{-t} , \qquad (x^*)''_{tt} = 2Ae^t + Ate^t - 2Be^{-t} + Bte^{-t} .$$

Підставляючи ці значення в рівняння (*), визначимо коефіцієнти A і B:

$$2Ae^t + \cancel{Ate^t} - 2Be^{-t} + \cancel{Bte^{-t}} - \cancel{Ate^t} - \cancel{Bte^{-t}} = e^t + e^{-t}$$

$$\begin{array}{c|c} e^t & 2A = 1, \\ e^{-t} & -2B = 1 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2, \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Тоді частинний розв'язок запишемо у такий спосіб:

$$x^* = \frac{1}{2} t \left(e^t - e^{-t} \right) .$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (*), що визначає функцію $x(t)$, набуває вигляду

$$x(t) = \overline{x} + x^* = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{t}{2}\left(e^t - e^{-t} \right) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t \cdot \operatorname{sh} t .$$

Нарешті, з першого рівняння системи знайдемо

$$y(t) = x'_t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t} \right) + \frac{t}{2}\left(e^t + e^{-t} \right) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \operatorname{sh} t + t \cdot \operatorname{ch} t .$$

Отриманий розв'язок – сукупність функцій $x(t)$ і $y(t)$ – можна представити у вигляді суми загального розв'язку відповідної однорідної системи й частинного розв'язку неоднорідної системи:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} e^t \\ e^t \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t \end{Bmatrix} .$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

а) $\begin{cases} x'_t = 3x - y + z, \\ y'_t = -x + 5y - z, \\ z'_t = x - y + 3z; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x'_t = -y + 1, \\ y'_t = x + 2y - 2z, \\ z'_t = x + y - z. \end{cases}$

Розв'язання. **а)** *Перший спосіб.* Задано лінійну *однорідну систему* трьох рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Зведемо її до одного диференціального рівняння 3-го порядку.

Спочатку виключимо функцію $z(t)$. Для цього виразимо $z(t)$ з першого рівняння системи:

$$z = x'_t - 3x + y$$

і підставимо в друге і третє рівняння, попередньо продиференціювавши: $z'_t = x''_{tt} - 3x'_t + y'_t$. Маємо систему двох рівнянь відносно змінних $x(t)$ і $y(t)$:

$$\begin{cases} y'_t + x'_t = 2x + 4y, \\ x''_{tt} - 6x'_t + y'_t = -8x + 2y. \end{cases} \qquad (A)$$

Залишилося виключити функцію $y(t)$. Віднімемо від другого рівняння системи (А) перше рівняння:

$$x''_{tt} - 7x'_t = -10x - 2y .$$

Продиференціюємо обидві частини цього співвідношення:

$$x'''_{ttt} - 7x''_{tt} = -10x'_t - 2y'_t. \qquad (B)$$

З другого боку, виразимо y'_t через $x(t)$, x'_t і x''_{tt}, віднімаючи від подвоєного другого рівняння системи (A) перше:

$$2x''_{tt} - 13x'_t + y'_t = -18x \quad \Rightarrow \quad y'_t = -2x''_{tt} + 13x'_t - 18x.$$

Підставляючи знайдений вираз для y'_t в рівняння (B), одержимо *лінійне однорідне* диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$:

$$x'''_{ttt} - 11x''_{tt} + 36x'_t - 36x = 0. \qquad (C)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0$$

має дійсні різні корені

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 6.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Підставляючи функцію $x(t)$ і її похідні

$$x'_t = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} + 6C_3 e^{6t}, \qquad x''_{tt} = 4C_1 e^{2t} + 9C_2 e^{3t} + 36C_3 e^{6t}$$

у рівняння $x''_{tt} - 7x'_t = -10x - 2y$, знайдемо $y(t)$:

$$y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}.$$

Нарешті, з рівняння $z = x'_t - 3x + y$ дістаємо

$$z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \quad y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \quad z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Або

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Другий спосіб. Введемо лінійний оператор диференціювання $p = \dfrac{d}{dt}$ і перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} (p-3)x + y - z = 0, \\ x + (p-5)y + z = 0, \\ -x + y - (p-3)z = 0. \end{cases}$$

Складемо й обчислимо визначник однорідної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-3 & 1 & -1 \\ 1 & p-3 & 1 \\ -1 & 1 & p-3 \end{vmatrix} = p^3 - 11p^2 + 36p - 36.$$

Результат виключення функцій y і z приводить до лінійного однорідного рівняння:

$$\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad x'''_{ttt} - 11x''_{tt} + 36x'_t - 36x = 0.$$

Зауважимо, що результат виключення будь-якої пари функцій з однорідної системи 3-го порядку приведе до одного й того самого однорідного рівняння відносно функції, що залишилася. Це справедливо для однорідної системи будь-якого порядку.

б) Маємо лінійну *неоднорідну систему* трьох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Диференціюємо перше рівняння за змінною t і заміняємо y'_t із другого рівняння системи:

$$x''_{tt} = -y'_t, \qquad x''_{tt} = -x - 2y + 2z.$$

Отримане рівняння знову диференціюємо по t і підставляємо із системи вирази для y'_t і z'_t:

$$x'''_{ttt} = -x'_t - 2y'_t + 2z'_t = -x'_t - 2(x + 2y - 2z) + 2(x + y - z) = -x'_t - 2y + 2z.$$

Таким чином, маємо два нові рівняння:

$$x''_{tt} = -x - 2y + 2z,$$

$$x'''_{ttt} = -x'_t - 2y + 2z.$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, виключимо суму $-2y + 2z$. Дістаємо лінійне однорідне рівняння 3-го порядку відносно $x(t)$:

$$x'''_{ttt} - x''_{tt} + x'_t - x = 0.$$

Щоб визначити лінійно незалежні частинні розв'язки цього рівняння, слід скласти характеристичне рівняння $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$, що має корені $k_1 = 1$ і $k_{2,3} = \pm i$. Частинні розв'язки в цьому випадку мають вигляд:

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = \cos t, \qquad x_3(t) = \sin t,$$

а їхня лінійна комбінація дає загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$x(t)=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t.$$

Тепер з першого рівняння системи знайдемо $y(t)$, а із другого – $z(t)$:

$$y(t)=-C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t+1,\qquad z(t)=C_2\sin t-C_3\cos t+1.$$

Таким чином, загальний розв'язок системи набуває вигляду

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\\-\cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка система диференціальних рівнянь називається *лінійною*?
2. Яка система лінійних диференціальних рівнянь називається *однорідною* (*неоднорідною*)?
3. Яку систему називають лінійною системою рівнянь зі *змінними* (*сталими*) *коефіцієнтами*?
4. Що називають *загальним розв'язком* лінійної системи диференціальних рівнянь?
5. Що розуміють під *частинним розв'язком* лінійної системи?
6. Як формулюється *задача Коші* для лінійної системи диференціальних рівнянь?
7. Що називають *загальним розв'язком* лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
8. Що розуміють під *фундаментальною системою розв'язків* лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
9. Якою є *структура* розв'язку лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь?
10. У чому полягає *метод виключення невідомих* при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
11. Чи застосовний *метод Крамера* розв'язку систем лінійних *алгебраїчних рівнянь* до розв'язку систем лінійних *диференціальних рівнянь*. За якої умови?
12. Які з наведених систем лінійних диференціальних рівнянь є (а) *однорідними*, (б) *неоднорідними*?

10.1. $\begin{cases}x_t'=-y,\\y_t'=x;\end{cases}$ 10.2. $\begin{cases}x_t'=2x-y,\\y_t'=x+3y;\end{cases}$

10.3. $\begin{cases}x_t'=x-2y+3,\\y_t'=x-y+1;\end{cases}$ 10.4. $\begin{cases}x_t'=x+y-t,\\y_t'=x+t.\end{cases}$

13. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок системи?

11.1. $\begin{cases}x_t'-5x-3y=0,\\y_t'+3y+y=0;\end{cases}$ 11.2. $\begin{cases}x_t'=4x-y,\\y_t'=3x+y-z,\\z_t'=x+z.\end{cases}$

14. При розв'язуванні системи *методом виключення* невідомих одержують одне диференціальне рівняння від однієї з невідомих функцій. Чи збігаються корені характеристичних рівнянь, що відповідають однорідним рівнянням для кожної з функцій?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:

1.1. $\begin{cases}x_t'=-x+y,\\y_t'=-x-3y;\end{cases}$ 1.2. $\begin{cases}x_t'+y=0,\\y_t'+4x=0;\end{cases}$

1.3. $\begin{cases}x_t'=y-\cos t,\\y_t'=-x+\sin t;\end{cases}$ 1.4. $\begin{cases}x_t'=y+z,\\y_t'=x+z,\\z_t'=x+y;\end{cases}$

1.5. $\begin{cases}x_t'=3x-y+z,\\y_t'=x+y+z,\\z_t'=4x-y+4z;\end{cases}$ 1.6. $\begin{cases}x_t'=x-y-z,\\y_t'=x+y,\\z_t'=3x+4z.\end{cases}$

2. Знайти частинний розв'язок системи, що задовольняє початкові умови:

2.1. $\begin{cases}x_t'=x-2y,\\y_t'=x-y\end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=1;$

2.2. $\begin{cases}x_t'=4x-y,\\y_t'=x+2y\end{cases}$ $x(0)=0,\quad y(0)=1;$

2.3. $\begin{cases}x_t'=y+1,\\y_t'=x+1\end{cases}$ $x(0)=-2,\quad y(0)=0;$

2.4. $\begin{cases}x_t'=5x-3y+2e^{3t},\\y_t'=x+y+5e^{-t}\end{cases}$ $x(0)=7,\quad y(0)=0;$

2.5. $\begin{cases}x_t'=y+e^t,\\y_t'=z-e^t,\\z_t'=x\end{cases}$ $x(0)=-4,\quad y(0)=1,\quad z(0)=8.$

ВІДПОВІДІ

1.1. $x=(C_1+C_2t)e^{-2t}, \quad y=(C_2-C_1-C_2t)e^{-2t}$.

1.2. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}, \quad y=-2\left(C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}\right)$.

1.3. $x=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t, \quad y=-C_1\sin t+C_2\cos t+t\sin t$.

1.4. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t}, \quad y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t}, \quad z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t}$.

1.5. $x=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+C_3e^{5t}, \quad y=C_1e^{t}-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$,
$z=-C_1e^{t}-3C_2e^{2t}+3C_2e^{5t}$. **1.6.** $x=e^{t}(2C_2\sin 2t+2C_3\cos 2t)$,
$y=e^{t}(C_1-C_2\cos 2t+C_3\sin 2t), \quad z=e^{t}(-C_1-3C_2\cos 2t+3C_3\sin 2t)$.

2.1. $x=\cos t-\sin t, \quad y=\cos t$. **2.2.** $x=-te^{3t}, \quad y=(1-t)e^{3t}$.

2.3. $x=-e^{-t}-1, \ y=e^{-t}-1$. **2.4.** $x=12e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t}, \ y=4e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$.

2.5. $x=2e^{t}-e^{-\frac{t}{2}}\left(6\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \quad y=e^{t}+4\sqrt{3}\,e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$,

$z=2e^{t}+e^{-\frac{t}{2}}\left(6\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

§ 11.10. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА

І. *Лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння, *лінійне відносно невідомої функції* $y(x)$ *і її похідних* y', y'', ..., $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{11.10.1}$$

де $a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ й $f(x)$ – неперервні на деякому відрізку $[a;b]$ функції.

Якщо права частина рівняння (11.10.1) тотожно дорівнює нулю $(f(x)\equiv 0)$, то рівняння називається *лінійним однорідним*.

ІІ. Розглянемо лінійне *неоднорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{11.10.2}$$

і відповідне *однорідне* рівняння

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{11.10.3}$$

де $p(x)$, $q(x)$ і $f(x)$ – неперервні функції.

Структура *загального розв'язку* рівняння (11.10.3) така сама, як і лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами (11.6.4).

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння (11.10.3), досить знати будь-який один його частинний розв'язок y_1. Тоді другий частинний розв'язок y_2 можна безпосередньо визначити за формулою

$$y_2=y_1\int e^{-\int p(x)dx}\cdot\frac{dx}{y_1^2}. \tag{11.10.4}$$

За рахунок введення нової функції $z(x)$ за формулою

$$y(x)=y_1\cdot z(x), \tag{11.10.5}$$

можна знизити порядок рівняння (11.10.3) на одиницю. При цьому перетворене рівняння є лінійним відносно $z(x)$.

Як правило, частинний розв'язок $y_1(x)$ знаходять методом підбору.

Якщо відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (11.10.3), то *загальний розв'язок* відповідного неоднорідного рівняння (11.10.2) може бути знайдений *методом варіації* довільних сталих (див. § 11.8).

ІІІ. *Рівнянням Ейлера* 2-го порядку називається диференціальне рівняння вигляду

$$a_0x^2y''+a_1xy'+a_2y=f(x), \tag{11.10.6}$$

де a_0,a_1,a_2 – сталі. Якщо $f(x)\equiv 0$, маємо однорідне рівняння Ейлера.

За допомогою заміни змінної $x=e^t$ $(x>0)$ або $x=-e^t$ $(x<0)$ рівняння (11.10.6) зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (див. § 11.7). При цьому

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{y'_t}{e^t}, \tag{11.10.7}$$

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{e^t}\right)}{d(e^t)} = \frac{\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{e^{2t}} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}}. \qquad (11.10.8)$$

Узагальненим рівнянням Ейлера називається лінійне диференціальне рівняння

$$(ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_2 y = f(x), \qquad (11.10.9)$$

де a, b, a_1, a_2 – сталі.

Це рівняння зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни $ax+b=e^t$ $(ax+b>0)$. У цьому випадку

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = ae^{-t}y'_t, \qquad y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d\left(ae^{-t}y'_t\right)}{d(e^t)} = a^2e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t). \qquad (11.10.10)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$.

<u>*Розв'язання*</u>. Задано лінійне *однорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*. Це рівняння можна розглядати при будь-яких $x \neq 0$.

Перший спосіб. Щоб знайти загальний розв'язок рівняння, підберемо який-небудь частинний розв'язок. Таким частинним розв'язком слугує функція $y_1(x) = x^2$. Дійсно, підставивши $y_1 = x^2$ і $y_1'' = 2$ у дане рівняння, матимемо

$$2 - \frac{2}{x^2}\cdot x^2 \equiv 0.$$

Знаючи частинний розв'язок $y_1 = x^2$, знизимо порядок рівняння, вводячи нову функцію за формулою (11.10.5):

$$y(x) = x^2 z(x).$$

Обчислимо відповідні похідні:

$$y' = 2xz + x^2z', \qquad y'' = 2z + 4xz' + x^2z''$$

і підставимо їх у рівняння:

$$2z + 4xz' + x^2z'' - \frac{2}{x^2}\cdot x^2 z = 0 \quad \Rightarrow \quad 4xz' + x^2z'' = 0 \quad \Rightarrow \quad xz'' + 4z' = 0.$$

За рахунок введення функції $z(x)$ одержали рівняння, що допускає зниження порядку (див. § 11.5). Покладемо $z' = p(x)$, тоді $z'' = p'(x)$ і рівняння зводиться до рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$xp' + 4p = 0.$$

Звідси маємо

$$x\frac{dp}{dx} + 4p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{4dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -4\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{C}{x^4},$$

$$z' = \frac{C}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{C}{x^4} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{C\,dx}{x^4} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C}{-3x^3} + C_1.$$

Позначаючи $\frac{C}{-3} = C_2$ і повертаючись до функції $y(x)$, знайдемо

$$y = y_1 z = x^2\left(\frac{C_2}{x^3} + C_1\right) = \frac{C_2}{x} + C_1x^2.$$

Таким чином, розв'язок заданого рівняння має вигляд $y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x}$.

Переконаємося, що знайдено *загальний розв'язок* заданого рівняння. Дійсно, функція $y_2 = \frac{1}{x}$ є його розв'язком, оскільки задовольняє рівняння і знаходиться з останньої формули при $C_1 = 0$ і $C_2 = 1$. При цьому функції $y_1 = x^2$ і $y_2 = \frac{1}{x}$ лінійно незалежні при $x \neq 0$, оскільки $\frac{y_1}{y_2} = x^3 \neq \text{Const}$.

Другий спосіб. Знаючи один частинний розв'язок $y_1 = x^2$, скористаємося формулою (11.10.4), щоб знайти другий частинний розв'язок. Оскільки в даному випадку $p(x) = 0$, то

$$y_2 = y_1\int e^{-\int p(x)dx}\cdot\frac{dx}{y_1^2} = x^2\int\frac{dx}{x^4} = x^2\cdot\left(-\frac{1}{3x^3}\right) = -\frac{1}{3x}.$$

Отже, *загальний розв'язок* має вигляд

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x^2 + C_2\left(-\frac{1}{3x}\right) = C_1x^2 + \frac{\overline{C_2}}{x}, \qquad \text{де } \frac{C_2}{-3} = \overline{C_2}.$$

Третій спосіб. Розглядаючи задане однорідне рівняння зі змінними коефіцієнтами як *рівняння Ейлера*, виконаємо заміну змінної $x = e^t$. Тоді згідно з формулами (11.10.7) і (11.10.8) матимемо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{e^t}, \qquad y''_{xx} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}}.$$

У результаті вихідне рівняння набуває вигляду

$$\frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}} - \frac{2y}{e^{2t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad y''_{tt} - y'_t - 2y = 0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку зі *сталими коефіцієнтами*. Його характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$ має дійсні різні корені

$k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Отже, фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(t) = e^{2t}$ і $y_2(t) = e^{-t}$, а загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Виконуючи обернену заміну змінної $e^t = x$, запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння відносно змінної x

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$, якщо відомий його частинний розв'язок $y_1(x) = x$.

Розв'язання. Задано лінійне *однорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*.

Перший спосіб. Знайдемо другий частинний розв'язок $y_2(x)$ за формулою (11.10.4). У даному випадку $y_1 = x$ і $p(x) = \frac{1}{x}$. Тому

$$y_2 = x\int e^{-\int\frac{dx}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2} =$$

$$= x\int e^{-\ln|x|} \cdot \frac{dx}{x^2} = x\int\left(e^{\ln|x|}\right)^{-1}\frac{dx}{x^2} = x\int x^{-1}\cdot\frac{dx}{x^2} = x\int\frac{dx}{x^3} = x\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x_1 + C_2\left(-\frac{1}{2x}\right) = C_1 x + \frac{\overline{C_2}}{x},$$

де $\overline{C_2} = -\frac{1}{2}C_2$.

Другий спосіб. Перепишемо рівняння в такий спосіб:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Це однорідне *рівняння Ейлера* 2-го порядку. Виконаємо заміну змінної $x = e^t$ $(x > 0)$, тоді в силу формул (11.10.7) і (11.10.8) матимемо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{e^t}, \qquad y''_{xx} = \frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}}.$$

Після підстановки цих похідних у рівняння одержимо:

$$e^{2t}\frac{y''_{tt} - y'_t}{e^{2t}} + e^t\frac{y'_t}{e^t} - y = 0 \quad\Rightarrow\quad y''_{tt} - y = 0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 - 1 = 0$ має дійсні різні корені $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. Фундаментальну систему розв'язків утворюють функції $y_1(t) = e^t$ і $y_2(t) = e^{-t}$, а загальний розв'язок має вигляд:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Виконуючи обернену заміну змінної $e^t = x$, знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' - y' = 0$.

Розв'язання. Це лінійне *однорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*.

Перший спосіб. Записавши рівняння у вигляді

$$x^2 y'' - xy' = 0,$$

матимемо однорідне *рівняння Ейлера*.

Виконаємо заміну $x = e^t$ $(x > 0)$ і, підставляючи похідні (11.10.7) і (11.10.8) у задане рівняння, отримаємо лінійне однорідне рівняння зі *сталими коефіцієнтами*:

$$e^t \cdot e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) - y'_t e^{-t} = 0 \quad\Rightarrow\quad y''_{tt} - 2y'_t = 0.$$

Відповідне йому характеристичне рівняння $k^2 - 2k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 2$. Отже, функції $y_1(t) = 1$ і $y_2(t) = e^{2t}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальний розв'язок має вигляд

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{2t}.$$

Повертаючись до змінної x за допомогою оберненої заміни $e^t = x$, знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = C_1 + C_2 x^2.$$

Другий спосіб. Задане рівняння допускає елегантніше розв'язання, якщо записати його у вигляді

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}.$$

Звідси відразу знаходимо

$$\left(\ln|y'|\right)' = \left(\ln|x|\right)' \quad\Rightarrow\quad \ln|y'| = \ln|x| + \ln C \quad\Rightarrow\quad y' = Cx.$$

Залишилося відокремити змінні та виконати інтегрування:

$$y = C_1 + \frac{C}{2}x^2 = C_1 + C_2 x^2, \qquad \text{де} \quad C_2 = \frac{C}{2}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

Розв'язання. Задано лінійне *однорідне* рівняння 3-го порядку. Використовуємо підстановку $x = e^t$ $(x > 0)$. Обчислимо відповідні похідні (див. формули (11.10.7) і (11.10.8)):

$$y'_x = e^{-t} y'_t, \qquad y''_{xx} = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right), \qquad y'''_{xxx} = e^{-3t}\left(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t\right).$$

Підставимо їх у задане рівняння:

$$e^{3t} \cdot e^{-3t}\left(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t\right) - 3e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) + 6e^t \cdot e^{-t} y'_t - 6y = 0,$$

звідки

$$y'''_{ttt} - 6y''_{tt} + 11y'_t - 6y = 0.$$

Отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі *сталими коефіцієнтами*. Складемо відповідне характеристичне рівняння

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

і знайдемо його корені

$$(k-1)\left(k^2 - 5k + 6\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3.$$

Виходить, фундаментальну систему розв'язків рівняння зі сталими коефіцієнтами утворюють функції $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{2t}$, $y_3(t) = e^{3t}$. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння запишемо у вигляді

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \quad \Rightarrow \quad y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(2x-1)y'' + 2(2x-1)y' - 16y = 0.$$

Розв'язання. Задано узагальнене *рівняння Ейлера* вигляду (11.10.9). Щоб звести його до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, застосуємо підстановку $2x - 1 = e^t$ $(2x - 1 > 0)$. Відповідно до формули (11.10.10) запишемо

$$y'_x = 2e^{-t} y'_t, \qquad y''_{xx} = 4e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right).$$

Тоді задане рівняння зводиться до такого:

$$e^{2t} \cdot 4e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) + 2e^t \cdot 2e^{-t} y'_t - 16y = 0.$$

Спрощуючи це співвідношення, матимемо лінійне однорідне рівняння

$$y''_{tt} - 4y = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння з дійсними й різними коренями:

$$k^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 2, \\ k_2 = -2. \end{array}\right.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Виконуючи обернену заміну змінної $e^t = 2x - 1$, знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y(x) = C_1 (2x-1)^2 + \frac{C_2}{(2x-1)^2}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі *змінними коефіцієнтами*

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0,$$

підібравши частинний розв'язок у вигляді $y_1 = e^{\alpha x}$.

Розв'язання. Нехай частинний розв'язок має вигляд $y_1 = e^{\alpha x}$. Визначимо невідомий коефіцієнт α, попередньо обчисливши похідні $y'_1 = \alpha e^{\alpha x}$, $y''_1 = \alpha^2 e^{\alpha x}$.

Підставимо y_1, y'_1 і y''_1 в задане рівняння:

$$(2x+1)\alpha^2 e^{\alpha x} + 4x\alpha e^{\alpha x} - 4e^{\alpha x} = 0, \qquad e^{\alpha x} \neq 0;$$

$$(2x+1)\alpha^2 + 4x\alpha - 4 = 0.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 2\alpha^2 + 4\alpha = 0, \\ x^0 & \alpha^2 - 4 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = 0, \quad \alpha = -2; \\ \alpha = \pm 2. \end{array}\right.$$

Отже, шукане значення $\alpha = -2$. Таким чином, частинний розв'язок має вигляд

$$y_1(x) = e^{-2x}.$$

Щоб знайти другий частинний розв'язок $y_2(x)$, можна скористатися формулою (11.10.4). Можна також знизити порядок рівняння, вводячи нову функцію $y(x) = z(x) \cdot y_1 = z(x)e^{-2x}$ за формулою (11.10.5). Другий спосіб більш трудомісткий, тому застосуємо формулу (11.10.4).

