З Божою допомогою

Роман Заторський

Числення трикутних матриць та його застосування

З Божою допомогою

Роман Заторський

Числення трикутних матриць та його застосування

м. Івано-Франківськ
Сімик
2010

УДК: 512.64, 512.643.8, 519,1
MSC: 15A15, 05A15, 05A19
ББК 84(4 УКР)6-5
З-45

Рекомендовано до друку Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол №1 від 22 січня 2010 року)

Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування. — Івано-Франківськ: Вид-во , 2010.– 508 с.

Монографія є першим систематичним викладом "Числення трикутних матриць" — нового розділу лінійної алгебри, що активно розробляється автором та його учнями. Також розглядаються застосування цього числення до різноманітних задач комбінаторного аналізу та теорії чисел.

Від читача не вимагається знань, які б виходили за межі початкових курсів лінійної алгебри та аналізу.

Книга, безумовно, зацікавить спеціалістів з лінійної алгебри, дискретної математики, теорії чисел та інших розділів математики. Вона також буде корисною студентам та аспірантам математичних спеціальностей.

Рецензенти:
Бондаренко В.М., доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник відділу алгебри Інституту математики НАН України;
Ганюшкін О.Г., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри і математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
Григорчук Р.І., доктор фіз.-мат. наук, професор Техаського *A&M* університету, США;
Петравчук А.П., доктор фіз.-мат. наук, професор, завідуючий кафедрою алгебри і математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

ISBN 978-966-8067-63-1

Зміст

Моїй матері
Винявській Марті Володимирівні

Передмова

> *"Вкажи мені, Господи, Твої дороги, навчи мене, де Твої стежки."*
> *— Псалом 24.*

> *"Сутність математичної науки така, що в ній кожне суттєве досягнення йде поряд із знаходженням потужніших допоміжних засобів і простіших методів, які одночасно полегшують розуміння більш ранніх теорій і усувають важкі старі міркування; тому окремому досліднику, завдяки засвоєнню цих потужніших допоміжних засобів і простіших методів, вдається легше орієнтуватися в різних областях математики, ніж це має місце в якійсь іншій науці."*
> *— Д. Гільберт (Із доповіді на II Міжнародному Конгресі математиків у Парижі [63], стор. 64)*

У даний час спостерігається співробітництво двох, здавалося б, віддалених одна від одної галузей математики — лінійної алгебри та комбінаторного аналізу. Лінійна алгебра дала комбінаторному аналізу, перш за все, свої методи, у той час як деякі поняття лінійної алгебри мають комбінаторне походження (напр. перманент).

Важко переоцінити роль теорії матриць та матричного методу в різних галузях математики. Проте в математиці досить часто виникає необхідність працювати не лише з прямокутними, а й з таблицями чисел іншого вигляду. Тому під матрицями ми будемо розуміти таблиці чисел довільної усталеної форми. Зокрема, головними дійовими "особами" книги є спеціальні таблиці (які, за відсутності кращого терміну, будуть називатися *трикутними матрицями*. Позаяк звичайні трикутні матриці не з'являтимуться, то непорозумінь це не викликатиме) та їх функції — парадетермінанти і параперманенти, які є певними аналогами детермінанта та перманента квадратних матриць.

Парадетермінанти та параперманенти трикутних матриць $n-$го порядку також є полілінійними многочленами від коефіцієнтів цих матриць, проте із $\frac{n(n+1)}{2}$ змінними та 2^{n-1} доданками. Отже, можна було сподіватись, що парадетермінанти $n-$го порядку можна пов'язати з детермінантами спеціальних матриць $n-$го порядку. Теорема на стор. 196 підтверджує цей здогад.

Підсумовування доданків у парадетермінанті проводиться за всіма впорядкованими розбиттями натурального числа n на натуральні доданки, завдяки чому парадетермінанти виявилися добре пристосованими до аналізу задач, в яких з'являються лінійні рекурентні співвідношення та розбиття.

Слід також відзначити плідний взаємозв'язок між детермінантами та парадетермінантами, який допомагає виявити нові властивості обох функцій. Наприклад, за допомогою парадетермінантів доводяться теореми 2.11.1 та 2.11.2, які для т. зв. квазітрикутних матриць дають розв'язання відомої проблеми Пойа про зведення обчислення перманента квадратної матриці до обчислення визначника певним чином перетвореної матриці.

Перший розділ книги присвячено деяким поняттям комбінаторного аналізу, що лягли в основу числення трикутних матриць. У ньому також наведено ряд допоміжних фактів та тверджень із комбінаторного аналізу, які потрібні для подальшого викладу.

Основні поняття числення трикутних матриць та дослідження їх властивостей читач знайде у другому розділі книги. Тут, зокрема, введено операції парадетермінантного та параперманентного добутків трикутних матриць, для яких парадетермінант та параперманент є мультиплікативними функціями трикутних матриць, розглянуто зв'язок парадетермінантів із детермінантами та зв'язок перманентів із детермінантами. Добре володіння матеріалом

цього розділу необхідне для розуміння третього розділу книги.

У третьому розділі розглядаються деякі застосування числення трикутних матриць. Тут, зокрема:

розв'язок лінійного рекурентного рівняння подано у вигляді параперманента трикутної матриці, що дає можливість виділити важливий клас нормальних числових послідовностей і довести для них деякі загальні теореми. Встановлено двосторонні зв'язки між лінійними рекурентними рівняннями, послідовностями, які вони генерують, та їх генератрисами;

побудовано позиційні системи числення k-го порядку, основою яких є спеціальні k-вимірні вектори. При цьому наші системи першого порядку збігаються з класичними позиційними системами числення;

для основних формальних операцій із степеневими рядами загальний член результату виражено за допомогою парафункцій трикутних матриць через відповідні члени аргументів. Це дозволяє розв'язувати деякі прості рівняння із формальними степеневими рядами;

за допомогою парадетермінантів трикутних матриць розв'язано деякі загальні задачі про найкоротші шляхи на діаграмах Ферре та похилих діаграмах;

побудовано рекурентні дроби, що узагальнюють ланцюгові дроби;

встановлено ізоморфізм т. зв. (n, m)-форм із циркулянтами та деяким спеціальним класом матриць;

знайдено деякі загальні розв'язки класичних діофантових рівнянь, що узагальнюють рівняння Пелля, тощо.

Розділи закінчуються підбіркою нерозв'язаних задач та бібліографічними зауваженнями, де можна знайти деякі історичні нотатки та відповідну бібліографію.

Теоретичний матеріал постійно ілюструється прикладами. Крім цього, ряд параграфів закінчується підбіркою вправ, до яких в кінці книги наводяться відповіді та вказівки.

З метою збереження розумного об'єму книги доведення відомих фактів зазвичай опускаються. При цьому вказуються джерела, де їх можна знайти.

Автор вдячний Боднару Д.І., Бондаренку В.М., Дрозду Ю.А., Кириченку В.В., Левитській А.О., Паку І.М., Петравчуку А.П., Петричковичу В.М., Протасову І.В., Сущанському В.І., Тараканову В.Є., Ядренку М.Й. за підтримку, зауваження, побажання, співробітництво та консультації, надані при підготовці рукопису даної книги.

Особливо хочеться подякувати моїм друзям та науковим консультантам Ганюшкіну О.Г. та Григорчуку Р.І. за обговорення окремих тверджень, теорем, параграфів та цілий ряд зауважень, зроблених в процесі підготовки та читання рукопису даної книги.

Безмежно вдячний моїй дружині, Марії, котра впродовж багатьох років одноосібно несла тягар сімейного достатку та благополуччя.

Буду вдячний кожному читачеві за коментарі, зауваження і побажання до книги та кожну виявлену в ній помилку чи описку, про які прошу повідомляти за адресою:

76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, факультет математики та інформатики, кафедра алгебри та геометрії.

E-mail: *romazz@rambler.ru*

м. Івано-Франківськ
березень, 2010 р.

Роман Заторський

Розділ 1

Комбінаторні підвалини теорії

"Той подібний тому чоловікові, що, будуючи дім, він глибоко викопав, і основу на камінь поклав. Коли ж злива настала, вода кинулася на той дім, — та однак не змогла захитати його, бо збудований добре він був!."

— Євангеліє від Луки 6.48

Метою цього розділу є коротке ознайомлення із основними комбінаторними об'єктами та твердженнями, які знадобляться при викладі основної частини книги.

Як відомо, основними комбінаторними поняттями, на базі яких будуються поняття детермінанта та перманента [60] квадратної матриці є поняття підстановки і трансверсалі[1]. При цьому дають наступні означення детермінанта та перманента квадратної ма-

[1] Під трансверсаллю квадратної матриці розуміють набір елементів, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця цієї матриці.

триці[2]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.0.1}$$

Означення 1.0.1. *Перманентом і детермінантом квадратної матриці (1.0.1) називають відповідно числа*

$$\operatorname{per} A = \sum_{\varphi \in S_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n},$$

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sign} \varphi \, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n},$$

де S_n — множина всіх підстановок $\varphi = \binom{1\ 2 \ldots\ n}{i_1 i_2 \ldots i_n}$, а $\operatorname{sign}\varphi$ — знак підстановки[3] φ.

Зауважимо, що можливий і аксіоматичний підхід до означення детермінантів (див., наприклад, [13], стор. 58–62, [57], стор. 106–109).

Аналогічні функції трикутних матриць, які є предметом даної книги, базуються на комбінаторних поняттях *впорядкованого розбиття* натурального числа n на натуральні доданки та *монотрансверсалі*[4]. При побудові функцій трикутних матриць важли-

[2] Поняття перманента пов'язане з прямокутними матрицями. Проте, з метою збереження аналогії між означеннями детермінанта та перманента, ми наводимо означення перманента квадратної матриці.

[3] В алгебрі доводиться, що кожна підстановка єдиним способом розкладається в добуток незалежних циклів. Число $n-r$, де n — порядок підстановки, а r — кількість циклів, називають декрементом підстановки. Множина підстановок n-го порядку розбивається на парні та непарні підстановки. Парність підстановки збігається з парністю її декременту.

[4] Див. означення 2.3.1 на стор. 75

ву роль відіграють також множини $\Xi(n)$. Зупинимося на цих та інших комбінаторних поняттях докладніше.

1.1 Факторіальні степені

"$\triangle(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$.

Це основний факторіальний факт."

— *Р.Грехем, Д.Кнут, О.Паташник ([21], стор. 68.)*

Спадні та зростаючі факторіальні степені, на відміну від біноміальних коефіцієнтів та інших комбінаторних формул, допускають узагальнення не тільки на множину всіх цілих, але й дійсних чи, навіть, комплексних чисел. Тому їх дальші узагальнення завжди корисні. Вони дозволяють уніфікувати дослідження в деяких напрямках комбінаторного аналізу, виділити клас факторіальних числових трикутників до якого належать трикутники Паскаля, Стірлінга першого і другого роду, трикутник Ла та багато інших нових числових трикутників, що очікують своїх комбінаторних інтерпретацій. При цьому виявляються загальні закономірності, властиві всім числовим трикутникам цього класу.

Введення поняття факторіального степеня з деяким кроком, дозволяє двоїсті тотожності чи формули для спадних та зростаючих факторіальних степенів замінити однією загальною тотожністю чи формулою. Зокрема, такий підхід дозволяє узагальнити тотожності Вандермонда та Нерлунда.

Означення 1.1.1. [49]. *Для довільних дійсного числа x і натурального числа n* ***факторіальним степенем*** $n \in \mathbb{N}_0$ *з кроком k, де k належить множині раціональних чисел, назвемо вираз вигляду*

$$x^{n\{k\}} = x(x+k)(x+2k) \cdot \ldots \cdot (x+(n-1)k).$$

Зручно вважати, що

$$x^{0\{k\}} = 1. \tag{1.1.1}$$

Зауваження 1.1.1. 1). Якщо показник n факторіального степеня від'ємний, то

$$x^{n\{k\}} = \frac{1}{x^{-n\{k\}}}.$$

$$2). \quad x^{n+m\{k\}} \neq x^{(n+m)\{k\}},$$

бо

$$x^{n+m\{k\}} = x^n \cdot x^{m\{k\}},$$

а

$$x^{(m+n)\{k\}} = x(x+k) \cdot (x + k(m+n-1)).$$

Приклад 1.1.1.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n\{\frac{1}{2}\}} = \frac{1^{n\{1\}}}{2^{n\{0\}}}.$$

Розвинення многочленів

$$x^{n\{k\}},\ n = 1, 2, \dots, 10$$

за степенями x читач знайде в додатку 1 на стор. 442.

Нижче нам також знадобляться розвинення за степенями x для факторіальних степенів

$$(x+t)^{n\{k\}},\ n = 1, 2, \dots, 10$$

(див. додаток 2 на стор. 443).

Зауважимо, що найчастіше зустрічаються зростаючі та спадні факторіали степеня n з кроками $1, -1, 0$, які, в існуючій літературі, позначаються відповідно через:

$$[x]^n = x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdot \ldots \cdot (x+n-1),$$

$$[x]_n = x^{\underline{n}} = x(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1),$$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n}.$$

Отже,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n^{n\{-1\}} = 1^{n\{1\}},$$

причому, згідно з домовленістю (1.1.1) маємо $0! = 1$.

Комбінаторний закон двоїстості факторіальних степенів виражається в наступних рівностях:

$$(-m)^{n\{-k\}} = (-m)(-m-k) \cdot \ldots \cdot (-m-(n-1)k) = (-1)^n m^{n\{k\}}, \tag{1.1.2}$$

$$(-m)^{n\{k\}} = (-m)(-m+k) \cdot \ldots \cdot (-m+(n-1)k) = (-1)^n m^{n\{-k\}}. \tag{1.1.3}$$

Наведемо ще два твердження, які ілюструють двоїстість факторіальних степенів.

Твердження 1.1.1. *Справедливі тотожності:*

$$\frac{m^{n\{-1\}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{(n-i)\{1\}}}{(n-i)!} \cdot \frac{m^{i\{-1\}}}{i!}; \tag{1.1.4}$$

$$\frac{m^{n\{1\}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{(n-i)\{-1\}}}{(n-i)!} \cdot \frac{m^{i\{1\}}}{i!}. \tag{1.1.5}$$

Ці тотожності є частковим випадком загальнішої тотожності (3.2.73), яку ми доведемо пізніше (див. стор. 277).

Справедлива наступна

Теорема 1.1.1. [49]. *Для довільних параметрів x і y та довільного k виконується тотожність:*

$$(x+y)^{n\{k\}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i)\{k\}} \tag{1.1.6}$$

Доведення. При $n = 1$ тотожність (1.1.6) очевидно справедлива. Справедливість індукційного кроку випливає із наступних рівностей

$$(x+y)^{(n+1)\{k\}} = (x+y)^{n\{k\}}(x+y+nk) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i)\{k\}}((x+ik)+(y+(n-i)k)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{(i+1)\{k\}} y^{(n-i)\{k\}} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i+1)\{k\}} =$$

$$= \binom{n}{0} x^{0\{k\}} y^{(n+1)\{k\}} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) x^{(i+1)\{k\}} y^{(n-i)\{k\}} +$$

$$\binom{n}{n} x^{(n+1)\{k\}} y^{0\{k\}} = \binom{n+1}{0} x^{0\{k\}} y^{(n+1)\{k\}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i+1} x^{(i+1)\{k\}} y^{(n-i)\{k\}} + \binom{n+1}{n+1} x^{(n+1)\{k\}} y^{0\{k\}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i+1)\{k\}}.$$

□

Якщо у тотожності (1.1.6) теореми 1.1.1 замість k підставити -1, 1, 0 то вони отримають вигляд тотожностей Вандермонда[5], Нерлунда[6] та біноміальної відповідно:

$$(x+y)^{n\{-1\}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k\{-1\}} y^{(n-k)\{-1\}},$$

$$(x+y)^{n\{1\}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k\{1\}} y^{(n-k)\{1\}}.$$

$$(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}.$$

Вправи

[5] А. Вандермонд (1735-1796) — французький математик і політичний діяч.
[6] Н.Е. Нерлунд (1885-1981) — данський математик.

1.1.1. Доведіть наступні співвідношення:

$$x^{(n+1)\{-1\}} = x x^{n\{-1\}} - n x^{n\{-1\}},$$

$$x^{(n+1)\{1\}} = x x^{n\{1\}} - n x^{n\{1\}}.$$

1.1.2. Доведіть тотожності:

$$\binom{i}{r} = \frac{i^{r\{-1\}}}{r!} = \frac{(i-r+1)^{r\{1\}}}{r!}, \; r \le i, \; r \in \mathbb{N}_0, \; i \in \mathbb{N}_0,$$

$$\frac{i^{r\{1\}}}{r!} = \frac{(i+r-1)^{r\{-1\}}}{r!}, \; i \in \mathbb{N}, \; r \in \mathbb{N}_0.$$

1.1.3. Доведіть, що коли у виразі $\frac{(r+1)^{i\{1\}}}{i!}$ поміняти місцями значення змінних i та r, то його значення не зміниться.

1.1.4. Доведіть тотожність

$$\frac{r^{i\{-1\}}}{i!} = \frac{r^{(r-i)\{-1\}}}{(r-i)!}, \; i \le r, \; i \in \mathbb{N}_0.$$

1.1.5. Доведіть тотожності:

$$\frac{i^{r\{1\}}}{r!} = \sum_{j=1}^{i} \frac{j^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!}, \; r, i \in \mathbb{N}, \tag{1.1.7}$$

$$\frac{i^{r\{-1\}}}{r!} = \sum_{j=r-1}^{i-1} \frac{j^{(r-1)\{-1\}}}{(r-1)!}, \; r \le i, \; r \in \mathbb{N}.$$

1.1.6. Доведіть тотожність

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{k^{j\{1\}}}{j!} = \frac{(k+1)^{i\{1\}}}{i!}, \; i, k \in \mathbb{N}.$$

1.1.7. a) Так звані *числа Лага (Lah) без знаку* задаються рекурентними правилами

$$L'_{0,0} = 1, \; L'_{n,0} = 0, \text{ для } n > 0,$$

$$L'_{n,k} = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}, \text{ для } k \geqslant 1.$$

Доведіть, що

$$x^{n\{1\}} = \sum_{k=0}^{n} L'_{n,k} x^{k\{-1\}}. \tag{1.1.8}$$

b) *Числа Лага із знаком* $L_{n,k}$ визначаються правилом

$$L_{n,k} = (-1)^n L'_{n,k}.$$

Доведіть, що

$$x^{n\{-1\}} = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}(-x)^{k\{-1\}}.$$

1.2 Мультимножини

> *"Під "розмаїттям"або "множиною"я розумію взагалі всяке множинне, яке можна мислити як єдине, тобто довільну сукупність визначених елементів, яка може бути поєднана в одне ціле за допомогою певного закону."*
>
> *— Кантор Г. ([51], стор. 101)*

У дискретній математиці часто виникають задачі, в яких досліджуються сукупності об'єктів, серед яких можуть бути і однакові. У цих випадках мова канторівської теорії множин викликає певні труднощі та незручності. У зв'язку з цим із середини минулого століття все більшої ваги починає набирати поняття мультимножини.

Означення 1.2.1. ***Мультимножиною*** *A називають довільний невпорядкований набір елементів деякої множини $[A]$. Множину $[A]$ називають* ***базою*** *мультимножини A.*

Означення 1.2.2. *Якщо мультимножина A складається із k_1 елементів a_1, k_2 елементів $a_2, \ldots, k_n$ елементів a_n, то говорять, що ця мультимножина має* ***первинну специфікацію***

$$S(A) = [a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}] \tag{1.2.1}$$

і для зручності мультимножину A подають у канонічному вигляді

$$A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}. \tag{1.2.2}$$

Числа k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають ***показниками*** *первинної специфікації мультимножини A.*

Первинну специфікацію мультимножини показників

$$\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$$

первинної специфікації мультимножини (1.2.2), називають *вторинною специфікацією* цієї мультимножини і позначають через

$$S(S(A)) = [[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, m^{\lambda_m}]],$$

а числа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ — *показниками вторинної специфікації мультимножини A.*

Позаяк елементи мультимножини невпорядковані, то, без обмеження загальності, можна вважати, що показники її первинної специфікації задовольняють нерівності

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n. \tag{1.2.3}$$

Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$, то мультимножина (1.2.2) є звичайною множиною.

Число всіх елементів мультимножини A називають її потужністю і позначають через $|A|$. Потужність мультимножини (1.2.2), очевидно, дорівнює

$$|A| = k_1 + k_2 + \ldots + \ k_n.$$

Означення 1.2.3. *Мультимножину*

$$\overline{A} = \{a_1^{\overline{k}_1}, a_2^{\overline{k}_2}, \ldots, a_k^{\overline{k}_r}\},$$

де

$$\overline{k}_i = |\{k_j : k_j \geq i\}| = |\{j : k_j \geq i\}|, \ \ i = 1, 2, \ldots, r; \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

а

$$r = \max\{k_i\}, \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

називають ***спряженою мультимножиною*** *до мультимножини A.*

Звернемо увагу на те, що бази взаємно спряжених мультимножин, взагалі кажучи, не збігаються. У випадку $n < r$ база мультимножини $\overline{A}$ є деяким розширенням бази мультимножини A.

Відзначимо також, що елементи первинної специфікації $\overline{k}_i$ спряженої мультимножини $\overline{A}$ мають простий комбінаторний зміст, а саме: вони дорівнюють максимальному числу груп по i однакових елементів, які можна виділити із мультимножини A.

Розглянемо основні операції над мультимножинами.

Нехай $k_A(a)$ – число елементів a, що належать мультимножині A.

Мультимножину B називають *підмультимножиною* мультимножини A, якщо виконується включення $[B] \subseteq [A]$, причому для довільного елемента $a \in [B]$ виконується нерівність

$$k_B(a) \leq k_A(a).$$

Якщо потужність підмультимножини деякої мультимножини дорівнює m, то таку підмультимножину називатимемо *m-підмультимножиною* цієї мультимножини.

Об'єднанням, перетином, сумою мультимножин A і B називають відповідно таку мультимножину $C = A \cup B$, $C = A \cap B$, $C = A + B$ із базою $[C] = [A] \cup [B]$ що для довільного елемента $a \in [C]$, виконується відповідно рівність

$$k_C(a) = max\,(k_A(a), k_B(a))\,, \quad k_C(a) = min\,(k_A(a), k_B(a))\,,$$

$$k_C(a) = k_A(a) + k_B(a).$$

Відзначимо, що операція суми мультимножин не має аналогу серед операцій над множинами.

Різницею мультимножин A і B називають таку мультимножину $C = A - B$, що для довільного елемента a множини $[A] \cup [B]$ виконується рівність $k_C(a) = \max(k_A(a) - k_B(a), 0)$.

Легко довести, що для довільних мультимножин A_1 і A_2 виконується рівність

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 + A_2) - A_1 \cap A_2.$$

Узагальнюючи цю рівність, за допомогою індукції можна довести

Твердження 1.2.1. *Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — довільні мультимножини. Тоді справедлива рівність*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} A_{i_1} - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} (A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n} \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}.$$

Це твердження є певним аналогом відомого принципу включення-виключення (див. [73], стор.103).

Мультимножини іноді зручно зображувати діаграмами.

Щоб побудувати діаграму $\mathrm{Diagr}(A)$ мультимножини A із первинною специфікацією (1.2.2), необхідно в першому стовпчику діаграми розмістити k_1 одиничних квадратів, у другому — k_2 одиничних квадратів, ..., в n-тому — k_n одиничних квадратів. Якщо кратності елементів у мультимножині (1.2.2) задовольняють нерівності (1.2.3), то її діаграму позначатимемо через $\mathrm{diagr}(A)$ і називатимемо *діаграмою Ферре* мультимножини A.

На рис. 1.1. зображено відповідно діаграми:[7]

$$\mathrm{Diagr}\{a_1^1, a_2^3, a_3^4, a_4^2, a_5^4, a_6^1\}, \ \mathrm{diagr}\{a_1^4, a_2^4, a_3^3, a_4^2, a_5^1, a_6^1\}.$$

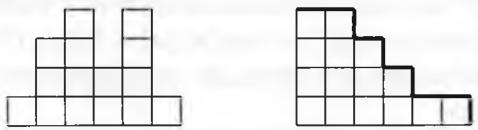


Рис. 1.1.

Траєкторії, які на рис. 1.1. виділено жирною лінією, назвемо *верхніми східцями діаграми Ферре.*

Зауваження 1.2.1. Ми зображуємо діаграми без системи координат, але нижче вважаємо, що вона зображена в першому квадранті, причому так, що перший рядок одиничних квадратів лежить на осі абсцис, а перший стовпчик одиничних квадратів прилягає до осі ординат справа.

[7]Тут ми користуємося французьким способом зображення діаграм, яким здебільшого користуються комбінаторщики. В теорії зображень груп користуються англійським способом зображень діаграм, який симетричний до французького відносно осі абсцис. При встановленні асимптотичних оцінок, пов'язаних з діаграмами Юнга, користуються спеціальним російським (А. Вершик) зображенням діаграм.

Похилою діаграмою $diagr(A, B)$ мультимножин A і B $A \subseteq B$ називають діаграму $diagr(B)$, без тих одиничних квадратів, що належать до діаграми $diagr(A)$.

На рис. 1.2. зображено похилу діаграму $diagr(A, B)$, де

$$A = \{a_1^6, a_2^4, a_3^3, a_4^3\}, \ B = \{a_1^2, a_2^1, a_3^0, a_4^0\}.$$

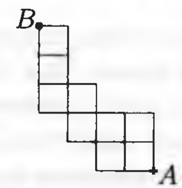


Рис. 1.2.

Під відстанню між двома точками діаграми Ферре чи похилої діаграми будемо вважати найкоротшу відстань між цими точками. За одиницю відстані візьмемо сторону одиничного квадрата, з яких складається діаграма. Проте відстань між двома точками на діаграмах залежить від дозволених напрямків руху. Ми обмежуємося розглядом лише двох видів траєкторій: траєкторій $mot\,(\leftarrow, \uparrow)$ — з дозволеними рухами вліво та вверх і траєкторій $mot\,(\downarrow, \leftarrow, \uparrow)$ — з дозволеними рухами вниз, вліво та вверх.

Твердження 1.2.2. ([68]) *Число всіх впорядкувань мультимножини A з первинною специфікацією $[a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}]$ дорівнює*

$$C(a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Доведення. Позначимо число всіх впорядкувань мультимножини A через

$$C(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Перенумеруємо елементи цієї мультимножини, приєднуючи другий індекс так, щоб для елемента a_{ij} перший індекс вказував його номер у базовій множині $[A]$ мультимножини A, а другий — його номер серед k_i однакових елементів a_i. Тоді всі елементи з A стають різними, і позаяк вона містить $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ елементів, то після такого перенумерування число її впорядкувань дорівнює

$$(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!.$$

Зафіксуємо індекс i і вилучимо в елементах a_{ij} перенумерованої мультимножини другий індекс. Тоді серед цих $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!$ впорядкувань виявиться по $k_i!$ однакових, які можна "склеїти" в одне. Оскільки для різних i вилучення другого індекса можна робити незалежно, то після вилучення усіх других індексів отримуємо по

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!$$

однакових впорядкувань початкової мультимножини A. □

Твердження 1.2.3. *Потужність множини всіх n-підмультимножин мультимножини $A = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n\}$ дорівнює*

$$\binom{n+m-1}{n} = \frac{m^{n\{1\}}}{n!}.$$

Доведення. Скористаємося комбінаторним правилом рівності. З цією метою встановимо бієкцію між множиною всіх n-підмультимножин мультимножини $A = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n\}$ та множиною $(0,1)$-кортежів довжини $n + m - 1$, до складу кожного з яких входить n одиниць:

$$\{a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_m^{\alpha_m}\} \longleftrightarrow (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_2}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_m}), \tag{1.2.4}$$

де $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$.

Позаяк число таких кортежів, очевидно, дорівнює $\binom{n+m-1}{n}$, то твердження справедливе. □

Зауваження 1.2.2. Бієкція (1.2.4), по суті, є бієкцією між множиною цілих невід'ємних розв'язків рівняння $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = n$ та множиною $(0,1)$-кортежів довжини $n + m - 1$, до складу кожного з яких входить n одиниць, тому число цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння також дорівнює $\binom{n+m-1}{n} = \frac{m^{n\{1\}}}{n!}$.

Вправи

1.2.1. Для мультимножин:

$$A = \{a_1^1, a_2^3, \ldots, a_k^{2k-1}, \ldots, a_{2n}^{4n-1}\} \quad \text{і} \quad B = \{a_1^{2n-1}, a_2^{2n-1}, \ldots, a_n^{2n-1}\}$$

знайдіть: 1) бази; 2) первинні специфікації; 3) спряжені мультимножини.

1.2.2. Для мультимножин A і B із вправи 1 знайдіть: 1) об'єднання $A \cup B$; 2) перетин $A \cap B$; 3) суму $A + B$; 4) різницю $B - A$.

1.2.3. Для мультимножин A і B із вправи 1 побудуйте при $n = 4$: 1) їх діаграми; 2) їх спряжені діаграми.

1.2.4. Множину всіх підмультимножин мультимножини

$$A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_n^{k_n}\}$$

називають *мультибулеаном* A і позначають 2^A. Знайдіть $\left|2^A\right|$.

1.2.5. Нехай задана мультимножина $A = \{a^{k_1}, a^{k_2}, \ldots, a^{k_r}\}$. Побудуйте бієкцію між елементами множини 2^A та всіма можливими траєкторіями руху від крайньої південно-східної точки діаграми $diagr(A)$ до крайньої північно-західної точки цієї діаграми з дозволеними рухами $mot(\downarrow, \leftarrow, \uparrow)$.

1.2.6. Нехай $A = \{a_1^{r_1}, a_2^{r_2}, \ldots, a_n^{r_n}\}$, $B = \{a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \ldots, a_n^{s_n}\}$, причому виконується включення $A \subseteq B$. Знайдіть число всіх мультимножин C, які задовольняють включення

$$A \subseteq C \subseteq B.$$

1.2.7. Чи можна узагальнити задачу, сформульовану у вправі 5 на випадок траєкторій похилих діаграм $diagr(A, B)$ та мультимножин C, які задовольняють включення

$$A \subseteq C \subseteq B?$$

1.3 Розбиття

> *"Задачі Твої, славний муже, про розбиття чисел надзвичайно сподобалися мені через їх елегантність та корисність для пізнання властивостей чисел, і я тим більше дуже хотів би бачити повний виклад цього питання, бо й сам я також уже натрапив на таку ж задачу, але не міг знайти достатньо зручного і легкого розв'язання, якого я бажав."*
>
> — *Ойлер Л. (Із листа Ойлера Філіпу Ноде, вересень 1740 р. [82], стор. 191)*

Не існує такої області знань, де не виникала б необхідність класифікувати об'єкти за певними ознаками. Така класифікація зазвичай приводить до розбиття певної множини на класи еквівалентності. Саме тому вивченню різноманітних розбиттів присвячено багато часу та зусиль різних математиків.

У цьому підрозділі ми розглянемо деякі аспекти теорії розбиттів натуральних чисел на невід'ємні цілі доданки. Цей напрям загальної теорії розбиттів здавна стимулювався великою кількістю задач, перш за все комбінаторного і теоретико-числового характеру, а тому добре розвинений.

Означення 1.3.1. *Нехай Ω — множина, на якій визначено асоціативну і комутативну операцію $\oplus$ (тобто Ω з операцією $\oplus$ є комутативною напівгрупою). m-**розбиттям** елемента $\omega \in \Omega$ назвемо мультимножину*

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}, \;\; \omega_i \in \Omega,$$

елементи якої задовольняють рівність

$$\omega_1 \oplus \omega_2 \oplus \ldots \oplus \omega_m = \omega. \tag{1.3.1}$$

*Якщо ж порядок елементів $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ у розкладі (1.3.1) є істотним, то таке m-розбиття назвемо **впорядкованим m-розбиттям** елемента ω, або m-**композицією** цього елемента і позначимо*

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m).$$

Позначимо множину всіх впорядкованих та невпорядкованих m-розбиттів елемента ω відповідно через $C_m(\omega, \oplus)$ и $P_m(\omega, \oplus)$ і покладемо $C(\omega, \oplus) = \bigcup_{m \geq 1} C_m(\omega, \oplus)$, $P(\omega, \oplus) = \bigcup_{m \geq 1} P_m(\omega, \oplus)$

Якщо $\Omega = \mathbb{N}$ і $\oplus$ — звичайне додавання, то $C_m(n, +)$ і $P_m(n, +)$ — відповідно множини всіх впорядкованих та невпорядкованих розбиттів натурального числа n на m натуральних доданків, а множини $C(n, +)$ і $P(n, +)$ — множини всіх впорядкованих і невпорядкованих розбиттів цього ж числа на довільну кількість натуральних доданків.

Розбиття натурального числа у невпорядковану суму натуральних доданків можна розглядати як мультимножину цих доданків. Це дозволяє, зокрема, визначити *розбиття, спряжене до даного* (див. означення 1.2.3).

Приклад 1.3.1. Випишемо множину всіх впорядкованих розбиттів числа 4 на натуральні доданки:

$$C(4, +) = \{(4), (3, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)\}.$$

$$C_2(4, +) = \{(3, 1), (1, 3), (2, 2)\}.$$

Приклад 1.3.2.

$$P(4, +) = \{\{4\}, \{3, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}\}.$$

$$P_4(9, +) =$$

$$= \{\{6, 1, 1, 1\}, \{5, 2, 1, 1\}, \{4, 3, 1, 1\}, \{4, 2, 2, 1\}, \{3, 3, 2, 1\}, \{3, 2, 2, 2\}\}.$$

Зауваження 1.3.1. В невпорядкованих розбиттях натурального числа n на m натуральних доданків його доданки впорядковують, як правило, в незростаючому порядку.

Таким чином, множина $C_m(n,+)$ є множиною всіх натуральних розв'язків рівняння

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n, \ m \leqslant n; \tag{1.3.2}$$

множина $C(n,+)$ — об'єднанням множин всіх натуральних розв'язків рівнянь

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n, \ m = 1, \ldots, n;$$

множина $P_m(n,+)$ — множиною натуральних розв'язків системи

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n, \\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m, \end{cases} \tag{1.3.3}$$

і, нарешті, множина $P(n,+)$, з врахуванням нульових компонент розбиття, є множиною всіх цілих невід'ємних розв'язків системи

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n, \\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

Якщо невпорядковане розбиття натурального числа n складається із λ_1 одиниць, λ_2 двійок и т. д. λ_n доданків, що дорівнюють n, тобто первинна специфікація розбиття має вигляд $[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}]$, то показники цієї специфікації задовольняють рівняння

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n \tag{1.3.5}$$

і число розв'язків системи (1.3.4) дорівнює числу розв'язків рівняння (1.3.5).

Якщо ж невпорядковане розбиття містить m доданків, то показники цієї специфікації задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Тепер стає очевидним наступне

Твердження 1.3.1. *Існує природна бієкція між множиною натуральних розв'язків системи (1.3.3) та множиною цілих невід'ємних розв'язків системи (1.3.6).*

Зробимо наступні позначення:

$$\begin{aligned} |C_m(n,+)| = c(n,m), \ |C(n,+)| = c(n), \\ |P_m(n,+)| = p(n,m), \ |P(n,+)| = p(n), \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

причому ми вважаємо, що

$$c(n,m) = p(n,m) = 0$$

для $n < m$.

Очевидно, що

$$c(n) = \sum_{m=1}^{n} c(n,m), \ p(n) = \sum_{m=1}^{n} p(n,m). \tag{1.3.8}$$

Твердження 1.3.2. *Справедлива рівність*

$$c(n,m) = \sum_{i=1}^{n-m+1} c(n-i, m-1).$$

Доведення. Нехай перша компонента впорядкованого розбиття натурального числа n на m натуральних компонент дорівнює i. Тоді решту $(m-1)$ компонент цього розбиття можна отримати, розбиваючи натуральне число $n-i$. При цьому нижньою межею для i є 1. Якщо перша компонента m–розбиття числа n дорівнює $n-m+1$, то решта $m-1$ компонент цього впорядкованого розбиття будуть дорівнювати 1. Отже, верхньою межею для i є число $n-m+1$. □

Твердження 1.3.3. *Справедлива рівність*

$$c(n,m) = \binom{n-1}{m-1}. \tag{1.3.9}$$

Доведення. Позаяк $m \leqslant n$, то віднімемо від обох частин рівняння (1.3.2) m. Отримаємо рівняння

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_m - 1) = n - m.$$

Отже, встановлено бієкцію між натуральними розв'язками рівняння (1.3.2) та цілими невід'ємними розв'язками рівняння

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = n - m,$$

де $\beta_i = \alpha_i - 1,\ i = 1, \ldots, m$. Але, згідно із зауваженням 1.2.2 (див. стор.19), число розв'язків останнього рівняння дорівнює $\binom{n-1}{m-1}$. □

Твердження 1.3.4. *Справедлива рівність*

$$c(n) = 2^{n-1}. \tag{1.3.10}$$

Доведення. Справедливість цього твердження беспосередньо випливає із рівності (1.3.9) та першої рівності (1.3.8):

$$c(n) = \sum_{m=1}^{n} c(n,m) = \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} = 2^{n-1}.$$

□

Наступне твердження дає зручний спосіб обчислення чисел $p(n,m)$.

Твердження 1.3.5. $p(n,1) = 1$ *і для довільного* $1 < m \leqslant n$ *справедливе рекурентне співвідношення*

$$p(n,m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m),\ 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{1.3.11}$$

Доведення. Перша частина твердження очевидна. Для доведення другої розіб'ємо множину $P_m(n,+)$ розбивається на дві частини:

множину $P_m^{=1}(n,+)$ тих розбиттів, остання компонента яких дорівнює 1; і множину тих розбиттів, $P_m^{>1}(n,+)$ остання компонента яких більша 1. Довільному розбиттю

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, 1)$$

із множини $P_m^{=1}(n,+)$ поставимо у відповідність розбиття

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$$

із множини $P_{m-1}(n-1,+)$, а довільному розбиттю

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m)$$

із множини $P_m^{>1}(n,+)$ — розбиття $(\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_{m-1} - 1, \alpha_m - 1)$ із множини $P_m(n-m,+)$. Очевидно, що ці відповідності є взаємно однозначними. Це й доводить рівність (1.3.11). □

Побудуємо фрагмент таблиці значень $p(n,m)$.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$p(n)$
1	1										1
2	1	1									2
3	1	1	1								3
4	1	2	1	1							5
5	1	2	2	1	1						7
6	1	3	3	2	1	1					11
7	1	3	4	3	2	1	1				15
8	1	4	5	5	3	2	1	1			22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1		30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	42

Згідно з другою рівністю (1.3.8) сума елементів n-того рядка таблиці дорівнює $p(n)$.

Для обчислення чисел $p(n)$ зручно користуватися рекурентним співвідношенням

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) + \ldots +$$
$$+ (-1)^k p\left(n - \frac{1}{2}k(3k-1)\right) + (-1)^k p\left(n - \frac{1}{2}k(3k+1)\right) + \ldots = 0, \tag{1.3.12}$$

яке знайшов ще Ойлер.

Зауважимо, що $p_m(n)$ і $p(n)$ відповідно дорівнюють числу цілих невід'ємних розв'язків системи рівнянь (1.3.6) та рівняння (1.3.5).

Означення 1.3.2. *Нехай* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in C_m(n, +)$. *Число* $(n-m)$ *назвемо* ***декрементом*** *впорядкованого розбиття* α. *Розбиття з парним декрементом назвемо* ***парними***, *а з непарним —* ***непарними***. *Кожному впорядкованому розбиттю* α *припишемо також* ***знак*** $(-1)^{n-m}$.

Приклад 1.3.3. У множині

$$C(4,+) = \{(4), (3,1), (1,3), (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)\}$$

розбиття

$$\{(3,1), (1,3), (2,2), (1,1,1,1)\}$$

будуть парними, а розбиття

$$\{(4), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)\}$$

— непарними.

Уважний читач помітив, що число парних впорядкованих розбиттів множини $C(4,+)$ дорівнює числу її непарних розбиттів.

Справедливе наступне загальне

Твердження 1.3.6. *Число парних розбиттів множини* $C(n,+)$ *дорівнює числу непарних розбиттів цієї множини.*

Доведення. Із відомої тотожності $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i} = 0$ і рівності (1.3.9) випливає, що

$$(-1)^{n-m}\sum_{m=1}^{n} c(n,m) = (-1)^{n-m}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}$$
$$= (-1)^{(n-1)-(m-1)}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1} = (-1)^{(n-1)-(i)}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} =$$
$$= (-1)^{i}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 0.$$

□

Нехай задано деяке невпорядковане розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ натурального числа n на натуральні компоненти. Розбиття $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ числа m на цілі невід'ємні компоненти, називають *підрозбиттям розбиття* α (позначається $\beta \preceq \alpha$), якщо виконуються покомпонентні нерівності $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Частково впорядковану множину всіх підрозбиттів розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ позначимо через $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Основними комбінаторними задачами, пов'язаними із частково впорядкованими множинами є наступні три задачі: 1) визначення її потужності; 2) встановлення числа всіх *максимальних ланцюгів* між нулем та одиницею цієї множини; 3) визначення *ширини* цієї множини (див.[55], стор. 122-132).

Якщо розбиттю α поставити у відповідність деяку діаграму Ферре, а кожному підрозбиттю деяку її піддіаграму, то при допомозі верхніх східців всіх піддіаграм діаграми α можна встановити бієкцію між елементами частково впорядкованої множини

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

та всіма можливими найкоротшими траєкторіями, з дозволеними рухами $mot\,(\leftarrow, \uparrow)$ між крайньою південно-східною та крайньою північно-західною точками діаграми α. Таким чином, задача про встановлення потужності множини $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ еквівалентна задачі про відшукання всіх, описаних вище, траєкторій на відповідній діаграмі Ферре.

Приклад 1.3.4. Встановимо бієкцію між елементами множини всіх підрозбиттів розбиття $(3,1,1)$ та найкоротшими траєкторіями між крайньою південно-східною та крайньою північно-західною точками діаграми Ферре $\mathrm{diagr}(3,1,1)$:

$$P(3,1,1) = \{(3,1,1),(3,1,0),(3,0,0),(2,1,1),(2,1,0),(2,0,0),(1,1,1),$$

$$(1,1,0),(1,0,0),(0,0,0)\}$$

тому

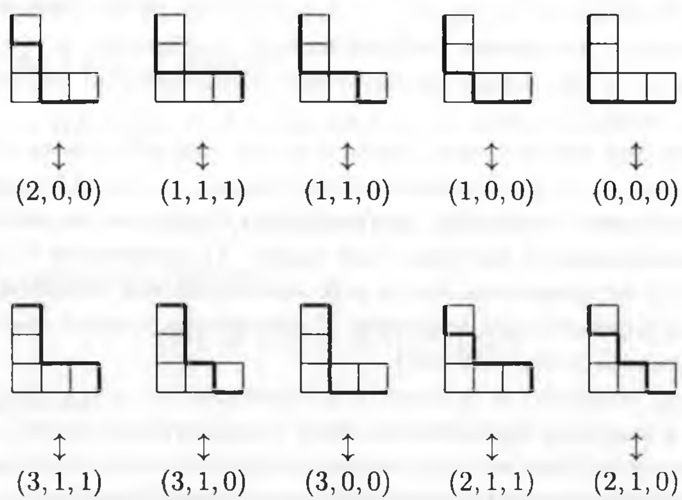


Рис. 1.3.

Вправи

1.3.1. Побудуйте множини $C_3(7,+)$, $P(6,+)$.

1.3.2. Доведіть, що число розбиттів натурального числа n на не більше ніж m доданків дорівнює числу розбиттів цього числа в суму доданків, які не перевищують m.

1.3.3. Знайдіть число різних часткових похідних n-го порядку нескінченно диференційовної функції m змінних.

1.4 Множини $\Xi(n)$

> *Так, я справді виявив кішку в грубці, але до того часу я чув нявкання вже півгодини, однак неправильно його тлумачив.*[8]

Означення 1.4.1. [28]. *Множиною $\Xi(n)$ назвемо множину впорядкованих n–вибірок*

$$\xi = (\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$$

із мультимножини з первинною специфікацією $\{1^1, 2^2, \ldots, n^n\}$, елементи яких задовольняють умови:

1) натуральне число $\xi(j)$ задовольняє нерівність

$$j \le \xi(j) \le n, \ \ j = 1, 2, \cdots, n;$$

2) для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$ виконуються рівності

$$\xi(j) = \xi(j+1) = \ldots = \xi(\xi(j)).$$

[8]Розповідають ([54], стор. 52), що на святкуванні ювілею Колмогорова на його дачі в Комарівці І.М. Гельфанд врятував кішку, закриту в грубці, в якій почали палити.

Зауважимо, що при $j = n$ нерівність із першої умови набуває вигляду $n \le \xi(n) \le n$, тому $\xi(n) = n$.

Приклад 1.4.1.

$$\Xi(3) = \{(1,2,3), (2,2,3), (1,3,3), (3,3,3)\}.$$

Зауваження 1.4.1. Множини $\Xi(n)$ вперше з'явилися при встановленні потужності частково впорядкованої множини

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

(див. стор. 27.) та підрахунку числа найкоротших траєкторій на графах Ферре [32], що з'єднують крайню південно-східну точку із крайньою північно-західною точкою цього графа. При цьому число найкоротших траєкторій на діаграмі Ферре мультимножини $A = \{a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \dots, a_r^{\alpha_r}\}$ (див. також теорему 3.11.1 на стор. 433, яка узагальнює цей результат) спочатку виражалося формулою:

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) =$$

$$= \sum_{\{s_1^{k_1}, \dots, s_l^{k_l}\} \in \Xi(r)} (-1)^{r-(\lambda_1+\dots+\lambda_p)} \frac{\Pi_{j=1}^{l} \Pi_{i=0}^{k_j-1} (\alpha_{s_j} - k_j + i + 2)}{\Pi_{i=1}^{l} k_i!},$$

де $k_1, k_2, \dots, k_l$ і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ — відповідно показники первинної та вторинної специфікації (див. стор. 13) мультимножини $\{s_1^{k_1}, \dots, s_l^{k_l}\}$. Проте знадобилося чимало часу, щоб тлумачити множину $\Xi(n)$, як множину за якою ведеться підсумовування доданків парадетермінанта (див. теорему 2.3.2 на стор. 81) деякої трикутної матриці.

Зауваження 1.4.2. (Левитська А.О.) Можна виписати явний вигляд множини $\Xi(n)$:

$$\Xi(n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n-1} \{\{i_1^{i_1}, i_2^{i_2-i_1}, \dots, i_k^{i_k-i_{k-1}}, n^{n-k}\}\}.$$

Твердження 1.4.1. [28]. *Між елементами множини $\Xi(n)$ і елементами множини $C(n,+)$ впорядкованих розбиттів натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення розіб'ємо на кілька кроків.

1. Якщо елемент $\xi \in \Xi$ має первинну специфікацію

$$[1^{\alpha(1)}, 2^{\alpha(2)}, \dots, n^{\alpha(n)}],$$

то виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(i) = n.$$

Тому показники $\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n)$ первинної специфікації елемента ξ утворюють деяке впорядковане розбиття числа n. Це дає відображення

$$\varphi : \xi \mapsto (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n))$$

із множини $\Xi(n)$ в множину $C(n,+)$.

2. Ін'єктивність відображення φ. Нехай

$$\xi_1 = (\xi_1(1), \xi_1(2), \dots, \xi_1(n)), \quad \xi_2 = (\xi_2(1), \xi_2(2), \dots, \xi_2(n))$$

— два різні елементи множини $\Xi(n)$ з первинними специфікаціями

$$[1^{\alpha_1(1)}, 2^{\alpha_1(2)}, \dots, n^{\alpha_1(n)}], \quad [1^{\alpha_2(1)}, 2^{\alpha_2(2)}, \dots, n^{\alpha_2(n)}].$$

Нехай i — найменший індекс, для якого виконується нерівність $\xi_1(i) \ne \xi_2(i)$. Можна вважати, що $\xi_1(i) < \xi_2(i)$. Тоді з умови 2) означення 1.4.1 випливає нерівність $\alpha_1(\xi_2(i)) < \alpha_2(\xi_2(i))$, тобто елементам ξ_1 і ξ_2 відповідають різні впорядковані розбиття множини $C(n,+)$.

3. Обернене відображення з $\Xi(n)$ в $C(n,+)$ побудуємо згідно з наступним алгоритмом. Нехай $p = (p(1), p(2), \dots, p(s)) \in C(n,+)$.

п.1. *поч*

п.2. $i := 1$; $p := p(i)$; $j := 1$

п.3. $\xi(j) = \ldots = \xi(p) = p$
п.4. $j := p + 1;\ \ i := i + 1$
п.5. *якщо* $i \leq s$, *то* $p := p + p(i)$; *перейти до п.3.*
п.6. *кін*

Позаяк $1 \leq p(i)$, то після виконання п.4 і п.5 цього алгоритму буде виконуватися нерівність $j \leq p$, яка разом із рівностями п.3. забезпечить виконання обох умов означення 1.4.1. □

Нехай $\xi \in \Xi(n)$ і r — число різних компонент елемента ξ. Число $n - r$ назвемо *декрементом* елемента ξ, а число $\varepsilon(\xi) = (-1)^{n-r}$ — його *знаком.*

Зауваження 1.4.3. Бієкція φ із доведення твердження 1.4.1 зберігає знаки, оскільки число різних компонент елемента ξ дорівнює числу ненульових компонент розбиття $\varphi(\xi)$.

Із тверджень 1.3.4 та 1.4.1 одразу випливає

Наслідок 1.4.0.1. $|\Xi(n)| = 2^{n-1}$.

Множини $\Xi(n)$ можна будувати за допомогою наступного рекурсивного алгоритму.

Твердження 1.4.2. [28].
(i) $\Xi(1) = \{(1)\}$.
(ii) Якщо множина $\Xi(k)$ *вже побудована, то елементи множини* $\Xi(k+1)$ *можна отримати, будуючи на основі кожного елемента* $\xi = (\xi(1), \ldots, \xi(k))$ *множини* $\Xi(k)$ *два елементи множини* $\Xi(k+1)$. *Перший — дописуванням на* $(k+1)$*–ше місце числа* $k+1$, *а другий — заміною всіх компонент, що дорівнювали* k, *на* $k+1$ *та дописуванням на* $(k+1)$*–ше місце компоненти* $k+1$.

Доведення. Із зауваження після означення 1.4.1, $(k+1)$–ше місце в кожній впорядкованій мультимножині множини $\Xi(k+1)$ займатиме число $k+1$, тому, дописуючи до елементів множини $\Xi(k)$ на $(k+1)$–ше місце число $k+1$, ми отримаємо 2^{k-1} різних елементів множини $\Xi(k+1)$. Множину цих елементів позначимо через $\Xi(k; k+1)$.

Заміна в кожній мультимножині множини $\Xi(k)$ числа k на число $k+1$ разом з дописуванням на $(k+1)$–ше місце числа $k+1$ також не порушує умов означення множини $\Xi(n)$, бо всі елементи $\xi(i)$, менші за k, задовольняють ці умови, а число $k+1$, з'явившись на j–тому місці, заповнює також всі наступні місця по $(k+1)$–ше включно. Ця процедура дає ще 2^{k-1} різних елементів множини $\Xi(k+1)$. Позначимо множину цих елементів через $\Xi(k+1; k+1)$.

Кратність входження числа $k+1$ до кожного елемента множини $\Xi(k; k+1)$ дорівнює 1, а кратність входження цього ж числа до кожного елемента множини $\Xi(k+1; k+1)$ більша за 1. Тому всі елементи цих двох множин різні і належать $\Xi(k+1)$–множині.

Позаяк $\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1) \subseteq \Xi(k+1)$ і $|\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1)| = 2^k$, то з наслідку 1.4.0.1 випливає рівність $\Xi(k; k+1) \cup \Xi(k+1; k+1) = \Xi(k+1)$. □

Приклад 1.4.2. Наступна таблиця

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$		*Перв. спец.*		*Пок. перв. спец.*
$(1,2,3,4)$	$\leftrightarrow$	$[1^1, 2^1, 3^1, 4^1]$	$\leftrightarrow$	$\{1,1,1,1\}$
$(2,2,3,4)$	$\leftrightarrow$	$[2^2, 3^1, 4^1]$	$\leftrightarrow$	$\{2,1,1\}$
$(1,3,3,4)$	$\leftrightarrow$	$[1^1, 3^2, 4^1]$	$\leftrightarrow$	$\{1,2,1\}$
$(3,3,3,4)$	$\leftrightarrow$	$[3^3, 4^1]$	$\leftrightarrow$	$\{3,1\}$
$(1,2,4,4)$	$\leftrightarrow$	$[1^1, 2^1, 4^2]$	$\leftrightarrow$	$\{1,1,2\}$
$(2,2,4,4)$	$\leftrightarrow$	$[2^2, 4^2]$	$\leftrightarrow$	$\{2,2\}$
$(1,4,4,4)$	$\leftrightarrow$	$[1^1, 4^3]$	$\leftrightarrow$	$\{1,3\}$
$(4,4,4,4)$	$\leftrightarrow$	$[4^4]$	$\leftrightarrow$	$\{4\}$

містить всі 8 елементів множини $\Xi(4)$, відповідні їм первинні специфікації та показники цих специфікацій.

Означення 1.4.2. *Елементи* $\xi_1, \xi_2 \in \Xi(n)$ *назвемо* ***дружніми***, *якщо їх бази задовольняють нерівність*

$$[\xi_1] \cap [\xi_2] \neq \{n\}.$$

У протилежному випадку ці елементи називатимемо ***недружніми***.

Множину всіх елементів множини $\Xi(n)$, недружніх з елементом α цієї множини, позначимо через $\Xi_\alpha(n)$.

Твердження 1.4.3. [28]. *Існує рівно 3^{n-1} впорядкованих пар недружніх елементів множини $\Xi(n)$, тобто*

$$\sum_{\alpha\in\Xi(n)} |\Xi_\alpha(n)| = |\{(\alpha,\beta)\in\Xi(n)\times\Xi(n) : [\alpha]\cap[\beta]=\{n\}\}| = 3^{n-1}.$$

Доведення. Позначимо $x_n = \sum_{\alpha\in\Xi(n)} |\Xi_\alpha(n)|$. Використовуючи позначення із доведення твердження 1.4.2 (див. стор. 32), можемо записати:

$$\Xi(n)\times\Xi(n) = (\Xi(n-1,n)\times\Xi(n-1,n))\cup(\Xi(n-1,n)\times\Xi(n,n))\cup$$
$$\cup(\Xi(n,n)\times\Xi(n-1,n))\cup(\Xi(n,n)\times\Xi(n,n))$$

Порахуємо число пар недружніх елементів у кожній з 4 компонент правої частини

1) На $(n-1)$–у місці в кожному елементі множини $\Xi(n-1,n)$ стоїть число $(n-1)$. Тому довільна пара елементів цієї множини є недружньою.

2) Для кожного елемента $\alpha\in\Xi(n)$ існує єдиний елемент $\alpha'\in\Xi(n-1)$, на основі якого α будується за допомогою алгоритму з твердження 1.4.2.

Нехай $\alpha\in\Xi(n-1,n)$ і $\beta\in\Xi(n,n)$. Якщо елементи множини $\Xi(n)$, що є впорядкованими наборами натуральних чисел, розглядати як деякі мультимножини, то можна розглядати їх перетин. Тоді якщо $\alpha'\cap\beta'=\{(n-1)^p\}$, $1\le p$, то $\alpha\cap\beta=\{n\}$, тобто елементи α і β не дружні. Якщо ж $\alpha'\cap\beta'=\{\dots,\alpha(i),\dots,(n-1)^p\}$, то $\alpha\cap\beta=\{\dots,\alpha(i),\dots,n\}$, і елементи α і β дружні. Таким чином, кількість пар недружніх елементів, які належать множині $\Xi(n-1,n)\times\Xi(n,n)$, дорівнює

$$\sum_{\alpha\in\Xi(n-1)} |\Xi_\alpha(n-1)| = x_{n-1}.$$

3) Випадок $(\alpha,\beta)\in\Xi(n,n)\times\Xi(n-1,n)$ аналогічний попередньому.

4) Четвертий випадок також аналогічний до другого випадку. Пара елементів α і β із декартового добутку $\Xi(n,n)\times\Xi(n,n)$ не дружна лише тоді, коли $\alpha'\cap\beta'=\{(n-1)^p\}$, $1\le p$, тобто четвертий випадок дає знову x_{n-1} недружніх елементів.

Таким чином, маємо рекурентне співвідношення $x_n=3x_{n-1}$ і початкову умову $x_1=1$, з яких і випливає справедливість твердження. □

Приклад 1.4.3. В наступній таблиці наведено всі попарні перетини елементів множини $\Xi(4)$.

$\alpha\cap\beta$	$(1,2,3)$	$(2,2,3)$	$(1,3,3)$	$(3,3,3)$
$(1,2,3)$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$
$(2,2,3)$	$\{2,3\}$	$\{2^2,3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
$(1,3,3)$	$\{1,3\}$	$\{3\}$	$\{1,3^2\}$	$\{3^2\}$
$(3,3,3)$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3^2\}$	$\{3^3\}$

Вправи

1.4.1. Побудуйте множину $\Xi(5)$.

1.4.2. Знайдіть число невпорядкованих пар недружніх елементів множини $\Xi(n)$.

1.4.3. Знайдіть потужність множини

$$\{\alpha\in\Xi(n) : |[\alpha]|=k\}.$$

1.5 Рекурентні рівняння

"... а глист цей від глистів страждав, що від глистів й самі страждали."[9]

— *Іоахім Рінгельнац*

Колись круп'яні палички продавалися в картонних коробках, на яких було зображено двох ведмежат, що тримали коробку з круп'яними паличками. Однак, на коробці, яку тримали ведмежата був лише надпис "Круп'яні палички але були відсутні два ведмежата, що тримали коробку з круп'яними паличками... .

Якщо в рівнянні

$$x = a + \frac{b}{x},$$

ліву його частину інтерпретувати як коробку з круп'яними паличками, а праву — як малюнок на цій коробці, то можемо записати рівність

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots}}}.$$

В обидвох прикладах присутня рекурсія[10].

Таким чином, можна жартівливо сказати, що рекурсія — це той вид транспорту, на якому математики подорожують в нескінченність.

У рекурентному співвідношенні

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k})$$

кожен наступний член послідовності $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ виражається через k попередніх членів цієї послідовності за одним і тим же правилом.

[9]Цитата запозичена з [6], стор. 679.

[10]Слово "рекурсія"походить від французького слова récurrente — повертатися назад.

Якщо в цьому рекурентному співвідношенні функція f лінійна за всіма своїми аргументами, то рекурентне співвідношення називають лінійним.

Для лінійних рекурентних співвідношень доведено ряд загальних теорем, зміст і доведення яких, з відомих причин, є аналогами відповідних теорем з теорії лінійних однорідних та неоднорідних систем рівнянь із сталими коефіцієнтами та теорії однорідних та неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Ці теореми стали класичними і широко використовуються. Проте, навіть для лінійних однорідних рекурентних рівнянь із змінними коефіцієнтами, загальні методи їх розв'язання та дослідження досі відсутні. Ще гірше вивчені нелінійні рекурсії. Тут взагалі відсутні загальні підходи до їх вивчення.

Зупинимося на лінійних рекурентних рівняннях із сталими коефіцієнтами, які добре вивчені (див., наприклад, [2], [59]).

1.5.1 Лінійні однорідні рекурентні рівняння

Означення 1.5.1. *Рівняння виду*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k} \tag{1.5.1}$$

називають ***лінійним однорідним рекурентним рівнянням*** *k-го порядку зі сталими коефіцієнтами.*

Під розв'язком рівняння (1.5.1) розуміють числову послідовність

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty},$$

всі члени якої його задовольняють. Відразу зауважимо, що перші k членів числової послідовності, яка слугуватиме розв'язком цього рівняння, можна вибрати довільно. Тоді решта членів послідовності може бути однозначно знайдена при допомозі рекурсії (1.5.1). Таким чином, існує безліч розв'язків рівняння (1.5.1) і природно виникає задача описати всі такі розв'язки.

Нехай

$$u_n = r^{n-1}, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

тоді, підставивши ці члени послідовності у рівняння (1.5.1), отримаємо рівняння

$$r^{n-1} = a_1 r^{n-2} + a_2 r^{n-3} + \ldots + a_k r^{n-k-1},$$

або рівняння

$$\varphi(r) = r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \ldots - a_{k-1} r - a_k = 0, \qquad (1.5.2)$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (1.5.1).

Отже, якщо $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — попарно різні корені характеристичного рівняння (1.5.2), то

$$r_1^{n-1}, r_2^{n-1}, \ldots, r_k^{n-1} \qquad (1.5.3)$$

— різні розв'язки лінійного рекурентного рівняння (1.5.1).

Лінійна комбінація

$$u_n = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_k r_k^{n-1} \qquad (1.5.4)$$

системи розв'язків (1.5.3) задовольняє рекурентне рівняння (1.5.1), бо після її підстановки у це рівняння отримуємо очевидну тотожність:

$$C_1\varphi(r_1) + C_2\varphi(r_2) + \ldots + C_k\varphi(r_k) \equiv 0.$$

Позаяк визначник системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \ldots + C_k = u_1, \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 + \ldots + C_k r_k = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 r_1^{k-1} + C_2 r_2^{k-1} + \ldots + C_k r_k^{k-1} = u_k, \end{cases} \qquad (1.5.5)$$

є детермінантом Вандермонда, який дорівнює

$$\prod_{i>j}(r_i - r_j)$$

і відмінний від нуля при попарно різних коренях характеристичного рівняння, то константи $C_1, C_2, \ldots, C_k$ завжди можна знайти із цієї системи рівнянь.

Таким чином, якщо корені характеристичного рівняння попарно різні, то загальний розв'язок рівняння (1.5.1) має вигляд (1.5.4).

Розглянемо випадок кратних коренів характеристичного рівняння. Нехай характеристичне рівняння (1.5.2) має p різних коренів $r_1, r_2, \ldots, r_p$ із відповідними кратностями $s_1, s_2, \ldots, s_p$, для яких виконується рівність

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_p = k.$$

В цьому випадку система розв'язків

$$\begin{array}{llll} C_{11} r_1^{n-1} & C_{12} n r_1^{n-1} & \ldots & C_{1s_1} n^{s_1-1} r_1^{n-1}, \\ C_{21} r_2^{n-1} & C_{22} n r_2^{n-1} & \ldots & C_{2s_1} n^{s_2-1} r_2^{n-1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{p1} r_p^{n-1} & C_{p2} n r_p^{n-1} & \ldots & C_{ps_1} n^{s_p-1} r_p^{n-1} \end{array}$$

також утворює базис розв'язків рекурентного рівняння (1.5.1), тобто загальний розв'язок цього рекурентного рівняння можна записати у вигляді

$$u_n = (C_{11} + C_{12} n + \ldots + C_{1s_1} n^{s_1-1}) r_1^{n-1} + \ldots +$$
$$+ (C_{p1} + C_{p2} n + \ldots + C_{ps_p} n^{s_p-1}) r_p^{n-1}.$$

Для доведення цього факту достатньо показати, що система рівнянь

$$\begin{cases} C_{11} + C_{12} + \ldots + C_{1s_1} + \ldots + C_{p1} + C_{p2} + \\ \ldots + C_{ps_p} = u_1, \\ (C_{11} + 2C_{12} + \ldots + 2^{s_1-1} C_{1s_1}) r_1 + \ldots + \\ +(C_{p1} + 2C_{p2} + \ldots + 2^{s_p-1} C_{ps_p}) r_p = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (C_{11} + kC_{12} + \ldots + k^{s_1-1} C_{1s_1}) r_1^{k-1} + \ldots + \\ (C_{p1} + kC_{p2} + + \ldots + k^{s_p-1} C_{ps_p}) r_p^{k-1} = u_k, \end{cases} \qquad (1.5.6)$$

має розв'язок при довільних значеннях її правих частин, тобто визначник цієї системи не дорівнює нулю. У [20], розд. I, §4 цей визначник виражається через визначники Вандермонда.

Зауваження 1.5.1. Значення правих частин систем рівнянь (1.5.5), (1.5.6) називають *початковими умовами* рекурентного рівняння (1.5.1).

Приклад 1.5.1. Ров'яжемо рекурентне рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \tag{1.5.7}$$

яке задає послідовності Лукаса[11] (F. Lucas).

Складаємо відповідне характеристичне рівняння. Воно має вигляд

$$r^2 = r + 1.$$

Знаходимо його корені:

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \ r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1.5.7) має вигляд:

$$u_n = C_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + C_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}, \tag{1.5.8}$$

де C_1, C_2 — довільні константи.

Якщо

$$u_1 = u_2 = 1,$$

то із відповідної системи рівнянь знаходимо, що

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \ C_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}},$$

[11] Французький математик та інженер.

і загальний член послідовності, яка носить назву послідовності Фібоначчі, має вигляд:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Приклад 1.5.2. Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння

$$u_n = 4u_{n-1} - 8u_{n-2} + 8u_{n-3} - 4u_{n-4}.$$

Характеристичне рівняння

$$r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 = 0$$

має корені

$$r_1 = r_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$r_3 = r_4 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

тому загальний розв'язок заданого рекурентного рівняння має вигляд:

$$u_n = (C_1 + C_2 n)2^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{3\pi(n-1)}{4} + i\sin\frac{3\pi(n-1)}{4}\right) +$$
$$+(C_3 + C_4 n)2^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{\pi(n-1)}{4} + i\sin\frac{\pi(n-1)}{4}\right).$$

1.5.2 Лінійні неоднорідні рекурентні рівняння

Означення 1.5.2. *Рівняння виду*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k} + f(n) \tag{1.5.9}$$

*називають **лінійним неоднорідним рекурентним рівнянням** k-го порядку із сталими коефіцієнтами.*

Для лінійних неоднорідних рекурентних рівнянь із сталими коефіцієнтами справедливі наступні два твердження.

Твердження 1.5.1. ([2], стор. 460 - 461). *Нехай $u_n = u_n^*$ — розв'язок лінійного рекурентного рівняння (1.5.1) і $u_n = u_n^{**}$ — частинний розв'язок лінійного неоднорідного рекурентного рівняння (1.5.9), тоді $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ є також розв'язком рівняння (1.5.9).*

Доведення. Позаяк $u_n = u_n^*$ і $u_n = u_n^{**}$ задовольняють відповідно рівняння (1.5.1) і (1.5.9), то маємо рівності:

$$u_n^* = a_1 u_{n-1}^* + a_2 u_{n-2}^* + \ldots + a_k u_{n-k}^*,$$

$$u_n^{**} = a_1 u_{n-1}^{**} + a_2 u_{n-2}^{**} + \ldots + a_k u_{n-k}^{**} + f(n).$$

Додаючи ці рівності, отримуємо рівність

$$u_n^* + u_n^* = a_1(u_{n-1}^* + u_{n-1}^{**}) + \ldots + a_k(u_{n-k}^* + u_{n-k}^{**}) + f(n),$$

яка свідчить про те, що

$$u_n = u_n^* + u_n^{**}$$

є розв'язком рівняння (1.5.9). □

Твердження 1.5.2. ([2], стор. 461 - 462). *Нехай $u_n = u_n^{**}$ — частинний розв'язок лінійного неоднорідного рекурентного рівняння (1.5.9), тоді кожен розв'язок цього рівняння має вигляд $u_n = u_n^* + u_n^{**}$, де $u_n = u_n^*$ — загальний розв'язок лінійного однорідного рекурентного рівняння (1.5.1).*

Доведення. Згідно з попереднім твердженням, послідовність $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ є розв'язком рівняння (1.5.9). Припустимо, що u_n^{**} і $\overline{u}_n$ — розв'язки рівняння (1.5.9), тоді, віднімаючи рівності

$$\overline{u}_n = a_1 \overline{u}_{n-1} + a_2 \overline{u}_{n-2} + \ldots + a_k \overline{u}_{n-k} + f(n)$$

$$u_n^{**} = a_1 u_{n-1}^{**} + a_2 u_{n-2}^{**} + \ldots + a_k u_{n-k}^{**} + f(n),$$

помічаємо, що $u_n^* = \overline{u}_n - u_n^{**}$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (1.5.1), тобто $\overline{u}_n = u_n^* + u_n^{**}$. □

Приклад 1.5.3. ([2], стор. 465 - 468). Розв'яжемо лінійне неоднорідне рекурентне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рекурентного рівняння має вигляд:

$$u_n^* = C_1 + C_2 2^{n-1},$$

бо його характеристичне рівняння

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

має два різні корені: $r_1 = 1,\ r_2 = 2$.

Зважаючи на форму функції

$$f(n) = 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$u_n^{**} = b_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Після підстановки цього виразу у вихідне неоднорідне рівняння, отримаємо рівність:

$$b_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + b_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 3b_1\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 3b_2\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) -$$

$$-2b_1\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) - 2b_2\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Але

$$b_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -b_1\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right),\ b_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -b_2\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

$$3b_1 \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) = -3b_1 \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

$$3b_2 \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) = 3b_2 \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

$$3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -3\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right),$$

тому остання рівність може бути переписана у вигляді:

$$-b_1 \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) - b_2 \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) =$$

$$= -3b_1 \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) + 3b_2 \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) -$$

$$-2b_1 \cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) - 2b_2 \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

Зрівнюючи коефіцієнти біля $\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$ та $\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$, отримаємо відповідно рівності

$$b_1 = 3b_2, \; 3b_1 + b_2 = 3,$$

з яких знаходимо, що $b_1 = \frac{9}{10}$, $b_2 = \frac{3}{10}$.

Таким чином, загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння має вигляд:

$$u_n = C_1 + C_2 2^{n-1} + \frac{9}{10}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{10}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Накінець наведемо приклад функції Аккермана[12] $A(n,m)$, яка задається рекурсивно:

$$A(n,m) = \begin{cases} m+1, & \text{якщо } n = 0, \\ A(n-1,1), & \text{якщо } m = 0, \\ A(n-1, A(n, m-1)), & \text{якщо } m \neq 0, n \neq 0 \end{cases}.$$

Спробуйте вручну знайти значення $A(3,2)$.

[12]Функція Аккермана відіграє важливу роль у теорії алгоритмів при оцінці складності алгоритмів.

1.6 Комбінаторні числа та многочлени

"Чи існують "нецікаві" числа? Математики знають, що відповідь на це питання негативна. Доведення: припустимо протилежне ... Візьмемо найменше число з нецікавої частини чисел.[13] — Та це ж цікава властивість даного числа!"

— *Євген Скляревський, [70]*

Важливу роль в різних областях математики відіграють спеціальні комбінаторні числа та многочлени. Згадаймо лише біноміальні многочлени та їх коефіцієнти, числа Стірлінга першого і другого роду, числа та многочлени Ойлера, ортогональні многочлени тощо. Проте, найбільш відомі многочлени своєю популярністю завдячують лише своїм коефіцієнтам.

В усіх перелічених випадках, послідовність многочленів

$$\begin{array}{l} a_{00}, \\ a_{10} + a_{11}t, \\ a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0} + a_{n1}t + a_{n2}t^2 + \ldots + a_{nn}t^n, \; n \in \mathbb{N}, \end{array}$$

де $a_{ii} \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots$, задається трикутною таблицею його коефіцієнтів

$$\begin{array}{lllll} a_{00} & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \qquad (1.6.1)$$

[13]Якщо тільки це можна зробити. Автор цього доведення мав, мабуть, на увазі множину натуральних чисел.

Наведемо приклади деяких важливих трикутних таблиць чисел.

1. Трикутник Паскаля з'являється в біномі

$$(1+t)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} t^m.$$

$\binom{n-1}{m-1}$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Для побудови трикутника Паскаля, як правило, користуються рекурентною формулою (біноміальних коефіцієнтів).

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}, \; 0 \leqslant m \leqslant n, \tag{1.6.2}$$

тут

$$\binom{n}{0} = 1, \; n \in \mathbb{N}_0$$

— початкові умови[14].

Трикутник Паскаля може бути побудований (Семенчук А.В.) також при допомозі рекурентного рівняння:

$$Z(n,m) = (-sn + sm + 1)Z(n-1, m-1) + (sm+1)Z(n-1, m),$$

де $0 \leqslant m \leqslant n$, $s \in \mathbb{Z}$ з початковою умовою $Z(n,0) = 1$, причому $Z(n,m) = 0$ при $n < m$.

2. Трикутники чисел Стірлінга першого та другого роду.

[14]Будуючи числові трикутники ми вважаємо, що $Z(n,m) = 0$ при $m > n$.

Твердження 1.6.1. *В рівностях*

$$x^{n\{-1\}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \quad (n,k \in \mathbb{N}_0), \tag{1.6.3}$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{k\{-1\}} \quad (n,k \in \mathbb{N}_0), \tag{1.6.4}$$

коефіцієнти $s_{n,k}$ і $S_{n,k}$ відповідно задовольняють рекурентні співвідношення:

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (-n+1)s(n-1,k), \; 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.6.5}$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \; 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.6.6}$$

де

$$s(0,0) = 1, s(n,0) = 0, \; n \in \mathbb{N}, \tag{1.6.7}$$

$$S(0,0) = 1, \; S(n,0) = 0, \; n \in \mathbb{N} \tag{1.6.8}$$

— відповідно їх початкові умови.

Доведення. Передовсім відзначимо, що із (1.6.3) випливають очевидні рівності (1.6.7). Далі маємо:

$$x^{n\{-1\}} = (x-(n-1))x^{n-1\{-1\}} = (x-(n-1))\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k.$$

Зробимо в першій сумі останнього виразу заміну змінної: нехай $k' = k+1$, тоді сума по k' буде здійснюватися в межах від 1 до n, причому $k = k'-1$. Отже, враховуючи (1.6.7), матимемо

$$x^{n\{-1\}} = \sum_{k'=1}^{n} s(n-1,k'-1)x^{k'} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k =$$

$$= x^n + \sum_{k'=1}^{n-1} s(n-1, k'-1)x^{k'} - (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k =$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)\right) x^k,$$

тобто рівність (1.6.5) виконується.

Розглянемо рівність (1.6.4). В цьому випадку також виконуються рівності (1.6.8). Далі маємо:

$$x^n = x^{n-1}(x - k + k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^{k\{-1\}}(x-k) + k\sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)x^{k\{-1\}} =$$

$$= x^{n\{-1\}} + \sum_{k=1}^{n-1} (S(n-1,k-1) + kS(n-1,k))x^{k\{-1\}}.$$

□

Зауваження 1.6.1. *Числа $s(n,k)$ и $S(n,k)$ називають* ***числами Стірлінга*** *першого і другого роду, а рівності (1.6.7) і (1.6.8) — відповідно їх початковими умовами.*

Проілюструємо застосування комбінаторного закону двоїстості факторіальних степенів.

Нехай у рівностях (1.6.3), (1.6.4) $x = -y$, тоді, враховуючи (1.1.2), (1.1.3), одразу випливають нові тотожності:

$$y^{n\{1\}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n,k) y^k,$$

$$y^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} S(n,k) y^{k\{1\}}.$$

Коефіцієнти правих частин цих тотожностей називають числами Стірлінга першого і другого роду, відповідно без знаків і із знаками.

Наведемо відповідно трикутники чисел Стірлінга першого та другого роду:

$s(n,m)$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

$S(n,m)$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

3. Трикутник *чисел Ойлера* з'являється в рівностях:

$$x^n = \sum_{m=1}^{n} E(n,m)\binom{x+m-1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Цю формулу називають формулою Ворпіцького[15] [159].

Многочлен виду

$$E_n(t) = \sum_{m=1}^{n} E(n,m)t^{m-1}$$

називають *многочленом Ойлера* (див. [84]).

$E(n,m)$	$m=1$	2	3	4	5	6	7	8
$n=1$	1							
2	1	1						
3	1	4	1					
4	1	11	11	1				
5	1	26	66	26	1			
6	1	57	302	302	57	1		
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	
8	1	147	4293	15619	15619	4293	247	1

Рекурентна формула для побудови трикутника чисел Ойлера:

$$E(n,m) = (n-m+1)E(n-1,m-1) + mE(n-1,m), \qquad (1.6.9)$$

де $1 \leqslant m \leqslant n$, з початковими умовами

$$E(n,1) = 1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Можна було б навести цілий ряд інших відомих та невідомих трикутників чисел та відповідних їм многочленів. Наведемо лише деякий уніфікуючий підхід до досліджень в цьому напрямку.