Поділивши обидві частини рівняння на $2x+1\neq 0$, перетворимо задане рівняння до рівняння вигляду (11.10.3):

$$y''+\frac{4x}{2x+1}y'-\frac{4}{2x+1}y=0,$$

де

$$p(x)=\frac{4x}{2x+1}=2\frac{2x}{2x+1}=2\frac{2x+1-1}{2x+1}=2\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)=2-\frac{2}{2x+1}.$$

Тоді

$$y_2=e^{-2x}\int e^{-\int\left(2-\frac{2}{2x+1}\right)dx}\cdot\frac{dx}{e^{-4x}}=e^{-2x}\int e^{-2x+\ln|2x+1|}\cdot e^{4x}dx=$$

$$=e^{-2x}\int e^{-2x}\cdot e^{\ln|2x+1|}\cdot e^{4x}dx=e^{-2x}\int e^{-2x}\cdot(2x+1)\cdot e^{4x}dx=e^{-2x}\int(2x+1)\,e^{2x}dx.$$

Для обчислення останнього інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int(2x+1)\,e^{2x}dx=\begin{vmatrix}u=2x+1, & dv=e^{2x}dx\\ du=2dx, & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix}=\frac{2x+1}{2}e^{2x}-\int e^{2x}dx=(2x+1-1)\frac{e^{2x}}{2}=xe^{2x}.$$

Отже,

$$y_2(x)=e^{-2x}\cdot xe^{2x}=x.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-2x}+C_2x.$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі *змінними коефіцієнтами*

$$\left(1-x^2\right)y''-xy'+\frac{1}{2}y=0,$$

якщо відомий частинний розв'язок $y_1(x)=\sqrt{1+x}$.

Розв'язання. Другий частинний розв'язок $y_2(x)$ знайдемо за формулою (11.10.4). Але спочатку поділимо обидві частини рівняння на $1-x^2\neq 0$:

$$y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{1}{2\left(1-x^2\right)}y=0.$$

Тут $p(x)=-\frac{x}{1-x^2}$, тому

$$y_2=\sqrt{1+x}\int e^{-\int\frac{xdx}{1-x^2}}\cdot\frac{dx}{1+x}=\sqrt{1+x}\int e^{-\frac{1}{2}\int\frac{(-2x)dx}{1-x^2}}\cdot\frac{dx}{1+x}=$$

$$=\sqrt{1+x}\int e^{-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|}\cdot\frac{dx}{1+x}=\sqrt{1+x}\int e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\frac{dx}{1+x}=\sqrt{1+x}\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Останній інтеграл обчислимо за допомогою тригонометричної підстановки:

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}=\begin{vmatrix}x=\cos t\\ dx=-\sin t\,dt\end{vmatrix}=\int\frac{(-\sin t)dt}{(1+\cos t)\sin t}=-\int\frac{dt}{1+\cos t}=-\int\frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}=$$

$$=-\operatorname{tg}\frac{t}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Тоді частинний розв'язок

$$y_2(x)=-\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=-\sqrt{1-x}.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1\sqrt{1+x}+C_2\sqrt{1-x},\qquad |x|\leq 1.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy''+y'+1=0$.

Розв'язання. Задано лінійне *неоднорідне* диференціальне рівняння зі *змінними коефіцієнтами*. Поділимо його почленно на $x\neq 0$:

$$y''+\frac{y'}{x}=-\frac{1}{x}.$$

Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння, спочатку знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідного *однорідного* рівняння, а потім скористаємося *методом варіації* довільних сталих.

1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y''+\frac{y'}{x}=0.$$

Це рівняння можна розглядати як рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $y'(x)$. Дійсно,

$$\frac{y''}{y'}=-\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{d(y')}{y'}=-\frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши його

$$\int\frac{d(y')}{y'}=-\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad \ln y'=-\ln x+\ln C_1\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{C_1}{x},$$

одержали рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $y(x)$. Інтегруючи ще раз, знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{x}\quad\Rightarrow\quad \int dy=C_1\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad y(x)=C_1\ln|x|+C_2.$$

2. Дотримуючись методу варіації довільних сталих, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y(x)=C_1(x)\ln x+C_2(x).\qquad (*)$$

Тут $\ln x=y_1(x)$ і $1=y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння.

Для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x+C_2'(x)=0,\\ C_1'(x)\cdot\dfrac{1}{x}+C_2'(x)\cdot 0=-\dfrac{1}{x},\end{cases}$$

звідки знаходимо:

$$C_1'(x)=-1\quad\Rightarrow\quad C_1(x)=-x+\overline{C}_1;$$

$$C_2'(x)=\ln x\quad\Rightarrow\quad C_2(x)=\int\ln x\,dx=x\ln x-x+\overline{C}_2.$$

3. З урахуванням знайдених функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ із (*) матимемо загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння:

$$y(x)=(\overline{C}_1-x)\ln|x|+(\overline{C}_2+x\ln|x|-x)=\overline{C}_1\ln|x|+\overline{C}_2-x.$$

Зауваження 1. Це рівняння було розв'язане в § 11.5, приклад 4 як рівняння, що допускає зниження порядку.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-\dfrac{2}{x^2}y=-\ln x$.

Розв'язання. Задано лінійне *неоднорідне* диференціальне рівняння зі *змінними коефіцієнтами*. Розглянемо однорідне рівняння

$$y''-\frac{2}{x^2}y=0.$$

Його загальний розв'язок було знайдено в прикладі 1: $y=C_1x^2+\dfrac{C_2}{x}$.

Для знаходження *загального розв'язку неоднорідного рівняння* застосуємо метод варіації довільних сталих, вважаючи C_1 і C_2 функціями від x:

$$y(x)=C_1(x)\cdot x^2+\frac{C_2(x)}{x}.$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ визначимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2+\dfrac{C_2'(x)}{x}=0,\\ C_1'(x)\cdot 2x-\dfrac{C_2'(x)}{x^2}=-\ln x.\end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо $C_2'(x)=-C_1'(x)\cdot x^3$ й підставляємо в друге рівняння:

$$C_1'(x)\cdot 2x+\frac{C_1'(x)\cdot x^3}{x^2}=-\ln x$$

або

$$C_1'(x)\cdot 3x=-\ln x\quad\Rightarrow\quad C_1'(x)=-\frac{\ln x}{3x}.$$

Отже,

$$C_2'(x)=\frac{1}{3}x^2\ln x.$$

Інтегруючи отримані вирази, знайдемо $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1(x)=-\frac{1}{3}\int\frac{\ln x}{x}dx=-\frac{1}{3}\int\ln x\,d(\ln x)=-\frac{1}{6}\ln^2x+\overline{C}_1,$$

$$C_2(x)=\frac{1}{3}\int x^2\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=x^2dx, & v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{1}{9}x^3\ln x-\frac{1}{27}x^3+\overline{C}_2.$$

У результаті маємо *загальний розв'язок*:

$$y=\left(-\frac{1}{6}\ln^2x+\overline{C}_1\right)\cdot x^2+\left(\frac{1}{9}x^3\ln x-\frac{1}{27}x^3+\overline{C}_2\right)\cdot\frac{1}{x}=C_1^*x^2+\frac{\overline{C}_2}{x}-\frac{x^2}{18}(3\ln^2x-2\ln x),$$

де $C_1^*=\overline{C}_1-\dfrac{1}{27}$.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' + z = 1, \\ z' + \dfrac{2}{x^2} y = \ln x. \end{cases}$$

Розв'язання. Задано систему лінійних диференціальних рівнянь зі *змінними коефіцієнтами*. Дотримуючись § 11.9, послідовним виключенням невідомих зведемо її до одного диференціального рівняння.

З першого рівняння системи знаходимо

$$z(x) = 1 - y' \quad \Rightarrow \quad z' = -y''$$

і підставляємо в друге рівняння системи:

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = -\ln x . \tag{*}$$

Отримали лінійне *неоднорідне* рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*. Його загальний розв'язок було знайдено в прикладі 9:

$$y(x) = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{18}\left(3\ln^2 x - 2\ln x\right).$$

У такий спосіб визначена одна із шуканих функцій системи. Залишилося знайти функцію $z(x) = 1 - y'$, для якої маємо:

$$z(x) = 1 - 2C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x}{9}\left(3\ln^2 x - 2\ln x\right) + \frac{x^2}{18}\left(\frac{6\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) =$$

$$= 1 - 2C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x}{9}\left(3\ln^2 x + \ln x - 1\right).$$

Зауваження 2. Однорідне *рівняння Ейлера*

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0 \tag{11.10.10}$$

може бути проінтегроване безпосередньо, без заміни змінної. У цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді

$$y = x^k,$$

тоді $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}$. Підставляючи y, y' і y'' в рівняння (11.10.10) і скорочуючи на спільний множник $x^k \neq 0$, отримаємо характеристичне рівняння (алгебраїчне рівняння 2-го степеня) для визначення k:

$$k(k-1)a_0 + ka_1 + a_2 = 0 .$$

1. Якщо характеристичне рівняння має *різні дійсні* корені k_1, k_2, то маємо частинні розв'язки $y_1(x) = x^{k_1}$, $y_2(x) = x^{k_2}$ рівняння (11.10.10). Лінійна комбінація

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2}$$

слугує загальним розв'язком цього рівняння (при стандартній для рівняння Ейлера заміні $x = e^t$ це відповідає вже відомим частинним розв'язкам $y_1(x) = e^{k_1 t}$, $y_2(x) = e^{k_2 t}$).

2. Якщо характеристичне рівняння має *кратні дійсні* корені $k_1 = k_2 = k$, частинні розв'язки набувають вигляду

$$y_1(x) = x^k, \qquad y_2(x) = x^k \ln x$$

(якщо взяти $x = e^t$, то матимемо такі частинні розв'язки: $y_1(x) = e^{kt}$, $y_2(x) = te^{kt}$).

3. Парі *комплексно-спряжених* коренів $a \pm ib$ характеристичного рівняння відповідає пара частинних розв'язків:

$$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x), \qquad y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$$

(що для аргументу $t = \ln x$ виглядає також звично: $y_1(t) = e^{at}\cos bt$, $y_2(t) = e^{at}\sin bt$).

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y'' - 4xy' + 4xy = 0$.

Розв'язання. Задано лінійне *однорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*. Шукатимемо частинний розв'язок у вигляді $y = x^k$, тоді

$$y' = kx^{k-1}, \qquad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Підставляючи в рівняння, отримуємо характеристичне рівняння, що має дійсні різні корені:

$$k(k-1) - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 5k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k_1 = 1, \\ k_2 = 4. \end{array}\right.$$

Отже, частинні розв'язки мають вигляд:

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x^4.$$

Тоді загальний розв'язок заданого рівняння

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x + C_2 x^4 .$$

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y'' - 4xy' + 4xy = 2x^3$.

Розв'язання. Задано лінійне *неоднорідне* диференціальне рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*. Розв'язок відповідного однорідного рівняння було знайдено в прикладі 11.

Виходячи з характеристичного рівняння

$$k^2 - 5k + 4 = 0,$$

відновимо однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y(t)$, яке було б при стандартній заміні аргументу $x = e^t$:

$$y''_{tt} - 5y'_t + 4y = 0.$$

Його загальний розв'язок

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}.$$

Права частина неоднорідного рівняння $f(x)=2x^3$ при заміні $x=e^t$ перетворюється на $f(t)=2e^{3t}$. Отже, задане неоднорідне рівняння в змінних t, $y(t)$ набуває вигляду

$$y''_{tt}-5y'_t+4y=2e^{3t}.$$

Його частинний розв'язок легко знаходимо методом підбору:

$$y^*(t)=Ae^{3t},\quad (y^*)'=3Ae^{3t},\quad (y^*)''=9Ae^{3t};$$

$$9A-15A+4A=2\quad\Rightarrow\quad A=-1.$$

Отже,

$$y^*(t)=-e^{3t}\quad \text{або}\quad y^*(x)=-x^3.$$

Залишилося записати загальний розв'язок

$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}-e^{3t}$$

або

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)=C_1x+C_2x^4-x^3.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке рівняння називається *лінійним неоднорідним* диференціальним рівнянням n-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*?
2. Яке диференціальне рівняння називається *лінійним однорідним* рівнянням n-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*?
3. Чим відрізняється *лінійне неоднорідне* диференціальне рівняння від *лінійного однорідного*?
4. Чи відрізняється структура *загального розв'язку* лінійного *однорідного* рівняння зі *змінними коефіцієнтами* від структури *загального розв'язку* лінійного *однорідного* рівняння зі *сталими коефіцієнтами*? Відповідь обґрунтувати.
5. Як інтегруються *лінійні однорідні* рівняння зі *змінними коефіцієнтами*?
6. Як знайти другий *частинний розв'язок* лінійного *однорідного* диференціального рівняння 2-го порядку зі *змінними коефіцієнтами*, якщо один його частинний розв'язок відомий?
7. Чи можна знизити порядок лінійного *однорідного* диференціального рівняння зі *змінними коефіцієнтами*? Яким чином?
8. Як знайти загальний розв'язок лінійного *неоднорідного* диференціального рівняння зі *змінними коефіцієнтами*?
9. Яке лінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами називається *рівнянням Ейлера*?
10. Чи можна звести *рівняння Ейлера* до лінійного диференціального рівняння зі *сталими коефіцієнтами*? Якщо так, то як?
11. Викласти метод інтегрування *рівняння Ейлера.*
12. Яке диференціальне рівняння називається *узагальненим рівнянням Ейлера*?
13. Яка підстановка дає змогу звести *узагальнене рівняння Ейлера* до лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами?
14. Як знайти розв'язок неоднорідної *системи* лінійних диференціальних рівнянь зі *змінними коефіцієнтами*?
15. Чи можно проінтегрувати *рівняння Ейлера*, не вдаючись до заміни змінної? Якщо так, то як?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайти загальний розв'язок *лінійного однорідного* диференціального рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, якщо відомий його частинний розв'язок $y_1(x)$:

1.1. $x^2(\ln x-1)\,y''-xy'+y=0$, $\quad y_1(x)=x$;

1.2. $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, $\quad y_1(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

1.3. $(x^2+1)\,y''-2xy'+2y=0$, $\quad y_1(x)=x$;

1.4. $(\sin x-\cos x)\,y''-2\sin x\cdot y'+(\sin x+\cos x)\,y=0$, $\quad y_1(x)=e^x$.

2. Знайти загальний розв'язок однорідного *рівняння Ейлера*:

2.1. $x^2y''+xy'-y=0$; $\quad$ 2.2. $x^2y''+xy'-\dfrac{1}{4}y=0$;

2.3. $x^2y''-4xy'+6y=0$; $\quad$ 2.4. $x^2y''-3xy'+3y=0$;

2.5. $(x+2)^2y''-3(x+2)y'-3y=0$; $\quad$ 2.6. $(3-x)^2y''-2y=0$;

2.7. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

3. Знайти загальний розв'язок *лінійного неоднорідного* диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами:

3.1. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$; $\quad$ 3.2. $x^2y''+xy'+4y=10x$;

3.3. $x^2y''-6y=12\ln x$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $y = C_1 x + C_2 \ln x$. **1.2.** $y = C_1 \dfrac{\sin x}{x} + C_2 \dfrac{\cos x}{x}$. **1.3.** $y = C_1 x + C_2\left(x^2 - 1\right)$.

1.4. $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$. **2.1.** $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$. **2.2.** $y = C_1\sqrt{x} + \dfrac{C_2}{\sqrt{x}}$.

2.3. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$. **2.4.** $y = C_1 x^3 + C_2 x$. **2.5.** $y = C_1(x+2) + \dfrac{C_2}{(x+2)^3}$.

2.6. $y = C_1(3-x)^2 + \dfrac{C_2}{(3-x)}$. **2.7.** $y = (2x+1)\left(C_1 + C_2 \ln|2x+1|\right)$.

3.1. $y = x^2\left(C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| + 3\right)$.

3.2. $y = C_1 \cos\left(2\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(2\ln|x|\right) + 2x$. **3.3.** $y = C_1 x^3 + \dfrac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \dfrac{1}{3}$.

РОЗДІЛ 12
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ II

§ 12.1. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

ПЛОЩА ПЕРЕРІЗУ

Задача 1. Ватерлінія річкового судна має форму плоскої кривої, що визначається рівняннями $x(t) = 2\left(1 - \dfrac{t}{5} - \cos\dfrac{\pi t}{10}\right)$, $y(t) = 2\sin\dfrac{\pi t}{10}$, причому $t \in [0;10]$. Знайти площу перерізу судна на рівні ватерлінії.

Розв'язання. Для обчислення площі перерізу, обмеженого ватерлінією, скористаємося формулою $S = \int_a^b y(x)\,dx$, яка при параметричному заданні $x = x(t)$, $y = y(t)$ кривої, що обмежує область, має вигляд (див. § 10.3.2):

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt.$$

У цьому випадку параметр t змінюється від $t_1 = 10$ до $t_2 = 0$. Міняючи напрям обходу кривої на протилежний та інтегруючи, знаходимо:

$$S = -\int_{10}^{0} 2\sin\frac{\pi t}{10}\cdot 2\left(-\frac{1}{5} + \frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi t}{10}\right)dt = 4\int_0^{10}\left(-\frac{1}{5}\sin\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi t}{10}\right)dt =$$

$$= 4\int_0^{10}\left[-\frac{1}{5}\sin\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{20}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{5}\right)\right]dt = 4\left[\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi t}{10} + \frac{\pi}{20}\left(t - \frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi t}{5}\right)\right]\Bigg|_0^{10} =$$

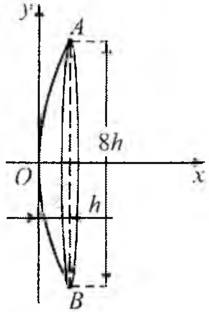
$$= 4\left[\frac{2}{\pi}\cdot(-1-1) + \frac{\pi}{20}\cdot 10\right] = 2\pi - \frac{16}{\pi} \text{ кв.од.}$$

ПЛОЩА ПОВЕРХНІ

Задача 2. Розміри параболічної супутникової антени вказано на рисунку. Знайти площу поверхні антени.

Розв'язання. Параболічна супутникова антена являє собою поверхню, утворену обертанням параболи навколо осі симетрії.

Складемо рівняння параболи, вершина якої співпадає з початком координат, а віссю симетрії слугує додатна піввісь абсцис. При цьому, як випливає з рисунка, парабола проходить через точку $A(h;4h)$. Отже,



$$y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad (4h)^2 = 2ph \quad \Rightarrow \quad 2p = 16h,$$

тобто рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 16hx.$$

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої між точками $x=a$ і $x=b$, виражається формулою (див. § 10.6)

$$P_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

У цьому випадку $y = 4\sqrt{hx}$. Обчислимо

$$y' = 4\cdot\frac{h}{2\sqrt{hx}} = 2\sqrt{\frac{h}{x}}, \qquad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(2\sqrt{\frac{h}{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{4h}{x}}.$$

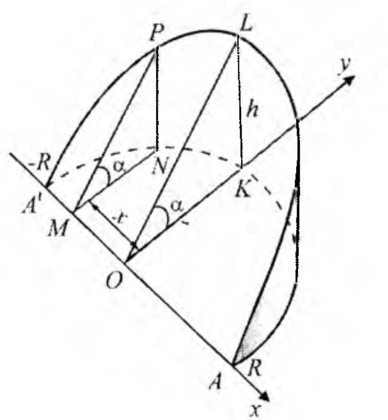
Тоді площа поверхні параболічної антени виразиться інтегралом:

$$P_x = 2\pi\int_0^h 4\sqrt{hx}\cdot\sqrt{1+\frac{4h}{x}}\,dx = 8\pi\sqrt{h}\int_0^h\sqrt{x+4h}\,dx = 8\pi\sqrt{h}\cdot\frac{2}{3}(x+4h)^{3/2}\Big|_0^h =$$

$$= \frac{16\pi\sqrt{h}}{3}\left[(5h)^{3/2}-(4h)^{3/2}\right] = \frac{16\pi h^2}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right) \text{ кв.од.}$$

ОБ'ЄМ ТІЛА

Задача 3. Від прямого кругового циліндра радіуса R відрізаний клин площиною, що проходить через діаметр основи і нахилена до основи під кутом α. Знайти об'єм клина (таке геометричне тіло називають *циліндричним відрізком*).



Розв'язання. Нехай вісь циліндра співпадає з віссю Oz декартової системи координат, а діаметр основи, по якому січна площина перетинає основу циліндра, лежить на осі Ox.

Тоді основою циліндра слугує круг $x^2+y^2\le R^2$, а січна площина, що проходить через діаметр $A'A$, утворює із площиною основи кут α.

Визначимо площу перерізу, перпендикулярного до осі Ox, який перетинає її в точці $M(x)$. Цей переріз є прямокутним трикутником, тому

$$S(x) = S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN\cdot PN,$$

де $MN = y(x)$ і $PN = h(x)$ – катети трикутника в довільній точці x.

Оскільки $PN = MN\cdot\operatorname{tg}\alpha$, а з рівняння кола маємо $y^2 = R^2 - x^2$, то

$$S(x) = S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}y^2\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Відповідно до формули (10.4.1) знаходимо об'єм клина:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx = \operatorname{tg}\alpha\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2R^3}{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

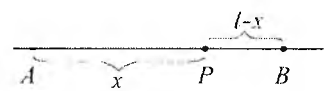
Якщо, наприклад, в основі циліндра лежить круг радіуса 4, тобто $x^2+y^2\le 16$, а січною є площина $z = 3y$, то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{LK}{OK} = 3$ і об'єм клина

$$V = \frac{2}{3}\cdot 4^3\cdot 3 = 128 \text{ куб.од.}$$

ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕГРАЛА

Задача 4. На відрізку AB завдовжки l взята точка P на відстані $x<l$ від точки A. Знайти середнє значення площі прямокутника, побудованого на відрізках AP і PB як на сторонах.

Розв'язання. Площа прямокутника, побудованого на сторонах $AP = x$ і $PB = l - x$, є функцією від x, тобто $S(x) = x(l-x)$. Отже, потрібно знайти середнє значення цієї функції на відрізку $[0;l]$. Скористаємося формулою *середнього значення функції* (див. § 10.1):



$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{l}\int_0^l x(l-x)\,dx = \frac{1}{l}\left(l\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^l = \frac{l^2}{6} \text{ (кв.од.).}$$

Задача 5. Напруга в електричному колі протягом 4 с рівномірно збільшується від $U_0 = 120$ В до $U_1 = 220$ В. Знайти середню силу струму $I(\xi)$ за цей час, якщо опір кола $R = 80$ Ом. У який момент часу це значення досягається?

Розв'язання. Знайдемо залежність напруги від часу. За умовою задачі напруга рівномірно збільшується, тобто $U(t) = kt + b$. Визначимо коефіцієнти k і b, скориставшись додатковими умовами $U(0) = 120$ і $U(4) = 220$:

$$\begin{cases} 120 = b, \\ 220 = 4k + b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k = 25, \\ b = 120. \end{array}\right.$$

Отже,

$$U(t) = 25t + 120.$$

Залежність сили струму від часу виражається *законом Ома*

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{25t+120}{80} = \frac{5t+24}{16}.$$

Відповідно до *теореми про середнє* (див. § 10.1) для функції $I(t)$ на проміжку $[0;4]$ знаходимо

$$I(\xi) = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{5t+24}{16}dt = \frac{1}{64}\cdot\left(\frac{5t^2}{2}+24t\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{64}(40+96) = \frac{17}{8} \approx 2{,}125 \text{ А}.$$

Тепер визначимо момент часу t_0, коли сила струму набуває цього значення:

$$\frac{5t_0+24}{16} = \frac{17}{8} \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2 \text{ с}.$$

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ

I. Нехай тіло рухається зі швидкістю $V = V(t)$, тоді *шлях* $S = S(t)$, пройдений тілом за проміжок часу $[t_1;t_2]$, виражається інтегралом:

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\,dt, \qquad V(t) \geq 0. \qquad (12.1.1)$$

Нехай тіло рухається із прискоренням $a = a(t)$. *Швидкість* тіла $V = V(t)$ протягом проміжку часу $[t_1;t_2]$ знаходиться за формулою

$$V(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt. \qquad (12.1.2)$$

Задача 6. Через t годин після відправлення від станції електровоз набуває прискорення $a(t) = 3t^2 - 4t + 80$ км/год². Знайти швидкість руху електровоза через 1 год і пройдену за цей час відстань.

Розв'язання. Визначимо спочатку швидкість руху електровоза через t годин після відправлення:

$$V(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t \left(3t^2 - 4t + 80\right)dt = t^3 - 2t^2 + 80t.$$

Через 1 год після відправлення швидкість електровоза досягне $V(1) = 79$ км/год. Пройдена за 1 год відстань

$$S(1) = \int_0^1 V(t)\,dt = \int_0^1 \left(t^3 - 2t^2 + 80t\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + 40t^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 40 = 39\frac{7}{12} \text{ км}.$$

Задача 7. Автомобіль, що рухається зі швидкістю $V_0 = 48$ км/год, починає гальмувати і зупиняється через $t = 3$с. Знайти шлях S, пройдений автомобілем від початку гальмування до повної зупинки.

Розв'язання. Припустимо, що після початку гальмування і до повної зупинки рух автомобіля є рівносповільненим. Враховуючи, що швидкість рівносповільненого руху виражається формулою $V = V_0 - at$, де V_0 – початкова швидкість, a – прискорення, t – час, визначимо прискорення з умови $V = 0$ при $t = 3\text{с} = \frac{3}{3600}$ год:

$$V_0 - at = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{V_0}{t} = \frac{48}{\frac{3}{3600}} = 48\cdot 1200 \text{ км/год}^2.$$

Отже, $V(t) = 48 - 48\cdot 1200t$. Шлях, пройдений до повної зупинки, визначимо як $S(t) = \int_0^t V(t)\,dt$ при $t = 3$с, тобто

$$S = \int_0^{\frac{1}{1200}} (48 - 48\cdot 1200t)\,dt = 48\int_0^{\frac{1}{1200}} (1 - 1200t)\,dt = 48\left(t - 600\cdot t^2\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{1200}} =$$

$$= 48\left(\frac{1}{1200} - \frac{600}{1200\cdot 1200}\right) = \frac{48}{1200}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{24}{1200} = 0{,}02 \text{ км} = 20 \text{ м}.$$

МАСА

II. *Маса* прямолінійного стрижня завдовжки l, що має змінну лінійну густину $\rho(x)$, дорівнює:

$$m = \int_0^l \rho(x)\,dx. \qquad (12.1.3)$$

Задача 8. Знайти масу стрижня завдовжки $l = 100$ см, якщо лінійна густина стрижня змінюється за законом $\rho(x) = \left(20x + 0{,}15x^2\right)$ г/см, де x – відстань від одного з кінців стрижня.

Розв'язання. Масу стрижня визначимо за формулою (12.1.3). У цьому випадку

$$m = \int_0^{100} \left(20x + 0{,}15x^2\right)dx = \left(10x^2 + 0{,}05x^3\right)\Big|_0^{100} = 10\cdot 100^2 + 0{,}05\cdot 10^6 =$$

$$= 10^5 + 5\cdot 10^4 = (10+5)\cdot 10^4 = 150\,000 \text{ г} = 150 \text{ кг}.$$

III. *Робота* змінної за величиною сили $\mathbf{F}(x)$, що діє в напрямі осі Ox уздовж прямолінійного відрізка $[a;b]$, виражається інтегралом

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (12.1.4)$$

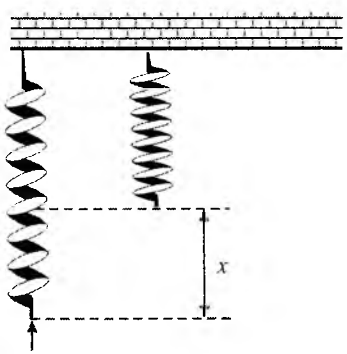
Оскільки $dx=\frac{dx}{dt}dt=Vdt$, то формулу (12.1.2) можна представити у вигляді

$$A=\int_{t_0}^{t_1} FVdt=\int_{t_0}^{t_1} Wdt, \qquad (12.1.5)$$

де $W=FV$ – *потужність* сили, тобто робота, виконана за одиницю часу.

Задача 9. Обчислити роботу, що виконується при стисканні пружини на 20 см, якщо відомо, що прикладена сила пропорційна стисканню пружини і для стискання на 1 см необхідна сила 2 Н.

Розв'язання. За умовою сила зростає пропорційно стисканню пружини. Якщо стискання пружини позначити через x, то сила $F=kx$ (*закон Гука*), тут k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від пружних властивостей пружини (коефіцієнт жорсткості пружини).



Знайдемо роботу, що виконується силою при стисканні пружини на 20 см, тобто на шляху від $x_0=0$ до $x_1=0,2$ м:

$$A=\int_0^{0.2} kx\,dx=\frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0,2}=\frac{k\cdot(0,2)^2}{2} \text{ Дж.}$$

Числове значення коефіцієнта k визначимо з додаткової умови $F(0,01)=2$, тобто $F=2$ Н, якщо $x=0,01$ м. Отже,

$$k=\frac{F}{x}=\frac{2}{0,01}=200.$$

Підставляючи знайдене значення k у формулу для роботи, матимемо:

$$A=\frac{200\cdot(0,2)^2}{2}=4 \text{ Дж.}$$

Задача 10. Для розтягання пружини на 0,02 м потрібно виконати роботу в 10 Дж. На яку довжину d можна розтягти пружину, виконуючи роботу в 40 Дж?

Розв'язання. Оскільки в цьому випадку має місце процес, протилежний стисканню, представимо силу розтягання у вигляді $F=-kx$, де k – коефіцієнт жорсткості пружини. Використовуючи формулу (12.1.4), визначимо коефіцієнт пропорційності k:

$$10=\int_0^{0,02}(-kx)\,dx=-k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,02}=-0,0002k,$$

звідки $k=-50\,000$ Н/м.

Використовуючи цю ж формулу, знайдемо, на яку довжину d розтягнеться пружина при виконанні роботи в 40 Дж:

$$40=\int_0^d 50\,000x\,dx=50\,000\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^d=25\,000\,d^2.$$

Отже, $d=0,04$ м.

Задача 11. Матеріальна точка M маси m, яка знаходиться в точці з координатою $x=a$, притягає точку M_1 одиничної маси, що знаходиться на осі Ox на відстані x від точки M. Визначити роботу з переміщення точки M_1 на відстань, де сила взаємодії зникаюче мала.

Розв'язання. Відповідно до умови переміщення повинно здійснюватися в нескінченність. Сила притягання визначається законом Ньютона $F=k\frac{m}{x^2}$, де $k=\text{Const}$. Робота обчислюється за допомогою невласного інтеграла

$$A=-\int_a^{\infty}\frac{km}{x^2}dx=-km\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^2}=-km\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_a^b=-km\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=-\frac{km}{a}.$$

Знак "мінус" свідчить про те, що напрям сили протилежний напряму руху.

Задача 12. Яку роботу потрібно затратити, щоб тіло маси m перенести з поверхні Землі на нескінченність?

Розв'язання. Закон притягання тіла Землею визначається за формулою

$$F=\frac{mgR^2}{r^2},$$

де m – маса тіла; r – відстань тіла до центра Землі; R – радіус Землі.

Шукану роботу обчислюємо за допомогою невласного інтеграла:

$$A=\int_R^{+\infty}\frac{mgR^2}{r^2}dr=mgR^2\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^2}=mgR^2\lim_{b\to+\infty}\int_R^b\frac{dr}{r^2}=-mgR^2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_R^b=$$

$$=-mgR^2\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}+\frac{mgR^2}{R}=mgR.$$

Задача 13. Циліндр із рухливим поршнем радіуса $r=0{,}1$ м і довжини $l=0{,}5$ м заповнений парою при тиску $p=9\cdot10^4$ Н/м². Яку роботу треба затратити, щоб при незмінній температурі (ізотермічний процес) об'єм пари зменшився в 3 рази?

Розв'язання. З курсу фізики відомо, що ізотермічний процес характеризується співвідношенням $pV=p_0V_0$, де p – тиск; V – об'єм. Робота, яка виконується газом при розширенні, визначається інтегралом

$$A=\int_{V_0}^{V_1}pdV.$$

Відповідно до умови $\dfrac{V_1}{V_0}=3$, отже

$$V_0=\pi r^2 l=\pi\cdot0{,}01\cdot0{,}5=5\pi\cdot10^{-3}.$$

Таким чином, робота при розширенні газу від V_0 до V_1 дорівнює

$$A=\int_{V_0}^{V_1}pdV=\int_{V_0}^{V_1}\frac{p_0V_0}{V}dV=p_0V_0\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V}=p_0V_0\ln V\Big|_{V_0}^{V_1}=p_0V_0\left(\ln V_1-\ln V_0\right)=$$

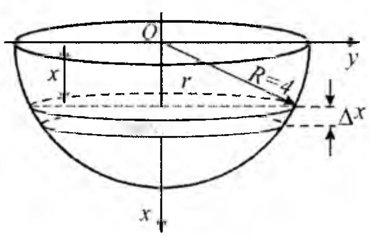
$$=p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}=9\cdot10^4\cdot5\pi\cdot10^{-3}\ln3=450\pi\ln3 \text{ Дж}.$$

Задача 14. Обчислити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду з напівсферичного резервуара радіуса $R=4$ м.

Розв'язання. Задача зводиться до обчислення роботи, яку необхідно виконати, щоб послідовно підняти всі частинки води на рівень краю резервуара. При цьому можна вважати, що кожна частинка пройде шлях, який дорівнює глибині її занурення в резервуарі.

Оскільки сила, яку треба прикласти до кожної частинки при її піднятті, дорівнює вазі частинки, то робота підняття однієї частинки дорівнює добутку ваги частинки на глибину її занурення.

Подумки поділимо рідину в резервуарі на елементарні шари і виділимо один з них, розташований на глибині x від поверхні. Розглянутий кульовий шар вважатимемо настільки тонким, що його можна вважати циліндричним з висотою Δx. Тоді об'єм ΔV виділеного елементарного шару дорівнює:



$$\Delta V=\pi r^2\Delta x=\pi\left(16-x^2\right)\Delta x.$$

Отже, вага ΔP виділеного шару $\Delta P=\gamma\Delta V$, де $\gamma=\rho g$ – питома вага води. Переходячи від нескінченно малого приросту ΔP до диференціала $dP(x)$, знайдемо вагу виділеного шару води, у цьому випадку силу $dF(x)$:

$$dF(x)=\pi\rho g\left(16-x^2\right)dx.$$

Запишемо наближений вираз для роботи, яку необхідно затратити, щоб викачати воду з виділеного кульового шару. З курсу фізики відомо, що $dA=x\,dF$. Отже,

$$dA(x)=x\cdot\pi\rho g\left(16-x^2\right)dx.$$

Виконуючи інтегрування по висоті резервуара (відповідно до умови висота дорівнює радіусу), знайдемо шукану роботу:

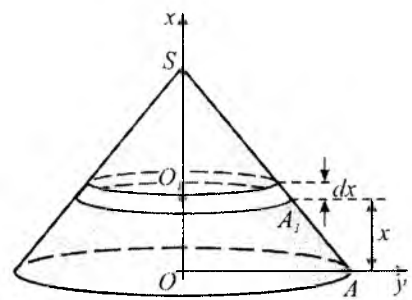
$$A=\int_0^h dA(x)=\pi\rho g\int_0^4\left(16-x^2\right)x\,dx=\pi\rho g\int_0^4\left(16x-x^3\right)dx=\pi\rho g\left(8x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=64\pi\rho g.$$

Задача 15. Яку роботу потрібно виконати, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи $R=1{,}2$ м і висотою $H=1$ м, якщо пісок щільністю $\rho=2$ г/см³ береться з поверхні землі.

Розв'язання. Виберемо систему координат, як показано на рисунку. Подумки виділимо в конусі на висоті x площинами, паралельними основі, елементарний шар завтовщки dx.

Запишемо наближений вираз для роботи, яку потрібно виконати, щоб заповнити виділений шар піском. У цьому випадку сила dF дорівнює вазі виділеного шару dP. Тому, при підніманні цього шару на висоту x потрібно виконати роботу

$$dA=x\,dP=x\rho g dV.$$



Об'єм виділеного шару приблизно дорівнює об'єму кругового циліндра заввишки dx і радіусом основи $y(x)$, тобто $dV\approx\pi y^2dx$. Тоді

$$dA\approx\pi\rho g y^2 x dx.$$

З подібності ΔAOS і ΔA_1O_1S випливає

$$\frac{y}{R}=\frac{H-x}{H}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{R}{H}(H-x).$$

Підставляючи отримане значення y у вираз для dA, матимемо

$$dA\approx\pi\rho g\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2dx.$$

Інтегруючи в межах від 0 до H, знайдемо роботу:

$$A=\pi\rho g\frac{R^2}{H^2}\int_0^H x(H-x)^2dx=\frac{1}{12}\pi\rho g R^2H^2=7393 \text{ Дж}.$$

Задача 16. Чавунний круговий конус заввишки 40 см і радіусом основи 40 см знаходиться на дні резервуара, заповненого на 80 см бензолом. Знайти роботу, яку треба виконати при витяганні конуса з резервуара, якщо густина чавуну $\rho_1 = 7,22$ г/см^3, а густина бензолу $\rho_2 = 0,88$ г/см^3.

Розв'язання. Шукана робота дорівнює сумі робіт, витрачених на підняття конуса спочатку в бензолі (поки вершина конуса співпаде з поверхнею рідини) і подальшого переміщення з бензолу в повітря (поки основа конуса співпаде з поверхнею рідини).

Оскільки $r = h = 0,4$ м, то об'єм конуса

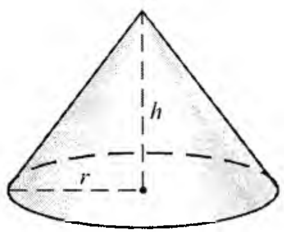
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 0,16 \cdot 0,4 = \frac{0,064\pi}{3} \text{ м}^3.$$

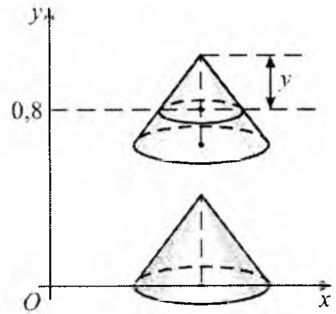
Враховуючи задані густини чавуну $\rho_1 = 7220$ кг/м^3 і бензолу $\rho_2 = 890$ кг/м^3, визначимо вагу конуса в бензолі:

$$P = (\rho_1 - \rho_2) gV = (7220 - 880) \cdot 9,8 \cdot \frac{0,064\pi}{3} = 1325,48\pi \text{ Н}.$$

Отже, робота, витрачена на витягання конуса до моменту появи його вершини на поверхні рідини, дорівнює:

$$A_1 = 1325,48\pi \cdot (0,8 - h) = 1325,48\pi \cdot (0,8 - 0,4) = 530,19\pi \text{ Дж}.$$





Знайдемо роботу A_2, необхідну для витягання конуса з резервуара. Нехай вершина конуса піднята на висоту $0,8 + y$. Тоді об'єм частини конуса V_1, що знаходиться над поверхнею рідини (див. рисунок), визначимо за формулою

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi y^3,$$

оскільки $r_1 = h_1 = y$.

В цьому випадку вага конуса

$$P(y) = g\left[\rho_1 V - \rho_2 (V - V_1)\right] = 9,8 \cdot \left[7220 \cdot \frac{0,064\pi}{3} - 880 \cdot \left(\frac{0,064\pi}{3} - \frac{\pi y^3}{3}\right)\right].$$

Отже,

$$A_2 = 9,8 \int_0^h \left((7220 - 880) \cdot \frac{0,064\pi}{3} + 880 \cdot \frac{\pi y^3}{3}\right) dy =$$

$$= \frac{9,8\pi}{3} \int_0^{0,4} \left(6340 \cdot 0,064 + 880 \cdot y^3\right) dy = \frac{9,8\pi}{3} \left(405,76 \cdot y + 880 \cdot \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{0,4} =$$

$$= \frac{9,8\pi}{3}(162,30 + 5,63) = 548,58\,\pi \text{ Дж}.$$

Таким чином, для витягання конуса з резервуара потрібно виконати роботу

$$A = A_1 + A_2 = 530,19\pi + 548,58\pi = 1078,78\pi = 3389,09 \text{ Дж}.$$

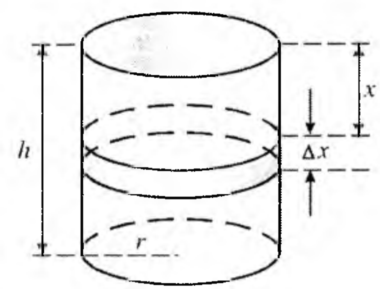
ТИСК

III. Тиск на довільній глибині однаковий у всіх напрямах. *Сила тиску* P рідини густиною ρ на площадку S при глибині занурення h дорівнює (*закон Паскаля*)

$$P = \rho g h S. \qquad (12.1.6)$$

Задача 17. Обчислити силу тиску рідини на бічні стінки кругового циліндра заввишки $h = 1,2$ м і радіусом основи $r = 40$ см, якщо рідина повністю заповнює циліндр, а її густина $\rho = 0,83 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Розв'язання. Тиск рідини на бічні стінки циліндра обчислимо, користуючись законом Паскаля (12.1.6). У даному випадку тиск на виділену смужку бічної поверхні заввишки Δx, розташовану на глибині x, дорівнює:



$$\Delta P = \rho g \cdot x \Delta S_{\text{біч}} = \rho g \cdot 2\pi r \cdot x \Delta x.$$

Замінюючи нескінченно малий приріст ΔP диференціалом, що рівносильно відкиданню нескінченно малих вищих порядків, знайдемо силу тиску, якого зазнає виділена елементарна смужка:

$$dP(x) = 2\pi r \rho g x dx.$$

Інтегруючи за змінною x в межах від 0 до h, одержимо

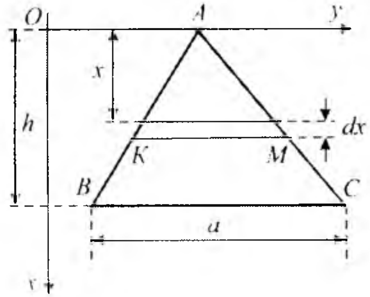
$$P = \int_0^h 2\pi r \rho g x dx = 2\pi r \rho g \int_0^h x dx = 2\pi r \rho g \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^h = \pi \rho g r h^2.$$

Підставляючи задані числові значення, знайдемо

$$P = \pi \cdot 0,83 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,4 \cdot 1,44 = 14,7 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Задача 18. Знайти силу тиску рідини на вертикальну трикутну пластину з основою a і висотою h, занурену в рідину так, що її вершина лежить на поверхні.

Розв'язання. Подумки поділимо пластину на елементарні смужки, паралельні її основі. Виділимо елементарну горизонтальну смужку завширшки dx, що знаходиться на довільній глибині x. Приймаючи смужку за прямокутник, знайдемо його основу KM. З подібності трикутників ABC і AKM маємо:



$$\frac{a}{KM}=\frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad KM=\frac{ax}{h}.$$

Тоді для площі виділеної смужки отримуємо наближений вираз:

$$dS=\frac{ax}{h}dx.$$

Сила тиску рідини на площинку S, глибина занурення якого x, за законом Паскаля дорівнює $P=\rho g x S$. Отже, шукана сила тиску на розглянуту смужку обчислюється за формулою:

$$dP(x)=\rho g x\,dS=\rho g\frac{ax^2}{h}dx.$$

Інтегруючи цей вираз по висоті пластини h, знайдемо силу тиску рідини на всю пластину ABC:

$$P=\int_0^h dP(x)=\int_0^h \rho g\frac{ax^2}{h}dx=\rho g\frac{a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\rho g\frac{ah^2}{3}.$$

Задача 19. Визначити силу тиску води на вертикальний шлюз заввишки h, що має форму рівнобедреного трикутника, основа a якого співпадає з поверхнею води.

Розв'язання. Знайдемо тиск dP на елементарну площинку завширшки dx, розташовану на глибині x:

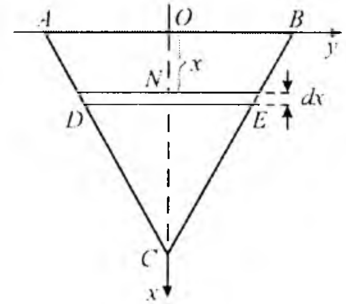
$$dP(x)=\rho g x\,dS, \qquad (*)$$

де $dS=DE\cdot dx$ (вважаємо площинку прямокутною в силу малої її ширини).

З подібності трикутників ACB і DCE маємо

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CN}{CO} \quad \Rightarrow \quad \frac{DE}{a}=\frac{h-x}{h} \quad \Rightarrow \quad DE=\frac{a}{h}(h-x).$$

Підставимо це значення в (*):



$$dP(x)=\rho g\frac{a}{h}x(h-x)dx.$$

Отже, повна сила тиску на шлюз визначається інтегралом:

$$P=\rho g\int_0^h \frac{a}{h}x(h-x)dx=\rho g\frac{ah^2}{6}.$$

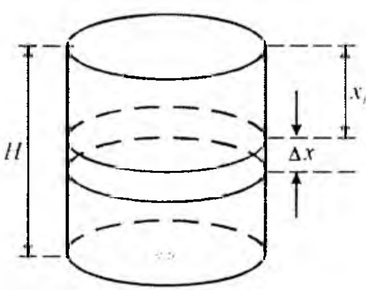
Зауваження. Порівнюючи задачі 18 та 19, звернемо увагу, наскільки тиск рідини, що діє на вертикальну пластинку, залежить від її форми.

РІЗНІ ЗАДАЧІ

Задача 20. За який час вода, що наповнює циліндричну посудину із площею основи $S=420$ см^2 і висотою $H=40$ см, витече крізь отвір площею $s_0=2$ см^2 у дні посудини?

Розв'язання. Швидкість витікання ідеальної рідини з посудини дорівнює за величиною швидкості вільного падіння з висоти, що дорівнює висоті стовпа рідини h (*закон Торрічеллі*), тобто $v(h)=\sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння. Швидкість витікання реальних рідин визначається співвідношенням $v(h)=\mu\sqrt{2gh}$, де μ – коефіцієнт швидкості витікання, що характеризує розміри і форму (погано обтічні краї) отвору, а також в'язкість рідини, визначається емпірично. Наприклад, для води, що витікає крізь малий отвір у дні посудини (див. рисунок), $\mu=0{,}62$.

Будемо вважати, що протягом кожного малого проміжку часу Δt швидкість витікання води крізь отвір у дні посудини залишається сталою, і дорівнює її значенню на початку цього процесу. Тоді виділений на глибині x елементарний об'єм витікає зі швидкістю



$$V(x)=0{,}62\sqrt{2g(H-x)}.$$

За проміжок часу Δt з такою швидкістю крізь отвір площею s_0 витече об'єм води $V(x)\cdot s_0\cdot\Delta t$. За цей самий час спорожниться частина посудини $S\Delta x$.