Розглянемо рекурентне співвідношення

$$R(n,m) =$$

[15]Недавно західні математики дізналися про існування книги китайського математика Лі Сянь-Ляня (1867), в якій вперше зустрічається ця формула.

$$= (\alpha_{11}n+\alpha_{12}m+\beta_1)R(n-1,m-1)+(\alpha_{21}n+\alpha_{22}m+\beta_2)R(n-1,m), \qquad (1.6.10)$$

де $0 \leqslant m \leqslant n$, з початковими умовами

$$R(n,0) = a_{n0}, \ n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.6.11)$$

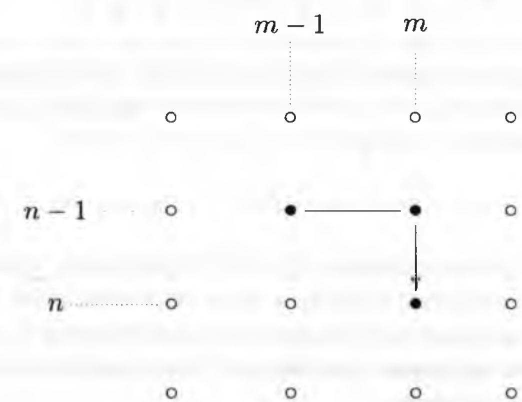
Ми вважаємо, що при $m > n$ виконується рівність $R(n,m) = 0$.

Кожному такому рекурентному співвідношенню поставимо у відповідність матрицю його коефіцієнтів

$$R\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix}. \qquad (1.6.12)$$

При такому підході, в залежності від матриці коефіцієнтів, можна досліджувати властивості певних класів трикутників чисел та відповідних їм многочленів.

Зауважимо, що числовий трикутник, згідно із рекурсією (1.6.10), заповнюється за схемою



На цій схемі, виділеним кружечкам $n-1$-го рядка відповідають елементи $R(n-1,m-1)$, $R(n-1,m)$ деякого числового трикутника, при допомозі яких обчислюють виділений елемент $R(n,m)$ з n-го рядка та m-го стовпця.

Тому в ролі початкових умов для рекурентного співвідношення (1.6.10), яке генерує числовий трикутник (1.6.1), виступають рівності (1.6.11), в яких елементи a_{n0} є крайніми лівими елементами цього числового трикутника.

Так, матрицям коефіцієнтів

$$R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

відповідають трикутники чисел Ойлера та чисел Ойлера другого порядку (див. [21], стор. 300–301); матриці

$$R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— трикутник Паскаля; матрицям

$$R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— відповідно трикутники Стірлінга першого і другого роду.

Якщо, наприклад, всі крайні елементи числових трикутників дорівнюють одиниці і виконуються наступні умови

$$\alpha_{11} = -\alpha_{12} = \alpha_{22},\ \alpha_{22} + \beta_2 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \alpha_{21} = 0,$$

то рекурентні співвідношення (1.6.10) згенерують трикутники з рядками, рівновіддалені від кінців елементи яких рівні. Якщо модулі елементів матриці коефіцієнтів не перевищують 5, то існує не менше 10 таких числових трикутників, які задаються наступними матрицями коефіцієнтів:

$$R\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$R\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найпростішими матрицями коефіцієнтів є п'ята і шоста матриця, яким відповідають трикутник Паскаля та Ойлера. Решта числових трикутників наведена у додатку 4 на стор. 453.

Замість рекурентного співвідношення (1.6.10) можна було б розглядати рекурентне співвідношення виду

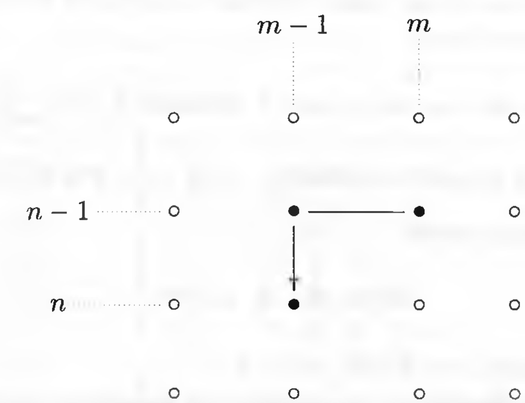
$$L(n,m) = (\alpha_{11}n + \alpha_{12}m + \beta_1)L(n-1,m)+$$

$$+(\alpha_{21}n + \alpha_{22}m + \beta_2)L(n-1,m+1),\ 0 \leqslant m \leqslant n \qquad (1.6.13)$$

із початковими умовами

$$L(n,n) = 1,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Звертаємо увагу читача на початкові умови цього рекурентного співвідношення та схему проведення обчислень при заповненні числового трикутника.



Матриці коефіцієнтів таких рекурентних співвідношень позначатимемо через

$$L\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Якщо, наприклад,

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то дістанемо числовий трикутник

F_n	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	1	1							
2	2	1	1						
3	3	2	1	1					
4	5	3	2	1	1				
5	8	5	3	2	1	1			
6	13	8	5	3	2	1	1		
7	21	13	8	5	3	2	1	1	
8	34	21	13	8	5	3	2	1	1

Цікаві числові трикутники можна згенерувати рекурентними співвідношеннями виду

$$RD(n,m) = (\alpha_{11}n + \alpha_{12}m + \beta_1)RD(n-1, m-2) +$$

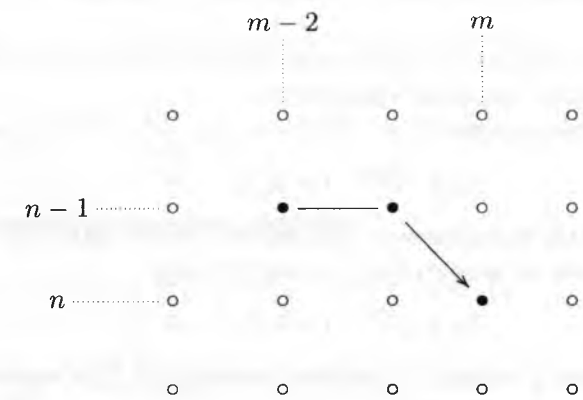
$$+(\alpha_{21}n + \alpha_{22}m + \beta_2)RD(n-1, m-1),\ 0 \leqslant m \leqslant n,$$

з початковими умовами

$$RD(n,0) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тут ми вважаємо, що $RD(n,-1) = 0$.

Таким рекурентним співвідношенням відповідає наступна схема заповнення числових трикутників:



Матриці коефіцієнтів таких рекурентних співвідношень познача-

тимемо через

$$RD\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Матриці коефіцієнтів

$$RD\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

відповідатиме числовий трикутник виду

$RD\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	1	1							
2	1	1	2						
3	1	1	2	3					
4	1	1	2	3	5				
5	1	1	2	3	5	8			
6	1	1	2	3	5	8	13		
7	1	1	2	3	5	8	13	21	
8	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Рядки цієї таблиці є першими елементами послідовності чисел Фібоначчі.

Цікавим виявляється і наступний загальний підхід до вивчення властивостей числових трикутників.

Позаяк многочлени

$$(x+r)^{i\{s\}},\ i=0,1,\dots,n$$

(див. стор. 443) за змінною x утворюють базис у просторі многочленів степеня не вищого за n, то многочлени

$$(x+t)^{i\{k\}},\ i=0,1,\dots,n$$

можна подати у вигляді їх лінійної комбінації. При цьому отримаємо наступні тотожності:

$$\begin{array}{lcl}
(x+t)^{0\{k\}} & = & a_{00}(x+r)^{0\{s\}}, \\
(x+t)^{1\{k\}} & = & a_{10}(x+r)^{0\{s\}} + a_{11}(x+r)^{1\{s\}}, \\
(x+t)^{2\{k\}} & = & a_{20}(x+r)^{0\{s\}} + a_{21}(x+r)^{1\{s\}} + a_{22}(x+r)^{2\{s\}}, \\
(x+t)^{3\{k\}} & = & a_{30}(x+r)^{0\{s\}} + a_{31}(x+r)^{1\{s\}} + a_{32}(x+r)^{2\{s\}} + \\
 & + & a_{33}(x+r)^{3\{s\}}, \\
\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(x+t)^{n\{k\}} & = & a_{n0}(x+r)^{0\{s\}} + a_{n1}(x+r)^{1\{s\}} + a_{n2}(x+r)^{2\{s\}} + \\
 & + & \dots + a_{nn}(x+r)^{n\{s\}},
\end{array} \tag{1.6.14}$$

Таким чином, ми приходимо до класу числових трикутників

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{00} & & & & & & \\
a_{10} & a_{11} & & & & & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & & \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn}
\end{array}, \tag{1.6.15}$$

які назвемо *факторіальними числовими трикутниками.*

Теорема 1.6.1. [49]. *Коефіцієнти тотожностей*

$$(x+t)^{i\{k\}} = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}},\ i=0,1,2,\dots \tag{1.6.16}$$

задовольняють рекурентне рівняння

$$a_{ij} = a_{i-1,j-1} + (t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}, \tag{1.6.17}$$

де

$$a_{ii}=1, a_{i,-1}=0,\ i=0,1,\dots,n.$$

Доведення. При $i=0$ маємо справедливу тотожність:

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}}.$$

Доведемо справедливість індукційного кроку.

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i}(a_{i-1,j-1}+(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j})(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} a_{i-1,j-1}(x+r)^{j\{s\}} + \sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}.$$

Нехай у першій сумі $j=j'+1$, тоді її можна подати у вигляді

$$\sum_{j'=0}^{i-1} a_{i-1,j'}(x+r)^{j'+1\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js).$$

Таким чином, маємо

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js)+$$

$$+\sum_{i=0}^{i-1}(t-r+(i-1)k-js)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}=$$

$$(x+t+(i-1)k)\sum_{j=0}^{i-1}a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}=(x+t+(i-1)k)(x+t)^{i-1\{k\}}=$$

$$=(x+t)^{i\{k\}}.$$

□

Рекурентне рівняння (1.6.17) є загальним рекурентним рівнянням для всіх факторіальних числових трикутників. Підставляючи замість t, k, r, s числа із множини $\{-1, 0, 1\}$ отримаємо мультимножину потужності $3^4 = 81$ числових трикутників:

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
1	-1	-1	-1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{n\{-1\}}$		тривіальний
2	-1	-1	-1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t10$
3	-1	-1	-1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
4	-1	-1	0	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t12$
5	-1	-1	0	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j}$		$\equiv t13$
6	-1	-1	0	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t14$
7	-1	-1	1	-1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t1	$\circlearrowleft t28, \lvert t1\rvert \equiv t42$
8	-1	-1	1	0	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t2	$\circlearrowleft t34, \lvert t2\rvert \equiv t41$
9	-1	-1	1	1	$(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t3	$\circlearrowleft t40, \lvert t3\rvert \equiv t40$
10	-1	0	-1	-1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j}\{-1\}$		$\equiv t15$
11	-1	0	-1	0	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{n}$		тривіальний
12	-1	0	-1	1	$(x-1)^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
13	-1	0	0	-1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t17$
14	-1	0	0	0	$(x-1)^{n} \to x^{j}$		$\equiv t18$
15	-1	0	0	1	$(x-1)^{n} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t19$
16	-1	0	1	-1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t4	$\circlearrowleft t29, \lvert t4\rvert \equiv \lvert t36\rvert$
17	-1	0	1	0	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j}$	t5	$\circlearrowleft t35, \lvert t5\rvert \equiv t35$
18	-1	0	1	1	$(x-1)^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t6	$\circlearrowleft t41, \lvert t6\rvert \equiv t34$
19	-1	1	-1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
20	-1	1	-1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t24$
21	-1	1	-1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		тривіальний
22	-1	1	0	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t25$
23	-1	1	0	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j}$		$\equiv t26$
24	-1	1	0	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t27$
25	-1	1	1	-1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t7	$\circlearrowleft t30, t7 \equiv \lvert t30\rvert$
26	-1	1	1	0	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$	t8	$\circlearrowleft t36, \lvert t8\rvert \equiv \lvert t29\rvert$
27	-1	1	1	1	$(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t9	$\circlearrowleft t42, \lvert t9\rvert \equiv t28$
28	0	-1	-1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t31$
29	0	-1	-1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t32$
30	0	-1	-1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t33$
31	0	-1	0	-1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$		тривіальний
32	0	-1	0	0	$x^{n\{-1\}} \to x^{j}$	t10	$\circlearrowleft t15$тр. Стір.I р.,$\lvert t10\rvert \equiv t24$
33	0	-1	0	1	$x^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t11	$\circlearrowleft t23, \lvert t11\rvert \equiv t23$

№	t	k	r	s	Перетворення	№t	Короткий коментар
34	0	-1	1	-1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t12	$\circlearrowleft t31, \lvert t12\rvert \equiv t22$
35	0	-1	1	0	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$	t13	$\circlearrowleft t37, \lvert t13\rvert \equiv t21$
36	0	-1	1	1	$x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t14	$\circlearrowleft t20, \lvert t14\rvert \equiv t20$
37	0	0	-1	-1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t37$
38	0	0	-1	0	$x^{n} \to (x-1)^{j}$		$\equiv t38$
39	0	0	-1	1	$x^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$		$\equiv t39$
40	0	0	0	-1	$x^{n} \to x^{j\{-1\}}$	t15	$\circlearrowleft t10$ тр. Стірл. II роду
41	0	0	0	0	$x^{n} \to x^{j}$		тривіальний
42	0	0	0	1	$x^{n} \to x^{j\{1\}}$	t16	$\circlearrowleft t24, \lvert t16\rvert \equiv t15$
43	0	0	1	-1	$x^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t17	$\circlearrowleft t32, t17 \to t15$
44	0	0	1	0	$x^{n} \to (x+1)^{j}$	t18	$\circlearrowleft t38, \lvert t18\rvert \equiv t38$
45	0	0	1	1	$x^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t19	$\circlearrowleft t21, \lvert t19\rvert \equiv t37$
46	0	1	-1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t20	$\circlearrowleft t14, t20 \equiv \lvert t14\rvert$
47	0	1	-1	0	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$	t21	$\circlearrowleft t19$
48	0	1	-1	1	$x^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t22	$\circlearrowleft t27$
49	0	1	0	-1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t23	тр. Ла, $\circlearrowleft t11$
50	0	1	0	0	$x^{n\{1\}} \to x^{j}$	t24	$\circlearrowleft t16$
51	0	1	0	1	$x^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		тривіальний
52	0	1	1	-1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$	t25	$\circlearrowleft t33, t25 \equiv \lvert t33\rvert$
53	0	1	1	0	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$	t26	$\circlearrowleft t39, t26 \to t24$
54	0	1	1	1	$x^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$	t27	$\circlearrowleft t22, \lvert t27\rvert \equiv t31$
55	1	-1	-1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t28	$\circlearrowleft t1$
56	1	-1	-1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j}$	t29	$\circlearrowleft t4$
57	1	-1	-1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t30	$\circlearrowleft t7, t30 \to t11$
58	1	-1	0	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{-1\}}$	t31	$\circlearrowleft t12$
59	1	-1	0	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j}$	t32	$\circlearrowleft t17, t32 \to t10$
60	1	-1	0	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{j\{1\}}$	t33	$\circlearrowleft t25$
61	1	-1	1	-1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		тривіальний
62	1	-1	1	0	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j}$		$\equiv t10$
63	1	-1	1	1	$(x+1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t11$
64	1	0	-1	-1	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t34	$\circlearrowleft t2$
65	1	0	-1	0	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j}$	t35	$\circlearrowleft t5$
66	1	0	-1	1	$(x+1)^{n} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t36	$\circlearrowleft t8$
67	1	0	0	-1	$(x+1)^{n} \to x^{j\{-1\}}$	t37	$\circlearrowleft t13$
68	1	0	0	0	$(x+1)^{n} \to x^{j}$	t38	$\circlearrowleft t18$, тр. Паскаля
69	1	0	0	1	$(x+1)^{n} \to x^{j\{1\}}$	t39	$\circlearrowleft t26, t39 \to t16$
70	1	0	1	-1	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t15$
71	1	0	1	0	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j}$		тривіальний
72	1	0	1	1	$(x+1)^{n} \to (x+1)^{j\{1\}}$		$\equiv t16$
73	1	1	-1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{-1\}}$	t40	$\circlearrowleft t3$
74	1	1	-1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j}$	t41	$\circlearrowleft t6$
75	1	1	-1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{j\{1\}}$	t42	$\circlearrowleft t9$
76	1	1	0	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{-1\}}$		$\equiv t20$
77	1	1	0	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j}$		$\equiv t21$
78	1	1	0	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to x^{j\{1\}}$		$\equiv t22$
79	1	1	1	-1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{-1\}}$		$\equiv t23$
80	1	1	1	0	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j}$		$\equiv t24$
81	1	1	1	1	$(x+1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{j\{1\}}$		тривіальний

Кожному рядку, наведеної вище таблиці, відповідає деякий числовий трикутник. Запис $\equiv t10$ в останньому стовпці другого рядка означає, що числовий трикутник, який відповідає другому рядку тотожний числовому трикутнику 32–го рядка; записи у сьомому рядку таблиці означають, що йому відповідає трикутник $t1$, який є оберненим числовим трикутником ($\circlearrowright$ 55) до числового трикутника 55–го рядка, причому модулі всіх елементів цього трикутника ($|t1| \equiv t42$) утворюють трикутник $t42$; записи із 43–го рядка означають, що йому відповідає числовий трикутник $t17$, який є оберненим до числового трикутника 59 рядка, причому, викреслюючи в ньому перший стовпець, можна отримати ($t17 \to t15$) числовий трикутник $t15$.

Таким чином, крім тривіального числового трикутника, можна побудувати ще 42 різні числові трикутники

$$t1, t2, \ldots, t42,$$

які читач знайде у додатку 3 на стор. 444.

Вправи

1.6.1. Побудуйте числовий трикутник, який згенерує рекурентне співвідношення, що задається матрицею його коефіцієнтів

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

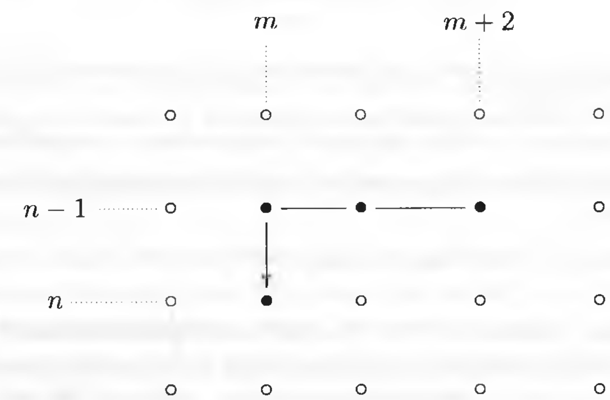
запишіть відповідну послідовність многочленів та розкладіть їх на множники.

1.6.2. Поміняйте всі елементи першого рядка матриці коефіцієнтів

$$R\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix}$$

на протилежні. Як при цьому зміниться числовий трикутник?

1.6.3. Складіть рекурентні співвідношення та відповідні початкові умови так, щоб числовий трикутник заповнювався за схемою



Зобразіть відповідну матрицю коефіцієнтів.

Відкриті питання

"І почав був я міркувати, щоб те збагнути,
але важкий він був — той труд — для мене."
— Псалом 72(73)

Задача 1. *Дослідіть потужності множин:* $C_m(n,\cdot)$, $P_m(n,\cdot)$.
Задача 2. *Дано число $m > 1$ і суму кількох натуральних доданків. Двоє гравців грають у таку гру: за кожним ходом потрібно один з доданків, який більший m, розкласти в суму двох менших. Ходи робляться по черзі і програє той з гравців, хто не може зробити черговий хід (тобто коли кожен з доданків не перевищує m). Чи виграє при правильній грі обох гравців той, хто починає, якщо гра починається з єдиного доданку n?*
Задача 3. *Якщо в послідовностях, що задаються нелінійними рекурентними співвідношеннями*

$$u_{n+2} = \frac{1 + u_{n+1}}{u_n},$$

$$u_{n+3} = \frac{1 + u_{n+1} + u_{n+2}}{u_n}$$

не зустрічається -1 *або* 0, *то вони завжди періодичні відповідно з періодами* 5 *та* 8.

Чи існують ще подібні приклади рекурентних співвідношень?

Задача 4. *Послідовність* u_n *задана нелінійним рекурентним співвідношенням*

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{u_n}.$$

з початковою умовою $u_1 = 2$. *Чи буде вона необмеженою?*

Задача 5. *Рекурентна послідовність задана співвідношенням*

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2}, & \text{якщо } u_n \text{ – парне,} \\ \frac{3u_n+1}{2}, & \text{якщо } u_n \text{ – непарне,} \end{cases}$$

і початковою умовою $u_1 = k$, *де* k *— деяке натуральне число. Доведіть, що для довільного* k *послідовність рано чи пізно стає періодичною з періодом* $(4, 2, 1)$.

Задача 6. *Знайдіть комбінаторні інтерпретації унімодальних числових трикутників із додатку 4 (стор. 453).*

Задача 7. *Знайдіть комбінаторні інтерпретації факторіальних числових трикутників із додатку 3 (стор. 444).*

Зауваження 1.6.2. Задачу 2 запропонував В.А. Вишенський. Задачі 3 і 4 відомі як задачі Рональда Грехема,[16] а задача 5 добре відома під назвою *сіракузької*.

[16] Рональд Грехем — американський математик, відомий спеціаліст з комбінаторного аналізу.

Бібліографічні зауваження

До п.1.1.

Означення 1.1.1 та теорема 1.1.1, мабуть, формулюються вперше. Співвідношення 1.1 було доведене Вандермондом у 1772 році [154].

Числа Лага розглянуті Лагом у 1955 році в статті [126].

До п.1.2.

Поняття *первинної та вторинної специфікацій* мультимножини належать Сачкову (див. [67], стор. 224, та [68], стор. 18).

Розбиття натурального числа у невпорядковану суму натуральних доданків можна розглядати як мультимножину цих доданків. Ідея зображення цієї мультимножини у вигляді діаграми належить Ферре і Сильвестру [150].

Багато задач комбінаторики множин природно узагальнюються на мультимножини. Це, в першу чергу, задачі про число впорядкованих та невпорядкованих m–вибірок із мультимножини (1.2.2). Ефективні алгоритми для розв'язання ряду таких задач є в [35]–[38].

Ряд фактів із комбінаторики діаграм читач знайде в перших розділах монографій Г. Ендрюса [79] та І. Макдональда [58], де також вказано детальну бібліографію з цієї тематики.

До п.1.3.

Поняття розбиття вперше з'явилося у 1669 р. в листі Ляйбніца до Й. Бернуллі. У такій загальності, як в означенні 1.3.1, поняття розбиття, мабуть, формулюється вперше. Поняття декремента розбиття та його парності також є новими. Дослідженню потужності множини $P(n, +)$ присвячено багато зусиль різних математиків, починаючи з Л. Ойлера (див. [78], с. 234-250). У 1741 р. він в [100] висловив гіпотезу (відому нині як *пентагональна теорема*), що

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m x^{\frac{1}{2}m(3m-1)}(1 + x^m)$$

яку довів у 1754 р. в [101]. Оригінальне комбінаторне доведення цієї теореми дав Дж. Франклін [110] у 1881 р. Рівність (1.3.12) є наслідком пентагональної теореми Ойлера. Її доведення можна, наприклад, знайти в [89] та [79]. Класичні результати про потужність множини $P(n,+)$ належать Г. Харді і С. Рамануджану [120]. Зокрема, вони отримали знамениту асимптотичну формулу для $p(n)$: $p(n)$ є найближче ціле число до

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{q=1}^{v}\sqrt{q}A_q(n)\psi_q(n),$$

де

$$A_q(n)=\sum \omega_{p,q}\exp^{-2np\pi i/q},$$

а сума обчислюється для всіх p, що є взаємно простими з q та меншими за q, причому $\omega_{p,q}$ — деякий корінь степеня $24q$ з одиниці, v — величина порядку $\sqrt{n}$ і

$$\psi_q(n)=\frac{d}{dn}\exp\left\{\frac{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}{q}\right\}.$$

Пізніше цю формулу уточнив Г. Радемахер (див. [141]-[143]):

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}\frac{sh((\pi/k)(2/3(x-1/24))^{1/2})}{(x-1/24)^{1/2}}\right]_{x=n},$$

де

$$A_k(n)=\sum_{h\,mod\,k}\omega_{h,k}\exp^{-2\pi inh/k},$$

причому $(h,k)=1$ і $\omega_{h,k}=exp\{\pi is(h,k)\}$, де $s(h,k)$— сума Дедекінда:

$$s(h,k)=\sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\frac{\mu}{k}-\left\lfloor\frac{\mu}{k}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h\mu}{k}-\left\lfloor\frac{h\mu}{k}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right).$$

Систематичний виклад теорії впорядкованих та невпорядкованих розбиттів натуральних чисел читач знайде в [79].

До п.1.4.

Всі поняття та твердження цього параграфу є новими.

До п.1.5.

Всі поняття та твердження параграфу 1.5 є класичними поняттями теорії лінійних рекурентних рівнянь. Перші систематичні досдідження рекурентних рівнянь зустрічаються в роботах А. Муавра і Д. Бернуллі. Однак стрункій теорії рекурентних рівнянь ми завдячуємо Л. Ойлеру.

А. Муавр побудував теорію рекурентних рядів. Встановив зв'язок між рекурентними послідовностями і різницевими рівняннями, досліджував однорідні лінійні різницеві рівняння із сталими коефіцієнтами.

Докладніші відомості про лінійні рекурентні рівняння читач знайде у [59],[2],[20].

До п.1.6.

Вважаємо, що біноміальні коефіцієнти та трикутник Паскаля не потребують жодних бібліографічних коментарів. Зауважимо лише, що існує природне узагальнення трикутника Паскаля [36].

Числа Стірлінга [149] та числа Ойлера [105] мають також численні застосування та важливі комбінаторні інтерпретації і тому добре висвітлені в існуючій літературі (див., наприклад, [21], стор. 287-302).

Задання числових трикутників матрицями коефіцієнтів рекурентного співвідношення, мабуть, вживається вперше. Теорема 1.6.1 також є новою.

Розділ 2

Числення трикутних матриць

> *"При зустрічі з незвіданим завжди виникають побоювання, і найкращий засіб позбутися їх полягає в тому, щоб поглянути, як це нове працює, що воно вміє робити і чому це йому вдається."*
>
> – *Ян Стюарт, [75], стор. 6*

В зв'язку з тим, що ряд задач математики вимагає введення трикутних таблиць чисел та певних числових функцій над ними, то, мабуть, на часі внести деякі корективи в саме поняття матриці.

Означення 2.0.1. ***Матрицею*** *назвемо довільної форми таблицю чисел, що належать деякому числовому полю.*

Щоб уникнути плутанини з відповідними поняттями прямокутних та квадратних матриць, ми користуємося терміном "матриця"з відповідним прикметником, який характеризує її форму. Таким чином, поняття трикутної матриці не сплутається із поняттям верхньої чи нижньої трикутної матриці, яке стосується лише прямокутних та квадратних матриць. Проте, щоб не нагромаджувати зайвих математичних термінів, ми, в теорії трикутних

матриць, зберігаємо аналогічні поняття алгебраїчного доповнення, рядка та стовпця трикутної матриці, її діагональних елементів тощо.

2.1 Означення трикутних матриць

Нехай K — деяке числове поле.

Означення 2.1.1. [29]. *Трикутну таблицю*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{2.1.1}$$

чисел із числового поля K назвемо ***трикутною матрицею****, елемент a_{11} — верхнім елементом цієї трикутної матриці, а число n— її порядком.*

Елементи a_{i1},a_{i2},. . .,a_{ii} утворюють i-й рядок трикутної матриці (2.1.1), а елементи $a_{jj}, a_{j+1,j}, \dots, a_{nj}$ — її j-й стовпчик. Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називатимемо *діагональними елементами* трикутної матриці; елементи $a_{i,i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$ — *елементами першої піддіагоналі*; *елементи* $a_{i,i-2}$, $i = 3, 4, \dots, n$ — *елементами другої піддіагоналі* і т. д.

Іноді ми будемо користуватися скороченим записом трикутної матриці (2.1.1)

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}.$$

Якщо у трикутній матриці всі елементи, крім діагональних, дорівнюють нулю, то таку матрицю називатимемо *діагональною трикутною матрицею*. Якщо ж у трикутній матриці ненульові лише діагональні елементи та елементи першої піддіагоналі, то таку трикутну матрицю називатимемо *2-діагональною трикутною матрицею*. Аналогічно означуються *3-діагональні трикутні матриці* тощо.

Приклад 2.1.1. У наступній трикутній матриці спостерігаються певні закономірності.

$$B = \left(\frac{j}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & 2 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & 3 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n-1} & \frac{3}{n-2} & \frac{4}{n-3} & \vdots & n \end{pmatrix}_n .$$

Трикутна матриця B задана функцією двох змінних

$$b_{ij} = \frac{j}{i-j+1},$$

в якій аргументи i, j позначають відповідно номери її рядка і стовпчика.

Означення 2.1.2. [29]. *Трикутну матрицю виду*

$$I = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n ,$$

де δ_{ij}— символ Кронекера, назвемо одиничною трикутною матрицею, а матрицю виду

$$M = (M_i \cdot \delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & M_s \end{pmatrix}_n , \qquad (2.1.2)$$

в якій M_i, $i = 1, \ldots, s$ — деякі трикутні матриці, а нулями позначені прямокутні таблиці нулів, — блоковою трикутною матрицею.

Приклад 2.1.2. В наступній блоковій трикутній матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & 4 & & \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

її ненульовими блоками є трикутні матриці

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 4 & \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_3 = (2).$$

Означення 2.1.3. *Трикутні матриці виду*

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}a_1 & & & & \\ \tau_{21}a_2 & \tau_{22}a_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_{n-1} & \tau_{n-1,2}a_{n-2} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}a_1 & \\ \tau_{n,1}a_n & \tau_{n,2}a_{n-1} & \cdots & \tau_{n,n-1}a_2 & \tau_{n,n}a_1 \end{pmatrix}_n , \qquad (2.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}a_1 & & & & \\ \tau_{21}a_1 & \tau_{22}a_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_1 & \tau_{n-1,2}a_2 & \cdots & \tau_{n-1,n-1}a_{n-1} & \\ \tau_{n1}a_1 & \tau_{n2}a_2 & \cdots & \tau_{n,n-1}a_{n-1} & \tau_{nn}a_n \end{pmatrix}_n , \qquad (2.1.4)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11}a_1 & & & & \\ \tau_{21}a_2 & \tau_{22}a_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_{n-1} & \tau_{n-1,2}a_{n-1} & \cdots & \tau_{n-1,n-1}a_{n-1} & \\ \tau_{n1}a_n & \tau_{n2}a_n & \cdots & \tau_{n,n-1}a_n & \tau_{nn}a_n \end{pmatrix}_n , \qquad (2.1.5)$$

де a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ деякі параметри, а τ_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ деякі числа із числового поля K, назвемо відповідно трикутними матрицями похилої, вертикальної та горизонтальної структури. Матриці виду

$$\begin{pmatrix} x & & & & \\ \tau_{11}a_1 & x & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_{n-1} & \tau_{n-1,2}a_{n-2} & \cdots & x & \\ \tau_{n1}a_n & \tau_{n2}a_{n-1} & \cdots & \tau_{nn}a_1 & 1 \end{pmatrix}_{n+1},$$

$$\begin{pmatrix} x & & & & \\ \tau_{11}a_1 & x & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_1 & \tau_{n-1,2}a_2 & \cdots & x & \\ \tau_{n1}a_1 & \tau_{n2}a_2 & \cdots & \tau_{nn}a_n & 1 \end{pmatrix}_{n+1},$$

$$\begin{pmatrix} x & & & & \\ \tau_{11}a_1 & x & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \tau_{n-1,1}a_{n-1} & \tau_{n-1,2}a_{n-1} & \cdots & x & \\ \tau_{n1}a_n & \tau_{n,2}a_n & \cdots & \tau_{nn}a_n & 1 \end{pmatrix}_{n+1}$$

назвемо відповідно матрицями-многочленами похилої, вертикальної та горизонтальної структури.

Зауважимо, що матриці похилої, вертикальної та горизонтальної структури (2.1.3)–(2.1.5) можна подати відповідно у вигляді:

$$(a_{i-j+\delta_{ij}})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},\ (a_{0\cdot i+j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},\ (a_{i+0\cdot j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Поряд із наведеними вище скінченними трикутними матрицями важлива роль відводиться також нескінченним трикутним матрицям

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i<\infty}.$$

Вправи

2.1.1. Запишіть матрицю $\left(\frac{i\cdot\delta_{ij}+j}{2i-j\cdot\delta_{ij}}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ в розгорнутому вигляді.

2.1.2. Задайте матрицю

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ a_{21} & a_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

у вигляді $(x_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$.

2.1.3. Подайте елементи матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & & & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & 2 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{n-1}{n} & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n-1}{n+2} & \cdots & \frac{n}{2} & \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+2} & \frac{n}{n+3} & \cdots & \frac{n}{2n-1} & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}_n$$

у вигляді функції їх рядків та стовпців.

2.2 Операції над трикутними матрицями

"Усілякі многочлени $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ (або $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$) степеня, не більшого ніж d, утворюють векторний простір P_d над $\mathbb{C}$ розмірності $d + 1$. Існує багато природних способів вибору базису в цьому просторі. Опис цих базисів і матриць переходу від одного з них до іншого міг би скласти цілу книгу."

— Р. Стенлі, [73], стор. 309.

Можна було б дати означення суми та добутку двох трикутних матриць одного порядку. Вони аналогічні до відповідних операцій над квадратними матрицями (нижніми трикутними матрицями). Як відомо, основним смисловим навантаженням квадратних матриць є лінійні перетворення векторних просторів. Такі перетворення вимагають введення відповідних операцій над квадратними матрицями. Позаяк трикутні матриці, як правило, задаються сім'ями многочленів, то одна з ролей трикутних матриць полягатиме у лінійних перетвореннях деякого лінійного простору векторів многочленів.

Означення 2.2.1. *Лінійним простором векторів многочленів назвемо лінійний простір $\mathcal{P}_n$ елементами якого є* вектори многочленів *виду*

$$(f_0, f_1, \ldots, f_n),$$

де

$$f_i = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \ldots + a_{ii}x^i, \ a_{ii} \neq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

— деякі многочлени i-го степеня від змінної величини x.

Скористаємося ідеєю Айгнера про побудову коефіцієнтів зв'язку між поліноміальними послідовностями (див. [1], стор. 110).

Нехай $\mathcal{P}_n$ — лінійний простір векторів многочленів і

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$$

— деякий його елемент. Очевидно, що компоненти цього вектора утворюють базис у деякому лінійному просторі многочленів P_n, елементами якого є многочлени степенів, що неперевищують n. Сукупність многочленів, що є компонентами векторів многочленів простору $\mathcal{P}_n$, очевидно, утворює базис у просторі P_n. Вектор многочленів $e(x) = (1, x, x^2, \ldots, x^n) \in \mathcal{P}_n$ назвемо *стандартним вектором многочленів.*

Нехай, крім вектора $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \in P_n$ маємо ще один такий вектор многочленів $g = (g_0, g_1, \ldots, g_n)$. Виразимо компоненти останнього вектора через базисні многочлени $f_0, f_1, \ldots, f_n$. При цьому отримаємо систему рівностей

$$\left\{\begin{array}{ll} g_0 = & a_{00}f_0 \\ g_1 = & a_{10}f_0 + a_{11}f_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n = & a_{n0}f_0 + a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nn}f_n \end{array}\right. , \tag{2.2.1}$$

або стисло

$$g_i = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}f_j, \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Запишемо цю систему рівностей у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

або стисло

$$g = A \cdot f,$$

тут

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n+1} . \tag{2.2.3}$$

З рівностей (2.2.1), (2.2.2) випливає правило множення трикутної матриці A на вектор многочленів f:

$$\begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{00}f_0 \\ a_{10}f_0 + a_{11}f_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n0}f_0 + a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nn}f_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, трикутну матрицю A можна інтерпретувати як оператор A, який переводить вектор многочленів f у вектор многочленів g.

Очевидно, що тотожному оператору E відповідатиме одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно також, що відповідний трикутній матриці оператор A є лінійним оператором.

Використовуючи суперпозицію двох операторів, що задаються трикутними матрицями можна встановити правило множення двох трикутних матриць:

$$C = AB = \left(\sum_{s=j}^{i} a_{is}b_{sj} \right)_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}. \tag{2.2.4}$$

2.3 Означення парафункцій трикутних матриць

"Теорію матриць можна справедливо вважати арифметикою вищої математики."

— Р.Беллман ([9], стор. 11.)

В цьому параграфі ми вводимо поняття функцій трикутних матриць, які називаємо парадетермінантом та параперманентом трикутних матриць. Розглянемо спочатку деякі допоміжні твердження. Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (2.1.1)

поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k \in \{j, ..., i\}$, які назвемо *похідними елементами* трикутної матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij}. Ключовий елемент трикутної матриці одночасно є і його похідним елементом. Добуток всіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij} позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо ***факторіальним добутком*** цього ключового елемента, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}. \tag{2.3.1}$$

Зобразимо схематично елементи матриці (2.1.1) кружечками, ключові елементи — зафарбованими кружечками, а похідні — зірками. На рис.4 схематично зображена трикутна матриця 5–го порядку, в якій a_{42} — ключовий елемент, а елементи a_{42}, a_{43}, a_{44} — похідні, ним породжені.

$$\begin{pmatrix} \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & \bullet & * & * & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1.

Означення 2.3.1. *Набір ключових елементів матриці (2.1.1) назвемо* ***нормальним набором*** *цієї матриці, якщо вони породжують* ***монотрансверсаль****, тобто множину похідних елементів потужності n, кожні два з яких не лежать в одному стовпчику цієї матриці.*

Наприклад, для того щоб ключовий елемент матриці, схематично зображеної на рис. 2.1., доповнити до нормального набору ключових елементів, до нього необхідно додати ще два ключові елементи a_{11} і a_{55}.

Нехай $C(n,+)$ — множина всіх впорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки. Виявляється, що між елементами цієї множини і нормальними наборами ключових елементів матриці (2.1.1) n–го порядку існує взаємно однозначна відповідність.

Розглянемо деяке впорядковане r–розбиття $p = (p_1, ..., p_r)$. Кожній компоненті p_s, $s \in \{1, ..., r\}$, цього розбиття поставимо у відповідність ключовий елемент a_{ij} матриці (2.1.1) при допомозі наступного алгоритму:

п.1. початок

п.2. $j := 1$; $s := 0$; $i := 0$

п.3. $s := s + 1; i := i + p_s$; ключел$(s) := a_{ij}$

п.4. якщо $s < r$ то $j := j + p_s$; перейти до п.3

п.5. кінець.

При цьому отримаємо нормальний набір ключових елементів, породжений розбиттям p. Легко встановлюється і обернена відповідність.

Взагалі між впорядкованими r-розбиттями та нормальними наборами ключових елементів має місце бієкція (Тараканов В.Є.):

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) \in C_r(n, +) \Leftrightarrow (a_{N_1, N_0+1}, a_{N_2, N_1+1}, \dots, a_{N_r, N_r-1}), \tag{2.3.2}$$

$$N_0 = 0, \; N_s = \sum_{i=1}^{s} n_i, \; s = 1, 2, \dots, r.$$

Наведений вище алгоритм описує ще один геометричний образ впорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки. Нехай маємо трикутну матрицю n–го порядку. За даним розбиттям $p = (p_1, ..., p_r)$ натурального числа n побудуємо нормальний набір елементів цієї матриці, що утворюють її монотрансверсаль.

Першій компоненті p_1 цього розбиття ставиться у відповідність рядок елементів трикутної матриці, в якому налічується рівно p_1

елементів цієї матриці. Таким є p_1–й рядок матриці. Після цього не беруться до уваги перші p_1 стовпців і розглядається нова трикутна матриця $(n - p_1)$ порядку. Другій компоненті p_2 розбиття ставиться у відповідність рядок нової матриці, що складається із p_2 елементів і т.д.

Приклад 2.3.1. Проілюструємо взаємно однозначну відповідність між впорядкованими розбиттями числа 4 і нормальними наборами ключових елементів трикутної матриці четвертого порядку за схемами:

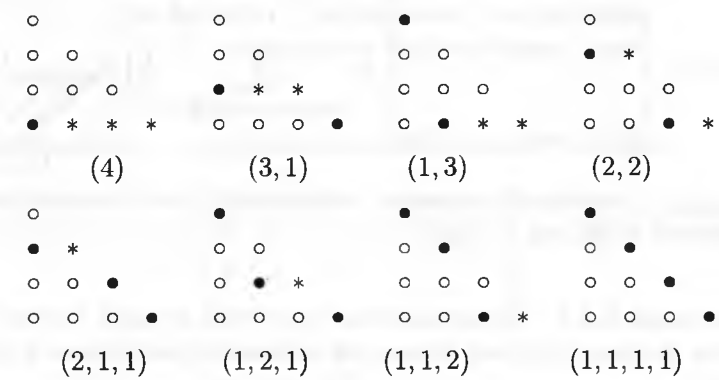


Рис. 2.2.

Кожному нормальному наборові a ключових елементів поставимо у відповідність знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ — сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

Означення 2.3.2. [29]. ***Парадетермінантом*** *трикутної матриці(2.1.1)назвемо число*

$$\mathrm{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s), j(s)}\}, \tag{2.3.3}$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент відповідний s-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а символ $\varepsilon(a)$ — знак нормального набору a ключових елементів.

За аналогією з поняттям перманента квадратної матриці дамо означення параперманента трикутної матриці.

Означення 2.3.3. [29]. ***Параперманентом*** *трикутної матриці (2.1.1) назвемо число*

$$\operatorname{pper}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in \mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\}, \tag{2.3.4}$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент відповідний s-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$.

Зауваження 2.3.1. Параперманент трикутної матриці можна означити як суму добутків елементів всіх монотрансверсалей цієї матриці[1].

Зауваження 2.3.2. Іноді парадетермінант (2.3.2) і параперманент (2.3.4) зручно позначувати через $\langle a_{ij}\rangle_{1\le j\le i\le n}$ и $[a_{ij}]_{1\le j\le i\le n}$.

Зауваження 2.3.3. Внаслідок твердження (1.3.4) на стор. 24, парадетермінант і параперманент n-того порядку складається із 2^{n-1} доданків.

В дальнішому, для зручності, в тих місцях, де йтиметься одночасно про парадетермінант і параперманент трикутної матриці, ми будемо говорити *парафункція трикутної матриці*.

[1]Перманент квадратної матриці жартівливо називають детермінантом без знаків. Його можна означити як суму добутків всіх елементів трансверсалей цієї матриці.

Приклад 2.3.2. Знайдемо, користуючись означенням 2.3.2, значення парадетермінанта трикутної матриці четвертого порядку (див. схеми на стор. 77):

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} = \; & -a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{42}a_{43}a_{44} + \\ & + a_{21}a_{22}a_{43}a_{44} - a_{21}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{32}a_{33}a_{44} - \\ & - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}. \end{aligned}$$

□

Приклад 2.3.3. Знайдемо значення парадетермінанта

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}_n .$$

Користуючись означенням 2.3.3, робимо висновок, що всі доданки даного параперманента дорівнюють 0 або 1. Отже, для обчислення його значення достатньо знайти число ненульових доданків. Очевидно, що ненульові доданки відповідатимуть тим впорядкованим розбиттям числа n, всі натуральні компоненти якого не більші за два, тобто тим розбиттям, первинні специфікації яких мають вигляд $[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}]$, причому виконується рівність

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = n.$$

Згідно з твердженням 1.2.2, всього існує

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2)!}{\lambda_1!\lambda_2!}$$

впорядкувань розбиттів із такою первинною специфікацією. Отже, значення даного параперманента дорівнює

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)!}{\lambda_1!\lambda_2!}.$$

Зауважимо, що знайдена сума дорівнює $(n+1)$–му члену послідовності чисел Фібоначчі [15], які задовольняють рекурентне співвідношення

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_1 = F_2 = 1. \tag{2.3.5}$$

Доведемо теорему, яка могла б слугувати одним із означень парадетермінанта та параперманента трикутних матриць. Ця теорема, по суті, базується на бієкції (2.3.2).

Теорема 2.3.1. [19]. *Якщо A —трикутна матриця (2.1.1), то справедливі рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(\mathrm{A}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}, \tag{2.3.6}$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1+\ldots+p_r=n$.

Доведення. 1). Доведемо, що результатом алгоритму 2.3 на стор. 76 є набір ключових елементів

$$a_{p_1,1}, a_{p_1+p_2,p_1+1}, \ldots, a_{p_1+\ldots+p_r, p_1+\ldots+p_{r-1}+1}.$$

З цією метою підрахуємо кінцеві значення індексів i, j елемента a_{ij} в цьому алгоритмі. Ними, очевидно, будуть суми $i = p_1 + p_2 + \ldots$, $j = 1 + p_1 + \ldots$, причому оскільки $s < r$, то останнім доданком першої суми буде p_r, а другої — p_{r-1}. Очевидно також, що отриманий набір ключових елементів трикутної матриці (2.1.1) буде нормальним набором цієї матриці.

2). Доведемо, що знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$ нормального набору елементів трикутної матриці (2.1.1), в означенні 2.3.2, відповідного розбиттю $p = (p_1, \ldots, p_r)$, збігається зі знаком $(-1)^{n-r}$ цього впорядкованого розбиття.

Дійсно:

$$\sum_{s=1}^{r}((p_1+\ldots+p_s)+(p_1+\ldots+p_{s-1}+1)) \equiv$$

$$\equiv (p_1+\ldots+p_s+r) \equiv (n+r) \equiv n-r \pmod r.$$

□

Доведемо ще одну теорему, яка могла б слугувати означенням парафункцій трикутних матриць. Вона базується на понятті множини $\Xi(n)$.

Теорема 2.3.2. [28]. *Якщо A — трикутна матриця (2.1.1), то справедливі рівності*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{\xi\in\Xi(n)} (-1)^{n-r} \cdot a_{\xi(1),1} a_{\xi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\xi(n),n},$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{\xi\in\Xi(n)} a_{\xi(1),1} a_{\xi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\xi(n),n},$$

де r — потужність бази мультимножини ξ, або число елементів, що належать цій базі.

Доведення. Внаслідок алгоритму, наведеного в доведенні твердження 1.4.1 на стор. 31, справедлива рівність

$$\prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\} = a_{\xi(1),1} a_{\xi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\xi(n),n}.$$

Тому справедливість цієї теореми одразу випливає з теореми 2.3.1 і зауваження 1.4.3 на стор. 32. □

Вправи

2.3.1. Обчисліть

$$\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 & \\ \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

користуючись теоремою 2.3.1 та теоремою 2.3.2.

2.3.2. Знайдіть значення парадетермінанта та параперманента трикутної матриці n–го порядку, в якій діагональні елементи та елементи першого стовпчика дорівнюють 1, а всі інші елементи — нулі.

2.3.3. Знайдіть значення парадетермінанта трикутної матриці, у якій $a_{n1} = 0$, а решта елементів цієї матриці дорівнюють мінус одиниці.

2.3.4. Доведіть, що парадетермінант добутку двох трикутних матриць, взагалі кажучи, не дорівнює добутку парадетермінантів цих матриць.

2.3.5. Обчисліть парадетермінант трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

2.3.6. Знайдіть трикутну матрицю A_3 діагональної структури (тут 3– порядок матриці), для якої виконуються рівності $pper(A_i) = u_i,\ i = 1, 2, 3$.

2.3.7. Розставте знаки "+"і "–"перед елементами параперманента трикутної матриці так, щоб його значення дорівнювало парадетермінанту цієї матриці.

2.4 Властивості парафункцій трикутних матриць

"Щоб підняти авторитет своєї науки, алгебраїсти приховують, що їх визначники – це просто площі, об'єми і т. п., тому що коли визначати їх як жахливі многочлени, побудовані за складними правилами, вся наука про визначники стає зовсім незрозумілою. Якщо ж розпочати з того, що детермінантом називається площа чи об'єм, то всі теореми, з теорії детермінантів, стають очевидними і відразу дістають доведення, які я називаю фізичними, доведеннями в стилі Руссо."

— В.І. Арнольд ([3], стор. 10.)

На жаль, поки-що не знайдено "фізичного означення"парадетермінанта трикутної матриці, яке б дозволило суттєво спростити ряд доведень цього параграфа. Проте, цікавим є той факт, що незважаючи на те, що означення парафункцій трикутних матриць істотно відмінні від означення функцій квадратних матриць, серед властивостей парафункцій трикутних матриць є ряд властивостей, аналогічних до властивостей детермінантів та перманентів.

Спочатку розглянемо деякі важливі поняття, пов'язані з трикутними матрицями, які є аналогами понять мінора та алгебричного доповнення для квадратних матриць.

Кожному елементу a_{ij} заданої трикутної матриці (2.1.1) поставимо у відповідність трикутну матрицю з цим елементом у лівому нижньому куті, яку назвемо *рогом* заданої трикутної матриці і позначимо через $R_{ij}(A)$. Очевидно, що ріг $R_{ij}(A)$ є трикутною матрицею $(i-j+1)$–го порядку. В ріг $R_{ij}(A)$ входять тільки ті елементи a_{rs} трикутної матриці (2.1.1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Нижче будемо вважати, що

$$\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}(A)) =$$
$$= \operatorname{pper}(R_{01}(A)) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}(A)) = 1. \tag{2.4.1}$$

Приклад 2.4.1. Нехай маємо трикутну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \tag{2.4.2}$$

тоді ріг $R_{42}(A)$ має вигляд:

$$R_{42}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & & \\ a_{32} & a_{33} & \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Якщо j-тий стовпчик рога $R_{ij}(A)$ замінено відповідними елементами k-того стовпчика ($k < j$), а всі інші елементи рога незмінні, то такий ріг позначимо через $R_{i,\frac{j}{k}}(A)$. Наприклад, в трикутній матриці (2.4.2) маємо:

$$R_{4\frac{2}{1}}(A) = \begin{pmatrix} a_{21} & & \\ a_{31} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Нижче будемо вважати, що

$$\operatorname{ddet}(R_{n,\frac{n+1}{n}}(A)) = \operatorname{pper}(R_{n,\frac{n+1}{n}}(A)) = 0.$$

Якщо ж i-тий рядок рога R_{ij} трикутної матриці A замінено відповідними елементами k-го рядка ($k > i$), а всі інші елементи рога незмінні, то такий ріг будемо позначувати через $R_{\frac{i}{k},j}(A)$, або просто через $R_{\frac{i}{k},j}$. Нижче ми вважаємо, що

$$\operatorname{ddet}(R_{\frac{0}{i},1}) = \operatorname{pper}(R_{\frac{0}{i},1}) = 0. \tag{2.4.3}$$

Означення 2.4.1. *Прямокутну таблицю елементів трикутної матриці (2.1.1) назвемо вписаною в цю матрицю, якщо одна її вершина збігається з елементом a_{n1}, а протилежна до неї — з елементом a_{ii}, $i \in \{1, \dots, n\}$. Цю таблицю позначимо через $T(i)$.*

Якщо в означенні 2.4.1 $i = 1$, або $i = n$, то вписана прямокутна таблиця вироджується відповідно у перший стовпчик або у n-тий рядок цієї трикутної матриці.

Приклад 2.4.2. На рис. 2.3., елементи прямокутної таблиці $T(3)$, вписаної в трикутну матрицю четвертого порядку, виділено прямокутником

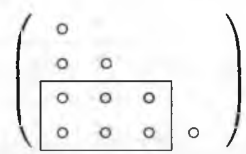


Рис. 2.3.

При знаходженні значення парадетермінанта і параперманента трикутних матриць зручно користуватися *алгебраїчними доповненнями.*

Означення 2.4.2. ***Парадетермінантним та параперманентним алгебричними доповненнями*** *D_{ij}, P_{ij} до факторіального добутку $\{a_{ij}\}$ ключового елемента a_{ij} матриці (2.1.1) назвемо відповідно числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}), \tag{2.4.4}$$

$$P_{ij} = \operatorname{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+1}), \tag{2.4.5}$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ — роги трикутної матриці (2.1.1).

Зауваження 2.4.1. Для виділення рогів, алгебраїчного доповнення до факторіального добутку елемента a_{ij} трикутної матриці

(2.1.1) зручно користуватися наступною схемою, зображеною на рис. 2.4.

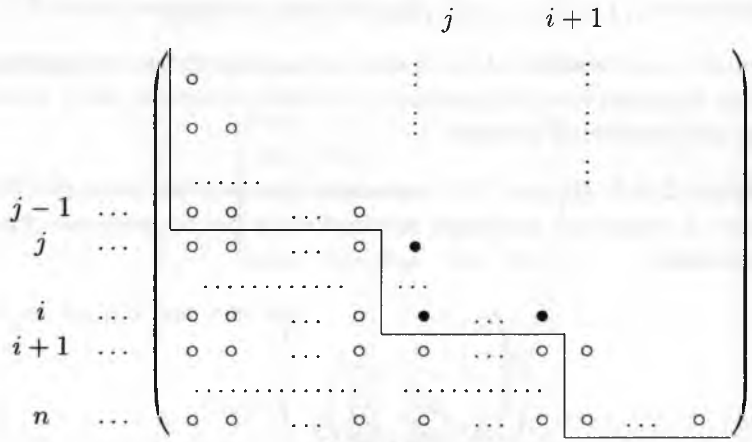


Рис. 2.4.

На цій схемі виділено ріг R_{ij}, відповідний елементу a_{ij}. Елементи цього рога позначені чорними кружечками. Два роги $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$, елементи яких позначені білими кружечками, є складовими частинами алгебричного доповнення до факторіального добутку елемента a_{ij}.

Приклад 2.4.3. Парадетермінантне алгебричне доповнення D_{54} до факторіального добутку елемента a_{54} трикутної матриці

$$(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant 7} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & & \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

дорівнює

$$D_{54} = (-1)^{5+4} \cdot \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \operatorname{ddet} \begin{pmatrix} a_{66} & \\ a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

Тепер приступимо до вивчення властивостей парафункцій трикутних матриць.

Теорема 2.4.1. [29]. (Розклад парафункції за елементами вписаної прямокутної таблиці). *Нехай A — трикутна матриця (2.1.1), а $T(i)$ — деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів. Тоді справедливі рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\}\, D_{rs}, \tag{2.4.6}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\}\, P_{rs}, \tag{2.4.7}$$

де D_{rs} і P_{rs} — відповідно парадетермінантне та параперманентне алгебричні доповнення до факторіального добутку ключового елемента a_{rs}, який належить таблиці $T(i)$.

Доведення. Роги $R_{s-1,1}$ і $R_{n,r+1}$ складаються з різних елементів матриці (2.1.1), які мають відповідно порядок $(s-1)-1+1 = s-1$ і $n-(r+1)+1 = n-r$. За означеннями 2.3.2 і 2.3.3 (стор.77), парадетермінант і параперманент цих рогів є відповідно сумами 2^{s-2} і 2^{n-r-1} різних доданків (тут, згідно з погодженнями (2.4), зручно вважати, що $2^{-1} = 1$). Тому вирази $\{a_{rs}\}\, D_{rs}$, $\{a_{rs}\}\, P_{rs}$ при $n \in \{1, 2, \ldots\}$ складаються із $2^{s-2} \cdot 2^{n-r-1}$ різних доданків. З рис. 8 видно, що ключовий елемент a_{rs} матриці (2.1.1) входить в нормальний набір ключових елементів цієї матриці лише в комбінації з нормальними наборами ключових елементів її рогів $R_{s-1,1}$, $R_{n,r+1}$. Зауважимо, що кожний доданок, який входить до правої частини рівностей (2.4.6), (2.4.7) складається із добутку n різних елементів матриці (2.1.1), бо $(s-1)+(r-s+1)+(n-r) = n$, де $s-1$ і $n-r$ — порядки рогів $R_{s-1,1}$ і $R_{n,r+1}$, а добуток $\{a_{rs}\}$ складається із $r-s+1$ співмножників (див. рис. 2.5.).

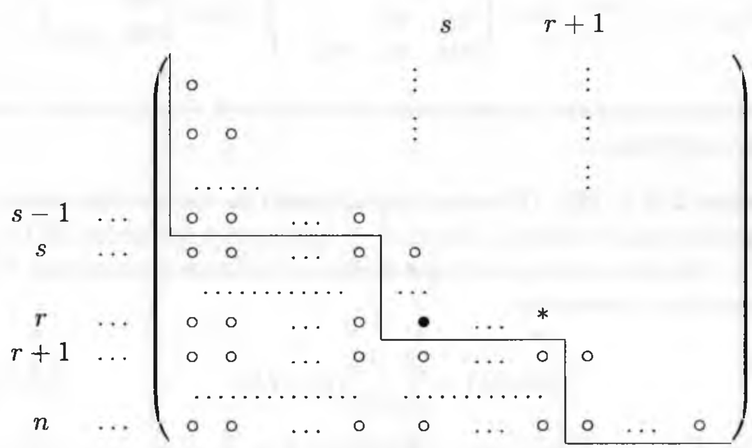


Рис. 2.5.

Вирази в правій частині рівностей (2.4.6), (2.4.7) складаються із 2^{n-1} доданків. Справді,

$$\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n} 2^{s-2}\cdot 2^{n-r-1} =$$

$$= (1+2^0+\ldots+2^{i-2})(2^{n-i-1}+2^{n-i-2}+\ldots+2^0+1) = 2^{n-1}.$$

Тому що всі ці доданки різні, то теорема доведена. □

Приклад 2.4.4. Знайдемо значення парадетермінанта

$$\left\langle\begin{matrix} 1 & & & & \\ 3 & 5 & & & \\ 0 & -4 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{matrix}\right\rangle = (-4)\cdot 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\langle 1\rangle\cdot\left\langle\begin{matrix} 2 & \\ -3 & 1\end{matrix}\right\rangle +$$

$$+1\cdot(-1)^{3+3}\left\langle\begin{matrix} 1 & \\ 3 & 5\end{matrix}\right\rangle\cdot\left\langle\begin{matrix} 2 & \\ -3 & 1\end{matrix}\right\rangle = -30.$$

В цьому парадетермінанті можна виділити вписану прямокутну таблицю $T(3)$, до складу якої входять лише два ненульові елементи заданої трикутної матриці. Тому ми й розкладемо парадетермінант за елементами цієї вписаної прямокутної таблиці.

Наслідок 2.4.1.1. *Якщо $i=1$, то теорема 2.4.1 дає розклад парафункцій за елементами першого стовпчика і рівності (2.4.6), (2.4.7) матимуть вигляд:*

$$\mathrm{ddet}\,(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}\,D_{r1} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\{a_{r1}\}\cdot\mathrm{ddet}\,(R_{n,r+1}), \quad (2.4.8)$$

$$\mathrm{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}\,P_{r1} = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}\cdot\mathrm{pper}(R_{n,r+1}). \quad (2.4.9)$$

Якщо ж $i=n$, то отримаємо розклад парафункцій за елементами останнього рядка:

$$\mathrm{ddet}\,(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\,D_{ns} = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\{a_{ns}\}\cdot\mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1}), \quad (2.4.10)$$

$$\mathrm{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\,P_{ns} = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\cdot\mathrm{pper}(R_{s-1,1}). \quad (2.4.11)$$

Доведення. При $i=1$ вписаний прямокутник вироджується в перший стовпчик матриці (2.1.1). При цьому, враховуючи рівності (2.4.4), (2.4.5), внаслідок домовленостей (2.4) отримаємо рівності (2.4.8), (2.4.9).

Рівності (2.4.10), (2.4.11) доводяться аналогічно. □

Наслідок 2.4.1.2. *Якщо всі елементи i-того стовпчика ($i\in\{1,\ldots,n\}$) трикутної матриці (2.1.1) — нулі, то*

$$\mathrm{ddet}\,(A) = \mathrm{pper}(A) = 0.$$

Доведення. Справедливість цього наслідку випливає із того, що всі факторіальні добутки елементів вписаної прямокутної таблиці $T(i)$ дорівнюють нулю. □

Приклад 2.4.5. Нехай

$$P_n = \begin{bmatrix} q_0 & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{bmatrix}_{n+1} \quad Q_n = \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_1}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{bmatrix}_n \tag{2.4.12}$$

тоді справедливі рекурентні рівності:

$$P_n = q_nP_{n-1} + p_nP_{n-2}, \; Q_n = q_nQ_{n-1} + p_nQ_{n-2}, \tag{2.4.13}$$

де

$$P_{-1} = Q_0 = 1, \; P_{-2} = Q_{-1} = 0.$$

Справедливість цих рівностей одразу випливає із розкладу парапермanентів в рівностях (2.4.12) за елементами останнього рядка.

Справедливе наступне

Твердження 2.4.1. *Нехай P_n і Q_n задані рівностями (2.4.12), тоді справедливі тотожності:*

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.4.14}$$

Доведення. Перевіримо справедливість цього твердження для $n = 1$.

$$P_1Q_0 - P_0Q_1 = (q_0q_1 + p_1) \cdot 1 - q_0q_1 = p_1.$$

Нехай рівності (2.4.14) справедливі при $n = 2, 3, \ldots, k$. Доведемо, що тоді вони справедливі також і для $n = k + 1$. При цьому користуватимемось рекурентними рівностями (2.4.13):

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = (q_{n+1}P_n + p_{n+1}P_{n-1})Q_n - P_n(q_{n+1}Q_n + p_{n+1}Q_{n-1}) =$$

$$= p_{n+1}(p_{n-1}Q_n - Q_{n-1}P_n) = (-1)^kp_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n+1}.$$

□

Часто трапляється так, що задана деяка трикутна матриця $(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ і потрібно знайти її парафункції при $n = 1, 2, \ldots, m$. В цьому випадку виявляється зручним алгоритм, який базується на розкладі парафункцій за елементами останнього рядка.

Розкладаючи парадетермінант

$$D(i) = \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{array} \right\rangle_i$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$ за елементами останнього рядка отримаємо рекурентну рівність

$$D_i = \sum_{j=1}^{i} b_jD_{i-j}, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; D_0 = 1$$

в якій коефіцієнти b_i задовольняють рекурентну рівність

$$b_r = (-1) \cdot a_{i,i-r+1} \cdot b_{r-1}, \; r = 1, 2, \ldots, i; \; b_0 = -1.$$

Легко переконатися, що для обчислення множини значень $D_1, D_2, \ldots, D_n$ необхідно виконати всього

$$2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

операцій множення.

Твердження 2.4.2. [29]. *Якщо відповідні елементи всіх рядків вписаної прямокутної таблиці $T(i)$, $i = 1, \ldots, n - 1$ трикутної матриці (2.1.1) рівні, тобто справедливі рівності*

$$a_{ij} = a_{i+1,j} = \ldots = a_{nj} = a_j, \; j = 1, \ldots, i, \tag{2.4.15}$$

то справедлива також рівність

$$\sum_{s=1}^{i}\{a_{is}\}D_{is} = -\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}. \qquad (2.4.16)$$

Для парапермaнента такої трикутної матриці справедлива аналогічна рівність:

$$\sum_{s=1}^{i}\{a_{is}\}P_{is} = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}P_{rs}. \qquad (2.4.17)$$

Доведення. Доведемо рівність (2.4.16). За означенням 2.4.2 алгебраїчного доповнення (див. рівність (2.4.4) на стор.85), вираз $\{a_{is}\}D_{is}$, згідно з рівністю (2.4.15), дорівнює

$$\{a_{is}\}D_{is} = (-1)^{i+s}a_s a_{s+1}\dots a_i \mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1})\mathrm{ddet}\,(R_{n,i+1}). \quad (2.4.18)$$

Розглянемо вираз

$$\sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}.$$

Позаяк

$$\{a_{rs}\} = a_s\dots a_i\{a_{r,i+1}\}, \ \ r = i+1,\dots,n,$$

то

$$\sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}=\sum_{r=i+1}^{n}(-1)^{r+s}a_s\dots a_i\{a_{r,i+1}\}\mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1})\mathrm{ddet}\,(R_{n,r+1})=$$

$$= a_s\dots a_i \mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1})\sum_{r=i+1}^{n}(-1)^{(r+i+1)+(s-i-1)}\{a_{r,i+1}\}\mathrm{ddet}\,(R_{n,r+1}) =$$

$$= (-1)^{s-i-1}a_s\dots a_i \mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1})\sum_{r=i+1}^{n}(-1)^{r+i+1}\{a_{r,i+1}\}\mathrm{ddet}\,(R_{n,r+1}).$$

Але сума

$$\sum_{r=i+1}^{n}(-1)^{r+i+1}\{a_{r,i+1}\}\mathrm{ddet}\,(R_{n,r+1})$$

є результатом розкладу парадетермінанта рога $R_{n,i+1}$ за елементами його першого стовпчика, тому, враховуючи рівність (2.4.18), маємо:

$$\sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs} =$$

$$= (-1)^{s-i-1+2i}a_s\dots a_i \mathrm{ddet}\,(R_{s-1,1})\mathrm{ddet}\,(R_{n,i+1}) = -\{a_{is}\}D_{is}.$$

Остання рівність і доводить справедливість рівності (2.4.16).

Рівність (2.4.17) доводиться аналогічно до щойно доведеної рівності. □

Наслідок 2.4.1.3. *Якщо відповідні елементи всіх рядків, вписаної в трикутну матрицю (2.1.1) прямокутної таблиці $T(i)$, $i = 1,\dots,n-1$, рівні між собою, тобто виконуються умови (2.4.15) твердження 2.4.2, то парадетермінант такої трикутної матриці дорівнює нулю, а для парапермaнента справедлива рівність:*

$$\mathrm{pper}(A) = 2\cdot\mathrm{pper}(R_{n,i+1})\left[\begin{array}{lllll} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \end{array}\right] \qquad (2.4.19)$$

Доведення. Розкладемо парадетермінант заданої трикутної матриці за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(i)$:

$$\mathrm{ddet}\,(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs} = \sum_{s=1}^{i}\left(\{a_{is}\}D_{is} + \sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}\right).$$

Вираз в дужках останньої рівності, внаслідок рівності (2.4.16) дорівнює нулю. Це і доводить першу частину наслідку.

Доведемо другу частину наслідку. Враховуючи рівність (2.4.17) аналогічно отримаємо рівності:

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}P_{rs} = \sum_{s=1}^{i}\left(\{a_{is}\}P_{is} + \sum_{r=i+1}^{n}\{a_{rs}\}P_{rs}\right) =$$

$$= 2\cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+1})\sum_{s=1}^{i}\{a_{is}\}\ \operatorname{pper}(R_{s-1,1}).$$

Позаяк сума

$$\sum_{s=1}^{i}\{a_{is}\}\ \operatorname{pper}(R_{s-1,1})$$

є результатом розкладу параперманента рога

$$R_{i,1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,i-1} & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i \end{bmatrix}$$

за елементами останнього рядка, то цим доведено і другу частину наслідку 2.4.1.3. □

Наслідок 2.4.1.4. *Якщо всі елементи першого стовпця трикутної матриці (2.1.1) при ($n > 1$) дорівнюють a, то її парадетермінант дорівнює нулю, а параперманент дорівнює подвосному добутку цього числа на параперманент трикутної матриці, утвореної в результаті викреслення її першого стовпця.*

Приклад 2.4.6. Знайдемо значення парадетермінантів трикутних матриць

$$A = \left(\frac{i}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},\quad B = (j-(j-1)\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Значення елементів першого стовпця цих трикутних матриць дорівнюють

$$a_{i1} = \frac{i}{i-1+1} = 1,\ b_{i1} = 1,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, згідно з наслідком 2.4.1.4, парадетермінанти цих матриць при $n > 1$ дорівнюють 0. При $n = 1$ парадетермінанти цих трикутних матриць дорівнюють 1.

Приклад 2.4.7. Знайдемо значення параперманента трикутної матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 & & & \\ \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{1}{2}a_1 & \frac{1}{2}a_2 & \dots & \frac{1}{2}a_n \end{pmatrix}_n = \left(\frac{1}{2}a_j\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

З цією метою до даної трикутної матриці застосуємо $(n-1)$ разів другу частину наслідку 2.4.1.4. При цьому отримаємо наступний результат:

$$\operatorname{pper}\left(\frac{1}{2}a_j\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

Якщо у заданій трикутній матриці $a_j = j$, то, розкладаючи її за елементами останнього рядка, отримаємо ще одну тотожність (див. (3.2.71) на стор. 276) для факторіала

$$n! = \frac{n!}{2^{n-1}} + \sum_{s=2}^{n}\frac{(s-1)!s^{\overline{n-s+1}}}{2^{n-s+1}},$$

або

$$n! = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\cdot\sum_{s=2}^{n}\frac{(s-1)!s^{\overline{n-s+1}}}{2^{n-s+1}}.$$

Твердження 2.4.3. *Нехай задана трикутна матриця (2.1.1), тоді справедливі рівності:*

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}\, D_{rj} = \mathrm{ddet}\,(R_{j-1,1})\mathrm{ddet}\,(R_{nj}), \qquad (2.4.20)$$

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}\, P_{rj} = \mathrm{pper}(R_{j-1,1})\mathrm{pper}(R_{nj}). \qquad (2.4.21)$$

Доведення.

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\} D_{rj} = \sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\} \cdot (-1)^{r+j} \mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\mathrm{ddet}(R_{n,r+1}) =$$

$$= \mathrm{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r+j} \{a_{rj}\} \mathrm{ddet}(R_{n,r+1}).$$

Остання сума є результатом розкладу парадетермінанта $\mathrm{ddet}(R_{nj})$ за елементами першого її стовпця, тому рівність (2.4.20) справедлива.

Аналогічно доводиться рівність (2.4.21). □

Твердження 2.4.4. *Якщо всі елементи j-того стовпця $(1 < j < n)$ трикутної матриці (2.1.1) дорівнюють a, то її парадетермінант дорівнює добутку числа $(-a)$ на парадетермінант трикутної матриці B, яку отримаємо із заданої викресленням j-того стовпця та $(j-1)$-го рядка.*

Для параперманента цієї трикутної матриці справедлива рівність

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,j-1} & & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,j-1} & a & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a & \ldots & a_{nn} \end{array}\right] =$$

$$= a \cdot (2pper(R_{j-1,1}) \cdot pper(R_{n,j+1}) + pper(B)).$$

Доведення. Доведемо першу частину цього твердження. Розкладемо парадетермінант даної трикутної матриці за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(j)$. В цей розклад ввійдуть всі доданки, які утворюються в результаті розкладу за елементами j-го стовпця. Згідно з твердженням 2.4.3 всі вони входять у вираз $\mathrm{ddet}\,(R_{j-1,1}) \cdot \mathrm{ddet}\,(R_{nj})$, значення якого дорівнює нулю (див. наслідок 2.4.1.4 на стор. 94), бо $\mathrm{ddet}\,(R_{nj}) = 0$. Але до складу виразу $\mathrm{ddet}\,(R_{j-1,1}) \cdot \mathrm{ddet}\,(R_{nj})$ належать всі доданки, множниками яких є принаймні один елемент $(j-1)$-го рядка, тому при обчисленні парадетермінанта трикутної матриці (2.1.1) $(j-1)$-й рядок можна видалити. Решту доданків розкладу парадетермінанта за елементами вписаної прямокутної таблиці мають співмножник a, тому його винесення за дужки рівнозначне видаленню j-того стовпця трикутної матриці (2.1.1). При цьому сума індексів ключового елемента, який належить вписаній прямокутній таблиці, зменшиться на одиницю, а індекси решти ключових елементів не зміняться. Отже, видалення j-того стовпця міняє парність суми індексів ключових елементів кожного доданка і за дужки необхідно винести також (-1).

Доведемо другу частину твердження (2.4.4). Розкладемо параперманент заданої трикутної матриці за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(j)$:

$$\mathrm{pper}(A) = \sum_{s=1}^{j} \sum_{r=j}^{n} \{a_{rs}\}\, P_{rs} = \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{r=j}^{n} \{a_{rs}\}\, P_{rs} + \sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\} P_{rj}. \qquad (2.4.22)$$

Міркування аналогічні до міркувань доведення першої частини цього твердження дають рівність

$$\sum_{s=1}^{j-1} \sum_{r=j}^{n} \{a_{rs}\}\, P_{rs} = a \cdot \mathrm{pper}(B)$$

Другий доданок рівності (2.4.22) є розкладом параперманента заданої трикутної матриці за елементами j–го стовпця, тому, згідно із наслідком 2.4.1.4, маємо:

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}P_{rj}=\operatorname{pper}(R_{j-1,1})\cdot \operatorname{pper}(R_{nj})=2a\cdot \operatorname{pper}(R_{j-1,1})\ \operatorname{pper}(R_{n,j+1}).$$

□

Твердження 2.4.5. *Якщо всі елементи a_{ri}, i–того стовпця трикутної матриці (2.1.1) є сумою деяких двох елементів, тобто $a_{ri}=b_{ri}+c_{ri}$, де $r\in\{i,\ldots,n\}$, то справедлива рівність*

$$\left\langle\begin{array}{llllll} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_{ii}+c_{ii} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{ni}+c_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right\rangle=$$

$$\left\langle\begin{array}{llllll} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_{ii} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right\rangle+\left\langle\begin{array}{llllll} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & c_{ii} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & c_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right\rangle. \qquad (2.4.23)$$

Для параперманентів справедлива аналогічна рівність.

Доведення. За означенням парадетермінанта, кожний його доданок є добутком n елементів трикутної матриці (2.1.1). Причому до кожного з них в ролі співмножника входить один і тільки один елемент i-того стовпця. Тому в кожному із 2^{n-1} доданків парадетермінанта лівої частини цієї рівності присутній множник $(b_{ri}+c_{ri})$, $r\in\{i,\ldots,n\}$. Розкриваючи дужки в кожному доданку і групуючи відповідні доданки, отримаємо праву частину рівності (2.4.23). □

Зауваження 2.4.2. Користуючись твердженням 2.4.5, по індукції, можна довести справедливість аналогічного твердження у випадку k доданків $b_{ri}^{(1)}+b_{ri}^{(2)}+\ldots+b_{ri}^{(k)}$, $r\in\{i,\ldots,n\}$.

Твердження 2.4.6. *Якщо всі елементи i–того стовпця*

$$i\in\{1,\ldots,n\}$$

парадетермінанта трикутної матриці (2.1.1) задовольняють рівності $a_{ri}=k\cdot b_{ri}$, $r\in\{i,\ldots,n\}$, то справедлива рівність:

$$\left\langle\begin{array}{llllll} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & k\cdot b_{ii} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & k\cdot b_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right\rangle=$$

$$k\cdot\left\langle\begin{array}{llllll} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_{ii} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right\rangle.$$

Для параперманентів виконується аналогічне твердження.

Доведення цього твердження аналогічне до доведення твердження 2.4.5. □

Твердження 2.4.7. *Для довільної трикутної матриці (2.1.1) і довільного числа $k\in K$, де K — деяке числове поле, справедливі* *рівності:*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11}+k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11}-k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right].$$

Доведення. Доведемо другу рівність цього твердження, користуючись твердженням 2.4.5 і наслідком 2.4.1.4.

$$\mathrm{pper}(A) =$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11}+k-k & & & \\ a_{21}+k-k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k-k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] \overset{\text{тв.2.4.5}}{=} \left[\begin{matrix} a_{11}+k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] +$$

$$+\left[\begin{matrix} -k & & & \\ -k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] \overset{\text{насл.2.4.1.4}}{=} \left[\begin{matrix} a_{11}+k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] +$$

$$+(-2k)\cdot\left[\begin{matrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} a_{11}+k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] +$$

$$+\left[\begin{matrix} -2k & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right] \overset{\text{тв.2.4.5}}{=} \left[\begin{matrix} a_{11}-k & & & \\ a_{21}+k & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}+k & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right]$$

Доведення першої рівності аналогічне. □

Твердження 2.4.8. *Якщо у трикутній матриці A її верхній елемент (див. означення 2.1.1 на стор. 67) дорівнює 0 і довільний елемент першого стовпця перемножити на деяке число $k \neq 0$, а відповідний елемент другого стовпця розділити на це число, то значення парадетермінанта і параперманента утвореної трикутної матриці A' не зміниться.*

Доведення. Доведемо справедливість цього твердження для параперманентів. Порівняємо факторіальні добутки елементів першого стовпчика трикутних матриць A и A'. Очевидно, що вони рівні між собою. Отже, розклади параперманентів цих трикутних матриць за елементами першого стовпця збігаються.