Прирівнюючи ці об'єми, одержимо

$$0{,}62s_0\sqrt{2g(H-x)}\,\Delta t=S\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta t=\frac{S\Delta x}{0{,}62s_0\sqrt{2g(H-x)}}.$$

Тепер перейдемо від нескінченно малих приростів до диференціалів:

$$dt=\frac{Sdx}{0{,}62s_0\sqrt{2g(H-x)}}.$$

Інтегруючи за висотою посудини, визначимо час, за який витече вся вода:

$$T=\frac{S}{0{,}62s_0\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{dx}{\sqrt{H-x}}=\frac{S}{0{,}62s_0\sqrt{2g}}\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{H-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{H-x}}=$$

$$=\frac{(-S)}{0{,}62s_0\sqrt{2g}}\lim_{\varepsilon\to0}2\sqrt{H-x}\,\Big|_0^{H-\varepsilon}=-\frac{2S}{0{,}62s_0\sqrt{2g}}\left[\lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{H-H+\varepsilon}-\sqrt{H}\right]=$$

$$=\frac{S\sqrt{H}}{0{,}31s_0\sqrt{2g}}=\frac{420\cdot\sqrt{40}}{0{,}31\cdot2\cdot\sqrt{2\cdot981}}\approx100\,\text{с}.$$

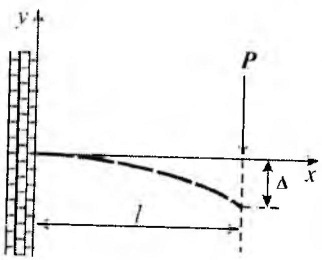
Задача 21. Знайти прогин Δ кінця консольної балки довжини ℓ, завантаженої на кінці зосередженою силою P.

Розв'язання. Потенціальна енергія W при вигині обчислюється за формулою

$$W=\int_0^\ell\frac{M^2}{2EI}dx,$$

де $M=Px$ – згинальний момент; EI – жорсткість балки при вигині. Прогин визначається як похідна від потенціальної енергії за діючою силою, тобто

$$\Delta=\frac{dW}{dP}.$$



Обчислимо потенціальну енергію балки

$$W=\int_0^\ell\frac{P^2x^2dx}{2EI}=\frac{P^2}{2EI}\int_0^\ell x^2dx=\frac{P^2}{6EI}x^3\Big|_0^\ell=\frac{P^2\ell^3}{6EI}.$$

Диференціюючи отриманий вираз за змінною P, знайдемо прогин балки:

$$\Delta=\frac{dW}{dP}=\frac{P\ell^3}{3EI}.$$

Задача 22. Знайти висоту підйому тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю V_0.

Розв'язання. Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору, з урахуванням опору повітря визначається за формулою

$$V(t)=C\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{gt}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right),$$

де g – прискорення сили ваги; t – час; C – стала.

Знайдемо час руху тіла до зупинки. Оскільки в цьому випадку $V=0$, то

$$C\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{gt}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)=0.\qquad C\neq0.$$

Звідси

$$-\frac{gt}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}=0\quad\Rightarrow\quad t=\frac{C}{g}\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}.$$

Відстань, що пройшло тіло до повної зупинки, можна знайти за допомогою визначеного інтеграла:

$$S=C\int_0^{\frac{C}{g}\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}}\operatorname{tg}\left(-\frac{gt}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)dt=C\cdot\frac{C}{g}\ln\left|\cos\left(-\frac{gt}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{C}{g}\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}}=$$

$$=\frac{C^2}{g}\left[\ln\left|\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}+\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)\right|-\ln\left|\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)\right|\right]=$$

$$=\frac{C^2}{g}\left[\ln\cos0-\ln\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{V_0}{C}\right)}}\right]=\frac{C^2}{g}\left[0-\ln\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{V_0}{c}\right)^2}}\right]=$$

$$=-\frac{C^2}{g}\ln\left(1+\frac{V_0^2}{C^2}\right)^{-1/2}=\frac{C^2}{2g}\ln\left(1+\frac{V_0^2}{C^2}\right).$$

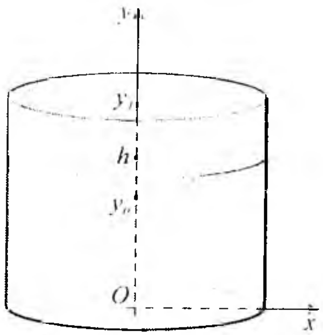
Задача 23. Нерухлива посудина, що має форму кругового циліндра радіуса a, заповнена рідиною до висоти h. Коли циліндр обертається з кутовою швидкістю ω, поверхня рідини в посудині набуває форми параболоїда обертання, утвореного обертанням параболи $y-y_0=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$ навколо осі симетрії. Знайти висоту, на яку піднімаються краї рідини в обертовому циліндрі.

Розв'язання. Очевидно, що об'єм рідини в нерухомій посудині й в тій, що обертається, однаковий. Оскільки радіус посудини не міняється, то об'єм рідини в нерухомій посудині $V_{\text{цил}}(h)$ дорівнює різниці об'ємів циліндра $V_{\text{цил}}(y_1)$ висотою y_1 і параболоїда обертання V_1 висотою y_1-y_0, тобто

$$V_{\text{цил}}(h)=V_{\text{цил}}(y_1)-V_1,$$

$$\pi a^2h=\pi a^2y_1-V_1,\qquad\text{(A)}$$

де y_1 – висота краю рідини в обертовому циліндрі.



Ординаті y_1 відповідає абсциса $x = a$. Оскільки точка $(a; y_1)$ належить параболі, то значення $y = y_1$ і $x = a$ повинні задовольняти її рівняння:

$$y - y_0 = \frac{\omega^2 x^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad y_1 - y_0 = \frac{\omega^2 a^2}{2g}. \qquad (\text{B})$$

Обчислимо об'єм параболоїда обертання. З рівняння параболи знаходимо

$$x^2 = \frac{2g(y - y_0)}{\omega^2}.$$

За формулою (10.4.4)

$$V_1 = \pi \int_{y_0}^{y_1} x^2 dy = \pi \int_{y_0}^{y_1} \frac{2g}{\omega^2}(y - y_0)dy = \frac{2\pi g}{\omega^2}\left(\frac{y^2}{2} - y_0 y\right)\Bigg|_{y_0}^{y_1} = \frac{\pi g}{\omega^2}(y_1 - y_0)^2.$$

Підставляючи сюди умову (B), обчислимо об'єм параболоїда обертання:

$$V_1 = \frac{\pi g}{\omega^2}(y_1 - y_0)^2 = \frac{\pi g}{\omega^2} \cdot \left(\frac{\omega^2 a^2}{2g}\right)^2 = \frac{\pi \omega^2 a^4}{4g}.$$

Тепер з урахуванням знайденого значення V_1 з рівності (A) визначимо висоту $y_1 - h$, на яку піднімаються краї рідини в посудині, що обертається:

$$\pi a^2 h = \pi a^2 y_1 - \frac{\pi \omega^2 a^4}{4g} \quad \Rightarrow \quad y_1 - h = \frac{a^2 \omega^2}{4g}.$$

Таким чином, рівень підняття рідини в посудині циліндричної форми, що обертається, квадратично залежить від радіуса циліндра і швидкості обертання.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Коли доцільно користуватися формулою *середнього значення функції* на відрізку?
2. Яким є *фізичний зміст* визначеного інтеграла?
3. Як знайти *відстань*, що пройшло тіло, за відомою швидкістю його руху?
4. Як знайти *швидкість* руху тіла, якщо відоме його прискорення?
5. Чи можна знайти *масу* стрижня, що має змінну лінійну густину? Як саме?
6. Як знайти *роботу змінної сили* на деякій ділянці за допомогою визначеного інтеграла? Як робота зв'язана з *потужністю* сили?
7. Чи може бути скінченною *робота*, яку треба затратити, щоб тіло певної маси перенести з поверхні Землі на нескінченність?
8. Чи можна стверджувати, що на довільній глибині *тиск* однаковий у всіх

напрямах? Від чого він залежить?

9. Який закон використовується при обчисленні *тиску рідини* на вертикально занурену в рідину пластину? Пояснити зміст параметрів, що входять в формулу цього закону.
10. Чи залежить *тиск*, що діє на вертикальну пластинку занурену в рідину, від її форми?
11. Сформулюйте (чи хоча б перелічіть) закони загальної фізики, які були використані в цьому параграфі?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Швидкість точки міняється за законом $V(t) = (100 + 8t)$ м/с. Який шлях пройде точка за перші 10 с?

2. Швидкість точки міняється за законом $V(t) = 2(6 - t)$ м/с. Яким є найбільше віддалення точки від початку?

3. Повітряна куля рухається зі швидкістю $V(t) = te^{-0{,}01t}$ м/с. Знайти відстань, яку пройде куля від початку руху до повної зупинки.

4. З висоти 294 м вертикально вниз кинуто тіло з початковою швидкістю 19,6 м/с. Через скільки секунд тіло впаде на Землю?
Вказівка. Швидкість рівноприскореного руху виражається формулою $V = V_0 + gt$, тут V_0 – початкова швидкість; $g = 9{,}8$ м/с^2 – прискорення вільного падіння; t – час.

5. Знайти масу стрижня завдовжки $l = 100$ см, якщо лінійна густина стрижня на відстані x сантиметрів від одного з його кінців дорівнює $\rho(x) = 2 + 0{,}001x^2$ г/см^3.

6. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягти пружину на 6 см, якщо сила в 10 Н розтягує її на 1 см.

7. Вітрильне судно рухається рівномірно зі сталою швидкістю V. Знайти роботу сили вітру і його потужність при переміщенні вітрильника на L метрів, якщо сила вітру

$$F = \frac{kS\rho}{2}(V_0 - V)^2 \quad \text{при } V < V_0,$$

де V_0 – швидкість вітру; S – площа вітрила; ρ – густина повітря; k – коефіцієнт пропорційності ($k = 1$, якщо вітрило поставлене перпендикулярно до напрямку вітру).

При якій швидкості вітрильника V потужність вітру максимальна, якщо $V_0 = 30$ м/с, $S = 10 \times 10$ м^2, а вітрило поставлене перпендикулярно до напрямку вітру?

8. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати воду з резервуара, що являє собою правильну чотирикутну піраміду зі стороною основи 2 м і висотою 5 м. Питома вага води $(\gamma = \rho g)$ дорівнює 9,81 кН/м^3. Результат округлити до цілого числа.

9. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати рідину густиною ρ з резервуара, який має форму оберненого вершиною донизу конуса висотою H і радіусом основи R.

10. Для зміцнення морського берега від розмивання прибоєм застосовують кам'яні або бетонні блоки. Піднімальним краном за допомогою каната, прикріпленого до вершини, піднімають із води кам'яний блок конічної форми. Яка робота витрачатиметься на його повне витягання з води, якщо конічна вершина знаходиться на поверхні води? Радіус основи конуса – 1 м, висота – 3 м, щільність каменю – 2,5 г/см^3.

11. Знайти силу тиску води на пластинку, вертикально занурену у воду. Пластинка являє собою рівнобедрену трапецію, верхня основа – 4 м (лежить на поверхні води), нижня основа – 8 м, висота – 2 м. Питома вага води дорівнює 9,81 кН/м^3. Результат округлити до цілого числа.

12. Знайти силу тиску на вертикально розташований бортовий ілюмінатор судна, занурений у воду так, що його діаметр $2r$ співпадає з поверхнею води.

13. Резервуар, що має форму прямокутного паралелепіпеда із площею горизонтального перерізу 6 м^3, наповнений водою до висоти 5 м. Визначити час, протягом якого вся вода витече з резервуара крізь отвір у його дні площею 0,01 м^2, якщо швидкість витікання води дорівнює $0{,}6\sqrt{2gh}$, де h – висота рівня води над отвором; g – прискорення сили ваги.

14. У ряді приладів, наприклад, в ураганомірі, застосовується такий принцип визначення швидкостей. У циліндричну посудину радіусом r налита рідина до висоти h_0. Якщо привести циліндр в обертання навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω, то поверхня рідини набуде форми параболоїда обертання $y-H=\frac{\omega^2}{2g}\left(x^2-r^2\right)$, де g – прискорення вільного падіння; H – висота рідини біля стінки посудини. Знайти залежність між ω і H.

ВІДПОВІДІ

1. 1400 м. **2.** 36 м. **3.** 10^4 м. **4.** 6 с. **5.** $533\frac{1}{3}$ р. **6.** 1,8 Дж.

7. $A=\frac{kS\rho L}{2}(V_0-V)^2$, $W=FV=\frac{kS\rho}{2}V(V_0-V)^2$, $W_{\max}=2{,}6$ МВт ≈ 3500 к.с.

8. 245 кДж. **9.** $\frac{\pi}{12}\rho g R^2 H^2$. **10.** 161,8 кДж. **11.** 131 кН. **12.** $\frac{2}{3}\rho g r^3$.

13. 16,83 хв. **14.** $\omega=\frac{2}{r}\sqrt{g\left(H-h_0\right)}$.

§ 12.2. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Процедура побудови і подальшого дослідження *математичної моделі* стану або розвитку деякої системи включає етапи: 1) *складання* диференціального рівняння розглянутого процесу; 2) *інтегрування* отриманого диференціального рівняння, знаходження його загального й частинного (за наявності заданих початкових умов) розв'язків; 3) *визначення* допоміжних параметрів задачі (при наявності додаткових умов); 4) *виведення* загального закону; 5) його *аналізу* і відповідей на конкретні питання.

Створення математичної моделі починається з вибору змінних, що досить повно описують стан або розвиток розглянутої системи. Встановлення причин і характеру розвитку процесу грунтується на відомих фізичних, біологічних, економічних та інших законах. Побудова диференціального рівняння, що описує певний процес, полягає у встановленні залежності між змінними величинами й їхніми приростами.

Спочатку, наприклад, розглядається деякий приріст Δx шуканої функції $x(t)$ за проміжок часу Δt, при цьому Δx виражається через $x(t)$ і задані параметри задачі. Потім наближене значення Δx заміняється відповідним диференціалом dx. Якщо закони, що лежать в основі розглянутого процесу, дають змогу для кожного моменту часу t виразити старшу похідну $x^{(n)}(t)$ як функцію від $x(t)$, $x'(t)$, ..., $x^{(n-1)}(t)$, то значення шуканої функції та її похідних у довільний момент часу (або в довільній точці) виявляються зв'язаними за допомогою диференціального рівняння.

Отримане *диференціальне рівняння виражає* вже не просто локальний зв'язок між шуканою функцією й її похідними, а *цілісний процес* розвитку системи, що проявляється як результат інтегрування рівняння. Подальше врахування початкових умов уможливлює конкретизувати характер перебігу процесу, а врахування додаткових умов – визначити параметри, що входять до рівняння.

Істотною особливістю математичних моделей є те, що та сама модель (те саме рівняння) може описувати процеси подібної природи, які відбуваються в таких, здавалося б, далеких одна від одної областях людського знання, як фізика, біологія, економіка тощо.

§ 12.2.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ (СПАДАННЯ)

Диференціальним рівнянням *експоненціального зростання* (*спадання*) називають рівняння вигляду

$$f'(x)=k\,f(x). \tag{12.2.1.1}$$

З рівняння (12.2.1.1) випливає, що в кожній точці x *швидкість зміни функції* $f(x)$

дорівнює значенню функції з точністю до сталого множника, тобто функція (з точністю до сталого множника) збігається зі своєю похідною.

Рівняння (12.2.1.1) є диференціальним рівнянням 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{df}{dx} = k f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f} = k dx.$$

Його інтегрування дає

$$\ln f(x) = kx + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{f(x)}{C} = kx,$$

звідки, потенціюючи, знаходимо загальний розв'язок

$$f(x) = Ce^{kx}. \qquad (12.2.1.2)$$

Якщо $k > 0$, знайдений розв'язок описує *експоненціальне зростання* функції $f(x)$; якщо $k < 0$, маємо *експоненціальне спадання*.

Задача 1. Поглинання світлового потоку тонким шаром води є пропорційним до товщини шару і потоку, що падає на його поверхню. При проходженні через шар завтовшки 1 м поглинається чверть початкового світлового потоку. Яка частина світлового потоку проникне на глибину $h = 6$ м, якщо початкова інтенсивність світлового потоку дорівнює I_0?

Розв'язання. Нехай $I = I(h)$ – інтенсивність світлового потоку, що падає нормально на плоску межу поділу середовищ і проникає, поступово загасаючи, на глибину h. Відповідно до умови при проходженні через шар води завтовшки dh поглинається світловий потік dI:

$$dI = -\eta I \, dh,$$

де η – коефіцієнт пропорційності. Знак "мінус" свідчить про спадання світлового потоку.

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (12.2.1.1), інтегруючи яке, знайдемо

$$\int \frac{dI}{I} = -\eta \int dh \quad \Rightarrow \quad I(h) = Ce^{-\eta h}.$$

Визначимо сталу інтегрування, припустивши, що на поверхні води $(h = 0)$ інтенсивність світлового потоку $I(0) = I_0$:

$$I_0 = Ce^{-\eta \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C = I_0.$$

Отже, інтенсивність світлового потоку залежно від глибини його проникнення описується законом експоненціального спадання

$$I(h) = I_0 e^{-\eta h},$$

що носить в оптиці назву *закону Бугера*. Сталу η називають лінійним коефіцієнтом згасання.

За умовою задачі $I(1) = \frac{3}{4} I_0$, тому

$$\frac{3}{4} I_0 = I_0 e^{-\eta} \quad \Rightarrow \quad e^{-\eta} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \eta = \ln \frac{4}{3}.$$

Отже,

$$I(h) = I_0 \left(\frac{3}{4}\right)^h.$$

Таким чином, на глибині $h = 6$ м інтенсивність світлового потоку становить

$$I(6) = I_0 \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0{,}18 I_0,$$

тобто на таку глибину проникає менше п'ятої частини початкового світлового потоку.

Задача 2. Провіднику наданий заряд $Q = 500$ Кл. Внаслідок недосконалості ізоляції провідник поступово втрачає свій заряд. Швидкість зміни заряду в даний момент пропорційна наявному заряду провідника. Який заряд залишиться на провіднику через 5 хв, якщо за першу хвилину втрачено 50 Кл?

Розв'язання. Якщо в момент часу t заряд провідника дорівнює $Q(t)$, то швидкість зміни заряду дорівнює $\frac{dQ}{dt}$. Враховуючи, що швидкість пропорційна наявному заряду Q, диференціальне рівняння розглянутого процесу набуває вигляду

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ,$$

де k – коефіцієнт пропорційності; знак "мінус" вказує на те, що заряд провідника зменшується.

Одержали рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними вигляду (12.2.1.1). Інтегруючи, знайдемо

$$\frac{dQ}{Q} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \ln Q = -kt + \ln C \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Ce^{-kt}.$$

Скориставшись початковою умовою $Q = Q_0$ при $t_0 = 0$, визначимо сталу інтегрування C:

$$Q_0 = Ce^{-k \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C = Q_0.$$

Отже, процес втрати заряду провідником описується законом експоненціального спадання:

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}. \qquad (*)$$

Щоб визначити коефіцієнт пропорційності k, скористаємося додатковою умовою задачі: через $t=1$ хв заряд дорівнює $Q=450$ Кл. Отже,

$$450 = 500\cdot e^{-k\cdot 1} \quad \Rightarrow \quad e^{-k}=0{,}9 \quad \Rightarrow \quad k=\ln\frac{10}{9}\approx 0{,}1054.$$

Підставивши значення e^{-k} у загальний розв'язок (*), матимемо $Q(t)=500\cdot 0{,}9^{t}$. Звідси випливає, що через 5 хв заряд провідника становить

$$Q=500\cdot 0{,}9^{5}\approx 500\cdot 0{,}59049\approx 295{,}2 \text{ Кл.}$$

Задача 3. Встановити закон приросту населення $N=N(t)$ у деякому місті, якщо відомо, що в момент часу, взятий за початковий, населення міста становило $N_0=50\,000$ людей, а через рік зросло на 4%.

Розв'язання. Будемо вважати, що швидкість приросту населення прямо пропорційна кількості населення. Швидкість зростання чисельності населення – це похідна за часом t від функції $N(t)$, що визначає кількість населення, тобто $\frac{dN}{dt}$. Виходячи з умови задачі, складемо диференціальне рівняння

$$\frac{dN}{dt}=kN,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, матимемо

$$\frac{dN}{N}=kdt \quad \Rightarrow \quad \ln N=kt+\ln C \quad \Rightarrow \quad N(t)=Ce^{kt}.$$

Підставляючи в знайдений загальний розв'язок початкову умову $N_0=50\,000$ при $t_0=0$, визначимо сталу інтегрування:

$$N_0=Ce^{k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C=N_0=50\,000.$$

Отже, залежність приросту населення від часу має експоненціальний характер:

$$N(t)=N_0e^{kt}. \qquad (*)$$

Для визначення множника e^{k} скористаємося тією обставиною, що через рік $(t=1)$ чисельність населення зросла на 4% і досягла

$$N_0+0{,}04\cdot N_0=1{,}04\cdot N_0=50\,000\cdot 1{,}04=52\,000.$$

Використовуючи цю умову, із загального розв'язку (*) знайдемо

$$52\,000=50\,000e^{k\cdot 1} \quad \Rightarrow \quad e^{k}=\frac{52\,000}{50\,000}=1{,}04.$$

Підставляючи значення множника e^{k} в формулу (*), дістанемо функцію

$$N(t)=50\,000\cdot(1{,}04)^{t},$$

що виражає закон приросту народонаселення в цьому місті.

Задача 4. Швидкість розпаду радію в кожний момент часу прямо пропорційна його наявній кількості. Який відсоток початкової кількості $m_0=0{,}1$ кг радію розпадеться через 500 років?

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку загальнішу задачу і знайдемо закон радіоактивного розпаду речовини, вважаючи, що швидкість розпаду пропорційна до його наявної кількості, а в момент часу $t=t_0$ була $m=m_0$ кількість речовини.

Нехай $m(t)$ – наявна кількість речовини в момент часу t. Швидкість розпаду визначається кількістю речовини, що розпалася за одиницю часу. Очевидно, за малий проміжок часу dt розпадається $dm=-kmdt$ речовини, де k $(k>0)$ – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки швидкість розпаду – це $\frac{dm}{dt}$, то для знаходження функції $m=m(t)$ визначаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dm(t)}{dt}=-km$$

і початковою умовою

$$m\big|_{t=t_0}=m_0.$$

Знак "мінус" вказує на те, що кількість радіоактивної речовини убуває, а похідна спадної функції, як відомо, від'ємна.

Відокремимо змінні і виконаємо інтегрування, враховуючи, що $m(t)>0$:

$$\frac{dm}{m}=-kdt \quad \Rightarrow \quad \ln m=-kt+\ln C \quad \Rightarrow \quad m=Ce^{-kt}.$$

Беручи до уваги початкову умову, визначимо сталу інтегрування:

$$m_0=Ce^{-kt_0} \quad \Rightarrow \quad C=m_0e^{kt_0},$$

з урахуванням якої остаточно знаходимо

$$m(t)=m_0e^{-k(t-t_0)}. \qquad (*)$$

Коефіцієнт пропорційності k, що називається *сталою розпаду*, для кожної речовини визначається експериментально.

Важливою фізичною характеристикою процесу радіоактивного розпаду є *період напіврозпаду* $T_{1/2}$ (час, протягом якого розпадається половина початкової кількості речовини, тобто $m(T_{1/2})=\frac{m_0}{2}$). Поклавши $t-t_0=T_{1/2}$, з останнього виразу знаходимо:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2e^{-kT_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Зокрема, період напіврозпаду ізотопу радію-226 становить $T_{1/2} \cong 1590$ років. Тоді коефіцієнт пропорційності $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1590} = 0{,}00044$. Отже, закон радіоактивного розпаду цього ізотопу можна представити у вигляді:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}(t-t_0)} = m_0 \cdot e^{-0{,}00044\cdot(t-t_0)}. \qquad (**)$$

Тепер легко визначити кількість радію, що розпадеться за будь-який проміжок часу, наприклад, за 500 років. Вважаючи, що $t - t_0 = 500$, знайдемо спочатку кількість радію, що не розпався:

$$m(500) = m_0 \cdot e^{-0{,}00044\cdot 500} = m_0 \cdot e^{-0{,}22} \simeq 0{,}8m_0$$

або, з урахуванням $m_0 = 0{,}1$,

$$m(500) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}22} \simeq 0{,}1 \cdot 0{,}8 \simeq 0{,}08 \text{ кг}.$$

Таким чином, за вказаний проміжок часу розпадеться

$$m_0 - 0{,}8m_0 \simeq 0{,}2m_0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 - 0{,}08 \simeq 0{,}02 \text{ кг радію},$$

тобто приблизно $20\,\%$ від початкової кількості.

Приклад 5. У резервуар, що містить 15 л води, неперервно надходить зі швидкістю 1,5 л/хв розчин, у кожному літрі якого міститься 0,4 кг солі. Розчин перемішується з водою, і суміш виливається з резервуара з тією самою швидкістю. Скільки солі міститиметься в резервуарі через 10 хв?

Розв'язання. Нехай кількість солі, що знаходиться в резервуарі через t хвилин після початку процесу, дорівнює $x(t)$ кг.

Визначимо, на скільки зміниться кількість солі в резервуарі за нескінченно малий проміжок часу dt від моменту t до моменту $t + dt$. За час dt хв у резервуар надходить $1{,}5dt$ л розчину, у якому міститься $0{,}4 \cdot 1{,}5dt = 0{,}6dt$ кг солі. За цей самий проміжок часу з резервуара виливається $1{,}5dt$ л суміші. Вважаючи концентрацію розчину протягом малого проміжку незмінною і рівною $\frac{x}{15}$ кг/л – концентрації розчину в момент t, одержимо, що у $1{,}5dt$ л суміші, які витекли, міститься $1{,}5dt \cdot \frac{x}{15} = 0{,}1xdt$ кг солі. Таким чином, зміна dx кількості солі в резервуарі за час dt дорівнює різниці знайдених величин, тобто

$$dx = 0{,}6dt - 0{,}1x\,dt \quad \Rightarrow \quad dx = (0{,}6 - 0{,}1x)\,dt.$$

Одержали диференціальне рівняння, що зв'язує змінні x і t. Інтегруючи його, знайдемо

$$\frac{dx}{0{,}6 - 0{,}1x} = dt \quad \Rightarrow \quad -10\ln|0{,}6 - 0{,}1x| = t - 10\ln 0{,}1C$$

(Тут для зручності подальших перетворень як сталу інтегрування взято вираз $-10\ln 0{,}1C$). Звідси

$$x(t) = 6 - Ce^{-0{,}1t}.$$

Довільну сталу C визначимо з початкової умови. У початковий момент часу $t_0 = 0$ солі в резервуарі не було, тобто $x(0) = 0$. Отже,

$$0 = 6 - C \quad \Rightarrow \quad C = 6.$$

Таким чином, маємо такий закон зміни вмісту солі в резервуарі:

$$x(t) = 6\left(1 - e^{-0{,}1t}\right).$$

Отже, через $t = 10$ хв у резервуарі буде міститися

$$x(10) = 6\left(1 - e^{-0{,}1\cdot 10}\right) = 6\left(1 - e^{-1}\right) \approx 3{,}8 \text{ кг солі}.$$

Задача 6. У приміщенні цеху місткістю 10 000 м^3 повітря міститься $0{,}1\%$ вуглекислоти. Щохвилини вентилятори нагнітають у приміщення p м^3 свіжого повітря, яке містить $0{,}02\,\%$ вуглекислоти, одночасно видаляючи стільки ж забрудненого повітря. Якою має бути потужність вентиляторів, щоб через 20 хв вміст вуглекислоти не перевищував $0{,}04\,\%$?

Розв'язання. Будемо вважати, що концентрація вуглекислоти у всіх частинах приміщення в кожний момент часу однакова, тобто змішування чистого повітря із забрудненим відбувається миттєво.

Позначимо вміст вуглекислоти в повітрі в момент часу t через $x(t)$ (%). Складемо баланс вуглекислоти в приміщенні за проміжок часу dt. За цей період часу вентилятори доставили $0{,}0002\,pdt$ м^3 вуглекислоти, а видалили із приміщення $0{,}01xpdt$ м^3 вуглекислоти. Отже, всього за dt хв кількість вуглекислоти в повітрі зменшилася на

$$dq = (0{,}01x - 0{,}0002)\,pdt \text{ м}^3.$$

Позначаючи через dx процентне зменшення вмісту вуглекислоти в повітрі, можна підрахувати зменшення dq кількості вуглекислоти за формулою:

$$dq = -10000 \cdot 0{,}01dx \text{ м}^3$$

(знак “мінус” вказує на те, що кількість вуглекислоти зменшується).

Прирівнюючи між собою обидва вирази для dq, отримаємо диференціальне рівняння

$$(0{,}01x - 0{,}0002)\,pdt = -10000 \cdot 0{,}01dx.$$

Змінні в цьому рівнянні легко відокремлюються, тому

$$-\frac{pdt}{10000} = \frac{dx}{x-0{,}02} \quad\Rightarrow\quad -\frac{pt}{10000} = \ln(x-0{,}02) - \ln C \quad\Rightarrow\quad x - 0{,}02 = C \cdot e^{\frac{-pt}{10000}}.$$

Враховуючи початкову умову $x = 0{,}1$ при $t_0 = 0$, визначимо сталу інтегрування $C = 0{,}08$. Тоді розв'язок набуває вигляду

$$x - 0{,}02 = 0{,}08e^{\frac{-pt}{10000}}. \qquad (*).$$

Для відповіді на питання задачі скористаємося додатковою умовою, підставивши $x = 0{,}04$ і $t = 20$ у розв'язок (*):

$$0{,}02 = 0{,}08e^{\frac{-p}{500}} \quad\Rightarrow\quad e^{\frac{-p}{500}} = 0{,}25,$$

звідки знаходимо необхідну потужність p вентиляторів:

$$-\frac{p}{500} = \ln 0{,}25 \quad\Rightarrow\quad p = -500 \cdot \ln 0{,}25 = 693{,}147 \text{ м}^3/\text{хв}.$$

Приклад 7. Протягом 10 хв тіло остудилося від 100° C до 60° C при температурі навколишнього повітря 20° C. За який час тіло охолоне до 25° C?

Розв'язання. Шукана функція – температура тіла $T = T(t)$. З курсу загальної фізики відомо, що швидкість охолодження тіла в будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла і середовища, у якій знаходиться тіло. Отже, процес охолодження тіла описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20),$$

де $k\ (k>0)$ – коефіцієнт пропорційності. Знак "мінус" вказує на те, що температура тіла зменшується, а похідна спадної функції від'ємна.

Поклавши $t_0 = 0$, запишемо початкову умову:

$$T(0) = 100^\circ \text{C}.$$

Відокремимо змінні й виконаємо інтегрування:

$$\frac{dT}{T-20} = -k\,dt \quad\Rightarrow\quad \int \frac{dT}{T-20} = -k\int dt \quad\Rightarrow\quad \ln|T-20| = -kt + \ln|C|,$$

$$T - 20 = Ce^{-kt} \quad\Rightarrow\quad T = 20 + Ce^{-kt}.$$

Визначимо C, використовуючи початкову умову.

$$T(0) = 100 \quad\Rightarrow\quad 100 = 20 + C \quad\Rightarrow\quad C = 80.$$

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо, враховуючи додаткову умову $T(10) = 60^\circ$:

$$T(10) = 60 \quad\Rightarrow\quad 60 = 20 + 80e^{-10k} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{1}{10}\ln 2.$$

Тоді

$$T(t) = 20 + 80e^{-0{,}1\ln 2 \cdot t} = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

Тепер визначимо час, за який тіло охолоне до 25° C:

$$25 = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \quad\Rightarrow\quad 2^{-4} = 2^{-\frac{t}{10}} \quad\Rightarrow\quad t = 40.$$

Таким чином, тіло охолоне до 25° C через 40 хв.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Шар річкової води завтовшки 35 см поглинає половину світла, що нормально падає на нього. Яку частину світла поглине шар завтовшки 2 м, якщо кількість світла, яка поглинається шаром води малої товщини, пропорційна кількості світла, що нормально падає на нього, і товщині шару?
2. Встановити характер залежності тиску повітря від висоти над рівнем моря.
3. Швидкість розпаду радіоактивної речовини пропорційна його наявній кількості. Через скільки років розпадеться 0,1 частина всієї кількості речовини, якщо період його напіврозпаду становить 1600 років?
4. У посудині об'смом 20 л знаходиться повітря (80% азоту і 20% кисню). Щосекунди в посудину втікає 0,1 л азоту і витікає така сама кількість повітря. Через який відрізок часу в посудині буде 99% азоту?
5. При температурі навколишнього повітря 18° C тіло остудилося за 25 хв від 90° C до 54° C. На скільки градусів охолоне тіло за наступні 25 хв?
6. Сталевий злиток температурою T_1 перед прокаткою поміщається в піч, температура якої рівномірно підвищується протягом години від T_1 до T_2. Знайти закон нагрівання злитка, якщо при різниці температур печі і злитка в θ градусів він нагрівається зі швидкістю $k\theta$ град/хв.

ВІДПОВІДІ

1. 98,1%. **2.** $p = p_0e^{-kh}$ **3.** ≈ 242 роки. **4.** 10 хв. **5.** 18° C.

6. $T = T_1 - \dfrac{T_2 - T_1}{60k}\left(1 - kt - e^{-kt}\right)$.

§ 12.2.2. ПРИКЛАДИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Задача 1. Порожня товстостінна залізна куля перебуває в стаціонарному тепловому стані (тобто в стані, при якому температура в різних точках тіла різна, але в кожній окремій точці із часом не змінюється). Внутрішній радіус кулі 6 см, зовнішній 12 см, температура внутрішньої поверхні $100^\circ C$, зовнішньої – $10^\circ C$. Знайти температуру в точках, що знаходяться на відстані 10 см від центра кулі (коефіцієнт теплопровідності заліза $k = 0{,}14$).

Розв'язання. З курсу фізики відомо, що кількість теплоти q, яка проходить через площадку S, перпендикулярну до напрямку теплового потоку, пропорційна площі S і швидкості зміни температури в напрямку x, тобто

$$q = -kS\frac{dT}{dx},$$

де k – коефіцієнт теплопровідності.

У даному випадку тепловий потік поширюється радіально, а тому температура в кожній точці є функція відстані від центра кулі $T = T(r)$. Оскільки площа поверхні кулі змінного радіуса r дорівнює $S = 4\pi r^2$, то кількість теплоти, яка проходить через цю поверхню, визначається виразом

$$q = -4\pi r^2 k\frac{dT}{dr}.$$

Оскільки кількість теплоти, що проходить через дві концентричні сферичні поверхні, та сама, то q не залежить від r. Маємо, таким чином, диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, проінтегрувавши яке, отримаємо

$$4\pi kT = \frac{q}{r} + C.$$

З умов $T(6) = 100$ і $T(12) = 10$ визначимо q і C:

$$\begin{cases} 400\pi k = \dfrac{q}{6} + C, \\ 40\pi k = \dfrac{q}{12} + C \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 4320\pi k, \\ C = -320\pi k. \end{array}\right.$$

Таким чином, закон розподілу температури в кулі має вигляд

$$T(r) = \frac{1080}{r} - 80,$$

а температура на відстані 10 см від центра кулі дорівнює

$$T(10) = 108^\circ C - 80^\circ C = 28^\circ C.$$

Задача 2. Сповільнювальна дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Диск, що почав обертатися з кутовою швидкістю 10 об/с, через 4 хв обертається з кутовою швидкістю 5 об/с. Через який час після початку руху диск обертатиметься з кутовою швидкістю 2 об/с ?

Розв'язання. Другий закон Ньютона для обертального руху записується у вигляді $M = I\dfrac{d\omega}{dt}$, де M – обертальний момент; I – момент інерції; ω – кутова швидкість. З другого боку, за умовою задачі $M = -k\omega$ (k – коефіцієнт пропорційності). Отже,

$$-k\omega = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Одержали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи, матимемо:

$$-kdt = I\frac{d\omega}{\omega} \quad \Rightarrow \quad -kt = I\cdot\ln|\omega| + C \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{k}\left(I\ln|\omega| + C\right).$$

За умовою задачі $\omega(0) = 10$, $\omega(4) = 5$. Ці умови дають змогу визначити довільну сталу C і коефіцієнт пропорційності k:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{k}\left(I\ln 10 + C\right) \\ 4 = -\dfrac{1}{k}\left(I\ln 5 + C\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C = -I\ln 10, \\ k = \dfrac{I}{4}\ln 2. \end{array}\right.$$

Тоді

$$t = \frac{1}{\frac{I}{4}\ln 2}\left(I\ln 10 - I\ln|\omega|\right) = \frac{4}{\ln 2}\ln\frac{10}{|\omega|}.$$

Підставляючи значення $\omega(t) = 2$ в знайдений розв'язок, визначимо час, після якого диск обертатиметься із заданою кутовою швидкістю:

$$t = \frac{4}{\ln 2}\ln\frac{10}{2} = 4\cdot\frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 4\cdot\frac{1{,}6094}{0{,}6931} \approx 9{,}29 \text{ хв}.$$

Задача 3. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, що має форму круга, пропорційна радіусу листка і кількості сонячного світла, що падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна площі листка і косинусу кута між напрямком променів і вертикаллю до листка. Знайти залежність між площею S листка і часом t, якщо о 6 год ранку ця площа дорівнювала $1600\,\text{см}^2$, а о 18 год того самого дня – $2500\,\text{см}^2$. Прийняти, що кут між напрямком променів Сонця і вертикаллю о 6 год ранку і о 18 год становить 90°, а опівдні 0°.

Розв'язання. Нехай $S = S(t)$ – площа листка в довільний момент часу t. Якщо за початок відліку взяти 6 год ранку, то $S(0)=1600$, а о 18 год, тобто через 12 год, $S(12)=2500$.

Швидкість росту листка задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dS}{dt} = krq, \qquad (*)$$

де k – коефіцієнт пропорційності; r – радіус листка; q – кількість сонячного світла.

За умовою задачі

$$q = \gamma S \cos\alpha,$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, α – кут між напрямком сонячного променя і вертикаллю до листка.

Встановимо залежність кута α від часу. На початку відліку (о 6 год ранку) промені сонця, що сходить, паралельні площині листка, тобто $\alpha(0) = -\frac{\pi}{2}$. Опівдні (через 6 год) сонце в зеніті, отже, $\alpha(6)=0$. Нарешті, о 18 год (через 12 год від початку відліку) промені сонця, що заходить, знову паралельні площині листка, тобто $\alpha(12)=\frac{\pi}{2}$. Отже, кут $\alpha = \alpha(t)$ є лінійною зростаючою функцією від часу: $\alpha = at + b$.

Будь-яких двох із записаних умов достатньо, щоб визначити

$$a = \frac{\pi}{12}, \qquad b = -\frac{\pi}{2},$$

отже,

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t-6).$$

Таким чином, кількість сонячного світла, що потрапляє на поверхню листка, визначається виразом

$$q = \gamma S \cos\frac{\pi}{12}(t-6).$$

Оскільки площа листка $S = \pi r^2$, то радіус листка $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

Підставляючи знайдені значення q і r у рівняння (*), отримаємо диференціальне рівняння, що описує швидкість збільшення площі листка:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\pi}} S\sqrt{S} \cos\frac{\pi}{12}(t-6).$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{dS}{S\sqrt{S}} = \frac{k\gamma}{\sqrt{\pi}} \int \cos\frac{\pi}{12}(t-6)\,dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{12k\gamma}{\pi\sqrt{\pi}} \sin\frac{\pi}{12}(t-6) + C. \qquad (**)$$

З додаткових умов $S(0)=1600$ і $S(12)=2500$ знайдемо

$$C = -\frac{9}{200}, \qquad k\gamma = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2400}.$$

Підставляючи ці значення в формулу (**), визначимо залежність між площею листка і часом:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{1}{200}\sin\frac{\pi}{12}(t-6) - \frac{9}{200} \quad \Rightarrow \quad S(t) = \frac{1{,}6\cdot 10^5}{\left[9 - \sin\frac{\pi}{12}(t-6)\right]^2}.$$

Задача 4. Круглий циліндричний бак діаметром 2 м і заввишки 4 м наповнений водою. Визначити час спорожнювання бака крізь круглий отвір діаметром 10 см у дні бака.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку задачу загального характеру. Припустимо, що бак, площа S поперечного перерізу якого є відомою функцією висоти h, $S = S(h)$, наповнений рідиною до рівня H (рис. 12.2.2.4). У дні бака є отвір площі σ, крізь який витікає рідина. Визначимо час t, за який рівень рідини знизиться від початкового положення H до довільного h, і час T повного спорожнювання бака. При цьому вважатимемо, що швидкість v зміни кількості рідини в баку є відомою функцією $v = v(h)$ від рівня h.

Нехай висота рідини в баку в деякий момент часу t дорівнює h. Кількість рідини dQ, що витікає із бака за проміжок часу dt від моменту t до $t+dt$, можна обчислити як об'єм циліндричного стовпа із площею основи σ і висотою $v(h)dt$. Тоді $dQ = \sigma v(h)dt$.

З другого боку, внаслідок витікання рідини її рівень h у посудині знизиться на величину dh, тоді, $dQ = -S(h)dh$ (знак "мінус" вказує на зменшення рівня). Прирівнюючи обидва вирази для кількості рідини, отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними:

$$\sigma v(h)dt = -S(h)dh \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{S(h)}{\sigma v(h)}dh,$$

інтегруючи яке, знайдемо

$$t(h) = -\frac{1}{\sigma}\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)}dh = \frac{1}{\sigma}\int_h^H \frac{S(h)}{v(h)}dh.$$

Очевидно, що повне спорожнювання бака настане при $h = 0$. Цій ситуації відповідає час

$$t(0) = T = \frac{1}{\sigma}\int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}\,dh. \qquad (*)$$

Швидкість витікання рідини крізь отвір малого діаметра, розташований на відстані h нижче рівня рідини (див. § 12.1, задача 20), дорівнює $v(h) = \mu\sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння; μ – емпіричний коефіцієнт швидкості витікання (для форми отвору, зображеного на рис. 12.2.2.4, $\mu = 0{,}85$). Таким чином,

$$t(h) = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh \qquad (**)$$

У нашому випадку $S(h) = \frac{\pi D^2}{4}$ і $\sigma = \frac{\pi a^2}{4}$. Підставляючи числові значення параметрів у формулу (**), знайдемо:

$$T = \frac{1}{\frac{\pi\cdot 0{,}1^2}{4}\cdot 0{,}85\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81}}\int_0^4 \frac{\pi\cdot 2^2}{4}\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{4}{0{,}1^2\cdot 0{,}85\cdot\sqrt{19{,}62}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^4 \frac{dh}{\sqrt{h}} =$$

$$= \frac{4}{0{,}1^2\cdot 0{,}85\cdot\sqrt{19{,}62}}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{h}\Big|_{0+\varepsilon}^4 = \frac{4\cdot 2\sqrt{4}}{0{,}1^2\cdot 0{,}85\cdot\sqrt{19{,}62}} \approx 425{,}5\,\text{с} \approx 7{,}1\,\text{хв}.$$

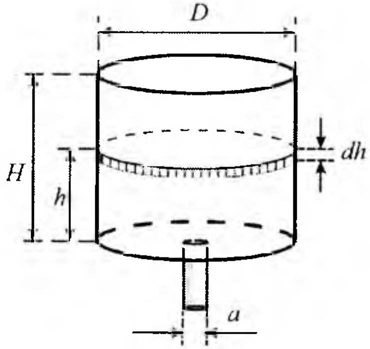


Рис. 12.2.2.4

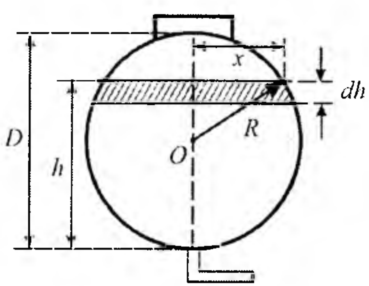


Рис. 12.2.2.5

Задача 5. Визначити час спорожнювання заповненої гасом залізничної цистерни завдовжки $L = 10$ м і діаметром $D = 2{,}6$ м крізь отвір площею $\sigma = 0{,}0225$ м^2. Прийняти $\mu = 0{,}76$ (рис. 12.2.2.5).

Розв'язання. Скористаємося наведеною вище задачею загального характеру і формулою (**). У даному випадку змінна площа $S(h)$ поверхні гасу (площа прямокутника завдовжки L і завширшки $2x$) дорівнює:

$$S(h) = 2x\cdot L = 2L\sqrt{R^2 - (h-R)^2} = 2L\sqrt{(D-h)h}.$$

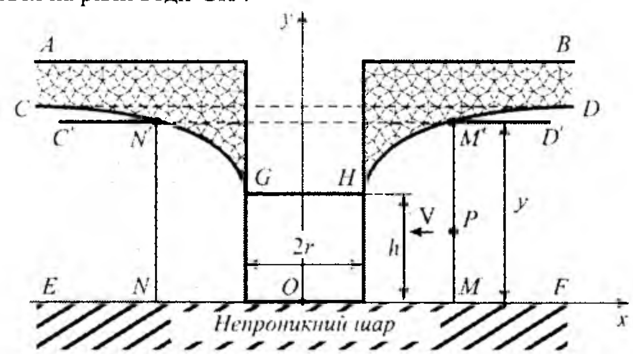
Отже,

$$T = \frac{2L}{\sigma\mu\sqrt{2g}}\int_0^D \frac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}\,dh = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\sigma\mu\sqrt{2g}} = \frac{4\cdot 10\cdot 2{,}6\cdot\sqrt{2{,}6}}{3\cdot 0{,}76\cdot 0{,}0225\cdot\sqrt{19{,}62}} = 12{,}3\text{ хв}.$$

Задача 6. Знайти рівняння кривої, вигляду якої набуває рівень ґрунтових вод поблизу колодязя, що простягається до непроникного шару.

Розв'язання. Нехай AB – поверхня ґрунту, $C'D'$ – поверхня ґрунтових вод до пристрою колодязя, EF – водонепроникний шар, що обмежує потік ґрунтових вод.

Якщо висота води в колодязі підтримується на сталому рівні GH, то поверхня ґрунтових вод поблизу колодязя знижується певним чином. Рівень поверхні ґрунтових вод $C'D'$ переходить у дві скривлені вітки CG і DH, які замикаються на рівні води GH.



Поверхня рівня ґрунтових вод являє собою поверхню обертання навколо осі Oy меридіальної лінії HD (або GC). Рівняння $y = y(x)$ кривої HD визначається на підставі отриманого з досвіду правила, за яким швидкість V течії води в точці P ґрунту, що пропускає (дренує), пропорційна нахилу кривої в точці $M'(x, y)$, що лежить на вертикалі точки P. Позначивши коефіцієнт пропорційності через k, одержимо

$$V = k\frac{dy}{dx}.$$

Через бічну поверхню циліндра $N'NMM'$ за одиницю часу радіально всередину протікає кількість води

$$Q = S_{\text{біч}}\cdot V = 2\pi xyV.$$

Підставляючи в це співвідношення $V = k\dfrac{dy}{dx}$, отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$Q = 2\pi xyk\frac{dy}{dx}.$$

Інтегруючи, знайдемо

$$\ln x = \frac{\pi k}{Q}y^2 + C.$$

Сталу інтегрування визначимо з умови проходження лінії DH через точку $H(r,h)$, де $2r$ – діаметр колодязя; h – рівень води в колодязі. Тоді

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q}h^2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \ln r - \frac{\pi k}{Q}h^2.$$

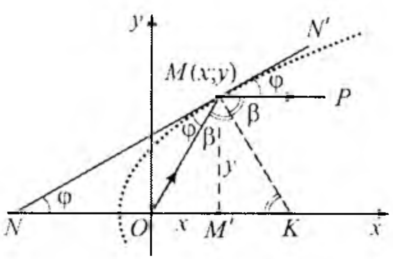
У результаті дістанемо рівняння кривої, вигляду якої набуває рівень ґрунтових вод поблизу колодязя:

$$\ln\frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q}\left(y^2 - h^2\right) \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{Q}{\pi k}\ln\frac{x}{r} + h^2.$$

Задача 7. Дзеркальна поверхня відбиває всі промені, що виходять із заданої точки, паралельно заданому напрямку. Визначити форму поверхні дзеркала.

Розв'язання. Припустимо, що точкове джерело світла поміщене в початок координат, а вісь Ox орієнтована паралельно напрямку ходу відбитих променів. Відповідно до законів геометричної оптики кут падіння променя дорівнює куту відбиття.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка дзеркальної поверхні. Розглянемо переріз поверхні площиною xOy, що проходить через вісь Ox і точку $M(x;y)$.