Для парадетермінантів доведення аналогічне. □

Зауваження 2.4.3. Якщо у трикутній матриці (2.1.1), у першому її стовпці, крім верхнього елемента, є ще нульові елементи, то їх можна замінити одиницями, але відповідні їм елементи другого стовпця потрібно замінити нулями. Справедливість цієї примітки підтверджується міркуваннями аналогічними до міркувань доведення твердження 2.4.8.

Доведемо теорему, яка дає зручний і ефективний алгоритм обчислення парафункцій трикутних матриць. З її допомогою порядок парафункції трикутної матриці понижується на одиницю. Ідея доведення цієї теореми дещо нагадує метод Гауса для обчислення детермінантів квадратних матриць.

Теорема 2.4.2. [19] *Для довільної трикутної матриці (2.1.1) справедливі рівності:*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_n = \left\langle\begin{matrix} (a_{11}-a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}-a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ (a_{11}-a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle_{n-1} \tag{2.4.24}$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right]_n = \left[\begin{matrix} (a_{11}+a_{21})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{11}+a_{31})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ (a_{11}+a_{n1})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right]_{n-1} \qquad (2.4.25)$$

Доведення. Доведемо першу частину цієї теореми — справедливість рівності (2.4.24). Якщо верхній елемент трикутної матриці (2.1.1) не дорівнює нулю, то, при допомозі твердження 2.4.7 парадетермінант цієї трикутної матриці можна замінити рівновеликим парадетермінантом з нульовим верхнім елементом. Перейдемо до рівновеликого парадетермінанта з одиничними елементами в першому його стовпці (крім верхнього елемента). Цього можна досягнути при допомозі твердження 2.4.8 і примітки 2.4.3. Тепер для доведення першої частини теореми залишилось, при допомозі твердження 2.4.7, відняти одиницю від всіх елементів першого стовпця і розкласти отриманий парадетермінант за елементами цього стовпця.

Друга частина доведення цієї теореми аналогічна до доведення першої частини. □

Твердження 2.4.9. *Для довільної трикутної матриці (2.1.1) і довільних чисел k_i, $i = 2, \ldots, n$ справедливі рівності:*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21}-k_2 & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1}-k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix} k_2a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ k_na_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle, \qquad (2.4.26)$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21}-k_2 & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1}-k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} k_2a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ k_na_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right]. \qquad (2.4.27)$$

Доведення. Справедливість рівностей (2.4.9), (2.4.27) одразу випливає із розкладу першого парадетермінанта або першого параперманента правої частини цих рівностей за елементами їх першого стовпця. □

Теорему 2.4.2 легко довести також при допомозі твердження 2.4.9. Справді, для доведення рівності (2.4.24) покладемо в рівності (2.4.9) $k_i = a_{i1}$, $i = 2, \ldots, n$. Тоді, враховуючи твердження 2.4.5, отримаємо наступні рівності:

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix} a_{21}a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} a_{11}a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{11}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle - \left\langle\begin{matrix} a_{21}a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle =$$

$$\left\langle\begin{matrix} (a_{11}-a_{21})a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ (a_{11}-a_{n1})a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle.$$

Рівність (2.4.25) теореми 2.4.2 доводиться аналогічно.

Наслідок 2.4.2.1. *Для обчислення парафункції трикутної матриці (2.1.1) достатньо виконати всього* $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ *операцій множення і стільки ж операцій додавання.*

Доведення. При переході від парафункції n–го порядку до парафункції $(n-1)$–го порядку, за теоремою 2.4.2, достатньо виконати $(n-1)$ операцій множення і стільки ж операцій додавання. Отже, для обчислення значення парафункції n–го порядку достатньо виконати всього

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

операцій множення і стільки ж операцій додавання. □

Зауваження 2.4.4. Позаяк парафункція трикутної матриці (2.1.1) містить $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ елементів і всі вони впливають на значення парафункції цієї трикутної матриці, то алгоритм обчислення парафункції, істотно покращити не можна.

Приклад 2.4.8. Знайдемо значення параперманента

$$Q_n=\left[\begin{array}{cccccc} q_1 & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & \\ 0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_n, \qquad (2.4.28)$$

якщо $q_1=1,\ p_i+q_i=1,\ i=2,3,\ldots$.

Очевидно, що

$$Q_1=[q_1]=1,$$

$$Q_2=\left[\begin{array}{cc} 1 & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 \end{array}\right]=p_2+q_2=1.$$

Розкладемо параперманент (2.4.28) за елементами останнього рядка. За індукцією маємо:

$$Q_n=q_nQ_{n-1}+p_nQ_{n-1}=q_n+p_n=1.$$

Розглянемо теорему 2.4.2 більш детально. Згідно з цією теоремою, парафункція трикутної матриці A n–го порядку замінюється парфункцією трикутної матриці $A^{(1)}$ $(n-1)$–го порядку, елементи якої знаходяться в два етапи:

1. Обчислюється значення виразу: $a_{i1}^{(1)}=(a_{11}-a_{i1})\cdot a_{i2},\ i=2,3,\ldots,n.$ — у випадку обчислення парадетермінанта і виразу $a_{i1}^{(1)}=(a_{11}+a_{i1})\cdot a_{i2},\ i=2,3,\ldots,n$ — у випадку обчислення значення параперманента.

Виноситься найбільший спільний дільник (якщо такий є) за знак відповідної парафункції.

Замінюється в отриманому виразі i на $i+1$. Отриманий вираз дорівнює значенню елементів $a_{i1}^{(1)},\ i=1,2,\ldots,n-1$ першого стовпця нової матриці $(n-1)$–го порядку.

2. Решту елементів нової матриці $A^{(1)}$ дістаємо замінюючи елементи $a_{ij},\ i,j=3,4,\ldots,n$ відповідними елементами

$$a_{ij}^{(1)}=a_{i+1,j+1},\ i,j=2,3,\ldots,n-1.$$

Таким чином, при допомозі $(n-1)$ ітерацій

$$\begin{aligned} a_{i1}^{(k)} &= (a_{11}^{(k-1)}-a_{i+1,1}^{(k-1)})a_{i+1,2}^{(k-1)},\ k=1,2,\ldots,n-1,\ i=1,2,\ldots,n-k, \\ a_{ij}^{(k)} &= a_{i+1,j+1}^{(k-1)},\ i,j=2,3,\ldots,n-k, \end{aligned} \qquad (2.4.29)$$

приходимо до рівності

$$\operatorname{ddet}(A)=a_{11}^{(n-1)}.$$

Вище ми вважаємо, що $a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$.

Знайдемо значення парадетермінанта

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Перша ітерація.

$$a_{11}=a+b+c,$$

$$a_{i+1,1} = \frac{a(i+1)+b+c}{i+1}, \; i=1,2,\dots,n-1,$$

$$a_{i+1,2} = \frac{a(i+1)+2b+c}{i}, \; i=1,2,\dots,n-1.$$

$$a_{i1}^{(1)} = (a_{11} - a_{i+1,1}) \cdot a_{i+1,2} =$$

$$= \left(a+b+c - \frac{a(i+1)+b+c}{i+1}\right) \cdot \frac{a(i+1)+2b+c}{i} =$$

$$= (b+c) \cdot \frac{a(i+1)+2b+c}{i+1}, \; i=1,2,\dots,n-1.$$

Виносимо спільний множник $(b+c)$, за знак paрадетермінанта.

$$a_{ij}^{(1)} = a_{i+1,j+1} = \frac{a(i+1)+b(j+1)+c}{(i+1)-(j+1)+1} =$$

$$= \frac{ai+bj+a+b+c}{i-j+1}, \; i,j=2,3,\dots,n-1.$$

Друга ітерація.

$$a_{11}^{(1)} = \frac{2a+2b+c}{2},$$

$$a_{i+1,1}^{(1)} = \frac{a(i+1)+a+2b+c}{i+2}, \; i=1,2,\dots,n-1,$$

$$a_{i+1,2}^{(1)} = \frac{a(i+1)+a+3b+c}{i}, \; i=1,2,\dots,n-1,.$$

$$a_{i1}^{(2)} = (a_{11}^{(1)} - a_{i+1,1}^{(1)}) \cdot a_{i+1,2}^{(1)} =$$

$$= \left(\frac{2a+2b+c}{2} - \frac{a(i+1)+a+2b+c}{i+2}\right) \times$$

$$\times \frac{a(i+1)+a+3b+c}{i} = \frac{2b+c}{2} \cdot \frac{a(i+1)+a+3b+c}{i+2},$$

де $i=1,2,\dots,n-2$. Виносимо спільний множник $\frac{2b+c}{2}$.

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{ai+bj+2a+2b+c}{i-j+1}, \; i=2,3,\dots,n-2.$$

Третя ітерація.

$$a_{11}^{(2)} = \frac{3a+3b+c}{3},$$

$$a_{i+1,1}^{(2)} = \frac{a(i+1)+2a+3b+c}{i+3}, \; i=1,2,\dots,n-2,$$

$$a_{i+1,2}^{(2)} = \frac{a(i+1)+2a+4b+c}{i}, \; i=1,2,\dots,n-2.$$

$$a_{i1}^{(3)} = (a_{11}^{(2)} - a_{i+1,1}^{(2)}) \cdot a_{i+1,2}^{(2)} =$$

$$= \left(\frac{3a+3b+c}{3} - \frac{a(i+1)+2a+3b+c}{i+3}\right) \cdot \frac{a(i+1)+2a+4b+c}{i} =$$

$$= \frac{3b+c}{3} \cdot \frac{a(i+1)+2a+4b+c}{i+3}, \; i=1,2,\dots,n-3.$$

Виносимо спільний множник $\frac{3b+c}{3}$.

$$a_{ij}^{(3)} = \frac{ai+bi+3a+3b+c}{i-j+1}, \; i,j=2,3,\dots,n-3.$$

Після трьох ітерацій спостерігаються деякі закономірності: Перші стовпці:

$$\frac{ai+a+2b+c}{i+1}, \; \frac{ai+2a+3b+c}{i+2}, \; \frac{ai+3a+4b+c}{i+3}$$

Спільні множники перших стовпців:

$$\frac{b+c}{1}, \; \frac{2b+c}{2}, \; \frac{3b+c}{3}.$$

Тому можна очікувати, що після k–тої ітерації перший стовпець і спільний множник матимуть відповідно вигляд:

$$\frac{ai+ka+(k+1)b+c}{i+k}, \; \frac{kb+c}{k}.$$

Справді, згідно з припущенням, відповідні рівності k–ої ітерації отримають вигляд:

$$\left(\frac{ai+(k-1)a+kb+c}{i+k-1}-\frac{ka+kb+c}{k}\right)\cdot\frac{ai+(k-1)+(k+1)b+c}{i-1}=$$

$$=\frac{(i-1)(kb+c)}{k(i+k-1)}\cdot\frac{ai+(k-1)a+(k+1)b+c}{i-1}=$$

$$=\frac{kb+c}{k}\cdot\frac{ai+(k-1)a+(k+1)b+c}{i+k-1},$$

Спільний множник дорівнює $\frac{kb+c}{k}$.

$$a_{i1}^{(k)}=\frac{ai+ka+(k+1)b+c}{i+k},\ i=1,2,\ldots,n-k.$$

І наше припущення правильне.

Таким чином, після $(n-1)$ ітерацій, за знак парадетермінанта виносимо спільний дільник

$$\frac{(n-1)b+c}{n-1}.$$

При цьому єдиний елемент парадетермінанта першого порядку дорівнює

$$\frac{ai+(n-1)a+nb+c}{i+n-1},\ i=1,$$

тобто

$$\frac{na+nb+c}{n}.$$

Отже, справедлива наступна

Теорема 2.4.3. [39]. *Для довільних дійсних чисел a,b,c справедлива тотожність:*

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c),\qquad(2.4.30)$$

де

$$\prod_{i=1}^{0}(ib+c)=1.$$

Приклад 2.4.9. Знайдемо значення парадетермінанта

$$\left\langle\frac{i-j+n}{i-j+n-1+\delta_{ij}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m}=D_{n,m},\qquad(2.4.31)$$

користуючись формулами (2.4.29). Відразу відзначимо, що

$$a_{ij}^{(s)}=a_{ij}=\frac{i-j+n}{i-j+n-1+\delta_{ij}},\ s=1,2,\ldots$$

і

$$a_{i+1,2}^{(s)}=a_{i+1,2}=\frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}}.$$

Перша ітерація:

$$a_{11}=1,\ a_{i+1,1}=\frac{i+n}{i+n-1},\ i=1,2,\ldots,m.$$

$$a_{i1}^{(1)}=\left(1-\frac{i+n}{i+n-1}\right)\cdot\frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}}=-\frac{1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}},$$

де $i=1,2,\ldots,m-1$. Друга ітерація:

$$a_{11}^{(1)}=-\frac{1}{n},\ a_{i+1,1}^{(1)}=-\frac{1}{i+n-1},\ i=1,2,\ldots,m-1.$$

$$a_{i1}^{(2)}=\frac{-i+1}{n(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i=1,2,\ldots,m-2.$$

Третя ітерація:

$$a_{11}^{(2)}=0,\ a_{i+1,1}^{(2)}=\frac{-i}{n(i+n-1)},\ i=1,2,\ldots,m-2,$$

$$a_{i1}^{(3)}=\frac{i}{n(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i=1,2,\ldots,m-3.$$

Четверта ітерація:

$$a_{11}^{(3)} = \frac{1}{n^2},\ a_{i+1,1}^{(3)} = \frac{i+1}{n(i+n-1)},\ i = 1, 2, \dots, m-3,$$

$$a_{i1}^{(4)} = \frac{-i(n-1)-1}{n^2(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-4, .$$

П'ята ітерація:

$$a_{11}^{(4)} = -\frac{1}{n^2},\ a_{i+1,1}^{(4)} = \frac{-i(n-1)+n}{n^2(i+n-1)},\ i = 1, 2, \dots, m-4,$$

$$a_{i1}^{(5)} = \frac{i(n-2)+1}{n^2(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-5.$$

Шоста ітерація:

$$a_{11}^{5} = \frac{n-1}{n^3},\ a_{i+1,1}^{(5)} = \frac{-i(n-2)+n-1}{n^2(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-5,$$

$$a_{i1}^{(6)} = \frac{-i(n^2-3n+1)-(n-1)}{n^3(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-6.$$

Сьома ітерація:

$$a_{11}^{6} = -\frac{n-2}{n^3},\ a_{i+1,1}^{(6)} = \frac{-i(n^2-3n+1)-n(n-2)}{n^3(i+n-1)},\ i=1, 2, \dots, m-6,$$

$$a_{i1}^{7} = \frac{i(n^2-4n+3)+n-2}{n^3(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-7.$$

Восьма ітерація:

$$a_{11}^{(7)} = \frac{n^2-3n+1}{n^4},\ a_{i+1,1}^{(7)} = \frac{(i+1)(n^2-4n+3)+n-2}{n^3(i+n-1)},\ i=1, 2, \dots, m-7,$$

$$a_{i1}^{(8)} = \frac{-i(n^3-5n^2+6n-1)-(n^2-3n+1)}{n^4(i+n-1)},\ i = 1, 2, \dots, m-8.$$

Спостереження над отриманими результатами дозволяють зробити висновок, що

$$a_{11}^{(k-1)} = D_{n,k} = \frac{d_{n,k}}{n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}},$$

тут $d_{n,k}$ — чисельник виразу $a_{11}^{(k-1)}$. Крім цього справедливі рівності:

$$d_{n,2r+1} = -(d_{n,2r} + d_{n,2r-1}),\ r = 1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}, \tag{2.4.32}$$

$$d_{n,2r+2} = -(nd_{n,2r+1} + d_{n,2r}),\ r = 1, 2, \dots, \frac{m-2}{2}, \tag{2.4.33}$$

$$a_{i1}^{(k)} = -\frac{d_{n,k+2}i + d_{n,k}}{n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(i+n-2+\delta_{i+1,2})},\ i = 1, 2, \dots, m-k. \tag{2.4.34}$$

Зробимо всі обчислення для $(k+1)$–шої ітерації.

$$a_{11}^{(k)} = \frac{d_{n,k+1}}{n^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}},\ a_{i+1,1}^{(k)} = -\frac{d_{n,k+2}(i+1)+d_{n,k}}{n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(i+n-1)},\ i = 1, 2, \dots, m-k,$$

$$a_{i1}^{(k+1)} = \left(\frac{d_{n,k+1}}{n^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}} + \frac{d_{n,k+2}(i+1)+d_{n,k}}{n^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(i+n-1)} \right) \cdot \frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}}.$$

а) Нехай $k = 2r$, тоді

$$a_{i1}^{(k+1)} = \left(\frac{d_{n,2r+1}}{n^r} + \frac{d_{n,2r+2}(i+1)+d_{n,2r}}{n^r(i+n-1)} \right) \cdot \frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}} =$$

$$= \frac{(d_{n,2r+2}+d_{n,2r+1})i + (nd_{n,2r+1}+d_{n,2r}) + d_{n,2r+2} - d_{n,2r+1}}{n^r(i+n-1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}} =$$

$$= -\frac{d_{n,2r+3}i + d_{n,2r+1}}{n^{\lfloor \frac{2r+1}{2} \rfloor}(i+n-2+\delta_{i+1,2})} = -\frac{d_{n,k+3}i + d_{n,k+1}}{n^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}(i+n-2+\delta_{i+1,2})}.$$

б) Нехай $k = 2r + 1$, тоді

$$a_{i1}^{(k+1)} = \left(\frac{d_{n,2r+2}}{n^{\lfloor\frac{2r+2}{2}\rfloor}} + \frac{d_{n,2r+3}(i+1) + d_{n,2r+1}}{n^{\lfloor\frac{2r+1}{2}\rfloor}(i+n-1)}\right) \cdot \frac{i+n-1}{i+n-2+\delta_{i+1,2}} =$$

$$= \frac{(nd_{n,2r+3} + d_{n,2r+2})i + n(d_{n,2r+2} + d_{n,2r+1}) + nd_{n,2r+3} - d_{n,2r+2}}{n^{r+1}(i+n-2+\delta_{i+1,2})} =$$

$$= -\frac{d_{n,2r+4}i + d_{n,2r+2}}{n^{r+1}(i+n-2+\delta_{i+1,2})} = -\frac{d_{n,k+3}i + d_{n,k+1}}{n^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}(i+n-2+\delta_{i+1,2})}.$$

Таким чином,

$$a_{11}^{(k+1)} = -\frac{d_{n,k+3} + d_{n,k+1}}{n^{\lfloor\frac{k+3}{2}\rfloor}} = -\frac{-(d_{n,2r+2} + d_{n,2r+1}) + d_{n,2r+1}}{n^{r+1}} = \frac{d_{n,k+2}}{n^{\lfloor\frac{k+2}{2}\rfloor}}.$$

Тепер доведемо справедливість рекурентного рівняння

$$D_{n,k+2} = -\left(D_{n,k+1} + \frac{1}{n}D_{n,k})\right) \tag{2.4.35}$$

із початковими умовами

$$D_{n,1} = 1,\ D_{n,2} = -\frac{1}{n}. \tag{2.4.36}$$

Початкові умови (2.4.36) можна знайти, обчислюючи значення парадетермінанта (2.4.31) при $m = 1$ і $m = 2$. Доведемо справедливість рівняння (2.4.35).

а) Нехай $k = 2r$, тоді

$$-\left(D_{n,k+1} + \frac{1}{n}D_{n,k})\right) = -\left(D_{n,2r+1} + \frac{1}{n}D_{n,2r})\right) = -\frac{d_{n,2r+3} + d_{n,2r+1}}{n^{r+1}} =$$

$$= -\frac{-(d_{n,2r+2} + d_{n,2r+1}) + d_{n,2r+1}}{n^{r+1}} = \frac{d_{n,2r+2}}{n^{r+1}} = \frac{d_{n,k+2}}{n^{\lfloor\frac{k+2}{2}\rfloor}} = D_{n,k+2}.$$

б) Нехай $k = 2r + 1$, тоді

$$-\left(D_{n,k+1} + \frac{1}{n}D_{n,k})\right) = -\left(\frac{d_{n,2r+2}}{n^{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{d_{n,2r+1}}{n^r}}\right) = \frac{d_{n,2r+3}}{n^{\lfloor\frac{2r+3}{2}\rfloor}} =$$

$$= \frac{d_{n,k+2}}{n^{\lfloor\frac{k+2}{2}\rfloor}} = D_{n,k+2}.$$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 2.4.4. *Справедлива рівність:*

$$\left\langle \frac{i-j+n}{i-j+n-1+\delta_{ij}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m} = D_{n,m} = \frac{d_{n,m}}{n^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}},$$

де

$$D_{n,1} = 1,\ D_{n,2} = -\frac{1}{n},$$

$$D_{n,k+2} = -\left(D_{n,k+1} + \frac{1}{n}D_{n,k}\right);$$

для многочленів $d_{n,m}$ виконуються рекурсії:

$$d_{n,1} = 1,\ d_{n,2} = -1,$$

$$d_{n,2r+1} = -(d_{n,2r} + d_{n,2r-1}),$$

$$d_{n,2r+2} = -(nd_{n,2r+1} + d_{n,2r}).$$

Наслідок 2.4.4.1. *Члени послідовності $D_{n,1}, D_{n,2}, \ldots, D_{n,m}$, яка задовольняє рекурентне рівняння (2.4.35) із початковими умовами (2.4.36) можна знайти при допомозі парадетермінанта*

$$\left\langle \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ \frac{n+1}{n} & 1 & & & & & \\ 0 & -\frac{1}{n} & -1 & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{n} & -1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{n} & -1 \end{array} \right\rangle_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

(див. теорему 3.2.1 на стор. 223.)

Наслідок 2.4.4.2. *Числова послідовність $D_{n,1}, D_{n,2}, \dots, D_{n,m}$, що задана рівністю (2.4.31), задовольняє також рекурентне рівняння*

$$D_{n,m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \frac{n+i}{n} D_{n,m-(i+1)}.$$

Справедливість цього наслідку випливає із розвинення парадетермінанта лівої частини рівності (2.4.31) за елементами останнього рядка.

Зауваження 2.4.5. Многочлени $d_{n,m}$, $m = 1, 2, \dots, 21$, що задовольняють рекурентні рівняння (2.4.32), (2.4.33) із початковими умовами

$$d_{n,1} = 1, \; d_{n,2} = -1$$

читач знайде в додатку 5 на стор. 457.

Твердження 2.4.10. *Для блоково-діагональної матриці (2.1.2) справедливі рівності:*

$$\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{ddet}(M_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{ddet}(M_s), \tag{2.4.37}$$

$$\operatorname{pper}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{pper}(M_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{pper}(M_s), \tag{2.4.38}$$

где M_i, $1 \leqslant i \leqslant s$ — деякі трикутні матриці.

Доведення. Доведемо рівність (2.4.37). Нехай a_{i_s,i_s} — верхні елементи матриць M_s. Розкладемо парадетермінант матриці (2.1.2) за елементами таблиці $T(i_2)$. Позаяк елементи цієї таблиці, крім

елементів стовпця i_2, дорівнюють нулю, то згідно з твердженням 2.4.3 (рівність (2.4.20) на стор. 96), маємо рівність

$$\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{ddet}(M_1) \cdot \operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_2 & & & \\ 0 & M_3 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & M_s \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи послідовно до таблиць $T(i_3), \dots, T(i_s)$ теорему 2.4.1, на основі твердження 2.4.3, отримаємо рівність (2.4.37).

Рівність (2.4.38) доводиться аналогічно. □

Твердження 2.4.11. *Нехай елементи матриці (2.1.1) диференційовні функції змінної t, тоді справедливі рівності:*

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{ddet}(A)) = \left\langle \begin{array}{cccc} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\rangle + \tag{2.4.39}$$

$$+ \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a'_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\rangle + \ldots + \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array} \right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{pper}(A)) = \left[\begin{array}{cccc} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a'_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] + \tag{2.4.40}$$

$$+ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a'_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right] + \ldots + \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array} \right].$$

Доведення. За означенням парадетермінанта, він складається із 2^{n-1} доданків, кожен з яких є добутком n співмножників, по одному із кожного стовпця. Нехай $(-1)^{\varepsilon(a)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$ — один із доданків цього парадетермінанта. Відомо, що

$$\frac{d}{dt}(a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}) =$$

$$= a'_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} + a_{i_1 1} a'_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} + \ldots + a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a'_{i_n n}. \quad (2.4.41)$$

Виділимо доданки парадетермінантів правої частини рівності (2.4.39), відповідні доданкам $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$ і підсумуємо їх, тоді отримаємо вираз правої частини рівності (2.4.41). При цьому, за вказаною відповідністю, знак доданка $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}$ збігається із знаками відповідних доданків парадетермінантів правої частини рівності (2.4.39). Підсумовуючи всі доданки $\frac{d}{dt}((-1)^{\varepsilon(a)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n})$ лівої частини рівності (2.4.39) і враховуючи рівність (2.4.41), отримаємо рівність (2.4.39). Рівність (2.4.40) доводиться аналогічно до рівності (2.4.39). □

Теорема 2.4.5. [29]. (Теорема про зв'язок параперманента із парадетермінантом). *Якщо A — трикутна матриця (2.1.1), то справедлива рівність*

$$\operatorname{pper}(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \operatorname{ddet}\left((-1)^{\delta_{ij}+1} a_{ij}\right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}. \quad (2.4.42)$$

Доведення. За означенням парадетермінанта трикутної матриці, знак кожного його доданку залежить від парності суми індексів всіх ключових елементів. Легко бачити, що знак факторіального добутку ключового елемента a_{ij} матриці $\left((-1)^{\delta_{ij}+1} a_{ij}\right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ збігається із знаком виразу $(-1)^{2i}$. Отже, всі доданки парадетермінанта правої частини рівності (2.4.42) мають знак плюс. □

Наслідок 2.4.5.1. *Для довільної трикутної матриці $(b_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ справедлива рівність*

$$\operatorname{ddet}(b_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \operatorname{pper}((-1)^{\delta_{ij}+1} b_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}.$$

Доведення. Цей наслідок одразу випливає із рівності (2.4.42) при $a_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} b_{ij}$. □

Вправи

2.4.1. Знайдіть значення парадетермінанта та параперманента трикутної матриці $\left(\frac{1}{i-j+1}\right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Спробуйте знайти значення парафункцій цієї матриці при $n = 5$ і $n = 6$, використовуючи попередні значення цих парафункцій.

2.4.2. Знайдіть значення парафункцій трикутної матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ 1 & \alpha_2 & & & & & \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \alpha_4 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \alpha_{n-3} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_{n-1} & \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2} & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

за означенням та при допомозі рекурентного співвідношення.

2.4.3. Доведіть першу частину наслідку 2.4.1.3, не використовуючи твердження 2.4.2.

2.4.4. Знайдіть $\operatorname{ddet}((-1)^{i-j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$, $\operatorname{pper}((-1)^{i-j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$.

2.4.5. Знайдіть значення параперманента трикутної матриці, в якій елемент a_{n1} дорівнює нулю, діагональні елементи дорівнюють мінус одиниці, а решта елементів дорівнюють одиниці.

2.4.6. Доведіть наслідок 2.4.1.4 без застосування наслідку 2.4.1.3 і твердження 2.4.2.

2.4.7. Знайдіть значення парадетермінанта трикутної матриці n-го порядку, діагональні елементи якої дорівнюють 2, елементи першої піддіагоналі дорівнюють $\frac{1}{2}$, а решта елементів — нулі.

2.4.8. Знайдіть значення парадетермінанта трикутної матриці $n-$го порядку, діагональні елементи якої дорівнюють 3, елементи першої піддіагоналі дорівнюють 1, елементи другої піддіагоналі $-\frac{1}{3}$, а решта елементів — нулі. Спробуйте узагальнити задачі 7 та 8.

2.4.9. Знайдіть значення параперманента трикутної матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4.10. Доведіть справедливість рівності

$$\left\langle \begin{matrix} x & & & & \\ 0 & x & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & x & \\ -\frac{a_0}{a_1} & -\frac{a_1}{a_2} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{1} & 1 \end{matrix} \right\rangle_{n+1} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0.$$

2.4.11. Доведіть рівність

$$\operatorname{pper}\left(\frac{j\cdot(i-j+1)^{i-j-1}}{(i-j)^{i-j-1}}(1-\delta_{ij}) + (a+n)\delta_{ij} \right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = (a+n)^n.$$

2.4.12. Користуючись теоремою 2.4.2 (стор. 101) обчисліть парадетермінанти трикутних матриць

$$A = \left(\frac{2i-j}{i-j+1} \right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}, \quad B = \left(\frac{i-2j}{i-j+1} \right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

та, скориставшись теоремою 3.2.11 (стор. 275), запишіть відповідні їм тотожності.

2.4.13. Знайдіть значення парадетермінанта

$$\left\langle \frac{i-j+3}{i-j+2-\delta_{ij}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}.$$

2.4.14. Доведіть рівності:

$$\left\langle \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k=3s, \\ 1, & \text{якщо } k=3s+1, \\ -1, & \text{якщо } k=3s+2, \end{cases} \quad (2.4.43)$$

$$\left[\frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = F_{2k-1}. \quad (2.4.44)$$

2.5 Парафункції матриць спеціального вигляду

Дослідивши загальні властивості параперманентів та парадетермінантів трикутних матриць, ми приступаємо до вивчення деяких класів трикутних матриць. До них, в першу чергу відносяться k-діагональні трикутні матриці, трикутні матриці похилої, вертикальної та горизонтальної структури. Матриці такого типу виникають при дослідженні ланцюгових дробів, континуантів та їх узагальнень, симетричних многочленів тощо. До матриць похилої структури відносяться також матриці многочленів Белла. Вони, зокрема, виникають при n-кратному диференціюванні складених функцій та в теорії симетричних груп.

2.5.1 Зведення парафункцій до k-діагонального вигляду

Метод Гауса зведення детермінанта прямокутної матриці до рівного йому детермінанта верхньої чи нижньої трикутної матриці відіграє важливу роль в теорії та практиці прямокутних матриць.

Обнулення частини елементів парафункції трикутних матриць завжди корисне при обчисленні її значень[2]. Тому важливо побудувати аналогічний алгоритм зведення парадетермінанта та параперманента трикутної матриці n-го порядку, наприклад, до рівного парадетермінанта чи параперманента k-діагональної ($k < n$) трикутної матриці.

Зауважимо, що твердження 2.4.7 та 2.4.8 (див. стор. 99) є основою алгоритму обнулення частини елементів першого стовпця трикутної матриці.

Доведемо теорему, на якій базується загальний алгоритм обнулення елементів трикутної матриці.

Теорема 2.5.1. *Нехай*

$$A =$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
a_{11} \\
\vdots & \ddots \\
a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,j-1} \\
a_{j1} & \dots & a_{j,j-1} & a_{jj} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,i-1} \\
0 & \dots & 0 & x_{ij} & \dots & a_{i,i-1} & a_{ii} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,i-1} & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right),$$

тоді із рівностей

$$\operatorname{ddet}(A) = \operatorname{ddet}(a_{rs})_{1 \leqslant s \leqslant r \leqslant n}, \tag{2.5.1}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \operatorname{pper}(a_{rs})_{1 \leqslant s \leqslant r \leqslant n}, \tag{2.5.2}$$

[2]Задача про побудову алгоритму обнулення елементів парадетермінанта трикутної матриці аналогічного до алгоритму Гауса для квадратних матриць була сформульована Протасовим І.В.

випливають відповідно рівності:

$$x_{ij} = a_{ij}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1})}{\operatorname{ddet}(R_{j-1,1})}\right), \tag{2.5.3}$$

$$x_{ij} = a_{ij}\left(1 + \frac{\operatorname{pper}(R_{\frac{j-1}{i},1})}{\operatorname{pper}(R_{j-1,1})}\right). \tag{2.5.4}$$

Доведення. Доведемо що із рівності (2.5.1) випливає рівність (2.5.3). Після розгортання парадетермінантів правої та лівої частини рівності (2.5.1) частина доданків знищиться. При цьому, в лівій частині цієї рівності залишаться доданки з іксом, а в правій частині відповідні до них доданки та доданки відповідні тим доданкам лівої частини рівності, які дорівнюють нулю.

Отже, в лівій частині цієї рівності залишиться вираз

$$\{x_{ij}\} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}),$$

тобто добуток факторіального добутку $\{x\}$ на його алгебричне доповнення. Зауважимо, що

$$\{x_{ij}\} = x_{ij} \cdot \{a_{i,j+1}\}.$$

Доданки правої частини цієї рівності відповідні доданкам з іксом, очевидно, описуються виразом

$$\{a_{ij}\} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}).$$

Згрупуємо доданки правої частини рівності відповідні доданкам лівої частини рівності, що дорівнюють нулеві:

$$\{a_{i1}\} \cdot (-1)^{i+1} \cdot 1 \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}) + \{a_{i2}\} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \operatorname{ddet}(R_{11}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}) +$$

$$+ \ldots + \{a_{i,j-1}\} \cdot (-1)^{i+j-1} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-2,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}) =$$

$$= \{a_{ij}\}(-1)^{i+j-1} \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+1})(a_{i,j-1} \cdot \operatorname{ddet}(R_{j-2,1}) -$$

$$-a_{i,j-2}a_{i,j-1}\operatorname{ddet}(R_{j-3,1}) + \ldots + +(-1)^{j-2}a_{i1}\cdot\ldots\cdot a_{i,j-1}\cdot 1\big) =$$
$$= \{a_{ij}\}\cdot(-1)^{i+j-1}\cdot\operatorname{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1})\cdot\operatorname{ddet}(R_{n,i+1}).$$

Таким чином, маємо рівність

$$x_{ij}\cdot\operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) = a_{ij}\cdot\Big(\operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) - \operatorname{ddet}(R_{\frac{j-1}{i},1})\Big),$$

або рівність (2.5.3).

Рівність (2.5.4) доводиться аналогічно. □

Зауваження 2.5.1. *Якщо у парадетермінанті чи параперманенті трикутної матриці $(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ елемент a_{rs} дорівнює нулю, то ненульові елементи $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r,s-1}$ не впливають на їх значення.*

Зауваження 2.5.2. *Теорема 2.4.2 є наслідком теореми 2.5.1, бо при $j=2$, $i=2,3,\ldots,n$ рівності (2.5.1), (2.5.2) приймають відповідно вигляд:*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22}\left(1-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) & & & \\ 0 & a_{32}\left(1-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & a_{n2}\left(1-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right\rangle,$$

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ 0 & a_{22}\left(1+\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) & & & \\ 0 & a_{32}\left(1+\frac{a_{31}}{a_{11}}\right) & a_{33} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & a_{n2}\left(1+\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) & a_{n3} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{matrix}\right].$$

Таким чином, щоб звести параперманент чи парадетермінант трикутної матриці $A=(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$, наприклад, до 2-діагональної трикутної матриці необхідно, використовуючи теорему 2.5.1, послідовно перетворити в нуль елементи, що знаходяться на перетині i-го рядка та $i-2$-го стовпця ($i=3,4,\ldots,n$).

Теорема 2.5.2. *Нехай*

$$A=(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

тоді справедлива рівність:

$$\operatorname{ddet}(A)=\prod_{i=1}^{n}x_{ii},$$

де

$$x_{ii}=a_{ii}\left(1-\frac{\operatorname{ddet}(P_{i-1})}{\operatorname{ddet}(Q_{i-1})}\right)$$

та рівність

$$\operatorname{pper}(A)=\prod_{i=1}^{n}x_{ii},$$

де

$$x_{ii}=a_{ii}\left(1+\frac{\operatorname{pper}(P_{i-1})}{\operatorname{pper}(Q_{i-1})}\right).$$

Тут

$$P_{i-1}=\left(\begin{matrix} x_{11} & & & & \\ 0 & x_{22} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & x_{i-2,i-2} & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,i-2} & a_{i,i-1}\end{matrix}\right),$$

$$Q_{i-1}=\left(\begin{matrix} x_{11} & & & & \\ 0 & x_{22} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & x_{i-2,i-2} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{i-1,i-1}\end{matrix}\right).$$

Доведення. Зведемо парадетермінант трикутної матриці A до парадетермінанта діагональної трикутної матриці

$$X = (\delta_{ij} \cdot x_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n},$$

використовуючи теорему 2.5.1 для послідовного перетворення парадетермінанта даної трикутної матриці. Маємо:

$$x_{11} = a_{11}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{0}{1},1})}{\operatorname{ddet}(R_{01})}\right) = a_{11}\left(1 - \frac{0}{1}\right),$$

$$x_{22} = a_{22}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{1}{2},1})}{\operatorname{ddet}(R_{11})}\right) = a_{22}\left(1 - \frac{a_{21}}{x_{11}}\right),$$

$$x_{33} = a_{33}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{2}{3},1})}{\operatorname{ddet}(R_{21})}\right) = a_{33}\left(1 - \frac{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & \\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & \\ 0 & x_{22}\end{matrix}\right\rangle}\right),$$

$$x_{44} = a_{44}\left(1 - \frac{\operatorname{ddet}(R_{\frac{3}{4},1})}{\operatorname{ddet}(R_{31})}\right) = a_{44}\left(1 - \frac{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & & \\ 0 & x_{22} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{matrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{matrix} x_{11} & & \\ 0 & x_{22} & \\ 0 & 0 & x_{33}\end{matrix}\right\rangle}\right),$$

і т.д.

Тепер справедливість теореми випливає із того, що парадетермінант діагональної трикутної матриці дорівнює добутку її діагональних елементів.

Для параперманентів доведення аналогічне. □

Зведемо параперманент трикутної матриці $(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ до 2-

діагонаким чиноміці виду

кутної матри

кутної матриі

овно перетво

го рядка та

рема 2.5.2.

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & x_{32} & a_{33} & & \\ & \ldots & \ldots & \ddots & \\ & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & \\ & 0 & 0 & \ldots & x_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

і справедливі

О... $x_{21} = a_{21}$. Знайдемо x_{32} користуючись теоремою 2.5.1:

$$_2\left(1 + \frac{\operatorname{pper}(R_{\frac{1}{3},1})}{\operatorname{pper}(R_{11})}\right) = a_{32}\left(1 + \frac{a_{31}}{a_{11}}\right).$$

Отже, ... рапермaнент трикутної матриці $A = (a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ до па... а трикутної матриці

рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Зведе... анент трикутної матриці A_1 до рівного йому па- рапер... P_{i-1} кутної матриці

$$Q_{i-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & & \\ 0 & 0 & x_{43} & a_{44} & & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix};$$

$$x_{43} = a_{43}\left(1+\frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{2}{4},1})}{\mathrm{pper}(R_{21})}\right) = a_{43}\left(1+\frac{\begin{bmatrix} a_{11} & \\ a_{41} & a_{42}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & \\ x_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}\right).$$

Далі знайдемо, що

$$x_{54} = a_{54}\left(1+\frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{3}{5},1})}{\mathrm{pper}(R_{31})}\right) = a_{54}\left(1+\frac{\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ x_{21} & a_{22} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ x_{21} & a_{22} & \\ 0 & x_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}\right),$$

і т.д.

$$x_{i,i-1} = a_{i,i-1}\left(1+\frac{\mathrm{pper}(R_{\frac{i-2}{i},1})}{\mathrm{pper}(R_{i-2,1})}\right) = a_{i,i-1}\left(1+\frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}\right), \quad (2.5.5)$$

де

$$P_{i-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-4,i-4} & & \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-3,i-4} & a_{i-3,i-3} & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,i-4} & a_{i,i-3} & a_{i,i-2}\end{bmatrix}_{i-2}, \quad i = 3,4,\dots,n, \quad (2.5.6)$$

$$Q_{i-2} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-4,i-4} & & \\ 0 & 0 & \dots & x_{i-3,i-4} & a_{i-3,i-3} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{i-2,i-3} & a_{i-2,i-2}\end{bmatrix}_{i-2}, \quad i = 3,4,\dots,n. \quad (2.5.7)$$

Таким чином, справедлива рівність:

$$\mathrm{pper}(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & & \\ x_{21} & a_{22} & & & & \\ 0 & x_{32} & a_{33} & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}_n,$$

де $x_{i,i-1}$, $i = 2,3,\dots,n-1$ задаються рівностями (2.5.5).

Розкладемо парадетермінанти (2.5.6), (2.5.7) за елементами останнього рядка, тоді отримаємо відповідно рекурентні рівняння:

$$P_{i-2} = \{a_{i,i-2}\}Q_{i-3} + \{a_{i,i-3}\}Q_{i-4} + \ldots + \{a_{i2}\}Q_1 + \{a_{i1}\}Q_0, \quad (2.5.8)$$

$$Q_{i-2} = \{a_{i-2,i-2}\}Q_{i-3} + \{x_{i-2,i-3}\}Q_{i-4}, \quad i = 3,4,\dots,n. \quad (2.5.9)$$

Відзначимо, що в цих рекурсіях факторіальні добутки $\{a_{i1}\}$, $\{x_{i-2,i-3}\}$ відповідно дорівнюють

$$\prod_{j=1}^{i-2} a_{ij}$$

та $x_{i-2,i-3}a_{i-2,i-2}$.

Рекурентні рівняння (2.5.8), (2.5.9) із початковою умовою $P_0 = 0, Q_0 = 1$, при $i = 3,4,\dots,n$ разом із рекурентним рівнянням (2.5.5), при $i = 2,3,\dots,n$ дають ефективний алгоритм зведення парадетермінанта трикутної матриці до рівного йому парадетермінанта 2-діагональної трикутної матриці.

Легко переконатися в тому, що при зведенні парадетермінанта трикутної матриці до парадетермінанта 3-діагональної трикутної матриці аналогічні рекурсії мають вигляд:

$$P_{i-3} = \{a_{i,i-3}\}Q_{i-4} + \{a_{i,i-4}\}Q_{i-5} + \ldots + \{a_{i2}\}Q_1 + \{a_{i1}\}Q_0, \; i = 4,5,\dots,n,$$

$$Q_{i-3} = \{a_{i-3,i-3}\}Q_{i-4} + \{a_{i-3,i-4}\}Q_{i-5} + \{x_{i-3,i-5}\}Q_{i-6}, \; i = 4,5,\dots,n,$$

$$x_{i,i-2}=a_{i,i-2}\left(1+\frac{P_{i-3}}{Q_{i-3}}\right), i=3,4,\ldots,n.$$

Взагалі, при зведенні парадетермінанта трикутної матриці

$$(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

до рівного йому парадетермінанта k-діагональної трикутної матриці, можна користуватися рекурсіями:

$$P_{i-k}=\{a_{i,i-k}\}Q_{i-k-1}+\{a_{i,i-k-1}\}Q_{i-k-2}+\ldots+\{a_{i2}\}Q_1+\{a_{i1}\}Q_0, \quad (2.5.10)$$

$$Q_{i-k}=\{a_{i-k,i-k}\}Q_{i-k-1}+\{a_{i-k,i-k-1}\}Q_{i-k-2}+\ldots+ \{x_{i-k,i-(2k-1)}\}Q_{i-2k}, \quad (2.5.11)$$

$$x_{i,i-k+1}=a_{i,i-k+1}\left(1+\frac{P_{i-k}}{Q_{i-k}}\right),\ i=k,k+1,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,n. \quad (2.5.12)$$

В рекурсіях (2.5.10), (2.5.11) $P_0=0,\ Q_0=1$ та $i=k+1,k+2,\ldots,n$.

Проте, всі обчислення можна дещо спростити. Знайдемо рекурентне співвідношення для Q_{i-k}. З цією метою виразимо $x_{i,i-k+1}$ через $Q_{i-k},Q_{i-k-1},\ldots,Q_1,Q_0$, підставляючи P_{i-k} із (2.5.10) у праву частину рівності (2.5.12) та звільнимося від $x_{i-k,i-(2k-1)}$ у рівності (2.5.11). При цьому отримаємо рекурсію:

$$Q_{i-k}=\{a_{i-k,i-k}\}Q_{i-k-1}+\{a_{i-k,i-k-1}\}Q_{i-k-2}+\ldots+ \{a_{i-k,2}\}Q_1+\{a_{i-k,1}\}Q_0 \quad (2.5.13)$$

де $Q_0=1,\ i=k+1,k+2,\ldots,n$.

Зауваження 2.5.3. *У рекурентних рівняннях (2.5.10), (2.5.13) факторіальні добутки $\{a_{is}\},\{a_{i-k,s}\}$, де $s\leqslant i-k$ відповідно дорівнюють:*

$$\prod_{r=s}^{i-k}a_{ir},\ \prod_{r=s}^{i-k}a_{i-k,r}.$$

Приклад 2.5.1. Зведемо параперманент 3-діагональної трикутної матриці виду

$$A=\begin{pmatrix} p &&&&&&& \\ q & p &&&&&& \\ r & q & p &&&&& \\ 0 & r & q & p &&&& \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots &&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & p & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r & q & p \end{pmatrix}_n \quad (2.5.14)$$

до рівного йому параперманента 2-діагональної трикутної матриці

$$X=\begin{pmatrix} p &&&&&& \\ x_{21} & p &&&&& \\ 0 & x_{32} & p &&&& \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots &&& \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p && \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1,n-2} & p & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{n,n-1} & p \end{pmatrix}_n. \quad (2.5.15)$$

При цьому використаємо рекурентні рівняння (2.5.8), (2.5.9) та рекурентне рівняння (2.5.5). Позаяк $a_{ii}=p,\ a_{i,i-1}=q,\ a_{i,i-2}=r$, то ці рекурсії матимуть вигляд:

$$x_{i,i-1}=q\cdot\left(1+\frac{P_{i-2}}{Q_{i-2}}\right),\ i=2,3,\ldots,n. \quad (2.5.16)$$

$$P_{i-2}=r\cdot Q_{i-3},\ i=3,4,\ldots,n, \quad (2.5.17)$$

$$Q_{i-2}=p\cdot Q_{i-3}+x_{i-2,i-3}\cdot p\cdot Q_{i-4},\ i=3,4,\ldots,n. \quad (2.5.18)$$

Знайдемо рекурентне співвідношення для Q_{i-2}. З цією метою виразимо $x_{i,i-1}$ через Q_{i-2},Q_{i-3}, підставляючи (2.5.17) у (2.5.16) та звільнимося від $x_{i-2,i-3}$ у (2.5.18). Маємо:

$$x_{i,i-1} = q \cdot \left(1 + \frac{r \cdot Q_{i-3}}{Q_{i-2}}\right), \ i = 2, 3, \dots, n, \qquad (2.5.19)$$

$$Q_{i-2} = p \cdot Q_{i-3} + pq \cdot Q_{i-4} + pqr \cdot Q_{i-5}, \ Q_0 = 1, \ i = 3, 4, \dots, n. \qquad (2.5.20)$$

Таким чином, основою алгоритму зведення параперманента трикутної матриці (2.5.14) до рівного йому параперманента (2.5.15) є рекурсії (2.5.19), (2.5.20).

При $p = q = r = 1$ маємо:

$$Q_{i-2} = Q_{i-3} + Q_{i-4} + Q_{i-5}, \ i = 3, 4, \dots, n, \ Q_0 = 1,$$

$$P_{i-2} = Q_{i-3}, \ i = 3, 4, \dots, n, \ P_0 = 0,$$

$$x_{i,i-1} = \frac{Q_{i-2} + P_{i-2}}{Q_{i-2}}, \ i = 2, 3, \dots, n.$$

Отже,

$$Q_1 = 1, Q_2 = 2, Q_3 = 4, Q_4 = 7, Q_5 = 13, Q_6 = 24, Q_7 = 44, Q_8 = 81, \dots,$$

$$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 4, P_5 = 7, P_6 = 13, P_7 = 24, P_8 = 44, \dots,$$

$$x_{21} = \frac{1}{1}, x_{32} = \frac{2}{1}, x_{43} = \frac{3}{2}, x_{54} = \frac{6}{4}, x_{65} = \frac{11}{7}, x_{76} = \frac{20}{13}, x_{87} = \frac{37}{24}, x_{98} = \frac{68}{44}$$

і шуканий параперманент має вигляд

$$\left[\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & \\
\frac{1}{1} & 1 & & & & & & & & \\
0 & \frac{2}{1} & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{20}{13} & 1 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{37}{24} & 1 & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right]_n$$

Приклад 2.5.2. Зведемо параперманент трикутної матриці

$$\left(\frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}}\right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \qquad (2.5.21)$$

до 2-діагональної трикутної матриці.

Обчислення показують, що відповідним параперманентом 2-діагональної трикутної матриці є параперманент виду

$$F_{2n-1} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
\frac{F_2}{1} & 1 & & & & & & & \\
0 & \frac{F_4}{F_1} & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{F_6}{F_3} & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{F_8}{F_5} & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{10}}{F_7} & 1 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{F_{2n-2}}{F_{2n-5}} & 1
\end{array}\right]_n, \ n = 2, 3, \dots, \qquad (2.5.22)$$

де F_i, $i = 1, 2, \dots$ — числа Фібоначчі (див. приклад 1.5.1, стор. 40).

Позаяк параперманент трикутної матриці (2.5.21) дорівнює F_{2n-1} (див. (2.4.44), стор. 119), то справедливість рівності (2.5.22) можна перевірити розкладом параперманента її правої частини за елементами останнього рядка.

2.5.2 Парафункції матриць похилої структури

Теорема 2.5.3. *Нехай*

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & x_1 & & & \\ 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix}_m, \ n \leqslant m, \tag{2.5.23}$$

тоді справедливі тотожності:

$$\operatorname{pper}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.5.24}$$

$$\operatorname{ddet}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)) =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} (-1)^{m - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.5.25}$$

де λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ – *цілі невід'ємні числа.*

Доведення. Доведемо тотожність (2.5.24). Звернемо увагу на те, що

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant m},$$

тут

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}, & \text{якщо } i - j < n, \\ 0, & \text{якщо } n \leqslant i - j, \ x_0 = 1. \end{cases}$$

Оскільки ключовому елементу a_{ij} цієї матриці відповідає факторіальний добуток

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} = \begin{cases} x_{i-j+1}, & \text{якщо } i - j < n, \\ 0, & \text{якщо } n \leqslant i - j, \end{cases}$$

то компоненті α_i впорядкованого розбиття $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = m$, відповідає факторіальний добуток, який дорівнює x_{α_i}, а всьому впорядкованому розбиттю $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – вектор $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n})$. Всім таким впорядкованим розбиттям, елементи яких утворюють мультимножину із первинною специфікацією

$$[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}]$$

в параперманенті відповідає доданок виду

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Полічимо число таких доданків у параперманенті. Позаяк число ненульових елементів впорядкованого розбиття дорівнює $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, то число всеможливих впорядкувань мультимножини з цією первинною специфікацією, згідно з твердженням 1.2.2, дорівнює

$$\frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!}.$$

Для доведення тотожності (2.5.25) достатньо знайти знак нормального набору ключових елементів, відповідного впорядкованому розбиттю первинної специфікації

$$[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}].$$

Очевидно, що на знак $(-1)^{\varepsilon}$ нормального набору ключових елементів впливають тільки ті ключові елементи, які відповідають парним компонентам впорядкованого розбиття. Тому, при $n = 2k$ маємо:

$$\varepsilon \equiv (\lambda_2 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_{2k}) + 2n \equiv (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 + 5\lambda_4 + 5\lambda_5 + \ldots +$$

$$+(2k-1)\lambda_{2k-1} + (2k+1)\lambda_{2k}) + n \equiv$$

$$\equiv n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)(\mathrm{mod} 2).$$

При $n = 2k + 1$ мають місце аналогічні конгруенції. $\square$

Якщо у теоремі 2.5.3 $m = n$, то замість $Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ писатимемо $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причому виконується рівність:

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}.$$

Таким чином, згідно з цією теоремою, отримаємо тотожності:

$$\left[\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{2.5.26}$$

$$\left\langle \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{2.5.27}$$

Розкладемо парадетермінант

$$\Diamond_n = \left\langle \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$$

за елементами останнього рядка і отримаємо рекурентну рівність:

$$\Diamond_n = x_1 \Diamond_{n-1} - x_2 \Diamond_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} x_n \Diamond_0, \ \ \Diamond_0 = 1. \tag{2.5.28}$$

Запишемо кілька перших значень парадетермінанта

$$\Diamond_n = \mathrm{ddet}\,(Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)):$$

$$\begin{aligned}
\Diamond_1 &= x_1,\\
\Diamond_2 &= x_1^2 - x_2,\\
\Diamond_3 &= x_1^3 - 2x_1x_2 + x_3,\\
\Diamond_4 &= x_1^4 - 3x_1^2x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_4,\\
\Diamond_5 &= x_1^5 - 4x_1^3x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + x_5,\\
\Diamond_6 &= x_1^6 - 5x_1^4x_2 + 4x_1^3x_3 + 6x_1^2x_2^2 - 3x_1^2x_4 - 6x_1x_2x_3 + 2x_1x_5 +\\
&\quad +2x_2x_4 - x_2^3 + x_3^2 - x_6,\\
\Diamond_7 &= x_1^7 - 6x_1^5x_2 + 5x_1^4x_3 + 10x_1^3x_2^2 - 4x_1^3x_4 - 12x_1^2x_2x_3 + 3x_1^2x_5 +\\
&\quad +6x_1x_2x_4 - 4x_1x_2^3 + 3x_1x_3^2 - 2x_1x_6 + 3x_2^2x_3 - 2x_2x_5 - 2x_3x_4 + x_7,\\
\Diamond_8 &= x_1^8 - 7x_1^6x_2 + 6x_1^5x_3 + 15x_1^4x_2^2 - 5x_1^4x_4 - 20x_1^3x_2x_3 + 4x_1^3x_5 +\\
&\quad +12x_1^2x_2x_4 - 10x_1^2x_2^3 + 6x_1^2x_3^2 - 3x_1^2x_6 + 12x_1x_2^2x_3 - 6x_1x_2x_5 -\\
&\quad -6x_1x_3x_4 + 2x_1x_7 + x_2^4 - 3x_2^2x_4 - 3x_2x_3^2 + 2x_2x_6 + x_4^2 + 2x_3x_5 - x_8,\\
\Diamond_9 &= x_1^9 - 8x_1^7x_2 + 21x_1^5x_2^2 - 20x_1^3x_2^3 + 5x_1x_2^4 + 7x_1^6x_3 - 30x_1^4x_2x_3 +\\
&\quad +30x_1^2x_2^2x_3 - 4x_2^3x_3 + 10x_1^3x_3^2 - 12x_1x_2x_3^2 + x_3^3 - 6x_1^5x_4 +\\
&\quad +20x_1^3x_2x_4 - 12x_1x_2^2x_4 - 12x_1^2x_3x_4 + 6x_2x_3x_4 + 3x_1x_4^2 +\\
&\quad +5x_1^4x_5 - 12x_1^2x_2x_5 + 3x_2^2x_5 + 6x_1x_3x_5 - 2x_4x_5 - 4x_1^3x_6 +\\
&\quad +6x_1x_2x_6 - 2x_3x_6 + 3x_1^2x_7 - 2x_2x_7 - 2x_1x_8 + x_9.
\end{aligned}$$

Параперманенти $\Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_9$ трикутних матриць

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

розвинуться в аналогічні многочлени з додатними коефіцієнтами.

При $x_0 = 1$, $x_i = x$, $i = 1, 2, \ldots, n$ маємо тотожності:

$$pperZ(x, x, \ldots, x) = \begin{bmatrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{bmatrix}_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} = x(x+1)^{n-1},$$

$$ddetZ(x,x,\ldots,x) = \left\langle \begin{matrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 1 & x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & x \end{matrix} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot x^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} =$$

$$= x(x-1)^{n-1}.$$

Таким чином, коефіцієнти многочленів

$$\mathrm{pper}Z_i(x,x,\ldots,x),\ \mathrm{ddet}Z_i(x,x,\ldots,x),\ i=1,2,\ldots,n$$

утворюють трикутник Паскаля ($t38$) без знаків та із знаками ($t18$) відповідно, причому справедлива рівність:

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} = \binom{n-1}{m}.$$

При $x_i=1,\ i=1,2,\ldots,n$ рівності (2.5.26), (2.5.27) матимуть відповідно вигляд:

$$[1]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = 2^{n-1} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!},$$

$$\langle 1\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = 0 = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!};$$

При $x_i = ix$ коефіцієнти многочленів $\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots, \Diamond_9$ запишуться у вигляді трикутної матриці:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & -20 & 21 & -8 & 1 \\ 0 & -6 & 35 & -56 & 36 & -10 & 1 \\ 0 & 7 & -56 & 126 & -120 & 55 & -12 & 1 \\ 0 & -8 & 84 & -252 & 330 & -220 & 78 & -14 & 1 \\ 0 & 9 & -120 & 462 & -792 & 715 & -364 & 105 & -16 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5.29}$$

Коефіцієнти аналогічних многочленів для параперманентів трикутних матриць $Z(x,2x,\ldots,nx)$ утворюють матрицю (2.5.29) без знаків.

При $x_i = i,\ i=1,2,\ldots,n$ отримаємо рівності:

$$\left[\frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n} =$$

$$= F_{2n}, \tag{2.5.30}$$

де F_i — числа Фібоначчі,

$$\left\langle\frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n=3s, \\ 1, & \text{якщо } n=3s+1, = \\ -1, & \text{якщо } n=3s+2 \end{cases}$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}; \tag{2.5.31}$$

(див. стор. 119).

Таким чином, суми (2.5.30) і (2.5.31) є відповідно сумами елементів рядків матриці (2.5.29) та цієї ж матриці без знаків.

Якщо у матриці $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ покласти $x_i = \frac{x}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то коефіцієнти многочленів $k!\mathrm{ddet}\left(Z\left(\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{k}\right)\right)$, $k = 1, 2, \ldots, 8$ утворюють трикутну матрицю:

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & -1 & 2 \\
0 & 2 & -6 & 6 \\
0 & -6 & 22 & -36 & 24 \\
0 & 24 & -100 & 210 & -240 & 120 \\
0 & -120 & 548 & -1350 & 2040 & -1800 & 720 \\
0 & 720 & -3528 & 9744 & -17640 & 21000 & -15120 & 5040 \\
0 & -5040 & 26136 & -78792 & 162456 & -235200 & 231840 & -141120 & 40320
\end{pmatrix}$$

При $x_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — отримаємо рівність

$$\left[\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}},$$

причому

$$\left\{n!\left[\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 14, 88, 694, 6578, 72792, 920904,$$

$$13109088, 207360912, 3608233056, 68495486640, 1408631978064,$$

$$31197601660080, 740303842925184, 18738231641600256,$$

$$503937595069600896, 14349899305396062720, \ldots.$$

Утворена послідовність у електронній енциклопедії числових послідовностей (On-Line Encyclopedia of integer Sequences) отримала номер A007840 (див. також [124], [147]).

Аналогічно, при $x_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна отримати рівність

$$\left\langle\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}.$$

Відповідна числова послідовність має вигляд

$$\left\{n!\left\langle\frac{i-j+\delta_{ij}}{i-j+1}\right\rangle\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 1, 2, 4, 14, 38, 216, 600, 6240, 9552,$$

$$319296, -519312, 28108560, -176474352, 3998454144, -43985078784,$$

$$837126163584, -12437000028288, \ldots.$$

Її номер у електронній енциклопедії числових послідовностей — A006252. Генератрисою цієї числової послідовності є функція

$$f(x) = \frac{1}{1-\ln(1+x))}.$$

При $x_i = \frac{1}{i!}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ дістанемо рівність

$$\left[\frac{1}{i-j+1}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!1!^{\lambda_1}\lambda_2 2!^{\lambda_2}!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n!^{\lambda_n}},$$

якій відповідає числова послідовність A000670:

$$\left\{n!\left[\frac{1}{i-j+1}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293, 545835, 7087261,$$

$$102247563, 1622632573, 28091567595, 526858348381, 10641342970443,$$

$$230283190977853, 5315654681981355, 130370767029135901,$$

$$3385534663256845323, \ldots$$

$$\left\langle\frac{1}{i-j+1}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!1!^{\lambda_1}\lambda_2!2!^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n!^{\lambda_n}} = \frac{1}{n!}.$$

(див. рівність (3.2.77) на стор. 278.)

Якщо ж $x_i = i!$, то дістанемо дві тотожності

$$[i-j+1]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} 1!^{\lambda_1} 2!^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n!^{\lambda_n},$$

$$\langle i-j+1 \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} 1!^{\lambda_1} 2!^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n!^{\lambda_n}$$

відповідно із числовими послідовностями A051296, A003319:

$$\{[i-j+1]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}\}_{n=1}^{\infty} = 1, 3, 11, 47, 231, 1303, 8431, 62391, 524495,$$

$$4960775, 52223775, 605595319, 7664578639, 105046841127,$$

$$1548880173119, 24434511267863, 410503693136559, 7315133279097607,$$

$$137787834979031839, 2734998201208351479, 57053644562104430735,$$

$$1247772806059088954855, \ldots$$

$$\{\langle i-j+1 \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}\}_{n=1}^{\infty} = 1, -1, 3, -13, 71, -461, 3447, -29093, 273343,$$

$$-2829325, 31998903, -392743957, 5201061455, -73943424413,$$

$$1123596277863, -18176728317413, 311951144828863,$$

$$-5661698774848621, 108355864447215063, -2181096921557783605, \ldots$$

Зауважимо, що рекурентні рівняння для всіх наведених вище числових послідовностей можна легко отримати при допомозі загального рекурентного рівняння (2.5.28).

Твердження 2.5.1. *Справедлива тотожність:*

$$\operatorname{ddet}(Z_m(-x_1, \ldots, -x_n)) = (-1)^m \cdot \operatorname{pper}(Z_m(x_1, \ldots, x_n)). \quad (2.5.32)$$

Твердження 2.5.2. *Справедливі тотожності:*

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix}_m =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} a_1^k a_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}, \quad (2.5.33)$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$$\left\langle \begin{matrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{matrix} \right\rangle_m =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} a_1^k a_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}, \quad (2.5.34)$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Доведення. Якщо у тотожностях (2.5.24), (2.5.25) замість $\frac{x_i}{x_{i-1}}$ покласти a_i, то параперманент і парадетермінант трикутної матриці

$$Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

заміниться відповідно параперманентом і парадетермінантом матриці

$$Z_m(a_1, a_1 a_2, \ldots, a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n).$$

$\square$

Покладемо у тотожності (2.5.34) замість a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ відповідно

$$\frac{a + (i-1)r}{b + (i-1)s} \cdot \frac{x_i}{x_{i-1}}, \; x_0 = 1,$$

тоді матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 \end{pmatrix}_m \tag{2.5.35}$$

матиме вигляд матриці

$$F = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}x_1 & & & & & & \\ \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{a+(n-2)r}{b+(n-2)s}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{a}{b}x_1 & & & \\ 0 & \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \frac{a+r}{b+s}\frac{x_2}{x_1} & \frac{a}{b}x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s}\frac{x_n}{x_{n-1}} & \ldots & \ldots & \frac{a}{b}x_1 \end{pmatrix}_m, \tag{2.5.36}$$

а права частина тотожності (2.5.34) — вигляд виразу

$$\mathrm{ddet}(F) = \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a}{b}x_1\right)^k \left(\frac{a+r}{b+s} \cdot \frac{x_2}{x_1}\right)^{k-\lambda_1} \times$$

$$\times \ldots \times \left(\frac{a+(n-1)r}{b+(n-1)s} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$, а

$$a^{i\{r\}} = a(a+r)(a+2r) \cdot \ldots \cdot (a+(n-1)r)$$

— факторіальний степінь з кроком r.

Аналогічно можна отримати тотожність

$$\mathrm{pper}(F) = \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1(r)}}{b^{1(s)}}\right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n(r)}}{b^{n(s)}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Таким чином, ми приходимо до наступної теореми:

Теорема 2.5.4. *Нехай K — деяке числове поле. Для трикутної матриці (2.5.36) і параметрів a, b, r, s, значення яких належать числовому полю K, справедливі тотожності:*

$$\mathrm{ddet}(F) = \Diamond_{n,m} = \tag{2.5.37}$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\mathrm{pper}(F) = \square_{n,m} = \tag{2.5.38}$$

$$= \sum_{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=m} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}}\right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$$

Знайдемо рекурентні співвідношення, які задовольняють многочлени розбиттів (2.5.37), (2.5.38). Зробимо позначення:

$$\mathrm{ddet}(F) = \Diamond_{n,m}, \quad \mathrm{pper}(F) = \square_{n,m},$$

і розкладемо парадетермінант і параперманент трикутної матриці F за елементами останнього рядка, тоді отримаємо:

$$\Diamond_{n,m} = \frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}} x_1 \Diamond_{n,m-1} - \frac{a^{2\{r\}}}{b^{2\{s\}}} x_2 \Diamond_{n,m-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}} x_n \Diamond_{n,m-n},$$

$$\square_{n,m} = \frac{a^{1\{r\}}}{b^{1\{s\}}} x_1 \square_{n,m-1} + \frac{a^{2\{r\}}}{b^{2\{s\}}} x_2 \square_{n,m-2} + \ldots + \frac{a^{n\{r\}}}{b^{n\{s\}}} x_n \square_{n,m-n}.$$

При $m = n$ матриця F отримає вигляд

$$F = \left(\frac{a + r(i-j)}{b + s(i-j)} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n},$$

а сума у правій частині тотожності (2.5.37) буде проводитися за всіма невпорядкованими розбиттями $\lambda_1 + \ldots + n\lambda_n = n$.

У теоремах 2.4.3, 3.2.12 (див. стор. 108) доведено тотожності

$$\operatorname{ddet} \left(\frac{ai + bj + c}{i - j + 1} \right)_n = \frac{na + nb + c}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (ib + c), \qquad (2.5.39)$$

$$\frac{na + nb + c}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} (ib + c) = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{na + kb + c}{n - k + 1} + \qquad (2.5.40)$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} (-1)^{n+s} \frac{(s-1)a + (s-1)b + c}{(s-1)!} \prod_{i=1}^{s-2} (ib + c) \prod_{k=s}^{n} \frac{na + kb + c}{n - k + 1}.$$

При $a = -r, b = r, c = a$ тотожність (2.5.39) прийме вигляд

$$\operatorname{ddet} \left(\frac{a - r(i-j)}{i - j + 1} \right)_n = \frac{a^{n\{r\}}}{n!}$$

а тотожність (2.5.40) — вигляд

$$\frac{a^{n\{r\}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \frac{a^{i\{r\}}}{i!} \cdot \frac{a^{n-i\{-r\}}}{(n-i)!}.$$

З іншої сторони із тотожності (2.5.37) у випадку $n = m$ і $s = 1, b = 1$ можна отримати рівність

$$\operatorname{ddet} \left(\frac{a - r(i-j)}{i - j + 1} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_n =$$

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{-r\}}}{1!} \right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{-r\}}}{n!} \right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Отже, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ справедлива наступна

Теорема 2.5.5. *Для довільних дійсних значень параметрів a і r справедливі тотожності:*

$$\left\langle \frac{a - r(i-j)}{i - j + 1} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \frac{a^{n\{r\}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \frac{a^{i\{r\}}}{i!} \cdot \frac{a^{n-i\{-r\}}}{(n-i)!} =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{-r\}}}{1!} \right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{-r\}}}{n!} \right)^{\lambda_n},$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

Відзначимо, що із тотожностей теореми 2.5.5 безпосередньо випливають тотожності:

$$\left\langle \frac{a + r(i-j)}{i - j + 1} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = \frac{a^{n\{-r\}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} \frac{a^{i\{-r\}}}{i!} \cdot \frac{a^{(n-i)\{r\}}}{(n-i)!} =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{n-k} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \left(\frac{a^{1\{r\}}}{1!} \right)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a^{n\{r\}}}{n!} \right)^{\lambda_n}.$$

Відзначимо також, що теорема 2.5.5 слугує джерелом побудови тотожностей, пов'язаних з невпорядкованими розбиттями натурального числа на натуральні доданки. Надаючи a і r деяких раціональних значень, ми кожен раз отримуватимемо деяку нову тотожність. Покладемо, наприклад, у другій тотожності цієї теореми $a = 2$, $r = 1$, тоді $\frac{2^{\underline{n}}}{n!} = 0$ при всіх натуральних $n > 2$ і ми можемо розглядати лише розбиття виду $\lambda_1 + 2\lambda_2 = n$. При цьому отримаємо тотожність

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{n-2i} = n + 1.$$

При $a = 3$, $r = 1$ ця ж тотожність перепишеться у вигляді:

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=n} (-1)^{n-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!} \cdot 3^{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{(n+1)^{2\{1\}}}{2!}.$$

Означення 2.5.1. [42]. *Трикутну матрицю виду*

$$B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x_3}{x_2} & \frac{2}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{2}{n-2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{n-1}{1} \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{pmatrix} = \tag{2.5.41}$$

$$= \operatorname{pper} \left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1\le j\le i\le n},$$

назвемо трикутною матрицею Белла, *а трикутну матрицю*

$$B = \operatorname{pper} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{1} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & 1 & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{2}{n-2} & \ldots & \frac{n-1}{1} & 1 \end{pmatrix}_n = \operatorname{pper} \left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}} \right)_{1\le j\le i\le n} \tag{2.5.42}$$

— трикутною матрицею чисел Белла.

Твердження 2.5.3. *Для трикутної матриці Белла справедлива тотожність:*

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} \cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{2.5.43}$$

Доведення. Розкладемо параперманент трикутної матриці многочлена Белла за елементами останнього рядка:

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \binom{n-1}{0} x_1 B(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \binom{n-1}{1} x_2 B(x_1, \ldots, x_{n-2}) +$$

$$+ \ldots + \binom{n-1}{n-2} x_{n-1} B(x_1) + \binom{n-1}{n-1} x_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x_{i+1} B(x_1, \ldots, x_{n-i-1}). \tag{2.5.44}$$

Позаяк $B(x_1) = [x_1]_1 = x_1$ і $B(x_1, \ldots, x_n)$ та многочлен Белла (див. [66], стор.174) задовольняє рекурентне співвідношення (2.5.44), то твердження 2.5.3 доведене. □

Позначимо $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через B_n і запишемо кілька перших значень параперманентів матриці Белла:

$$\begin{aligned} B_1 = {} & x_1, \\ B_2 = {} & x_1^2 + x_2, \\ B_3 = {} & x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3, \\ B_4 = {} & x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_4, \\ B_5 = {} & x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 10x_1^2x_3 + 15x_1x_2^2 + 5x_1x_4 + 10x_2x_3 + x_5, \\ B_6 = {} & x_1^6 + 15x_1^4x_2 + 20x_1^3x_3 + 45x_1^2x_2^2 + 15x_1^2x_4 + 60x_1x_2x_3 + \\ & 6x_1x_5 + 15x_2x_4 + +15x_2^3 + 10x_3^2 + x_6, \\ B_7 = {} & x_1^7 + 21x_1^5x_2 + 35x_1^4x_3 + 105x_1^3x_2^2 + 35x_1^3x_4 + 210x_1^2x_2x_3 + \\ & 21x_1^2x_5 + 105x_1x_2^3 + 105x_1x_2x_4 + 70x_1x_3^2 + 7x_1x_6 + \\ & 105x_2^2x_3 + 21x_2x_5 + 35x_3x_4 + x_7, \\ B_8 = {} & x_1^8 + 28x_1^6x_2 + 56x_1^5x_3 + 210x_1^4x_2^2 + 70x_1^4x_4 + 560x_1^3x_2x_3 + \\ & 56x_1^3x_5 + 420x_1^2x_2^3 + +280x_1^2x_3^2 + 420x_1^2x_2x_4 + 28x_1^2x_6 + \\ & 840x_1x_2^2x_3 + 280x_1x_3x_4 + 168x_1x_2x_5 + +8x_1x_7 + 105x_2^4 + \\ & 210x_2^2x_4 + 280x_2x_3^2 + 28x_2x_6 + 56x_3x_5 + 35x_4^2 + x_8. \end{aligned}$$

Із тотожності

$$\left[\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} \cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

при $x_i = 1,\ x_i = i,\ x_i = i!,\ x_i = \frac{1}{i!}$ можна відповідно отримати рівності:

$$B_n = \left[\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}},$$

$$B_n^{(2)} = \left[\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{i-j+1}{i-j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!(1!)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!((n-1)!)^{\lambda_n}},$$

$$B_n^{(3)} = \left[\frac{j\cdot(i-j+1)}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!},$$

$$B_n^{(4)} = \left[\frac{j}{(i-j+1)(i-j+j\cdot\delta_{ij})}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{2\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{2\lambda_n}},$$

Розкладаючи тепер параперманенти у цих рівностях за елементами останнього рядка, можна отримати рекурентні рівності для обчислення значень чисел B_n, $B_n^{(2)}$, $B_n^{(3)}$, $B_n^{(4)}$. Ці ж рекурентні рівності можна отримати із рекурентної рівності (2.5.44), підставляючи замість x_{i+1} відповідно значення: 1, $i+1$, $(i+1)!$, $\frac{1}{(i+1)!}$.

Числа

$$B_n = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}$$

називають числами Белла. Тому що виконується рівність

$$S(n,m) = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=m}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}, \qquad (2.5.45)$$

де $S(n,m)$ — числа Стірлінга другого роду (див. [66], стор. 191), то справедлива також рівність

$$\left[\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right]_{1\leq j\leq i\leq n} = \sum_{m=1}^{n} S(n,m).$$

Зауваження 2.5.4. Число, що знаходиться під знаком суми у правій частині рівності (2.5.45), як відомо [66], дорівнює числу всіх можливих розбиттів множини потужності $n = \lambda_1+2\cdot\lambda_2+\ldots+n\cdot\lambda_n$ на λ_1 підмножин потужності 1, λ_2 підмножин потужності 2, і т. д. λ_n підмножин потужності n.

Аналогічно можна отримати рівності

$$\left\langle\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\right\rangle_{1\leq j\leq i\leq n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k}\cdot\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k).$$

Розглянемо ще один параперманент трикутної матриці похилої структури:

$$C_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left[(j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\leq j\leq i\leq n} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \frac{x_3}{x_2} & 2\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \frac{x_4}{x_3} & 2\cdot\frac{x_3}{x_2} & 3\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & 2\cdot\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & (n-1)\cdot\frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{bmatrix}_n . \qquad (2.5.46)$$

Розкладемо цей парадетермінант за елементами останнього ряд-ка:

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) = (n-1)^{\underline{0}}\cdot x_1\cdot C_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})+$$

$$+(n-1)^{\underline{1}}\cdot x_2\cdot C_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2})+\ldots+$$

$$+(n-1)^{\underline{n-2}}\cdot x_{n-1}\cdot C_1(x_1)+(n-1)^{\underline{n-1}}\cdot x_n\cdot C_0. \qquad (2.5.47)$$

Можна довести, що *цикловий індикатор симетричної групи*

$$C_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n} \qquad (2.5.48)$$

також задовольняє рекурентне рівняння (2.5.47). Отже, справедлива тотожність

$$\left[(j-(j-1)\cdot\delta_{ij})\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right]_{1\le j\le i\le n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}. \qquad (2.5.49)$$

Наведемо перших дев'ять значень циклового індикатора

$$C_i(x_1,x_2,\ldots,x_i),\ i=1,2,\ldots,9$$

симетричної групи.

$$\begin{aligned}
C_1 &= x_1,\\
C_2 &= x_1^2 + x_2,\\
C_3 &= x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3,\\
C_4 &= x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4,\\
C_5 &= x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 20x_1^2x_3 + 15x_1x_2^2 + 30x_1x_4 + 20x_2x_3 + 24x_5,\\
C_6 &= x_1^6 + 15x_1^4x_2 + 40x_1^3x_3 + 45x_1^2x_2^2 + 90x_1^2x_4 + 120x_1x_2x_3 +\\
&\quad +144x_1x_5 + 90x_2x_4 + 15x_2^3 + 40x_3^2 + 120x_6,\\
C_7 &= x_1^7 + 21x_1^5x_2 + 70x_1^4x_3 + 105x_1^3x_2^2 + 210x_1^3x_4 + 420x_1^2x_2x_3 +\\
&\quad +504x_1^2x_5 + 105x_1x_2^3 + 630x_1x_2x_4 + 280x_1x_3^2 + 840x_1x_6 +\\
&\quad +210x_2^2x_3 + 504x_2x_5 + 420x_3x_4 + 720x_7,\\
C_8 &= x_1^8 + 28x_1^6x_2 + 112x_1^5x_3 + 210x_1^4x_2^2 + 420x_1^4x_4 + 1120x_1^3x_2x_3 +\\
&\quad +1344x_1^3x_5+420x_1^2x_2^3 + 1120x_1^2x_3^2 + 2520x_1^2x_2x_4 + 3360x_1^2x_6+\\
&\quad +1680x_1x_2^2x_3+3360x_1x_3x_4+4032x_1x_2x_5+5760x_1x_7+105x_2^4+\\
&\quad 1260x_2^2x_4+1120x_2x_3^2+3360x_2x_6+2688x_3x_5+1260x_4^2+5040x_8.
\end{aligned}$$

Якщо в тотожності (2.5.49) $x_1=\ldots=x_n=x$, то вона прийме вигляд

$$\begin{bmatrix} x & & & & \\ 1 & x & & & \\ 1 & 2 & x & & \\ 1 & 2 & 3 & x & \\ \cdots & & & & \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & x \end{bmatrix}_{1\le j\le i\le n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{n!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot x^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}, \qquad (2.5.50)$$

але (див. (2.5.61), стор.159) параперманент лівої частини рівності (2.5.50) дорівнює

$$x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1),$$

і ми отримуємо відому ([66], стор. 181) тотожність

$$C_n(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}) = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1),$$

яка при $x = 1$ має вигляд

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1) & 1 \end{bmatrix}_n = C_n(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}) = n!. \qquad (2.5.51)$$

Таким чином, співставляючи рівності (2.5.50) і (2.5.51) ми отримаємо рівність (див. [67], стор. 49)

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} \frac{1}{\lambda_1! 1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n! n^{\lambda_n}} = 1.$$

Зауваження 2.5.5. Число під знаком суми у рівності (2.5.49) є числом підстановок n-го порядку, які розкладаються на λ_1 циклів довжини 1, λ_2 циклів довжини 2 і т.д., λ_n циклів довжини n.