Проведемо дотичну MN у точці $M(x;y)$ до перерізу поверхні вказаною площиною. Маємо: падаючий промінь OM, кут падіння $\angle OMK = \beta$, відбитий промінь MP, кут відбиття $\angle KMP = \beta$, $\angle OMN = \angle PMN' = \varphi$. Тоді ΔNOM рівнобедрений, оскільки $\angle MNO = \angle OMN = \varphi$. Отже, $|NO| = |OM|$ і

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|MM'|}{|NO| + |OM'|} = \frac{|MM'|}{\sqrt{|OM'|^2 + |MM'|^2} + |OM'|},$$

де $|MM'| = y$ і $|OM'| = x$.

Враховуючи геометричний зміст похідної $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, знаходимо рівняння, що описує форму перерізу дзеркальної поверхні площиною xOy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Це *однорідне* диференціальне рівняння 1-го порядку. Його розв'язок можна знайти, виконавши заміну $y = tx$ (див. § 11.2). Однак найпростіше зробити так. Звільнимося від ірраціональності, домноживши праву частину рівняння на вираз, спряжений знаменнику:

$$dy = \frac{y\left(x - \sqrt{x^2 + y^2}\right)}{x^2 - \left(x^2 + y^2\right)}dx \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}dx,$$

звідки

$$xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

Це рівняння має інтегруючий множник $\mu(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, домноживши на який, матимемо

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(x^2 + y^2\right)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = dx.$$

Інтегруючи, знайдемо:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

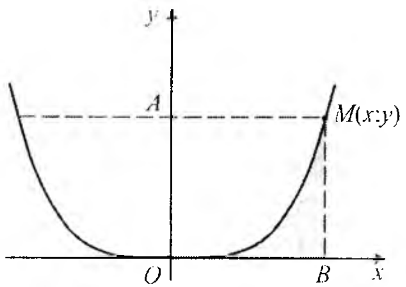
Одержали рівняння параболи, тобто переріз дзеркальної поверхні площиною xOy визначає параболу. Отже, дзеркальна поверхня, що володіє вказаною властивістю, являє собою *параболоїд обертання*.

Задача 8. Крива $y = f(x)$ проходить через початок координат і лежить у півплощині $y \ge 0$. Кожний прямокутник, обмежений осями координат і перпендикулярами до них, проведеними з довільної точки кривої, крива ділить на дві частини, причому площа частини прямокутника, що розташована під кривою, у чотири рази менша за площу частини прямокутника, що розташована над кривою. Знайти рівняння кривої.

Розв'язання. Опустимо з довільної точки $M(x;y)$ шуканої кривої $y = y(x)$ перпендикуляри MA і MB на координатні осі. Площа прямокутника $OAMB$ дорівнює $S = xy$ (або $S = -xy$, якщо крива лежить у другій чверті).

Площа частини прямокутника, що лежить під кривою (на рисунку вона темніша), обчислимо за формулою:

$$S_1 = \int_0^x y(t)\,dt \qquad \left(\text{або } S_1 = -\int_0^x y(t)\,dt, \text{ якщо } x<0\right).$$



За умовою задачі $S - S_1 = 4S_1$, отже,

$$xy = 5\int_0^x y(t)\,dt.$$

Отримали *інтегральне рівняння* (шукана функція $y(x)$ знаходиться під знаком інтеграла). Перейдемо до диференціального рівняння, продиференціювавши обидві частини останньої рівності за змінною x. Маємо

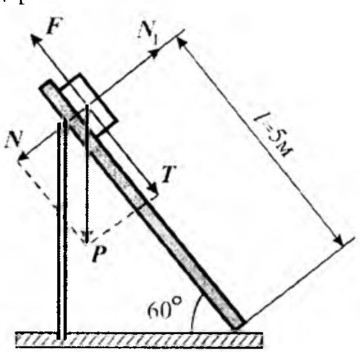
$$x\frac{dy}{dx} + y = 5y \quad \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = 4y.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\int\frac{dy}{y} = 4\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx^4.$$

Задача 9. По похилій площині завдовжки $S = 5$ м сковзає тіло. Кут нахилу площини $\alpha = 60^\circ$, а коефіцієнт тертя $k = 0,4$. Знайти закон руху тіла і час, за який воно зісковзне з похилої площини, якщо в початковий момент воно перебувало в спокої на її верхній грані.

Розв'язання. На тіло діють три сили: сила ваги $\boldsymbol{P}$, сила тертя $\boldsymbol{F}$ і реакція опори $\boldsymbol{N}_1$. Нормальна $\boldsymbol{N}$ і дотична $\boldsymbol{T}$ складники сили ваги $\boldsymbol{P}$ відповідно дорівнюють:



$$N = P\cos\alpha, \qquad T = P\sin\alpha.$$

Сила тертя визначається як

$$F = -kN = -kP\cos\alpha.$$

Замінимо діючі сили $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{N}_1$ еквівалентною системою сил $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{N}_1$. Але сили N і N_1 взаємно врівноважуються, залишається система $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{F}$. Рівнодіюча $\boldsymbol{R}$ еквівалентної системи сил $\boldsymbol{T}$ і $\boldsymbol{F}$, що діє в напрямку руху, дорівнює:

$$R = T + F = P\sin\alpha - kP\cos\alpha, \qquad \text{де } P = mg.$$

З іншого боку, відповідно до другого закону Ньютона

$$R = ma = m\frac{d^2S}{dt^2}.$$

Отже, маємо диференціальне рівняння руху:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = P\sin\alpha - kP\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dt^2} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha).$$

Це рівняння 2-го порядку. Оскільки його права частина не залежить від t, розв'язок рівняння знайдемо послідовним двократним інтегруванням:

$$\frac{dS}{dt} = (\sin\alpha - k\cos\alpha)gt + C_1,$$

$$S(t) = (\sin\alpha - k\cos\alpha)\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \qquad (*)$$

З початкових умов $S = 0$ і $\frac{dS}{dt} = 0$ при $t = 0$ визначимо сталі C_1 і C_2. Складаючи систему, одержимо:

$$0 = (\sin\alpha - k\cos\alpha)g\cdot 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0;$$

$$0 = (\sin\alpha - k\cos\alpha)\frac{g}{2}\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Підставляючи ці значення в *загальний розв'язок* диференціального рівняння (*), знайдемо закон руху тіла, що сковзає по похилій площині:

$$S(t) = (\sin\alpha - k\cos\alpha)\frac{gt^2}{2}.$$

А враховуючи числові дані задачі, визначимо час, за який тіло зісковзне з похилої площини. При $\alpha = 60^\circ$:

$$S(t) = (\sin 60^\circ - 0,4\cos 60^\circ)\frac{9,81\cdot t^2}{2} = 3,27t^2 \quad \Rightarrow \quad t(S) = \sqrt{\frac{S}{3,27}},$$

звідки при $S = 5$ м маємо

$$t(5) = \sqrt{\frac{5}{3,27}} = 1,24 \text{ с}.$$

Задача 10. Стрибун із трампліна наближається до точки A ділянки трампліна AB, який нахилений під кутом $\alpha = 15^\circ$ до горизонту і має довжину ℓ, зі швидкістю $V_A = 12$ м/с. Від точки A до точки B спортсмен рухається τ с; у точці B він відривається від трампліна, маючи швидкість V_B. Через T с він приземляється зі швидкістю v_C у точці C гори, що віддалена від точки B по горизонталі на відстані $d = 50$ м і утворює кут $\beta = 60^\circ$ з горизонтом. За умови, що коефіцієнт тертя ковзання лиж на ділянці AB дорівнює нулю, знайти час руху τ спортсмена на цій ділянці й рівняння його траєкторії на ділянці BC.

Розв'язання. Розглянемо рух спортсмена на ділянці AB. Беручи його за матеріальну точку, покажемо сили, що діють на нього: силу ваги $\mathbf{P}$, нормальну реакцію $\mathbf{N}$ і силу тертя ковзання $\mathbf{F}$ (остання дорівнює нулю за умовою задачі). При цьому вважаємо $t \in [0; \tau]$.

Складемо диференціальне рівняння руху спортсмена на ділянці AB:

$$m\ddot{x}_1 = -P\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = -g\sin\alpha.$$

Послідовно інтегруючи це рівняння, знайдемо:

$$\dot{x}_1 = -g\sin\alpha \cdot t + C_1,$$

$$x_1 = -g\sin\alpha \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Визначимо довільні сталі C_1 і C_2, беручи до уваги початкові умови задачі: $x_1 = 0$ і $(\dot{x}_1)_0 = V_A = 12$ при $t = 0$. Маємо

$$C_1 = 12, \qquad C_2 = 0.$$

Тоді

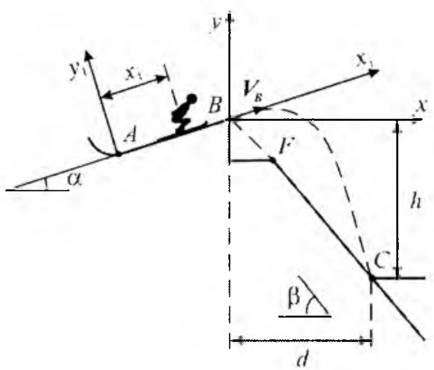
$$\dot{x}_1 = -gt\sin\alpha + 12, \qquad x_1 = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha + 12t.$$

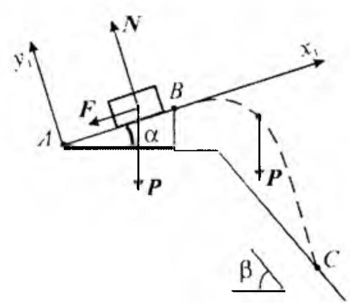
Для моменту τ, коли спортсмен покидає ділянку AB: $\dot{x}_1 = V_B$, $x_1 = \ell$, тобто

$$-g\tau\sin\alpha + 12 = V_B, \qquad (*)$$

$$-\frac{g\tau^2}{2}\sin\alpha + 12\tau = \ell.$$

Тепер розглянемо рух спортсмена між точками B і C. Вважатимемо, що рух з точки B починається в момент часу $t = 0$.





Складемо диференціальні рівняння руху в проекціях на осі координат:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = -P, \qquad P = mg.$$

Інтегруємо перше із цих рівнянь:

$$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = C_3 \quad \Rightarrow \quad x = C_3 t + C_4.$$

Сталі інтегрування C_3 і C_4 визначимо, використовуючи початкові умови: при $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_B\cos\alpha$. Тоді

$$\dot{x}_0 = C_3, \qquad x_0 = C_4$$

і

$$\dot{x} = V_B\cos\alpha, \qquad x = V_B t\cos\alpha.$$

Проінтегруємо друге рівняння:

$$\ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = -gt + C_5 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6.$$

З урахуванням початкових умов $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = V_B\sin\alpha$ при $t = 0$ знаходимо

$$C_5 = V_B\sin\alpha, \qquad C_6 = 0$$

і

$$\dot{y} = -gt + V_B\sin\alpha, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + V_B t\sin\alpha.$$

Таким чином, рівняння руху спортсмена на ділянці BC мають вигляд

$$x = V_B t\cos\alpha; \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + V_B t\sin\alpha.$$

Знайдемо рівняння траєкторії тіла, виключивши параметр t із рівнянь руху. Виражаючи t з першого рівняння

$$t = \frac{x}{V_B\cos\alpha}$$

і підставляючи в друге, отримаємо

$$y = -\frac{gx^2}{2V_B^2\cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\alpha.$$

У точці приземлення C за умовою $x = d$, $y = -h = -d\,\mathrm{tg}\beta$. Отже,

$$-d\,\mathrm{tg}\beta = -\frac{gd^2}{2V_B^2\cos^2\alpha} + d\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Звідси, скорочуючи на d і підставляючи числові значення $d = 50$, $g = 9{,}81$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 60^\circ$, знайдемо

$$V_B=\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{gd}{2(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)}}=\frac{1}{\cos 15^\circ}\sqrt{\frac{9{,}81\cdot 50}{2(\mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{tg}60^\circ)}}=11{,}47\ \text{м/с}.$$

Тоді рівняння траєкторії руху спортсмена між точками B і C набуває вигляду

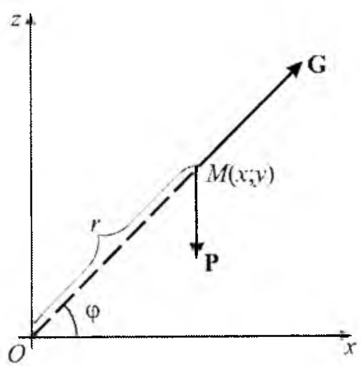
$$y=-0{,}04x^2+0{,}27x,$$

тобто на ділянці BC спортсмен рухається по параболічній траєкторії. Нарешті, з рівняння (*) визначимо час τ:

$$\tau=\frac{V_B-12}{-g\sin\alpha}=\frac{11{,}47-12}{-9{,}81\cdot 0{,}2588}=0{,}21\ \text{с}.$$

Задача 11. Матеріальна точка M маси $m=1$ кг перебуває під дією сили ваги $\mathbf{P}$ і сили $\mathbf{G}=4r(\mathbf{i}\cdot\cos\varphi+\mathbf{k}\cdot\sin\varphi)$, лінія дії якої проходить через нерухливий центр O. Модуль сили прямо пропорційний відстані r від точки полюса O. У початковий момент часу $(t=0)$ точка M розташована на осі Oz на відстані 2 м від початку відліку і їй передається початкова швидкість 5 м/с, напрямлена по горизонталі вправо. Знайти закон руху тіла.

Розв'язання. Задані сили $\mathbf{P}$, $\mathbf{G}$ і вектор початкової швидкості розміщені в площині xOz, тому подальший рух точки відбувається в цій площині.



Диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають вигляд:

$$m\ddot{x}=\sum_i x_i,\qquad m\ddot{z}=\sum_i z_i.$$

Сума проекцій сил на осі координат дорівнює

$$\sum_i x_i=4r\cos\varphi,\qquad \sum_i z_i=4r\sin\varphi-P,$$

Оскільки $\cos\varphi=\frac{x}{r}$, $\sin\varphi=\frac{z}{r}$, то

$$\sum_i x_i=4x,\qquad \sum_i x_i=4z-P.$$

У результаті знаходимо рівняння руху точки:

$$\ddot{x}-4x=0,\qquad (1)$$

$$\ddot{z}-4z=-g.\qquad (2)$$

Це *лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами*; перше з них однорідне, друге – неоднорідне.

Розв'язуючи рівняння (1), складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$k^2-4=0\quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\pm 2.$$

Загальний розв'язок має вигляд $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$.

Щоб визначити довільні сталі C_1 і C_2, знайдемо похідну $\dot{x}=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}$ і скористаємося початковими умовами: при $t=0$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=5$. Тоді

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-2C_2=5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}C_1=5/4,\\ C_2=-5/4.\end{array}\right.$$

Отже, закон руху вздовж осі Ox набуває вигляду

$$x(t)=\frac{5}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд $z=\overline{z}+z^*$, де $\overline{z}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; z^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Очевидно,

$$\overline{z}=C_3e^{2t}+C_4e^{-2t},$$

а розв'язок z^* шукаємо у вигляді $z^*=A=\mathrm{Const}$, тоді

$$0-4A=-g\quad\Rightarrow\quad A=\frac{g}{4}=2{,}45.$$

Отже,

$$z(t)=C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}+2{,}45.$$

Визначимо довільні сталі C_3 і C_4. Обчислимо похідну $\dot{z}=2C_3e^{2t}-2C_4e^{-2t}$ і скористаємося початковими умовами: $z_0=2$, $\dot{z}_0=0$ при $t=0$:

$$\begin{cases}C_3+C_4=2,\\ 2C_3-2C_4=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad C_3=C_4=1.$$

Отже, маємо закон руху вздовж осі Oz:

$$z(t)=e^{2t}+e^{-2t}+2{,}45.$$

Таким чином, закон руху тіла в площині xOz, що перебуває під дією заданої змінної сили,

$$x=\frac{5}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)=\frac{5}{2}\mathrm{sh}2t,$$

$$z=e^{2t}+e^{-2t}+2{,}45=2\mathrm{ch}2t+2{,}45.$$

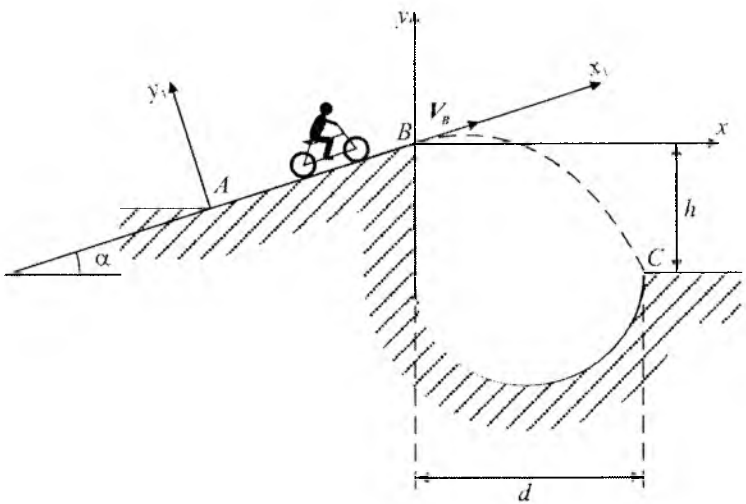
Виключаючи параметр t, знайдемо рівняння траєкторії руху:

$$\left(\frac{z-2,45}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{5}x\right)^2=1$$

– це гіпербола, із центром, зміщеним уздовж осі z.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Лійка має форму конуса радіуса $R=6$ см і висоти $H=10$ см, звернeного вершиною донизу. Встановити час, за який витече вода з лійки крізь отвір діаметром $d=0,5$ см, зроблений у вершині конуса.
2. Мотоцикліст, маючи в точці A швидкість $v_A=0$, піднімається $\tau=20$ с по ділянці AB довжиною ℓ, що утворює із горизонтом кут $\alpha=30^\circ$. При сталій на всій ділянці AB рушійній силі P мотоцикліст у точці B набуває швидкості v_B, перелітає через рів шириною $d=3$ м, перебуваючи в повітрі T с, і приземляється зі швидкістю v_C у точці C, що віддалена від точки відриву B по вертикалі на $h=1,5$ м. Вважаючи, що маса мотоцикла з мотоциклістом дорівнює $m=400$ кг, визначити P і ℓ.



Вказівка. Вважати мотоцикл із мотоциклістом матеріальною точкою й знехтувати силою опору.

ВІДПОВІДІ

1. 27 с. **2.** $P=2047,4$ кг; $\ell=42,7$ м.

§ 12.2.3. РІВНЯННЯ РУХУ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Динаміка матеріальної точки масою m, що робить прямолінійний рух, описується *основним законом механіки* – другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right), \qquad (12.2.3.1)$$

де $F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$ – рівнодійна всіх сил, що діють на точку в момент часу t; $x(t)$ – координата точки в момент часу t; $\frac{dx}{dt}$ – швидкість; $\frac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення точки.

Задача зводиться до інтегрування рівняння (12.2.3.1), якщо відома функція $F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$.

Приклад 1. Знайти закон руху $S=S(t)$ і швидкість $V=V(t)$ тіла, що рухається, якщо швидкість зростає пропорційно пройденому шляху. У початковий момент часу тіло знаходилося за 8 м від початку відліку і рухалося зі швидкістю 24 м/с.

Розв'язання. За умовою задачі швидкість пропорційна пройденому шляху, тобто $V(t)=kS(t)$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки $V\equiv\frac{dS}{dt}$, то маємо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\frac{dS}{dt}=kS$$

і початкову умову $S(0)=8$ (*задача Коші*).

Відокремимо змінні й знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$\int\frac{dS}{S}=\int k\,dt \quad\Rightarrow\quad \ln|S|-\ln|C|=kt \quad\Rightarrow\quad \ln\left|\frac{S}{C}\right|=kt,$$

$$S(t)=Ce^{kt}.$$

Визначимо довільну сталу C, підставивши в загальний розв'язок $t=0$ і $S_0=8$:

$$8=Ce^0 \quad\Rightarrow\quad C=8.$$

Тоді

$$S(t)=8e^{kt}.$$

Диференціюючи отриманий закон руху за змінною t, знайдемо швидкість тіла в довільний момент часу:

$$\frac{dS}{dt}=V(t)=8ke^{kt}.$$

Тепер визначимо коефіцієнт пропорційності k за допомогою додаткової умови $V_0 = 24$ при $t = 0$:

$$24 = 8ke^0 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

Отже, швидкість руху тіла задається законом:

$$V(t) = 24e^{3t}.$$

Задача 2. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційній пройденому шляху. У початковий момент руху точка знаходилася на відстані 5 м від початку відліку і мала швидкість 20 м/с. Визначити пройдений шлях і швидкість через 10 с після початку руху.

Розв'язання. Позначимо через $S = S(t)$ відстань точки від початку відліку в момент часу t. Тоді в початковий момент часу $S(0) = 5$.

За умовою швидкість $\frac{dS}{dt}$ обернено пропорційна відстані S. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k}{S},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, знайдемо

$$\int S dS = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad S^2 = 2(kt + C) \quad \Rightarrow \quad S = \sqrt{2(kt + C)}.$$

З умови $S(0) = 5$ визначимо сталу інтегрування C:

$$5 = \sqrt{2C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{25}{2}.$$

Тоді

$$S(t) = \sqrt{25 + 2kt}.$$

Диференціюючи отриманий вираз за змінною t, знайдемо швидкість руху точки в довільний момент часу:

$$\frac{dS}{dt} = V(t) = \frac{k}{\sqrt{25 + 2kt}}.$$

Користуючись умовою $V(0) = 20$ м/с, обчислимо коефіцієнт пропорційності k:

$$20 = \frac{k}{5}, \qquad k = 100.$$

Отже, відстань $S(t)$ і швидкість $V(t)$ змінюються з часом за законами:

$$S(t) = \sqrt{25 + 200 \cdot t}, \qquad V(t) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200 \cdot t}}.$$

Через 10 с після початку руху

$$S(10) = \sqrt{25 + 200 \cdot 10} = 45\,\text{м}, \qquad V(10) = \frac{100}{\sqrt{25 + 200 \cdot 10}} = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}\ \text{м/с}.$$

Таким чином, через 10 с після початку руху точка пройде відстань, що дорівнює $S(10) - S(0) = 45 - 5 = 40$ м, а її швидкість становитиме $2,(2)$ м/с.

Задача 3. Визначити швидкість падіння метеорита на Землю, припускаючи, що він падає прямолінійно з необмежено великої відстані зі стану спокою і при його русі до Землі прискорення a обернено пропорційно квадрату його відстані від центра Землі.

Розв'язання. Нехай $r(t)$ – відстань метеорита від центра Землі в довільний момент часу. Складемо диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k}{r^2}.$$

Знизимо порядок цього рівняння, враховуючи, що $V(t) = \frac{dr}{dt}$ – швидкість руху метеорита, $a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$.

Оскільки

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = V\frac{dV}{dr},$$

то

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{r^2} \quad \Rightarrow \quad V\frac{dV}{dr} = \frac{k}{r^2}.$$

Відокремлюємо змінні й інтегруємо:

$$\int V\,dV = k\int \frac{dr}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V^2}{2} = -\frac{k}{r} + C.$$

Довільна стала C визначається з початкової умови: $V = 0$ при $r = \infty$, звідки знаходимо $C = 0$. Тоді

$$V^2(t) = -\frac{2k}{r}. \qquad (*)$$

Виразимо коефіцієнт пропорційності k через прискорення сили ваги на поверхні Землі g і радіус Землі R:

$$-g = \frac{k}{R^2} \quad \Rightarrow \quad k = -gR^2.$$

(знак “мінус” вказує на те, що прискорення напрямлене до центра Землі).

Підставляючи в розв'язок (*) значення коефіцієнта k, замість r радіус Землі $R \approx 6{,}347 \cdot 10^6$ м і $g = 9{,}8$ м/с^2, отримаємо швидкість падіння метеорита на Землю:

$$V = \sqrt{\frac{2gR^2}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}374 \cdot 10^6} \approx 11\,180 \text{ м/с}.$$

I. Дослідити *рух* тіла, що у момент часу $t = t_0$ перебувало в точці $x = x_0$ і мало швидкість $V = V_0$, якщо, починаючи з моменту $t = t_0$, на нього діє тільки сила опору середовища, *пропорційна до швидкості* руху.