Для парадетермінанта матриці

$$\left((j-(j-1)\cdot\delta_{ij}) \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right)_{1 \le j \le i \le n}$$

виконується рівність

$$\left\langle (j-(j-1)\cdot\delta_{ij}) \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\rangle_{1 \le j \le i \le n} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)} \frac{n!}{\lambda_1! 1^{\lambda_1} \ldots \cdot \lambda_n! n^{\lambda_n}} x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \qquad (2.5.52)$$

Враховуючи те, що виконується рівність (див. [66], стор. 191)

$$s(n,k) = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{\lambda_1! \cdot \ldots \cdot \lambda_n! \cdot 1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}},$$

де $s(n,k)$ - числа Стірлінга першого роду, рівність (2.5.52) при

$$x_1 = \ldots = x_n = 1,$$

можна записати у вигляді

$$\langle (j-(j-1)\cdot\delta_{ij}) \rangle_{1 \le j \le i \le n} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Очевидна також рівність

$$[(j-(j-1)\cdot\delta_{ij})]_{1 \le j \le i \le n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s(n,k) = n!.$$

Зауважимо, що многочлени $B_n(x_1, \ldots, x_n)$ та $C_n(x_1, \ldots, x_n)$ пов'язані між собою рівністю

$$B_n(0!x_1, \ldots, (n-1)!x_n) = C_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Вона випливає із порівняння рівностей (2.5.43) та (2.5.48).

Наведемо ще один корисний

Приклад 2.5.3. *Нехай задано n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Многочлени виду*

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}, \ k = 0, 1, \ldots, n,$$

*де $\sigma_0 = 1$ називають **елементарними симетричними многочленами**. Їх генератрисою є функція*

$$\sigma(z) = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k z^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i z).$$

Важливим прикладом симетричних многочленів є також **степеневі суми:**

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$$

із генератрисою

$$s(z) = \sum_{k=0}^{n} s_k z^k = \sum_{i=1}^{n} x_i (1 - x_i z)^{-1}.$$

Справедлива наступна формула Е. Варінга:

$$\sigma_k = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + k\lambda_k = k} (-1)^{k-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)} \frac{1}{\lambda_1! 1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_k! k^{\lambda_k}} \cdot s_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot s_k^{\lambda_k}. \tag{2.5.53}$$

Співставляючи рівність (2.5.53) із рівністю (2.5.52), робимо висновок, про справедливість рівності:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} \left\langle (j - (j-1) \cdot \delta_{ij}) \frac{s_{i-j+1}}{s_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant k}. \tag{2.5.54}$$

Тепер стають очевидними наступні рівності:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!} C_k(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \frac{1}{k!} B_k(0! s_1, 1! s_2, \ldots, (n-1)! s_n).$$

Розглянемо ще один клас симетричних многочленів

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}, \; k = 1, 2, \ldots,$$

які задаються генератрисою

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k = \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k z)^{-1},$$

тут ми вважаємо, що $p_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Такі симетричні многочлени називають *повними однорідними симетричними многочленами.*

Порівнюючи генератриси для многочленів $\sigma(z)$ та $p(z)$ робимо висновок, що справедлива рівність

$$\sigma(z) p(-z) = 1.$$

Отже, коефіцієнт при z^k дорівнює нулю:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_i p_{k-i} = 0,$$

причому остання рівність є рекурентною рівністю, яка пов'язує елементарні симетричні многочлени із повними однорідними симетричними многочленами.

З останньої рівності знаходимо:

$$p_k = \sigma_1 p_{k-1} - \sigma_2 p_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} \sigma_k, \tag{2.5.55}$$

$$\sigma_k = p_1 \sigma_{k-1} - p_2 \sigma_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} p_k.$$

Праві частини цих рівностей є розкладом відповідних парадетермінантів похилої структури за елементами останнього рядка:

$$p_k = \left\langle \begin{array}{ccccc} \sigma_1 & & & & \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \frac{\sigma_{k-2}}{\sigma_{k-3}} & \ldots & \sigma_1 & \\ \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}} & \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \ldots & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 \end{array} \right\rangle_k, \tag{2.5.56}$$

$$\sigma_k = \left\langle \begin{array}{ccccc} p_1 & & & & \\ \frac{p_2}{p_1} & p_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}} & \ldots & p_1 & \\ \frac{p_k}{p_{k-1}} & \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \ldots & \frac{p_2}{p_1} & p_1 \end{array} \right\rangle_k. \tag{2.5.57}$$

Звернемо увагу читача на взаємну оберненість тотожностей[3] (2.5.56), (2.5.57), які можна записати також відповідно у такому вигляді:

$$p_k = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^{k-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \cdot \sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_k^{\lambda_k},$$

$$\sigma_k = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^{k-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \cdot p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\lambda_k}.$$

2.5.3 Парафункції матриць вертикальної структури

Перш за все відзначимо той очевидний факт, що парадетермінант та параперманент трикутної матриці (2.1.4) (див. стор. 69) вертикальної структури відповідно дорівнюють

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \operatorname{ddet}(\tau_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

та

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \operatorname{pper}(\tau_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Якщо

$$\tau_{ij} = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n,$$

то їх значення відповідно дорівнюють 0 та

$$2^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

[3] Формулам обернення буде присвячено четвертий та п'ятий параграфи третього розділу.

Знайдемо значення парадетермінанта виду

$$\diamondsuit_{n+1} = \left\langle \begin{array}{cccccc} z_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle. \tag{2.5.58}$$

Подамо перший стовпець цього парадетермінанта у вигляді суми двох доданків, один з яких дорівнює x_1, тоді, використовуючи твердження 2.4.5, отримаємо рівність

$$\diamondsuit_{n+1} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{cccccc} z_1 - x_1 & & & & & \\ 0 & z_2 & & & & \\ 0 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ 0 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle.$$

Другий парадетермінант останньої рівності, згідно з наслідком 2.4.1.4 (див. стор. 94) дорівнює нулю, тому, розкладаючи перший парадетермінант за елементами першого стовпця, отримаємо рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1) \cdot \left\langle \begin{array}{ccccc} z_2 & & & & \\ x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle,$$

з якої випливає рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n - x_n).$$

Позаяк, то

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n - x_n) =$$

$$(-1)^n (x_1 - z_1)(x_2 - z_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - z_n) \qquad (2.5.59)$$

і справедлива рівність

$$\diamondsuit_{n+1} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{cccccc} z_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle = (-1)^n \left\langle \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & & \\ z_1 & x_2 & & & & \\ z_1 & z_2 & x_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & x_n & \\ z_1 & z_2 & z_3 & \ldots & z_n & 1 \end{array} \right\rangle.$$

Таким чином, маємо наступне

Твердження 2.5.4. [29]. *Справедливі тотожності:*

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} z_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n - x_n),$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} z_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right]_{n+1} = (z_1 + x_1)(z_2 + x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n + x_n).$$

Якщо ж у рівності (2.5.59) покласти $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = x$, то вона прийме вигляд многочленної матриці вертикальної структури

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} x & & & & & \\ x_1 & x & & & & \\ x_1 & x_2 & x & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right\rangle =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)\sigma_n x^0, \qquad (2.5.60)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — елементарні симетричні многочлени, побудовані на базі n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що є коренями відповідного алгебраїчного рівняння $n-$го степеня.

Аналогічно доводиться рівність

$$\Box_{n+1} = \left[\begin{array}{cccccc} z_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n & 1 \end{array} \right]_{n+1} = (z_1 + x_1)(z_2 + x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n + x_n), \qquad (2.5.61)$$

яка при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = x$, $x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ матиме вигляд

$$\Box_{n+1} = \left[\begin{array}{cccccc} x & & & & & \\ 1 & x & & & & \\ 1 & 2 & x & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & x & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{array} \right]_{n+1} = (x+1)^{n(1)} \qquad (2.5.62)$$

Остання рівність при $x = 1$ перепишеться у вигляді

$$\operatorname{pper}\left(j - (j-1)\cdot\delta_{ij}\right)_{1\le j\le i\le n+1} = (n+1)! \qquad (2.5.63)$$

2.5.4 Парафункції матриць горизонтальної структури

Справедлива наступна

Теорема 2.5.6. *Нехай*

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\langle \begin{array}{ccccc} a_1 & & & & \\ a_2 & a_2 & & & \\ a_3 & a_3 & a_3 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ a_n & a_n & a_n & \ldots & a_n \end{array} \right\rangle, \qquad (2.5.64)$$

тоді справедлива рівність:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) =$$
$$= a_n \cdot \left(H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}) - H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_n)\right).$$

Доведення. Розкладемо парадетермінант правої частини рівності (2.5.64) за елементами останнього рядка:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n \cdot H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}) -$$
$$- a_n \cdot \left(a_n H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) - a_n^2 H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}) +\right.$$
$$\left. + a_n^3 H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}) - \ldots + (-1)^{n-3} a_n^{n-2} H(a_1) + (-1)^{n-2} a_n^{n-1}\right).$$

Але вираз у дужках правої частини останньої рівності є розкладом парадетермінанта

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_n) = \left\langle \begin{array}{ccccc} a_1 & & & & \\ a_2 & a_2 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ a_{n-2} & a_{n-2} & \ldots & a_{n-2} & \\ a_n & a_n & \ldots & a_n & a_n \end{array} \right\rangle$$

за елементами останнього рядка. $\square$

Запишемо кілька перших значень парадетермінанта (2.5.64).

$$\begin{aligned}
H_1 = {}& a_1, \\
H_2 = {}& a_1 a_2 - a_2^2, \\
H_3 = {}& a_1 a_2 a_3 - a_3 a_2^2 - a_1 a_3^2 + a_3^3, \\
H_4 = {}& a_1 a_2 a_3 a_4 - a_2^2 a_3 a_4 - a_1 a_3^2 a_4 + a_3^3 a_4 - a_1 a_2 a_4^2 + \\
& a_2^2 a_4^2 + a_1 a_4^3 - a_4^4, \\
H_5 = {}& a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_2^2 a_3 a_4 a_5 - a_1 a_3^2 a_4 a_5 + a_3^3 a_4 a_5 - \\
& - a_1 a_2 a_4^2 a_5 + a_2^2 a_4^2 a_5 + a_1 a_4^3 a_5 - a_4^4 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_5^2 + \\
& + a_2^2 a_3 a_5^2 + a_1 a_3^2 a_5^2 a_3^3 a_5^2 + a_1 a_2 a_5^3 - a_2^2 a_5^3 - a_1 a_5^4 + a_5^5, \\
H_6 = {}& a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_2^2 a_3 a_4 a_5 a_6 - a_1 a_3^2 a_4 a_5 a_6 + a_3^3 a_4 a_5 a_6 - \\
& - a_1 a_2 a_4^2 a_5 a_6 + a_2^2 a_4^2 a_5 a_6 + a_1 a_4^3 a_5 a_6 - a_4^4 a_5 a_6 - \\
& - a_1 a_2 a_3 a_5^2 a_6 + a_2^2 a_3 a_5^2 a_6 + a_1 a_3^2 a_5^2 a_6 - a_3^3 a_5^2 a_6 + \\
& + a_1 a_2 a_5^3 a_6 - a_2^2 a_5^3 a_6 - a_1 a_5^4 a_6 + a_5^5 a_6 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_6^2 + \\
& + a_2^2 a_3 a_4 a_6^2 + a_1 a_3^2 a_4 a_6^2 - a_3^3 a_4 a_6^2 + a_1 a_2 a_4^2 a_6^2 - a_2^2 a_4^2 a_6^2 - \\
& - a_1 a_4^3 a_6 + a_4^4 a_6^2 + a_1 a_2 a_3 a_6^3 - a_2^2 a_3 a_6^3 - a_1 a_3^2 a_6^3 + a_3^3 a_6^3 - \\
& - a_1 a_2 a_6^4 + a_2^2 a_6^4 + a_1 a_6^5 - a_6^6.
\end{aligned}$$

Вправи

2.5.1. Доведіть тотожності:

а)

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} = 2^{n-1};$$

б)

$$\sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n} (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6 + \ldots} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} = 0.$$

2.5.2. Доведіть тотожність:

$$\left\langle \frac{i-j+k}{i-j+k-1} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = (-1)^{n-2}\frac{(k-2)^{n-2}}{(k-1)^n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \times$$

$$\times \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot \left(\frac{2k-1}{k-1}\right)^{\lambda_n}, \; k>1,\, k\in\mathbb{N}. \quad (2.5.65)$$

2.5.3. Доведіть рівності (2.5.30).

2.6 Обернена трикутна матриця

Перш за все відзначимо, що обернена трикутна матриця, по суті, співпадає із оберненою матрицею до нижньої трикутної матриці. Тому зупинимося лише на її побудові при допомозі парадетермінантів рогів цієї матриці.

Обернену трикутну матрицю A^{-1} до трикутної матриці A можна побудувати при допомозі рівності (2.2.2), що задає лінійний оператор відображення вектора многочленів $f=(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ у вектор многочленів $g=(g_0,g_1,\ldots,g_n)$.

Елементи оберненої матриці можна отримати, розв'язавши систему рівнянь (2.2.1) відносно системи невідомих $(f_0,f_1,\ldots,f_n)$. Розв'язком цієї системи рівнянь є

$$f_i = \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \cdot \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0\leqslant s\leqslant r\leqslant i-j-1} \cdot g_j, \; i=0,1,\ldots,n.$$

Справедлива наступна

Теорема 2.6.1. *Оберненою трикутною матрицею A^{-1} до трикутної матриці (2.2.3) є матриця виду*

$$(b_{ij})_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \left(\frac{(-1)^{i+j}}{a_{jj}} \left\langle \frac{a_{r+j+1,s+j}}{a_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0\leqslant s\leqslant r\leqslant i-j-1} \right)_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Зауваження 2.6.1. *Із теореми 2.6.1 випливає, що для існування оберненої трикутної матриці, необхідно, щоб всі її діагональні елементи не були нулями.*

Зауваження 2.6.2. *Очевидно, що всі діагональні елементи оберненої трикутної матриці не дорівнюють нулю.*

Приклад 2.6.1. Обернена трикутна матриця до матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ a_{10} & a_{11} & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

згідно з теоремою 2.6.1 має вигляд

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{00}} & & & \\ -\frac{1}{a_{00}}\left\langle\frac{a_{10}}{a_{11}}\right\rangle & \frac{1}{a_{11}} & & \\ \frac{1}{a_{00}}\left\langle\begin{matrix} \frac{a_{10}}{a_{11}} & \\ \frac{a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{21}}{a_{22}} \end{matrix}\right\rangle & -\frac{1}{a_{11}}\left\langle\frac{a_{21}}{a_{22}}\right\rangle & \frac{1}{a_{22}} & \\ -\frac{1}{a_{00}}\left\langle\begin{matrix} \frac{a_{10}}{a_{11}} & & \\ \frac{a_{20}}{a_{21}} & \frac{a_{21}}{a_{22}} & \\ \frac{a_{30}}{a_{31}} & \frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} \end{matrix}\right\rangle & \frac{1}{a_{11}}\left\langle\begin{matrix} \frac{a_{21}}{a_{22}} & \\ \frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} \end{matrix}\right\rangle & -\frac{1}{a_{22}}\left\langle\frac{a_{32}}{a_{33}}\right\rangle & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Знайшовши із системи рівнянь (2.2.2) вектор многочленів f, ми отримаємо нове лінійне перетворення $f=A^{-1}g$, яке задається оберненою матрицею до матриці A і яке переводить вектор многочленів g у вектор многочленів f.

Приклад 2.6.2. Знайдемо обернену трикутну матрицю до трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ a_1 & a_2 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Парадетермінанти всіх рогів $R_{i,j+1}(A')$, $2 \leqslant i-j-1$ дорівнюють нулю (див. 2.4.1.4 на стор. 94). Діагональні елементи оберненої матриці дорівнюють $\frac{1}{a_{ii}}$. Знаходимо елементи першої піддіагоналі.

$$-\frac{1}{a_{j-1}}\left\langle\frac{a_{j-1}}{a_j}\right\rangle = -\frac{1}{a_j}.$$

Таким чином, обернена трикутна матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & & \\ -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{n-1}} & \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

2.7 Парадетермінантний добуток трикутних матриць

"Зовнішнє подібне до внутрішнього; мале таке ж, як і велике; закон один для всього. Немає нічого малого і нічого великого в божественній економії. Щасливий той, хто розуміє ці слова, бо, зрозумівши їх, він заволодіє ключем до пізнання всього сущого."

— *Гермес*

В одному із попередніх параграфів, де розглядалися операції над трикутними матрицями, нами вже було розглянуто множення трикутних матриць. Однак при такому введенні правила множення трикутних матриць не виконується рівність

$$\operatorname{ddet}(AB) = \operatorname{ddet}(A) \cdot \operatorname{ddet}(B).$$

Метою цього параграфа є побудова алгоритму множення трикутних матриць, для якого ця рівність буде справедливою.

Означення 2.7.1. *Неповним добутком двох парадетермінантів* $\operatorname{ddet}(A)$ *і* $\operatorname{ddet}(B)$ *трикутних матриць* A *і* B n*–го порядку назвемо вираз*

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B),$$

який задається рівністю

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) =$$

$$= \sum_{(\xi_i,\xi_j)\in\Xi(n)\times\Xi(n)} (-1)^{\varepsilon(\xi_i)+\varepsilon(\xi_j)} k(\xi_i,\xi_j) a_{\xi_i(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\xi_i(n),n}\cdot b_{\xi_j(1),1}\cdot\ldots\cdot b_{\xi_j(n),n}, \tag{2.7.1}$$

де

$$k(\xi_i,\xi_j) = \begin{cases} 1, & [\xi_i]\cap[\xi_j] = \{n\}, \\ 0, & [\xi_i]\cap[\xi_j] \neq \{n\}, \end{cases} \tag{2.7.2}$$

а $\varepsilon(\xi_i), \varepsilon(\xi_j)$ *— знаки (див. стор. 32.) елементів* $\xi_i, \xi_j \in \Xi(n)$.

Рівність (2.7.2) парі (ξ_1, ξ_j) недружніх елементів ξ_i і ξ_j (див. означення 1.4.2 на стор. 33) ставить у відповідність число $k(\xi_i,\xi_j) = 1$, а парі дружніх елементів — число $k(\xi_i,\xi_j) = 0$.

Аналогічно можна дати означення неповного добутку двох параперманентів трикутних матриць

Означення 2.7.2. *Неповним добутком двох параперманентів* $\operatorname{pper}(A)$ *і* $\operatorname{pper}(B)$ *трикутних матриць* A *і* B n*–го порядку назвемо вираз* $\operatorname{pper}(A) \circ \operatorname{pper}(B)$, *який задається рівністю*

$$\operatorname{pper}(A) \circ \operatorname{pper}(B) =$$

$$\textstyle\sum_{(\xi_i,\xi_j)\in\Xi(n)\times\Xi(n)} k(\xi_i,\xi_j) a_{\xi_i(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\xi_i(n),n}\cdot b_{\xi_j(1),1}\cdot\ldots\cdot b_{\xi_j(n),n}, \quad .$$

Уточнимо рівність (2.7.2). Занумеруємо всі елементи $\Xi(n)$-множини у порядку їх генерування при допомозі рекурсивного алгоритму, який базується на твердженні 1.4.2 (див. стор. 32). При цьому отримаємо послідовність

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2^{n-1}},$$

кожен член якої є деякою мультимножиною із базою $\{1, 2, \ldots, n\}$. Якщо всі значення функції, заданої рівністю (2.7.2), помістити в таблицю, причому одиницю замінити замальованим кружечком, а нуль — порожньою клітинкою, то з'явиться фрактальна фігура[4] n-го покоління.

При $n = 5$ отримаємо фрагмент фрактальної фігури п'ятого покоління, який зображений у наступній таблиці:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{14}	ξ_{15}	ξ_{16}
ξ_1																•
ξ_2															•	•
ξ_3														•		•
ξ_4													•	•	•	•
ξ_5												•	•	•	•	•
ξ_6											•	•			•	•
ξ_7										•		•		•		•
ξ_8									•	•	•	•	•	•	•	•
ξ_9								•								•
ξ_{10}							•	•							•	•
ξ_{11}						•		•						•		•
ξ_{12}					•	•	•	•					•	•	•	•
ξ_{13}				•				•				•				•
ξ_{14}			•	•			•	•			•	•			•	•
ξ_{15}		•		•		•		•		•		•		•		•
ξ_{16}	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Для побудови алгоритму знаходження значення неповного добутку парадетермінантів та неповного добутку параперманентів, важливою задачею є задача описання пар (i, j) індексів аргументів функції

$$k(\xi_i, \xi_j),\ 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1},\ 2^{n-1} - i + 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1},$$

яким у фрактальному трикутнику n-го покоління відповідає 1.

[4]Фрактал - це нескінченно самоподібна геометрична фігура, кожен фрагмент якої повторюється при зменшенні масштабу (див. [85]). Це поняття було запропоноване Бенуа Мандельбротом у 1975 році. Народження фрактальної геометрії пов'язують із виходом у світ його монографії "The Fractal Geometry of Nature,"1977.

Перепічка Н.В. встановив залежність між фрагментами фрактальних фігур та числовими трикутниками нулів та одиниць, які він назвав *бінарними трикутниками Паскаля*[5]. Бінарний трикутник Паскаля можна отримати, замінюючи у класичному трикутнику Паскаля непарні числа одиницею, а парні — нулем, тобто відповідними числами класичного трикутника Паскаля за модулем 2. Таким чином, отримуємо аналогічний рекурсивний алгоритм побудови бінарного трикутника Паскаля, замінюючи у виразі

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} + c_{i-1,j}$$

операцію суми логічною операцією $\oplus$ "виключного або."Тепер легко встановити справедливість рівності:

$$k(\xi_i, \xi_j) = \binom{i-1}{i+j-(2^{n-1}+1)} \bmod 2,$$

де індекси i, j задовольняють нерівності

$$1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1},\ 2^{n-1} - i + 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}.$$

Приклад 2.7.1. Знайдемо неповний добуток двох парадетермінантів $A = \langle a_{ij} \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 3}$ і $B = \langle b_{ij} \rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 3}$, використовуючи таблицю із прикладу 1.4.3 (стор. 35).

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) =$$

$$= a_{33}b_{33}(a_{11}a_{22}b_{31}b_{32} + a_{21}a_{22}b_{11}b_{32} - a_{21}a_{22}b_{31}b_{32} + a_{11}a_{32}b_{21}b_{22} -$$

$$-a_{11}a_{32}b_{31}b_{32} + a_{31}a_{32}b_{11}b_{22} - a_{31}a_{32}b_{21}b_{22} - a_{31}a_{32}b_{11}b_{32} + a_{31}a_{32}b_{31}b_{32}).$$

Для обчислення неповного добутку двох парадетермінантів (параперманентів) трикутних матриць зручно користуватися наступною таблицею.

[5]Значно загальніший результат було отримано французьким математиком Люка (див. [17], стор. 222 – 226.)

Приклад 2.7.2. Знайдемо неповний добуток двох парадетермінантів

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{array}{cccc} 2 & & & \\ 1 & -3 & & \\ -2 & -1 & 1 & \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle, \quad \operatorname{ddet}(B) = \left\langle \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle.$$

Будуємо таблицю

ddet(B) / ddet(A)		1234	2234	1334	3334	1244	2244	1444	4444
		2	-6	-1	2	-4	12	10	-40
1234	6								-240
2234	-3							-30	120
1334	-2						-24		80
3334	-2					8	-24	-20	80
1244	-24				-48				960
2244	12			-12	24			120	-480
1444	-8		48		-16		-96		320
4444	12	24	-72	-12	24	-48	144	120	-480

В цій таблиці перший рядок і перший стовпчик заповнені елементами $\Xi(4)$–множини. Другий рядок і другий стовпчик — відповідними значеннями доданків парадетермінантів $\operatorname{ddet}(B)$ і $\operatorname{ddet}(A)$. Решта комірок таблиці заповнені значеннями добутків доданків, що відповідають недружнім парам елементів $\Xi(n)$–множини. Шукане значення неповного добутку парадетермінантів дорівнює сумі всіх чисел, які лежать нижче і правіше подвійних ліній таблиці. Отже, $\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) = 470$.

Зауваження 2.7.1. *Із симетрії квадратної таблиці відносно її діагоналі випливає справедливість рівностей:*

$$\operatorname{ddet}(A) \circ \operatorname{ddet}(B) = \operatorname{ddet}(B) \circ \operatorname{ddet}(A)$$

$$\operatorname{pper}(A) \circ \operatorname{pper}(B) = \operatorname{pper}(B) \circ \operatorname{pper}(A)$$

Нехай $R_{ij}(A)$ і $R_{ij}(B)$ — роги матриць A і B. Позначимо через d_{ij} і p_{ij} відповідно неповний добуток парадетермінантів і параперманентів цих рогів, тобто

$$d_{ij} = \operatorname{ddet}(R_{ij}(A)) \circ \operatorname{ddet}(R_{ij}(B)) = \operatorname{ddet}(R_{ij}(B)) \circ \operatorname{ddet}(R_{ij}(A)),$$

$$p_{ij} = \operatorname{pper}(R_{ij}(A)) \circ \operatorname{pper}(R_{ij}(B)) = \operatorname{pper}(R_{ij}(B)) \circ \operatorname{pper}(R_{ij}(A)),$$

причому вважатимемо, що

$$d_{i,i+1} = p_{i,i+1} = 1.$$

Означення 2.7.3. *Парадетермінантним добутком двох трикутних матриць A і B n–го порядку назвемо трикутну матрицю $C = A \overset{d}{\circ} B$ того ж порядку, елементи c_{ij} якої задаються рівністю*

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}},$$

тут δ_{ij}–символ Кронекера, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

Аналогічно вводиться параперманентний добуток двох трикутних матриць.

Означення 2.7.4. *Параперманентним добутком двох трикутних матриць A і B n–го порядку назвемо трикутну матрицю $C = A \overset{p}{\circ} B$ того ж порядку, елементи c_{ij} якої задаються рівністю*

$$c_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i,j+1}}.$$

Очевидними є наступні рівності:

$$A \overset{d}{\circ} B = B \overset{d}{\circ} A,$$

$$(A \overset{d}{\circ} B) \overset{d}{\circ} C = A \overset{d}{\circ} (B \overset{d}{\circ} C),$$

$$A \overset{d}{\circ} (B + C) = A \overset{d}{\circ} B + A \overset{d}{\circ} C.$$

Аналогічні рівності виконуються і для параперманентного добутку трикутних матриць.

Теорема 2.7.1. *Для трикутних матриць A і B одного і того ж порядку виконуються рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B) = \operatorname{ddet}(A) \cdot \operatorname{ddet}(B), \tag{2.7.3}$$

$$\operatorname{pper}(A \overset{p}{\circ} B) = \operatorname{pper}(A) \cdot \operatorname{pper}(B). \tag{2.7.4}$$

Доведення. 1). Перш за все зазначимо, що факторіальний добуток елемента

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}}$$

дорівнює $(-1)^{i-j} d_{ij}$ і що у парадетермінанті

$$\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B) = \operatorname{ddet}\left((-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}}\right)$$

модулі всіх доданків

$$d_{i(1),1} d_{i(2),i(1)+1} \cdot \ldots \cdot d_{i(r),i(r-1)+1} d_{n,i(r)+1} \tag{2.7.5}$$

різні. Підставимо в ці доданки замість неповних парадетермінантних добутків їх значення і отримаємо суму різних добутків певних доданків парадетермінанта матриці A на певні доданки парадетермінанта матриці B.

2). Доведемо, що парадетермінант $\operatorname{ddet}(A \overset{d}{\circ} B)$ складається із $2^{2(n-1)}$ доданків. Кожному впорядкованому розбиттю натурального числа n на r компонент відповідає доданок (2.7.5). Неповний парадетермінантний добуток d_{ij} складається із 3^{i-j} доданків (див. твердження 1.4.3). Отже, кожен доданок виду (2.7.5), в свою чергу, складається із 3^{n-r} доданків. Але, згідно з твердженням 1.3.3, існує рівно

$$\binom{n-1}{r-1}$$

r–розбиттів натурального числа n. Тому всім r–розбиттям числа n відповідає

$$3^{n-r}\binom{n-1}{r-1}$$

доданків. Таким чином, всім впорядкованим розбиттям натурального числа n відповідає

$$\sum_{r=1}^{n} 3^{n-r}\binom{n-1}{r-1} = (3+1)^{n-1} = 2^{2(n-1)}$$

доданків. Рівно стільки різних доданків ми отримаємо в результаті добутку парадетермінантів $\operatorname{ddet}(A)$ і $\operatorname{ddet}(B)$.

3). Те, що знак кожного доданку у лівій частині рівності (2.7.3) збігається зі знаком цього доданку в правій частині цієї рівності, випливає із рівності (2.4.42).

Друга рівність цієї теореми доводиться аналогічно. □

Твердження 2.7.1. *Для довільної трикутної матриці A справедливі рівності*

$$A \overset{d}{\circ} E = E \overset{d}{\circ} A = A,$$

$$A \overset{p}{\circ} E = E \overset{p}{\circ} A = A,$$

тут E — одинична трикутна матриця того ж порядку, що і трикутна матриця A.

Доведення. Перша рівність цього твердження випливає з очевидних (див. таблицю із прикладу 2.7.1) рівностей

$$\operatorname{ddet}\,(R_{ij}(A))_{i-j+1} \circ \operatorname{ddet}\,(E)_{i-j+1} = \{a_{ij}\}$$

і того факту, що факторіальний добуток елемента

$$c_{ij} = (-1)^{\delta_{ij}+1} \frac{d_{ij}}{d_{i,j+1}}$$

дорівнює

$$d_{ij} = \operatorname{ddet}\,(R_{ij}(A))_{i-j+1} \circ \operatorname{ddet}\,(E)_{i-j+1}\,.$$

Друга рівність доводиться аналогічно. □

2.8 Скалярний добуток вектора на парафункцію

Розглянемо ще одну операцію, пов'язану з парафункціями трикутних матриць. Вони виникають при дослідженні многочленів розбиттів, при диференціюванні складених функцій, при оберненні рядів тощо.

Означення 2.8.1. [42]. *Скалярним добутком вектора*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

на парадетермінант трикутної матриці (2.1.1) назвемо число

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n \stackrel{def}{=} \tag{2.8.1}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\right\}.$$

Аналогічно визначається скалярний добуток вектора на параперманент трикутної матриці.

Означення 2.8.2. *Скалярним добутком вектора* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *на параперманент трикутної матриці (2.1.1) назвемо число*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot \mathrm{pper}(A) \stackrel{def}{=} \sum_{r=1}^{n} b_r \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\right\}. \tag{2.8.2}$$

Приклад 2.8.1. Розглянемо добуток вектора (b_1, b_2, b_3, b_4) на парадетермінант трикутної матриці (2.1.1) при $n = 4$.

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= -b_1\{a_{41}\} + b_2 \cdot (\{a_{31}\}\{a_{44}\} + \{a_{11}\}\{a_{42}\} + \{a_{21}\}\{a_{43}\})$$
$$-b_3 \cdot (\{a_{11}\}\{a_{32}\}\{a_{44}\} + \{a_{11}\}\{a_{22}\}\{a_{43}\} + \{a_{21}\}\{a_{33}\}\{a_{44}\}) +$$
$$+b_4\{a_{11}\}\{a_{22}\}\{a_{33}\}\{a_{44}\}.$$

Таким чином, при множенні вектора на парадетермінант трикутної матриці, його r–та компонента множиться на суму всіх тих доданків парадетермінанта, які відповідають розбиттям із r компонентами. Відзначимо також, що добуток нуль–вектора або вектора, всі компоненти якого дорівнюють одиниці на парафункцію трикутної матриці, відповідно дорівнює нулю або парафункції цієї трикутної матриці.

Приклад 2.8.2. Важливим прикладом добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці є наступний добуток

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot \ \mathrm{ddet} Z_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tag{2.8.3}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} b_k \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Ця тотожність одразу випливає із теореми 2.5.3 (див. стор. 132) та означення 2.8.1.

Приклад 2.8.3. Нехай

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n,$$

а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — елементарні симетричні многочлени від n змінних

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Справедлива формула Варінга[6] (див. [69], стор. 393.):

$$\frac{S_n}{n} =$$

[6] Ця формула була знайдена Е. Варінгом в його Meditationes algebraicae Editio tertia, p.1. В ній Варінг не дає методу, який привів його до цієї формули, але обмежується лише її доведенням.

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{\lambda_n}.$$

Проте, використовуючи рівність (2.8.3), формулу Варінга можна подати у такому вигляді:

$$\frac{S_n}{n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\frac{1}{k}\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}}\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{\lambda_n}$$

і, отже, у наступному зручному вигляді:

$$\frac{S_n}{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{array}{cccc} \sigma_1 & & & \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}} & \ldots & \sigma_1 \end{array} \right\rangle.$$

Твердження 2.8.1. *Справедливі тотожності:*

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 z & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 z & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \ldots & x_1 z & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 z \end{array} \right\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} z \\ z^2 \\ \vdots \\ z^{n-1} \\ z^n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{array}{ccccc} x_1 & & & & \\ \frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} & \ldots & x_1 & \\ \frac{x_n}{x_{n-1}} & \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \ldots & \frac{x_2}{x_1} & x_1 \end{array} \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} z^k \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} (-1)^{n-k}\frac{k)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Доведення. Справедливість цих тотожностей випливає із теореми 2.5.3 (див. стор. 132) та означення 2.8.1. Зауважимо лише, що при розгортанні першого парадетермінанта кожній компоненті впорядкованого розбиття відповідатиме факторіальний добуток відповідного елемента цієї трикутної матриці, в який входитиме співмножник z. Якщо впорядковане розбиття матиме k компонент, то йому відповідатиме доданок, в який входитиме співмножник z^k. □

Наступна теорема значно полегшує обчислення добутку вектора на парафункцію трикутної матриці і є аналогом наслідку 2.4.1.1 теореми про розкладання парафункції за елементами вписаної прямокутної таблиці (див. стор. 89).

Теорема 2.8.1. [42]. *Для довільного вектора $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ і трикутної матриці (2.1.1) справедливі рівності:*

(i) Розкладання за елементами останнього рядка:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = \qquad (2.8.4)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\{a_{n,n-i}\}(b_2,\ldots,b_{n-i})\cdot \operatorname{ddet}(R_{n-i-1,1}(A)),$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right] = \qquad (2.8.5)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\{a_{n,n-i}\}(b_2,\ldots,b_{n-i})\cdot \operatorname{pper}(R_{n-i-1,1}(A)),$$

(ii) Розкладання за елементами першого стовпця:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \{a_{i+1,1}\}(b_2, \dots, b_{n-i}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+2}(A)),$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \{a_{i+1,1}\}(b_2, \dots, b_{n-i}) \cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+2}(A)),$$

Доведення. Доведемо справедливість першої формули із (i). Те, що у правій частині рівності (2.8.4) присутні всі доданки парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$ випливає із того, що вона, по суті, є розкладом цього парадетермінанта за елементами останнього рядка. Тому для доведення цієї рівності залишається довести, що m–та компонента вектора b у правій частині цієї рівності є співмножником кожного доданка парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$, який породжений впорядкованим m–розбиттям натурального числа n.

Співмножником кожного доданка правої частини цієї рівності є факторіальний добуток $\{a_{r1}\}$, $r = 1, 2, \dots, n$, відповідний першій компоненті m–розбиття числа n. Тому компоненти всіх векторів правої частини рівності зсунуті вліво на одну позицію. Решті $m - 1$ компонент розбиття відповідають ті доданки парадетермінантів рогів

$$R_{n-1,1}(A), R_{n-2,1}(A), \dots, R_{m,1}(A),$$

кожен з яких є добутком $m - 1$ факторіальних добутків. Але з матриці $(n-1)$–го порядку $R_{n-1,1}(A)$ можна виділити $c_{m-1}(n-1)$ таких доданків; з матриці $R_{n-2,1}(A)$ — $c_{m-1}(n-2)$ таких доданків; і т. д. з матриці $R_{m,1}(A)$ — $c_{m-1}(m-1)$ доданків. Таким чином, використовуючи твердження 1.3.2, робимо висновок, що рівність (2.8.4) справедлива.

Рівність (2.8.5) доводиться аналогічно.

Справедливість рівностей із (ii) доводиться аналогічно. Зауважимо лише, що для доведення того факту, що m–та компонента вектора b, у правій частині цих рівностей, є співмножником кожного доданка парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$ чи параперманента $\operatorname{pper}(A)$, який породжений впорядкованим m–розбиттям натурального числа n, слід розглядати послідовність рогів

$$R_{n2}(A), R_{n3}(A), \dots, R_{n,n+m-1}(A).$$

□

Наслідок 2.8.1.1. *Для довільного вектора $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ справедливі тотожності:*

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \operatorname{pper}(Z(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$$
$$= a_1(b_2, \dots, b_n) \cdot \operatorname{pper}(Z(a_1, \dots, a_{n-1})) +$$
$$+ a_2 \cdot (b_2, \dots, b_{n-1}) \cdot \operatorname{pper}(Z(a_1, \dots, a_{n-2})) +$$
$$\dots + a_{n-1} \cdot (b_2) \cdot \operatorname{pper}(Z(a_1)) + a_n b_1.$$

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \operatorname{ddet}(Z(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$$
$$= a_1(b_2, \dots, b_n) \cdot \operatorname{ddet}(Z(a_1, \dots, a_{n-1})) -$$
$$- a_2 \cdot (b_2, \dots, b_{n-1}) \cdot \operatorname{ddet}(Z(a_1, \dots, a_{n-2})) + \dots +$$
$$+ (-1)^{n-2} a_{n-1} \cdot (b_2) \cdot \operatorname{ddet}(Z(a_1)) + (-1)^{n-1} a_n b_1.$$

Доведення. Справедливість цього наслідку одразу випливає із теореми 2.8.1, бо $\{a_{r1}\} = a_r$, а

$$\operatorname{ddet}(R_{n,r+1}(A)) = \operatorname{ddet}(Z(a_1, a_2, \ldots, a_{n-r}), \ r = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Твердження 2.8.2. *Нехай a, b — два вектори n-го порядку, A і B — трикутні матриці того ж порядку, а α — деяке число із числового поля K. Тоді справедливі рівності*

$$\alpha \cdot a \cdot \operatorname{ddet}(A) = (\alpha \cdot a) \cdot \operatorname{ddet}(A),$$

$$(a + b) \cdot \operatorname{ddet}(A) = a \cdot \operatorname{ddet}(A) + b \cdot \operatorname{ddet}(A),$$

$$a \cdot (\operatorname{ddet}(A) + \operatorname{ddet}(B)) = a \cdot \operatorname{ddet}(A) + a \cdot \operatorname{ddet}(B).$$

Доведення цього твердження залишаємо для читача. □

Твердження 2.8.3. *Для довільної трикутної матриці (2.1.1) справедлива рівність*

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \\ (-1)^{n-2} \\ \vdots \\ (-1)^0 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right].$$

Доведення. Згідно з рівністю (2.8.1), маємо

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \\ (-1)^{n-2} \\ \vdots \\ (-1)^0 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\} \quad ,$$

із якої внаслідок другої рівності (2.3.6) (стор. 80) випливає справедливість цього твердження. □

Аналогічно можна довести справедливість тотожності

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \\ (-1)^{n-2} \\ \vdots \\ (-1)^0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right]_n.$$

Вправи

2.8.1. Обчисліть добуток

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{matrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \right],$$

користуючись означенням 2.8.2.

2.8.2. Запишіть добуток

$$\begin{pmatrix} z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{matrix} \right\rangle$$

у вигляді многочлена та знайдіть його дійсні корені.

2.8.3. Використовуючи наслідок 2.8.1.1, знайдіть добуток

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{matrix} 3 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ 3 & 1 & 3 & & \\ 2 & 3 & 1 & 3 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{matrix} \right].$$

2.9 F-парадетермінанти трикутних матриць

Розглянемо деякі модифікації парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць.

Нехай задана трикутна матриця (2.1.1), (див. стор. 67). Кожному елементу a_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ цієї матриці поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів w_{ik}, $k = j, \ldots, i$, які назвемо *віртуальними елементами* цієї матриці, породженими ключовим елементом a_{ij}. Ключовий елемент одночасно є і його віртуальним елементом. Віртуальні елементи відіграватимуть роль допоміжних елементів і призначені полегшити доведення деяких тверджень. Якщо віртуальні елементи задаються при допомозі однієї із рівностей $w_{ik} = a_{ij} + k - j$ або $w_{ik} = a_{ij} - k + j$, $k = j, \ldots, i$, то наступні два вирази

$$\{a_{ij}\}^{\circ} = \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{1\}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}+1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}+i-j)}{(i-j+1)!},$$

$$\{a_{ij}\}_{\circ} = \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{-1\}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}-1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}-i+j)}{(i-j+1)!},$$

назвемо відповідно *верхнім і нижнім факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}.

Таким чином, похідні елементи ключового елемента замінюються відповідними віртуальними елементами, а набір ключових елементів вважається нормальним, якщо він породжує множину віртуальних елементів потужності n, кожні два з яких не належать одночасно до одного стовпця цієї матриці.

Означення 2.9.1. [32]. *Верхнім, нижнім F-парадетермінантом трикутної матриці (2.1.1) назвемо відповідно числа:*

$$\operatorname{ddet}^{\circ}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle^{\circ} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\}^{\circ} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}^{\circ},$$

$$\operatorname{ddet}_{\circ}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_{\circ} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\}_{\circ} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_{\circ},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент відповідний s-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, $(-1)^{\varepsilon(a)}$ — множник, який визначає знак нормального набору ключових елементів.

Аналогічно до означення F-парадетермінанта введемо поняття верхнього і нижнього F-параперманента.

Означення 2.9.2. [32]. *Верхнім, нижнім F-параперманентом трикутної матриці (2.1.1) назвемо відповідно числа:*

$$\operatorname{pper}^{\circ}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{\circ} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}^{\circ},$$

$$\mathrm{pper}_\circ(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}_\circ =$$

$$= \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s,\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1}\}_\circ.$$

Означення 2.9.3. *Алгебраїчними доповненнями*

$$D^\circ_{ij},\ D_{\circ ij},\ P^\circ_{ij},\ P_{\circ ij}$$

до верхнього і нижнього факторіального добутку ключового елемента a_{ij} трикутної матриці A, назвемо відповідно числа

$$D^\circ_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \mathrm{ddet}^\circ(R_{n,i+1}(A)),$$

$$D_{\circ ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{ddet}_\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \mathrm{ddet}_\circ(R_{n,i+1}(A)),$$

$$P^\circ_{ij} = \mathrm{pper}^\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \mathrm{pper}^\circ(R_{n,i+1}(A)),$$

$$P_{\circ ij} = \mathrm{pper}_\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \mathrm{pper}_\circ(R_{n,i+1}(A)),$$

де $R_{ij}(A)$ — роги трикутної матриці A.

Для F-парадетермінантів справедливі деякі твердження і наслідки, аналогічні відповідним твердженням і наслідкам парадетермінантів. Наведемо деякі з них без доведення.

Теорема 2.9.1. [32]. *Нехай A — трикутна матриця (2.1.1), а $T(i)$ — деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів, тоді справедливі наступні рівності:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}^\circ D^\circ_{rs}, \tag{2.9.1}$$

$$\mathrm{ddet}_\circ(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}_\circ D_{\circ rs}, \tag{2.9.2}$$

$$\mathrm{pper}^\circ(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}^\circ P^\circ_{rs},$$

$$\mathrm{pper}_\circ(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}_\circ P_{\circ rs}.$$

Наслідок 2.9.1.1. *При $i = 1$ рівності (2.9.1), (2.9.2) матимуть відповідно вигляд:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}^\circ D^\circ_{r1} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\{a_{r1}\}^\circ\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)), \tag{2.9.3}$$

$$\mathrm{ddet}_\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}_\circ D_{\circ r1} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\{a_{r1}\}_\circ\mathrm{ddet}_\circ(R_{n,r+1}(A)),$$

$$\mathrm{pper}^\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}^\circ P^\circ_{r1} = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}^\circ\mathrm{pper}^\circ(R_{n,r+1}(A)),$$

$$\mathrm{pper}_\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}_\circ P_{\circ r1} = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}_\circ\mathrm{pper}_\circ(R_{n,r+1}(A)).$$

Справедливі також аналогічні розклади за елементами останнього рядка трикутнної матриці:

Наслідок 2.9.1.2. *При $i = n$ рівності (2.9.1), (2.9.2) матимуть відповідно вигляд:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}^\circ D^\circ_{ns} = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+n}\{a_{ns}\}^\circ\mathrm{ddet}^\circ(R_{s-1,1}(A)), \tag{2.9.4}$$

$$\mathrm{ddet}_\circ(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}_\circ D_{\circ ns} = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\{a_{ns}\}_\circ\mathrm{ddet}_\circ(R_{s-1,1}(A)),$$

$$\mathrm{pper}^\circ(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}^\circ P^\circ_{ns} = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}^\circ\mathrm{pper}^\circ(R_{s-1,1}(A)),$$

$$\mathrm{pper}_\circ(A)=\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}_\circ P_{ons}=\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}_\circ \mathrm{pper}_\circ(R_{s-1,1}(A)).$$

Наведемо ще два твердження для F-парадетермінантів, аналогічні відповідно до твердження 2.4.4 на стор.96 та твердження 2.4.10 на стор.114.

Твердження 2.9.1. *Для трикутної матриці (2.1.1) виконуються рівності:*

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}^\circ D^\circ_{rj}=\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))\cdot \mathrm{ddet}^\circ(R_{nj}(A)), \qquad (2.9.5)$$

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}_\circ D_{orj}=\mathrm{ddet}_\circ(R_{j-1,1}(A))\cdot \mathrm{ddet}_\circ(R_{nj}(A)).$$

Твердження 2.9.2. *Верхній (нижній) F-парадетермінант блоково-діагональної матриці дорівнює добутку верхніх (нижніх) F-парадетермінантів її блоків.*

Доведемо кілька тверджень, властивих F-парадетермінантам. Позначимо через $A\binom{j}{k}$ трикутну матрицю (2.1.1), в якій до кожного елемента j-го стовпця додане деяке ціле число k, а решта елементів цієї матриці незмінні.

Доведемо теорему про зв'язок верхніх і нижніх F-парадетермінантів та зв'язок верхніх та нижніх F-параперманентів трикутних матриць.

Теорема 2.9.2. [27]. *Якщо A — трикутна матриця (2.1.1), то виконуються рівності:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=(-1)^n\cdot \mathrm{ddet}_\circ(-a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}, \qquad (2.9.6)$$

$$\mathrm{ddet}_\circ(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=(-1)^n\cdot \mathrm{ddet}^\circ(-a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}, \qquad (2.9.7)$$

$$\mathrm{pper}^\circ(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=(-1)^n\cdot \mathrm{pper}_\circ(-a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}, \qquad (2.9.8)$$

$$\mathrm{pper}_\circ(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=(-1)^n\cdot \mathrm{pper}^\circ(-a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}. \qquad (2.9.9)$$

Доведення. Доведемо спочатку виконання рівностей

$$\{a_{ij}\}^\circ=(-1)^{i-j+1}\{-a_{ij}\}_\circ, \qquad (2.9.10)$$

$$\{a_{ij}\}_\circ=(-1)^{i-j+1}\{-a_{ij}\}^\circ. \qquad (2.9.11)$$

За означенням факторіального добутку (див. стор. 75) елемента a_{ij} трикутної матриці запишемо

$$(-1)^{i-j+1}\{-a_{ij}\}_\circ=\frac{(-a_{ij})^{(i-j+1)\{-1\}}}{(i-j+1)!}=$$

$$(-1)^{i-j+1}\frac{(-a_{ij})\cdot(-a_{ij}-1)\cdot\ldots\cdot(-a_{ij}-(i-j))}{(i-j+1)!}=$$

$$\frac{a_{ij}\cdot(a_{ij}+1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}+i-j)}{(i-j+1)!}=\{a_{ij}\}^\circ,$$

тобто рівність (2.9.10) справджується. Поклавши в рівності (2.9.10) замість елемента a_{ij} елемент $-a_{ij}$ і помноживши отриману рівність на $(-1)^{i-j+1}$, дістанемо рівність (2.9.11).

Доведемо рівність (2.9.6). На підставі означення F-парадетермінанта маємо

$$(-1)^n\mathrm{ddet}_\circ(-a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=(-1)^n\cdot\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)}(-1)^{\varepsilon(a)}\prod_{s=1}^{r}\{-a_{i_s,j_s}\}_\circ=$$

$$=(-1)^n\cdot\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)}(-1)^{\varepsilon(a)}\prod_{s=1}^{r}(-1)^{i_s-j_s+1}\{a_{i_s,j_s}\}^\circ=$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)}(-1)^{\varepsilon(a)}\cdot\prod_{s=1}^{r}\{a_{i_s,j_s}\}^\circ=\mathrm{ddet}^\circ(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}.$$

Аналогічно можна довести рівності (2.9.7)–(2.9.9). □

Твердження 2.9.3. *Для F-парадетермінантів трикутної матриці A виконуються рівності:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix} +$$
$$+\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \left(\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1}(A)) - \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n,\frac{j+1}{j}}\right)\right), \tag{2.9.12}$$

$$\mathrm{ddet}_\circ(A) = \mathrm{ddet}_\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix} +$$
$$+\mathrm{ddet}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \left(\mathrm{ddet}_\circ(R_{n,j+1}) - \mathrm{ddet}_\circ\left(R_{n,\frac{j+1}{j}}\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix}\right)\right)\right).$$

$$\mathrm{pper}^\circ(A) = \mathrm{pper}^\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix} +$$
$$+\mathrm{pper}^\circ(R_{j-1,1}(A)) \cdot \left(\mathrm{pper}^\circ(R_{n,j+1}(A)) + \mathrm{pper}^\circ\left(R_{n,\frac{j+1}{j}}\right)\right),$$

$$\mathrm{pper}_\circ(A) = \mathrm{pper}_\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix} +$$
$$+\mathrm{pper}_\circ(R_{j-1,1}) \cdot \left(\mathrm{pper}_\circ(R_{n,j+1}) + \mathrm{pper}_\circ\left(R_{n,\frac{j+1}{j}}\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix}\right)\right)\right).$$

Доведення. Доведемо рівність (2.9.12) при $j = 1$, тобто доведемо справедливість рівності

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}(A)) - \mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{2}{1}}(A)). \tag{2.9.13}$$

З цією метою розкладемо верхній F-парадетермінант $\mathrm{ddet}^\circ(A)$ за елементами першого стовпця, використовуючи співвідношення (2.9.3).

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{r\{1\}}}{r!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\left(\frac{(a_{r1}-1)^{r\{1\}}}{r!} + \frac{a_{r1}^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!}\right)\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{(a_{r1}-1)^{r\{1\}}}{r!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)) +$$
$$+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)) = \mathrm{ddet}^\circ\left(A\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}\right) +$$
$$+\frac{a_{11}^{0\{1\}}}{0!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}(A)) + \sum_{r=2}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)).$$

Нехай в останній сумі $s = r - 1$, тоді

$$\sum_{r=2}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}(A)) =$$
$$= -\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s+1}\frac{a_{s+1,1}^{s\{1\}}}{s!}\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,s+2}(A)) =$$
$$= \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n,\frac{2}{1}}(A)\right).$$

Отже, рівність (2.9.13) істинна.

Розкладемо верхній F-парадетермінант

$$\mathrm{ddet}^\circ\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix}\right)$$

за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(j)$.

$$\mathrm{ddet}^\circ\left(A\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix}\right) = \sum_{r=j}^{n}\sum_{s=1}^{j-1}\frac{a_{rs}^{(r-s+1)\{1\}}}{(r-s+1)!}D_{rs}^\circ + \sum_{s=j}^{n}\frac{(a_{sj}-1)^{(s-j+1)\{1\}}}{(s-j+1)!}D_{sj}^\circ. \tag{2.9.14}$$

Друга сума рівності (2.9.14) відповідає розкладу цього F-парадетермінанта за елементами j-го стовпця. Позначимо першу суму через S. Тепер розкладемо верхній F-парадетермінант $\mathrm{ddet}^\circ(A)$ за елементами таблиці $T(j)$:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A)=S+\sum_{s=j}^{n}\frac{a_{sj}^{(s-j+1)\{1\}}}{(s-j+1)!}D^\circ_{sj}\overset{(2.9.5)}{=}S+\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))\mathrm{ddet}^\circ(R_{nj}(A)).$$

Подамо елементи першого стовпця рога R_{nj} у вигляді

$$a_{sj}=(a_{sj}-1)+1,\ \ s=j,\ldots,n$$

і використаємо рівність (2.9.13), тоді отримаємо:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A)=S+\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))\times$$

$$\times\left(\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\left(A\begin{pmatrix} j\\ -1\end{pmatrix}\right)+\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1})-\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{j+1}{j}})\right)=$$

$$S+\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\left(A\begin{pmatrix} j\\ -1\end{pmatrix}\right)+$$

$$+\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))(\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1}(A))-\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{j+1}{j}}(A))).$$

Але, згідно з твердженням 2.9.1,

$$\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A))\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\left(A\begin{pmatrix} j\\ -1\end{pmatrix}\right)=\sum_{s=j}^{n}\frac{(a_{sj}-1)^{(s-j+1)\{1\}}}{(s-j+1)!}D^\circ_{sj},$$

то, враховуючи (2.9.14), отримаємо рівність (2.9.12).

Решта рівностей цього твердження доводиться аналогічно. □

Розглянемо парадетермінанти трикутних матриць деякого спеціального вигляду. Нехай матриця (2.1.1) задана рівностями:

$$a_{ij}=a_i-(i-j)+k,\ \ 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n. \tag{2.9.15}$$

Позначимо верхній і нижній F-парадетермінант трикутної матриці (2.9.15) відповідно через $\lozenge 1^\circ_n, \lozenge 1_{\circ n}$.

Твердження 2.9.4. [32]. *Для верхнього F-парадетермінанта $\lozenge 1^\circ_n$ виконується рівність*

$$\lozenge 1^\circ_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{(j+1)^{(k-1)\{1\}}}{(k-1)!}\mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix}1&\ldots&j\\ -k&\ldots&-k\end{pmatrix}, \tag{2.9.16}$$

де $\mathrm{ddet}^\circ(R_{n1}(A))=\lozenge 1^\circ_n$.

Доведення. Доведемо рівність (2.9.16) при $k=1$. Запишемо рівність (2.9.13) у вигляді:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A)-\mathrm{ddet}^\circ\left(A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}(A))-\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{2}{1}}(A)). \tag{2.9.17}$$

При допомозі рівності (2.9.17), можна побудувати ланцюг рівностей:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A)-\mathrm{ddet}^\circ\left(A\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}(A))-\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{2}{1}}(A))=$$

$$\mathrm{ddet}^\circ(R_{n3}(A))-\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,\frac{3}{2}}(A))=$$

$$=\ldots=\mathrm{ddet}^\circ(a_n+k)-\mathrm{ddet}^\circ(a_n+k-1)=1.$$

Ці рівності разом із рівністю (2.9.12) дають рівність

$$\lozenge^\circ_n=\mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} j\\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1}(A)), \tag{2.9.18}$$

яка при $j=n$ прийме вигляд

$$\lozenge^\circ_n=\mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} n\\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^\circ(R_{n-1,1}(A)).$$

Застосовуючи до верхнього F-парадетермінанта $\mathrm{ddet}^\circ(R_{n-1,1}(A))$ рівність (2.9.18) при $j=n-1$, отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^\circ(R_{n-1,1}(A))=\mathrm{ddet}^\circ R_{n-1,1}\begin{pmatrix} n-1\\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^\circ(R_{n-2,1}(A)),$$

яка разом із рівністю (2.9.18) приводить до рівності

$$\Diamond_n^\circ = \mathrm{ddet}^\circ R_{n1}\begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ R_{n-1,1}\begin{pmatrix} n-1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ(R_{n-2,1}(A)).$$

Продовжуючи процес аналогічних обчислень, отримаємо рівність

$$\Diamond_n^\circ = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.9.19}$$

в якій $\mathrm{ddet}^\circ R_{01}\binom{0}{-1} = 1$.

Позаяк у верхньому F-парадетермінанті $\mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\binom{i}{-1}$ відповідні елементи i-того та $(i-1)$-го стовпців однакові, то, застосовуючи до нього рівність (2.9.12) при $j = i-1$, отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} i-1 & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми приходимо до аналогічної ситуації, бо у верхньому F-парадетермінанті, який знаходиться у правій частині останньої рівності, відповідні елементи $(i-1)$-го та $(i-2)$-го стовпців рівні. Продовжуючи процес аналогічних обчислень, ми прийдемо до рівності

$$\mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} 1 \ldots i \\ -1 \ldots -1 \end{pmatrix},$$

яка разом із рівністю (2.9.19) дає рівність

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 \ldots j \\ -1 \ldots -1 \end{pmatrix}, \tag{2.9.20}$$

тобто рівність (2.9.16) при $k = 1$.

Нехай

$$\frac{(n-j+1)^{(r-1)\{1\}}}{(r-1)!} = p_j(r)$$

і

$$\mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 \ldots j \\ -r \ldots -r \end{pmatrix} = R_j(r),$$

тоді рівність (2.9.16) перепишеться у вигляді

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^{n} p_j(k) R_j(k). \tag{2.9.21}$$

Нехай рівність (2.9.21) виконується при $k = r$. Доведемо її справедливість при $k = r+1$.

Позаяк F-парадетермінанти

$$\mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 \ldots j \\ -r \ldots -r \end{pmatrix} = R_j(r),\ j = 0, \ldots, n$$

є F-парадетермінантами виду $\Diamond 1_n^\circ$, то до кожного з них застосовна рівність (2.9.20). Так отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 \ldots j \\ -r \ldots -r \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{ddet}^\circ R_{i1}\begin{pmatrix} 1 \ldots i \\ -(r+1) \ldots -(r+1) \end{pmatrix},$$

або рівність

$$\mathrm{ddet}^\circ R_j(r) = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{ddet}^\circ R_i(r+1). \tag{2.9.22}$$

Покладемо (2.9.22) в (2.9.21), тоді отримаємо рівності

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^{n} p_j(r) \sum_{i=0}^{j} \mathrm{ddet}^\circ R_i(r+1) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{ddet}^\circ R_i(r+1) \sum_{j=0}^{i} p_j(r),$$

тобто

$$p_i(r+1) = \sum_{j=1}^{i} p_j(r). \tag{2.9.23}$$

Отже, для того щоб довести справедливість рівності (2.9.16) при $k = r+1$, необхідно довести, що коефіцієнти $p_j(r)$ задовольняють рівність (2.9.23), яка, очевидно, збігається з рівністю (1.1.7) на стор. 11. $\square$

Розглянемо деякі найпростіші приклади F-парадетермінантів, при допомозі яких можна отримати двоїсті тотожності.

Приклад 2.9.1. Якщо, наприклад, елементи трикутної матриці (2.1.1) мають вигляд

$$(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = a,$$

то легко довести наступні рівності:

$$\left\langle \begin{array}{llll} a & & & \\ a & a & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a & a & \dots & a \end{array} \right\rangle^{\circ}_{n} = \frac{a^{\underline{n}}}{n!}, \tag{2.9.24}$$

$$\left\langle \begin{array}{llll} a & & & \\ a & a & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a & a & \dots & a \end{array} \right\rangle_{\circ n} = \frac{a^{\overline{n}}}{n!}. \tag{2.9.25}$$

Після розкладу F-парадетермінантів (2.9.24), (2.9.25) за елементами n-того рядка, отримаємо відповідно рівності:

$$\Diamond^{\circ}_{n} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{a^{(n-s+1)\{1\}}}{(n-s+1)!} \Diamond^{\circ}_{s-1},$$

$$\Diamond_{\circ n} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{a^{(n-s+1)\{-1\}}}{(n-s+1)!} \Diamond_{\circ s-1},$$

які разом із рівностями (2.9.24), (2.9.25) дадуть відповідно тотожності:

$$\frac{a^{n\{-1\}}}{n!} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{a^{(n-s+1)\{1\}}}{(n-s+1)!} \cdot \frac{a^{(s-1)\{-1\}}}{(s-1)!} =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i-1} \frac{a^{(n-i)\{1\}}}{(n-i)!} \cdot \frac{a^{i\{-1\}}}{i!}, \tag{2.9.26}$$

$$\frac{a^{n\{1\}}}{n!} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+n} \frac{a^{(n-s+1)\{-1\}}}{(n-s+1)!} \cdot \frac{a^{(s-1)\{1\}}}{(s-1)!} =$$
$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i-1} \frac{a^{(n-i)\{-1\}}}{(n-i)!} \cdot \frac{a^{i\{1\}}}{i!}. \tag{2.9.27}$$

Таким чином, ми отримали тотожності (1.1.4), (1.1.5) (див. стор. 9).

Слід відзначити, що як для звичайних парадетермінантів, так і для F-парадетермінантів працює метод побудови тотожностей. При цьому верхні і нижні F-парадетермінанти генерують двоїсті тотожності.

Приклад 2.9.2. Наведемо ще одну пару двоїстих тотожностей із зростаючими та спадними факторіальними степенями:

$$\left\langle \begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2 & 2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ n & n & \dots & n \end{array} \right\rangle^{\circ}_{n} = (-1)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n^{i\{1\}}}{i!},$$

$$\left\langle \begin{array}{llll} 1 & & & \\ 2 & 2 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ n & n & \dots & n \end{array} \right\rangle_{\circ n} = 1 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n^{i\{-1\}}}{i!}.$$

Розглянемо ще один типовий приклад із F-парадетермінантами.

Приклад 2.9.3. Нехай задано верхній F-парадетермінант

$$\Diamond^{\circ}_{n} = \left\langle \begin{array}{llllll} 2 & & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & \end{array} \right\rangle^{\circ}_{n}. \tag{2.9.28}$$

Розкладемо його за елементами останнього рядка, отримаємо рекурентне рівняння

$$\Diamond_n^\circ = 2\Diamond_{n-1}^\circ - \Diamond_{n-2}^\circ, \tag{2.9.29}$$

із початковими умовами

$$\Diamond_1^\circ = 2,\ \Diamond_2^\circ = 3.$$

При допомозі рекурентного рівняння (2.9.29) легко знайти значення верхнього F-парадетермінанта (2.9.28) і отримати тотожність

$$\Diamond_n^\circ = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i 2^{n-2i} \frac{(i+1)^{(n-2i)\{1\}}}{(n-2i)!} = n+1.$$

Доведемо теорему про зв'язок F-парадетермінантів та F-параперманентів із парадетермінантами та параперманентами.

Теорема 2.9.3. [27]. *Нехай A — трикутна матриця (2.1.1), тоді справджуються такі тотожності:*

$$\operatorname{ddet}^\circ(A) = \operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{1\}}}\right)_n, \tag{2.9.30}$$

$$\operatorname{ddet}_\circ(A) = \operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{-1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{-1\}}}\right)_n, \tag{2.9.31}$$

$$\operatorname{pper}^\circ(A) = \operatorname{pper}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{1\}}}\right)_n, \tag{2.9.32}$$

$$\operatorname{pper}_\circ(A) = \operatorname{pper}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{-1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{-1\}}}\right)_n, \tag{2.9.33}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

Доведення. Щоб довести тотожність (2.9.30), доведемо, що верхній факторіальний добуток елемента a_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, F-парадетермінанта $\operatorname{ddet}^\circ(A)$ і факторіальний добуток парадетермінанта

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{-1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{-1\}}}\right)_n$$

збігаються. Дійсно,

$$\left\{\frac{(i-j+\delta_{ij})!}{(i-j+1)!} \cdot \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{-1\}}}{a_{i,j+1}^{(i-j)\{-1\}}}\right\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik} =$$

$$= \prod_{k=j}^{i} \frac{(i-k+\delta_{ik})!}{(i-k+1)!} \cdot \frac{a_{ik}^{(i-k+1)\{1\}}}{a_{i,k+1}^{(i-k)\{1\}}} = \begin{cases} a_{ij}, & j=i, \\ \frac{a_{ij}^{(i-j+1)\{1\}}}{(i-j+1)!}, & j \neq i. \end{cases} = \{a_{ij}\}^\circ.$$

Аналогічно можна довести тотожності (2.9.31)–(2.9.33). □

2.10 Зв'язок парадетермінантів із детермінантами

Існує двоє нас — я визнаю, —
Хай ми одними зв'язані чуттями.
На честь непоганьбовану твою
Не упадуть моїх пороків плями.

— Із 36-го сонета В.Шекспіра (переклад з англ. Дмитра Паламарчука)

Аналогія властивостей детермінантів та парадетермінантів значною мірою пояснюється тісним зв'язком, який існує між ними. Виявляється, що в ряді випадків детермінанти можуть бути зведені до парадетермінантів. Позаяк для обчислення останніх достатньо виконати $\frac{n(n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання, то в багатьох випадках заміна детермінанта відповідним йому парадетермінантом може істотно спростити обчислення.

Розглянемо матрицю виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 1 & \dots & 0 & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & b_{n-1,n-1} & 1\\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.10.1)$$

яку назвемо *нижньою квазітрикутною матрицею.*

Теорема 2.10.1. [19]. *Для довільної трикутної матриці* (2.1.1) *справедлива тотожність*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 1 & \dots & 0 & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & b_{n-1,n-1} & 1\\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (2.10.2)$$

де

$$b_{ij}=\{a_{ij}\}=\prod_{k=j}^{i} a_{ik}, \ 1\le j\le i\le n. \qquad (2.10.3)$$

Доведення. Доведемо, що алгоритм:

1) якщо a_{ij} — ключовий елемент трикутної матриці, то до трансверсалі належить елемент b_{ij} квадратної матриці;

2) якщо ж $a_{ik}, k=j+1,\dots,i$ — довільний похідний елемент ключового елемента a_{ij}, то до трансверсалі належить одиниця, яка розміщена в $(k-1)$–му рядку і k–му стовпці квадратної матриці,

— встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною нормальних наборів ключових елементів трикутної матриці та множиною трансверсалей з ненульовими елементами нижньої квазітрикутної матриці.

а) Розглянемо два факторіальні добутки ключових елементів a_{i_1,j_1} і a_{i_2,j_2}, що належать до одного нормального набору. За означенням нормального набору ключових елементів та їх факторіального добутку, множини номерів стовпців всіх елементів цих факторіальних добутків задовольняють рівність

$$\{j_1,j_1+1,\dots,i_1\}\cap\{j_2,j_2+1,\dots,i_2\}=\varnothing.$$

Тому наведений вище алгоритм кожному нормальному наборові ключових елементів трикутної матриці (2.1.1) ставить у відповідність трансверсаль ненульових елементів нижньої квазітрикутної матриці (2.10.1).

б) Внаслідок пункту 1) наведеного вище алгоритму різним нормальним наборам ключових елементів трикутної матриці, очевидно, відповідають різні трансверсалі з ненульовими елементами нижньої квазітрикутної матриці.

в) Число трансверсалей з ненульовими елементами матриці B, при $n=2$, дорівнює двом. Розкладемо детермінант нижньої квазітрикутної матриці k–того порядку за елементами першого її рядка. При цьому отримаємо два детермінанти нижніх трикутних матриць $k-1$–го порядку. Отже, за індукцією число трансверсалей з ненульовими елементами матриці (2.10.1), як і число всіх нормальних наборів трикутної матриці (2.1.1), дорівнює 2^{n-1}.

г) Для доведення теореми залишається довести, що знаки відповідних доданків парадетермінанта та детермінанта однакові. Нехай

$$a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}, \dots, a_{i_kj_k}$$

— деякий нормальний набір ключових елементів трикутної матриці, якому відповідає знак $(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}$, причому виконуються нерівності $i_1<i_2<\ldots<i_k$. За наведеним вище алгоритмом, ключовому елементу a_{ij} і його похідним елементам відповідає елемент b_{ij} і $i-j$ елементів, що належать рядкам з номерами, меншими ніж i. Таким чином, загальне число транспозицій перестановки перших індексів доданка, відповідного даному нормальному наборові дорівнює $\sum_{s=1}^{k}(i_s-j_s)$ і має ту ж парність, що й значення

виразу $\sum_{s=1}^{k}(i_s + j_s)$, який визначає знак відповідного доданка парадетермінанта.

Зауважимо, що цінність цього доведення полягає не в його простоті, а у побудові взаємно однозначної відповідності між нормальними наборами ключових елементів трикутної матриці та трансверсалями ненульових елементів нижньої квазітрикутної матриці.

Наведемо простіше доведення цієї теореми.

Для $n = 1$ і $n = 2$ рівність (2.10.2), очевидно, справедлива. Нехай вона справедлива для всіх $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Доведемо, що виконується індукційний крок. З цією метою розкладемо парадетермінант і детермінант цієї рівності за елементами першого стовпця. Після деяких спрощень в правій частині отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{a_{i1}\}\operatorname{ddet}(R_{k,i+1}) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}b_{i1}\cdot B\begin{pmatrix} i & i+1, \ldots & k \\ i & i+1, \ldots & k\end{pmatrix},$$

яка і доводить виконання індукційного кроку. □

Зауваження 2.10.1. В останній рівності ми вважаємо, що

$$\operatorname{ddet}(R_{n,n+1}) = B\begin{pmatrix} n+1 & n \\ n+1 & n\end{pmatrix} = 1.$$

Наслідок 2.10.1.1. *Для довільної нижньої квазітрикутної матриці (2.10.1), очевидно, виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \ldots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} b_{11} & & & & \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & b_{22} & & & \\ \frac{b_{31}}{b_{32}} & \frac{b_{32}}{b_{33}} & b_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{b_{n1}}{b_{n2}} & \frac{b_{n2}}{b_{n3}} & \frac{b_{n3}}{b_{n4}} & \ldots & b_{nn} \end{matrix} \right\rangle. \tag{2.10.4}$$

Зауваження 2.10.2. Зауважимо, що рівність (2.10.4) справедлива також тоді, коли деякі елементи нижньої квазітрикутної матриці дорівнюють 0, бо при обчисленні значення відповідного парадетермінанта нулі скорочуються і невизначеність зникає.

Твердження 2.10.1. *Справедлива рівність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-3}a_{n-2,1} & (-1)^{n-4}a_{n-2,2} & (-1)^{n-5}a_{n-2,3} & \ldots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-2}a_{n-1,1} & (-1)^{n-3}a_{n-1,2} & (-1)^{n-4}a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ (-1)^{n-1}a_{n,1} & (-1)^{n-2}a_{n,2} & (-1)^{n-3}a_{n,3} & \ldots & -a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \ldots & -1 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,n-1} & -1 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{2.10.5}$$

Доведення. При $n = 1$ і $n = 2$ рівність, очевидно, справедлива.

Нехай рівність (2.10.5) справедлива при $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Доведемо її справедливість при $n = k$. Для цього достатньо розкласти детермінант лівої частини рівності (2.10.5) за елементами останнього стовпчика на два детермінанти $(k-1)$-го порядку, перемножити другий детермінант і кожен елемент його останнього рядка на (-1), застосувати до обидвох детермінантів $(k-1)$–го порядку твердження (2.10.5) при $n = k-1$ та помітити, що сума утворених двох доданків є результатом розкладу детермінанта правої сторони рівності (2.10.5) за елементами останнього стовпчика. □

Теорема 2.10.2. *Нехай задана деяка матриця n–того порядку*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ n \geqslant 2, \tag{2.10.6}$$

для якої виконуються нерівності

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq 0, \ A\begin{pmatrix}1\,2\\2\,3\end{pmatrix} \neq 0, \ \ldots, A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,n-2 & n-1\\2\,3\,\ldots\,n-1 & n\end{pmatrix} \neq 0,$$

ліві частини яких є вкороченими записами мінорів матриці (2.10.6). Тоді справедлива рівність

$$\det(A) = a_{12}a_{23}^{(1)}a_{34}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n}^{(n-2)} \cdot \operatorname{ddet}\left\langle \frac{a_{ij}^{(j-2)}}{a_{i,j+1}^{(j-1)}} \right\rangle_{1\leq j\leq i\leq n}, \tag{2.10.7}$$

де

$$a_{i,p}^{(p-2)} = \frac{A\binom{1\,2\,\ldots\,p-2\ i}{2\,3\,\ldots\,p-1\ p}}{A\binom{1\,2\,\ldots\,p-2}{2\,3\,\ldots\,p-1}}, \ p = 3,4,\ldots,n, \ i = p-1, p, \ldots, n, \tag{2.10.8}$$

$$a_{ip}^{(p-2)} = a_{ip}\ , p = 1, 2, \ a_{n,n+1}^{n-1} = 1.$$

Доведення. Зведемо детермінант матриці (2.10.6) до детермінанта

матриці A' виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1}^{(n-3)} & \alpha_{n-1,n}^{(n-2)} \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3}^{(1)} & \cdots & \alpha_{n,n-1}^{(n-3)} & \alpha_{n,n}^{(n-2)} \end{pmatrix}, \tag{2.10.9}$$

Цього можна досягнути додаванням до кожного стовпця матриці A, починаючи із третього, відповідних попередніх стовпців цієї матриці помножених на відповідні коефіцієнти. При цьому всі мінори, що мають вигляд

$$A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,p-2\ i\\2\,3\,\ldots\,p-1\ p\end{pmatrix}, \ \ A'\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,p-2\ i\\2\,3\,\ldots,\,p-1\ p\end{pmatrix},$$

де $p = 3, 4, \ldots, n, \ i = p-1, p, \ldots, n$ рівні. Тому, враховуючи структуру матриці A', отримаємо рівності:

$$A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,p-2\ i\\2\,3\,\ldots\,p-1\ p\end{pmatrix} = a_{12}a_{23}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{p-2,p-1}^{(p-3)} \cdot a_{i,p}^{(p-2)}, \tag{2.10.10}$$

де $p = 3, 4, \ldots, n, \ i = p-1, p, \ldots, n$.

Для $i = p-1$ рівності (2.10.10) запишуться у такому вигляді:

$$A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,p-2\ p-1\\2\,3\,\ldots\,p-1\ \ p\end{pmatrix} = a_{12}a_{23}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{p-2,p-1}^{(p-3)} \cdot a_{p-1,p}^{(p-2)}, \ p = 2, 3, \ldots, n. \tag{2.10.11}$$

Із (2.10.10),(2.10.11) маємо рівності (2.10.8).