Якщо тіло має малі розміри, а швидкість руху тіла невелика (наприклад, тіло рухається в рідині або газі), то, як правило, *сила опору руху пропорційна швидкості* руху:

$$F(t) = -kV(t). \qquad (12.2.3.2)$$

Тут k – коефіцієнт пропорційності, а знак "–" вказує на те, що сила опору напрямлена у бік, протилежний напрямку руху.

Відповідно до другого закону Ньютона

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -kV(t), \qquad (12.2.3.3)$$

де m – маса тіла.

Маємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $V(t)$. Відокремлюючи змінні й інтегруючи, знайдемо

$$\frac{dV}{V} = -\frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \ln V = -\frac{k}{m}t + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad V(t) = C_1 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Якщо в початковий момент $t = t_0$ швидкість $V = V_0$, то

$$V_0 = C_1 e^{-\frac{k}{m}t_0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_0 e^{\frac{k}{m}t_0}.$$

Тоді

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}. \qquad (12.2.3.4)$$

Звідси випливає, що із часом швидкість руху спадає – середовище гальмує рух тіла.

Оскільки $\frac{dx}{dt} \equiv V(t)$, то

$$\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad dx = V_0 e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}dt \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{mV_0}{k}e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} + C_2.$$

Якщо в початковий момент $t = t_0$ координата тіла $x = x_0$, то

$$x_0 = -\frac{mV_0}{k} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0 + \frac{mV_0}{k}.$$

У результаті визначимо шлях, пройдений тілом:

$$x(t) = x_0 + \frac{mV_0}{k} - \frac{mV_0}{k}e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} = x_0 + \frac{mV_0}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right]. \qquad (12.2.3.5)$$

Другий доданок у квадратній дужці експоненціально спадає, тому ним можна знехтувати при $t \gg 0$. У цьому випадку весь шлях, пройдений тілом до повної зупинки, дорівнює

$$x - x_0 = \frac{mV_0}{k}.$$

Задача 4. Скутер вагою 300 кг із вимкненим двигуном рухається прямолінійно з початковою швидкістю 66 м/с. Через який час швидкість скутера зменшиться до 8 м/с, якщо сила опору води пропорційна швидкості руху скутера і при швидкості 1 м/с дорівнює 10 кг?

Розв'язання. Рух скутера описується рівнянням (12.2.3.3):

$$m\frac{dV}{dt} = -kV,$$

де $m = \frac{300}{g}$, $k = 10$. Загальний розв'язок рівняння дається формулою (12.2.3.4):

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Тут $V_0 = V(0) = 66$ м/с. Отже, розв'язок *задачі Коші* при заданих числових значеннях має вигляд

$$V(t) = 66\,e^{-\frac{10 \cdot 9{,}81}{300}t}.$$

Підставляючи в цей розв'язок значення $V_1 = 8$ м/с, отримаємо відповідь на питання задачі:

$$8 = 66\,e^{-\frac{10 \cdot 9{,}81}{300}t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{300}{10 \cdot 9{,}81}\ln\frac{8}{66} = (-3{,}058) \cdot (-2{,}11) - 6{,}45 \text{ с}.$$

Задача 5. Прогулянковий катер рухається зі швидкістю $V_0 = 4$ км/год. Причалюючи до пірса, машиніст зупинив двигун і через 10 с швидкість катера впала до $V_1 = 2$ км/год. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості руху, знайти швидкість катера через 1 хв після зупинки двигуна.

Розв'язання. Рух катера описується рівнянням (12.2.3.3):

$$m\frac{dV}{dt} = -kV.$$

Розв'язок цього рівняння дається формулою (12.2.3.4):

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

де $V_0 = 4$ задана початкова швидкість руху.

Щоб визначити відношення $\frac{k}{m}$, використовуємо додаткову умову:

$$V(10)=2 \quad \Rightarrow \quad 2=4e^{-\frac{10k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m}=\frac{1}{10}\ln 2.$$

Тоді

$$V(t)=4e^{(-0,1\ln 2)t}=\frac{4}{2^{t/10}}.$$

Звідси знайдемо швидкість катера через $60\,\text{с}$ після зупинки двигуна:

$$V(60)=\frac{4}{2^{60/10}}=\frac{4}{2^6}=0,0625 \text{ м/с}.$$

II. Дослідити *падіння* тіла маси m, що у початковий момент часу $t=0$ перебувало в точці $x=x_0$ і мало швидкість $V=V_0$, якщо *сила опору пропорційна швидкості* руху.

У цьому випадку тіло перебуває під дією двох сил: сили ваги $P=mg$ (яка напрямлена до центра Землі і сприяє руху) і сили опору повітря $F(t)=-kV(t)$ (яка напрямлена в протилежний бік і перешкоджає руху). Рівняння руху тіла

$$m\frac{dV(t)}{dt}=mg-kV(t). \tag{12.2.3.6}$$

Поділимо рівняння почленно на m:

$$\frac{dV}{dt}+\frac{k}{m}V=g.$$

Маємо лінійне рівняння 1-го порядку відносно функції $V(t)$. Розв'язуємо його методом Бернуллі (див. § 11.3), поклавши $V(t)=u(t)v(t)$, тоді

$$\begin{cases} v'+\dfrac{k}{m}v=0, & (1) \\ u'v=g. & (2) \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння (1):

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \ln v=-\frac{k}{m}t \quad \Rightarrow \quad v(t)=e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Тепер з рівняння (2) знаходимо

$$\frac{du}{dt}e^{-\frac{k}{m}t}=g \quad \Rightarrow \quad du=ge^{\frac{k}{m}t}dt \quad \Rightarrow \quad u(t)=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C_1.$$

Отже,

$$V(t)=u(t)v(t)=\left(\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C_1\right)\cdot e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{mg}{k}+C_1e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Якщо в початковий момент часу $t=0$ швидкість $V=V_0$, то

$$V_0=\frac{mg}{k}+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=V_0-\frac{mg}{k}.$$

Отже,

$$V(t)=\frac{mg}{k}+\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{12.2.3.7}$$

Звідси випливає, що при досить великих t швидкість падіння тіла прямує до сталого значення $\frac{mg}{k}$, оскільки другий доданок експоненціально спадає.

Визначимо шлях, пройдений падаючим тілом, для чого перейдемо до змінної x за формулою $V(t)\equiv\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{mg}{k}+\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Rightarrow \quad dx=\left[\frac{mg}{k}+\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}\right]dt,$$

звідки

$$x(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+C_2.$$

Якщо в початковий момент часу $t=0$ тіло перебувало в точці $x=x_0$, то

$$x_0=-\frac{m}{k}\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=x_0+\frac{m}{k}\left(V_0-\frac{mg}{k}\right).$$

Тоді шлях, пройдений тілом, що відчуває дію сили ваги і сили опору повітря, пропорційний швидкості руху, дорівнює

$$x(t)=x_0+\frac{mg}{k}t+\frac{m}{k}\left(V_0-\frac{mg}{k}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{12.2.3.8}$$

Задача 6. Процес відстоювання суспензії характеризується повільним осадженням твердих частинок під дією сили ваги. Вважаючи, що опір середовища пропорційний швидкості, знайти закон руху частинок, які осідають у рідині без початкової швидкості.

Розв'язання. Розглянутий процес описується рівнянням (12.2.3.6), розв'язки якого даються виразами (12.2.3.7) і (12.2.3.8), де слід покласти $V_0=0$ і $x_0=0$. У результаті закон руху частинок набуває вигляду:

$$V(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right), \qquad x(t)=\frac{mg}{k}\left[t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right].$$

III. Дослідити *рух* тіла, що у початковий момент часу $t=t_0$ перебувало в точці $x=x_0$ і мало швидкість $V=V_0$, якщо *сила опору пропорційна квадрату швидкості* руху.

Сила опору пропорційна квадрату швидкості руху

$$F(t)=-\chi V^2(t), \tag{12.2.3.9}$$

якщо тіло має великі розміри або швидкість його руху висока. Тут χ – коефіцієнт пропорційності. У цьому випадку

$$m\frac{dV(t)}{dt}=-\chi V^2(t). \qquad (12.2.3.10)$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $V(t)$

$$\frac{dV}{V^2}=-\frac{\chi}{m}dt$$

має загальний розв'язок

$$-\frac{1}{V}=-\frac{\chi}{m}t+C_1.$$

Оскільки в початковий момент часу $t=t_0$ тіло мало швидкість $V=V_0$, то

$$-\frac{1}{V_0}=-\frac{\chi}{m}t_0+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=-\frac{1}{V_0}+\frac{\chi}{m}t_0.$$

Підставляючи обчислене значення C_1 в загальний розв'язок, визначимо швидкість руху тіла:

$$V(t)=\frac{V_0}{1+\frac{\chi}{m}V_0(t-t_0)}. \qquad (12.2.3.11)$$

Тепер знайдемо закон руху тіла. Оскільки $\frac{dx}{dt}\equiv V(t)$, то маємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{V_0}{1+V_0\frac{\chi}{m}(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{V_0}{1+V_0\frac{\chi}{m}(t-t_0)}dt.$$

Інтегруючи, знаходимо

$$x(t)=\frac{m}{\chi}\ln\left[1+\frac{\chi}{m}V_0(t-t_0)\right]+C_2.$$

Оскільки в початковий момент часу $t=t_0$ тіло перебувало в точці $x=x_0$, то

$$x_0=\frac{m}{\chi}\ln 1+C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2=x_0.$$

Отже, якщо *сила опору пропорційна квадрату швидкості* руху, то тіло рухається за законом:

$$x(t)=x_0+\frac{m}{\chi}\ln\left[1+\frac{\chi}{m}V_0(t-t_0)\right]. \qquad (12.2.3.12)$$

Задача 7. Куля входить у дерев'яний брус завтовшки 16 см зі швидкістю 400 м/с і вилітає з нього зі швидкістю 60 м/с. Знайти час руху кулі всередині бруса, якщо сила опору пропорційна квадрату швидкості руху.

Розв'язання. Процес руху кулі всередині бруса описується рівнянням (12.2.3.10)

$$m\frac{dV}{dt}=-\chi V^2,$$

розв'язки якого для швидкості $V(t)$ і пройденого шляху $x(t)$ представлені виразами (12.2.3.11) і (12.2.3.12). При цьому умови задачі задовольняють такі значення параметрів, що входять до цих розв'язків: у початковий момент часу $t_0=0$ (на вході в брус) куля мала швидкість $V_0=400$ м/с, а пройшовши всередині бруса відстань $x_0=0{,}16$ м, на виході мала швидкість $V=60$ м/с.

Оскільки обидві формули (12.2.3.11) і (12.2.3.12) містять час t, то відповідь на питання задачі може бути дана з використанням кожної з них. Дійсно, розв'язуючи відносно t співвідношення (12.2.3.11), що зв'язує швидкість руху і час, матимемо

$$t=\frac{m}{\chi}\cdot\frac{V_0-V}{V_0V}. \qquad (*)$$

Аналогічно, зі співвідношення (12.2.3.12), що зв'язує пройдений шлях і час, знайдемо

$$t=\frac{m}{\chi}\cdot\frac{1}{V_0}\left(e^{\frac{\chi}{m}x_0}-1\right). \qquad (**)$$

Прирівняємо вирази (*) і (**):

$$\frac{m}{\chi}\cdot\frac{V_0-V}{V_0V}=\frac{m}{\chi}\cdot\frac{1}{V_0}\left(e^{\frac{\chi}{m}x_0}-1\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{V}=e^{\frac{\chi}{m}x_0}.$$

Логарифмуючи, знайдемо

$$\frac{\chi}{m}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{V_0}{V}.$$

Підставляючи задані параметри задачі, обчислимо

$$\frac{\chi}{m}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{V_0}{V}=\frac{1}{0{,}16}\ln\frac{400}{60}=11{,}8570, \qquad e^{\frac{\chi}{m}x_0}=e^{11{,}8570\cdot 0{,}16}=e^{1{,}8971}=6{,}6665.$$

Тепер, наприклад, з формули (*), визначимо шуканий час руху кулі всередині бруса:

$$t=\frac{m}{\chi}\cdot\frac{V_0-V}{V_0V}=\frac{1}{11{,}8570}\cdot\frac{400-60}{24000}=0{,}0012 \text{ с}.$$

Той самий результат дістанемо, користуючись формулою (**) (рекомендуємо переконатися самостійно).

Задача 8. Куля масою $m=9$ г, рухаючись зі швидкістю $V_0=250$ м/с, урізалася в дерев'яний брус і зупинилася, заглибившись у нього на $l=5$ см. Визначити середню силу опору бруса і час руху кулі в ньому, вважаючи рух кулі всередині бруса рівноуповільненим.

Розв'язання. Скористаємося основним законом динаміки. Виходячи з того, що рух кулі є рівноуповільненим, тобто $\frac{dV(t)}{dt}<0$, припускаємо, що сила опору середовища стала і напрямлена проти руху

$$m\frac{dV}{dt}=-F.$$

Маємо рівняння 1-го порядку відносно змінної $V(t)$. Відокремлюючи змінні

$$mdV=-Fdt$$

й інтегруючи, знайдемо

$$mV=-Ft+C_1.$$

Використовуючи початкову умову $V(t=0)=V_0$, визначимо сталу C_1:

$$-mV_0+C_1=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=mV_0.$$

Тоді

$$Ft=mV_0-mV \quad \Rightarrow \quad V(t)=V_0-\frac{F}{m}t. \qquad (*)$$

Оскільки $V=\frac{dS}{dt}$, то запишемо рівняння залежності шляху від часу:

$$\frac{dS}{dt}=V_0-\frac{F}{m}t.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $S(t)$, розв'язуємо його:

$$dS=\left(V_0-\frac{F}{m}t\right)dt \quad \Rightarrow \quad S(t)=V_0t-\frac{F}{2m}t^2+C_2.$$

Оскільки в початковий момент часу $S(0)=0$, то $C_2=0$. У результаті

$$S(t)=V_0t-\frac{F}{2m}t^2. \qquad (**)$$

Для визначення середньої сили опору F і часу руху t кулі в брусі, скористаємося умовами, що відповідають кінцевому моменту руху: $V(t)=0$, $S(t)=l$. Зі співвідношення (*) знаходимо

$$0=V_0-\frac{F}{m}t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{mV_0}{F}, \qquad (***)$$

а формула (**) дає

$$l=V_0t-\frac{F}{2m}t^2.$$

Підставляючи сюди значення t з формули (***), визначаємо, що сила опору середовища пропорційна *квадрату швидкості* руху:

$$l=\frac{mV_0^2}{2F} \quad \Rightarrow \quad F=\frac{mV_0^2}{2l}.$$

Підставляючи в формулу (***) значення F, визначимо час руху кулі:

$$t=\frac{2l}{V_0}.$$

Тепер обчислимо силу опору і час руху кулі в брусі для заданих числових значень $m=0{,}009$ кг, $V_0=250$ м/с, $l=0{,}05$ м:

$$F=\frac{0{,}009\cdot 250^2}{2\cdot 0{,}05}(\text{кг}\cdot\text{м})/\text{c}^2=5625\ \text{Н}, \qquad t=\frac{2\cdot 0{,}05}{250}=4\cdot 10^{-4}\ \text{c}.$$

IV. Дослідити *падіння* тіла маси m, що у початковий момент часу $t=0$ перебувало в точці $x=x_0$ і мало швидкість $V=V_0$, якщо *сила опору пропорційна квадрату швидкості* руху.

На тіло діють сила ваги $P=mg$ (яка напрямлена до центра Землі й сприяє руху) і сила опору повітря $F(t)=-\chi V^2(t)$ (яка напрямлена в протилежний бік і перешкоджає руху). Закон руху тіла

$$m\frac{dV(t)}{dt}=mg-\chi V^2(t). \qquad (12.2.3.13)$$

Поділимо рівняння почленно на m:

$$\frac{dV}{dt}=g-\frac{\chi}{m}V^2.$$

Маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $V(t)$. Відокремимо змінні

$$\frac{dV}{g-\frac{\chi}{m}V^2}=dt$$

і проінтегруємо:

$$\frac{1}{\frac{\chi}{m}}\int\frac{dV}{\frac{mg}{\chi}-V^2}=\int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{\chi}{m}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{\chi}}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{mg}{\chi}}+V}{\sqrt{\frac{mg}{\chi}}-V}\right|=t+C_1.$$

Введемо позначення $\beta=\frac{\chi}{m}$ і $\sqrt{\frac{mg}{\chi}}=V_1$:

$$\frac{1}{2\beta V_1}\ln\left|\frac{V_1+V}{V_1-V}\right|=t+C_1$$

і скористаємося початковою умовою $V(t=0)=V_0$ для визначення сталої інтегрування C_1:

$$C_1=\frac{1}{2\beta V_1}\ln\left|\frac{V_1+V_0}{V_1-V_0}\right|.$$

Підставляючи значення C_1 у знайдений загальний розв'язок і потенціюючи, матимемо

$$\left|\frac{V_1+V}{V_1-V}\right| = Ae^{2\beta V_1 t}, \qquad \text{де} \quad A = \left|\frac{V_1+V_0}{V_1-V_0}\right|.$$

Розв'язавши цей вираз відносно $V(t)$, знайдемо залежність швидкості руху від часу:

$$V(t) = V_1 \frac{Ae^{2\beta V_1 t}-1}{Ae^{2\beta V_1 t}+1} \qquad \text{або} \qquad V(t) = V_1 \frac{A-e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}}. \tag{12.2.3.14}$$

Наявність швидко спадного експоненціального множника в (12.2.3.14) свідчить про те, що тільки на початковому етапі (при малих t) рух є прискореним. При великих t ($t \gg 0$) рух відбувається з усталеною швидкістю $V(t) = V_1 = \sqrt{\frac{mg}{\chi}}$.

Оскільки $V(t) \equiv \frac{dx}{dt}$, то представимо (12.2.3.14) як рівняння відносно функції $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = V_1 \frac{A-e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}}.$$

Відокремимо змінні

$$dx = V_1 \frac{A-e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}}\,dt$$

і виконаємо інтегрування:

$$x(t) = V_1 \int \frac{A-e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}}\,dt = V_1 \int \left(\frac{A+e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}} - \frac{2e^{-2\beta V_1 t}}{A+e^{-2\beta V_1 t}}\right) dt = V_1 t - 2V_1 \int \frac{e^{-2\beta V_1 t}\,dt}{A+e^{-2\beta V_1 t}} =$$

$$= V_1 t + \frac{1}{\beta}\int \frac{d\left(A+e^{-2\beta V_1 t}\right)}{A+e^{-2\beta V_1 t}} = V_1 t + \frac{1}{\beta}\ln\left(A+e^{-2\beta V_1 t}\right) + C_2.$$

Визначимо сталу інтегрування C_2, використовуючи початкову умову $x(t=0) = x_0$:

$$C_2 = x_0 - \frac{1}{\beta}\ln(A+1).$$

У результаті

$$x(t) = x_0 + V_1 t + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{A+e^{-2\beta V_1 t}}{A+1}\right), \tag{12.2.3.15}$$

звідки випливає, що при $t \gg 0$ пройдений шлях пропорційний часу руху:

$$x(t) = x_0 + V_1 t + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{A}{A+1}\right) = x_1 + V_1 t,$$

де $x_1 = x_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left|\frac{V_1+V_0}{2V_1}\right|$.

Розв'язання (12.2.3.15) можна перетворити до вигляду

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\beta}\ln\left[\operatorname{ch}(\beta V_1 t)\right] = x_0 + \frac{m}{\chi}\ln\left[\operatorname{ch}\left(t\sqrt{g\frac{\chi}{m}}\right)\right]. \tag{12.2.3.16}$$

Задача 9. З якою швидкістю падає дощова крапля, що має форму кулі радіусом $r = 2$ мм, через 1 с після початку падіння (через 5 с після початку падіння), якщо сила опору її руху пропорційна квадрату швидкості падіння з коефіцієнтом $\chi = \frac{\rho_0}{2}CS$, де $C = 0{,}4$ – коефіцієнт обтікання краплі; S – площа її поперечного перерізу; $\rho_0 \simeq 1$ кг/м^3 – густина повітря (густина води $\rho \simeq 10^3$ кг/м^3)?

Розв'язання. На будь-яке тіло, що падає в рідині або газі, діють сила ваги P, виштовхувальна сила (сила Архімеда) $F_{\text{Арх}}$ і сила опору руху $F(t)$. Нехтуючи для газів виштовхувальною силою $\left(F_{\text{Арх}} \ll P\right)$, запишемо основний закон динаміки для краплі дощу:

$$m\frac{dV(t)}{dt} = P - F(t) \quad \Rightarrow \quad m\frac{dV(t)}{dt} = mg - \chi V^2(t).$$

Це рівняння збігається з рівнянням (12.2.3.13). Його розв'язки даються формулами (12.2.3.14) – (12.2.3.16). Припустивши, що в початковий момент часу $t = 0$ крапля перебувала в стані спокою $V_0 = 0$ і $x_0 = 0$, перепишемо розв'язок (12.2.3.14):

$$V(t) = V_1 \frac{1-e^{-2\beta V_1 t}}{1+e^{-2\beta V_1 t}}.$$

Тут

$$\beta = \frac{\chi}{m} = \frac{\rho_0}{2}CS \cdot \frac{1}{m} = \frac{\rho_0 \cdot C \cdot \pi r^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1 \cdot 0{,}4}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 0{,}075\ \text{м}^{-1},$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{mg}{\chi}} = \sqrt{\frac{g}{\beta}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}075}} \simeq 11{,}44\ \text{м/с}. \tag{*}$$

Отже, швидкість падіння краплі через 1 с після початку падіння дорівнює:

$$V(t=1) = V_1 \frac{1-e^{-2\beta V_1 t}}{1+e^{-2\beta V_1 t}} = 11{,}44 \cdot \frac{1-e^{-2 \cdot 0{,}075 \cdot 11{,}44 \cdot 1}}{1+e^{-2 \cdot 0{,}075 \cdot 11{,}44 \cdot 1}} = 11{,}44 \cdot \frac{1-e^{-1{,}72}}{1+e^{-1{,}72}} = 7{,}96\ \text{м/с}.$$

Через 5 с після початку падіння швидкість становить

$$V(t=5) = 11{,}44 \cdot \frac{1-e^{-2 \cdot 0{,}075 \cdot 11{,}44 \cdot 5}}{1+e^{-2 \cdot 0{,}075 \cdot 11{,}44 \cdot 5}} = 11{,}44 \cdot \frac{1-e^{-8{,}58}}{1+e^{-8{,}58}} = 11{,}43\ \text{м/с}.$$

Зауваження. З курсу фізики відомо, що якщо тіло падає з великої висоти, то, починаючи з деякого моменту, воно падає з усталеною швидкістю. У цьому випадку усталена швидкість падіння краплі визначається виразом (*).

Задача 10. Парашутист масою $m = 70$ кг робить затяжний стрибок з висоти 1,5 км і розкриває парашут на висоті 0,5 км. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості руху і нехтуючи зміною густини повітря з висотою, визначити час, протягом якого парашутист падав до розкриття парашута.

Розв'язання. Вільне падіння парашутиста описується рівнянням руху (12.2.3.13). Виходячи з умови задачі, у початковий момент часу $t = 0$ маємо $V_0 = 0$ і $x_0 = 0$.