Винесемо за знак детермінанта $\det(A')$ добуток

$$a_{12}a_{23}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n}^{(n-2)} = A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,n-2\ n-1\\2\,3\,\ldots\,n-1\ \ n\end{pmatrix},$$

тоді, враховуючи (2.10.8), отримаємо рівність

$$\det(A) = a_{12}a_{23}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n}^{(n-2)} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & \frac{a_{32}}{a_{12}} & \frac{a_{33}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \frac{a_{n-1,2}}{a_{12}} & \frac{a_{n-1,3}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & \frac{a_{n-1,4}^{(2)}}{a_{34}^{(2)}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n-1}^{(n-3)}}{a_{n-2,n-1}^{(n-3)}} & 1 \\ a_{n,1} & \frac{a_{n,2}}{a_{12}} & \frac{a_{n,3}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & \frac{a_{n4}^{(2)}}{a_{34}^{(2)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-3)}}{a_{n-2,n-1}^{(n-3)}} & \frac{a_{n,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n}^{(n-2)}} \end{vmatrix}.$$

Застосуємо до останньої рівності наслідок 2.10.1.1, тоді, враховуючи властивості парадетермінанта, отримаємо рівність (2.10.7). □

Теорема 2.10.2 корисна також при встановленні рівностей між детермінантами. Проілюструємо це наступним твердженням.

Твердження 2.10.2. *Для довільної матриці (2.10.6), для* $n = 3, 4, \ldots$ *виконується рівність*

$$A\binom{1\,2\cdots n}{1\,2\cdots n}A\binom{1\,2\cdots n-2}{2\,3\cdots n-1} = A\binom{1\,2\cdots n-1}{1\,2\cdots n-1}A\binom{1\,2\cdots n-2\,n}{2\,3\cdots n-1\,n} - \qquad (2.10.12)$$
$$-A\binom{1\,2\cdots n-2\,n-1}{2\,3\cdots n-1\;n}A\binom{1\,2\cdots n-2\;\;n}{1\,2\cdots n-2\,n-1}.$$

Доведення. Для $n = 3$ рівність (2.10.12) має вигляд

$$A\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}A\binom{1}{2} = A\binom{1\,2}{1\,2}A\binom{1\,3}{2\,3} - A\binom{1\,2}{2\,3}A\binom{1\,3}{1\,2}$$

і перевіряється безпосередньо. Перш за все відзначимо, що разом із рівністю (2.10.12), очевидно, виконується також рівність

$$A\binom{1\,2\cdots i}{1\,2\cdots r}A\binom{1\,2\cdots r-2}{2\,3\cdots r-1} = A\binom{1\,2\cdots r-1}{1\,2\cdots r-1}A\binom{1\,2\cdots r-2\,i}{2\,3\cdots r-1\,r} - \qquad (2.10.13)$$
$$-A\binom{1\,2\cdots r-2\,r-1}{2\,3\cdots r-1\;r}A\binom{1\,2\cdots r-2\;\;i}{1\,2\cdots r-2\,r-1},$$

де $r = 3, 4, \ldots n-1$; $i = r, \ldots, n$

Нехай рівність (2.10.12) виконується для всіх $3 \le n \le k-1$. Доведемо її справедливість для $n = k$.

Розкладемо парадетермінант в правій частині рівності (2.10.7) за елементами останнього рядка, тоді отримаємо рівність

$$A\begin{pmatrix}1\,2\cdots n\\1\,2\cdots n\end{pmatrix} = a_{nn}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,2\cdots n-1\\1\,2\cdots n-1\end{pmatrix} - a_{n,n-1}^{(n-3)}a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,2\cdots n-2\\1\,2\cdots n-2\end{pmatrix} +$$
$$+\ldots+(-1)^{n-3}a_{n3}^{(1)}a_{34}^{(2)}\times\ldots\times a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,2\\1\,2\end{pmatrix} + (-1)^{n-2}a_{n2}a_{23}^{(1)}\cdot\ldots$$
$$\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-1)^{n-1}a_{n1}a_{12}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}. \qquad (2.10.14)$$

Запишемо суму двох останніх доданків рівності (2.10.14) у вигляді

$$(-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}(a_{11}a_{n2} - a_{12}a_{n1}) =$$
$$= (-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,n\\1\,2\end{pmatrix}.$$

Згрупуємо нові два останні доданки

$$(-1)^{n-3}a_{n3}^{(1)}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,2}{1\,2}$$

і

$$(-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,n}{1\,2}.$$

При цьому отримаємо один доданок

$$(-1)^{n-3}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}\cdot\frac{A\binom{1\,2}{1\,2}A\binom{1\,n}{2\,3} - A\binom{1\,2}{2\,3}A\binom{1\,n}{1\,2}}{A\binom{1}{2}}.$$

Останній вираз, внаслідок (2.10.13) для $i = n$; $r = 3$, можна подати у вигляді

$$(-1)^{n-3}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,2\,n}{1\,2\,3}.$$

Продовжуючи аналогічні перетворення, зрештою, отримаємо рівність (2.10.12). □

Таким чином, за доведеним твердженням, детермінант матриці (2.10.14), для довільного $n = 3, 4, \ldots$, може бути виражений через чотири мінори $n-1$–го порядку.

Проілюструємо, наприклад, роль теореми 2.10.1 при встановленні нової властивості парадетермінанта.

З цією метою розкладемо детермінант у правій частині рівності (2.10.2) за елементами першого рядка, тоді отримаємо рівність

$$\left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{32} & b_{33} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \ldots & 1 \\ b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} b_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31} & b_{33} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \ldots & 1 \\ b_{n1} & b_{n3} & b_{n4} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Але останню рівність, внаслідок рівностей (2.10.3) і (2.10.4), можна записати у вигляді:

$$\left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = a_{11} \left\langle \begin{array}{cccc} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle -$$

$$- \left\langle \begin{array}{cccc} a_{21}a_{22} & & & \\ a_{31}a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1}a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right\rangle. \qquad (2.10.15)$$

Зауважимо, що із рівності (2.10.15) безпосередньо випливає теорема 2.4.2 про обчислення парадетермінантів.

Розкладаючи детермінант у правій частині рівності (2.10.2) за елементами останнього стовпця, аналогічно можна отримати рівність

$$\left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\rangle = a_{nn} \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{array} \right\rangle -$$

$$- \left\langle \begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \ldots & a_{n-2,n-2} & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \cdot a_{nn} \end{array} \right\rangle. \qquad (2.10.16)$$

Розкладаючи парадетермінанти правої частини рівності (2.10.16) за елементами останнього рядка та групуючи відповідні доданки, можна отримати рівність

$$\left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\rangle_n = \qquad (2.10.17)$$

$$= a_{nn} \left\langle \begin{array}{cccc} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \dfrac{\{a_{n-1,1}\} - \frac{\{a_{n,1}\}}{a_{nn}}}{\{a_{n-1,2}\} - \frac{\{a_{n,2}\}}{a_{nn}}} & \dfrac{\{a_{n-1,2}\} - \frac{\{a_{n,2}\}}{a_{nn}}}{\{a_{n-1,3}\} - \frac{\{a_{n,3}\}}{a_{nn}}} & \ldots & \{a_{n-1,n-1}\} - \dfrac{\{a_{n,n-1}\}}{a_{nn}} \end{array} \right\rangle_{n-1},$$

тут символом $\{\cdot\}$ позначено факторіальні добутки елементів.

Рівність (2.10.17) може бути ефективною при обчисленні парадетермінантів деяких матриць.

Доведемо ще одну тотожність для детермінантів спеціального вигляду

Теорема 2.10.3. *Нехай*

$$A_{k,n} = (-1)^{k+1} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k-1,k-2} & a_{k-2,k-2} & a_{k-3,k-2} & \cdots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k,k-1} & a_{k-1,k-1} & a_{k-2,k-1} & \cdots & a_{1,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+1,k} & a_{k,k} & a_{k-1,k} & \cdots & a_{2,k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{k+2,k+1} & a_{k+1,k+1} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{3,k+1} & a_{1,k+1} & -1 & \dots & 0 \\ a_{k+3,k+2} & a_{k+2,k+2} & a_{k+1,k+2} & \cdots & a_{k,k+2} & a_{2,k+2} & a_{1,k+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-2,n-1} & \cdots & a_{n-k,n-1} & a_{n-k-1,n-1} & a_{n-k-2,n-1} & \cdots & -1 \\ a_{n+1,n} & a_{n,n} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{n-k+1,n} & a_{n-k,n} & a_{n-k-1,n} & \cdots & a_{1,n} \end{vmatrix}_n \tag{2.10.18}$$

тоді справедлива тотожність

$$A_{k,n} = -a_{1,k-1}A_{k-1,n} + a_{2,k-1}A_{k-2,n} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1} a_{k-1,k-1} A_{1,n} + (-1)^k a_{k,k-1} A_{0,n}. \tag{2.10.19}$$

Доведення. Проілюструємо доведення даної теореми при $k = 4$, $n = 6$. В загальному випадку доведення теореми аналогічне.

При $k = 4$, $n = 6$ тотожність (2.10.19) матиме вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & -1 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{34} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{56} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} = -a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & -1 & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{34} & a_{14} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{45} & a_{25} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{56} & a_{36} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} +$$

$$a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{13} & -1 & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{24} & a_{14} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{35} & a_{25} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{46} & a_{36} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{12} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{23} & a_{13} & -1 & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{34} & a_{24} & a_{14} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{45} & a_{35} & a_{25} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{56} & a_{46} & a_{36} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{43} \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} & -1 & 0 & 0 \\ a_{44} & a_{34} & a_{24} & a_{14} & -1 & 0 \\ a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{25} & a_{15} & -1 \\ a_{66} & a_{56} & a_{46} & a_{36} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix}. \tag{2.10.20}$$

Розкладемо детермінанти у правій частині цієї рівності за елементами 4-го стовпця. Згрупувавши всі доданки при -1, ми отримаємо вираз

$$a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{34} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{45} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{56} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & -1 & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{35} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{12} & -1 & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{34} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{45} & a_{35} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{56} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix} - a_{43} \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & -1 & 0 & 0 \\ a_{44} & a_{34} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{15} & -1 \\ a_{66} & a_{56} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix},$$

який є результатом розкладу детермінанта лівої частини рівності (2.10.20) за елементами третього рядка.

Доданки із множником a_{14} є розкладом детермінанта

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{15} & -1 \\ a_{76} & a_{66} & a_{56} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix},$$

що дорівнює нулю, за елементами четвертого рядка.

Аналогічно, доданки із множниками a_{25} і a_{36} є результатом розкладу детермінантів

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{34} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{76} & a_{66} & a_{56} & a_{46} & a_{26} & a_{16} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{33} & a_{23} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{54} & a_{44} & a_{34} & a_{24} & -1 & 0 \\ a_{65} & a_{55} & a_{45} & a_{35} & a_{15} & -1 \end{vmatrix}$$

за елементами четвертих рядків.

Для доведення тотожності (2.10.19) достатньо розкласти всі детермінанти лівої її частини за елементами k–го стовпця та згрупувати відповідні доданки. $\square$

Теорема 2.10.4. *Нехай*

$$P_n = \left[\begin{array}{cccccc} a_{10} & & & & & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} & & & & \\ \frac{a_{32}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\ \frac{a_{n,n-1}}{a_{n-1,n-1}} & \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \dots & a_{1,n-1} & \\ \frac{a_{n+1,n}}{a_{n,n}} & \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} \end{array}\right]_{n+1},$$

$$Q_n = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & & & & \\ \frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \dots & a_{1,n-1} & \\ \frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} \end{array}\right]_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

тоді для довільного $k \in \mathbb{N}_0$, такого що $k < n$, справедлива рівність

$$P_k Q_n - P_n Q_k = A_{k,n} \tag{2.10.21}$$

де $A_{k,n}$ — параперманент із теореми 2.10.3

Доведення. 1) Доведемо справедливість рівності (2.10.21) при $n \in \mathbb{N}$ і $k = 0$, тобто доведемо справедливість рівності

$$P_0 Q_n - P_n Q_0 = -\begin{vmatrix} a_{21} & -1 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,n-1} & a_{n-2,n-1} & \dots & -1 \\ a_{n+1,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} \tag{2.10.22}$$

індукцією по n.

Для $n = 1$ маємо

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = [a_{10}] \cdot [a_{11}] - \left[\begin{array}{cc} a_{10} & \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{11} \end{array}\right] \cdot 1 = -|a_{21}|.$$

Нехай рівність (2.10.22) справедлива для довільного $n < s$. Доведемо її справедливість при $n = s$. Розкладемо параперманенти P_s і Q_s в цій рівності за елементами останнього рядка і згрупуємо доданки із a_{is}, $i = 1, 2, \dots, s$:

$$P_0 Q_s - P_s Q_0 = a_{1,s}(P_0 Q_{s-1} - P_{s-1} Q_0) + a_{2,s}(P_0 Q_{s-2} - P_{s-2} Q_0) + \dots +$$

$$+ a_{s-1,s}(P_0 Q_1 - P_1 Q_0) + a_{s,s}(P_0 Q_0 - P_0 Q_0) - a_{s+1,s}.$$

Враховуючи припущення для $n < s$, замінимо цю суму на суму

$$-a_{1,s}\begin{vmatrix} a_{21} & -1 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s-1,s-2} & a_{s-3,s-2} & \dots & -1 \\ a_{s,s-1} & a_{s-2,s-1} & \dots & a_{1,s-1} \end{vmatrix} + a_{2,s}\begin{vmatrix} a_{21} & -1 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s-1,s-2} & a_{s-3,s-2} & \dots & 0 \\ a_{s,s-1} & a_{s-2,s-1} & \dots & -1 \end{vmatrix} -$$

$$-\dots + (-1)^{s-1}a_{s-1,s}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s-1,s-2} & a_{s-3,s-2} & \dots & 0 \\ a_{s,s-1} & a_{s-2,s-1} & \dots & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{s+1}a_{s+1,s}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{s-3,s-2} & a_{s-4,s-2} & \dots & 0 \\ a_{s-2,s-1} & a_{s-3,s-1} & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Але сума отриманих детермінантів є розкладом детермінанта (2.10.22) при $n = s$ за елементами останнього рядка, що й доводить першу частину теореми.

2) Розкладемо параперманенти P_k і Q_k у виразі $P_kQ_n - P_nQ_k$ за елементами останнього рядка

$$P_kQ_n - P_nQ_k = a_{1,k}(P_{k-1}Q_n - P_nQ_{k-1}) + a_{2,k}(P_{k-2}Q_n - P_nQ_{k-2}) + \dots + \tag{2.10.23}$$

$$+a_{k,k}(P_0Q_n - P_nQ_0) + a_{k+1,k}Q_n$$

Враховуючи співвідношення параперманента із парадетермінантом, парадетермінанта із детермінантом та твердження 2.10.1, лег-

ко встановити тотожність

$$Q_n = \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{12} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,n-1} & a_{n-2,n-1} & \dots & a_{1,n-1} & -1 \\ a_{n,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{2,n} & a_{1,n} \end{vmatrix}.$$

Порівнюючи рекурсію (2.10.23) із рекурсією (2.10.19), робимо висновок, що справедлива рівність (2.10.21). □

Вправи

2.10.1. Зведіть парадетермінант виду

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\rangle$$

до рівного йому параперманента, користуючись теоремою 2.10.1 (стор. 196).

2.10.2. Виразіть параперманент трикутної матриці 4–го порядку через детермінант квадратної матриці 4–го порядку.

2.10.3. Користуючись теоремою 2.10.2, зведіть детермінант третього порядку до рівного йому парадетермінанта третього порядку.

2.10.4. Використовуючи рівність (2.10.4), подайте детермінант

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

через рівний йому парадетермінант.

2.10.5. Перевірте справедливість рівності (2.10.12) для $n = 3$.

2.10.6. Знайдіть значення парадетермінанта

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \right\rangle,$$

використовуючи рівність (2.10.17).

2.10.7. Запишіть рівність для параперманента, аналогічну до рівності (2.10.17).

2.11 Зв'язок перманентів із детермінантами

"Протягом століття, що минуло після появи мемуарів Біне й Коші, було опубліковано біля 20 робіт про перманенти. У більшості з них йшлося про тотожності, які включають детермінанти й перманенти."

— *Мінк X., [60], стор. 17.*

"Ляйбніц — один із найплідніших винахідників математичних символів. Мало хто так добре розумів єдність форми й змісту. [7]

— *Стройк Д.Я., [74], стор. 151.*

Перманенти є важливим поняттям лінійної алгебри і знаходять застосування у різних областях математики, особливо у

[7] Існує думка, що поняття "детермінант"ввів Г. Ляйбніц. Однак японський математик Секі Кова прийшов до ідеї цього поняття ще у 1683 році (див. *Mskami I.* On the Japanesse Theory of Determinants. — Isis, 1914, 2, с. 9–36).

комбінаторному аналізі [76]. Незважаючи на поверхневу простоту перманентів, для них до цього часу не знайдено природного алгоритму обчислення їх значень, подібного до алгоритму Гауса обчислення детермінантів. В зв'язку з цим, Пойа в 1913 році [138] сформулював задачу про знаходження перетворення, яке зводить перманенти до детермінантів, і сам довів, що не існує способу приписати одночасно елементам матриці порядку $n,\ 3 \leq n$ знаки "+"і "−"так, щоб її перманент перетворився у детермінант. Після істотного узагальнення Маркусом і Мінком [132] результату Пойа, надія знайти навіть лінійні перетворення, які перетворювали б перманент матриці n−го ($3 \leqslant n$) порядку у детермінант, розвіялась. В зв'язку з цим, в [60] (стор. 22-23), по суті, ставиться наступна задача:

Із всіх матриць n−того порядку виділити клас матриць, для яких існує таке лінійне перетворення на множині їх елементів, що перманент вихідної матриці дорівнює детермінанту перетвореної матриці.

Означення 2.11.1. *Нехай*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

— квадратна матриця. ***Перетворенням Пойа*** *цієї матриці назвемо розподіл знаків "+ "− "перед її елементами, який перетворює перманент у детермінант. Таке перетворення позначуватимемо через $P(A)$.*

Виділимо клас матриць, для яких існує перетворення Пойа.

Згідно з теоремою 2.10.1 (стор. 196), для довільної трикутної матриці (2.1.1) і нижньої квазітрикутної матриці (2.10.1) справедлива тотожність

$$\operatorname{ddet}(A) = \det(B),$$

в якій

$$b_{ij} = \{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik},\ 1 \leq j \leq i \leq n.$$

В цьому ж пункті наведено наслідок 2.10.1.1, в якому встановлено тотожність між детермінантом та парадетермінантом трикутної матриці.

У першій частині доведення теореми 2.10.1 встановлюється бієкція між доданками парадетермінанта трикутної матриці A і доданками детермінанта квазітрикутної матриці B. У другій частині теореми доводиться відповідність знаків цих доданків. Позаяк перманенти квадратних матриць відрізняються від детермінантів таких матриць лише знаками, то із наслідку 2.10.1.1 цієї теореми випливає справедливість рівності

$$\operatorname{per}(B) = \operatorname{pper}(A), \tag{2.11.1}$$

де B і A — відповідно нижня квазітрикутна матриця (2.10.1) і трикутна матриця (2.1.1), причому

$$a_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}.$$

На стор. 116 доведено теорему про зв'язок параперманента із парадетермінантом та її наслідок про зв'язок парадетермінанта із параперманентом трикутної матриці

$$\operatorname{ddet}(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = \operatorname{pper}((-1)^{\delta_{ij}+1}\cdot a_{ij})_{1\le j\le i\le n}.$$

Із цієї тотожності одразу випливає рівність

$$\operatorname{pper}(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = \operatorname{ddet}((-1)^{\delta_{ij}+1}\cdot a_{ij})_{1\le j\le i\le n}.$$

Таким чином, враховуючи рівності (2.11.1) та (2.4.42), отримуємо наступні співвідношення:

$$\operatorname{per}(b_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n} = \operatorname{pper}\left(\frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \operatorname{ddet}\left((-1)^{\delta_{ij}+1}\frac{b_{ij}}{b_{i,j+1}}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

Але, оскільки

$$\prod_{k=j}^{i}\frac{b_{ik}}{b_{i,k+1}} = b_{ij},$$

то справедлива тотожність

$$\operatorname{per}(b_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n} = \det\left((-1)^{i-j}b_{ij}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n},$$

а разом з нею і наступна

Теорема 2.11.1. [77]. *Для квазітрикутної матриці (2.10.1) існує перетворення Пойа*

$$P(B) = (-1)^{i-j}b_{ij},\ i,j = 1,2,\ldots,n,$$

тобто справедлива рівність

$$\operatorname{per}(B) = \det(P(B)).$$

Цікавим виявляється той факт, що якщо у квазітрикутній матриці (2.10.1) добавити бодай один ненульовий елемент b_{ij}, $i-j > -1$, то перетворення Пойа для такої матриці вже не існує.

Справді, нехай B^* – квадратна матриця, отримана із квазітрикутної матриці (2.10.1) долученням ненульового елемента b_{ij}, $2 \leqslant j-i$. Тоді, внаслідок того, що перманент довільної матриці не змінюється від перестановки місцями довільних її стовпців або рядків, перейдемо до нової матриці, в якій i–тий стовпчик міняється місцями із j–тим стовпчиком. При цьому отримаємо перманент матриці, в якій на головній діагоналі можна послідовно виділити блоки:

$$[b_{11}],[b_{22}],\ldots,[b_{i-1,i-1}],[b_{ij}],[b_{i+1,i+1}],\ldots,[b_{j-2,j-2}],$$

$$\begin{bmatrix} b_{j-1,j-2} & b_{j-1,j-1} & b_{j-1,i} \\ b_{j,j-2} & b_{j,j-1} & b_{ji} \\ b_{j+1,j-2} & b_{j+1,j-1} & b_{j+1,i}\end{bmatrix},[b_{j+2,j+2}],\ldots,[b_{nn}].$$

Таким чином, у вихідному перманенті елементи шести трансверсалей будуватимуться при допомозі елементів шести трансверсалей виділеного блоку

$$\begin{bmatrix} b_{j-1,j-2} & b_{j-1,j-1} & b_{j-1,i} \\ b_{j,j-2} & b_{j,j-1} & b_{ji} \\ b_{j+1,j-2} & b_{j+1,j-1} & b_{j+1,i} \end{bmatrix}$$

та елементів головної діагоналі цієї матриці. Причому три із них, які відповідають парним перестановкам, повинні бути додатніми, а інші три — від'ємними. Але Пойа довів [138], що так розставити знаки у матриці третього порядку неможливо[8]. Це і доводить наше твердження.

Таким чином, квазітрикутна матриця є максимальною за кількістю ненульових елементів матрицею, для якої ще існує перетворення Пойа. Позаяк квазітрикутна матриця складається із $(n^2 + 3n-2)/2$ елементів, то доведена теорема узгоджується із твердженням Гібсона [114], що якщо $(0,1)$– матриця A n-го порядку має додатній перманент і якщо перманент A можна подати у вигляді детермінанта, приписуючи до елементів матриці A знаки $\pm$, то число одиниць у A не перевищує $(n^2+3n-2)/2$.

Доведемо ще одне твердження, яке дозволить знайти нове перетворення Пойа для нижньої квазітрикутної матриці.

[8]Припустимо, що таке перетворення існує, тоді число мінусів, які приписуються елементам кожної трансверсалі, що відповідають парній перестановці, повинно бути парним, і загальне число мінусів парне. З іншого боку, число мінусів на кожній трансверсалі, що відповідає непарній перестановці, повинно бути непарним, і загальне число мінусів непарне, а це суперечить попереднім міркуванням.

Твердження 2.11.1. *Справедлива рівність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-3}a_{n-2,1} & (-1)^{n-4}a_{n-2,2} & (-1)^{n-5}a_{n-2,3} & \dots & 1 & 0 \\ (-1)^{n-2}a_{n-1,1} & (-1)^{n-3}a_{n-1,2} & (-1)^{n-4}a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 1 \\ (-1)^{n-1}a_{n,1} & (-1)^{n-2}a_{n,2} & (-1)^{n-3}a_{n,3} & \dots & -a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & -1 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & -1 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (2.11.2)$$

Доведення. При $n=1$ і $n=2$ рівність, очевидно, справедлива.

Нехай рівність (2.11.2) справедлива при $n=1,2,\dots,k-1$. Доведемо її справедливість при $n=k$. З цією метою розкладемо детермінант лівої частини рівності (2.11.2) за елементами останнього стовпчика на два детермінанти $(k-1)$–го порядку, перемножимо другий детермінант і кожний елемент його останнього рядка на (-1) і застосуємо до обидвох детермінантів $(k-1)$–го порядку твердження (2.11.2) при $n=k-1$. Але сума двох отриманих доданків є результатом розкладу правої частини рівності (2.11.2) за елементами останнього стовпчика. □

Таким чином, справедлива також

Теорема 2.11.2. [77]. *Для квазітрикутної матриці (2.10.1) існує перетворення Пойа*

$$P(B) = \begin{cases} b_{ij}, & 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n, \\ -1, & j-i=1, \\ 0, & j-i \geqslant 2. \end{cases}$$

Відкриті питання

Задача 8. Відомо, що детермінанти квадратних матриць можна інтерпретувати як "об'єми" паралелепіпедів у багатовимірних просторах. Чи є природна геометрична інтерпретація парадетермінантів трикутних матриць?

Задача 9. Для класу парадетермінантів трикутних матриць вигляду

$$\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

є формула — (2.4.30) на стор. 108, — яка дозволяє обчислювати їх набагато простіше, ніж безпосередньо за означенням. Знайдіть нові класи матриць, для парадетермінантів або параперманентів яких є прості явні формули.

Бібліографічні зауваження

Функції трикутних матриць вперше з'явилися при дослідженні задачі про число траєкторій на похилих діаграмах [32]. Назви парадетермінант та параперманент для них запропонував О.Г. Ганюшкін.

Приклади 2.4.5, 2.4.8, твердження 2.4.1, 2.4.9, теореми 2.4.4, 2.5.1, наслідки 2.4.4.1, 2.4.4.2 є новими.

Цікавою є задача про максимальні значення парадетермінантів трикутних матриць, елементи яких належать даній множині. Зокрема, йдеться про $\{-1,0,1\}$, $\{-1,1\}$ і $\{0,1\}$–матриці, елементи яких належать відповідно множинам $\{-1,0,1\}$, $\{-1,1\}$ і $\{0,1\}$. Аналогічні задачі для детермінантів квадратних матриць відомі як проблеми Адамара і виявилися складними [90]. У 1893 році Адамар довів, що для матриць, абсолютні величини елементів яких не перевищують 1, виконується нерівність: $|det(A)| \leqslant n^{\frac{n}{2}}$ (див. [118], [107], [95]). Перманенти $(0,1)$–матриць відіграють важливу роль у дискретній математиці і виникають, перш за все,

як матриці інцидентності комбінаторних конфігурацій . У комбінаторних дослідженнях вони почали з'являтися на початку XX століття.

Максимальне значення парадетермінанта трикутної матриці з елементами із множини $\{0,1\}$ дорівнює 1. Це легко доводиться індукцією за допомогою теореми 2.4.2. Максимальне значення параперманента такої трикутної матриці порядку n, очевидно, дорівнює 2^{n-1}. Використовуючи ці два факти та теорему про зв'язок параперманента із парадетермінантом 2.4.5, легко помітити, що максимальні значення парафункцій для двох інших класів матриць дорівнюють 2^{n-1}. Докладніше про це в [11].

Всі результати параграфу 2.5.1 є новими.

Теореми 2.5.3, 2.5.6 наслідок 2.5.2, твердження 2.5.1, 2.5.3, означення 2.5.1, та рівності (2.5.46), (2.5.54) також є новими.

Формула (2.5.53) була отримана Е. Варінгом, як частковий випадок більш загальної формули (див. [69], стор. 397). Взаємно обернені співвідношення для числа невпорядкованих розбиттів натурального числа та суми натуральних дільників цього числа читач знайде на стор. 4 в [130]. На стор. 155 ці співвідношення подані в термінах парафункцій трикутних матриць (див. (2.5.56) та (2.5.57)).

Теореми 2.10.3, 2.10.4 твердження 2.11.1, 2.10.2 та рівняння (2.10.16), (2.10.17) є новими.

До п.2.11 Лінійні перетворення, які не змінюють значення перманента, були відкриті у 1962 році Маркусом (M.Marcus) і Мейем (C.May) (див. [131]). Докладну бібліографію про перманенти та детермінанти та історію їх вивчення читач знайде відповідно у [60] та [136].

Розділ 3

Застосування числення трикутних матриць

"Все ж деякі витончені важливі математичні результати не знаходять практичного застосування тому, що реальний світ влаштований інакше. Один фізик-теоретик здобув собі міцний авторитет тим, що, виходячи із надто загальних математичних припущень, вивів формулу для радіуса Всесвіту. Це була дуже вражаюча формула, щедро начинена константами e; c; h; кілька разів у ній зустрічалося число π і було багато квадратних коренів. Позаяк він був переконаним теоретиком, його не турбували числові результати. Пройшло кілька років, перше ніж знайшлася людина, якій захотілося знати, чому ж дорівнює радіус Всесвіту.

Виявилося, 10 сантиметрів."

— *Стюарт Я., [75], стор. 17.*

В цьому розділі ми розглянемо застосування трикутних матриць та їх функцій. Зокрема розглянемо їх природний зв'язок із

лінійними рекурентними співвідношеннями, ланцюговими дробами, операціями із формальними степеневими рядами тощо. При допомозі апарату трикутних матриць та їх функцій можна отримати природне узагальнення ланцюгових дробів, метод побудови комбінаторних тотожностей та комбінаторних формул обернення тощо.

3.1 Деякі системи рівнянь і функції трикутних матриць

В цьому параграфі ми розглянемо лише одне допоміжне твердження.

Твердження 3.1.1. [5]. *Системи рівнянь*

$$x_i = a_{ii}b_1x_{i-1} - a_{ii}a_{i,i-1}b_2x_{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1}a_{ii}\cdot\ldots\cdot a_{i1}b_i, \quad (3.1.1)$$

$$x_i = -(a_{ii}b_1x_{i-1} + a_{ii}a_{i,i-1}b_2x_{i-2} + \ldots + a_{ii}\cdot\ldots\cdot a_{i1}b_i), \quad (3.1.2)$$

$$x_i = -(a_{ii}b_1x_{i-1} - a_{ii}a_{i,i-1}b_2x_{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1}a_{ii}\cdot\ldots\cdot a_{i1}b_i), \quad (3.1.3)$$

$$x_i = a_{ii}b_1x_{i-1} + a_{ii}a_{i,i-1}b_2x_{i-2} + \ldots + a_{ii}\cdot\ldots\cdot a_{i1}b_i, \quad (3.1.4)$$

$$\left[(1+\delta_{sr}(x_s-1))\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right]_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i} = b_i, \quad (3.1.5)$$

де $i = 1, 2, \ldots$, *причому* $a_0 = x_0 = 1$, *і* $x_s = 0$ *при* $s < 0$, *мають відповідно розв'язки*

$$x_i = \left\langle a_{sr}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad (3.1.6)$$

$$x_i = (-1)^i\left\langle a_{sr}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad (3.1.7)$$

$$x_i = (-1)^i\left[a_{sr}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right]_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad (3.1.8)$$

$$x_i = \left[a_{sr} \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right]_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i}, \tag{3.1.9}$$

$$x_i = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + \ldots + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}}, \tag{3.1.10}$$

де $b_0 = 1$.

Доведення. При $i = 1$ справедливість твердження для системи рівнянь (3.1.1) очевидна. Нехай воно виконується при

$$i = 2, 3, \ldots, k-1.$$

Доведемо його справедливість для $i = k$. Позаяк права частина рівності (3.1.1) при $i = k$, є розкладом парадетермінанта (3.1.6), при $i = k$ за елементами останнього рядка, то це твердження, для системи рівнянь (3.1.1), справедливе для довільного натурального i.

Доведемо справедливість твердження для систем (3.1.2–3.1.4.) З цією метою запишемо їх відповідно у такому вигляді:

$$x_i = a_{ii}(-b_1)x_{i-1} - a_{ii}a_{i,i-1}b_2 x_{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1}a_{ii} \cdot \ldots \cdot a_{i1}(-1)^i b_i,$$

$$x_i = a_{ii}(-b_1)x_{i-1} - a_{ii}a_{i,i-1}(-b_2)x_{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1}a_{ii} \cdot \ldots \cdot a_{i1}(-b_i),$$

$$x_i = a_{ii}b_1 x_{i-1} - a_{ii}a_{i,i-1}(-b_2)x_{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1}a_{ii} \cdot \ldots \cdot a_{i1}(-1)^{i-1}b_i.$$

Застосуємо до цих систем твердження для щойно доведеної системи рівнянь. При цьому, виносячи (-1) із кожного стовпця парадетермінанта, що є розв'язком перших двох систем, і застосовуючи теорему про зв'язок парадетермінанта із параперманентом, у випадку другої і третьої системи, отримаємо відповідно розв'язки (3.1.7–3.1.9).

Доведення справедливості твердження для системи рівнянь (3.1.5) випливає із розкладу параперманента в лівій частині рівності (3.1.5) за елементами останнього рядка. □

3.2 Параперманенти та лінійні рекурентні рівняння

В цьому параграфі ми продовжуємо вивчення лінійних рекурентних рівнянь, розпочате в п. 1.5 на стор. 36.

Метою цього параграфу є:

a) застосування параперманентів до розв'язання лінійних рекурентних рівнянь із змінними та сталими коефіцієнтами;

b) виділення початкових умов для яких аналіз послідовностей виявляється порівняно простим;

c) доведення деяких загальних співвідношень між членами послідовності, що генеруються лінійними рекурентними рівняннями;

d) дослідження теоретико-числових властивостей загальних рекурентних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами;

e) дослідження нескінченних лінійних рекурентних рівнянь, тощо.

3.2.1 Параперманенти та лінійні рекурентні рівняння k–го порядку

Часто буває так, що розв'язати характеристичне рівняння лінійного рекурентного рівняння важко, тоді корисною виявляється наступна теорема, яка, по суті, є теоремою Стенлі, вираженою в термінах параперманентів (див. [73], стор. 301).

Теорема 3.2.1. [46]. *Нехай задано два вектори*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, *наступні три рівності рівносильні:*

1. Лінійне рекурентне рівняння k*–го порядку*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k}, \ n = k, k+1, k+2, \ldots \tag{3.2.1}$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, \dots, u_{k-1} = b_{k-1}. \tag{3.2.2}$$

2.

$$u_n = \operatorname{pper}(A_n) = \begin{bmatrix} a_1c_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1c_2 & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \cdots & a_1c_{k-1} & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_n, \tag{3.2.3}$$

де поправки c_i визначаються із рівностей

$$c_i = b_i \left(\sum_{s=1}^{i} a_s b_{i-s} \right)^{-1} = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + \dots + a_2b_{i-2} + a_1b_{i-1}}, \tag{3.2.4}$$

$i = 1, \dots, k-1$;

3.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i =$$

$$= \frac{1 + b_1\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) z^1 + b_2\left(1 - \frac{1}{c_2}\right) z^2 + \ldots + b_{k-1}\left(1 - \frac{1}{c_{k-1}}\right) z^{k-1}}{1 - a_1z - a_2z^2 - \ldots - a_kz^k}. \tag{3.2.5}$$

Доведення. 1. Рівносильність перших двох рівностей випливає із того, що поправки

$$c_i = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + \ldots + a_2b_{i-2} + a_1b_{i-1}}, \ i = 1, 2, 3, \dots, k-1$$

є розв'язками системи рівнянь (див. твердження 3.1.1, система рівнянь (3.1.5) на стор. 221.)

$$\left[(1 + \delta_{sr}(c_s - 1)) \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right]_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant i} = b_i, \ i = 1, 2, 3, \dots, k-1$$

і розкладу параперманента в рівнянні (3.2.3) при $n = k, k+1, k+2, \dots$ за елементами останнього рядка.

2. Доведемо рівносильність першого і третього рівнянь теореми.

Очевидно, що

$$(1 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_kx^k) \cdot (1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i) =$$

$$= 1 + (u_1 - a_1)x + (u_2 - a_1u_1 - a_2)x^2 +$$

$$+ (u_3 - a_1u_2 - a_2u_1 - a_3)x^3 + \ldots +$$

$$+ (u_{k-1} - a_1u_{k-2} - a_2u_{k-3} - \ldots - a_{k-2}u_1 - a_{k-1})x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{i=k}^{\infty} (u_i - a_1u_{i-1} - a_2u_{i-2} - \ldots - a_{k-1}u_{i-k+1} - a_ku_{i-k}).$$

Замінимо у правій частині останньої рівності u_i на b_i, де $i = 1, 2, \dots, k-1$ і винесемо b_1 за перші дужки, b_2 за другі дужки і т. д.

Нехай

$$c_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad c_2 = \frac{b_2}{a_2 + a_1b_1}, \quad c_3 = \frac{b_3}{a_3 + a_2b_1 + a_1b_2}, \quad \dots$$

тоді отримаємо рівність.

$$(1 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_kx^k) \cdot (1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i) =$$

$$= 1 + b_1\left(1 - \frac{1}{c_1}\right) x^1 + b_2\left(1 - \frac{1}{c_2}\right) x^2 + \ldots + b_{k-1}\left(1 - \frac{1}{c_{k-1}}\right) x^{k-1} +$$

$$+\sum_{i=k}^{\infty}(u_i - a_1u_{i-1} - a_2u_{i-2} - \ldots - a_{k-1}u_{i-k+1} - a_ku_{i-k})$$

Тепер рівносильність рівностей п.1 і п.2 теореми очевидна. □

Зауваження 3.2.1. *З метою збереження загальності міркувань, ми спеціально не говоримо про природу компонент векторів a і b. Ними можуть бути як числа із деякого числового поля, так і деякі функції.*

Зауваження 3.2.2. *Матрицю A_n із рівності (3.2.3) назвемо* ***матрицею лінійного рекурентного рівняння*** *(3.2.1) із початковими умовами (3.2.2).*

Зауваження 3.2.3. *Ліву частину рівності (3.2.5) називають генератрисою послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Проілюструємо теорему 3.2.1 на наступному прикладі.

Приклад 3.2.1. Нехай $a = (1,1,1)$, $b = (1,1,1)$. Тоді теорема 3.2.1 стверджує, що для послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ наступні три рівності рівносильні:

1. Рекурентне рівняння 3−го порядку

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3},$$

із початковими умовами

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1.$$

2.

$$u_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_n,$$

тут поправки дорівнюють

$$c_1 = \frac{b_1}{a_1} = 1,\ \ c_2 = \frac{b_2}{a_2 + a_1b_1} = \frac{1}{2}.$$

3.

$$\frac{1 + 1\cdot(1-1)x + 1\cdot(1-2)x^2}{1 - x - x^2 - x^3} = \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 - x^3} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_ix^i.$$

Результат п.3 можна отримати іншим, дещо довшим, способом.

Нехай

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_nx^n.$$

Враховуючи початкові умови, отримаємо рівність

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} u_nx^n.$$

Використаємо вихідне рекурентне рівняння

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3})x^n = 1 + x + x^2 +$$

$$+x\sum_{n=3}^{\infty} u_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=3}^{\infty} u_{n-2}x^{n-2} + x^3\sum_{n=3}^{\infty} u_{n-3}x^{n-3} = 1 + x + x^2 +$$

$$+x\sum_{n=2}^{\infty} u_nx^n + x^2\sum_{n=1}^{\infty} u_nx^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} u_nx^n =$$

$$= 1 + x + x^2 + x(f(x) - 1 - x) + x^2(f(x) - 1) + x^3f(x).$$

Знаходимо $f(x)$ із останньої рівності.

Якщо у теоремі 3.2.1 всі поправки c_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ дорівнюють одиниці, то маємо

$$c_i = \frac{b_i}{a_i + a_{i-1}b_1 + a_{i-2}b_2 + \cdots + a_2 b_{i-2} + a_1 b_{i-1}} = 1, \ i = 1, \ldots, k-1,$$

або

$$b_i = a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \ldots + a_{i-1} b_1 + a_i, \ i = 1, 2, 3, \ldots, k-1.$$

Але, остання система, згідно з твердженням 3.1.1 (див. стор. 221) має розв'язок

$$b_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}_i, \ i = 1, \ldots, k.$$

Отже, початкові умови (3.2.2) для рекурентного рівняння (3.2.1) приймуть вигляд

$$u_0 = 1, \ u_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}_i, \ i = 1, \ldots, k-1. \quad (3.2.6)$$

Початкові умови (3.2.6) для рекурентного рівняння (3.2.1) назвемо *нормальними початковими умовами*[46], а послідовність, що генерується рекурентним співвідношенням — *нормальною послідовністю*.

Отже, справедливий наступний

Наслідок 3.2.1.1. *Нехай задано два вектори*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k),$$

$$b = (b_0 = 1, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}),$$

$$\textit{де } b_i = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}_i, \ i = 1, \ldots, k-1.$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, наступні три рівності рівносильні:

1. Лінійне рекурентне рівняння k-го порядку

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots + a_k u_{n-k}, \ n = k, k+1, k+2, \ldots \quad (3.2.7)$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1, u_1 = b_1, u_2 = b_2, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}.$$

2.

$$u_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_n, \ n = 1, 2, 3, \ldots. \quad (3.2.8)$$

3.

$$\frac{1}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i x^i. \quad (3.2.9)$$

Легко також довести, що якщо початкові умови рекурентного рівняння нормальні, то всі поправки в теоремі 3.2.1 дорівнюють одиниці. Отже, нормальні початкові умови (3.2.6) разом з рівністю 2. теореми 3.2.1, при $c_i = 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k-1$, дають рівність 2. цього наслідку.

Приклад 3.2.2. Розглянемо лінійне рекурентне рівняння k–го порядку із сталими коефіцієнтами

$$\frac{k^{\underline{0}}}{0!}u_n - \frac{k^{\underline{1}}}{1!}u_{n-1} + \frac{k^{\underline{2}}}{2!}u_{n-2} - \ldots + (-1)^k\frac{k^{\underline{k}}}{k!}u_{n-k} = 0, \tag{3.2.10}$$

і початковими умовами

$$u_i = \frac{k^{\overline{i}}}{i!},\ i = 1, 2, \ldots, k \tag{3.2.11}$$

Знаходимо поправки

$$c_i = \frac{b_i}{a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_{i-2}b_2 + a_{i-1}b_1 + a_i} =$$

$$= \frac{\frac{k^{\overline{i}}}{i!}}{\frac{k^{\underline{1}}}{1!}\cdot\frac{k^{\overline{i-1}}}{(i-1)!} - \frac{k^{\underline{2}}}{2!}\cdot\frac{k^{\overline{i-2}}}{(i-2)!} + \ldots + (-1)^{i-2}\frac{k^{\underline{i-1}}}{(i-1)!}\cdot\frac{k^{\overline{1}}}{1!} + (-1)^{i-1}\frac{k^{\underline{i}}}{i!}\cdot\frac{k^{\overline{0}}}{0!}},$$

де $i = 1, \ldots, k$. Але знаменник останнього дробу співпадає із правою частиною тотожності (3.2.74) (див. стор. 277), при $m = k$, $n = i$. Отже, $c_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ і умови (3.2.11) є нормальними для даного рекурентного рівняння. Таким чином, розв'язком даного рекурентного рівняння є параперманент[1]

$$u_n = \left[\begin{array}{cccccccc} k & & & & & & & \\ -\frac{k-1}{2} & k & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ -\frac{2}{k-1} & -\frac{3}{k-2} & \cdots & k & & & & \\ -\frac{1}{k} & -\frac{2}{k-1} & \cdots & -\frac{k-1}{2} & k & & & \\ 0 & -\frac{1}{k} & \cdots & -\frac{k-2}{3} & -\frac{k-1}{2} & k & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{k} & \cdots & -\frac{k-1}{2} & k \end{array}\right]_n, \tag{3.2.12}$$

[1]Параперманент (3.2.12), згідно із теоремою 2.4.5, можна подати у вигляді парадетермінанта аналогічної трикутної матриці із додатніми елементами.

а генератрисою – функція

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{k^{\underline{1}}}{1!}x^1 + \frac{k^{\underline{2}}}{2!}x^2 - \ldots + (-1)^k\frac{k^{\underline{k}}}{k!}x^k}.$$

Приклад 3.2.3. Розглянемо рекурентне рівняння

$$u_n = xu_{n-1} - u_{n-2}$$

із початковими умовами

$$u_0 = b_0 = 1,\ u_1 = b_1 = x,$$

при допомозі якого можна згенерувати *многочлени Чебишева другого роду*. Знайдемо поправку c_1 :

$$c_1 = \frac{b_1}{a_1} = 1.$$

Таким чином, послідовність многочленів Чебишева другого роду є нормальною послідовністю і параперманент матриці даного рекурентного рівняння має вигляд:

$$u_n = \left[\begin{array}{cccccc} x & & & & & \\ -\frac{1}{x} & x & & & & \\ 0 & -\frac{1}{x} & x & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{x} & x \end{array}\right]_n.$$

Генератриса цієї послідовності многочленів, згідно із наслідком 3.2.1.1, має вигляд:

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i = \frac{1}{1 - xz + z^2}.$$

Теорема 3.2.2. *Нехай задана генератриса*

$$f(z) = \frac{1 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_{k-1} z^{k-1}}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k} \tag{3.2.13}$$

послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Тоді ця послідовність задовольняє рекурентне рівняння*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_k$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1, \; u_i = \left[\begin{array}{cccc} a_1 + d_1 & & & \\ \frac{a_2 + d_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_i + d_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{array} \right]_i, \; i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3.2.14}$$

Доведення. Те, що генератриса (3.2.13) генерує послідовність

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty},$$

яка задовольняє рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_k$$

безпосередньо випливає із теореми 3.2.1. Згідно з цією теоремою справедлива система рівностей

$$b_i \left(1 - \frac{1}{c_i}\right) = d_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots, k-1,$$

яка із врахуванням (3.2.4) може бути зведена до системи рівностей

$$b_i = a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \ldots + a_{i-1} b_1 + a_i + d_i, \; i = 1, 2, 3, \ldots, k-1.$$

Але ця система є розкладом параперманента правої частини рівності (3.2.14) за елементами останнього рядка. □

Приклад 3.2.4. Нехай задана генератриса

$$f(z) = \frac{1 + 3z - 2z^2}{1 - z^2 + 2z^3}.$$

числової послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Знайдемо для неї відповідне рекурентне рівняння з відповідними початковими умовами.

Тут $d_1 = 3, d_2 = -2$; $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -2$.

Знаходимо початкові умови:

$$b_1 = [a_1 + d_1] = 3, \; b_2 = \left[\begin{array}{cc} a_1 + d_1 & \\ \frac{a_2 + d_2}{a_1} & a_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & \\ \frac{-1}{0} & 0 \end{array} \right] = -1.$$

Таким чином, маємо рекурентне рівняння

$$u_n = u_{n-2} - 2u_{n-3}$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = -1.$$

3.2.2 Нескінченні лінійні рекурентні рівняння

"... і біжу я сам за собою,
і не в змозі себе догнать."

— Є.Євтушенко (Із вірша, 1954 р.)

У попередньому параграфі ми вивчали способи задання послідовностей при допомозі скінченних лінійних рекурентних рівнянь, генератрис та параперманентів трикутних матриць. При цьому ми акцентували увагу на зв'язки між цими способами задання послідовностей.

У цьому параграфі ми розглянемо нескінченновимірний аналог наслідку 3.2.1.1 теореми 3.2.1 та за даною числовою послідовністю побудуємо лінійне рекурентне рівняння, яке ця послідовність задовольняє.

Наслідок 3.2.1.1 справедливий також на випадок нескінченновимірного вектора

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

тобто справедливе

Твердження 3.2.1. *Нехай маємо вектор*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, наступні рівності рівносильні:

1.

$$u_0 = 1,\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \dots,\ n = 1, 2, \dots \quad (3.2.15)$$

2.

$$u_0 = 1,\ u_1 = [a_1],\ u_2 = \left[\begin{array}{cc} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array}\right], \dots,$$

3.

$$\frac{1}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i.$$

Доведення. Рівносильність рівностей п.1 і п.2 стає очевидною після послідовного розкладу параперманентів із п.2 за елементами останнього рядка.

Рівносильність рівностей першого і третього пунктів випливає із рівності

$$(1 - a_1 z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i z^i\right) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \dots - a_i u_0) z^i,$$

яка можлива лише тоді, коли виконуються рівності

$$u_i - a_1 u_{i-1} - a_2 u_{i-2} - \dots - a_i u_0 = 0,\ i = 1, 2, \dots.$$

□

Зауваження 3.2.4. *Матрицю*

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_1 & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ \dots & \dots & \ddots & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \dots & a_1 & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right)$$

назвемо ***матрицею нескінченного лінійного рекурентного рівняння*** *(3.2.15).*

Приклад 3.2.5. Нехай маємо вектор

$$a = (3, -4, 4, -4, 4, -4, 4, \dots),$$

тоді для послідовності $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $u_0 = 1$ рівносильні наступні рівності:

1.

$$u_n = 3u_{n-1} - 4u_{n-2} + 4u_{n-3} - 4u_{n-4} + 4u_{n-5} - 4u_{n-6} + \dots, \quad (3.2.16)$$

2.

$$u_n = \left[\begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ \frac{-4}{4} & \frac{4}{-4} & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{(-1)^{n-1}4}{(-1)^{n-2}4} & \frac{(-1)^{n-2}4}{(-1)^{n-3}4} & \frac{(-1)^{n-3}4}{(-1)^{n-4}4} & \frac{(-1)^{n-4}4}{(-1)^{n-5}4} & \dots & 3 \end{array}\right]_n =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{-4}{3} & 3 & & & & \\ -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & & \\ -1 & -1 & \frac{-4}{3} & 3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 3 \end{array}\right]_n = \left\langle\begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{array}\right\rangle_n,$$

де $n = 1, 2, \ldots,$

3.

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 4z^2 - 4z^3 + 4z^4 - 4z^5 + \ldots} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(2i+1)z^i.$$

Із рекурентного рівняння (3.2.16) легко знайти загальний член послідовності u_n, $n = 1, 2, \ldots$. Дійсно,

$$\begin{aligned} u_1 &= 3u_0 = 3, \\ u_2 &= 3u_1 - 4u_0 = 5, \\ u_3 &= 3u_2 - 4u_1 + 4u_0 = 7, \\ u_4 &= 3u_3 - 4u_2 + 4u_1 - 4u_0 = 9. \end{aligned}$$

Очевидно, ми маємо справу із послідовністю непарних чисел. Припустимо, що $u_k = 2k + 1$. Згідно із припущенням повинна виконуватись рівність

$$2k+1 = 3(2k-1) - 4(2k-3) + 4(2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2}4\cdot 3 + (-1)^{k-1}4\cdot 1,$$

справедливість якої випливає із того, що

$$4((2k-1) - (2k-3) + (2k-5) - \ldots + (-1)^{k-2}\cdot 3 + (-1)^{k-1}\cdot 1) = 4k.$$

Отже, наше припущення справедливе і, таким чином, встановлено справедливість рівності

$$\left\langle \begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ \frac{4}{3} & 3 & & & & \\ 1 & \frac{4}{3} & 3 & & & \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} & 3 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{array} \right\rangle_n = 2n + 1,$$

яку безпосередньо встановити важче.

Відзначимо також, що генератрису для цієї послідовності можна спростити:

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + z - 4z(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) = 1 + z - \frac{4z}{1+z} = \frac{1 - 2z + z^2}{1+z}.$$

Отже,

$$f(z) = \frac{1+z}{1 - 2z + z^2} \qquad (3.2.17)$$

Тепер, за виглядом генератриси (3.2.17) можна спростити і саме рекурентне рівняння (3.2.16). З цією метою використаємо твердження 3.2.2.

Знаходимо коефіцієнти лінійного рекурентного рівняння другого порядку

$$a_1 = 2, a_2 = -1.$$

Знаходимо початкові умови

$$u_0 = 1, u_1 = a_1 + d_1 = 2 + 1 = 3.$$

Таким чином, маємо рекурентне рівняння

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1, u_1 = 3.$$

Якщо задана деяка послідовність, то можна знайти рекурентне рівняння, якому задовольняють члени цієї послідовності і її генератрису. Але, розв'язуючи задачі такого типу, ми apriori вважаємо, що послідовність є нормальною.

Справедлива наступна

Теорема 3.2.3. [47]. *Члени нормальної послідовності*

$$u_0 = 1, u_1, u_2, \ldots \qquad (3.2.18)$$

задовольняють лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \dots, \tag{3.2.19}$$

де

$$a_i = (-1)^{i-1} \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \dots & u_1 \end{array} \right\rangle, \; i = 1, 2, \dots. \tag{3.2.20}$$

Доведення. Позаяк, послідовність (3.2.18) нормальна, то, згідно з наслідком 3.2.1.1, справедливі рівності

$$\left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \cdots & a_1 \end{array} \right]_i = u_i, \; i = 1, 2, \dots,$$

з яких можна знайти коефіцієнти a_i, $i = 1, 2, \dots$ лінійного рекурентного рівняння (3.2.19). Але ця система, згідно з твердженням 3.1.1 має розв'язок (див.(3.6.4), стор. 335)

$$a_i = (-1)^{i-1} \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & & & \\ \frac{u_2}{u_1} & u_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{u_i}{u_{i-1}} & \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} & \dots & u_1 \end{array} \right\rangle, \; i = 1, 2, \dots.$$

□

Приклад 3.2.6. Знайдемо кілька перших членів рекурентного рівняння, яке задовольняє послідовність чисел $p(n)$, що дорівнюють числу невпорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки. Запишемо перші 25 членів цієї послідовності.

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} +$$

$$+56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 231x^{16} + 297x^{17} + 385x^{18} +$$
$$+490x^{19} + 627x^{20} + 792x^{21} + 1002x^{22} + 1255x^{23} + 1575x^{24} + \dots.$$

Знайдемо перші 24 коефіцієнти шуканого рекурентного рівняння за формулою (3.2.20):

$$1, 1, 0, 0, -1, 0 - 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, \dots.$$

і кілька перших ненульових членів шуканого рекурентного рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-5} - u_{n-7} + u_{n-12} + u_{n-15} - u_{n-22} - \dots. \tag{3.2.21}$$

Таким чином, ми отримали достатньо індуктивного матеріалу, щоб знайти закон, якому підпорядковується права частина рекурентного рівняння. Ойлер показав (див. [78]), стор. 246), що загальний член цього рекурентного рівняння має вигляд

$$(-1)^{k-1} u_{n - \frac{3k^2 - k}{2}} + (-1)^{k-1} u_{n - \frac{3k^2 + k}{2}}, \; k = 1, 2, 3, \dots.$$

Зауважимо, що початковою умовою для знаходження числа невпорядкованих розбиттів натурального числа на натуральні доданки є співвідношення

$$p(0) = 1, \; p(m) = 0, \; m < 0.$$

Слід також відзначити, що число $\sigma(n)$, яке дорівнює сумі всіх натуральних дільників натурального числа n також задовольняє рекурентне рівняння (3.2.21), але початкова умова має вигляд

$$\sigma(0) = n, \; \sigma(m) = 0, \; m < 0.$$

Приклад 3.2.7. Знайдемо рекурентні рівняння, які задовольняють числові послідовності:

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 4, u_4 = 5, u_5 = 6, u_6 = 7, \dots, \tag{3.2.22}$$

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, u_5 = 5, u_6 = 6, \ldots, \qquad (3.2.23)$$

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 4, u_3 = 5, u_4 = 6, u_5 = 7, u_6 = 8, \ldots. \qquad (3.2.24)$$

Знаходимо коефіцієнти рекурентного рівняння за формулою (3.2.20).

$$a_1 = (-1)^0 \langle 2 \rangle = 2, a_2 = (-1)^1 \left\langle \begin{matrix} 2 & \\ \frac{3}{2} & 2 \end{matrix} \right\rangle = -1, a_3 = (-1)^2 \left\langle \begin{matrix} 2 & & \\ \frac{3}{2} & 2 & \\ \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 2 \end{matrix} \right\rangle = 0.$$

Припустимо, що $a_3 = a_4 = \ldots = a_{k-1} = 0$, тоді

$$a_k = (-1)^{k-1} \left\langle \begin{matrix} 2 & & & \\ \frac{3}{2} & 2 & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{k+1}{k} & \frac{k}{k-1} & \ldots & 2 \end{matrix} \right\rangle = (-1)^{k-1}(2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + \ldots +$$

$$+(-1)^{k-1}(k-1) \cdot 1 + (-1)^k k \cdot 2 + (-1)^{k+1}(k+1) \cdot 1) = 0.$$

Отже, маємо $a_1 = 2, a_2 = -1$ і дана числова послідовність задовольняє лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Для числової послідовності (3.2.23) коефіцієнти відповідного рекурентного рівняння з врахуванням рівності (2.4.43) (див. стор. 119), мають вигляд

$$a_r = \left\langle \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant r} = \begin{cases} 0, & \text{если } r = 3s, \\ 1, & \text{если } r = 3s+1, \\ -1, & \text{если } r = 3s+2. \end{cases}$$

Отже, послідовність (3.2.23) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4} - u_{n-5} + u_{n-7} + u_{n-8} - u_{n-10} - u_{n-11} + \ldots,$$

і її генератрисою є функція виду

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2 + z^4 + z^5 - z^7 - z^8 + z^{10} + z^{11} - \ldots},$$

або

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \ldots) - z^2(1 - z^3 + z^6 - z^9 + \ldots) = \frac{1 - z - z^2 + z^3}{1 + z^3}.$$

Звідси маємо

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{1 - z - z^2 + z^3}.$$

Знайдемо рекурентне рівняння, яке задовольняє числова послідовність (3.2.24). Внаслідок рівності (3.11.8) (стор. 476), коефіцієнти рекурентного рівняння дорівнюють

$$a_i = (-1)^{i-1} F_{i+2}, \; i = 1, 2, \ldots,$$

де F_n — числа Фібоначчі.

Отже, числова послідовність (3.2.24) задовольняє нескінченне лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = 3u_{n-1} - 5u_{n-2} + 8u_{n-3} - 13u_{n-4} + \ldots.$$

Цьому нескінченному рекурентному рівнянню відповідає генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 5z^2 - 8z^3 + 13z^4 - \ldots}.$$

Тому

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i+2) z^i =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (F(i+1) + F(i)) z^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i+1) z^i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i F(i) z^i = 1 - z \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} F(i+1) z^{i-1} + z^2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-2} F(i) z^{i-2} =$$

$$= 1 - z\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i F(i+2)z^i + z^2\sum_{i=-1}^{\infty}(-1)^i F(i+2)z^i =$$

$$= 1 - z\left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2\left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right);$$

Звідси

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - z\left(1 + \frac{1}{f(z)}\right) + z^2\left(-z^{-1} + 1 + \frac{1}{f(z)}\right),$$

або, кінцево

$$f(z) = \frac{1 + z - z^2}{1 - 2z + z^2}.$$

Розглянемо деякі випадки, в яких при допомозі нескінченного лінійного рекурентного рівняння, коефіцієнти якого задаються нескінченновимірним вектором, можна побудувати дробово раціональну генератрису, чисельник і знаменник якої є деякими многочленами.

Приклад 3.2.8. Нехай нескінченновимірні вектори a, при допомозі яких задаються нескінченні рекурентні рівняння мають вигляд

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, \ldots),$$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, -a_2, \ldots, -a_k, a_1, \ldots),$$

$$a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, -a_1, \ldots),$$

тоді, згідно з твердженням 3.2.1, їм відповідають генератриси виду

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - \ldots - a_k z^k - a_1 z^{k+1} - a_2 z^{k+2} - \ldots - a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots}, \tag{3.2.25}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 - a_1 z - \ldots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots}, \tag{3.2.26}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 + a_1 z + \ldots + a_k z^k - a_1 z^{k+1} - a_2 z^{k+2} - \ldots - a_k z^{2k} + a_1 z^{2k+1} + \ldots},$$

які легко спростити, відповідно до вигляду

$$f(z) = \frac{1 - z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k + 1)z^k},$$

$$f(z) = \frac{1 + z^k}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k - 1)z^k}, \tag{3.2.27}$$

$$f(z) = \frac{1 + z^k}{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + (a_k + 1)z^k}. \tag{3.2.28}$$

Зведемо, наприклад, генератрису (3.2.26) до вигляду (3.2.27). Маємо

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots + a_k z^{2k} - a_1 z^{2k+1} - \ldots =$$

$$= 1 - a_1 z(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - a_2 z^2(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) - \ldots - a_k z^k(1 - z^k + z^{2k} - \ldots) =$$

$$= 1 - \frac{a_1 z}{1 + z^k} - \frac{a_2 z^2}{1 + z^k} - \frac{a_k z^k}{1 + z^k} = \frac{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - (a_k - 1)z^k}{1 + z^k}.$$

Таким чином, ми отримуємо генератрису (3.2.27). Решта випадків аналогічні.

У багатьох випадках корисною виявляється наступна

Теорема 3.2.4. [47]. *Нехай задано вектор*

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

компоненти якого задовольняють рекурентне рівняння

$$a_n = \omega_1 a_{n-1} + \omega_2 a_{n-2} + \ldots + \omega_k a_{n-k}, \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.2.29}$$

де $a_0 = 1$. Генератрисою послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка задовольняє рекурентне рівняння

$$u_0 = 1, \;\; u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3} + \ldots, \tag{3.2.30}$$

є функція $f(z)$ виду

$$\frac{1-\omega_1 z-\omega_2 z^2-\omega_3 z^3-\ldots-\omega_k z^k}{1-(a_1+\omega_1)z-\ldots-(a_{k-1}-\omega_1 a_{k-2}-\ldots-\omega_{k-2}a_1+\omega_{k-1})z^{k-1}-\omega_k z^k}. \tag{3.2.31}$$

Доведення. Згідно із твердженням 3.2.1, для послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, рекурентне рівняння (3.2.30) відповідає генератрисі

$$f(z)=\frac{1}{1-a_1 z-a_2 z^2-a_3 z^3-\ldots}.$$

Тому,

$$\frac{1}{f(z)}=1-\sum_{i=1}^{\infty}a_i z^i=1-a_1 z-a_2 z^2-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}-$$

$$-\sum_{n=k}^{\infty}(\omega_1 a_{n-1}+\omega_2 a_{n-2}+\ldots+\omega_k a_{n-k})z^n=$$

$$1-a_1 z-a_2 z^2-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}-\omega_1 z\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-1}z^{n-1}-$$

$$-\omega_2 z^2\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-2}z^{n-2}-\ldots-\omega_k z^k\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-k}z^{n-k}=$$

$$1-a_1 z-a_2 z^2-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}-\omega_1 z^1\sum_{n=k-1}^{\infty}a_n z^n-$$

$$-\omega_2 z^2\sum_{n=k-2}^{\infty}a_n z^n-\ldots-\omega_k z^k\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=$$

$$=1-a_1 z-a_2 z^2-\ldots-a_{k-1}z^{k-1}+$$

$$+\omega_1 z\left(-1+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_{k-2}z^{k-2}+\frac{1}{f(z)}\right)+$$

$$+\omega_2 z^2\left(-1+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_{k-3}z^{k-3}+\frac{1}{f(z)}\right)+$$

$$+\ldots+\omega_{k-1}z^{k-1}\left(-1+\frac{1}{f(z)}\right)+\omega_k z^k\left(-1+\frac{1}{f(z)}\right).$$

Отже, маємо рівність

$$\frac{1}{f(z)}=$$

$$\frac{1-(a_1+\omega_1)z-\ldots-(a_{k-1}-\omega_1 a_{k-2}-\ldots-\omega_{k-2}a_1+\omega_{k-1})z^{k-1}-2\omega_k z^k}{1-\omega_1 z-\omega_2 z^2-\omega_3 z^3-\ldots-\omega_k z^k}.$$

□

Наведемо ще один приклад, який ілюструє теорему 3.2.4.

Приклад 3.2.9. Нехай задано нескінченне рекурентне рівняння

$$u_n=u_{n-1}+3u_{n-2}+8u_{n-3}+21u_{n-4}+55u_{n-5}+\ldots+F_{2k-1}u_{n-k}+\ldots,$$

де F_n — числа Фібоначчі. Коефіцієнти цього рівняння задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку

$$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Отже, $\omega_1=3$, $\omega_2=-1$ і генератриса числової послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, згідно із теоремою 3.2.4, має вигляд

$$f(z)=\frac{1-3z+z^2}{1-4z+z^2}.$$

3.2.3 Теоретико числові властивості послідовностей

Рекурсії та послідовності чисел чи многочленів, що ними генеруються, виникають у різних галузях математики, причому багато задач алгебри і особливо теорії чисел, зводяться до дослідження їх властивостей. У більшості робіт присвячених дослідженню властивостей послідовностей, їх властивості вивчаються незалежно від рекурентного рівняння, що їх породжує. Такий підхід часто ускладнює процес досліджень.

Даний параграф присвячений дослідженню загальних властивостей послідовностей з використанням лінійних рекурентних рівнянь, що їх породжують та апарату параперманентів трикутних матриць.

Означення 3.2.1. *Два рекурентні рівняння з деякими початковими умовами назвемо еквівалентними, якщо вони генерують одну і ту ж числову послідовність.*

Виділимо із рекурентних рівнянь (3.2.1), які задовольняють початкові умови (3.2.6), один важливий клас рекурентних рівнянь.

Теорема 3.2.5. *Рекурентне рівняння (3.2.1) порядку k, $(1 < k)$ з нормальними початковими умовами (3.2.6), коефіцієнти якого задовольняють рівність*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1, \tag{3.2.32}$$

еквівалентне рекурентному рівнянню виду

$$v_n = (a_1-1)v_{n-1}+(a_1+a_2-1)v_{n-2}+\cdots+(a_1+\cdots+a_{k-1}-1)v_{n-k+1}+1, \tag{3.2.33}$$

де $2 \le n$, *із початковими умовами*

$$v_1 = 1, v_0 = v_{-1} = \cdots = v_{2-k} = 0. \tag{3.2.34}$$

Доведення. Доведемо, що рівність

$$v_i = u_i \tag{3.2.35}$$

виконується для всіх натуральних значень i.

За умовою теореми рівність (3.2.35) справедлива при $i = 1$. Нехай рівність (3.2.35) справедлива при $i = 1, \ldots, s$. Доведемо,

що вона виконується також при $i = s + 1$.

$$\begin{aligned} v_{s+1} &= (a_1 - 1)\cdot v_s + (a_1 + a_2 - 1)\cdot v_{s-1} + \cdots + \\ &= (a_1 + \cdots + a_{k-1} - 1)\cdot v_{s-k+2} + 1 = \\ &= (a_1 v_s + a_2 v_{s-1} + \cdots + a_{k-1} v_{s-k+2} + a_k v_{s-k+1}) + \\ &+ (-v_s + (a_1 - 1)\cdot v_{s-1} + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{k-2} - 1)\cdot v_{s-k+2}) + \\ &+ 1 - a_k v_{s-k+1}. \end{aligned}$$

Позаяк за припущенням

$$v_i = u_i, \ i = s - k + 1, \ldots, s$$

, то вираз у перших дужках є розкладом параперманента для u_{s+1} за елементами останнього рядка. Отже, враховуючи рівність (3.2.32) остання рівність може бути подана у вигляді

$$v_{s+1} = u_{s+1}+(-v_s+(a_1-1)\cdot v_{s-1}+\cdots+(a_1+\cdots+a_{k-1}-1)\cdot v_{s-k+1}+1).$$

Вираз у других дужках останньої рівності, внаслідок (3.2.33) дорівнює нулю. □

Примітки: 1. Для рекурентного рівняння

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2}$$

другого порядку нормальні початкові умови мають вигляд

$$u_1 = 1, \ u_2 = a_1.$$

Рівняння

$$u_n = 2 \cdot u_{n-1} - u_{n-2},$$

належить до класу рівнянь (3.2.33) із умовою (3.2.32), та нормальними початковими умовами і генерує послідовність натуральних чисел. Це рівняння з початковими умовами

$$u_1 = s, \ u_2 = r + s$$

генерує арифметичну прогресію

$$u_n = r \cdot (n-1) + s, \ n = 1, 2, \dots .$$

Легко доводиться твердження, що для довільного натурального s, що задовольняє нерівність $1 < s$, послідовність s–тих степенів натуральних чисел генерується деяким рекурентним рівнянням

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2}$$

з нормальними початковими умовами, коефіцієнти якого задовольняють умову (3.2.32).

2. Якщо $a_1 + a_2 = 1$, то рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2}$$

з нормальними початковими умовами генерує послідовність

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_2)^i, \ n = 1, 2, \dots .$$

Якщо, крім цього, виконується нерівність $0 < a_1 \cdot a_2$, то справедлива рівність

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{a_2 + 1}.$$

Теорема 3.2.6. [31]. *Якщо послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють відповідно рекурентні рівняння*

$$u_n^* = a_1 u_{n-1}^* + a_2 u_{n-2}^* + \dots + a_k u_{n-k}^*, \ n = k+1, k+2, \dots$$

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k}, \ n = k+1, k+2, \dots$$

k-го порядку із відповідно загальними початковими умовами

$$u_1^* = b_1, u_2^* = b_2, u_3^* = b_3, \dots, u_k^* = b_k.$$

і нормальними початковими умовами

$$u_1 = 1, \ u_i = \left[\begin{array}{cccc} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \dots & a_1 \end{array} \right]_{i-1}, \ i = 2, \dots, k,$$

причому $k < r$, то виконуються співвідношення

$$u_{r+s}^* = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j^* u_{r+s-i-j+1} \right). \tag{3.2.36}$$

Доведення. За наслідком 3.2.1.1 параперманент (3.2.8) є розв'язком рівняння (3.2.1) з початковими умовами (3.2.2). Розкладемо цей параперманент, при $n = r + s$, за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(r)$. При цьому, якщо b_{ij} — деякий елемент вписаної таблиці $T(r)$, то перший ріг $R_{j-1,1}$ його алгебричного доповнення $P_{ij} = pper(R_{j-1,1}) \cdot pper(R_{r+s-1,i+1})$, крім коефіцієнтів рівняння (3.2.1), буде містити в собі поправки x_t, $t = 1, \dots, k$, які задаються рівностями (3.2.4). Тому параперманент рога $R_{j-1,1}$ є j–тим членом послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. У другому розі ці поправки дорівнюють одиниці, тому його параперманент є $(r + s - i)$–тим членом послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, що $b_{ij} = 0$, якщо $k - 1 < i - j$ і $b_{ij} = a_{i-j+1}$, якщо $0 \le i - j \le k$. Якщо $i - j = k - 1$, то $b_{ij} = a_k$, $i = j + k - 1$ і j приймає значення від $r - k + 1$ по r, тому всі доданки, які входять в розклад параперманента u_{r+s} за елементами таблиці $T(r)$, що містять коефіцієнт a_k рівняння (3.2.1), ввійдуть до суми

$$a_k \cdot \sum_{j=r-k+1}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+1}.$$

Якщо ж $i - j = k - 2$, то

$$b_{ij} = a_{k-1}, \ i = j + k - 2, \ j = r - k + 2, \dots, r$$

і аналогічна сума має вигляд

$$a_{k-1} \cdot \sum_{j=r-k+2}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+2}.$$

Продовжуючи процес обчислень таких сум, через $(k-1)$ кроків буде виконуватися рівність $i-j=0$, тобто прийдемо до суми

$$a_1 \cdot \sum_{j=r}^{r} u_j^* u_{r+s-j}.$$

Таким чином, індекс i коефіцієнтів a_i буде приймати значення від 1 до k і розклад параперманента u_{r+s}^* за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(r)$ буде мати вигляд (3.2.36). □

Запишемо рівність (3.2.36) відповідно при $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} u_{r+s}^* &= a_1 u_r^* u_s, \\ u_{r+s}^* &= a_1 u_r^* u_s + a_2(u_{r-1}^* u_s + u_r^* u_{s-1}), \\ u_{r+s}^* &= a_1 u_r^* u_s + a_2(u_{r-1}^* u_s + u_r^* u_{s-1}) + \\ &+ a_3(u_{r-2}^* u_s + u_{r-1}^* u_{s-1} + u_r^* u_{s-2}). \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

При допомозі рівності (3.2.37), заміною r на $r+t$ можна отримати рівність

$$u_{r+t+s}^* = u_{r+1}^* u_{t+1} u_s + a_2 u_r^* u_t u_s + a_2 u_{r+1}^* u_t u_{s-1} + a_2^2 u_r^* u_{t-1} u_{s-1}. \tag{3.2.38}$$

Наслідок 3.2.6.1. *Якщо послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне рівняння (3.2.1) із нормальними початковими умовами (3.2.6) то для її членів виконуються співвідношення*

$$u_{r+s} = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j u_{r+s-i-j+1} \right). \tag{3.2.39}$$

Справедливість цього наслідку безпосередньо випливає із теореми 3.2.6.

Запишемо співвідношення (3.2.39) при $k = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} k=1: &\quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s, \\ k=2: &\quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s + a_2(u_{r-1} u_s + u_r u_{s-1}), \\ k=3: &\quad u_{r+s} = a_1 u_r u_s + a_2(u_{r-1} u_s + u_r u_{s-1}) + \\ &\quad +a_3(u_{r-2} u_s + u_{r-1} u_{s-1} + u_r u_{s-2}). \end{aligned}$$

Запишемо кілька перших членів нормальної числової послідовності, що генеруються лінійним рекурентним рівнянням другого порядку

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n :$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_2 &= a_1, \\ u_3 &= a_1^2 + a_2, \\ u_4 &= a_1^3 + 2a_1 a_2, \\ u_5 &= a_1^4 + 3a_1^2 a_2 + a_2^2, \\ u_6 &= a_1^5 + 4a_1^3 a_2 + 3a_1 a_2^2, \\ u_7 &= a_1^6 + 5a_1^4 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 + a_2^3, \\ u_8 &= a_1^7 + 6a_1^5 a_2 + 10a_1^3 a_2^2 + 4a_1 a_2^3, \\ u_9 &= a_1^8 + 7a_6 a_2 + 15a_1^4 a_2^2 + 10a_1^2 a_2^3 + a_2^4, \\ u_{10} &= a_1^9 + 8a_1^7 a_2 + 21a_1^5 a_2^2 + 20a_1^3 a_2^3 + 5a_1 a_2^4, \end{aligned}$$

$$u_n = \begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\ 0 & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_{n-1} =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2=n-1} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!} a_1^{k_1} a_2^{k_2}.$$

Перші вісім членів нормальної числової послідовності, що генеруються лінійним рекурентним рівнянням третього порядку

$$u_{n+3} = a_1 u_{n+2} + a_2 u_{n+1} + a_3 u_n$$

мають вигляд:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1,\\
u_2 &= a_1,\\
u_3 &= a_1^2 + a_2,\\
u_4 &= a_1^3 + 2a_1a_2 + a_3,\\
u_5 &= a_1^4 + 3a_1^2a_2 + a_2^2 + 2a_1a_3,\\
u_6 &= a_1^5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + 3a_1^2a_3 + 2a_2a_3,\\
u_7 &= a_1^6 + 5a_1^4a_2 + 6a_1^2a_2^2 + 4a_1^3a_3 + 6a_1a_2a_3 + a_2^3 + a_3^2,\\
u_8 &= a_1^7 + 6a_1^5a_2 + 5a_1^4a_3 + 10a_1^3a_2^2 + 12a_1^2a_2a_3 + 4a_1a_2^3 + 3a_1a_3^2 + 3a_2^2a_3,
\end{aligned}$$

$$u_n = \left[\begin{array}{ccccccc}
a_1 & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\
\frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\
0 & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1
\end{array}\right]_{n-1} =$$

$$= \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-1} \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1!k_2!k_3!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}.$$

Теорема 3.2.7. [31]. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне рівняння другого прядку*

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n \qquad (3.2.40)$$

з цілими ненульовими коефіцієнтами і нормальними початковими умовами

$$u_1 = 1, \ u_2 = a_1. \qquad (3.2.41)$$

Тоді

1) виконуються рівності:

$$u_{r+s} = u_{r+1}u_s + a_2u_ru_{s-1}, \ r = 1,2,\ldots; \ s = 2,3,\ldots, \qquad (3.2.42)$$

$$u_{sr} \equiv 0 (mod\, u_r), \ s,r = 1,2,\ldots; \qquad (3.2.43)$$

2) якщо у рівності (3.2.40) коефіцієнти взаємно прості, тобто

$$(a_1, a_2) = 1,$$

то

$$(u_s, u_r) = u_{(s,r)}. \qquad (3.2.44)$$

Доведення. 1. Доведемо справедливість рівності (3.2.42). До рівняння (3.2.40) із початковими умовами (3.2.41) можна застосувати наслідок теореми 3.2.6. При $k = 2$ рівність (3.2.39) має вигляд:

$$u_{r+s} = a_2u_{r-1}u_s + a_1u_ru_s + a_2u_ru_{s-1}. \qquad (3.2.45)$$

Враховуючи рівність (3.2.40), маємо:

$$u_{r+s} = u_s(a_1u_r + a_2u_{r-1}) + a_2u_ru_{s-1} = u_{r+1}u_s + a_2u_ru_{s-1}.$$

Доведемо справедливість рівності (3.2.43). При $s = r$ рівність (3.2.42) має вигляд

$$u_{2r} = u_r(u_{r+1} + a_2u_{r-1}),$$

тобто рівність (3.2.43) справедлива при $s = 1$ і при $s = 2$.

Нехай рівність (3.2.43) справедлива при $s = 1, 2, \ldots, m-1$. Доведемо її справедливість при $s = m$:

$$u_{mr} = u_{(m-1)r+r} = u_{(m-1)r+1}u_r + a_2u_{(m-1)r}u_{r-1},$$

але тому що
$$u_{(m-1)r} \equiv 0 (mod\, u_r),$$
то рівність (3.2.43) справедлива при $s = m$.

2. Доведемо справедливість рівності (3.2.44). Спочатку доведемо, що виконуються рівності:
$$(u_n, u_{n+1}) = 1, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.2.46}$$
$$(a_2, u_n) = 1, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{3.2.47}$$
При $n = 1$ рівність (3.2.46) очевидно справедлива. Нехай рівність (3.2.46) виконується при $n = k$. Доведемо, що вона виконується і для $n = k + 1$. Припустимо протилежне: $1 < d = (u_{k+1}, u_{k+2})$. Тоді із рівності (3.2.40) при $n = k$ випливає що або u_k кратне d, або a_2 кратне d. У першому випадку приходимо до суперечності з припущенням, що рівність (3.2.46) виконується при $n = k$, а у другому випадку — із рівності (3.2.40) при $n = k$ випливає, що a_1 кратне d, а це суперечить взаємній простоті коефіцієнтів рівняння (3.2.40). Таким чином, рівність (3.2.46) виконується для довільного натурального n. Справедливість рівності (3.2.47) випливає із того, що припущення протилежного твердження разом з рівністю (3.2.40) при $n = s - 1$ приводить до протиріччя з рівністю (3.2.46).

Нехай тепер $s < r$. Тоді, враховуючи рівність (3.2.42) маємо:
$$(u_r, u_s) = (u_{r-s+s}, u_r) = (u_{r-s+1}u_s + a_2u_{r-s}u_{s-1}, u_s) = (a_2u_{r-s}u_{s-1}, u_s).$$
Із рівностей (3.2.46), (3.2.47) випливає рівність $(a_2u_{s-1}, u_s) = 1$. Тому справедлива рівність
$$(u_r, u_s) = (u_{r-s}, u_s),$$
з якої одразу випливає справедливість рівності (3.2.44). □

Наслідок 3.2.7.1. *Зауважимо, що теорема 3.2.7 виконується і тоді, коли коефіцієнти лінійного рекурентного рівняння є функціями деяких змінних.*

Приклад 3.2.10. Згідно з теоремою 3.2.7 нормальна послідовність многочленів[2]
$$u_n = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$
що генерується рекурентним рівнянням
$$u_{n+2} = (x+1)u_{n+1} - xu_n$$
задовольняє рівність
$$\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}, \frac{x^m - 1}{x - 1}\right) = \frac{x^{(n,m)} - 1}{x - 1}, \ n, m \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 3.2.7.2. *Якщо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3.2.7, причому $u_k \neq 1$, $2 \leq k$ тоді член u_s цієї послідовності є простим числом лише тоді, коли s — просте число.*

Доведення випливає із рівності (3.2.43). □

Наслідок 3.2.7.3. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3.2.7 і p — просте число. Тоді u_p не має спільних дільників із своїми попередніми членами цієї послідовності.*

---

[2]Многочлени
$$u_n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$
при простих значеннях n не менших за 3 називають многочленами поділу кола. Многочлени поділу кола не мають дійсних коренів і пов'язані із задачею поділу кола на n рівних частин. Гаус показав, що корені многочленів поділу кола виражаються квадратними радикалами тоді і тільки тоді, коли n є простим числом Ферма,
$$n = 3, 5, 17, 257, \ldots, 2^{2^k} + 1, .$$
Лише при таких значеннях n, при допомозі циркуля та лінійки, коло можна розділити на n рівних частин.

Доведення наслідку випливає із рівності (3.2.43). □

Наслідок 3.2.7.4. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3.2.7. Якщо $a_2 = b^2$, де b — ціле число, то кожен член u_{2m+1}, $1 < m$ цієї послідовності можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих невід'ємних чисел, причому виконується рівність*

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 + (bu_m)^2.$$

Доведення. Справедливість цього наслідку випливає із рівності (3.2.42) при $r = n$, $s = n + 1$. □

Приклад 3.2.11. Знайдемо загальний член послідовності, яку генерує рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + m^2 u_{n-2}.$$

Корені відповідного характеристичного рівняння мають вигляд:

$$\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4m^2}}{2}$$

Нехай $a_1 = a^2 - b^2$, $m = ab$, тоді

$$u_n = c_1 (a^2)^n + c_2 (-b^2)^n.$$

Якщо $u_1 = 1$, $u_2 = a_1 = a^2 - b^2$, то

$$c_1 = \frac{1}{a^2 + b^2},\ c_2 = -\frac{1}{a^2 + b^2}$$

і, згідно із наслідком 3.2.7.4,

$$u_{2k+1} = u_{k+1}^2 + (ab \cdot u_k)^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}\left(a^{4k+2} + b^{4k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}\left(\left(a^{2k+2} + (-1)^k b^{2k+2}\right)^2 + \left(ab \cdot \left(a^{2k} + (-1)^{k-1} b^{2k}\right)\right)^2\right).$$

Наслідок 3.2.7.5. [46]. *Для довільного натурального m виконується тотожність*

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{2m-i}{i} a^{2(m-i)} b^{2i} =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^i \binom{m-i}{i} a^{m-2i} b^{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{m-i-1}{i} a^{m-2i-1} b^{2i+1}\right) \times$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^i \binom{m-i}{i} a^{m-2i} b^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{m-i-1}{i} a^{m-2i-1} b^{2i+1}\right) \tag{3.2.48}$$

Доведення. Розглянемо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка задовольняє умови теореми 3.2.7, причому $a_1 = a$, $a_2 = -b^2$, де b — деяке ціле, відмінне від нуля число. Доведемо спочатку справедливість рівності

$$u_n = \left[\begin{array}{ccccc} a & & & & \\ -\frac{b^2}{a} & a & & & \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & a & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{b^2}{a} & a \end{array}\right]_{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{n-i-1}{i} a^{n-2i-1} b^{2i}. \tag{3.2.49}$$

Ліва частина рівностей (3.2.49) випливає із наслідку 3.2.1.1. Доведемо праву частину рівностей за індукцією по n.

При $n = 2$ маємо:

$$u_2 = a = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{1-i}{i} a^{1-2i} b^{2i} = a.$$

Нехай рівності (3.2.49) справедливі для всіх $2 \leq n < k$. Розкладемо параперманент із рівностей (3.2.49) при $n = k$ за елементами останнього рядка. Враховуючи припущення індукції, маємо:

$$u_k = au_{k-1} - b^2 u_{k-2} =$$

$$= a \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{k-i-2}{i} a^{k-2i-2} b^{2i} -$$

$$-b^2 \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor (k-3)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{k-i-3}{i} a^{k-2i-3} b^{2i}.$$

Нехай у другій сумі $j = i + 1$, тоді, враховуючи рівності $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$ для парного значення k і $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1$ для непарного значення k, отримаємо рівності:

$$u_k = \sum_{i=0}^{\lfloor (k-2)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{k-i-2}{i} a^{k-2i-1} b^{2i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k-j-1}{j-1} a^{k-2j-1} b^{2j} =$$

$$= a^{k-1} + \sum_{i=1}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^i \left(\binom{k-i-2}{i} + \binom{k-i-1}{i-1} \right) a^{k-2i-1} b^{2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^i \binom{k-i-1}{i} a^{k-2i-1} b^{2i}.$$

Тепер для доведення наслідку 3.2.7.5 достатньо отриманий вираз для u_k покласти у очевидну тотожність:

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 - b^2 u_m^2 = (u_{m+1} - bu_m) \cdot (u_{m+1} + bu_m).$$

$\square$

Приклад 3.2.12. При $m = 1, 2, 3, 4, 5$ тотожність (3.2.48) має вигляд:

$$\begin{aligned}
k = 1: \quad & a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \\
k = 2: \quad & a^4 - 3a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab - b^2)(a^2 + ab - b^2), \\
k = 3: \quad & a^6 - 5a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = \\
& (a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3)(a^3 + a^2b - 2ab^2 - b^3), \\
k = 4: \quad & a^8 - 7a^6b^2 + 15a^4b^4 - 10a^2b^6 + b^8 = \\
& (a^4 - a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \cdot (a^4 + a^3b - 3a^2b^2 - 2ab^3 + b^4), \\
k = 5: \quad & a^{10} - 9a^8b^2 + 28a^6b^4 - 35a^4b^6 + 15a^2b^8 - b^{10} = \\
& (a^5 - a^4b - 4a^3b^2 + 3a^2b^3 + 3ab^4 - b^5) \cdot \\
& (a^5 + a^4b - 4a^3b^2 - 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5).
\end{aligned}$$

Приклад 3.2.13. [46]. Рекурентне рівняння

$$u_{n+2} = (k+1) \cdot u_{n+1} - k \cdot u_n$$

з нормальними початковими умовами $u_1 = 1$, $u_2 = k + 1$, $1 \leq k$ генерує послідовність чисел $\left\{ \frac{k^n - 1}{k-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Звернемо увагу на те, що умова $1 \leq k$ забезпечує виконання умови $u_s \neq 1$, $2 \leq s$ наслідку 3.2.7.2. Згідно з наслідком 3.2.7.2 теореми 3.2.7 число $\frac{k^n - 1}{k-1}$ можливо є простим, якщо тільки n — просте число. При $k = 2$ отримаємо відомий факт про те, що прості числа Мерсена знаходяться серед чисел виду $2^p - 1$, тут p — деяке просте число. При $k = 10$ отримуємо відоме твердження про те, що реп'юніти (прості числа, які у десятковій системі числення зображуються у вигляді $\underbrace{11\ldots1}_{n}$) також вишукуються при простих значеннях n.

Зауваження 3.2.5. *Позаяк рекурентне рівняння $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ з нормальними початковими умовами $u_1 = u_2 = 1$ генерує послідовність чисел Фібоначчі, то теорему 3.2.7 можна розглядати як узагальнення деяких співвідношень для чисел Фібоначчі (див. [21], с. 325-327).*

Теорема 3.2.8. [28]. *Якщо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 3.2.7, то справедливі рівності:*

$$u_{sn-1} = a_2^{s-1}u_{n-1}^{s} + \sum_{i=0}^{s-2}\binom{s}{i}\cdot a_2^i u_{s-i-1}u_n^{s-i}u_{n-1}^{i}, \qquad (3.2.50)$$

де $s = 1, 2, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots;$

$$u_{sn} = \sum_{i=0}^{s-1}\binom{s}{i}\cdot a_2^i u_{s-i}u_n^{s-i}u_{n-1}^{i}, \ , \qquad (3.2.51)$$

де $s = 1, 2, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots$

$$u_{sn+r} = \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}\cdot a_2^i u_{s-i+r}u_n^{s-i}u_{n-1}^{i}, \ . \qquad (3.2.52)$$

де $0 < r < s,\ s = 0, 1, \ldots;\ n = 2, 3, \ldots.$

Доведення. Доведемо рівності (3.2.50),(3.2.51) індукцією по s. Справедливість цих рівностей при $s = 1$ очевидна. Нехай вони виконуються при $s = k$. Тоді у випадку $s = k + 1$ маємо:

$$u_{(k+1)n-1} = u_{(kn-1)+n} = u_{kn}u_n + a_2u_{kn-1}u_{n-1} =$$

$$= u_n \cdot \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\cdot a_2^i u_{k-i}u_n^{k-i}u_{n-1}^{i} + a_2u_{n-1}\times$$

$$\times\left(a_2^{k-1}u_{n-1}^{k} + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^i u_{k-i-1}u_n^{k-i}u_{n-1}^{i}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\cdot a_2^i u_{k-i}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} + a_2^k u_{n-1}^{k+1} +$$

$$+ + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^{i+1}u_{k-i-1}u_n^{k-i}u_{n-1}^{i+1}.$$

Нехай у останній сумі $i = j - 1$, тоді вона матиме вигляд

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j-1}\cdot a_2^j u_{k-j}u_n^{k-j+1}u_{n-1}^{j}.$$

Тому

$$u_{(k+1)n-1} = a_2^k u_{n-1}^{k+1} + u_k u_n^{k+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right)\cdot a_2^i u_{k-i}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} =$$

$$= a_2^k u_{n-1}^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}\cdot a_2^i u_{k-i}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i}.$$

Розглянемо тепер вираз для $u_{(k+1)n}$:

$$u_{(k+1)n} = a_2u_{kn-1}u_n + a_1u_{kn}u_n + a_2u_{kn}u_{n-1} =$$

$$= a_2^k u_n u_{n-1}^k + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i} a_2^i a_2 u_{k-i-1}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} +$$

$$+ \binom{k}{k-1} a_1 a_2^{k-1}u_n^2 u_{n-1}^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i} a_2^i a_1 u_{k-i}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i} a_2^{i+1}u_{k-i}u_n^{k-i}u_{n-1}^{i+1} = a_2^k u_n u_{n-1}^k + k a_1 a_2^{k-1}u_n^2 u_{n-1}^{k-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i} a_2^i (a_1u_{k-i} + a_2u_{k-i-1})\cdot u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1} a_2^j u_{k-j+1}u_n^{k-j+1}u_{n-1}^{j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} a_2^i u_{k-i+1}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^{i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{array}{c}k\\ i-1\end{array}\right)a_2^i u_{k-i+1}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^i=$$

$$+u_{k+1}u_n^{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{array}{c}k+1\\ i\end{array}\right)a_2^i u_{k-i+1}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^i=$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c}k+1\\ i\end{array}\right)a_2^i u_{k-i+1}u_n^{k-i+1}u_{n-1}^i.$$

Доведемо рівність (3.2.52) індукцією по r. При $r=1$ маємо:

$$u_{sn+1}=a_1u_{sn}+a_2u_{sn-1}=$$

$$=a_1\sum_{i=0}^{s-1}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i}u_n^{s-i}u_{n-1}^i+a_2(a_2^{s-1}u_{n-1}^s+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-2}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i-1}u_n^{s-i}u_{n-1}^i)=$$

$$=\left(\begin{array}{c}s\\ s-1\end{array}\right)a_1a_2^{s-1}u_nu_{n-1}^{s-1}+a_2^su_{n-1}^s+$$

$$+\sum_{i=0}^{s-2}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^i(a_1u_{s-i}+a_2u_{s-i-1})u_n^{s-i}u_{n-1}^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{s}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i+1}u_n^{s-i}u_{n-1}^i.$$

Доведемо справедливість рівності (3.2.52) для $r=k+1$, при умові, що вона виконується для $r=k$. Покладемо у рівності (3.2.42) $r=sn$ і $s=k+1$, тоді отримаємо рівність

$$u_{sn+(k+1)}=u_{sn+1}u_{k+1}+a_2u_{sn}u_k,$$

яка з врахуванням рівності (3.2.52) при $r=1$ і (3.2.51) матиме вигляд

$$u_{sn+(k+1)}=$$

$$=u_{k+1}\sum_{i=0}^{s}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i+1}u_n^{s-i}u_{n-1}^i+a_2u_k\sum_{i=0}^{s-1}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i}u_n^{s-i}u_{n-1}^i=$$

$$=a_2^su_{k+1}u_{n-1}^s+\sum_{i=0}^{s-1}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^i(u_{k+1}u_{s-i+1}+a_2u_ku_{s-i})u_n^{s-i}u_{n-1}^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{s}\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)a_2^iu_{s-i+k+1}u_n^{s-i}u_{n-1}^i.$$

□

Зауваження 3.2.6. *Для довільних натуральних чисел s і n справедливі тотожності:*

$$sn-1 = (-1)^{s-1}(n-1)^s+\sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)(s-i-1)n^{s-i}(n-1)^i,$$

$$sn = \sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)(s-i)n^{s-i}(n-1)^i,$$

$$sn+r = \sum_{i=0}^{s}(-1)^i\left(\begin{array}{c}s\\ i\end{array}\right)(s-i+r)n^{s-i}(n-1)^i.$$

Доведення. В примітці 3.2.6.1 до теореми 3.2.6 відзначено, що рівняння $u_n=2u_{n-1}-u_{n-2}$, при нормальних початкових умовах, генерує послідовність натуральних чисел. Застосовуючи до цього рівняння рівності (3.2.50)–(3.2.52), отримаємо тотожності цього зауваження. □

Відзначимо, що перша і друга тотожність є частковим випадком третьої тотожності.

Між членами числових послідовностей, які задовольняють одне і те ж рекурентне рівняння, але різні початкові умови, виконуються деякі цікаві співвідношення. Тому, досліджуючи властивості членів однієї послідовності, можна зробити деякі висновки про властивості членів іншої послідовності. Зокрема справедлива наступна

Теорема 3.2.9. *Нехай послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку, коефіцієнти якого задаються вектором* $a=(a_1,a_2)$ *з початковими умовами*

$$u_1=1,\ u_2=a_1;\ u_1^*=b_1,\ u_2^*=b_2, \tag{3.2.53}$$

тоді справедлива рівність

$$u_n^*=b_2u_{n-1}+a_2b_1u_{n-2}. \tag{3.2.54}$$

Доведення. При $n=3$ маємо

$$u_3^*=b_2u_2+a_2b_1u_1=a_1b_2+a_2b_1=a_1u_2^*+a_2u_1^*.$$

Перевіримо виконання індуктивного кроку

$$u_{k+1}^*=a_1u_k^*+a_2u_{k-1}^*=a_1(b_2)u_{k-1}+a_2b_1u_{k-2}+a_2(b_2u_{k-2}+a_2b_1u_{k-3})=$$

$$=(a_1b_2u_{k-1}+a_2b_2u_{k-2})+(a_1a_2b_1u_{k-2}+a_2^2b_1u_{k-3})=b_2u_k+a_2b_1u_{k-1}.$$

□

Наступна теорема теж носить конструктивний характер. Вона виділяє деякі класи числових послідовностей, члени з непарними номерами яких, можуть бути подані у вигляді суми декількох квадратів.

Теорема 3.2.10. [160]. *Нехай послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку, коефіцієнти якого задаються вектором* $a=(a_1,a_2)$, *причому*

$$u_1=1,\ u_2=a_1;\ u_1^*=k,\ u_2^*=a_1. \tag{3.2.55}$$

Тоді:

(1)для довільного $n\in N$, *яке задовольняє нерівність* $3\leq n$, *справедливе співвідношення*

$$u_n^*=u_n+(k-1)a_2u_{n-2}; \tag{3.2.56}$$

(2) якщо виконуються рівності

$$k=a_2=s^2+1, \tag{3.2.57}$$

і $0<a_1$, *то для довільного* n, $3\leq n$ *число* u_{2n-1}^* *є сумою трьох квадратів:*

$$u_{2n-1}^*=(u_n)^2+((s^2+1)\cdot u_{n-1})^2+((s^3+s)\cdot u_{n-2})^2; \tag{3.2.58}$$

(3) якщо виконуються рівності

$$k=s^2+1,\ a_2=b^2, \tag{3.2.59}$$

то для довільного n, $2\leq n$ *число* u_{2n+1}^* *є сумою чотирьох квадратів:*

$$u_{2n+1}^*=u_{n+1}^2+(bu_n)^2+(sbu_n)^2+(sb^2u_{n-1})^2. \tag{3.2.60}$$

Доведення. Рівність (3.2.56) випливає із рівності (3.2.54):

$$u_n^*=b_2u_{n-1}+a_2b_1u_{n-2}=a_1u_{n-1}+a_2ku_{n-2}=$$

$$=a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+a_2(k-1)u_{n-2}=u_n+a_2(k-1)u_{n-2}.$$

Доведемо рівність (3.2.58). Рівність (3.2.36) при $k=2$ має вигляд

$$u_{r+s}^*=a_1u_r^*u_s+a_2(u_{r-1}^*u_s+u_r^*u_{s-1})=u_{r+1}^*u_s+a_2u_r^*u_{s-1}.$$

Покладемо в останній рівності $r = n-1$, $s = n$. Тоді, враховуючи доведену рівність (3.2.56), отримаємо рівності:

$$\begin{aligned}
& u^*_{2n-1} \\
= \;& (a_1 u^*_{n-1} + a_2 u^*_{n-2}) \cdot u_n + a_2 u^*_{n-1} u_{n-1} = \\
= \;& u^*_n u_n + a_2 u^*_{n-1} u_{n-1} = \\
= \;& (u_n + (k-1)a_2 u_{n-2}) \cdot u_n + a_2(u_{n-1} + (k-1)a_2 u_{n-3}) \cdot u_{n-1} = \\
= \;& u_n^2 + (k-1)a_2 u_{n-2} u_n + a_2 u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2 u_{n-3} u_{n-1} = \\
= \;& u_n^2 + (k-1)a_2 u_{n-2}(a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}) + a_2 u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2 u_{n-3} u_{n-1} = \\
= \;& u_n^2 + a_2 u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2 u_{n-2}^2 + (k-1)a_2 u_{n-1}^2 = \\
= \;& u_n^2 + k a_2 u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2 u_{n-2}^2,
\end{aligned}$$

яка разом з рівностями (3.2.57) дає рівність (3.2.58).

Для доведення (3.2.60) запишемо рівність (3.2.56) при $n = 2m+1$:

$$u^*_{2m+1} = u_{2m+1} + (k-1)a_2 u_{2m-1}.$$

Звідси, використовуючи рівність (3.2.42) при $r = m$ і $s = m+1$, та умови (3.2.59), після нескладних перетворень, отримаємо рівність (3.2.60). □

Приклад 3.2.14. При $s = 0$ маємо $k = a_2 = 1$ і рівність (3.2.58) перепишеться у вигляді

$$u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}^2. \tag{3.2.61}$$

Таким чином, всі члени нормальної числової послідовності із непарними номерами не меншими за 3, породжені рекурентним рівнянням

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + u_n$$

розкладаються в суму двох квадратів:

$$\begin{aligned}
u_1 = \;& 1 \\
u_3 = \;& a^2 + 1 = a^2 + 1^2, \\
u_5 = \;& a^4 + 3a^2 + 1 = (a^2+1)^2 + a^2, \\
u_7 = \;& a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1 = (a^3 + 2a)^2 + (a^2+1)^2, \\
u_9 = \;& a^8 + 7a^6 + 15a^4 + 10a^2 + 1 = (a^4 + 3a^2 + 1)^2 + (a^3 + 2a)^2, \\
u_{11} = \;& a^{10} + 9a^8 + 28a^6 + 35a^4 + 15a^2 + 1 = \\
= \;& (a^5 + 4a^3 + 3a)^2 + (a^4 + 3a^2 + 1)^2, \\
u_{13} = \;& a^{12} + 11a^{10} + 45a^8 + 84a^6 + 70a^4 + 21a^2 + 1 = \\
= \;& (a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1)^2 + (a^5 + 4a^3 + 3a)^2.
\end{aligned}$$

Взагалі

$$u_{2n-1} = \sum_{i=2}^{n+1} \binom{2n-i}{2(n-i+1)} a^{2(n-i+1)} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{n-2i+1} a^{n-2i+1} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{n-2i} a^{n-2i} \right)^2. \tag{3.2.62}$$

Зауважимо, що при $a = 1$ рівність (3.2.61) матиме вигляд (див. [21], стор. 326.)

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2,$$

де $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2, \ldots$ — числа Фібоначчі, причому

$$F_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{n-2i+1}.$$

Приклад 3.2.15. Нехай в п. (2) теореми 3.2.10 $a_1 = 4$, $s = 2$. Тоді $u_1 = a_2 = k = 5$,

$$u^*_n = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 5^{n-1} + 7 \cdot (-1)^{n-1}), \; u_n = \frac{1}{6} \cdot (5^n + (-1)^{n-1})$$

і рівність (3.2.58) матиме вигляд

$$\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 5^{2n-2}+7)=\left(\frac{1}{6}\cdot(5^n+(-1)^{n-1})\right)^2+$$
$$+\left(\frac{5}{6}\cdot(5^{n-1}+(-1)^{n-2})\right)^2+\left(\frac{5}{3}\cdot(5^{n-2}+(-1)^{n-3})\right)^2.$$

Зокрема, при $n=13$ остання рівність дає розклад простого числа

$$89406967163085941$$

в суму трьох різних квадратів натуральних чисел, два з яких є послідовними:

$$89406967163085941=203450521^2+203450520^2+81380210^2.$$

Приклад 3.2.16. Якщо в п. (3) теореми 3.2.10 покласти $a_1=3$, $a_2=4$, $b=2$, $s=1$, то

$$u_n^*=4^{n-1}+(-1)^{n-1},\ u_n=\frac{1}{5}\cdot(4^n+(-1)^{n-1})$$

і рівність (3.2.60) матиме вигляд

$$2^{4m}+1=\left(\frac{4^{m+1}+(-1)^m}{5}\right)^2+\left(\frac{2^{2m+1}+(-1)^{m-1}\cdot 2}{5}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{2^{2m+1}+(-1)^{m-1}\cdot 2}{5}\right)^2+\left(\frac{2^{2m}+(-1)^{m-2}\cdot 4}{5}\right)^2.$$

При $m=2^{n-2}$ числа $2^{4m}+1$ приймуть вигляд чисел Ферма $F_n=2^{2^n}+1$, а остання рівність запишеться у вигляді

$$2^{2^n}+1 = \left(\frac{2^{2^{n-1}+2}+1}{5}\right)^2+\left(\frac{2^{2^{n-1}+1}-2}{5}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{2^{2^{n-1}+1}-2}{5}\right)^2+\left(\frac{2^{2^{n-1}}+4}{5}\right)^2,\ 3\leqslant n. \tag{3.2.63}$$

При $n=5$, наприклад, маємо:

$$2^{32}+1=4294967297=52429^2+26214^2+26214^2+13108^2.$$

Використовуючи рівність (3.2.63), при допомозі нескладних перетворень, числа Ферма можна подати (Федак І.В.) у вигляді суми трьох квадратів:

$$F_n=2^{2^n}+1=a_n^2+1=\left(\frac{2a_n-2}{3}\right)^2+\left(\frac{2a_n+1}{3}\right)^2+\left(\frac{a_n+2}{3}\right)^2.$$

Отже, маємо також рівність:

$$F_5=43691^2+43690^2+21846^2.$$

Таким чином, застосування параперманентів трикутних матриць є досить ефективним при дослідженні теоретико-числових властивостей числових послідовностей. З їх допомогою виділяється важливий клас числових послідовностей з нормальними початковими умовами і, порівняно легко, доводяться деякі відомі та невідомі властивості числових послідовностей. Параперманенти трикутних матриць можуть бути застосовані до розв'язання деяких адитивних задач числових послідовностей та інших задач теорії чисел.

3.2.4 Рекурсії та позиційні системи числення

Важко переоцінити роль позиційних систем числення у розвитку математики та обчислювальної техніки. Сьогодні відомі найрізноманітніші системи числення: позиційні, непозиційні, змішані, фібоначчієві, біноміальні, факторіальні тощо. При цьому бінарні системи числення та системи числення, основою яких є степені двійки, виявилися найзручнішими формами зображення чисел у різних обчислювальних системах.

Метою цього параграфа є дослідження зв'язків позиційних систем числення із нормальними числовими послідовностями, що генеруються деяким класом лінійних рекурентних рівнянь із сталими коефіцієнтами (див. [43]). Такий підхід дозволяє уніфікувати дослідження позиційних та змішаних систем числення і запровадити новий клас змішаних систем.

Кожну *позиційну систему числення* пов'яжемо із деяким вектором

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), \tag{3.2.64}$$

компоненти якого задовольняють нерівності

$$2 \leqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant 0. \tag{3.2.65}$$

Вектор (3.2.64) називатимемо основою *системи числення k-того порядку.* Розглянемо лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k},\ u_{<0} = 0,$$

що задається вектором (3.2.64). Це рівняння, внаслідок того, що виконуються нерівності (3.2.65), генерує зростаючу нормальну числову послідовність (див. стор. 228)

$$u_0 = 1, u_1 = [a_1], u_2 = \left[\begin{matrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{matrix}\right]_2, \ldots, u_{k-1} = \left[\begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \ldots & a_1 \end{matrix}\right]_{k-1}.$$

Кожне ціле невід'ємне число n, при допомозі жадібного алгоритму, можна однозначно подати у вигляді лінійної комбінації

$$n = \sum_{i=0}^{r} n_i u_i = \overline{n_r n_{r-1} \ldots n_1 n_0}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)}.$$

Числа n_i, $i = 0, 1, \ldots, r$ назвемо цифрами i-того розряду числа

$$\overline{n_r n_{r-1} \ldots n_1 n_0}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)},$$

що є зображенням числа n у позиційній системі числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Причому, згідно з жадібним алгоритмом, його цифри задовольняють нерівності:

$$0 \leqslant n_i \leqslant \left\lfloor \frac{u_{i+1} - 1}{u_i} \right\rfloor,\ i = 0, 1, \ldots, r, \tag{3.2.66}$$

де символом $\lfloor \cdot \rfloor$ позначено цілу частину від числа, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує задане число. Нерівності (3.2.66) можна спростити:

$$0 \leqslant n_0 \leqslant \frac{u_1 - 1}{u_0} = a_1 - 1,\ 0 \leqslant n_i \leqslant \left\lfloor \frac{u_{i+1} - 1}{u_i} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{a_1 u_i + a_2 u_{i-1} + \ldots + a_k u_{i-k+1} - 1}{u_i} \right\rfloor =$$

$$= a_1 + \left\lfloor \frac{a_2 u_{i-1} + \ldots + a_k u_{i-k+1} - 1}{a_1 u_{i-1} + a_2 u_{i-2} + \ldots + a_k u_{i-k}} \right\rfloor = a_1.$$

Таким чином, цифри позиційної системи числення з основою

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

задовольняють нерівності

$$0 \leqslant n_0 \leqslant a_1 - 1,\ 0 \leqslant n_i \leqslant a_1,\ i = 1, 2, \ldots. \tag{3.2.67}$$

Зображуючи у порядку зростання цілі невід'ємні числа у позиційній системі числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, ми отримаємо деяку таблицю.

Перехід від нульового до першого розряду відбувається тоді коли цифра $a_1 - 1$ нульового розряду збільшується на одиницю, тобто коли у натуральному ряді чисел зустрічається перший член нормальної числової послідовності $u_1 = a_1 u_0$. Перехід від першого до другого розряду відбувається, коли число

$$a_1^2 + a_2 - 1 = \overline{a_2 a_1 - 1}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$$

зростає на одиницю, тобто коли у натуральному ряді чисел зустрічається другий член послідовності $u_2 = a_1u_1 + a_2u_0$ і т.д. Отже, зображення натурального числа у вигляді позиційної системи числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ не може мати вигляд $\overline{\ldots a_1}$, чи вигляд $\overline{\ldots a_2a_1}$, і т.д. чи, нарешті, вигляд $\overline{\ldots a_k \ldots a_2a_1}$. Крім цього, очевидно, що такі зображення не можуть набувати також вигляду $\overline{\ldots a_k \ldots a_2a_1 \ldots}$.

Зауваження 3.2.7. *Позиційні системи числення k-го порядку з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ є змішаними позиційними системами [53], причому позиційні системи числення першого порядку з основою (q) збігаються із класичними системами числення з основою q.*

Приклад 3.2.17. Розглянемо позиційну систему числення третього порядку з основою $(2, 2, 1)$. Рекурентне рівняння

$$u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + u_{n-3}$$

генерує нормальну числову послідовність

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 6, u_3 = 17, u_4 = 48, u_5 = 136, \ldots$$

Згідно з (3.2.67) цифра нульового розряду може набувати лише значення 0 і 1, а всі інші цифри значення із множини $\{0, 1, 2\}$, Причому жодне число у цій системі числення не може мати закінчення $\overline{\ldots 2}$, $\overline{\ldots 22}$, $\overline{\ldots 221}$ чи мати вигляд $\overline{\ldots 221 \ldots}$.

Зобразимо кілька перших натуральних чисел у вигляді чисел з основою $(2, 2, 1)$:

$$1 = \overline{1}_{(2,2,1)}, 2 = \overline{10}_{(2,2,1)}, 3 = \overline{11}_{(2,2,1)}, 4 = \overline{20}_{(2,2,1)}, 5 = \overline{21}_{(2,2,1)}, 6 = \overline{100}_{(2,2,1)},$$

$$7 = \overline{101}_{(2,2,1)}, 8 = \overline{110}_{(2,2,1)}, 9 = \overline{111}_{(2,2,1)}, 10 = \overline{120}_{(2,2,1)}, 11 = \overline{121}_{(2,2,1)},$$

$$12 = \overline{200}_{(2,2,1)}, 13 = \overline{201}_{(2,2,1)}, 14 = \overline{210}_{(2,2,1)}, 15 = \overline{211}, 16 = \overline{220}_{(2,2,1)},$$

$$17 = \overline{1000}_{(2,2,1)}, 18 = \overline{1001}_{(2,2,1)}, 19 = \overline{1010}_{(2,2,1)}, 20 = \overline{1011}_{(2,2,1)}, \ldots$$

Розглянемо важливий випадок, коли основа позиційної системи числення задається вектором $(1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$. Позаяк випадок коли

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$$

тривіальний, бо може трактуватися як зображення натуральних чисел зарубками на палочці, то ми його опускаємо і розглядаємо лише ті випадки, коли виконуються нерівності

$$1 = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant 0, \; a_2 + \ldots + a_k \geqslant 1. \tag{3.2.68}$$

У цьому випадку рекурентне рівняння

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k}, \; u_{-1} = 1, u_{<-1} = 0$$

генерує числову послідовність

$$u_0 = 1, u_1 = a_1 + a_2 = 2, \ldots$$

Цифрами цієї системи числення є лише нулі та одиниці[3], причому представлення чисел у цій системі числення не може містити підряд стільки одиниць, скільки їх є у основі системи. Зауважимо також, що зображення числа у системі числення, основою якої є вектор всі m компонент якого дорівнюють одиниці, не може закінчуватися двома, трьома, і т.д., m одиницями. Такі системи числення хоч і є бінарними, але не є економними, бо через відповідні заборони для зображення числа потребують дещо більше бітів ніж двійкова система числення. Пригадаємо, що позиційну систему числення з основою $(1, 1)$ називають фібоначчієвою системою числення.

[3]Такі позиційні системи числення називають бінарними. Вони, особливо двійкова система числення, знаходять широкі застосування у дискретній математиці.

Порівняємо економність зображення декількох перших натуральних чисел у системах $(2), (1,1), (1,1,1)$:

$$
\begin{array}{rcccccc}
1 = & 1_{(2)} & = & 1_{(1,1)} & = & 1_{(1,1,1)} \\
2 = & 10_{(2)} & = & 10_{(1,1)} & = & 10_{(1,1,1)} \\
3 = & 11_{(2)} & = & 100_{(1,1)} & = & 100_{(1,1,1)} \\
4 = & 100_{(2)} & = & 101_{(1,1)} & = & 101_{(1,1,1)} \\
5 = & 101_{(2)} & = & 1000_{(1,1)} & = & 110_{(1,1,1)} \\
6 = & 110_{(2)} & = & 1001_{(1,1)} & = & 1000_{(1,1,1)} \\
7 = & 111_{(2)} & = & 1010_{(1,1)} & = & 1001_{(1,1,1)} \\
8 = & 1000_{(2)} & = & 10000_{(1,1)} & = & 1010_{(1,1,1)} \\
9 = & 1001_{(2)} & = & 10001_{(1,1)} & = & 1100_{(1,1,1)} \\
10 = & 1010_{(2)} & = & 10010_{(1,1)} & = & 1101_{(1,1,1)} \\
11 = & 1011_{(2)} & = & 10100_{(1,1)} & = & 10000_{(1,1,1)}
\end{array}
$$

Зауваження 3.2.8. *Побудова позиційних систем числення при допомозі нормальних числових послідовностей породжених лінійними рекурентними рівняннями узагальнює теорему Цеккендорфа [163] про те, що кожне ціле додатне число n можна єдиним способом подати у вигляді суми чисел Фібоначчі*

$$n = F_{m_1} + F_{m_2} + \ldots + F_{m_k},$$

причому виконуються нерівності

$$m_i - m_{i+1} \geqslant 2,\ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Зауважимо також, що бінарну систему числення можна побудувати також при допомозі послідовності простих чисел, якщо до неї долучити одиницю:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots.$$

Цей факт випливає з того, що першими двома числами такої послідовності є одиниця і двійка та постулату Бертрана, який стверджує, що для довільного натурального числа $n \geqslant 2$ існує просте

число p^* таке, що виконуються нерівності $n < p^* < 2n$. Справді, нехай n деяке натуральне число і p найбільше просте число, що його не перевищує. Тоді, внаслідок постулату Бертрана нерівність $p < 2p \leqslant n$ неможлива.

3.2.5 Рекурсивні тотожності

Справедлива наступна

Теорема 3.2.11. [39]. *Нехай*

$$\mathrm{ddet}\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = D(n),\ \mathrm{pper}\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = P(n),$$

тоді справедливі рекурсивні тотожності

$$D(n) = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}D(s-1)\prod_{k=s}^{n}a_{nk}, \tag{3.2.69}$$

$$P(n) = \sum_{s=1}^{n}P(s-1)\prod_{k=s}^{n}a_{nk}, \tag{3.2.70}$$

тут ми вважаємо, що

$$D(0) = P(0) = 1.$$

Доведення. Парадетермінант і параперманент трикутної матриці A порядку n, відповідно дорівнює $D(n)$ і $P(n)$, а парадетермінанти та параперманенти рогів $R_{s-1,1}$ — $D(s-1)$, $P(s-1)$, тому, враховуючи те, що

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i}a_{ik},$$

рівності (2.4.10), (2.4.11) приймуть вигляд рекурентних співвідношень (3.2.69), (3.2.70). □

Приклад 3.2.18. Раніше (див. рівність (2.5.63) на стор. 160) було доведено, що

$$\operatorname{pper}\left((j-(j-1)\cdot\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\right)=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & 1\end{bmatrix}_n = n!.$$

Тому, враховуючи рівності

$$\prod_{k=s}^{n} a_{nk}=\prod_{k=s}^{n}(k-(k-1)\delta_{nk})=s^{(n-s)\{1\}}.$$

на основі теореми 3.2.11, отримаємо наступну *тотожність*

$$n!=\sum_{s=1}^{n}(s-1)!s^{(n-s)\{1\}}. \tag{3.2.71}$$

Позначимо парадетермінант (2.4.30) (див. стор. 108) через $D(n)$ і розвинемо його за елементами останнього рядка

$$D(n)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}D(s-1)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-(k-1)},$$

тут ми вважаємо, що $D(0)=1$ і $\prod_{i=p}^{q}(\cdot)=1$ при $g<p$. Тому остання тотожність, з врахуванням цих зауважень, матиме вигляд:

$$D(n)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}+\sum_{s=2}^{n}(-1)^{n-s}D(s-1)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}. \tag{3.2.72}$$

Позаяк

$$D(s-1)=\frac{(s-1)a+(s-1)b+c}{(s-1)!}\prod_{i=1}^{s-2}(ib+c),$$

то справедлива наступна

Теорема 3.2.12. [39].*Для довільних дійсних чисел a,b,c справедлива тотожність:*

$$\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}+$$
$$+\sum_{s=2}^{n}(-1)^{n-s}\frac{(s-1)a+(s-1)b+c}{(s-1)!}\prod_{i=1}^{s-2}(ib+c)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}. \tag{3.2.73}$$

Розглянемо деякі частинні випадки тотожності (3.2.73):

При $a=1$, $b=-1$, $c=m$, і $a=-1$, $b=1$, $c=m$, рівність (2.4.30) матиме вигляд:

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{i-j+1}\cdot\frac{m^{i-j+1\{1\}}}{m^{i-j\{1\}}}\right)_{1\leq j\leq i\leq n}=\operatorname{ddet}\left(\frac{i-j+m}{i-j+1}\right)_{1\leq j\leq i\leq n}=\frac{m^{n\{-1\}}}{n!},$$

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{i-j+1}\cdot\frac{m^{i-j+1}}{m^{i-j\{-1\}}}\right)_{1\leq j\leq i\leq n}=\operatorname{ddet}\left(\frac{-i+j+m}{i-j+1}\right)_{1\leq j\leq i\leq n}=\frac{m^{n\{1\}}}{n!}.$$

а тотожність (3.2.73) — відповідно вигляд:

$$\frac{m^{n\{-1\}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{m^{s-1\{-1\}}}{(s-1)!}\cdot\frac{m^{n-s+1\{1\}}}{(n-s+1)!},$$

$$\frac{m^{n\{1\}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{m^{s-1\{1\}}}{(s-1)!}\cdot\frac{m^{n-s+1\{-1\}}}{(n-s+1)!}. \tag{3.2.74}$$

При $a=0$, $b=1$, $c=0$ рівності (2.4.30), (3.2.73) отримають відповідно вигляд:

$$ddet\left(\frac{j}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=1, \tag{3.2.75}$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{s^{n-s+1\{1\}}}{(n-s+1)!}=1. \tag{3.2.76}$$

При $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, матимемо

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{1}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \frac{1}{n!}, \tag{3.2.77}$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{1}{(s-1)!(n-s+1)!} = \frac{1}{n!}.$$

При $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, дістанемо відповідні рівності:

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{2j-2i+1}{2i-2j+2}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \frac{1^{n\{2\}}}{2^n n!},$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{1^{s-1\{2\}}}{2^{s-1}(s-1)!}\cdot\frac{1^{n-s+1\{-2\}}}{2^{n-s+1}(n-s+1)!} = \frac{1^{n\{2\}}}{2^n n!}.$$

При $a = 2, b = 1, c = 0$ матимемо тотожності:

$$\operatorname{ddet}\left(\frac{2i+j}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = 3,$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(2n+1)^{n\{1\}}}{n!} + 3\cdot\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-i}\frac{(2n+i)^{n-i+1\{-1\}}}{(n-i+1)!} = 3.$$

Слід відзначити, що з останньої рівності випливає нетривіальне твердження про те, що при довільному натуральному n вираз $\frac{(2n+1)^{n\{1\}}}{n!}$ кратний 3.

Вважаємо, що наведених прикладів достатньо, щоб показати важливість теореми 3.2.11 (стор. 275) для генерування тотожностей.

3.3 Формальні степеневі ряди

"...згадані суми, хоча вони й виявляються зовсім неузго- дженими з істиною, однак ніколи не призводять до помилок ..., навпаки, якщо ми їх приймаємо, то отримуємо безліч чудових речей, які ми були б змушені втратити, якби побажали зовсім відмовитися від цих сумувань."

— Л.Ойлер, [102]

В цьому параграфі ми розглянемо застосування парафункцій трикутних матриць до деяких формальних операцій з формальними степеневими рядами. Такий підхід дозволяє за даними загальними членами двох формальних степеневих рядів побудувати явний вигляд загального члена їх частки, степеня, суперпозиції тощо у вигляді параперманентів та парадетермінантів трикутних матриць.

Спочатку зупинимося на понятті формального степеневого ряду.

В кожному підручнику з математичного аналізу доводиться наступне

Твердження 3.3.1. (Маклорен, [129]). *Нехай $f(z)$— деяка функція, абсолютні величини всіх похідних якої, в деякому околі нуля, обмежені одним числом, тоді в цьому околі, функція розкладається в степеневий ряд Маклорена*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{i!}z^i. \tag{3.3.1}$$

В цьому випадку також говорять, що ряд у правій частині рівності (3.3.1) в кожній точці вказаного околу нуля збігається до функції $f(z)$. Це означає, що для довільного значення z із цього околу нескінченна сума

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{i!}z^i$$

дорівнює значенню функції $f(z)$ в цій точці.

Нижче, у рівностях

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{3.3.2}$$

ми будемо ігнорувати збіжність ряду до функції, тобто будемо нехтувати внутрішній зміст цієї рівності. Однак, важливим для нас залишиться метод при допомозі якого функція $f(z)$ генерує ряд, тобто зовнішня форма цієї рівності. В цьому змісті ми будемо говорити про *формальні ряди* у формальних рівностях (3.3.2), а функцію $f(z)$ називати *генератрисою* формального ряду та генератрисою числової послідовності $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Пояснимо сказане на наступному прикладі.

Приклад 3.3.1. 1. Генератриса

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

може згенерувати ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

в тому змісті, що

$$a_i = \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i}{dz^i} (f(z))_{z=0} = \left(\frac{1}{i!} \cdot \frac{i!}{(1-z)^{i+1}} \right)_{z=0} = 1.$$

2. Генератриса

$$\frac{1}{1-z}$$

може генерувати цей самий ряд при допомозі рекурентної рівності

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z \cdot \frac{1}{1-z},$$

яка розгортається в ряд

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots. \tag{3.3.3}$$

3. Коефіцієнти генеруючого генератрисою

$$\frac{1}{1-z}$$

ряду

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

можна знайти також безпосередньо із рівності

$$\frac{1}{1-z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

або рівності

$$1 + 0z + 0z^2 + 0z^3 + \dots = (1-z)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots),$$

зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z.

В трьох розглянутих випадках коефіцієнти ряду отримано різними методами, але результати співпадають.

Відзначимо, що якщо суму у правій частині рівності (3.3.3) розуміти у звичайному, а не формальному змісті, то для $t = 2$ ми отримаємо неправильну рівність

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots.$$

Однак, якщо $-1 < z < 1$, то ряд у правій частині рівності (3.3.3) збіжний і його сума співпадає з генератрисою $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Отже, в деяких випадках, або в деяких проміжках змінної, генератриса може співпадати із звичайною функцією, а формальний степеневий ряд із звичайним степеневим рядом. В цьому розумінні генератриса може розглядатися як деяке продовження звичайної функції. Тому операції з формальними рядами і відповідними їм генератрисами, хоч і називають формальними, але їх зміст зберігається таким, як і для збіжних рядів та відповідних їм функцій.

В комбінаторному аналізі, зазвичай, зустрічається ситуація, коли коефіцієнти формального ряду $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, apriori наділені деяким комбінаторним змістом, тобто відіграють роль перелічення, і потрібно знайти відповідну йому генератрису.

Приклад 3.3.2. Нехай у формальному ряді $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ коефіцієнти a_i означають число різних розбиттів натурального числа i на суму одиниць і двійок.

Наприклад, $a_7 = 4$ бо

$$
\begin{aligned}
7 = &\ 1+1+1+1+1+1+1\\
7 = &\ 2+1+1+1+1+1\\
7 = &\ 2+2+1+1+1\\
7 = &\ 2+2+2+1.
\end{aligned}
$$

Тоді маємо формальний ряд

$$1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 4z^7 + \ldots + a_i z^i + \ldots. \quad (3.3.4)$$

Знайдемо генератрису цього формального ряду. З цією метою розглянемо два формальні ряди

$$\frac{1}{1-zx} = 1 + z^1x^1 + z^{1+1}x^2 + z^{1+1+1}x^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-z^2x} = 1 + z^2x^1 + z^{2+2}x^2 + z^{2+2+2}x^3 + \ldots.$$

В цих формальних рядах степінь x будемо інтерпретувати як кількість операцій множення, а степінь z — як кількість одиниць в першому ряді і кількість двійок у другому ряді разом взятих.

Перемножимо ці формальні ряди і отримаємо новий формальний ряд

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-zx)(1-z^2x)} = \\
= 1 + z^1x^1 + z^{1+1}x^2 + z^{1+1+1}x^3 + z^{1+1+1+1}x^4 + z^{1+1+1+1+1}x^5 + \ldots \\
+z^2x^1 + z^{2+1}x^2 + z^{2+1+1}x^3 + z^{2+1+1+1}x^4 + z^{2+1+1+1+1}x^5 + \ldots \\
+z^{2+2}x^2 + z^{2+2+1}x^3 + z^{2+2+1+1}x^4 + z^{2+2+1+1+1}x^5 + \ldots \\
+z^{2+2+2}x^3 + z^{2+2+2+1}x^4 + z^{2+2+2+1+1}x^5 + \ldots \\
+z^{2+2+2+2}x^4 + z^{2+2+2+2+1}x^5 + \ldots \\
+z^{2+2+2+2+2}x^5 + \ldots,
\end{aligned}
$$

в якому, наприклад, при x^4 маємо всі можливі подання натуральних чисел у вигляді суми чотирьох одиниць і двійок. Якщо в цьому формальному ряді $x = 1$, то, групуючи доданки з однаковими степенями z, ми отримаємо формальний ряд (3.3.4). Таким чином, для заданої перелікової задачі, нами отримано генератрису

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)},$$

яка містить інформацію про число всеможливих подань натурального числа n у вигляді суми одиниць та двійок. Згенерувати цю інформацію можна різними методами.

Відзначимо, що метод яким ми користувалися в цьому прикладі, не передбачує відшукання суми ряду і не пов'язує із символом z ніяких конкретних значень.

В останньому прикладі розглядалася одна із типових перелікових задач комбінаторного аналізу. Центральним методом комбінаторного аналізу є метод генератрис, в якому використовують формальні операції з формальними степеневими рядами. Однак, такі операції як обернення, суперпозиція та деякі інші операції з формальними степеневими рядами, викликають певні труднощі.

Нижче разом з формальними рядами виду $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ ми будемо розглядати також спеціальний формальний степеневий ряд виду

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!},$$

який назвемо *експоненційним формальним степеневим рядом.*

3.3.1 Формальні степеневі ряди з вільним членом

"... розв'язати конкретну задачу завжди цікаво, але це ще не дає повного задоволення. Треба йти далі: відкрити методику набагато важливіше, ніж отримати окремий результат."

— Рональд Грехем (з інтерв'ю для "Кванта")

Нехай задано два формальні степеневі ряди

$$A(z) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,$$

$$B(z) = b_0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i,$$

тут a_i і b_i, $i = 0, 1, \ldots$ — деякі числа із числового кільця K.

Формальні ряди

$$O(z) = 0 + 0z^1 + 0z^2 + \ldots, \quad E(z) = 1 + 0z^1 + 0z^2 + \ldots$$

відповідно назвемо *нульовим та одиничним формальними рядами.*

Нижче дамо основні означення операцій та співвідношень з формальними рядами $A(z)$ і $B(z)$.

1. *Формальні ряди* $A(z)$ *і* $B(z)$ *рівні* між собою, якщо рівні їх відповідні коефіцієнти, тобто коефіцієнти при однакових степенях z :

$$a_i = b_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. *Сумою формальних рядів* $A(z)$ і $B(z)$ називають формальний ряд

$$A(z) + B(z) = X(z) = x_0 + x_1 z^1 + x_2 z^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i,$$

коефіцієнти x_i якого знаходяться за правилом

$$x_i = a_i + b_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Це правило додавання зберігається і для експоненціальних рядів.

3. *Протилежним формальним рядом до формального ряду* $A(z)$ називають ряд $-A(z)$, який у сумі з рядом $A(z)$ дає нульовий формальний ряд. Очевидно, що i-тий коефіцієнт ряду $-A(z)$ дорівнює $-a_i$.

4. *Добутком формальних рядів* $A(z)$ і $B(z)$ називають формальний ряд

$$A(z)B(z) = X(z) = x_0 + x_1 z^1 + x_2 z^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i,$$

коефіцієнти x_i якого знаходяться за *правилом згортки*

$$x_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0 = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}. \tag{3.3.5}$$

Приклад 3.3.3. Знайдемо відповідне правило множення для експоненційних формальних рядів

$$\widetilde{A}(z) = \sum_{j=0}^{i} a_j \frac{z^j}{j!}$$

і

$$\widetilde{B}(z) = \sum_{j=0}^{i} b_j \frac{z^j}{j!}.$$

Коефіцієнти x_i ряду $\widetilde{X}(z) = \widetilde{A}(z)\widetilde{B}(z)$, згідно з правилом згортки (3.3.5), знаходяться із рівності

$$x_i \frac{1}{i!} = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j! \cdot (i-j)!} \cdot a_j b_{i-j}.$$

Маємо

$$x_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} a_j b_{i-j}. \tag{3.3.6}$$

5. Правило *ділення формальних степеневих рядів* $A(z)$ і $B(z)$ випливає із, означеного вище, правила множення формальних рядів. Знайдемо коефіцієнти x_i ряду $X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ із рівності $A(z) =$

$X(z) \cdot B(z)$ при допомозі правила згортки (3.3.5).

$$a_i = x_0 b_i + x_1 b_{i-1} + \ldots + x_{i-1} b_1 + x_i b_0 = x_i b_0 + \sum_{j=0}^{i-1} x_j b_{i-j}, \; i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3.7}$$

Звідси маємо:

$$x_i = \frac{1}{b_0} \cdot (a_i - \sum_{j=0}^{i-1} x_j b_{i-j}), \tag{3.3.8}$$

тут $i = 1, 2, \ldots$ і $x_0 = \frac{a_0}{b_0}$.

Відзначимо той важливий факт, що операція ділення формальних степеневих рядів можлива при умові $b_0 \neq 0$. Якщо $a_0 = 1$ і $b_0 = 1$, то рекурентне правило ділення (3.3.8) стає дещо простішим:

$$x_i = a_i - \sum_{j=0}^{i-1} x_j b_{i-j}, \tag{3.3.9}$$

тут $i = 1, 2, \ldots$ і $x_0 = 1$.

Тому, якщо вільний член формального степеневого ряду не дорівнює нулю, то, не втрачаючи загальності досліджень, ми будемо вважати, що його вільний член дорівнює одиниці.

6. Важливим частковим випадком частки двох формальних степеневих рядів є випадок, коли ряд $A(z)$ є одиничним. В цьому випадку формальний ряд

$$X(z) = B^{-1}(z) = \frac{1}{B(z)}$$

називають *оберненим формальним рядом* до ряду $B(z)$. Його можна знайти, використовуючи правило (3.3.9):

$$x_i = -\sum_{j=0}^{i-1} x_j b_{i-j}, \; x_0 = 1. \tag{3.3.10}$$

Таким чином, легко бачити, що множина формальних рядів з операціями їх суми та добутку утворюють комутативне кільце[4].

7. Наслідуючи Ойлера [103], знайдемо рекурентне правило піднесення формального степеневого ряду $A(z)$ до довільного степеня p.

Нехай

$$(1 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)^p = 1 + x_1 z^1 + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \ldots$$

Здиференціюємо обидві частини цієї рівності і помножимо на $A(z)$, тоді отримаємо рівність

$$pX(z)A'(z) = X'(z)A(z).$$

Застосовуючи правило згортки і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, отримаємо співвідношення

$$p\sum_{j=0}^{i-1}(i-j) \cdot x_j a_{i-j} = \sum_{j=0}^{i-1}(i-j) \cdot a_j x_{i-j}, \; i = 1, 2, \ldots$$

з яких при $i = n-1$ знаходимо шукане рекурентне співвідношення

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot (p+1) - n}{n} \cdot a_i x_{n-i}, \; x_0 = 1, \; n = 1, 2, \ldots. \tag{3.3.11}$$

[4]Кільцем називають сукупність елементів довільної природи, для яких визначені операції додавання "+"та множення "· причому виконуються умови: 1) $a + b = b + a$ — комутативність додавання; 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ — асоціативність додавання; 3) для довільних a і b рівняння $a + x = b$ має єдиний розв'язок; 4) дистрибутивність множення відносно додавання $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$. В кільці може бути відсутня асоціативність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ або комутативність $a \cdot b = b \cdot a$ операції множення. В цих випадках кільце називають відповідно неасоціативним або некомутативним.

Опишемо деякі з наведених вище операцій над формальними степеневими рядами при допомозі парафункцій трикутних матриць.

Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних степеневих рядів

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i,\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i,\ \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i,\ a_0=b_0=x_0=1$$

Тоді справедлива

Теорема 3.3.1. [40]. *Якщо*

$$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

то

$$x_i=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot\left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j},\ i=1,2,\ldots.$$

Тут і нижче ми вважаємо, що

$$\left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant 0}=1.$$

Доведення. Із рівності (3.3.8) випливає справедливість системи рівнянь (3.3.7)

Доведемо, що розв'язком цієї системи рівнянь є x_i, що задається рівністю (3.3.8).

При $i=1$ теорема, очевидно, істинна. Доведемо її справедливість при $i=m+1$, з врахуванням того, що вона справедлива для всіх $i=1,2,\ldots,m$. Нехай

$$\left\langle \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant j}=\Diamond_i,$$

тоді

$$\begin{aligned}
x_{m+1}&=a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m} b_{m-i+1}\cdot x_i=\\
&=a_{m+1}-b_{m+1}-\textstyle\sum_{i=1}^{m} b_{m-i+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(a_{i-j}-b_{i-j})\cdot\Diamond_j=\\
&=a_{m+1}-b_{m+1}-(a_m-b_m)b_1\Diamond_0+(a_{m-1}-b_{m-1})(b_1\Diamond_1-b_2\Diamond_0)-\\
&-\ldots+(-1)^m(a_1-b_1)(b_1\Diamond_{m-1}-b_2\Diamond_{m-2}+\ldots+(-1)^{m-1}b_m\Diamond_0\\
&=(a_{m+1}-b_{m+1})\Diamond_0-(a_m-b_m)\Diamond_1+\ldots+(-1)^m(a_1-b_1)\Diamond_m=\\
&=\textstyle\sum_{j=0}^{m}(-1)^j(a_{m-j+1}-b_{m-j+1})\Diamond_j.
\end{aligned}$$

□

Для означеного вище формального степеневого ряду $A(z)$ справедливе

Теорема 3.3.2. [40]. *Якщо* $X(z)=\frac{1}{A(z)}$, *то*

$$x_i=(-1)^i\left\langle\begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \ldots & a_1\end{matrix}\right\rangle_i=(-1)^i\mathrm{ddet}(Z(a_1,\ldots,a_i)),\tag{3.3.12}$$

де $i=1,2,\ldots$.

Доведення. Із рівності $X(z)=\frac{1}{A(z)}$ випливає система рівнянь (3.3.10). Замінимо в системі рівнянь (3.1.2) твердження 3.1.1 (стор. 221) b_i відповідно на a_i, $i=1,2,\ldots$, причому вважатимемо, що $a_{ii}=a_{i,i-1}=\ldots=a_{i1}=1$, $i=1,2,\ldots$. Тоді розв'язок утвореної системи, згідно із (3.1.7) матиме вигляд (3.3.12). □

Таким чином, справедлива тотожність [40]:

$$\frac{1}{A(z)}=1-\langle a_1\rangle\cdot z^1+\left\langle\begin{matrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot z^2-\ldots+(-1)^i\left\langle\begin{matrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \ldots & a_1\end{matrix}\right\rangle\cdot z^i+\ldots\tag{3.3.13}$$

Приклад 3.3.4. Нехай

$$A(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k,$$

тоді рівність (3.3.13) матиме вигляд

$$\frac{1}{A(z)} = 1 - \operatorname{ddet}(Z(-a_1))z^1 + \operatorname{ddet}(Z(-a_1, -a_2))z^2 + \ldots +$$

$$+(-1)^i \operatorname{ddet}(Z(-a_1, \ldots, -a_i))z^i + \ldots .$$

Враховуючи тотожність (2.5.32) (див. стор. 140), останню рівність можна записати також у вигляді

$$\frac{1}{A(z)} = 1 + \operatorname{pper}(Z_1(a_1))z^1 + \operatorname{pper}(Z_2(a_1, a_2))z^2 + \ldots +$$

$$+\operatorname{pper}(Z_i(a_1, \ldots, a_i))z^i + \ldots .$$

Наслідок 3.3.2.1. *Якщо $f(x)$ нескінченно диференційовна функція, то справедливе наступне подання функції $f^{-1}(x)$ у вигляді формального степеневого ряду:*

$$f^{-1}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \Diamond_i x^i,$$

тут

$$\Diamond_i = \operatorname{ddet}\left(Z_i\left(\frac{f'(0)}{1!}, \ldots, \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\right)\right) =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} f'(0) & & & \\ \frac{f''(0)}{2f'(0)} & f'(0) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{f^{(i)}(0)}{if^{(i-1)}(0)} & \frac{f^{(i-1)}(0)}{(i-1)f^{(i-2)}(0)} & \cdots & f'(0) \end{matrix} \right\rangle_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Доведення. Цей наслідок безпосередньо випливає із теореми 3.3.2 і розкладу функції $f(x)$ в ряд Маклорена. □

Теорема 3.3.3. *Нехай маємо формальний степеневий ряд*

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$$

і $\Diamond_i = Z_i(a_1, \ldots, a_i)$, (див. стор. 132) тоді справедлива тотожність:

$$\operatorname{ddet}(Z_n(\Diamond_1, \Diamond_2, \ldots, \Diamond_n)) = a_n.$$

Доведення. Ця тотожність одразу випливає із рівності

$$((A(z))^{-1})^{-1} = A(z)$$

і теореми 3.3.2. □

Теорема 3.3.4. [39] *Якщо $X(z) = (A(z))^p$, тут*

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i,$$

а p – деяке дійсне число, то

$$x_n = (-1)^n \left\langle \frac{(i-j+1) \cdot p - (j-1)}{(i-j) \cdot p - j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1) \cdot p - (j-1)}{(i-j) \cdot p - j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \tag{3.3.14}$$

Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в (3.3.14), як і в попередньому прикладі, доводиться винесенням із кожного стовпця парадетермінанта за його межі спільного множника, що дорівнює (-1) і застосуванням теореми 2.4.5 про зв'язок параперманента і парадетермінанта. Розкладемо параперманент із рівності (3.3.14) за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо рівність (3.3.11) (див. п.7 про піднесення формального степеневого ряду до степеня на стор. 287). □

Наслідок 3.3.4.1. *Справедливі наступні тотожності:*

$$(A(z))^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot n - (j-1)}{(i-j)\cdot n - j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n - (j-1)}{(i-j)\cdot n - j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k \tag{3.3.15}$$

$$(A(z))^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot n + (j-1)}{(i-j)\cdot n + j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n + (j-1)}{(i-j)\cdot n + j} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k, \tag{3.3.16}$$

$$(A(z))^{\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\langle \frac{-(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{-(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{-(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{-(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k, \tag{3.3.17}$$

$$(A(z))^{-\frac{1}{n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1) + (j-1)\cdot n}{(i-j) + j\cdot n} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} \cdot z^k. \tag{3.3.18}$$

в яких n – натуральне число.

Доведення. Для доведення цих тотожностей достатньо в рівності (3.3.14) замінити p відповідно на вирази: n, $-n$, $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$. □

Таким чином, при допомозі теореми 3.3.4, нами отримано дві пари рівностей для взаємно обернених формальних рядів (3.3.15), (3.3.17) і (3.3.16), (3.3.18). Доведемо теорему, з допомогою якої,

за даними взаємно оберненими функціями f і f^{-1} та відомому формальному степеневому ряду $f(A(z))$, можна побудувати обернений формальний ряд $f^{-1}(A(z))$.

Теорема 3.3.5. [40]. *Нехай f і f^{-1} – взаємно обернені функції, тоді якщо справедлива рівність*

$$f(1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots, \tag{3.3.19}$$

тут

$$b_i = \left\langle \tau_{sr} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.3.20}$$

то справедлива також рівність

$$f^{-1}(1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = 1 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \ldots, \tag{3.3.21}$$

тут

$$x_i = \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.3.22}$$

Доведення. Перехід від рівності (3.3.19) до рівності

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = f^{-1}(1 + b_1 z + b_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)$$

рівносильний розв'язанню системи рівнянь (3.3.20) відносно a_i. Але, згідно із твердженням 3.1.1, (див. система (3.6.1) на стор. 334) ця система має розв'язок

$$a_i = \left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Тепер, в отриманих рівностях, залишається зробити заміну $a_i = x_i$, $b_i = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$. □

Зауваження 3.3.1. *Згідно з теоремою 3.3.5, при побудові трикутної матриці*

$$\left\langle \tau^{-1}_{s,s-r+1} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

необхідно пам'ятати про те, що коефіцієнти її елементів є оберненими до коефіцієнтів елементів трикутної матриці

$$\left\langle \tau_{sr} \frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}} \right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

і записані у кожному рядку в зворотному порядку.

Приклад 3.3.5. Позаяк функції $f(x) = x^n$ і $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$, при $x \geqslant 0$, взаємно обернені, то внаслідок теореми 3.3.5, за відомим формальним степеневим рядом $(A(z))^n$, можна знайти формальний степеневий ряд $(A(z))^{\frac{1}{n}}$. Для цього достатньо, за коефіцієнтами

$$\tau_{ij} = \frac{(i-j+1)\cdot n - (j-1)}{(i-j)\cdot n - j} \tag{3.3.23}$$

елементів парадетермінанта із рівності (3.3.15) знайти відповідні коефіцієнти $\tau^{-1}_{i,i-j+1}$ елементів парадетермінанта із рівності (3.3.22):

$$\tau^{-1}_{i,i-j+1} = \left(\frac{(i-(i-j+1)+1)\cdot n - (i-j+1-1)}{(i-(i-j+1))\cdot n - (i-j+1)}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}.$$

Твердження 3.3.2. [39] *Справедлива тотожність*

$$(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)^n =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i} \frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} \cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_i^{\lambda_i}\right)\cdot z^i, \tag{3.3.24}$$

тут n – натуральне число.

Доведення. Для кращої очності доведення, розглянемо n послідовностей коефіцієнтів формального степеневого ряду $A(z)$:

$$\begin{matrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,i} & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{ni} & \ldots \end{matrix} \tag{3.3.25}$$

в яких перший індекс умовний і позначує номер одного із n ідентичних рядів $A(z)$, а другий індекс позначує степінь z, коефіцієнтом якого він є.

Щоб знайти коефіцієнт x_i степеня z^i, необхідно знайти суму всіх добутків

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \tag{3.3.26}$$

коефіцієнтів таблиці (3.3.25), для яких сума елементів мультимножини

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \tag{3.3.27}$$

дорівнює i, тобто виконується рівність

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_n = i. \tag{3.3.28}$$

Якщо мультимножину (3.3.27) записати в канонічному вигляді

$$\{0^{\lambda_0}, 1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, i^{\lambda_i}\}, \tag{3.3.29}$$

то елементи її первинної специфікації задовольняють рівняння

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i. \tag{3.3.30}$$

Зафіксуємо мультимножину (3.3.29) і знайдемо число всіх мультимножин (3.3.27) з канонічним виглядом (3.3.29). Оскільки число ненульових елементів мультимножини (3.3.27) дорівнює $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i$, то існує

$$\binom{n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i} = \frac{n^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)!}$$

таких мультимножин. Якщо в останніх враховувати ще й порядок елементів, то всього добутків виду (3.3.26) з умовою (3.3.28) є

$$\frac{n^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)!}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}=\frac{n^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}.$$

Отже, існує

$$\frac{n^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}$$

добутків $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_i^{\lambda_i}$ і коефіцієнт x_i, з врахуванням умови (3.3.30), дорівнює

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i}\frac{n^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}\cdot a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_i^{\lambda_i}.$$

□

Наслідок 3.3.5.1. *Справедливі наступні тотожності:*

$$(1+z+z^2+\cdots)^n=1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i}\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}\cdot z^i,$$

$$\left(1+\frac{1}{1}z+\frac{1}{2}z^2+\cdots\right)^n=1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i}\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_i!i^{\lambda_i}}\cdot z^i,$$

$$\left(1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots\right)^n=1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i}\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_i)\{-1\}}}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_i!(i!)^{\lambda_i}}\cdot z^i,$$

тут $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. Тотожності безпосередньо випливають із тотожності (3.3.24) відповідно при $a_i=1$, $a_i=\frac{1}{i}$, $a_i=\frac{1}{i!}$, $i=1,2,\ldots$. □

Твердження 3.3.3. [40]. *Справедливі тотожності:*

$$(-1)^k\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}= \qquad (3.3.31)$$

$$=\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}=$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

тут n – натуральне число.

Доведення. Це твердження випливає із тотожностей (3.3.15), (3.3.24). □

Зауваження 3.3.2. *Цікавим є, властивий методу генератрис, факт, що тотожність (3.3.31) залишається справедливою і при* $n=-m$, $n=\frac{1}{m}$, $n=-\frac{1}{m}$. *При цьому матимемо відповідні тотожності:*

$$(-1)^k\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot m+(j-1)}{(i-j)\cdot m+j}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}=$$

$$=\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot m+(j-1)}{(i-j)\cdot m+j}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}=$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}(-1)^s\frac{m^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\{1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

$$(-1)^k\left\langle\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{-(i-j)+j\cdot m}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}=$$

$$=\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{-(i-j)+j\cdot m}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k}=$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}(-1)^s\frac{(m-1)(2m-1)\cdot\ldots\cdot((s-1)m-1)}{m^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

$$(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{(i-j)+j\cdot m} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{(i-j)+j\cdot m} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \frac{(m+1)(2m+1)\cdot\ldots\cdot((s-1)m+1)}{m^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

в яких $s = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$.

Твердження 3.3.4. [39] *Справедлива тотожність*

$$(1+z+z^2+\ldots)^n = 1+\frac{n^{1\{1\}}}{1!}z+\frac{n^{2\{1\}}}{2!}z^2+\ldots+\frac{n^{i\{1\}}}{i!}z^i+\ldots, \quad (3.3.32)$$

тут n *– натуральне число.*

Доведення. При $n = 1$ ця рівність очевидна. Нехай вона справедлива при $n = k$. Доведемо виконуваність індукційного кроку.

$$(1+z+z^2+\ldots)\cdot\left(1+\frac{k^{1\{1\}}}{1!}z+\frac{k^{2\{1\}}}{2!}z^2+\ldots\right) =$$

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{k^{1\{1\}}}{1!}+\frac{k^{2\{1\}}}{2!}+\ldots+\frac{k^{i\{1\}}}{i!}\right)\cdot z^i.$$

Але тотожність

$$\sum_{j=0}^{i}\frac{k^{j\{1\}}}{j!} = \frac{(k+1)^{i\{1\}}}{i!}$$

справедлива (див. задача 6). □

Твердження 3.3.5. [39] *Справедливі наступні тотожності*

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\{-1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} = \frac{n^{k\{1\}}}{k!}.$$

Доведення. Це твердження одразу випливає із тотожності (3.3.31) при $a_1 = \ldots = a_k = 1$ і тотожності (3.3.32). □

Зауваження 3.3.3. *Аналогічно до примітки 3.3.2, справедливі тотожності*

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}(-1)^s\frac{n^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\{1\}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} = (-1)^k\frac{n^{k\{-1\}}}{k!},$$

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}(-1)^s\frac{(n-1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot((s-1)n-1)}{n^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} =$$

$$= (-1)^k\frac{(n+1)(2n+1)\cdot\ldots\cdot((k-1)n+1)}{n^k k!} = (-1)^k\cdot\frac{(n+1)^{(k-1)\{n\}}}{n^k k!},$$

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}}\frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k}(-1)^s\frac{(n+1)(2n+1)\cdot\ldots\cdot((s-1)n+1)}{n^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} =$$

$$= (-1)^k\frac{(n-1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot((k-1)n-1)}{n^k k!},$$

в яких $s = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$.

Похідні вищих степенів від складених функцій
Нехай маємо складену функцію

$$y = f(g(x)).$$

Запишемо кілька її послідовних похідних:

$$\begin{aligned}
y^{(1)} =\ & f^{(1)}g^{(1)},\\
y^{(2)} =\ & f^{(1)}g^{(2)} + f^{(2)}\left(g^{(1)}\right)^2,\\
y^{(3)} =\ & f^{(1)}g^{(3)} + 3f^{(2)}g^{(1)}g^{(2)} + f^{(3)}\left(g^{(1)}\right)^3,\\
y^{(4)} =\ & f^{(1)}g^{(4)} + f^{(2)}\left(4g^{(1)}g^{(3)} + 3\left(g^{(2)}\right)^2\right) +\\
& 6f^{(3)}g^{(2)}\left(g^{(1)}\right)^2 + f^{(4)}\left(g^{(1)}\right)^4,\\
y^{(5)} =\ & f^{(1)}g^{(5)} + f^{(2)}\left(5g^{(1)}g^{(4)} + 10g^{(2)}g^{(3)}\right) +\\
& f^{(3)}\left(10\left(g^{(1)}\right)^2 g^{(3)} + 15g^{(1)}\left(g^{(2)}\right)^2\right) +\\
& 10f^{(4)}\left(g^{(1)}\right)^3 g^{(2)} + f^{(5)}\left(g^{(1)}\right)^5,
\end{aligned}$$

тут похідні від функції f беруться по аргументу g, а похідні від функції g — по аргументу x.

Задачу про встановлення загального вигляду цих формул вперше розв'язав Фаа ді Бруно. Його формула має наступний вигляд:

$$y^{(n)} =$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\ldots\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot(g^{(1)})^{\lambda_1}\ldots(g^{(n)})^{\lambda_n}\right).$$

Теорема 3.3.6. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ нескінченно диференційовні, причому виконуються рівності*

$$\frac{d^i}{dg^i}f(g) = f^{(i)},\ \frac{d^i}{dx^i}g(x) = g^{(i)},\ i = 1, 2, \ldots,$$

тоді для довільного натурального значення n справедливі рівності:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(g(x)) =$$

$$= \begin{pmatrix} f^{(1)}\\ f^{(2)}\\ \vdots\\ f^{(n)}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} g^{(1)} & & & & \\ \frac{1}{1}\cdot\frac{g^{(2)}}{g^{(1)}} & g^{(1)} & & & \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{g^{(3)}}{g^{(2)}} & \frac{2}{1}\cdot\frac{g^{(2)}}{g^{(1)}} & g^{(1)} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1}\cdot\frac{g^{(n)}}{g^{(n-1)}} & \frac{2}{n-2}\cdot\frac{g^{(n-1)}}{g^{(n-2)}} & \ldots & \frac{n-1}{1}\cdot\frac{g^{(2)}}{g^{(1)}} & g^{(1)}\end{bmatrix} =$$

$$= (f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})\cdot pper(B_n(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)})) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\ldots\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}(g^{(1)})^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(g^{(n)})^{\lambda_n}\right). \tag{3.3.33}$$

Доведення. Справедливість цієї теореми одразу випливає із твердження 2.5.3, означення скалярного добутку вектора на парапермaнент трикутної матриці 2.8.2 (див. відповідно стор. 146, 172) та формули Фаа ді Бруно (2.8.2). □

Застосуємо теорему 3.3.6 до обчислення похідних деяких складених функцій

Приклад 3.3.6. Знайдемо похідні n-го порядку від функцій

$$y = \exp(g(x)),\ y = \ln(g(x)).$$

Позаяк справедливі рівності

$$\frac{d^i}{dg^i}\exp(g) = \exp(g),\ \ \frac{d^i}{dg^i}\ln(g) = (-1)^{i-1}(i-1)!g^{-i},\ i = 1, 2, \ldots,$$

то за теоремою 3.3.6 маємо:

$$\frac{d^n}{dx^n}\exp(g(x)) =$$

$$= (\exp(g), \exp(g), \ldots, \exp(g))\cdot \mathrm{pper}\left(B_n(g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(n)})\right) =$$

$$= \exp(g) \cdot \mathrm{pper}\left(B_n(g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n)})\right).$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(g(x)) =$$

$$= (g^{-1}, -g^{-2}, \dots, (-1)^{n-1}(n-1)!g^{-n}) \cdot \mathrm{pper}\left(B_n(g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(n)})\right).$$

Теорема 3.3.7. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — дві нескінченно диференційовні функції, причому*

$$g_x^{(i)}(0) = a_i,\ f_x^{(i)}(a_0) = b_i,\ i = 0, 1, 2, \dots,$$

тоді справедлива рівність

$$f(g(x)) = b_0 + \frac{1}{1!}(b_1) \cdot \mathrm{pper}(B_1(a_1)) \cdot x + \frac{1}{2!}(b_1, b_2) \cdot \mathrm{pper}(B_2(a_1, a_2)) \cdot x^2 + \dots, \tag{3.3.34}$$

тут $B_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — матриця Белла.