Приймаючи коефіцієнт обтікання людини $C = 0{,}91$, площу поперечного перерізу в напрямку руху $S = 0{,}6$, густину повітря $\rho_0 \simeq 1$ кг/м^3, визначимо коефіцієнт пропорційності χ:

$$\chi = \frac{\rho_0}{2} CS = \frac{1 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}6}{2} = 0{,}273.$$

Використовуючи формулу (12.2.3.16), знайдемо час, протягом якого парашутист падав до розкриття парашута:

$$t = \sqrt{\frac{m}{\chi g}}\, Arch\left[\exp\left(\frac{x(t) \cdot \chi}{m}\right)\right].$$

Оскільки $x(t) = 1500 - 500 = 1000$ м, то

$$t = \sqrt{\frac{70}{0{,}273 \cdot 9{,}81}}\, Arch\left[\exp\left(\frac{1000 \cdot 0{,}273}{70}\right)\right] = 23{,}52 \text{ с}.$$

Легко встановити граничну швидкість падіння людини в повітрі нормальної густини, спираючись на наведений вище загальний розв'язок задачі і висловлене зауваження. Гранична швидкість вільного падіння людини становить

$$V_1 = \sqrt{\frac{mg}{\chi}} = \sqrt{\frac{70 \cdot 9{,}81}{0{,}273}} \simeq 50{,}15 \text{ м/с}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю V_0. Знайти закон руху тіла, вважаючи, що воно рухається лише під впливом сили ваги.
2. Човен, що рухається прямолінійно з початковою швидкістю 1,5 м/с, сповільнює свій рух під дією опору води, пропорційного швидкості човна. Який шлях пройде човен до повної зупинки, якщо через 4 с швидкість човна впала до 1 м/с? Коли швидкість зменшиться до 1 см/с?
3. Катер рухається в спокійній воді зі швидкістю $V_0 = 10$ км/год. На повному ходу двигун був вимкнений і через 2 хв швидкість катера зменшилася до

$V_1 = 0{,}5$ км/год. Визначити швидкість, з якою рухався катер через 40 с після вимикання двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху катера.
4. Підводний човен масою m, що перебуває в надводному положенні, починає занурюватися на глибину, рухаючись поступально. Визначити швидкість занурення і шлях, пройдений човном за час t_1, якщо при $t = 0$ початкова швидкість $V_0 = 0$, а опір води пропорційний першому степеню швидкості занурення.
5. Куля, рухаючись зі швидкістю $V_0 = 400$ м/с, пробиває стіну завтовшки $h = 20$ см і вилітає зі швидкістю $V = 100$ м/с. Вважаючи силу опору стіни пропорційною квадрату швидкості руху кулі, знайти час проходження кулі через стіну.
6. Парашутист стрибнув з деякої висоти без початкової швидкості і перебував у вільному падінні, поки не досяг швидкості 45 м/с. Скільки часу парашутист перебував у вільному падінні, якщо опір повітря пропорційний квадрату швидкості падіння? Зміну густини повітря з висотою не враховувати.
7. У наслідок удару футбольний м'яч вагою 400 г летить вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості і дорівнює 0,48 г при швидкості 1 м/с. Знайти час підіймання м'яча і найбільшу висоту підйому. Як зміняться ці результати, якщо знехтувати опором повітря?

ВІДПОВІДІ

1. $x(t) = V_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$. **2.** 15 м; 50 с. **3.** 3,69 км/год. **4.** $V(t_1) = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1}\right)$, $x(t_1) = \dfrac{mg}{k}\left[t_1 - \dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t_1}\right)\right]$. **5.** 0,0011 с. **6.** 7,5 с. **7.** 2,01 с, 19,9 м; 2,04 с, 20,39 м.

§ 12.2.4. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Диференціальним рівнянням *гармонічних коливань* називають рівняння вигляду

$$f''(x) = -q f(x), \qquad (q > 0). \qquad (12.2.4.1)$$

З рівняння (12.2.4.1) випливає, що в кожній точці x *швидкість зміни швидкості зміни функції* $f(x)$ *дорівнює взятому із протилежним знаком значенню функції*, тобто функція (з точністю до сталого множника) збігається зі своєю другою похідною.

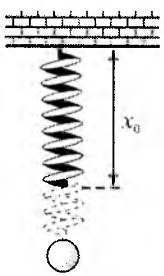
Рівняння (12.2.4.1) є лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку, воно також може бути віднесене до диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.

Задача 1. Підвішене на пружині тіло масою m здійснює коливання біля положення рівноваги. Знайти закон руху тіла. Розглянути випадки вільних, згасаючих і змушених коливань.

Розв'язання. Нехай x – відстань по вертикалі від положення рівноваги тіла. Рівняння руху тіла описується *другим законом Ньютона*

$$m\ddot{x} = F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big),$$

де $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ – прискорення, а $F(t, x, \dot{x})$ – результуюча сила, що включає:



1) відновлювальну силу (силу пружності пружини), що прагне повернути тіло у вихідне положення. Вона пропорційна віддаленню тіла від положення рівноваги і відповідно до *закону Гука* дорівнює cx, де c – коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт жорсткості пружини);

2) силу опору середовища. Припускаємо, що рух відбувається в середовищі, опір якого пропорційний швидкості руху $\dfrac{dx}{dt}$ з коефіцієнтом пропорційності λ, тобто $\lambda\dot{x}$.

Тоді $F(t, x, \dot{x}) = -\lambda\dot{x} - cx$ і маємо диференціальне рівняння *вільних коливань*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda\frac{dx}{dt} - cx \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + cx = 0. \qquad (1)$$

Вводячи позначення $\dfrac{c}{m} = \omega^2$, $\dfrac{\lambda}{m} = 2h$, запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (1a)$$

I. Вільні коливання. Нехай коливання відбуваються в середовищі без опору, тобто $\lambda = 0$ $(h = 0)$. Тоді рівняння (1а) набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (2)$$

Йому відповідає характеристичне рівняння із чисто уявними коренями

$$k^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega.$$

Отже, розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t. \qquad (3)$$

Поклавши $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$, так що $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ і $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{C_1}{C_2}$, надамо розв'язанню (3) вигляду

$$x(t) = A(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t) = A\sin(\omega t + \varphi). \qquad (4)$$

З формули (4) видно, що тіло здійснює вільні коливання біля положення рівноваги з амплітудою A, частотою ω, початковою фазою φ і періодом коливань $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Якщо в початковий момент тіло перебувало в точці x_0 і рухалося зі швидкістю V_0, тобто

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0, \\ \dot{x}(t=0) = V_0, \end{cases} \qquad (5)$$

то з формули (3) знаходимо

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \frac{V_0}{\omega} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t,$$

звідки випливає, що амплітуда коливань A і початкова фаза φ залежать від частоти коливань ω і початкових умов руху:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{V_0}. \qquad (6)$$

II. Згасаючі коливання. Нехай коливання відбуваються в середовищі з опором. Ця ситуація описується рівнянням

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (7)$$

яке має такі корені характеристичного рівняння:

$$k^2 + 2hk + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Залежно від знака виразу, що стоїть під радикалом, маємо різні розв'язки рівняння (7).

а) Нехай $h > \omega$, що відповідає *сильному опору* середовища. У цьому випадку корені характеристичного рівняння дійсні й різні. Отже,

$$x(t) = C_1 e^{\left(-h+\sqrt{h^2-\omega^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-h+\sqrt{h^2-\omega^2}\right)t}. \qquad (8)$$

Якщо $t \to \infty$, то $x \to 0$ і має місце асимптотично згасаючий рух (рис. 12.2.4а). Такий рух називають *аперіодичним*.

б) Якщо $h = \omega$, то корені характеристичного рівняння дійсні і кратні ($k_1 = k_2 = -h$). Тому

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 + C_2 t\right) \qquad (9)$$

і має місце граничний випадок аперіодичного руху (рис. 12.2.4б).

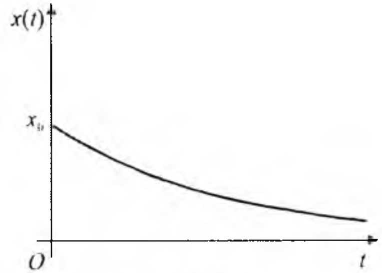


Рис. 12.2.4**а**

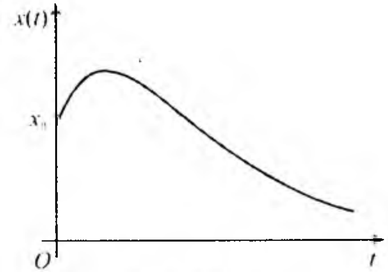


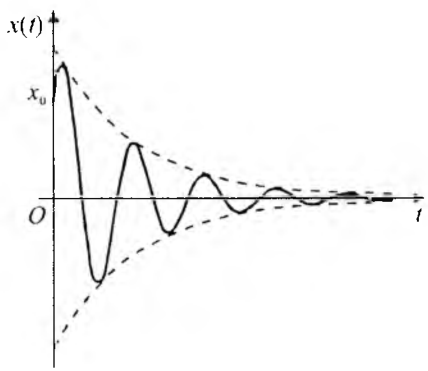
Рис. 12.2.4б

в) Нехай тепер $h < \omega$, що відповідає *слабкому опору*. Оскільки в цьому випадку маємо комплексно спряжені корені характеристичного рівняння

$$k_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2},$$

то розв'язок рівняння (7) набуває вигляду

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - h^2}\, t + C_2 \sin\sqrt{\omega^2 - h^2}\, t\right). \qquad (10)$$



З урахуванням введених раніше позначень $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$, маємо:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-ht}}_{\text{амплітуда}} \sin\left(\tilde{\omega} t + \varphi\right), \qquad (11)$$

де $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2}$.

Тут амплітуда коливань $A(t) = Ae^{-ht}$ залежить від t і при $t \to \infty$ прямує до нуля, тобто мають місце вільно *згасаючі коливання* біля положення рівноваги.

Наявність згасання у будь-якій коливальній системі призводить до зменшення частоти коливань. Зокрема, як видно з формули (11), частота згасаючих коливань $\tilde{\omega}$ менша за частоту вільних коливань ω. Оскільки вона не залежить від амплітуди, то в процесі коливань не змінюється.

III. Змушені коливання (*у середовищі без опору*). Припустимо, що на тіло діє зовнішня сила $F(t)$. Ця ситуація описується рівнянням (1а), у якому з'являється права частина. Вводячи позначення $\dfrac{F(t)}{m} = f(t)$, запишемо рівняння (1а) із правою частиною:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t). \qquad (12)$$

Нехай опір середовища відсутній $(\lambda = 0)$, а змушувальна сила змінюється за гармонічним $f(t) = a\sin\gamma t$ законом. Тоді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a\sin\gamma t. \qquad (13)$$

Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку таких рівнянь його загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = \bar{x} + x^*,$$

де *загальний розв'язок* відповідного *однорідного рівняння* визначається формулою (4), тобто $\bar{x} = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Частинний розв'язок x^* рівняння (13) шукатимемо методом підбору (див. § 11.7). Підбираючи частинний розв'язок, окремо розглянемо випадки, коли:

1) частота власних коливань системи ω <u>не збігається</u> із частотою змушувальної сили γ, тобто $\omega \neq \gamma$.

Права частина рівняння (13) являє собою добуток многочлена нульового степеня $Q_0(t)$ на функцію $\sin\gamma t$, тобто $\alpha = 0$, $\beta = \gamma$. Оскільки $\alpha \pm i\beta = \pm i\gamma \neq k_{1,2} = \pm i\omega$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$x^* = M\cos\gamma t + N\sin\gamma t.$$

Тоді

$$\dot{x}^* = -M\gamma\sin\gamma t + N\gamma\cos\gamma t, \qquad \ddot{x}^* = -M\gamma^2\cos\gamma t - N\gamma^2\sin\gamma t.$$

Підставимо функцію x^* та її похідні в рівняння:

$$-M\gamma^2\cos\gamma t - N\gamma^2\sin\gamma t + \omega^2 M\cos\gamma t + \omega^2 N\sin\gamma t = a\sin\gamma t.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin\gamma t$ і $\cos\gamma t$:

$$\begin{array}{l|} \cos\gamma t \\ \sin\gamma t \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} -M\gamma^2 + M\omega^2 = 0 \\ -N\gamma^2 + N\omega^2 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M = 0, \\ N = \dfrac{a}{\omega^2 - \gamma^2}. \end{array}\right.$$

Таким чином, *частинний розв'язок* неоднорідного рівняння

$$x^* = \frac{a}{\omega^2-\gamma^2}\sin\gamma t.$$

Отже, *загальний розв'язок* задачі про змушені коливання системи в середовищі без опору дається виразом:

$$x(t) = \bar{x} + x^* = A\sin(\omega t+\varphi) + \frac{a}{\omega^2-\gamma^2}\sin\gamma t, \tag{14}$$

де перший доданок описує власні (*вільні*) коливання системи, а другий – *змушені* коливання.

З розв'язку (14) випливає, що чим менша різниця $(\omega^2-\gamma^2)$, тим більша амплітуда змушених коливань. Є підстави вважати, що *в середовищі з опором* перший доданок з часом спадатиме і в підсумку залишаться лише змушені коливання.

2) частота власних коливань системи ω <u>збігається</u> із частотою змушувальної сили γ: $\omega=\gamma$.

У цьому випадку вираз $\alpha\pm i\beta=\pm i\gamma$ збігається з коренями характеристичного рівняння $k_{1,2}=\pm i\omega$, тобто $\alpha\pm i\beta=k_{1,2}$. Отже, частинний розв'язок x^* слід шукати у вигляді

$$x^* = t(M\cos\gamma t + N\sin\gamma t),$$

тоді

$$\dot{x}^* = (M\cos\gamma t+N\sin\gamma t) + t(-M\gamma\sin\gamma t + N\gamma\cos\gamma t),$$

$$\ddot{x}^* = (-2M\gamma\sin\gamma t + 2N\gamma\cos\gamma t) + t(-M\gamma^2\cos\gamma t - N\gamma^2\sin\gamma t).$$

Внаслідок підстановки в рівняння маємо

$$-2M\gamma\underline{\sin\gamma t} + 2N\gamma\cos\gamma t - Mt\gamma^2\cos\gamma t - Nt\gamma^2\underline{\sin\gamma t} + Mt\omega^2\cos\gamma t + Nt\omega^2\underline{\sin\gamma t} =$$

$$= a\underline{\sin\gamma t}$$

звідки знаходимо:

$$\begin{array}{l|l} \cos\gamma t & 2\gamma N + \cancel{(\omega^2-\gamma^2)}Mt = 0, \\ \sin\gamma t & \cancel{(\omega^2-\gamma^2)}Nt - 2\gamma M = a \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M = -\dfrac{a}{2\gamma}, \\ N = 0. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок* рівняння (13) має вигляд

$$x^* = -\frac{at}{2\gamma}\cos\gamma t. \tag{15}$$

Нарешті запишемо *загальний розв'язок* задачі про змушені коливання системи при $\omega=\gamma$:

$$x(t) = \bar{x} + x^* = A\sin(\omega t+\varphi) - \frac{at}{2\omega}\cos\omega t. \tag{16}$$

Маємо ситуацію, при якій амплітуда змушених коливань $A(t)=\dfrac{at}{2\omega}$ пропорційна t. Внаслідок цього з часом вона буде необмежено наростати. Це явище відоме як *резонанс*.

IV. Змушені коливання (*у середовищі з опором*). Ця ситуація описується рівнянням (12). Припускаємо, що змушувальна сила змінюється за гармонічним законом $f(t)=a\sin\gamma t$. Тоді

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = a\sin\gamma t. \tag{17}$$

Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння маємо

$$x = \bar{x} + x^*.$$

У п. **II** знайдені всі *загальні розв'язки* відповідного *однорідного рівняння*

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

залежні від співвідношення між параметрами h і ω. Найцікавішим видається випадок слабкого згасання $h<\omega$, що забезпечує вільні згасаючі коливання біля положення рівноваги. Цьому процесу відповідає розв'язок (11):

$$\bar{x} = Ae^{-ht}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi), \qquad \tilde{\omega}=\sqrt{\omega^2-h^2}.$$

Підбираючи частинний розв'язок x^* рівняння (17), обмежимося випадком, коли частота власних коливань системи ω <u>не збігається</u> із частотою змушувальної сили γ, тобто $\omega\neq\gamma$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$x^* = M\cos\gamma t + N\sin\gamma t.$$

Підставляючи в рівняння (17) функцію x^* і дві її перші похідні (вони знайдені в п. **III 1**)), отримаємо тотожність:

$$-\gamma^2(M\cos\gamma t + N\underline{\sin\gamma t}) - 2h\gamma(M\underline{\sin\gamma t} - N\cos\gamma t) + \omega^2(M\cos\gamma t + N\underline{\sin\gamma t}) =$$

$$= a\underline{\sin\gamma t},$$

звідки визначимо коефіцієнти M і N:

$$\begin{array}{l|l} \cos\gamma t & (\omega^2-\gamma^2)M + 2h\gamma N = 0, \\ \sin\gamma t & -2h\gamma M + (\omega^2-\gamma^2)N = a \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M = -\dfrac{2h\gamma a}{(\omega^2-\gamma^2)^2+(2h\gamma)^2}, \\ N = \dfrac{a(\omega^2-\gamma^2)}{(\omega^2-\gamma^2)^2+(2h\gamma)^2}. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок* рівняння (17) має вигляд

$$x^* = -\frac{2h\gamma a}{\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(2h\gamma\right)^2}\cos\gamma t + \frac{a\left(\omega^2-\gamma^2\right)}{\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(2h\gamma\right)^2}\sin\gamma t. \qquad (18)$$

Вводячи позначення

$$\sin\delta = \frac{2h\gamma}{\sqrt{\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(2h\gamma\right)^2}}, \qquad \cos\delta = \frac{\omega^2-\gamma^2}{\sqrt{\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(2h\gamma\right)^2}},$$

розв'язку (18) надамо вигляду

$$x^* = B\sin\left(\gamma t-\delta\right),$$

де амплітуда змушених коливань B і зсув фази δ визначаються за такими виразами:

$$B = \frac{a}{\sqrt{\left(\omega^2-\gamma^2\right)^2+\left(2h\gamma\right)^2}}, \qquad \delta = \operatorname{arctg}\frac{2h\gamma}{\omega^2-\gamma^2}.$$

Таким чином, *загальний розв'язок* рівняння (17), що описує змушені коливання тіла в середовищі з опором, дається виразом

$$x(t) = \bar{x} + x^* = Ae^{-ht}\sin\left(\tilde{\omega}t+\varphi\right) + B\sin\left(\gamma t-\delta\right). \qquad (19)$$

Тут перший доданок відповідає вільним *згасаючим* коливанням, а другий – *змушеним*. Із часом перший доданок прямує до нуля і ним можна знехтувати. Усталені коливання системи відбуваються із частотою змушувальної сили.

Амплітуда змушених коливань B пропорційна амплітуді зовнішньої періодичної сили, тобто $B \sim a$. При цьому вона є функцією частоти періодичної сили γ. Розв'язуючи задачу на екстремум функції $B(\gamma)$ (див. частину 1, § 6.3), визначимо частоту $\gamma = \sqrt{\omega^2-2h^2}$, при якій амплітуда змушених коливань досягає максимального значення:

$$B_{\max} = \frac{a}{2h\sqrt{\omega^2-h^2}}.$$

Звідси випливає, що $B_{\max} \sim h^{-2}$, тобто амплітуда коливань тим більша, чим менший опір середовища, і навпаки.

Зсув фази δ свідчить про те, що коливання системи відстають за фазою від коливань змушувальної сили.

Зауваження. Рівняння гармонічних коливань зустрічаються не лише в задачах про коливання механічних систем. Зокрема, гармонічні коливання виникають у коливальному контурі – електричного кола, що складається з котушки індуктивності L, активного опору R і конденсатора ємності C.

Позначаючи через $u(t)$ і $i(t)$, відповідно, напругу на обкладках конденсатора і силу струму в колі, маємо

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}. \qquad (*)$$

Крім того, напруга і сила струму пов'язані між собою співвідношенням

$$i(t) = -C\frac{du(t)}{dt},$$

підставляючи яке в формулу (*), прийдемо до диференціального рівняння для напруги:

$$L\frac{d^2u(t)}{dt^2} + R\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{C}u(t) = 0 \qquad \text{або} \qquad \ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = 0.$$

Порівнюючи його з рівнянням гармонічного осцилятора (1) – (1а) бачимо, що перший доданок являє собою інерційний член, другий – аналогічно до члена, що визначається силою опору, а третій – аналогічно до члена, пов'язаного із відновлювальною силою. Дійсно, сила інерції системи визначається індуктивністю L, що відіграє роль "маси" і перешкоджає зміні струму в колі. Сила опору, очевидно, пов'язана з омічним опором R. Відновлювальна сила ототожнюється із силою відштовхування між електронами, що перешкоджає їхньому скупчуванню на одній з обкладок конденсатора й прагне перерозподілити їх так, щоб зрівняти заряди обкладок.

Якщо в коло включене ще й джерело струму з е.р.с. $E(t)$, то отримане рівняння стає неоднорідним

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}E(t)$$

і співпадає з рівнянням (12).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1989. – 431 с.; Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. *Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М.* Математика. Общий курс. – СПб.: Лань, 2002. – 960 с.
3. *Гутер Р.С., Янпольский А.Р.* Дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 1976. – 304 с.
4. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
5. *Зима В.Г., Бєляєв М.Р.* Неозначений та означений інтеграли: підручник для фізиків та інженерів. Книга 1. Теоретичні відомості. – К.: Майстер-клас, 2006. – 448 с.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 ч. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Ч.1., 6-е изд. – 648 с.; 2002. – Ч.2., 4-е изд. – 464 с.
7. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. 2-е изд. – М.: Высш. шк., 1988. – Т.1. – 712 с.; 1988. – Т.2. – 575 с.; 1989. – Т.3. – 351 с.
8. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
9. *Пак В.В., Носенко Ю.Л.* Вища математика. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
10. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. – М.: Интеграл-Пресс, 2004. – Т.1. – 416 с.; 2003. – Т.2. – 529 с.
11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т., 8-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – Т.1. – 680 с.; 2006. – Т.2. – 864 с.; 2005. – Т.3. – 728 с.
12. *Щипачев В.С.* Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.
13. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

Збірники задач

14. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
15. Вища математика. Збірник задач: У 2 ч. / *За ред. П.П.Овчинникова.* – К.: Техніка, 2004. – Ч.1. – 279 с.; 2004. – Ч.2. – 376 с.
16. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. – 528 с.
17. Задачник по курсу математического анализа: В 2 ч. / *Под ред. Н.Я.Виленкина.* – М.: Просвещение, 1971. – Ч.1. – 348 с.
18. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
19. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
20. Сборник задач по математике для втузов: В 2 ч. / *Под ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича.* – М.: Наука, 1981. – Ч.1. – 464 с.; 1986. – Ч.2. – 368 с.
21. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1985. – 128 с.
22. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. / *Под ред. А.П.Рябушко.* – Минск: Вышэйш. шк., 1991. – Ч.1. – 316 с.; Ч.2. – 352 с.; Ч.3. – 288 с.

Посібники з розв'язування задач

23. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 156 с.
24. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах: 4-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 480 с.
25. *Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И.* Курс классической математики в примерах и задачах: В 3 ч. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – Ч.1. – 672 с.; 2008. – Ч.2. – 504 с; 2009. – Ч.3. – 480 с.
26. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1986. – Ч.1. – 446 с.; Ч.2. – 464 с.
27. *Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О.* Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2003. – 624 с.
28. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
29. *Зима В.Г., Бєляєв М.Р.* Неозначений та означений інтеграли: підручник для фізиків та інженерів. Книга 2. Задачі, розв'язання, вказівки. – К.: Майстер-клас, 2007. – 336 с.
30. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Харьков: Изд-во ХГУ, 1963. – Ч.2. – 369 с.; 1971. – Ч.3. – 498 с.
31. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф.* Справочное пособие по математическому анализу. Интегрирование дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1987. – Ч.3. – 344 с.
32. *Марон И.А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
33. *Пономарев К.К.* Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйш. шк., 1973. – 560 с.
34. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – К.: Вища шк., 1984. – 408 с.

Навчальне видання

ГЕРАСИМЧУК Віктор Семенович,
ВАСИЛЬЧЕНКО Галина Сергіївна,
КРАВЦОВ Віктор Іванович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ПОВНИЙ КУРС У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Невизначений, визначений та невласні інтеграли
Звичайні диференціальні рівняння
Прикладні задачі

За редакцією докт. фіз.-мат. наук, професора В.С. Герасимчука

Відповідальний за випуск А. Ципоруха

Підписано до друку 25.06.09. Формат 60x84/16
Папір офс. Друк офс. Гарнітура Times
Ум. друк. арк. 29,4. Тираж 3000.

З питань придбання книг звертатися за тел.
(044)4555891–92, 80976822798