Доведення. Ця теорема випливає із розкладу функції $y = f(g(x))$ в ряд Маклорена і теореми 3.3.6. □

Наслідок 3.3.7.1. *Якщо функція $f(x)$ нескінченно диференційовна, а функція $g(x)$ зображувана у вигляді ряду*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

причому виконуються рівності $f(a_0) = b_0$, $f_x^{(i)}(a_0) = b_i$, $i = 1, 2, \dots$, то справедлива рівність

$$f(g(x)) = b_0 + \left(\frac{b_1}{1!}\right) \cdot \mathrm{pper}(Z_1(a_1)) \cdot x + \left(\frac{b_1}{1!}, \frac{b_2}{2!}\right) \cdot \mathrm{pper}(Z_2(a_1, a_2)) \cdot x^2 + \dots,$$

тут $Z_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — матриця виду (2.5.23) (див. стор. 132.).

Доведення. Знайдемо коефіцієнт при x^n у рівності (3.3.34) з врахуванням умов цього наслідку. Для цього скористаємося рівностями (3.3.33) та рівностями

$$g_x^{(i)}(0) = i!a_i,\ i = 0, 1, \dots.$$

Маємо:

$$\frac{1}{n!}(b_1, b_2, \dots, b_n)\ \mathrm{pper}(B_n(a_1, a_2, \dots, a_n)) =$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = k}} \frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1} \dots \lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} (1!a_1)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (n!a_n)^{\lambda_n} \right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = k}} \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!} \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = k}} \frac{k!}{\lambda_1!\lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} =$$

$$= \left(\frac{b_1}{1!}, \frac{b_2}{2!}, \dots, \frac{b_n}{n!}\right) \cdot\ \mathrm{pper}(Z_n(a_1, a_2, \dots, a_n)).$$

□

Приклад 3.3.7. Нехай $A(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$. Знайдемо ряди для

$$\exp(A(x) - 1)$$

та

$$1 + \ln(A(x)).$$

Скористаємось наслідком 3.3.7.1. Знаходимо b_i, $i = 1, 2, \dots$ для шуканих рядів. Легко бачити, що ці значення відповідно дорівнюють 1 і $(-1)^{i-1}(i-1)!$, тому згідно з цим наслідком, шукані ряди відповідно мають вигляд:

$$\exp(A(x) - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{i!}\right) \mathrm{pper}(Z_i(a_1, a_2, \dots, a_i)) x^i,$$

$$1 + \ln(A(x)) =$$

$$=1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1!},\frac{-1}{2!},\ldots,\frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{i!}\right)\mathrm{pper}(Z_i(a_1,a_2,\ldots,a_i))x^i.$$

Приклад 3.3.8. Встановимо співвідношення між числом $p(n)$ невпорядкованих розбиттів натурального числа n та сумою $\sigma(n)$ всіх натуральних дільників цього числа.

В [89], на стор. 58, наводиться рівність

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i\right)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(i)x^{i-1}\right).$$

Проінтегруємо цю рівність, тоді отримаємо рівність

$$\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i\right)=c+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma(i)}{i}x^i, \tag{3.3.35}$$

або рівність

$$\exp\left(c+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma(i)}{i}x^i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i, \tag{3.3.36}$$

тут c — довільна константа.

Прийнято вважати, що $p(0)=1$, тому $c=0$. Застосуємо до функцій

$$\ln\left(\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i\right),\ \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma(i)}{i}x^i\right)$$

в рівностях (3.3.35), (3.3.36) теорему 3.3.7, тоді, враховуючи результати задачі 3.3.6, отримаємо відповідно рівності

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sigma(i)}{i}x^i=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{s-1}\frac{(s-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}a_0^{-s}a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k}\right)x^k,$$

тут $s=\lambda_1+\ldots+\lambda_k$, $a_i=p(i)$, $a_0=1$, і

$$\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{1}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_k!(k!)^{\lambda_k}}a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k}\right)x^k,$$

тут $a_i=(i-1)!\sigma(i)$.

Зрівнюючи коефіцієнти при n–х степенях, отримаємо тотожності:

$$\frac{1}{n}\sigma(n)=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)-1}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}p(1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot p(n)^{\lambda_n}$$

$$p(n)=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{1}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}(\sigma(1))^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(\sigma(n))^{\lambda_n} \tag{3.3.37}$$

Тотожність (3.3.37) можна записати у вигляді

$$n!p(n)=$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}(0!\sigma(1))^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot((n-1)!\sigma(n))^{\lambda_n}=$$

$$=\mathrm{pper}\left(B_n(0!\sigma(1),\ldots,(n-1)!\sigma(n)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma(1) & & & & \\ \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \sigma(1) & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & 2\frac{\sigma(n-2)}{\sigma(n-3)} & \ldots & \sigma(1) & \\ \frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} & 2\frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \ldots & (n-1)\frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \sigma(1)\end{bmatrix}_n=$$

$$= n! \cdot \left[\begin{array}{ccccc} \sigma(1) & & & & \\ \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{2}\cdot\sigma(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \frac{\sigma(n-2)}{\sigma(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\cdot\sigma(1) & \\ \frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} & \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \dots & \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{n}\cdot\sigma(1) \end{array}\right]_n .$$

Легко доводиться і наступна тотожність

$$\frac{1}{n}\sigma(n) = (-1)^{n-1}\left\langle\begin{array}{ccccc} p(1) & & & & \\ \frac{2}{1}\frac{p(2)}{p(1)} & \frac{1}{2}p(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{n-1}{1}\frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \frac{1}{2}\frac{p(n-2)}{p(n-3)} & \dots & \frac{n-2}{n-1}p(1) & \\ \frac{n}{1}\frac{p(n)}{p(n-1)} & \frac{1}{2}\frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \dots & \frac{n-2}{n-1}\frac{p(2)}{p(1)} & \frac{n-1}{n}p(1) \end{array}\right\rangle_n =$$

$$= (-1)^{n-1} 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\left\langle\begin{array}{ccccc} p(1) & & & & \\ 2\cdot\frac{p(2)}{p(1)} & p(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ (n-1)\frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \frac{p(n-2)}{p(n-3)} & \dots & p(1) & \\ n\frac{p(n)}{p(n-1)} & \frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \dots & \frac{p(2)}{p(1)} & p(1) \end{array}\right\rangle_n .$$

Таким чином, ми отримали пару взаємно обернених співвідношень:

$$p(n) = \left[\begin{array}{ccccc} \sigma(1) & & & & \\ \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{2}\cdot\sigma(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \frac{\sigma(n-2)}{\sigma(n-3)} & \dots & \frac{1}{n-1}\cdot\sigma(1) & \\ \frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)} & \frac{\sigma(n-1)}{\sigma(n-2)} & \dots & \frac{\sigma(2)}{\sigma(1)} & \frac{1}{n}\cdot\sigma(1) \end{array}\right]_n \qquad (3.3.38)$$

$$\sigma(n) = (-1)^{n-1}\left\langle\begin{array}{ccccc} p(1) & & & & \\ 2\cdot\frac{p(2)}{p(1)} & p(1) & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ (n-1)\frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \frac{p(n-2)}{p(n-3)} & \dots & p(1) & \\ n\frac{p(n)}{p(n-1)} & \frac{p(n-1)}{p(n-2)} & \dots & \frac{p(2)}{p(1)} & p(1) \end{array}\right\rangle_n \qquad (3.3.39)$$

Нескінченні добутки формальних степеневих рядів

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i(x),$$

тут $A_i(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, можна обчислювати за таким алгоритмом:

1). Знайти натуральні логарифми цих рядів $\ln(A_i(x))$.

2). Знайти суму $\sum_{i=1}^{\infty} \ln(A_i(x)) = \ln\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i(x)\right)$.

3). Знайти експоненту суми, знайденої в пункті 2).

Приклад 3.3.9. Подамо нескінченний добуток

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_i x^i} \qquad (3.3.40)$$

у вигляді формального степеневого ряду.

1). Знаходимо формальні степеневі ряди відповідні генератрисам $\frac{1}{1-a_i x^i}$ та їх натуральні логарифми:

$$\ln\frac{1}{1-a_k x^k} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} a_k^i x^{ik}.$$

2). Знаходимо суму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{1}{1-a_k x^k} = \ln\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_i x^i} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\frac{d}{n} a_d^{\frac{n}{d}}\right) x^n,$$

тут підсумовування проводиться за всіма дільниками натурального числа n. Ці рівності очевидно випливають із наступної таблиці:

	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$ln\frac{1}{1-a_1x}$	a_1	$\frac{1}{2}a_1^2$	$\frac{1}{3}a_1^3$	$\frac{1}{4}a_1^4$	$\frac{1}{5}a_1^5$
$ln\frac{1}{1-a_2x^2}$	0	a_2	0	$\frac{1}{2}a_2^2$	0
$ln\frac{1}{1-a_3x^3}$	0	0	a_3	0	0
$ln\frac{1}{1-a_4x^4}$	0	0	0	a_4	0
$ln\frac{1}{1-a_5x^5}$	0	0	0	0	a_5
$ln\frac{1}{1-a_6x^6}$	0	0	0	0	0
$ln\frac{1}{1-a_7x^7}$	0	0	0	0	0
$ln\frac{1}{1-a_8x^8}$	0	0	0	0	0
$ln\frac{1}{1-a_9x^9}$	0	0	0	0	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\sum_{i=1}^{\infty} ln\frac{1}{1-a_ix^i}$	a_1	$\frac{1}{2}a_1^2+a_2$	$\frac{1}{3}a_1^3+a_3$	$\frac{1}{4}a_1^4+\frac{1}{2}a_2^2+a_4$	$\frac{1}{5}a_1^5+a_5$

x^6	x^7	x^8	x^9	$\dots$	x^n
$\frac{1}{6}a_1^6$	$\frac{1}{7}a_1^7$	$\frac{1}{8}a_1^8$	$\frac{1}{9}a_1^9$	$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{3}a_2^3$	0	$\frac{1}{4}a_2^4$	0	$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{2}a_3^2$	0	0	$\frac{1}{3}a_3^3$	$\dots$	$\dots$
0	0	$\frac{1}{2}a_4^2$	0	$\dots$	$\dots$
0	0	0	0	$\dots$	$\dots$
a_6	0	0	0	$\dots$	$\dots$
0	a_7	0	0	$\dots$	$\dots$
0	0	a_8	0	$\dots$	$\dots$
0	0	0	a_9	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{6}a_1^6+\frac{1}{3}a_2^3+\frac{1}{2}a_3^2+a_6$	$\frac{1}{7}a_1^7+a_7$	$\frac{1}{8}a_1^8+\frac{1}{4}a_2^4+\frac{1}{2}a_4^2+a_8$	$\frac{1}{9}a_1^9+\frac{1}{3}a_3^3+a_9$	$\dots$	$\sum_{d\mid n}\frac{d}{n}a_d^{\frac{n}{d}}$

В цій таблиці виписані перші дев'ять коефіцієнтів формальних рядів, що відповідають натуральним логарифмам першої колонки.

3). Знаходимо формальний степеневий ряд

$$\exp\left(\ln\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_ix^i}\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-a_ix^i}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\frac{1}{1!}\\ \frac{1}{2!}\\ \vdots\\ \frac{1}{n!}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{\frac{1}{2}a_1^2+a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{\sum_{d\mid n}\frac{d}{n}a_d^{\frac{n}{d}}}{\sum_{d\mid(n-1)}\frac{d}{n-1}a_d^{\frac{n-1}{d}}} & \frac{\sum_{d\mid(n-1)}\frac{d}{n-1}a_d^{\frac{n-1}{d}}}{\sum_{d\mid(n-2)}\frac{d}{n-2}a_d^{\frac{n-2}{d}}} & \dots & a_1\end{bmatrix}x^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}\right)x^n.$$

Якщо $a_1=a_2=\ldots=1$, то остання рівність отримає відомий [79] вигляд:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}=\sum_{i=0}^{\infty}p(i)x^i,$$

тут $p(i)$ — число невпорядкованих розбиттів натурального числа i на натуральні компоненти.

3.3.2 Формальні степеневі ряди без вільного члена

"Незначні відмінності в будові тіла чоловіка та жінки призвели до прірви між їх характерами."
(– Із розмови двох чоловіків.)

Розглянемо ще один важливий клас формальних степеневих рядів з нульовим вільним членом, для яких визначена операція суперпозиції та обернення.

Передовсім відзначимо, що для формальних степеневих рядів виконуються аналогічні, до описаних в попередньому пункті, операції суми та добутку.

Застосуємо метод Ойлера до піднесення формального ряду

$$a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i,$$

до p–го степеня. Тут p — довільне натуральне число.

Нехай

$$(a(z))^p = x(z) = \sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i.$$

Здиференціюємо обидві сторони останньої рівності

$$p(a(z))^{p-1}\frac{d}{dz}a(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i\right).$$

Перемножимо обидві частини цієї рівності на ряд $a(z)$:

$$p\left(\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}z^i\right) = \left(\sum_{i=p-1}^{\infty}(i+1)c_{i+1}z^i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i\right)$$

та зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях z. При цьому отримаємо рекурентне співвідношення для відшукання коефіцієнтів шуканого формального степеневого ряду $x(z)$:

$$c_{p+i} = \frac{p-i+1}{i}\frac{a_2}{a_1}c_{p+i-1} + \frac{2p-i+2}{i}\frac{a_3}{a_1}c_{p+i-2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(i-1)p-1}{i}\frac{a_i}{a_1}c_{p+1} + p\frac{a_{i+1}}{a_1}c_p, \qquad (3.3.41)$$

тут $i = 1, 2, \ldots,\ c_p = a_1^p$.

Теорема 3.3.8. *Нехай*

$$\sum_{i=p}^{\infty} c_i z^i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i\right)^p,\ p \in \mathbb{N},$$

тоді

$$c_{p+i} = a_1^p \cdot \left[\begin{array}{cccccc} p\frac{a_2}{a_1} & & & & & \\ \frac{2p}{p-1}\frac{a_3}{a_2} & \frac{p-1}{2}\frac{a_2}{a_1} & & & & \\ \frac{3p}{2p-1}\frac{a_4}{a_3} & \frac{2p-1}{p-2}\frac{a_3}{a_2} & \frac{p-2}{3}\frac{a_2}{a_1} & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ \frac{ip}{(i-1)p-1}\frac{a_{i+1}}{a_i} & \frac{(i-1)p-1}{(i-2)p-2}\frac{a_i}{a_{i-1}} & \frac{(i-2)p-2}{(i-3)p-3}\frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \ldots & \frac{p-i+1}{i}\frac{a_2}{a_1} \end{array}\right]_i = \qquad (3.3.42)$$

$$= a_1^p \cdot \left[\frac{(t-j+1)p-j+1}{(t-j)p-(-1)^{\delta_{tj}}j}\frac{a_{t-j+2}}{a_{t-j+1}}\right]_{1\leqslant j\leqslant t\leqslant i},\ c_p = a_1^p.$$

Доведення. Розкладемо параперманент з правої частини рівності (3.3.42) за елементами останнього рядка, тоді отримаємо рекурентне співвідношення (3.3.41). □

Справедлива також наступна

Теорема 3.3.9.

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i\right)^p = \sum_{n=p}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}\right)\cdot z^n, \qquad (3.3.43)$$

тут p — деяке натуральне число.

Доведення. Коефіцієнти при z^n, очевидно, мають вигляд

$$m\cdot a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n},$$

тут m — деяке натуральне число. Причому виконуються рівності

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = p.$$

Знайдемо коефіцієнт α біля z^n, використовуючи твердження 1.2.2 (стор. 17).

$$\alpha = \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}.$$

□

Твердження 3.3.6. *Справедливі тотожності:*

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n} =$$

$$= a_1^p \cdot \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j}\,\frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-p}. \tag{3.3.44}$$

Доведення. Цей наслідок одразу випливає із теорем 3.3.8 та 3.3.9. □

При $a_i = 1$, $a_i = \frac{1}{i}$, $a_i = \frac{1}{i!}$, $i = 1, 2, \ldots$ тотожність (3.3.44) прийме відповідно вигляд

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} = \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-p},$$

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}} =$$

$$= \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j}\cdot\frac{i-j+1}{i-j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-p},$$

$$\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\lambda_2!(2!)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}} =$$

$$= \left[\frac{(i-j+1)p-j+1}{(i-j)p-(-1)^{\delta_{ij}}j}\cdot\frac{(i-j+1)!}{(i-j)!}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-p}.$$

Наслідок 3.3.9.1. *Справедливі тотожності:*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} z^i\right)^p = \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot z^n, \tag{3.3.45}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} z^i\right)^p = \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!1^{\lambda_1}\lambda_2!2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!n^{\lambda_n}}\cdot z^n, \tag{3.3.46}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} z^i\right)^p = \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\lambda_2!(2!)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot z^n, \tag{3.3.47}$$

Доведення. Тотожності (3.3.45)-(3.3.47) випливають із тотожності (3.3.43) та теореми 3.3.9 відповідно при $a_i = 1$, $a_i = \frac{1}{i}$, $a_i = \frac{1}{i!}$, $i = 1, 2, \ldots$. □

Нехай задано два формальні степеневі ряди $a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ і $b(z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$. Під суперпозицією формальних степеневих рядів $a(z)$ і $b(z)$ розуміють формальний степеневий ряд

$$c(z) = a \circ b = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j\right)^i.$$

Для формальних степеневих рядів з нульовим вільним членом, можливі операції суперпозиції та обернення.

Теорема 3.3.10. (Теорема про суперпозицію рядів) *Якщо формальний степеневий ряд $c(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i$ є результатом суперпозиції формальних степеневих рядів $a(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$ і $b(z) =$*

$\sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$, *то справедливі рівності:*

$$c_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ \frac{b_2}{b_1} & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{b_i}{b_{i-1}} & \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} & \dots & b_1 \end{bmatrix}_i .$$

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає із твердження 3.3.9 та означення скалярного добутку вектора на параперманент (див. стор.172). Справді

$$c(z) = a(b(z)) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p (b(z))^p =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sum_{n=p}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot b_n^{\lambda_n} \right) \cdot z^n =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{i} a_p \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i,\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot b_i^{\lambda_i} \right) \cdot z^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ \frac{b_2}{b_1} & b_1 & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ \frac{b_i}{b_{i-1}} & \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} & \dots & b_1 \end{bmatrix}_i \cdot z^i.$$

□

Обернення формальних степеневих рядів можна здійснити при допомозі ряду Лагранжа

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(f'(x)\varphi^n(x)\right)|_{x=0},$$

де $y = \frac{x}{\varphi(x)}$.

Справді, нехай задано ряд

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots.$$

Знайдемо обернений до нього ряд

$$x = y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 + \dots.$$

Позаяк

$$\frac{x}{y} = (1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{-1} = 1 + b_2y + b_3y^2 + \dots,$$

то

$$f(x) = \varphi(x) = (1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{-1}$$

і ряд Лагранжа прийме вигляд

$$(1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(f'(x)\varphi^n(x)\right)|_{x=0} =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\varphi'(x)\varphi^n(x)\right)|_{x=0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(\varphi^{n+1}(x)\right)|_{x=0}.$$

Отже,

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\varphi^n(x)\right)|_{x=0} = \frac{1}{n}[x^{n-1}](1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{-n}.$$

Але, згідно із рівністю (3.3.16),

$$[x^{n-1}](1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots)^{-n} =$$

$$(-1)^{n-1} \left\langle \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \cdot \frac{(i-j+1)n + (j-1)}{(i-j)n + j} \cdot \frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1}, \quad a_1 = 1.$$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 3.3.11. (Теорема про обернення ряду) *Нехай задано два формальні степеневі ряди*

$$a(x) = y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

і

$$b(y) = x = y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 + \ldots,$$

тоді справедливі рівності

$$b_n = \frac{1}{n}\cdot(-1)^{n-1}\left\langle \frac{(i-j+1)n+(j-1)}{(i-j)n+j}\cdot\frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[(-1)^{\delta_{ij}}\cdot\frac{(i-j+1)n+(j-1)}{(i-j)n+j}\cdot\frac{a_{i-j+2}}{a_{i-j+1}}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n-1}, \quad a_1 = 1. \tag{3.3.48}$$

У [66], на стор. 150, Ріордан виводить формули для коефіцієнтів взаємно обернених рядів

$$y = x(1 - A_1x - A_2x^2 - \ldots),$$

$$x = y(1 + B_1y + B_2y^2 + \ldots).$$

Вони мають вигляд

$$B_n = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\frac{1}{n+1}\binom{n+k}{k}\frac{k!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}A_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot A_n^{k_n}, \tag{3.3.49}$$

$$A_n = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}(-1)^k\cdot\frac{1}{n+1}\binom{n+k}{k}\frac{k!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}B_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot B_n^{k_n},$$

де $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. При цьому він, використовуючи ряд

Лагранжа та символічне числення Бліссара,[5] виводить спочатку формулу для коефіцієнтів взаємно обернених експоненціальних рядів

$$y = x\cdot\exp(ax),\ a^n \equiv a_n,$$

$$x = y\cdot\exp(by),\ b^n \equiv b_n.$$

Вона має вигляд

$$b_n = \frac{1}{n+1}B_n(fa_1,\ldots,fa_n),$$

де $f^k \equiv f_k = (-1)^k(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)a^{-n-k-1}$, а B_n – многочлен Белла. В термінах твердження 2.5.3 (див. стор. 146) ця формула перепишеться у вигляді

$$b_n = \frac{1}{n+1}B(fa_1,\ldots,fa_n) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}(-1)^k\frac{n!\cdot(n+k)^{\underline{k}}}{k_1!(1!)^{k_1}\cdot\ldots\cdot k_n!(n!)^{k_n}}\cdot a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{k_n}.$$

---

[5] Згідно з цим численням (див., наприклад, [144], стор. 38), послідовність $a_0, a_1, \ldots$ замінюється послідовністю $a^0, a^1, \ldots$, причому верхні індекси, в процесі всіх формальних операцій розглядаються як звичайні показники степеня. Після завершення всіх операцій вони знову вважаються індексами. В цих позначеннях вираз $exp(ax)$, $a^n \equiv a_n$ є скороченим записом для суми

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

Символічне числення Бліссара грунтується на тому факті, що експоненціальні генератриси мають вигляд звичайних експоненціальних функцій.

А в термінах теореми 2.5.3 та скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці вона отримає вигляд

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} \cdot \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{(n+1)!}{1!}, \frac{(n+2)!}{2!}, \ldots, \frac{(2n)!}{n!}\right) \cdot \mathrm{ddet} Z \left(\frac{a_1}{1!}, \frac{a_2}{2!}, \ldots, \frac{a_n}{n!}\right). \tag{3.3.50}$$

Враховуючи те, що коефіцієнти експоненційного та звичайного степеневих рядів пов'язані між собою співвідношеннями $a_i = i!A_i$, $b_i = i!B_i$, формула (3.3.50) запишеться у вигляді формули (3.3.49).

Наведемо кілька перших значень коефіцієнтів (3.3.48).

$$\begin{aligned}
b_1 = {} & 1, \\
b_2 = {} & -a_2, \\
b_3 = {} & -a_3 + 2a_2^2, \\
b_4 = {} & -a_4 + 5a_2a_3 - 5a_2^3, \\
b_5 = {} & -a_5 + 3(2a_2a_4 + a_3^2) - 21a_2^2a_3 + 14a_2^4, \\
b_6 = {} & -a_6 + 7(a_2a_5 + a_3a_4) - 28(a_2a_3^2 + a_2^2a_4) + 84a_2^3a_3 - 42a_2^5, \\
b_7 = {} & -a_7 + 4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2) - 12(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + \\
& +30(4a_2^3a_4 + 6a_2^2a_3^2) - 330a_2^4a_3 + 132a_2^6, \\
b_8 = {} & -a_8 + 9(a_2a_7 + a_3a_6 + a_4a_5) - 45(a_2^2a_6 + 2a_2a_3a_5 + a_2a_4^2 + a_3^2a_4) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +165(a_2^3a_5 + 3a_2^2a_3a_4 + a_2a_3^3) - 99(5a_2^4a_4 + 10a_2^3a_3^2) + \\
& +1287a_2^5a_3 - 429a_2^7, \\
b_9 = {} & -a_9 + 5(2a_2a_8 + 2a_3a_7 + 2a_4a_6 + a_5^2) - \\
& +55(a_2^2a_7 + 2a_2a_3a_6 + 2a_2a_4a_5 + a_3^2a_5 + a_3a_4^2) + \\
& +55(4a_2^3a_6 + 12a_2^2a_3a_5 + 6a_2^2a_4^2 + 12a_2a_3^2a_4 + a_3^4) - \\
& -143(5a_2^4a_5 + 20a_2^3a_3a_4 + 10a_2^2a_3^3) + \\
& +1001(2a_2^5a_4 + 5a_2^4a_3^2) - 5005a_2^6a_3 + 1430a_2^8, \\
b_{10} = {} & -a_{10} + 11(a_2a_9 + a_3a_8 + a_4a_7 + a_5a_6) - \\
& -22(3a_2^2a_8 + 6a_2a_3a_7 + 6a_2a_4a_6 + 3a_2a_5^2 + 6a_3a_4a_5 + 3a_3^2a_6 + a_4^3) + \\
& +143(2a_2^3a_7 + 6a_2^2a_3a_6 + 6a_2^2a_4a_5 + 6a_2a_3^2a_5 + 6a_2a_3a_4^2 + 2a_3^3a_4) - \\
& -1001(a_2^4a_6 + 4a_2^3a_3a_5 + 2a_2^3a_4^2 + 6a_2^2a_3^2a_4 + a_2a_3^4) + \\
& +1001(3a_2^5a_5 + 15a_2^4a_3a_4 + 10a_2^3a_3^3) - 1144(7a_2^6a_4 + 21a_2^5a_3^2) + \\
& +19448a_2^7a_3 - 4862a_2^9.
\end{aligned}$$

Тепер, з врахуванням теореми 3.3.10 та теореми 3.3.11, стає очевидною наступна

Теорема 3.3.12. *Нехай $b(x)$ і $a(x)$ — ряди із теореми 3.3.11 і $\omega(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \cdot x^i$, причому $a_1 = b_1 = \omega_1 = 1$, тоді із рівностей*

$$\omega(b(x)) = a(x), \; b(\omega(x)) = a(x)$$

випливають відповідно рівності

$$\omega_n = (1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \mathrm{pper}(Z(1, c_2, \ldots, c_n)),$$

$$\omega_n = (1, c_2, \ldots, c_n) \cdot \mathrm{pper}(Z(1, a_2, \ldots, a_n)),$$

де

$$c_m = \frac{1}{m} \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)m + (j-1)}{(i-j)m + j} \cdot \frac{b_{i-j+2}}{b_{i-j+1}} \right]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant m-1},$$

$m = 2, 3, \ldots, n.$

3.3.3 Формальні експоненційні степеневі ряди

"Генератриса є механізмом, який трохи нагадує торбу. Замість того, щоб нести окремо багато предметів, а це може виявитись обтяжливим, ми збираємо їх докупи, і тоді нам треба нести лише один предмет — торбу."

— *Дьердь Пойа*

В багатьох випадках, розв'язання задач переліку в комбінаторному аналізі істотно спрощується, якщо в ролі генератриси використовувати експоненційні формальні степеневі ряди.

Означення 3.3.1. ***Експоненційною генератрисою*** *послідовності*

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

називають формальний степеневий ряд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Приклад 3.3.10. [73]. Нехай числова послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана лінійним рекурентним рівнянням

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

із початковими умовами $a_0 = a_1 = 1$. Знайдемо генератрису цієї числової послідовності. Тут, в ролі генератриси, зручно вибрати експоненційну генератрису. При цьому задача істотно спрощується.

Справді, нехай шукана генератриса має вигляд

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n,$$

тоді

$$A(z) = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n!} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-2}}{n!} z^n. \tag{3.3.51}$$

Але

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n!} z^n\right) = A(z) - 1,$$

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-2}}{n!} z^n\right) = zA(z),$$

тому, диференціюючи рівність (3.3.51), отримаємо диференціальне рівняння

$$A'(z) = (1+z)A(z).$$

Розв'язком цього рівняння із врахуванням початкової умови $A(0) = 1$ є

$$A(z) = \exp\left(z + \frac{1}{2}z^2\right).$$

Приклад 3.3.11. Нехай $A(z)$ — експоненційна генератриса послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тоді $zA(z)$ є експоненційною генератрисою послідовності $\{na_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}$. Справді,

$$zA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} z^k = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka_{k-1}}{k!} z^k.$$

Приклад 3.3.12. Нехай $A(z)$ — експоненційна генератриса послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тоді $A'(z)$ є експоненційною генератрисою послідовності $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Справді,

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{k!} z^k.$$

Твердження 3.3.7. *Нехай* $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ *і* $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ *— експоненційні генератриси відповідних послідовностей, тоді справедлива рівність*

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}. \qquad (3.3.52)$$

Доведення. Справді,

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

□

Зауваження 3.3.4. Праву частину рівності (3.3.52) називають *експоненційною згорткою*, а коефіцієнт

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

— *біноміальною композицією* послідовностей $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ і $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Нехай $A(z)$, $B(z)$, $X(z)$ – відповідні позначення формальних експоненційних степеневих рядів:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!}, \ \sum_{i=0}^{\infty} b_i \frac{z^i}{i!}, \ \sum_{i=0}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i!}, \ a_0 = b_0 = x_0 = 1.$$

Тоді справедливі наступні твердження

Твердження 3.3.8. *Якщо*

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

то

$$x_i = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_i^j (a_{i-j} - b_{i-j}) \cdot \left\langle \frac{(j-r+1)}{(s-r+1)} \cdot \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant j}, i = 1, 2, \ldots$$

Тут і нижче ми вважаємо, що

$$\left\langle \frac{(j-r+1)}{(s-r+1)} \cdot \frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}} \right\rangle_{1 \leqslant r \leqslant s \leqslant 0} = 1, \ j = 0, 1, \ldots, i-1, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Твердження 3.3.9. *Якщо* $X(z) = (A(z))^p$, *тут*

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{z^i}{i!},$$

де p *– деяке дійсне число, то*

$$x_n = (-1)^n \left\langle \frac{(i-j+1) \cdot p - (j-1)}{(i-j) \cdot p - j} \cdot \frac{n-j+1}{i-j+1} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1) \cdot p - (j-1)}{(i-j) \cdot p - j} \cdot \frac{n-j+1}{i-j+1} \cdot \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}.$$

Твердження 3.3.8, 3.3.9 легко довести, використовуючи відповідно твердження 3.3.1, 3.3.4, при допомозі відповідних замін.

3.4 Формули обернення

"Я озирнувся подивитися, чи озирається вона,
Щоб глянути, чи озирнувся я."

— М. Леонідов (Із пісні "Дівчинка-Примара")

Взаємно обернені співвідношення займають важливе місце в комбінаторному аналізі. Згадаймо лише формули обернення Мебіуса та методи решета [73].

У цьому параграфі, використовуючи ідею Стенлі, Айгнера, та Платонова, і обернені трикутні матриці (див. стор. 162 цієї книги), ми будуємо пару загальних формул обернення поліноміальних послідовностей.[6]

Нехай задано два вектори многочленів

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n), \ g = (g_0, g_1, \ldots, g_n),$$

які пов'язані рівністю

$$g = Af,$$

тут A — трикутна матриця лінійного перетворення вектора g у вектор f. Тоді, якщо A^{-1} — обернена трикутна матриця до матриці A, то справедлива рівність

$$f = A^{-1}g.$$

Таким чином, справедлива формула обернення

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} a_{ni}u_i \Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{n} b_{ni}v_i, \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.4.1}$$

тут b_{ni} — елементи матриці A^{-1}.

Наведемо кілька класичних формул обернення (див. [1], стор. 120).

Нехай $u_0, u_1, \ldots, u_n$; $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — деякі дійсні числа, де $n \in \mathbb{N}_0$, тоді справедливі формули обернення:

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i \Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} v_i$$

— біноміальне обернення;

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} s_{ni}u_i \Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} S_{ni}v_i$$

[6]Поліноміальна послідовність — це сімейство $\{p_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ таких дійсних многочленів, що $\deg(p_n(x)) = n$ для всіх n (див. [1], стор. 110).

— обернення Стірлінга;

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} L_{ni}u_i \Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_{ni}v_i$$

— обернення Ла;

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q u_i \Leftrightarrow u_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} q^{\binom{n-i}{2}} \binom{n}{i}_q v_i$$

— обернення Гауса. В цих формулах

$$\binom{n}{i}, \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

— біноміальні коефіцієнти, s_{ni} і S_{ni}, $i = 0, 1, \ldots, n$ — числа Стірлінга першого та другого роду,

$$L_{ni} = (-1)^n \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1}, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

— числа Ла,

$$\binom{n}{i}_q = \frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j - 1)}{\prod_{j=1}^{i}(q^j - 1) \prod_{j=1}^{n-i}(q^j - 1)}, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

— коефіцієнти Гауса.

Кожній парі взаємно обернених трикутних матриць відповідає формула обернення. Наведемо кілька нових формул обернення. На основі пари взаємно обернених трикутних матриць із прикладу 2.6.2, можна записати наступну формулу обернення:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{a_n}(v_n - v_{n-1}).$$

Матриці коефіцієнтів

$$R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

рекурентного співвідношення (1.6.13) (див. стор. 53) відповідає трикутна матриця

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ 1 & 1 &&&&& \\ 2 & 1 & 1 &&&& \\ 3 & 2 & 1 & 1 &&& \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 && \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \\ 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а їй — обернена трикутна матриця

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ -1 & 1 &&&&& \\ -1 & -1 & 1 &&&& \\ 0 & -1 & -1 & 1 &&& \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 && \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

тому маємо формулу обернення

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} F_{n-i} u_i \Leftrightarrow u_n = v_n - v_{n-1} - v_{n-2},$$

тут $F_i,\ i = 0, 1, \ldots$ — числа Фібоначчі.

Наведемо приклад ще однієї пари взаємно обернених трикутних матриць:

$$A = \left((-1)^{\left\lfloor \frac{i-j}{2} \right\rfloor}\right)_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ -1 & 1 &&&&& \\ 2 & -1 & 1 &&&& \\ -2 & 2 & -1 & 1 &&& \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots && \\ (-1)^{n-2}2 & (-1)^{n-3}2 & (-1)^{n-4}2 & (-1)^{n-5}2 & \ldots & 1 & \\ (-1)^{n-1}2 & (-1)^{n-2}2 & (-1)^{n-3}2 & (-1)^{n-4}2 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}_n.$$

Цій парі відповідає наступна формула обернення:

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{\left\lfloor \frac{n-i}{2} \right\rfloor} u_i \Leftrightarrow u_n = v_n - v_{n-1} + 2\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i v_i.$$

В додатку 2 ми наводимо ряд взаємно обернених трикутних матриць.

Нехай два вектори многочленів

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n),\ g = (g_0, g_1, \ldots, g_n),$$

задаються трикутними матрицями їх коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} f_{00} &&& \\ f_{10} & f_{11} && \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{00} &&& \\ g_{10} & g_{11} && \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю A, що відповідає лінійному оператору, який переводить вектор многочленів f у вектор многочленів g, тобто знайдемо трикутну матрицю A із матричного рівняння

$$AF = G.$$

Перемножимо обидві частини цього рівняння зправа на матрицю F^{-1} тоді отримаємо рівність

$$A = GF^{-1}.$$

Перемножимо трикутні матриці G і F^{-1}, тоді отримаємо

$$a_{ij} = \sum_{k=j}^{i} g_{ik} \cdot \left(\frac{(-1)^{k+j}}{f_{jj}} \left\langle \frac{f_{r+j+1,s+j}}{f_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0\leqslant s\leqslant r\leqslant k-j-1} \right) = \quad (3.4.2)$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}}{f_{jj}} \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} g_{ik} \left\langle \frac{f_{r+j+1,s+j}}{f_{r+j+1,s+j+1}} \right\rangle_{0\leqslant s\leqslant r\leqslant k-j-1}.$$

Але сума у правій частині рівності (3.4.2) є розкладом парадетермінанта за елементами останнього рядка

$$\left\langle\begin{array}{ccccc} \frac{f_{j+1,j}}{f_{j+1,j+1}} & & & & \\ \frac{f_{j+2,j}}{f_{j+2,j+1}} & \frac{f_{j+2,j+1}}{f_{j+2,j+2}} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{f_{i,j}}{f_{i,j+1}} & \frac{f_{i,j+1}}{f_{i,j+2}} & \cdots & \frac{f_{i,i-1}}{f_{i,i}} & \\ \frac{g_{i,j}}{g_{i,j+1}} & \frac{g_{i,j+1}}{g_{i,j+2}} & \cdots & \frac{g_{i,i-1}}{g_{i,i}} & g_{i,i} \end{array}\right\rangle_{i-j+1},$$

тому нами доведена наступна

Теорема 3.4.1. *Елементи матриці лінійного перетворення, яке переводить вектор многочленів f у вектор многочленів g, дорівнюють*

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{f_{jj}}\left\langle\begin{array}{ccccc} \frac{f_{j+1,j}}{f_{j+1,j+1}} & & & & \\ \frac{f_{j+2,j}}{f_{j+2,j+1}} & \frac{f_{j+2,j+1}}{f_{j+2,j+2}} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{f_{i,j}}{f_{i,j+1}} & \frac{f_{i,j+1}}{f_{i,j+2}} & \cdots & \frac{f_{i,i-1}}{f_{i,i}} & \\ \frac{g_{i,j}}{g_{i,j+1}} & \frac{g_{i,j+1}}{g_{i,j+2}} & \cdots & \frac{g_{i,i-1}}{g_{i,i}} & g_{i,i} \end{array}\right\rangle_{i-j+1},$$

де $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

Тепер в нашому розпорядженні є всі необхідні відомості, щоб довести наступну теорему:

Теорема 3.4.2. *Нехай задано дві трикутні матриці*

$$F = \begin{pmatrix} f_{00} & & & \\ f_{10} & f_{11} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ f_{n0} & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

і

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & & & \\ g_{10} & g_{11} & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

з ненульовими діагональними елементами, тоді справедлива наступна формула обернення:

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n+i}}{f_{ii}}\left\langle\begin{array}{ccccc} \frac{f_{i+1,i}}{f_{i+1,i+1}} & & & & \\ \frac{f_{i+2,i}}{f_{i+2,i+1}} & \frac{f_{i+2,i+1}}{f_{i+2,i+2}} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{f_{n,i}}{f_{n,i+1}} & \frac{f_{n,i+1}}{f_{n,i+2}} & \cdots & \frac{f_{n,n-1}}{f_{n,n}} & \\ \frac{g_{n,i}}{g_{n,i+1}} & \frac{g_{n,i+1}}{g_{n,i+2}} & \cdots & \frac{g_{n,n-1}}{g_{n,n}} & g_{n,n} \end{array}\right\rangle_{n-i+1} \cdot f_i \Leftrightarrow \tag{3.4.3}$$

$$\Leftrightarrow f_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n+i}}{g_{ii}}\left\langle\begin{array}{ccccc} \frac{g_{i+1,i}}{g_{i+1,i+1}} & & & & \\ \frac{g_{i+2,i}}{g_{i+2,i+1}} & \frac{g_{i+2,i+1}}{g_{i+2,i+2}} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{g_{n,i}}{g_{n,i+1}} & \frac{g_{n,i+1}}{g_{n,i+2}} & \cdots & \frac{g_{n,n-1}}{g_{n,n}} & \\ \frac{f_{n,i}}{f_{n,i+1}} & \frac{f_{n,i+1}}{f_{n,i+2}} & \cdots & \frac{f_{n,n-1}}{f_{n,n}} & f_{n,n} \end{array}\right\rangle_{n-i+1} \cdot g_i,$$

тут f_i, g_i, *де* $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *— довільні дійсні числа.*

Доведення. Трикутні матриці GF^{-1} і FG^{-1} в рівностях

$$G(X) = GF^{-1}F(X)$$

і

$$F(X) = FG^{-1}G(X)$$

можна знайти при допомозі теореми 3.4.1, тому, зрівнюючи в цих матричних рівностях останні компоненти, отримаємо обернення (3.4.3). Залишається відзначити, що оскільки трикутні матриці

GF^{-1} і FG^{-1} взаємно обернені, то це обернення не порушиться, якщо многочлени

$$f_i, g_i, \ i = 0, 1, \ldots, n$$

замінити довільними дійсними числами. □

3.5 Многочлени розбиттів

Многочлени розбиттів знаходять широкі застосування в дискретній математиці. Вони виникають при диференціюванні складених функцій [144], в теорії чисел [108], алгебрі тощо. Поняття многочленів розбиттів введене Беллом у [93]. В цьому параграфі ми встановимо тотожності між деякими важливими многочленами розбиттів і скалярними добутками векторів на параперманенти трикутних матриць.

Розглянемо трикутну матрицю виду

$$A = \begin{pmatrix} \tau_{11} \cdot x_1 z & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 z & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn} \cdot x_1 z \end{pmatrix}_n = \left(\tau_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \cdot z^{\delta_{ij}} \right)_{1 \le j \le i \le n}, \tag{3.5.1}$$

тут $x_0 = 1$, τ_{ij} — деякі дробово-раціональні функції аргументів i, j, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Означення 3.5.1. [41]. *Многочленами розбиттів назвемо многочлени виду*

$$P(x_1, \ldots, x_n; z) = \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot z^m \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m}} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}, \tag{3.5.2}$$

тут λ_i — цілі невід'ємні числа, $c(n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — деякі дробово-раціональні вирази, а y_m, $m = 1, \ldots, n$ — компоненти деякого n-вимірного вектора.

Зауваження 3.5.1. *Якщо у рівності (3.5.2)*

$$y_m \equiv 1, \ m = 1, 2, \ldots, n,$$

то вона матиме вигляд

$$P(x_1, \ldots, x_n; z) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} z^m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m}} c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + \ldots + n\lambda_n = n} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{3.5.3}$$

Многочлени виду (3.5.3) назвемо *примітивними многочленами розбиттів.*

Теорема 3.5.1. [41]. *Добуток вектора на парафункцію трикутної матриці виду (3.5.1) є многочленом розбиттів, тобто виконуються рівності:*

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \operatorname{pper}(A) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m}} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \tag{3.5.4}$$

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \operatorname{ddet}(A) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \sum_{\substack{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = m}} (-1)^{n-m} c(n; \lambda_1, \ldots \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}. \tag{3.5.5}$$

Доведення. Доведемо справедливість рівності (3.5.4). Ключовому елементу $k_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}$ параперманента матриці (3.5.1) відповідає факторіальний добуток

$$\left\{ k_{ij} \cdot \frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}} \right\} = \prod_{s=j}^{i} \left(k_{is} \cdot \frac{x_{i-s+1}}{x_{i-s}} \right) = x_{i-j+1} \cdot \prod_{s=j}^{i} k_{is}.$$

Тому компоненті p_i, $i = 1, \ldots, n$ впорядкованого розбиття

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n.$$

відповідає факторіальний добуток

$$x_{p_i} \cdot \prod_{s=j}^{i} k_{is}.$$

Таким чином, згідно з означенням парапермапента, кожному такому впорядкованому розбиттю з первинною специфікацією

$$\left[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\right],$$

відповідає доданок виду

$$c^* \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n},$$

а всім розбиттям із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\right]$ — доданок

$$c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Рівність (3.5.5) доводиться аналогічно. Відзначимо лише, що знак кожного доданку, який відповідає розбиттям із первинною специфікацією $\left[1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, n^{\lambda_n}\right]$, визначається множником

$$(-1)^{n-(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}$$

(див. рівність (2.3.6) на стор. 80) □

Згідно із рівностями (3.5.4), (3.5.5), і (2.8.2), (2.8.1) (стор. 172) можна записати рівності:

$$\sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \left(\sum_{\substack{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=m}} c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \right) =,$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} \cdot x_1 & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn} \cdot x_1 \end{bmatrix}_n =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \left[\tau_{sr} \cdot \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right]_{1 \leq r \leq s \leq n} \tag{3.5.6}$$

$$\sum_{m=1}^{n} y_m \cdot \left(\sum_{\substack{\lambda_1+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n=m}} (-1)^{n-k} \cdot c(n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \tau_{11} \cdot x_1 & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}} & \tau_{n2} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & \tau_{nn} \cdot x_1 \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \left\langle \tau_{sr} \cdot \frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}} \right\rangle_{1 \leq r \leq s \leq n}, \tag{3.5.7}$$

де τ_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$ — деякі числа, а $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — деякий вектор.

Приклад 3.5.1.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \tau_{11} \cdot x_1 & & & \\ \tau_{21} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{22} \cdot x_1 & & \\ \tau_{31} \cdot \frac{x_3}{x_2} & \tau_{32} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{33} \cdot x_1 & \\ \tau_{41} \cdot \frac{x_4}{x_3} & \tau_{42} \cdot \frac{x_3}{x_2} & \tau_{43} \cdot \frac{x_2}{x_1} & \tau_{44} \cdot x_1 \end{matrix} \right\rangle = -y_1 \cdot \tau_{41}\tau_{42}\tau_{43}\tau_{44} x_4 +$$

$$+ y_2 \cdot ((\tau_{31}\tau_{32}\tau_{33}\tau_{44} + \tau_{11}\tau_{42}\tau_{43}\tau_{44}) x_1 x_3 + \tau_{21}\tau_{22}\tau_{43}\tau_{44} x_2^2) -$$

$$- y_3 \cdot (\tau_{11}\tau_{22}\tau_{43}\tau_{44} + \tau_{11}\tau_{32}\tau_{33}\tau_{44} + \tau_{21}\tau_{22}\tau_{33}\tau_{44}) x_1^2 x_2 + y_4 \cdot \tau_{11}\tau_{22}\tau_{33}\tau_{44} x_1^4$$

Зауваження 3.5.2. Якщо у рівностях (3.5.6), (3.5.7) покласти

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y,$$

то отримаємо рівності виду:

$$(y,y,\ldots,y)\cdot\left[\tau_{sr}\cdot\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right]_{1\le r\le s\le n}=y\cdot\left[\tau_{sr}\cdot\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right]_{1\le r\le s\le n}=$$

$$y\cdot\sum_{\pi(n)}c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$(y,y,\ldots,y)\cdot\left\langle\tau_{sr}\cdot\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right\rangle_{1\le r\le s\le n}=y\cdot\left\langle\tau_{sr}\cdot\frac{x_{s-r+1}}{x_{s-r}}\right\rangle_{1\le r\le s\le n}=$$

$$=y\cdot\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}(-1)^{n-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_n}\cdot c(n;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

праві частини яких задаватимуть примітивні многочлени розбиттів. Якщо ж у останніх рівностях $y=1$, то вони приймуть вигляд рівностей (3.5.4), (3.5.5).

3.6 Обернення многочленів розбиттів

"Число різних пар взаємно обернених співвідношень поки що невелике, і можливості для дальшого їх збільшення знайти важко."

— Дж. Ріордан ([66], стор. 7-8.)

В цьому параграфі ми побудуємо ще одну пару загальних формул обернення, які дадуть змогу встановити цілий ряд формул обернення многочленів розбиттів.

Теоретичною основою цього параграфу є наступна

Теорема 3.6.1. *Справедливі наступні формули обернення многочленів розбиттів:*

1)

$$b_i=\left\langle\tau_{sr}\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\tag{3.6.1}$$

$$a_i=\left\langle\tau^{-1}_{s,s-r+1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\quad i=1,2,\ldots;\tag{3.6.2}$$

2)

$$b_i=\left[\tau_{sr}\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right]_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\tag{3.6.3}$$

$$a_i=(-1)^{i-1}\left\langle\tau^{-1}_{s,s-r+1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i},\quad i=1,2,\ldots.\tag{3.6.4}$$

Доведення. Доведемо справедливість першої пари формул обернення. Випадок $i=1$ перевіряється безпосередньо. Нехай ці формули справедливі для $i=2,3,\ldots,k-1$. Доведемо їх справедливість для $i=k$. Розкладемо парадетермінант, в лівій частині системи (3.6.1), при $i=k$, за елементами k-того рядка

$$\tau_{kk}a_1b_{k-1}-\tau_{kk}\tau_{k,k-1}a_2b_{k-2}+\ldots+(-1)^{k-2}\tau_{kk}\cdot\ldots\cdot\tau_{k2}a_{k-1}b_1+$$

$$+(-1)^{k-1}\tau_{kk}\cdot\ldots\cdot\tau_{k1}a_k=b_k.$$

Замінимо в цій рівності змінні $a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}$ відповідними парадетермінантами із рівностей (3.6.2):

$$(-1)^{k-1}\tau_{kk}\cdot\ldots\cdot\tau_{k1}a_k=$$

$$=b_k-\tau_{kk}b_{k-1}\langle\tau_{11}^{-1}b_1\rangle+\tau_{kk}\tau_{k,k-1}b_{k-2}\left\langle\begin{matrix}\tau_{11}^{-1}b_1 & \\ \tau_{22}^{-1}\frac{b_2}{b_1} & \tau_{21}^{-1}b_1\end{matrix}\right\rangle-$$

$$-\ldots+(-1)^{k-1}\tau_{kk}\cdot\ldots\cdot\tau_{k2}b_1\left\langle\tau^{-1}_{s,s-r+1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant k-1}$$

Із останньої рівності знайдемо a_k :

$$a_k=(-1)^{k-1}\tau_{k1}^{-1}\cdot\ldots\cdot\tau_{kk}^{-1}b_k+(-1)^{k-2}\tau_{k1}^{-1}\cdot\ldots\cdot\tau_{k,k-1}^{-1}b_{k-1}\langle\tau_{11}^{-1}b_1\rangle+\ldots+$$

$$+\tau_{k1}^{-1}b_1\left\langle\tau^{-1}_{s,s-r+1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant k-1}.$$

Але права частина останньої рівності є розкладом парадетермінанта (3.6.2) при $i = k$ за елементами останнього рядка. Отже, перша пара формул обернення справедлива.

Доведемо справедливість другої пари формул обернення. Скористаємося теоремою 2.4.5 про зв'язок параперманента із парадетермінантом (див. стор. 116). Маємо:

$$\left[\tau_{sr}\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right]_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i} = \left\langle (-1)^{\delta_{sr}+1}\tau_{sr}\frac{a_{s-r+1}}{a_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i} = b_i.$$

Застосуємо для цієї системи першу пару формул обернення, тоді отримаємо розв'язок

$$a_i = \left\langle (-1)^{\delta_{s,s-r+1}+1}\tau_{s,s-r+1}^{-1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i} =$$

$$= (-1)^{i-1}\left\langle \tau_{s,s-r+1}^{-1}\frac{b_{s-r+1}}{b_{s-r}}\right\rangle_{1\leqslant r\leqslant s\leqslant i}.$$

□

Звернемо увагу читача на те, що трикутні матриці обох пар формул обернення теореми 3.6.1 є трикутними матрицями похилої структури. Причому рівновіддалені від кінців коефіцієнти трикутних матриць взаємно обернених співвідношень цієї теореми є взаємно оберненими числами деякого числового поля.

Проілюструємо застосування теореми 3.6.1 для побудови формул обернення многочленів розбиттів.

Приклад 3.6.1. Нехай

$$\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

— симетричні многочлени задані відповідними генератрисами (див. приклад 2.5.3 на стор. 153). Встановимо три можливі пари формул обернення між цими симетричними многочленами. Генератриси цих многочленів задовольняють співвідношення

$$\sigma(z)p(-z) = 1,$$

$$p(z)s(z) = p'(z),$$

$$\sigma(z)s(-z) = -\sigma'(z).$$

Зрівнюючи коефіцієнти біля z^k, отримаємо три рекурентні рівняння:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_i p_{k-i} = 0,$$

$$kp_k = \sum_{i=1}^{k} s_i p_{k-i},$$

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}s_i\sigma_{k-i}.$$

Перша рекурентна рівність дає дві формули обернення (див. приклад 2.5.3 на стор. 153). Інші дві запишемо відповідно у вигляді:

$$p_k = \frac{s_1}{k}\cdot p_{k-1} + \frac{s_2}{k}\cdot p_{k-2} + \ldots + \frac{s_{k-1}}{k}\cdot p_1 + \frac{s_k}{k},$$

$$\sigma_k = \frac{s_1}{k}\sigma_{k-1} - \frac{s_2}{k}\cdot\sigma_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-2}s_{k-1}\sigma_1 + (-1)^{k-1}s_1.$$

Праві частини цих рівностей можуть бути виражені відповідно через параперманент та парадетермінант

$$p_k = \begin{bmatrix} s_1 & & & & \\ \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{2} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \cdots & \frac{s_1}{k-1} & \\ \frac{s_k}{s_{k-1}} & \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \cdots & \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{k} \end{bmatrix}_k,$$

$$\sigma_k = \left\langle \begin{array}{ccccc} s_1 & & & & \\ \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{2} & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \cdots & \frac{s_1}{k-1} & \\ \frac{s_k}{s_{k-1}} & \frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & \cdots & \frac{s_2}{s_1} & \frac{s_1}{k} \end{array} \right\rangle_k .$$

Користуючись теоремою 3.6.1, легко записати відповідні обернені співвідношення:

$$s_k = (-1)^{k-1} \left\langle \begin{array}{ccccc} p_1 & & & & \\ 2 \cdot \frac{p_2}{p_1} & p_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ (k-1) \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \frac{p_{k-2}}{p_{k-3}} & \cdots & p_1 & \\ k \cdot \frac{p_k}{p_{k-1}} & \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} & \cdots & \frac{p_2}{p_1} & p_1 \end{array} \right\rangle_k$$

$$s_k = \left\langle \begin{array}{ccccc} \sigma_1 & & & & \\ 2 \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ (k-1) \cdot \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \frac{\sigma_{k-2}}{\sigma_{k-3}} & \cdots & \sigma_1 & \\ k \cdot \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}} & \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_{k-2}} & \cdots & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 \end{array} \right\rangle_k .$$

Зауважимо, що отримані три пари формул обернення многочленів розбиттів можна було отримати із відповідних формул обернення (див. [62], стор. 93), в яких симетричні многочлени виражаються через квазітрикутні матриці, або такі, що легко до них зводяться.

3.7 Ланцюгові та рекурентні дроби

"Хоча цей вид виразів до нинішнього часу розроблений мало, та ми не маємо жодних сумнівів, що коли-небудь його застосування стануть дуже поширеними в аналізі нескінченних."

— Л. Ойлер

Важко переоцінити роль ланцюгових дробів в різних галузях математики. В багатьох випадках застосування апарату ланцюгових дробів до аналізу та розв'язання задач математики має ряд переваг над іншими методами математичного аналізу. В теорії чисел раціональні вкорочення ланцюгових дробів, що є зображеннями ірраціональних чисел, є їх найкращими раціональними наближеннями [157, 104]. Природним є застосування ланцюгових дробів до розв'язання лінійних діофантових рівнянь та нерівностей (К. Такебе, див. [111]). Дробово-раціональні наближення іноді дають можливість успішно замінити функцію, причому в тих випадках, коли степеневий ряд цієї функції розбіжний. Розвинення відношення гіпергеометричних функцій в ланцюгові дроби привело до відкриття ортогональних поліномів, а наближення аналітичних функцій раціональними вкороченнями ланцюгових дробів (апроксимації Паде, див. [8]), знайшло застосування у статистичній механіці та фізиці твердого тіла. Природним є також застосування ланцюгових дробів до дослідження стійкості многочленів, що мають важливі застосування в теорії управління.

Означення 3.7.1. *Нескінченним ланцюговим дробом називають вираз вигляду*[7]

$$\alpha = q_0 + K_{i=1}^{\infty}\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \ddots}}} = q_0 + \frac{p_1}{q_1} {}_{+} \frac{p_2}{q_2} {}_{+\cdots+} \frac{p_n}{q_n} {}_{+\cdots} ; \tag{3.7.1}$$

дріб $\frac{p_n}{q_n}$ *називають* n*-тою ланкою цього дробу;* p_n *і* q_n *— членами*

[7] Тут буква K є першою буквою слова "континуант", що служить назвою спеціальних многочленів, які є основою дослідження континуальних (неперервних) дробів. Останнє позначення нескінченного ланцюгового дробу у правій частині рівності (3.7.1) належить Роджерсу [145].

n–тої ланки ланцюгового дробу; послідовність

$$\frac{P_0}{Q_0} = q_0,\ \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n} = q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \ddots + \frac{p_n}{q_n}}}, \ldots \tag{3.7.2}$$

— послідовністю нульового, першого, і т. д. n–го раціонального вкорочення нескінченного ланцюгового дробу.

Раціональні вкорочення нескінченного ланцюгового дробу, за деяких умов, які накладаються на члени його ланок, відіграють роль раціональних наближень до значення цього дробу. Нас, як правило, не цікавитимуть питання збіжності та швидкості збіжності раціональних вкорочень до значення нескінченного ланцюгового дробу, а лише деякі формальні перетворення нескінченних ланцюгових дробів та їх зв'язок із формальними степеневими рядами. Тому у рівності (3.7.1) α не є значенням нескінченного ланцюгового дробу, а лише його позначенням.

Чисельники та знаменники раціональних вкорочень є континуантами (див. [21], стор. 333–341). Рекурсивні властивості континуантів вивчав ще Валліс [157] та Ойлер [104]. Одним із фундаментальних в теорії ланцюгових дробів тверджень, встановлених цими математиками, є наступне

Твердження 3.7.1. *Чисельники та знаменники раціональних вкорочень (3.7.2) нескінченного ланцюгового дробу (3.7.1) задовольняють рекурентні рівняння*

$$\begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2},\ p_0 = 1, \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2},\ n \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \tag{3.7.3}$$

із початковими умовами

$$\begin{cases} P_{-1} = 1,\ P_{-2} = 0, \\ Q_{-1} = 0,\ Q_{-2} = 1. \end{cases} \tag{3.7.4}$$

Доведення. Очевидно, що

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}.$$

Нехай

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2}}{q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2}}.$$

Покажемо, що виконується індуктивний крок

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = q_0 + \frac{p_1}{q_1 +} \frac{p_2}{q_2 + \cdots +} \frac{p_n}{q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} = \frac{(q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})P_{n-1} + p_n P_{n-2}}{(q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})Q_{n-1} + p_n Q_{n-2}} =$$

$$= \frac{(q_n P_{n-1} + p_n P_{n-2}) + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} P_{n-1}}{(q_n Q_{n-1} + p_n Q_{n-2}) + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} Q_{n-1}} =$$

$$= \frac{P_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} P_{n-1}}{Q_n + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} Q_{n-1}} = \frac{q_{n+1} P_n + p_{n+1} P_{n-1}}{q_{n+1} Q_n + p_{n+1} Q_{n-1}}.$$

Таким чином твердження справедливе для довільного цілого невід'ємного n. □

Приклад 3.7.1. Для квадратичних ірраціональностей, члени ланок нескінченного ланцюгового дробу знаходяться легко. Зобразимо, наприклад, $\sqrt{5}$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу. Виділимо цілу частину 2 із цього ірраціонального числа та подамо його у вигляді

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2).$$

Але

$$\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2},$$

тому приходимо до рекурсії

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}},$$

з якої випливає, що

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 +} \frac{1}{4 + \cdots +} \frac{1}{4 + \cdots}.$$

Позаяк чисельник та знаменник кожного раціонального вкорочення нескінченного ланцюгового дробу задовольняє рекурентні рівняння (3.7.3) із початковими умовами (3.7.4), то слід очікувати, що вони виражаються через параперманенти деяких трикутних матриць. Справедлива наступна

Теорема 3.7.1. *Справедлива тотожність:*

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1}{}_{+}\frac{p_2}{q_2}{}_{+\cdots+}\frac{p_n}{q_n} = \frac{P_n}{Q_n}, \tag{3.7.5}$$

тут

$$P_n = \left[\begin{array}{cccccc} q_0 & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.7.6}$$

$$Q_n = \left[\begin{array}{ccccc} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad Q_0 = 1. \tag{3.7.7}$$

Доведення. Легко бачити, що значення P_0, P_1, Q_0, Q_1, обчислені за формулами (3.7.6), (3.7.7) співпадають з тими ж значеннями, знайденими при допомозі рекурентних рівнянь (3.7.3) та початкових умов (3.7.4). Розкладаючи параперманенти (3.7.6), (3.7.7) за елементами останнього рядка, отримаємо рекурентні рівності (3.7.3), що і доводить теорему. □

Зауваження 3.7.1. *Якщо частку параперманентів P_n і Q_n, заданих рівностями (3.7.6)(3.7.7) умовно замінити виразом*

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} q_0 & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_{n+1},$$

то раціональні вкорочення нескінченних ланцюгових дробів, згідно з теоремою 3.7.1, отримають вигляд

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1}{}_{+}\frac{p_2}{q_2}{}_{+\cdots+}\frac{p_n}{q_n} = \left[\begin{array}{c|ccccc} q_0 & & & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n \end{array}\right]_{n+1}, n = 0, 1, \ldots$$

Теорема 3.7.2. *Якщо збіжністю нескінченних ланцюгових дробів нехтувати, то, спрямовуючи в рівності (3.7.5) n до нескінченності, отримаємо формальну рівність*

$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \ddots}}} = \left[\begin{array}{c|ccc} q_0 & & & \\ \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{array}\right]. \tag{3.7.8}$$

Доведення. Розкладемо параперманент P за елементами першого стовпця:

$$P = q_0 Q + p_1 \left[\begin{array}{ccc} q_2 & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ \vdots & \cdots & \ddots \end{array}\right].$$

Нехай

$$P' = \begin{bmatrix} q_2 & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix},$$

Тоді,

$$\frac{P}{Q} = q_0 + p_1 \frac{1}{\frac{Q}{P'}}.$$

Але

$$Q = q_1 P' + p_2 \begin{bmatrix} q_3 & & \\ \frac{p_4}{q_4} & q_4 & \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix},$$

тому

$$\frac{P}{Q} = q_0 + \frac{p_1}{q_1 + p_2 \frac{1}{\frac{P'}{Q'}}},$$

де

$$Q' = \begin{bmatrix} q_3 & & \\ \frac{p_4}{q_4} & q_4 & \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Продовжуючи процес аналогічних перетворень до нескінченності, отримаємо нескінченний ланцюговий дріб лівої частини рівності (3.7.8). □

Зауваження 3.7.2. *Теорема 3.7.2 дає нове зображення для неперервних дробів, яке ми називаємо* ***рекурентними дробами другого порядку****. Поняття рекурентних дробів довільного порядку буде введено в п. 3.7.*

Якщо парaперманент (3.7.7) розгорнути за його означенням, то отримаємо континуант $K(q_1, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n)$. Згідно з твердженням 3.7.1, цей континуант можна задати рекурентно так:

$$K_0(|) = 1, \;\; K_1(q_1|) = q_1, \;\; K_n(q_1, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n) =$$

$$= q_n K_{n-1}(q_1, \dots, q_{n-1} | p_2, \dots, p_{n-1}) + p_n K_{n-2}(q_1, \dots, q_{n-2} | p_2, \dots, p_{n-2}).$$

Розглянемо приклади застосування парaперманентів для доведення деяких відомих властивостей континуантів.

Твердження 3.7.2. *Справедливі тотожності:*

$$K_n(q_1, \dots, q_{m-1}, q_m + c, q_{m+1}, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n) = K_n(q_1, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n) \tag{3.7.9}$$
$$+ c \cdot K_{m-1}(q_1, \dots, q_{m-1} | p_2, \dots, p_{m-1}) \cdot K_{n-m}(q_{m+1}, \dots, q_n | p_{m+2}, \dots, p_n).$$

$$K_n(q_1, \dots, q_n | p_2, \dots, p_{m-1}, p_m + c, p_{m+1}, \dots, p_n) = K_n(q_1, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n) \tag{3.7.10}$$
$$+ c \cdot K_{m-2}(q_1, \dots, q_{m-2} | p_2, \dots, p_{m-2}) \cdot K_{n-m}(q_{m+1}, \dots, q_n | p_{m+2}, \dots, p_n).$$

Доведення. Достатньо розкласти відповідний континуанту

$$K_n(q_1, \dots, q_{m-1}, q_m + c, q_{m+1}, \dots, q_n | p_2, \dots, p_n)$$

парaперманент за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(m)$ та відповідно згрупувати утворені доданки.

Доведення тотожності (3.7.10) аналогічне доведенню рівності (3.7.9). □

Зауваження 3.7.3. *Якщо у рівності (3.7.9)*

$$p_2 = p_3 = \ldots = p_n = 1,$$

то вона перейде у рівність із п. 6.30 (див. [21], стор. 595).

Доведемо ще одну тотожність, при допомозі якої можна понизити порядок континуанта і цим полегшити обчислення значень раціональних вкорочень нескінченних ланцюгових дробів. Для цього розкладемо парaперманент

$$K_{m+n}(q_1, \dots, q_{m+n} | p_2, \dots, p_{m+n}) =$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 &&&&&&&& \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 &&&&&&& \\ \vdots & \dots & \ddots &&&&&& \\ 0 & 0 & \dots & q_m &&&&& \\ 0 & 0 & \dots & \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} & q_{m+1} &&&& \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} & q_{m+2} &&& \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots && \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{m+n-1} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{m+n}}{q_{m+n}} & q_{m+n} \end{bmatrix}_{m+n}$$

за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(m+1)$. Якщо, відповідним чином, згрупувати отримані доданки розкладу, то отримаємо рівність

$$K_{m+n}(q_1,\dots,q_{m+n}|p_2,\dots,p_{m+n})=p_{m+1}K_{m-1}(q_1,\dots,q_{m-1}|p_2,\dots,p_{m-1})\times \quad (3.7.11)$$

$$\times K_{n-1}(q_{m+2},\dots,q_{m+n}|p_{m+3},\dots,p_{m+n})+$$

$$+K_m(q_1,\dots,q_m|p_2,\dots,p_m)\cdot K_n(q_{m+1},\dots,q_{m+n}|p_{m+2},\dots,p_{m+n}).$$

Якщо у рівності (3.7.11)

$$p_2=p_3=\dots=p_{m+n}=1,$$

то вона перейде в рівність (6.133) із [21].

Таким чином, при допомозі параперманентів можна узагальнити відомі властивості континуантів, причому доведення цих властивостей суттєво спрощуються.

Якщо в континуанті $K_n(q_1,\dots,q_n)$

$$q_1=q_2=\dots=q_n=z,$$

то на основі рівності (6.129) (див. [21], стор. 335.), отримаємо по-

ліноми Фібоначчі:

$$\begin{bmatrix} z &&&& \\ \frac{1}{z} & z &&& \\ \vdots & \dots & \ddots && \\ 0 & 0 & \dots & z & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{z} & z \end{bmatrix}_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i}z^{n-2i}.$$

Якщо у останній рівності $z=1$, то отримаємо рівність ([21], стор. 335.)

$$\begin{bmatrix} 1 &&&& \\ 1 & 1 &&& \\ \vdots & \dots & \ddots && \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n-i}{i} = F_{n+1},$$

тут F_i — i–те число Фібоначчі.

Континуанти, а разом з ними і параперманенти мають тісний зв'язок із деревами Штерна–Броко (див. [148], [96] та теорему Халфена [119]).

3.7.1 Перетворення ланцюгових та рекурентних дробів

1. При допомозі простих перетворень нескінченних ланцюгових дробів, завжди можна добитися того, щоб знаменники q_i, $i=1,2,\dots$ всіх ланок нескінченного ланцюгового дробу були додатніми. Це випливає із того факту, що при множенні чисельника та знаменника фрагмента

$$\frac{p_n}{q_n+p_{n+1}}$$

нескінченного ланцюгового дробу на довільне відмінне від нуля число s_n, значення ланцюгового дробу не міняється.

Зауважимо, що виділеному вище фрагменту нескінченного ланцюгового дробу, в наступному еквівалентному заданні нескінченних ланцюгових дробів при допомозі парапермапентів, відповідають вписані прямокутні таблиці $T(q_n)$.

$$q_0+\cfrac{p_1}{q_1+\cfrac{p_2}{q_2+\cfrac{p_3}{q_3+\ddots\cfrac{s\cdot p_n}{s\cdot q_n+\cfrac{s\cdot p_{n+1}}{q_{n+1}+\ddots}}}}}=$$

$$=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
q_0 & & & & & & & \\
\frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & & \\
0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s\cdot p_n}{s\cdot q_n} & s\cdot q_n & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{s\cdot p_{n+1}}{q_{n+1}} & q_{n+1} & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty .$$

Рівність правої та лівої частини останньої тотожності досягається за рахунок того, що всі елементи $(n+1)$–го стовпця парапер-манента чисельника та n–го стовпця параперманента знаменника дробу кратні s і цей множник може бути винесений за знак параперманентів цього дробу.

Таким чином, справедлива рівність

$$q_0+\frac{p_1}{q_1}\,\frac{p_2}{+q_2}+\dots+\frac{p_n}{q_n}+\dots=$$

$$=\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_0 & & & & & & \\
\frac{s_1p_1}{s_1q_1} & s_1q_1 & & & & & \\
0 & \frac{s_1s_2p_2}{s_2q_2} & s_2q_2 & & & & \\
0 & 0 & \frac{s_2s_3p_3}{s_3q_3} & s_3q_3 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1}q_{n-1} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s_{n-1}s_np_n}{s_nq_n} & s_nq_n \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\ \ddots
\end{array}\right]_\infty . \tag{3.7.12}$$

2. При допомозі рівності (3.7.12) нескінченний ланцюговий дріб вигляду

$$q_0+\frac{p_1}{q_1}\,\frac{p_2}{+q_2}+\dots+\frac{p_n}{q_n}+\dots$$

можна звести до *звичайного нескінченного ланцюгового дробу* вигляду

$$\alpha_0+\frac{1}{\alpha_1}\,\frac{1}{+\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}+\dots=\left[\begin{array}{c|ccccc}
\alpha_0 & & & & & \\
\frac{1}{\alpha_1} & \alpha_1 & & & & \\
0 & \frac{1}{\alpha_2} & \alpha_2 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty . \tag{3.7.13}$$

З цією метою із системи рівнянь

$$s_1p_1=s_1s_2p_2=\ldots=s_{n-1}s_np_n=1$$

знаходимо $s_i,\ i=1,2,\ldots$.

Легко бачити, що

$$s_1=\frac{1}{p_1},\ s_2=\frac{p_1}{p_2},\ s_3=\frac{p_2}{p_1p_3},\ s_4=\frac{p_1p_3}{p_2p_4},\ldots,$$

$$s_{2m-1}=\frac{p_2p_4\cdot\ldots\cdot p_{2m-2}}{p_1p_3\cdot\ldots\cdot p_{2m-1}},\ s_{2m}=\frac{p_1p_3\cdot\ldots\cdot p_{2m-1}}{p_2p_4\cdot\ldots\cdot p_{2m}}.$$

Таким чином, знаменники ланок звичайного ланцюгового дробу (3.7.13) задаються рівностями

$$\alpha_0 = q_0,\ \alpha_{2m-1} = q_{2m-1}\frac{p_2 p_4 \cdot \ldots \cdot p_{2m-2}}{p_1 p_3 \cdot \ldots \cdot p_{2m-1}},\ \alpha_{2m} = q_{2m}\frac{p_1 p_3 \cdot \ldots \cdot p_{2m-1}}{p_2 p_4 \cdot \ldots \cdot p_{2m}},$$

тут $m = 1, 2, \ldots$.

Зауважимо, що раціональні вкорочення звичайних нескінченних ланцюгових дробів задовольняють рекурентні рівняння

$$\begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2},\ n \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

із початковими умовами (3.7.4).

Слід також відзначити, що більшість авторів обмежуються розглядом лише звичайних нескінченних ланцюгових дробів[8]. Такий вибір виправдовується тим, що кожен нескінченний ланцюговий дріб може бути зведений до звичайного нескінченного ланцюгового дробу. Однак, таке зведення часто ускладнює дріб.

3. У 1775 році Даниїлом Бернуллі було розв'язано наступну задачу [94]: Побудувати нескінченний ланцюговий дріб, з наперед заданою послідовністю раціональних наближень

$$\frac{P_0}{Q_0} = u_0, \frac{P_1}{Q_1} = u_1, \frac{P_2}{Q_2} = u_2, \ldots.$$

Для простоти та однозначності розв'язання задачі вважатимемо, що знаменники всіх раціональних наближень нескінченного ланцюгового дробу дорівнюють 1. На основі задачі (2.4.8), робимо висновок, що якщо $q_1 = 1$ і $q_i + p_i = 1$, то $Q_n = 1$.

Знайдемо p_n та q_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ із рівностей

$$q_0 = u_0$$
$$q_0 q_1 + p_1 = u_1$$
$$q_n u_{n-1} + p_n u_{n-2} = u_n,$$

[8]Таку точку зору, зокрема, відстоював Лагранж [125].

з врахуванням умов $q_1 = 1$ і $q_i + p_i = 1$. Маємо

$$p_1 = u_1 - u_0,\ p_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n-2} - u_{n-1}},\ q_n = 1 - p_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n-1} - u_{n-2}}.$$

Таким чином, шуканий нескінченний ланцюговий дріб має вигляд

$$u_0 + \frac{u_1 - u_0}{1} + \frac{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_0}}{\frac{u_2-u_0}{u_1-u_0}} + \frac{\frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}}{\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}} + \ldots + \frac{\frac{u_{n-1}-u_n}{u_{n-1}-u_{n-2}}}{\frac{u_n-u_{n-2}}{u_{n-1}-u_{n-2}}} + \ldots.$$

Спростимо останній ланцюговий дріб, при допомозі перетворення типу (3.7.12), до нескінченного ланцюгового дробу вигляду

$$u_0 + \frac{u_1 - u_0}{1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_0} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{(u_1 - u_0)(u_2 - u_3)}{u_3 - u_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots+} \frac{(u_{n-2} - u_{n-3})(u_{n-1} - u_n)}{u_n - u_{n-2}} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots}. \tag{3.7.14}$$

Зауважимо, що перетворення, при допомозі яких ми отримали нескінченний ланцюговий дріб (3.7.14), вимагають того, щоб три сусідні раціональні наближення u_{i-1}, u_i, u_{i+1} до нескінченного ланцюгового дробу були не рівними між собою.

Таким чином, доведено наступне

Твердження 3.7.3. *Якщо*

$$\frac{P_0}{Q_0} = u_0, \frac{P_1}{Q_1} = u_1, \frac{P_2}{Q_2} = u_2, \ldots$$

— раціональні вкорочення нескінченного ланцюгового дробу (3.7.1), причому три сусідні значення цих наближень різні між собою, то, при виконанні рівностей

$$q_1 = 1,\ q_i + p_i = 1, i = 2, 3, \ldots \tag{3.7.15}$$

виконується рівність

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{p_2}{q_2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots+} \frac{p_n}{q_n} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots} =$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccccc}
u_0 & & & & & \\
\frac{u_1-u_0}{1} & 1 & & & & \\
0 & \frac{u_1-u_2}{u_2-u_0} & u_2 - u_0 & & & \\
0 & 0 & \frac{(u_1-u_0)(u_2-u_3)}{u_3-u_1} & u_3 - u_1 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{(u_2-u_1)(u_3-u_4)}{u_4-u_2} & u_4 - u_2 & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array} \right]_\infty \tag{3.7.16}
$$

Приклад 3.7.2. Побудуємо нескінченний ланцюговий дріб, значення якого дорівнює e. З цією метою виберемо наступні значення раціональних наближень:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1 + \frac{1}{1!},\ u_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!},\ \ldots, u_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}, \ldots.$$

Підставимо ці значення у формулу (3.7.14), тоді отримаємо

$$1+\frac{1}{1} \,+\, \frac{-\frac{1}{2!}}{1+\frac{1}{2!}} \,+\, \frac{1\cdot\left(-\frac{1}{3!}\right)}{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}} \,+\, \frac{\frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4!}\right)}{\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}} \,+\ldots+\, \frac{\frac{1}{(n-2)!}\left(-\frac{1}{n!}\right)}{\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}} \,+\ldots.$$

Використаємо перетворення типу (3.7.12), перемножуючи чисельник та знаменник n–ої та чисельник $(n+1)$– –ої ланки останнього ланцюгового дробу на $n!$, тоді отримаємо наступний нескінченний ланцюговий дріб:

$$e = 1 + \frac{1}{1\,+}\,\frac{-1}{3\,+}\,\frac{-2}{4\,+}\,\frac{-3}{5\,+\ldots+}\,\frac{-(n-1)}{n+1\,+\ldots} =$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccccc}
1 & & & & & \\
\frac{1}{1} & 1 & & & & \\
0 & \frac{-1}{3} & 3 & & & \\
0 & 0 & \frac{-2}{4} & 4 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{-3}{5} & 5 & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array} \right]_\infty .
$$

3.7.2 Формальні степеневі ряди та формальні ланцюгові дроби

Використовуючи твердження 2.4.1 (див. стор. 90), нескінченний ланцюговий дріб легко подати у вигляді нескінченного ряду.

Твердження 3.7.4. (див. [78], стор. 269-270) *Справедливі рівності:*

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1\,+}\,\frac{p_2}{q_2\,+\ldots+}\,\frac{p_n}{q_n\,+\ldots} =$$

$$= q_0 + \frac{p_1}{Q_0Q_1} - \frac{p_1p_2}{Q_1Q_2} + \frac{p_1p_2p_3}{Q_2Q_3} - \ldots + (-1)^{i-1}\frac{p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{Q_{n-1}Q_n} + \ldots =$$

$$
= \left[\begin{array}{c|cccccc}
q_0 & & & & & & \\
\frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & \\
0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array} \right]_\infty , \tag{3.7.17}
$$

де Q_i — знаменник i-того раціонального вкорочення даного нескінченного ланцюгового дробу.

Доведення. Знаходимо різниці раціональних вкорочень даного ланцюгового дробу, при цьому скористаємось твердженням 2.4.1 (див. стор. 90):

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n}{Q_{n-1}Q_n} = (-1)^{n-1}\frac{p_1p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{Q_{n-1}Q_n},$$

де $n = 1, 2, \ldots$. Додаючи ці різниці, отримаємо рівність (3.7.17). □

Перетворимо нескінченний знакозмінний ряд у нескінченний ланцюговий дріб.

Твердження 3.7.5. ([78], стор. 270-273) *Справедлива рівність:*

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots =$$

$$= \frac{a_1}{1 +} \frac{a_2}{a_1 - a_2 +} \frac{a_1 a_3}{a_2 - a_3 +} \frac{a_2 a_4}{a_3 - a_4 + \ldots +} \frac{a_{n-2}a_n}{a_{n-1} - a_n + \ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{a_1}{1} & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{a_2}{a_1-a_2} & a_1 - a_2 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{a_1a_3}{a_2-a_3} & a_2 - a_3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_2a_4}{a_3-a_4} & a_3 - a_4 & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty}. \qquad (3.7.18)$$

Доведення. Для доведення цього твердження, знайдемо p_i та q_i із рівностей:

$$a_1 = \frac{p_1}{Q_0 Q_1},\ a_2 = \frac{p_1 p_2}{Q_1 Q_2}, \ldots, a_n = \frac{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{Q_{n-1}Q_n}, \ldots.$$

Вважатимемо, що в цих рівностях a_i, $i = 1, 2, \ldots$ — цілі числа, тому припустимо, що $Q_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$, (див. приклад 2.4.8 на стор. 104), тобто виконуються рівності

$$q_1 = 1,\ q_i + p_i = 1,\ i = 2, 3, \ldots.$$

Отже,

$$p_1 = a_1,\ p_2 = \frac{a_2}{a_1},\ p_3 = \frac{a_3}{a_2}, \ldots, p_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \ldots,$$

а відповідні значення q_i, $i = 2, 3, \ldots$ відповідно дорівнюють

$$1 - p_i = 1 - \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1}},\ i = 2, 3, \ldots.$$

Таким чином, маємо формальну рівність

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots =$$

$$= \frac{a_1}{1} + \frac{\frac{a_2}{a_1}}{\frac{a_1-a_2}{a_1}} + \frac{\frac{a_3}{a_2}}{\frac{a_2-a_3}{a_2}} + \ldots + \frac{\frac{a_n}{a_{n-1}}}{\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}}} + \ldots$$

Використаємо перетворення типу (3.7.12), перемножуючи чисельник та знаменник n–ої та чисельник $(n+1)$–ої ланки останнього ланцюгового дробу на a_{n-1}, тоді отримаємо нескінченний ланцюговий дріб вигляду (3.7.18). □

Наслідок 3.7.2.1. *Справедливі рівності:*

$$a_0 + a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n x^n + \ldots =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 x}{1 +} \frac{a_2 x}{a_1 - a_2 x +} \frac{a_1 a_3 x}{a_2 - a_3 x +} \frac{a_2 a_4 x}{a_3 - a_4 x + \ldots +} \frac{a_{n-2}a_n x}{a_{n-1} - a_n x + \ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc} a_0 & & & & & & \\ \frac{a_1 x}{1} & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{a_2 x}{a_1-a_2 x} & a_1 - a_2 x & & & & \\ 0 & 0 & \frac{a_1a_3 x}{a_2-a_3 x} & a_2 - a_3 x & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_2a_4 x}{a_3-a_4 x} & a_3 - a_4 x & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty}. \qquad (3.7.19)$$

Доведення. Доведення цього наслідку можна провести аналогічно до доведення твердження 3.7.5. Отже, замінюючи в цьому твердженні a_n на $a_n x^n$, отримаємо нескінченний ланцюговий дріб

$$\frac{a_1 x}{1 +} \frac{a_2 x^2}{a_1 x - a_2 x^2 +} \frac{a_1 a_3 x^4}{a_2 x^2 - a_3 x^3 +} \frac{a_2 a_4 x^6}{a_3 x^3 - a_4 x^4 + \ldots +} \frac{a_{n-2}a_n x^{2n-2}}{a_{n-1}x^{n-1} - a_n x^n + \ldots}.$$

Застосуємо відповідне перетворення типу (3.7.12) до останнього нескінченного ланцюгового дробу та додамо до обох частин утвореної рівності a_0, тоді отримаємо рівність (3.7.19). □

Відзначимо, що після простих перетворень, рівність (3.7.19), можна звести до рівності вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots =$$

$$= a_0 + \frac{a_1 x}{1}\,\frac{a_2 x}{-\,a_1 + a_2 x}\,\frac{a_1 a_3 x}{-\,a_2 + a_3 x}\,\frac{a_2 a_4 x}{-\,a_3 + a_4 x}\,\frac{}{-\ldots-}\,\frac{a_{n-2} a_n x}{a_{n-1} + a_n x}\,\frac{}{-\ldots}. \tag{3.7.20}$$

Проілюструємо застосування рівності (3.7.20) до подання функції $f(x) = arctgx$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу.

Приклад 3.7.3. ([88], стор. 28.)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{1}\,\frac{\frac{1}{3}x^2}{+\,1 - \frac{1}{3}x^2}\,+\,\frac{\frac{3}{5}x^2}{1 - \frac{3}{5}x^2}\,+\ldots+\,\frac{\frac{2n-1}{2n+1}x^2}{1 - \frac{2n-1}{2n+1}x^2}\,+\ldots =$$

$$= \frac{x}{1}\,\frac{x^2}{+\,3 - x^2}\,\frac{9x^2}{+\,5 - 3x^2}\,\frac{}{+\ldots+}\,\frac{(2n-1)^2 x^2}{2n + 1 - (2n-1)x^2}\,\frac{}{+\ldots}.$$

При $x = 1$ отримаємо рівності:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}\,\frac{1}{+\,2}\,\frac{3^2}{+\,2}\,\frac{5^2}{+\,2}\,\frac{7^2}{+\,2}\,\frac{}{+\ldots+}\,\frac{(2n-1)^2}{2}\,\frac{}{+\ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{1} & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{3^2}{2} & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5^2}{2} & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7^2}{2} & 2 & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_{\infty}.$$

В багатьох випадках корисним виявляється і наступне

Твердження 3.7.6. ([78], стор. 273) *Справедливі рівності:*

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{a_n} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{a_1}\,\frac{a_1^2}{+\,a_2 - a_1}\,\frac{a_2^2}{+\,a_3 - a_2}\,\frac{a_3^2}{+\,a_4 - a_3}\,\frac{}{+\ldots+}\,\frac{a_{n-1}^2}{a_n - a_{n-1}}\,\frac{}{+\ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ \frac{1}{a_1} & a_1 & & & & \\ 0 & \frac{a_1^2}{a_2 - a_1} & a_2 - a_1 & & & \\ 0 & 0 & \frac{a_2^2}{a_3 - a_2} & a_3 - a_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_3^2}{a_4 - a_3} & a_4 - a_3 & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_{\infty}. \tag{3.7.21}$$

Доведення. цього твердження аналогічне до твердження 3.7.5.

Легко показати, що

$$p_1 = \frac{1}{a_1},\ p_2 = \frac{a_1}{a_2},\ p_3 = \frac{a_2}{a_3},\ \ldots, p_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \ldots$$

і

$$q_2 = \frac{a_2 - a_1}{a_2},\ q_3 = \frac{a_3 - a_2}{a_3}, \ldots, q_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}, \ldots,$$

тоді шуканий ланцюговий дріб має вигляд

$$\frac{\frac{1}{a_1}}{1}\,\frac{\frac{a_1}{a_2}}{+\,\frac{a_2 - a_1}{a_2}}\,+\,\frac{\frac{a_2}{a_3}}{\frac{a_3 - a_2}{a_3}}\,+\ldots+\,\frac{\frac{a_{n-1}}{a_n}}{\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}}\,+\ldots.$$

Після відповідного перетворення типу (3.7.12), ми отримаємо нескінченний ланцюговий дріб правої частини рівності (3.7.21). □

Легко показати справедливість наступного наслідку.

Наслідок 3.7.2.2. *Справедлива формальна рівність*

$$\frac{x}{a_1} - \frac{x^2}{a_2} + \frac{x^3}{a_3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{a_n} + \ldots =$$

$$= \frac{x}{a_1}\,\frac{a_1^2 x}{+\,a_2 - a_1 x}\,\frac{a_2^2 x}{+\,a_3 - a_2 x}\,\frac{}{+\ldots+}\,\frac{a_{n-1}^2 x}{a_n - a_{n-1} x}\,\frac{}{+\ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{x}{a_1} & a_1 & & & & & \\ 0 & \frac{a_1^2 x}{a_2 - a_1 x} & a_2 - a_1 x & & & & \\ 0 & 0 & \frac{a_2^2 x}{a_3 - a_2 x} & a_3 - a_2 x & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_3^2 x}{a_4 - a_3 x} & a_4 - a_3 x & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty} . \tag{3.7.22}$$

Приклад 3.7.4. Відомо, що

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \ldots,$$

тому, використовуючи наслідок 3.7.2.2, отримаємо наступне зображення функції $f(x) = \ln(1+x)$ у вигляді нескінченного ланцюгового дробу

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} {}_{+} \frac{1^2 x}{2 - 1x} {}_{+} \frac{2^2 x}{3 - 2x} {}_{+\ldots+} \frac{(n-1)^2 x}{n - (n-1)x} {}_{+\ldots} .$$

При $x = 1$ остання рівність матиме вигляд (див. [78], стор. 274.)

$$\ln 2 = \frac{1}{1} {}_{+} \frac{1^2}{1} {}_{+} \frac{2^2}{1} {}_{+\ldots+} \frac{n^2}{1} {}_{+\ldots} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ \frac{1}{1} & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{1^2}{1} & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{2^2}{1} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3^2}{1} & 1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \end{array}\right]_{\infty} .$$

3.7.3 Періодичні ланцюгові дроби

Серед нескінченних ланцюгових дробів особливе місце відводиться періодичним ланцюговим дробам.

Означення 3.7.2. *Нескінченний ланцюговий дріб*

$$\delta = q_0 + \frac{p_1}{q_1} {}_{+} \frac{p_2}{q_2} {}_{+\cdots+} \frac{p_n}{q_n} {}_{+\cdots} , \tag{3.7.23}$$

елементи якого задовольняють умови

$$p_{rk+m} = p_m,\ q_{rk+m} = q_m,\ m = 1, 2, \ldots, k,\ \ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7.24}$$

називають періодичним ланцюговим дробом з періодом k.

Розглянемо, наприклад, звичайний періодичний ланцюговий дріб із періодом $k = 3$ (див. [78], стор. 279-282).

Нехай

$$x = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_1 + \ldots}}}}}}},$$

тоді рівність

$$x = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + x}}}$$

зводиться до квадратного рівняння

$$(q_1 q_2 + 1)x^2 = -(q_1 q_2 q_3 + q_1 - q_2 + q_3)x + q_2 q_3 + 1,$$

причому

$$x = \frac{-q_1 q_2 q_3 - q_1 + q_2 - q_3 + \sqrt{(q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_2 + q_3)^2 + 4}}{2(q_1 q_2 + 1)} .$$

Легко довести, що довільний періодичний ланцюговий дріб зображує деяку квадратичну ірраціональність і, навпаки, довільна квадратична ірраціональність зображується періодичним ланцюговим дробом (див. [87], стор. 62-64).

Розглянемо періодичний ланцюговий дріб із періодом $k = 1$. Розкладемо параперманент чисельника раціонального вкорочення

$$\frac{P_n}{Q_n} = \left[\begin{array}{c|ccccc} q & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_{n+1}$$

періодичного ланцюгового дробу

$$q + \frac{p}{q +} \frac{p}{q + \dots +} \frac{p}{q + \dots} \tag{3.7.25}$$

за елементами першого стовпця. При цьому отримаємо рівність

$$\frac{P_n}{Q_n} = q + \frac{p}{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}. \tag{3.7.26}$$

Нехай

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = x,$$

тоді рівність (3.7.26) прийме вигляд

$$x = q + \frac{p}{x}$$

і

$$x^2 = qx + p;$$

звідси

$$x = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4p}}{2}.$$

Таким чином, при $q = 2$, періодичний ланцюговий дріб (3.7.25) зображуватиме ірраціональності $\sqrt{p+1}$.

Наступна теорема дає зручний алгоритм знаходження значень раціональних вкорочень періодичних ланцюгових дробів.

Теорема 3.7.3. *Раціональне вкорочення*

$$\delta_r = q_0 + \mathop{K}_{i=1}^{rk}\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \tag{3.7.27}$$

періодичного ланцюгового дробу (3.7.23), з періодом $k \geqslant 2$, елементи якого задовольняють умови (3.7.24), дорівнює значенню виразу

$$q_0 + p_1 \cdot \frac{B_{r-1}}{A_r},$$

в якому A_r і B_{r-1} визначаються із рекурентних рівностей

$$A_r = p_1\alpha B_{r-2} + \beta A_{r-1}, \tag{3.7.28}$$

$$B_{r-1} = p_1\gamma B_{r-2} + \lambda A_{r-1}, \tag{3.7.29}$$

де

$$\alpha = \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & q_{k-2} & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} & q_{k-1} \end{bmatrix}_{k-1}, \quad \beta = \begin{bmatrix} q_1 & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & q_{k-1} & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_{k}, \tag{3.7.30}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} q_2 & & & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & q_{k-2} & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} & q_{k-1} \end{bmatrix}_{k-2}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} q_2 & & & & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & q_{k-1} & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_{k-1}, \tag{3.7.31}$$

причому якщо $k = 2$, то вважаємо, що $\gamma = 1$.

Доведення. При $n = rk$ чисельник і знаменник n-го раціонального вкорочення періодичного ланцюгового дробу (3.7.23), з періодом $k \geqslant 2$, елементи якого задовольняють умови (3.7.24), відповідно мають вигляд:

$$P_{rk} = \left[\begin{array}{cccccccccc}
q_0 &&&&&&&&& \\
\frac{p_1}{q_1} & q_1 &&&&&&&& \\
0 & \frac{p_2}{q_2} & q_2 &&&&&&& \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ddots &&&&&& \\
0 & 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} &&&&& \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k &&&& \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{p_1}{q_1} & q_1 &&& \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots && \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k
\end{array}\right]_{rk+1}, \tag{3.7.32}$$

$$Q_{rk} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
q_1 &&&&&&&& \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 &&&&&&& \\
\vdots & \ldots & \ddots &&&&&& \\
0 & 0 & \ldots & q_{k-1} &&&&& \\
0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k &&&& \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{p_1}{q_1} & q_1 &&& \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots && \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} & \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k
\end{array}\right]_{rk}. \tag{3.7.33}$$

Позначимо параперманент, який утворюється із параперманента (3.7.32) в результаті викреслювання першого стовпця, через A_r, а параперманент, що утворюється в результаті викреслювання перших двох стовпців, — через B_{r-1} (в обох випадках індекс вказує на кількість повних періодів що містять параперманенти).

Розкладемо параперманент (3.7.32) за елементами першого стовпця, отримаємо рівність:

$$P_{rk} = q_0 A_r + p_1 B_{r-1}. \tag{3.7.34}$$

Розкладемо параперманент A_r за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(k+1)$, тоді отримаємо рекурсію (3.7.28). Аналогічно поступимо із параперманентом B_{r-1}, розкладаючи його за елементами таблиці $T(k)$, отримаємо рекурсію (3.7.29).

Позаяк $Q_{rk} = A_r$, то, враховуючи (3.7.34), робимо висновок, що заданий періодичний ланцюговий дріб є зображенням дробу

$$\frac{P_{rk}}{Q_{rk}} = \frac{q_0 A_r + p_1 B_{r-1}}{A_r} = q_0 + p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}.$$

□

Теорема 3.7.4. *Якщо для періодичного ланцюгового дробу (3.7.23), з періодом $k \geqslant 2$, елементи якого задовольняють умови (3.7.24) і є невід'ємними дійсними числами, виконується нерівність*

$$\omega = \frac{p_1}{\beta^2}|\beta\gamma - \alpha\lambda| < 1, \tag{3.7.35}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ визначаються із рівностей (3.7.30), (3.7.31), то послідовність

$$\delta_r = q_0 + p_1 \cdot \frac{B_{r-1}}{A_r}$$

збігається до δ, причому справедлива оцінка похибки

$$|\delta - \delta_r| < \sigma \frac{\omega^r}{1-\omega}, \tag{3.7.36}$$

$$\sigma = \frac{p_1 \lambda \beta}{p_1 \lambda \alpha + \beta^2}. \tag{3.7.37}$$

Доведення. Знайдемо верхню оцінку модуля різниці $|\delta_s - \delta_r|$. Згідно з теоремою 3.7.3 маємо

$$|\delta_s - \delta_r| = p_1 \left| \frac{B_{s-1}}{A_s} - \frac{B_{r-1}}{A_r} \right| = p_1 \left| \frac{p_1 \gamma \frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \lambda}{p_1 \alpha \frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \beta} - \frac{p_1 \gamma \frac{B_{r-2}}{A_{r-1}} + \lambda}{p_1 \alpha \frac{B_{r-2}}{A_{r-1}} + \beta} \right| =$$

$$= p_1 \left| \frac{\gamma \delta_{s-1} + \lambda - q_0 \gamma}{\alpha \delta_{s-1} + \beta - q_0 \alpha} - \frac{\gamma \delta_{r-1} + \lambda - q_0 \gamma}{\alpha \delta_{r-1} + \beta - q_0 \alpha} \right| =$$

$$= p_1 \left| \frac{(\gamma\beta - \alpha\lambda)\cdot(\delta_{s-1} - \delta_{r-1})}{\left(p_1\alpha\frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \beta\right)\cdot\left(p_1\alpha\frac{B_{r-2}}{A_{r-1}} + \beta\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_1}{\beta^2}|\gamma\beta - \alpha\lambda|\cdot|\delta_{s-1} - \delta_{r-1}| = \omega\cdot|\delta_{s-1} - \delta_{r-1}|.$$

Таким чином,

$$|\delta_s - \delta_r| \leqslant \omega^{r-1}|\delta_{s-r+1} - \delta_1| < \frac{\omega^{r-1}}{1-\omega}\cdot|\delta_2 - \delta_1|,$$

але

$$|\delta_2 - \delta_1| = \omega\cdot\frac{p_1\lambda\beta}{p_1\lambda\alpha + \beta^2},$$

тому, переходячи до границі при $s \to \infty$ і, враховуючи (3.7.35), отримаємо оцінку (3.7.36). □

Приклад 3.7.5. Обчислимо наближені значення величини $\sqrt{n}$ при допомозі раціональних вкорочень періодичних ланцюгових дробів із періодом $k = 3$. Розв'яжемо рівняння

$$x = \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + x}}}.$$

Маємо

$$x_{1,2} = \frac{-(q_1q_2q_3+q_1p_3+q_3p_2-q_2p_1)\pm\sqrt{(q_1q_2q_3+q_1p_3+q_3p_2+q_2p_1)^2+4p_1p_2p_3}}{2(q_1q_2+p_2)}$$

Нехай $q_i > 0,\ p_i > 0,\ i = 1,2,3$ і додатній корінь цього рівняння дорівнює $\sqrt{n}$, тоді знайдемо $q_i,\ p_i,\ i = 1,2,3$ із умов:

$$\begin{cases} q_1q_2q_3 + q_1p_3 + q_3p_2 - q_2p_1 = 0, \\ (q_1q_2q_3 + q_1p_3 + q_3p_2 + q_2p_1)^2 + 4p_1p_2p_3 = nt^2, \\ 2(q_1q_2 + p_2) = t. \end{cases} \tag{3.7.38}$$

Обчислимо $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ із рівностей (3.7.30), (3.7.31):

$$\alpha = \begin{bmatrix} q_1 & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 \end{bmatrix} = q_1q_2+p_2,\quad \beta = \begin{bmatrix} q_1 & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\ 0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 \end{bmatrix} = q_1q_2q_3+q_3p_2+q_1p_3,$$

$$\gamma = q_2,\quad \lambda = \begin{bmatrix} q_2 & \\ \frac{p_3}{q_3} & q_3 \end{bmatrix} = q_2q_3 + p_3.$$

Отже, рекурсії (3.7.28), (3.7.29) матимуть відповідно вигляд:

$$B_{r-1} = p_1q_2B_{r-2} + (q_2q_3 + p_3)A_{r-1},$$

$$A_r = p_1(q_1q_2 + p_3)B_{r-2} + (q_1q_2q_3 + q_3p_2 + q_1p_3)A_{r-1},$$

і послідовність

$$\delta_r = p_1\frac{B_{r-1}}{A_r}$$

збігатиметься до $\sqrt{n}$. При цьому, чим менше значення константи ω, тим скоріше послідовність $\{\delta_i\},\ i = 1,2,\ldots$ збігатиметься до $\sqrt{n}$.

Нехай $n = 2$. Розглянемо кілька періодичних ланцюгових дробів із періодом 3, елементи яких задовольняють умови *(3.7.38)*.

№	q_1	q_2	q_3	p_1	p_2	p_3	$B_{r-1} = p_1\gamma B_{r-2} + \lambda A_{r-1}$ $A_r = p_1\alpha B_{r-2} + \beta A_{r-1}$	$\cdots$ $\cdots$
1.	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*1*	$B_{r-1} = 4B_{r-2} + 3A_{r-1}$ $A_r = 6B_{r-2} + 4A_{r-1}$	$\cdots$ $\cdots$
2.	*1*	*3*	*1*	*4*	*7*	*2*	$B_{r-1} = 12B_{r-2} + 5A_{r-1}$ $A_r = 40B_{r-2} + 12A_{r-1}$	$\cdots$ $\cdots$
3.	*2*	*7*	*1*	*3*	*1*	*3*	$B_{r-1} = 21B_{r-2} + 10A_{r-1}$ $A_r = 45B_{r-2} + 21A_{r-1}$	$\cdots$ $\cdots$

$\cdots$ $\cdots$	B_0 A_1	ω	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
$\cdots$ $\cdots$	*3* *4*	0.125	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{816}{577}$
$\cdots$ $\cdots$	*5* *12*	0.3(8)	$\frac{5}{3}$	$\frac{60}{43}$	$\frac{395}{279}$	$\frac{5160}{3649}$
$\cdots$ $\cdots$	*10* *21*	0.0204	$\frac{10}{7}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{1970}{1393}$	$\frac{27720}{19601}$

Отже, послідовність $\{\delta_i\},\ i = 1, 2, \ldots$ в наведених вище прикладах найшвидше збігається до $\sqrt{2}$ у третьому випадку. Так, вже при четвертій ітерації отримуємо наближення, в якому вісім вірних знаків після коми, а значення похибки дорівнює $1.444718E-07$.

Теорема 3.7.5. *Значення раціонального вкорочення*

$$\delta_r^* = q_0^* + \frac{p_1^*}{q_1^*} {}_{+\cdots+} \frac{p_s^*}{q_s^*} + \underbrace{\frac{p_1}{q_1} {}_{+\cdots+} \frac{p_k}{q_k}}_{r}, \qquad (3.7.39)$$

дорівнює значенню виразу

$$q_0^* + p_1^* \frac{B}{A},$$

в якому

$$A = \varphi A_r + \varepsilon p_1 B_{r-1}, \qquad (3.7.40)$$

$$B = \psi A_r + \tau p_1 B_{r-1}, \qquad (3.7.41)$$

де

$$\varphi = \begin{bmatrix} q_1^* & & & & \\ \frac{p_2^*}{q_2^*} & q_2^* & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & q_{s-1}^* & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{p_s^*}{q_s^*} & q_s^* \end{bmatrix}_s, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} q_1^* & & & & \\ \frac{p_2^*}{q_2^*} & q_2^* & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & q_{s-2}^* & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{p_{s-1}^*}{q_{s-1}^*} & q_{s-1}^* \end{bmatrix}_{s-1}, \qquad (3.7.42)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} q_2^* & & & & \\ \frac{p_3^*}{q_3^*} & q_3^* & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & q_{s-1}^* & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{p_s^*}{q_s^*} & q_s^* \end{bmatrix}_{s-1}, \quad \tau = \begin{bmatrix} q_2^* & & & & \\ \frac{p_3^*}{q_3^*} & q_3^* & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & q_{s-2}^* & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{p_{s-1}^*}{q_{s-1}^*} & q_{s-1}^* \end{bmatrix}_{s-2}, \qquad (3.7.43)$$

а A_r і B_{r-1} визначаються із рекурсій (3.7.28), (3.7.29). Якщо

$s = 2$, то вважатимемо, що $\tau = 1$.

Доведення. Для дробу (3.7.39) параперманенти P_{rk}^* і Q_{rk}^* аналогічні до параперманентів P_{rk} і Q_{rk}, що задаються рівностями (3.7.32), (3.7.33), матимуть вигляд:

$$P_{rk}^* = \begin{bmatrix} q_0^* & & & & & & & & & & & \\ \frac{p_1^*}{q_1^*} & q_1^* & & & & & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & q_{s-1}^* & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{p_s^*}{q_s^*} & q_s^* & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & q_{k-1} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \frac{p_k}{q_k} & q_k \end{bmatrix}_{rk+s+1} \qquad (3.7.44)$$

$$
Q_{rk}^{*}=\begin{bmatrix}
q_1^* \\
\frac{p_2^*}{q_2^*} & q_2^* \\
\vdots & \cdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & q_{s-1}^* \\
0 & 0 & \cdots & \frac{p_s^*}{q_s^*} & q_s^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{p_1}{q_1} & q_1 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{k-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_k}{q_k} & q_k \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & q_{k-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{p_k}{q_k} & q_k
\end{bmatrix}_{rk+s} \tag{3.7.45}
$$

Позначимо параперманент, який утворюється із параперманента (3.7.44) в результаті викреслювання першого стовпця через A, а параперманент, який утворюється із параперманента (3.7.45) в результаті викреслювання першого стовпця — через B. Тоді, розкладаючи перший параперманент за елементами першого стовпця, отримаємо рівність

$$P_{rk}^{*} = q_0^* A + p_1^* B,$$

яка із врахуванням рівності $Q_{rk}^{*} = A$ приведе до рівності

$$\delta_r^* = q_0^* + p_1^* \frac{B}{A}.$$

Позначимо параперманент, який утворюється із параперманента (3.7.44) в результаті викреслювання перших $(s+1)$ стовпців, через A_r (він вміщає r періодів дробу), а параперманент, який утворюється із параперманента A_r в результаті викреслювання першого стовпця — через B_{r-1}. Розкладемо параперманент A за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(s+1)$, враховуючи (3.7.42) і використовуючи теорему про неповний розклад параперманента за елементами $(s+1)$-го стовпця, тоді матимемо рівність (3.7.40).

Із параперманентом B зробимо аналогічні перетворення, розкладаємо його за елементами таблиці $T(s)$, враховуючи (3.7.43), при цьому отримаємо рівність (3.7.41).

Позаяк параперманенти A_r і B_{r-1} співпадають із відповідними параперманентами теореми 3.7.3, то для обчислення їх значень можна користуватися рекурсіями (3.7.28), (3.7.29). □

Теорема 3.7.6. *Якщо для мішаного періодичного ланцюгового дробу*

$$\delta^* = q_0^* + \frac{p_1^*}{q_1^*}\underset{+\cdots+}{}\frac{p_s^*}{q_s^*}\underset{+}{}\frac{p_1}{q_1}\underset{+\cdots+}{}\frac{p_k}{q_k}\underset{+}{}\frac{p_1}{q_1}\underset{+\cdots+}{}\frac{p_k}{q_k}\underset{+\cdots}{}, \tag{3.7.46}$$

члени всіх ланок якого невід'ємні дійсні числа, виконується нерівність (3.7.35), в якій $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ визначаються із рівностей (3.7.30), (3.7.31), то послідовність

$$\delta_r^* = q_0^* + p_1^* \frac{B}{A}, \tag{3.7.47}$$

в якій A і B визначаються із рівностей (3.7.40), (3.7.41) збігається до

$$\delta^* = q_0^* + p_1^* \cdot \frac{\psi + \tau \cdot (\delta - q_0^*)}{\varphi + \varepsilon(\delta - q_0^*)}, \tag{3.7.48}$$

де δ — значення нескінченного ланцюгового періодичного дробу, причому справедлива оцінка похибки

$$|\delta^* - \delta_r^*| < \sigma\omega^* \cdot \frac{\omega^r}{1-\omega}, \tag{3.7.49}$$

де

$$\omega^* = \frac{p_1^*}{\varphi^2} \cdot |\varphi\tau - \psi\varepsilon|,$$

а ω і σ задаються відповідно виразами (3.7.35), (3.7.37).

Доведення. Доведемо, що послідовність (3.7.47) при умові (3.7.35) збігається до δ^*, що задається рівностями (3.7.46), (3.7.48). За теоремою 3.7.5 маємо:

$$\delta_r^* = q_0^* + p_1^* \cdot \frac{B}{A} = q_0^* + p_1^* \frac{\psi A_r + \tau p_1 B_{r-1}}{\varphi A_r + \varepsilon p_1 B_{r-1}},$$

тому

$$\delta_r^* = q_0^* + p_1^* \cdot \frac{\psi + \tau p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}}{\varphi + \varepsilon p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}} = q_0^* + p_1^* \frac{\psi + \tau \left(q_0^* + p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}\right) - \tau q_0^*}{\varphi + \varepsilon \left(q_0^* + p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}\right) - \varepsilon q_0^*},$$

але за теоремою (3.7.4) послідовність

$$\delta_r = q_0^* + p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}$$

при умові (3.7.35), при $r \to \infty$ збігається до δ, тому

$$\delta^* = \lim_{r \to \infty} \delta_r^* = q_0^* + p_1^* \frac{\psi + \tau(\delta - q_0^*)}{\varphi + \varepsilon(\delta - q_0^*)},$$

тобто виконується рівність (3.7.48).

Доведемо справедливість оцінки похибки (3.7.49). З цією метою, використовуючи теорему 3.7.5, оцінимо зверху модуль різниці $|\delta_p^* - \delta_r^*|$:

$$|\delta_p^* - \delta_r^*| = p_1^* \left| \frac{\psi A_p + \tau p_1 B_{p-1}}{\varphi A_p + \varepsilon p_1 B_{p-1}} - \frac{\psi A_r + \tau p_1 B_{r-1}}{\varphi A_r + \varepsilon p_1 B_{r-1}} \right| =$$

$$= p_1^* |\varphi\tau - \psi\varepsilon| \cdot \left| \frac{p_1 A_p B_{r-1} - p_1 A_r B_{p-1}}{(\varphi A_p + \varepsilon p_1 B_{p-1})(\varphi A_r + \varepsilon p_1 B_{r-1})} \right| =$$

$$= p_1^* |\varphi\tau - \psi\varepsilon| \cdot \left| \frac{p_1 \frac{B_{p-1}}{A_p} - p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}}{\left(\varphi + \varepsilon p_1 \frac{B_{p-1}}{A_p}\right)\left(\varphi + \varepsilon p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p_1^* |\varphi\tau - \psi\varepsilon|}{\varphi^2} \cdot \left| p_1 \frac{B_{p-1}}{A_p} - p_1 \frac{B_{r-1}}{A_r} \right| =$$
$$= \omega^* |\delta_p - \delta_r|.$$

Перейдемо в нерівності

$$|\delta_p^* - \delta_r^*| \leqslant \omega^* |\delta_p - \delta_r|$$

до границі при $p \to \infty$, тоді за теоремою 3.7.4 матимемо нерівності

$$|\delta^* - \delta_r^*| \leqslant \omega^* |\delta - \delta_r| < \sigma\omega^* \cdot \frac{\omega^r}{1 - \omega}.$$

□

3.8 Узагальнення ланцюгових дробів

"...кожне природне узагальнення будь-якої схеми спрощує її, позаяк воно зменшує число передумов, котрі потрібно брати до уваги. Важко відповісти на запитання, яке ... узагальнення є природним, а яке ні. Тут немає жодного критерію, крім критерію результативності нашого підходу..."

– Вейль Г., [14], стр. 7.

Сьогодні відомі різні підходи до узагальнення ланцюгових дробів. Історично першим таким підходом є матричний (Ойлер, Якобі, Пуанкаре, Брун, Перрон, Бернштейн, Пустильніков. Однак, матричні алгоритми відзначаються складністю за числом операцій.

Другий підхід базується на лінійних однорідних формах (Діріхле, Ерміт, Клейн, Мінковський, Вороний, Скубенко, Арнольд), проте він складний і важко програмується.

Ряд алгоритмів було запропоновано також наступними аналітиками: Гурвіцем та Секерешем (на основі узагальнень дробів Фарея), Скоробагатьком (гіллясті ланцюгові дроби), Сявавком (інтегральні ланцюгові дроби), тощо.

Цікавий алгоритм, запропонував Е.Фюрстенау [112], деякі достатні умови збіжності якого дослідив Б.В. Круковський [56]. Цей алгоритм був запропонований Фюрстенау ще в 1874 році, проте, незважаючи на його природність та простоту він був забутий.

Важливими критеріями узагальнення неперервних дробів є:

1) побудова зручної в користуванні алгебраїчної конструкції, зовнішній вигляд якої містив би максимум інформації про її властивості, був би близьким до зображення неперервних дробів та дозволяв би виділити клас періодичних конструкцій, які б узагальнювали періодичні неперервні дроби;

2) алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень цих математичних об'єктів повинен бути простим в реалізації та відзначатися невеликою складністю за кількістю операцій;

3) довільні періодичні конструкції вищих порядків повинні слугувати зображеннями ірраціональностей вищих порядків.

Алгоритм Фюрстенау задовольняє другий і третій критерії, проте вирази, які зображують неперервні дроби вищих класів (unendlichen Kettenbruche 2-ter Klasse) непридатні для їх аналізу та практичних застосувань. В цьому параграфі ми виправляємо вказаний недолік і пропонуємо нове зображення для неперервних дробів вищих класів. Це зображення є узагальненням рекурентних дробів із попереднього параграфу. Однак, через те, що неперервні періодичні дроби $n-$го класу зображують ірраціональності $(n+1)-$го, а не $n-$го порядку та з метою уникнення плутанини, ми їх називатимемо *рекурентними дробами $n-$го порядку*. .

Використання параперманентів для зображення рекурентних дробів дозволяє підключити апарат числення трикутних матриць для їх дослідження. Крім цього, такий підхід дозволяє ввести поняття звичайних та періодичних рекурентних дробів n-го порядку, які слугують зображеннями ірраціональностей n-го порядку, що є коренями відповідного алгебраїчного рівняння n-го порядку. Причому алгоритм побудови рекурентних дробів n-го порядку задовольняє всі три, наведені вище, вимоги. Далі цей алгоритм носитиме назву *алгоритму Фюрстенау.*

3.8.1 Означення рекурентних дробів n-го порядку

Означення 3.8.1. *Нехай a_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant i < \infty-$ деякі цілі числа. Алгебраїчні об'єкти виду*

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n-2,n-1}} & \frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-3,n-1}} & \cdots & a_{1,n-1} & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \cdots & \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} & a_{1,n} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \cdots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array}\right]_{\infty}, \tag{3.8.1}$$

та

$$\frac{P_m}{Q_m} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \cdots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \cdots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \cdots & a_{1,m}
\end{array}\right]_{m}, \tag{3.8.2}$$

де

$$P_m = \left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & & & & & & \\
\frac{a_{22}}{a_{12}} & a_{12} & & & & & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n-1,n}} & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \dots & \frac{a_{3,n+1}}{a_{2,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_{4,n+2}}{a_{3,n+2}} & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m}
\end{array}\right]_m, \tag{3.8.3}$$

$$Q_m = \left[\begin{array}{cccccccc}
a_{12} & & & & & & & \\
\frac{a_{23}}{a_{13}} & a_{13} & & & & & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-2,n}} & \frac{a_{n-2,n}}{a_{n-3,n}} & \dots & a_{1,n} & & & & \\
\frac{a_{n,n+1}}{a_{n-1,n+1}} & \frac{a_{n-1,n+1}}{a_{n-2,n+1}} & \dots & \frac{a_{2,n+1}}{a_{1,n+1}} & a_{1,n+1} & & & \\
0 & \frac{a_{n,n+2}}{a_{n-1,n+2}} & \dots & \frac{a_{3,n+2}}{a_{2,n+2}} & \frac{a_{2,n+2}}{a_{1,n+2}} & a_{1,n+2} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{a_{n,m}}{a_{n-1,m}} & \frac{a_{n-1,m}}{a_{n-2,m}} & \dots & a_{1,m}
\end{array}\right]_{m-1}, \tag{3.8.4}$$

— параперманенти відповідних трикутних матриць, назвемо відповідно ***рекурентним дробом*** n***–го порядку*** *та його* m***–тим раціональним вкороченням****.*

Розкладаючи параперманенти (3.8.3), (3.8.4) за елементами останнього рядка, отримаємо лінійні рекурентні рівняння n–го порядку

$$P_m = a_{1m}P_{m-1} + a_{2m}P_{m-2} + \ldots + a_{nm}P_{m-n}, \ m = 1, 2, \ldots,$$

$$Q_m = a_{1m}Q_{m-1} + a_{2m}Q_{m-2} + \ldots + a_{nm}Q_{m-n}, \ m = 1, 2, \ldots,$$

де

$$P_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } i = 0, \\ 0, \text{якщо } i < 0, \end{cases} \quad Q_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } i = 1 - n, \\ 0, \text{якщо } 2 - n \leqslant i \leqslant 0, \end{cases} \quad a_{n1} = 1,$$

які дають ефективний алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень рекурентних дробів n–го порядку.

Значення скінченної границі m–тих раціональних вкорочень рекурентного дробу n–го порядку, при $m \to \infty$ називатимемо значенням відповідного рекурентного дробу n–го порядку.

Таким чином, рекурентний дріб другого порядку при $a_{1i} = q_i$, $a_{2i} = p_i$ має вигляд

$$\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\
0 & 0 & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_m}{q_m} & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty$$

і є іншим зображенням неперервного дробу

$$q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cfrac{p_4}{q_4 + \ldots + \cfrac{p_m}{q_m + \ldots}}}}.$$

Означення 3.8.2. *Рекурентний дріб n–го порядку (3.8.1) назвемо k–періодичним якщо його елементи задовольняють рівності*

$$a_{i,rk+j} = a_{i,j}, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.8.5}$$

Означення 3.8.3. *Два рекурентні дроби n–го порядку назвемо рівними, якщо m–ті $(m = 1, 2, \ldots)$ раціональні вкорочення цих дробів рівні між собою.*

Означення 3.8.4. *Рекурентний дріб $n-$го порядку (3.8.1) назвемо звичайним рекурентним дробом, якщо виконуються рівності*

$$a_{nn} = a_{n,n+1} = a_{n,n+2} = \ldots = 1.$$

3.8.2 Деякі загальні теореми про рекурентні дроби $n-$го порядку

Наведемо кілька теорем про рекурентні дроби, які легко доводяться при допомозі апарату парафункцій трикутних матриць.

1.

Теорема 3.8.1. *Якщо для $(m+1)-$го раціонального вкорочення $1-$періодичного рекурентного дробу $n-$го порядку*

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \ldots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \ldots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \ldots & a_1
\end{array}\right]_{m+1} \qquad (3.8.6)$$

існує скінченна не нульова границя при $m \to \infty$, то такий рекурентний дріб $n-$того порядку є зображенням дійсного кореня алгебраїчного рівняння

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (3.8.7)$$

з ненульовим вільним членом, модуль якого більший за модулі всіх інших коренів цього рівняння.

Доведення. 1. Доведемо спочатку, що значення рекурентного дробу (3.8.6) є коренем рівняння (3.8.7). Позначимо чисельник $m-$го

раціонального вкорочення (3.8.6) рекурентного дробу $n-$го порядку через $[\,]_{m+1}$ та розкладемо його за елементами першого стовпця:

$$\frac{[\,]_{m+1}}{[\,]_m} = \frac{a_1[\,]_m + a_2[\,]_{m-1} + \ldots + a_n[\,]_{m-n}}{[\,]_m} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-1}}} + \frac{a_3}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-2}}} + \ldots + \frac{a_n}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-n}}} =$$

$$= a_1 + \frac{a_2}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-1}}} + \frac{a_3}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-1}} \cdot \frac{[\,]_{m-1}}{[\,]_{m-2}}} + \ldots + \frac{a_n}{\frac{[\,]_m}{[\,]_{m-1}} \cdot \frac{[\,]_{m-1}}{[\,]_{m-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{[\,]_{m-n+1}}{[\,]_{m-n}}}.$$

Нехай

$$\lim_{m\to\infty} \frac{[\,]_{m+1}}{[\,]_m} = x \neq 0,$$

тоді отримаємо рівняння

$$x = a_1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^{n-1}}, \qquad (3.8.8)$$

або рівняння (3.8.7).

2. Доведемо, що значення рекурентного дробу (3.8.6) є коренем найбільшого модуля рівняння (3.8.7). Параперманенти, на базі яких будуються раціональні наближення до рекурентних дробів задовольняють рекурентне рівняння

$$A_m = a_1 A_{m-1} + a_2 A_{m-2} + \ldots + a_n A_{m-n}.$$

Таке ж рекурентне рівняння (2.5.55) (з врахуванням теореми Вієта) задовольняють повні однорідні симетричні многочлени (див. стор. 155), побудовані на базі коренів алгебраїчного рівняння (3.8.7). При великих значеннях m значення повного однорідного симетричного многочлена, головним чином, залежатиме від m-того степеня дійсного кореня з найбільшим модулем. Отже, при великих значеннях m значення раціональних вкорочень рекурентних дробів будуть близькими до цього кореня рівняння. □

Справедлива і обернена теорема:

Теорема 3.8.2. *Якщо алгебраїчне рівняння (3.8.7) має дійсний корінь, модуль якого перевищує модулі всіх інших коренів цього рівняння, то 1-періодичний рекурентний дріб*

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} a_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 & & & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 \end{array}\right]_\infty \qquad (3.8.9)$$

є зображенням цього кореня.

Доведення. Запишемо алгебраїчне рівняння (3.8.7) з ненульовим вільним членом у вигляді

$$x = a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{x}}{x}}{x}}{x}. \qquad (3.8.10)$$

При допомозі нескінченного числа вкладень останнє рівняння можна записати у вигляді рівностей

$$x = a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}}{a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}}{a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}}{a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3 + \frac{a_4 + \dots + \frac{a_n}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}}{a_1 + \dots}} =$$

$$= a_1 \Big| + \frac{a_2 \Big| + \frac{a_3 \Big| + \frac{a_4 \big| + \frac{a_5 + \dots}{a_1 + \dots}}{a_1 \big| + \frac{a_2 + \dots}{a_1 + \dots}}}{a_1 \Big| + \frac{a_2 \big| + \frac{a_3 + \dots}{a_1 + \dots}}{a_1 \big| + \frac{a_2 + \dots}{a_1 + \dots}}}}{a_1 \Big| + \frac{a_2 \Big| + \frac{a_3 \big| + \frac{a_4 + \dots}{a_1 + \dots}}{a_1 \big| + \frac{a_2 + \dots}{a_1 + \dots}}}{a_1 \Big| + \frac{a_2 \big| + \frac{a_3 + \dots}{a_1 + \dots}}{a_1 \big| + \frac{a_2 + \dots}{a_1 + \dots}}}}. \qquad (3.8.11)$$

права сторона якої залежить лише від коефіцієнтів рівняння (3.8.10), тобто є одним із розв'язків цього рівняння. Отже, дріб (3.8.11) збігається до одного із дійсних коренів рівняння (3.8.7).

Першим наближенням до значення виразу правої частини рівності (3.8.11) є вираз, що лежить по ліву сторону від першої вертикальної риски, тобто є дробом

$$\frac{a_1}{1} = \frac{u_1}{u_0}.$$

Другим наближенням слугує вираз, що лежить по ліву сторону від другої вертикальної риски

$$a_1 + \frac{a_2}{a_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_0}{a_1 u_0}.$$

Третє наближення має вигляд

$$a_1 + \frac{a_2 + \frac{a_3}{a_1}}{a_1 + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{a_1 u_2 + a_2 u_1 + a_3 u_0}{a_1 u_1 + a_2 u_0}$$

і т. д.

Методом математичної індукції можна показати, що m-те наближення має вигляд

$$\frac{a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_0}{a_1 u_{m-2} + a_2 u_{m-3} + \ldots + a_{m-1} u_0},$$

якщо $m \leqslant n$ і вигляд

$$\frac{a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_{m-n}}{a_1 u_{m-2} + a_2 u_{m-3} + \ldots + a_m u_{m-n-1}},$$

якщо $m > n$.

Таким чином, m-те наближення до кореня рівняння є раціональним наближенням до виразу (3.8.11), і чисельник та знаменник цього рекурентного дробу є параперманентом виду

$$\left[\begin{array}{cccccccc} a_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\ \vdots & \dots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1 & & & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \dots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1 \end{array}\right]_m \qquad (3.8.12)$$

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корені алгебраїчного рівняння (3.8.7). Підставимо у параперманенті (3.8.12) замість $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ відповідні симетричні многочлени, побудовані на базі цих коренів. Отримаємо зображення повних однорідних симетричних многочленів у вигляді параперманента трикутної матриці.

Позаяк алгебраїчне рівняння має дійсний корінь з найбільшим модулем, то значення m-того степеня цього кореня у однорідному многочлені буде значно перевищувати суму всіх інших доданків і раціональні наближення при збільшенні m збігатимуться до дійсного кореня з найбільшим модулем. □

Відзначимо, що при $n = 2$, $a_1 = q$, $a_2 = p$ рівність (3.8.8) приймає форму

$$x = q + \frac{p}{x},$$

яку, при допомозі послідовних вкладень можна розвинути у 1−періодичний неперервний дріб

$$x = q + \cfrac{p}{g + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \ldots}}}.$$

Довільний неперервний дріб можна побудувати при допомозі нескінченної послідовності рівностей

$$\left\{ x_n = q_n + \frac{p_{n+1}}{x_{n+1}} \right\}_{n=1,2,\ldots}$$

та відповідних вкладень.

Проведемо аналогічний аналіз рівності (3.8.8) при

$$n = 3,\ a_1 = q,\ a_2 = p,\ a_3 = r.$$

Маємо:

$$x = q + \frac{p}{x} + \frac{r}{x^2},$$

або

$$x = q + \frac{p + \frac{r}{x}}{x}.$$

Останню рівність, при допомозі послідовних вкладень можна звести до виразу

$$x = q + \cfrac{p + \cfrac{r}{q + \cfrac{p + \cfrac{r}{q + \ldots}}{q + \cfrac{p + \ldots}{q + \ldots}}}}{q + \cfrac{p + \cfrac{r}{q + \cfrac{p + \ldots}{q + \ldots}}}{q + \cfrac{p + \cfrac{r}{q + \ldots}}{q + \cfrac{p + \ldots}{q + \ldots}}}}.$$

Такий вигляд має 1−періодичний рекурентний дріб 3−го порядку.

Вираз для довільного рекурентного дробу 3−го порядку можна побудувати при допомозі двох послідовностей рівностей

$$\left\{ x_n = q_n + \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \right\}_{n=1,2,\ldots},$$

$$\left\{ y_n = p_n + \frac{r_{n+1}}{x_{n+1}} \right\}_{n=1,2,\ldots}$$

та відповідних вкладень. При цьому отримаємо вирази для x та y, які запропонував Е.Фюрстенау [112]:

$$x = x_1 = q_1 + \cfrac{p_2 + \cfrac{r_3}{q_3 + \cfrac{p_4 + \cfrac{r_5}{q_5 + \cdots}}{q_4 + \cfrac{p_5 + \cdots}{q_5 + \cdots}}}}{q_2 + \cfrac{p_3 + \cfrac{r_4}{q_4 + \cfrac{p_5 + \cdots}{q_5 + \cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \cfrac{r_5}{q_5 + \cdots}}{q_4 + \cfrac{p_5 + \cdots}{q_5 + \cdots}}}}, \tag{3.8.13}$$

$$y = y_1 = p_1 + \cfrac{r_2}{q_2 + \cfrac{p_3 + \cfrac{r_4}{q_4 + \cfrac{p_5 + \cdots}{q_5 + \cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \cfrac{r_5}{q_5 + \cdots}}{q_4 + \cfrac{p_5 + \cdots}{q_5 + \cdots}}}}. \tag{3.8.14}$$

Вирази (3.8.13), (3.8.14) не зручні для їх аналізу та практичних потреб, тому ми користуватимемося відповідними рівними їм рекурентними дробами 3–го порядку:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{R_n} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
q_1 & & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & \\
0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & \\
0 & 0 & \frac{r_5}{p_5} & \frac{p_5}{q_5} & q_5 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_{\infty}, \tag{3.8.15}$$

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{R_n} = \left[\begin{array}{c|ccccccc}
p_1 & & & & & & & \\
\frac{r_2}{q_2} & q_2 & & & & & & \\
0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & \\
0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & \\
0 & 0 & \frac{r_5}{p_5} & \frac{p_5}{q_5} & q_5 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_{\infty},$$

де поліноми P_n, Q_n, R_n, $n = 1, 2, \dots$ можна знайти при допомозі рекурентних рівностей:

$$\begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} & Q_{n-3} \\ R_{n-1} & R_{n-2} & R_{n-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \\ r_n \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \dots$$

із початковими умовами

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_{-1} & P_{-2} \\ Q_0 & Q_{-1} & Q_{-2} \\ R_0 & R_{-1} & R_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та припущенню, що $r_1 = 1$.

При

$$n = 4,\ a_1 = q,\ a_2 = p,\ a_3 = r,\ a_4 = s$$

вирази для довільного рекурентного дробу 4–го порядку можна побудувати при допомозі трьох послідовностей рівностей:

$$\left\{x_n = q_n + \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}\right\}_{n=1,2,\dots},$$

$$\left\{y_n = p_n + \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}}\right\}_{n=1,2,\dots},$$

$$\left\{z_n = r_n + \frac{s_{n+1}}{x_{n+1}}\right\}_{n=1,2,\dots}.$$

Ось ці вирази:

$$x = q_1 + \cfrac{p_2 + \cfrac{r_3 + \cfrac{s_4}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \frac{r_5+\cdots}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}}{q_2 + \cfrac{p_3 + \cfrac{r_4 + \frac{s_5}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \frac{r_5+\cdots}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}},$$

$$y = p_1 + \cfrac{r_2 + \cfrac{s_3}{q_3 + \cfrac{p_4 + \frac{r_5+\cdots}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}}{q_2 + \cfrac{p_3 + \cfrac{r_4 + \frac{s_5}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \frac{r_5+\cdots}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}},$$

$$z = r_1 + \cfrac{s_2}{q_2 + \cfrac{p_3 + \cfrac{r_4 + \frac{s_5}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}{q_3 + \cfrac{p_4 + \frac{r_5+\cdots}{q_5+\cdots}}{q_4 + \frac{p_5+\cdots}{q_5+\cdots}}}}.$$

Їм відповідають рекурентні дроби:

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{S_n} = \left[\begin{array}{c|cccccccc}
q_1 & & & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & & \\
\frac{s_4}{r_4} & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & & \\
0 & \frac{s_5}{r_5} & \frac{r_5}{p_5} & \frac{p_5}{q_5} & q_5 & & & & \\
0 & 0 & \frac{s_6}{r_6} & \frac{r_6}{p_6} & \frac{p_6}{q_6} & q_6 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{s_n}{r_n} & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty,$$

$$y = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{S_n} = \left[\begin{array}{c|cccccccc}
p_1 & & & & & & & & \\
\frac{r_2}{q_2} & q_2 & & & & & & & \\
\frac{s_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & & \\
0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & & \\
0 & \frac{s_5}{r_5} & \frac{r_5}{p_5} & \frac{p_5}{q_5} & q_5 & & & & \\
0 & 0 & \frac{s_6}{r_6} & \frac{r_6}{p_6} & \frac{p_6}{q_6} & q_6 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{s_n}{r_n} & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty,$$

$$z = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{S_n} = \left[\begin{array}{c|cccccccc}
r_1 & & & & & & & & \\
\frac{s_2}{q_2} & q_2 & & & & & & & \\
0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & & \\
0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & & \\
0 & \frac{s_5}{r_5} & \frac{r_5}{p_5} & \frac{p_5}{q_5} & q_5 & & & & \\
0 & 0 & \frac{s_6}{r_6} & \frac{r_6}{p_6} & \frac{p_6}{q_6} & q_6 & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \frac{s_n}{r_n} & \frac{r_n}{p_n} & \frac{p_n}{q_n} & q_n & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_\infty,$$

де поліноми Q_n, P_n, R_n, S_n, $n = 1, 2, \dots$ можна знайти при допомозі рекурентних рівностей:

$$\begin{pmatrix} Q_n \\ P_n \\ R_n \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ Q_{n-1} & Q_{n-2} & Q_{n-3} & Q_{n-4} \\ R_{n-1} & R_{n-2} & R_{n-3} & R_{n-4} \\ S_{n-1} & S_{n-2} & S_{n-3} & S_{n-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, \dots$$

із початковими умовами

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \\ Q_0 & Q_{-1} & Q_{-2} & Q_{-3} \\ R_0 & R_{-1} & R_{-2} & R_{-3} \\ S_0 & S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та припущенню, що $s_1 = 1$.

Легко записати відповідні вирази і для рекурентних дробів вищих порядків.

2. Для оцінки швидкості збіжності раціональних вкорочень рекурентних дробів k–го порядку корисною виявляється теорема 2.10.4 на стор. 208, де $A_{k,n}$ — матриця спеціального вигляду (див. теорема 2.10.3 на стор. 206).

При $k = 3$ ця теорема дістане таке формулювання:

Теорема 3.8.3. *Для раціональних вкорочень (3.8.15) рекурентних дробів третього порядку справедлива рівність:*

$$P_nR_{n+1} - P_{n+1}R_n =$$

$$(-1)^n \left\langle \begin{array}{cccccccc} p_2 & & & & & & & \\ \frac{q_2r_3}{p_3} & p_3 & & & & & & \\ -\frac{r_3}{q_3} & \frac{q_3r_4}{p_4} & p_4 & & & & & \\ 0 & -\frac{r_4}{q_4} & \frac{q_4r_5}{p_5} & p_5 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{q_{n-1}r_n}{p_n} & p_n & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{r_n}{q_n} & \frac{q_nr_{n+1}}{p_{n+1}} & p_{n+1} \end{array} \right\rangle_n = (-1)^n \Diamond_n. \tag{3.8.16}$$

Доведення. При $n = 1$ рівність (3.8.16) матиме вигляд

$$P_1R_2 - P_2R_1 = q_1q_2 - (q_2q_1 + p_2) = (-1)^1\langle p_2\rangle.$$

Нехай рівність (3.8.16) виконується при довільному $k = 2, 3, \dots, n-1$. Доведемо, що вона виконується при $k = n$. Маємо:

$$P_nR_{n+1} - P_{n+1}R_n =$$

$$= P_n(q_{n+1}R_n + p_{n+1}R_{n-1} + r_{n+1}R_{n-2}) - (q_{n+1}P_n + p_{n+1}P_{n-1} + r_{n+1}P_{n-2})R_n =$$

$$= -p_{n+1}(P_{n-1}R_n - P_nR_{n-1}) - r_{n+1}(P_{n-2}R_n - P_nR_{n-2}) =$$

$$(-1)^n(p_{n+1}(P_{n-1}R_n - P_nR_{n-1}) - r_{n+1}q_n(P_{n-2}R_{n-1} - P_{n-1}R_{n-2}) -$$
$$- r_nr_{n+1}(P_{n-3}R_{n-2} - P_{n-2}R_{n-3})) =$$
$$= (-1)^n\left(p_{n+1}\Diamond_{n-1} - q_nr_{n+1}\Diamond_{n-2} - r_nr_{n+1}\Diamond_{n-3}\right).$$

Але вираз в останніх дужках є розкладом парадетермінанта $\Diamond_n$ за елементами останнього рядка. □

Наслідок 3.8.3.1. *Для раціональних вкорочень звичайних рекурентних дробів третього порядку, справедливі рівності*

$$\frac{P_n}{R_n} - \frac{P_{n+1}}{R_{n+1}} = \frac{P_nR_{n+1} - P_{n+1}R_n}{R_nR_{n+1}} = \frac{(-1)^n\Diamond_n}{R_nR_{n+1}},$$

де

$$\Diamond_n = \left\langle \begin{array}{cccccccc} p_2 & & & & & & & \\ \frac{q_2}{p_3} & p_3 & & & & & & \\ -\frac{1}{q_3} & \frac{q_3}{p_4} & p_4 & & & & & \\ 0 & -\frac{1}{q_4} & \frac{q_4}{p_5} & p_5 & & & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{q_{n-1}}{p_n} & p_n & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{q_n} & \frac{q_n}{p_{n+1}} & p_{n+1} \end{array} \right\rangle_n$$

Знайдемо p_i так, щоб у наслідку 3.8.3.1 виконувались рівності

$$\Diamond_n = 1.$$

Легко переконатися, що

$$p_1 = 1,\ p_2 = q_1 + 1,\ p_3 = q_2 + 2.$$

Розкладемо парадетермінант $\Diamond_n$ за елементами останнього рядка

$$\Diamond_n = p_{n-1}\Diamond_{n-1} - q_{n-1}\Diamond_{n-2} - \Diamond_{n-3}.$$

Позаяк всі значення парадетермінанта дорівнюють 1, то

$$p_n = q_{n-1} + 2.$$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 3.8.4. *Рекурентні дроби*

$$\frac{P_n}{R_n}=\left[\begin{array}{c|ccccc}
q_0 & & & & & \\
\frac{1}{q_1} & q_1 & & & & \\
\frac{1}{q_1+1} & \frac{q_1+1}{q_2} & q_2 & & & \\
0 & \frac{1}{q_2+2} & \frac{q_2+2}{q_3} & q_3 & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & \cdots & \frac{1}{q_{n-1}+2} & \frac{q_{n-1}+2}{q_n} & q_n
\end{array}\right]_{n+1},$$

чисельник і знаменник яких задовольняє рекурентні рівності

$$P_k=q_kP_{k-1}+(q_{k-2}+2)P_{k-2}+P_{k-3},$$
$$R_k=q_kR_{k-1}+(q_{k-2}+2)R_{k-2}+R_{k-3}$$

з початковими умовами,

$$P_0=q_0,\ P_1=q_0q_1+1,\ P_2=q_0q_1q_2+q_2+q_0q_1+q_0+1,$$

$$R_0=1,\ R_1=q_1,\ R_2=q_1q_2+q_1+1.$$

задовольняють рівності

$$\frac{P_{n-1}}{R_{n-1}}-\frac{P_n}{R_n}=\frac{(-1)^n}{R_{n-1}R_n}.$$

Нехай у теоремі 3.8.4 виконуються рівності

$$q_0=q_1=\ldots=q,$$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{R_n}=q+\frac{1}{q+\frac{q+1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{qx+q+1+\frac{1}{x}}=$$

$$=q+\frac{x^2+x}{qx^2+(q+1)x+1},\qquad(3.8.17)$$

де x — додатний корінь рівняння

$$x^3=qx^2+(q+2)x+1,$$

або рівняння

$$(x+1)(x^2-(q+1)x-1)=0.$$

Це випливає з того, що дріб

$$\frac{P_n}{R_n}=\left[\begin{array}{c|cccccc}
q & & & & & & \\
\frac{1}{q} & q & & & & & \\
\frac{1}{q+1} & \frac{q+1}{q} & q & & & & \\
0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{q+2}{q} & q
\end{array}\right]_{n+1}\qquad(3.8.18)$$

після декількох розкладань чисельника та знаменника за елементами першого стовпця, можна подати у вигляді дробу з відношеннями

$$\frac{[\cdot]_{n-1}}{[\cdot]_{n-2}},\ \frac{[\cdot]_{n-2}}{[\cdot]_{n-3}},$$

в яких крапкою позначено трикутну матрицю виду

$$\begin{pmatrix}
q & & & & & \\
\frac{q+2}{q} & q & & & & \\
\frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & & \\
0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & & \\
0 & 0 & \frac{1}{q+2} & \frac{q+2}{q} & q & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

відповідного порядку. Спрямовуючи n до нескінченності, після деяких спрощень, ми отримаємо рівність (3.8.17). На жаль мішані періодичні рекурентні дроби (3.8.18) не є двосторонніми наближеннями кубічних ірраціональностей.

Узагальненням теореми 3.8.3 є наступна теорема.

Теорема 3.8.5. *Для раціональних вкорочень (3.8.2) неперервних дробів (3.8.1) справедлива тотожність*

$$\frac{P_m}{Q_m} - \frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} = \frac{A_{n,m}}{Q_m Q_{m+1}},$$

де $A_{n,m}$ — детермінант (2.10.18) (див. стор. 206), для якого справедлива рекурсія (2.10.19).

Доведення. Безпосередньо випливає із теореми 2.10.4 (див. стор. 208). □

3. Деякі алгебраїчні ірраціональності можуть бути однозначно представлені у вигляді звичайних рекурентних дробів. Тому у багатьох випадках корисною виявляється наступна

Теорема 3.8.6. *Кожен рекурентний дріб $k-$го порядку, може бути представлений у вигляді рівного йому звичайного рекурентного дробу $k-$го порядку.*

Доведення цієї теореми проілюструємо при $k = 3$ та $k = 4$. З цією метою зробимо перетворення аналогічні до перетворень з ланцюговими дробами (див. стор. 349). У загальному випадку доведення аналогічне.

Справді, у $n-$тому стовпці парадетермінанта, що є чисельником рекурентного дробу та $(n-1)-$му стовпці парадетермінанта знаменника цього дробу можна винести s за їх знак і скоротити. Отже значення параметра s не впливає на значення рекурентного дробу, тому його можна вибрати так, щоб виконувалась рівність $sr_n = 1$.

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|cccccccccc}
q_1 & & & & & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & & & & & \\
0 & \frac{r_4}{p_4} & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & & & & & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_{n-2} & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} & q_{n-1} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s\cdot r_n}{s\cdot p_n} & \frac{s\cdot p_n}{s\cdot q_n} & s\cdot q_n & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{s\cdot r_{n+1}}{s\cdot p_{n+1}} & \frac{s\cdot p_{n+1}}{q_{n+1}} & q_{n+1} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{s\cdot r_{n+2}}{p_{n+2}} & \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} & q_{n+2} & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots
\end{array}\right]_{\infty}$$

При допомозі цієї процедури можна досягнути того, що виконуватимуться рівності

$$r_3 = r_4 = \ldots = 1.$$

Для цього достатньо розв'язати систему рівнянь

$$s_3 r_3 = s_3 s_4 r_4 = s_3 s_4 s_5 r_5 = s_4 s_5 s_6 r_6 = s_5 s_6 s_7 r_7 = \ldots = 1$$

відносно змінних $s_3, s_4, \ldots$. Вона має розв'язок:

$$\begin{aligned}
s_{3k} &= \frac{r_5 r_8 \cdot \ldots \cdot r_{3k-1}}{r_3 r_6 \cdot \ldots \cdot r_{3k}}, \ k = 1, 2, \ldots, \\
s_{3k+1} &= \frac{r_3 r_6 \cdot \ldots \cdot r_{3k}}{r_4 r_7 \cdot \ldots \cdot r_{3k+1}}, \ k = 1, 2, \ldots, \\
s_{3k+2} &= \frac{r_4 r_7 \cdot \ldots \cdot r_{3k-2}}{r_5 r_8 \cdot \ldots \cdot r_{3k-1}}, \ k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

При зведенні рекурентних дробів 4-го порядку до звичайних рекурентних дробів 4-го порядку, необхідно використати рівності:

$$\begin{aligned}
t_{4k} &= \frac{s_7 \cdot \ldots \cdot s_{4k-1}}{s_4 s_8 \cdot \ldots \cdot s_{4k}}, \ k = 1, 2, \ldots, \\
t_{4k+1} &= \frac{s_4 s_8 \cdot \ldots \cdot s_{4k}}{s_5 s_9 \cdot \ldots \cdot s_{4k+1}}, \ k = 1, 2, \ldots, \\
t_{4k+2} &= \frac{s_5 s_9 \cdot \ldots \cdot s_{4k+1}}{s_6 t_{10} \cdot \ldots \cdot s_{4k+2}}, \ k = 1, 2, \ldots, \\
t_{4k+3} &= \frac{s_6 s_{10} \cdot \ldots \cdot s_{4k+2}}{s_7 \cdot \ldots \cdot s_{4k+3}}, \ k = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

і т.д.

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 3.8.1. Рівняння

$$x^3 = 3x^2 - 2x + 1$$

має дійсний додатний корінь

$$x = 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{23}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}}} \approx 2.324717957244746$$

та два комплексні корені

$$x = 0.337641021378 + 0.562279512062i,$$

$$x = 0.337641021378 - 0.562279512062i.$$

Модуль дійсного кореня більший за модулі комплексних коренів. Знайдемо раціональні вкорочення відповідного нескінченного рекурентного дробу при $q = 3, p = -2, r = 1$:

$$\frac{P_n}{R_n} = \left[\begin{array}{c|ccccc}
3 & & & & & \\
-\frac{2}{3} & 3 & & & & \\
-\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 3 & & & \\
0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 3 & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3
\end{array}\right]_{n+1}.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{P_1}{R_1} &= \frac{7}{3} = 2.333, & \frac{P_{11}}{R_{11}} &= \frac{31572}{13581} = 2.32471835, \\
\frac{P_2}{R_2} &= \frac{16}{7} = 2.285, & \frac{P_{12}}{R_{12}} &= \frac{73396}{31572} = 2.324718104, \\
\frac{P_3}{R_3} &= \frac{37}{16} = 2.3125, & \frac{P_{13}}{R_{13}} &= \frac{170625}{73396} = 2.324717968, \\
\frac{P_4}{R_4} &= \frac{86}{37} = 2.324324, & \frac{P_{14}}{R_{14}} &= \frac{396655}{170625} = 2.3247179487, \\
\frac{P_5}{R_5} &= \frac{200}{86} = 2.325581, & \frac{P_{15}}{R_{15}} &= \frac{922111}{396655} = 2.32471795388, \\
\frac{P_6}{R_6} &= \frac{465}{200} = 2.325000, & \frac{P_{16}}{R_{16}} &= \frac{2143648}{922111} = 2.32471795694, \\
\frac{P_7}{R_7} &= \frac{1081}{465} = 2.324731, & \frac{P_{17}}{R_{17}} &= \frac{4983377}{2143648} = 2.324717957425, \\
\frac{P_8}{R_8} &= \frac{2513}{1081} = 2.324699, & \frac{P_{18}}{R_{18}} &= \frac{11584946}{4983377} = 2.32471795732090, \\
\frac{P_9}{R_9} &= \frac{5842}{2513} = 2.3247115, & \frac{P_{19}}{R_{19}} &= \frac{26931732}{11584946} = 2.32471795725245, \\
\frac{P_{10}}{R_{10}} &= \frac{13581}{5842} = 2.32471756, & \frac{P_{20}}{R_{20}} &= \frac{62608681}{26931732} = 2.3247179572409.
\end{aligned}$$

Приклад 3.8.2. Рівняння

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

має один дійсний корінь, модуль якого більший за модулі комплексних коренів цього рівняння

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt[2]{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt[2]{33}} + 1\right) \approx 1.83928675521416$$

$$x_2 \approx -0.419643377607080 + 0.606290729207199i$$

$$x_3 \approx -0.419643377607080 - 0.606290729207199i$$

Дванадцяте раціональне вкорочення відповідного рекурентного дробу дорівнює

$$\frac{P_{12}}{R_{12}} = \left[\begin{array}{c|cccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & \\
0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1
\end{array}\right]_{12} = \frac{927}{504} \approx 1,8392857\ldots$$

4. Розглянемо періодичний рекурентний дріб третього порядку, з періодом 2:

$$
\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & & \\
0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & \\
0 & 0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_n
$$

Розкладемо чисельник цього дробу за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_1]_n}{[q_2]_{n-1}} = \frac{q_1[q_2]_{n-1} + p_2[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_2]_{n-1}} =$$

$$= q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}. \qquad (3.8.19)$$

В цій рівності параперманент i-го порядку з верхнім елементом q_j, $j = 1, 2$ позначено через $[q_j]_i$. Аналогічно розкладаємо чисельник дробу $\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_2]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = q_2 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_1]_{n-4}}}. \qquad (3.8.20)$$

Нехай

$$\lim_{m\to\infty} \frac{[q_1]_m}{[q_2]_{m-1}} = x, \quad \lim_{m\to\infty} \frac{[q_2]_m}{[q_1]_{m-1}} = y.$$

Тоді, спрямовуючи в рівностях (3.8.19), (3.8.20) n до нескінченності, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_1}{xy}, \\ y = q_2 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}, \end{cases}$$

З якої знаходимо, що

$$y = \frac{p_2 x + r_1}{x^2 - q_1 x},$$

а x є додатнім коренем кубічного рівняння

$$(q_2p_2 + r_2)x^3 + (r_1q_2 - p_2q_1q_2 - p_2^2 + p_1p_2 - 2q_1r_2)x^2 +$$

$$+(p_1r_1 - p_1p_2q_1 - q_1q_2r_1 - 2p_2r_1 + q_1^2r_2)x - (r_1^2 + q_1p_1r_1) = 0.$$

Для раціональних вкорочень 3-періодичних рекурентних дробів третього порядку

$$
\left[\begin{array}{c|cccccc}
q_1 & & & & & & \\
\frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\
\frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\
0 & \frac{r_1}{p_1} & \frac{p_1}{q_1} & q_1 & & & \\
0 & 0 & \frac{r_2}{p_2} & \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{r_3}{p_3} & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots
\end{array}\right]_{n+1}
$$

можна провести аналогічний аналіз. Розклад чисельника цього дробу за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = \frac{q_1[q_2]_n + p_2[q_3]_{n-1} + r_3[q_1]_{n-2}}{[q_2]_n} =$$

$$= q_1 + \frac{p_2}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}} + \frac{r_3}{\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} \cdot \frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}}$$

Аналогічно розкладаємо чисельник дробу $\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}}$:

$$\frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = \frac{q_2[q_3]_{n-1} + p_3[q_1]_{n-2} + r_1[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-1}} =$$

$$= q_2 + \frac{p_3}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}} + \frac{r_1}{\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} \cdot \frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}}$$

Розкладемо також чисельник дробу $\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}}$ за елементами першого стовпця:

$$\frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = \frac{q_3[q_1]_{n-2} + p_1[q_2]_{n-3} + r_2[q_3]_{n-4}}{[q_1]_{n-2}} =$$

$$= q_3 + \frac{p_1}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}}} + \frac{r_2}{\frac{[q_1]_{n-2}}{[q_2]_{n-3}} \cdot \frac{[q_2]_{n-3}}{[q_3]_{n-4}}}$$

Нехай існують границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[q_1]_{n+1}}{[q_2]_n} = x, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{[q_2]_n}{[q_3]_{n-1}} = y, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{[q_3]_{n-1}}{[q_1]_{n-2}} = z.$$

тоді останні три рівності запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = q_1 + \frac{p_2}{y} + \frac{r_3}{yz}, \\ y = q_2 + \frac{p_3}{z} + \frac{r_1}{zx}, \\ z = q_3 + \frac{p_1}{x} + \frac{r_2}{xy}. \end{cases}$$

$$(q_2^2q_3r_3 - q_2q_3p_2p_3 - q_2p_3r_2 + q_2p_3r_3 - p_2p_3^2)x^3+$$
$$+(q_1q_2q_3p_2p_3 - q_2q_3p_2r_1 - q_1q_2^2q_3r_3 - q_2q_3p_2r_3 + q_3p_2^2p_3 + q_2^2p_1r_3-$$
$$-q_2p_1p_2p_3 + 2q_1q_2p_3r_2 - q_2r_1r_2 + q_2r_2r_3 + p_2p_3r_2 - q_1q_2p_3r_3 + q_2r_1r_3-$$
$$-q_2r_3^2 + q_1p_2p_3^2 + p_2p_3r_3 - 2p_2p_3r_1)x^2 + (q_1q_2q_3p_2r_1 + q_3p_2^2r_1 - q_2p_1p_2r_1-$$
$$-q_1q_2^2p_1r_3 + q_1q_2p_1p_2p_3 - q_2p_1p_2r_3 + p_1p_2^2p_3 + 2q_1q_2r_1r_2 - q_1^2q_2p_3r_2-$$
$$-q_1q_2r_2r_3 - q_1p_2p_3r_2 + p_2r_1r_2 - p_2r_2r_3 - q_1q_2r_1r_3 + 2q_1p_2p_3r_1-$$
$$-p_2r_1^2 + p_2r_1r_3)x + q_1q_2p_1p_2r_1 - q_1^2q_2r_1r_2 + p_1p_2^2r_1 - q_1p_2r_1r_2 + q_1p_2r_1^2 = 0.$$

Цікаво було б, досліджуючи дискримінанти кубічних рівнянь, встановити класи кубічних ірраціональностей, які можна зобразити при допомозі k-періодичних рекурентних дробів третього порядку. Аналогічний аналіз можливий і для рекурентних дробів вищих порядків.

3.9 Кубічні рівняння та ірраціональності.

Нижче ми розглядатимемо лише кубічні ірраціональності виду

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2},$$

де a, b, c, n — деякі раціональні числа, які називатимемо *кубічними формами.*

Для побудови алгоритму раціональних наближень кубічних форм, необхідно розглянути їх добуток, знайти для даної форми спряжену та знайти кубічне рівняння, яке вона задовольняє. Розглянемо ці та інші задачі докладніше.

1. *Добуток кубічних форм.*

$$(a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}) \cdot (\alpha + \beta\sqrt[3]{n} + \gamma\sqrt[3]{n^2}) =$$

$$(c\beta n + b\gamma n + a\alpha) + (c\gamma n + b\alpha + a\beta)\sqrt[3]{n} + +(c\alpha + b\beta + a\gamma)\sqrt[3]{n^2}. \quad (3.9.1)$$

Очевидно, що добуток цих кубічних форм можна подати у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} a & c\sqrt[3]{n^2} & b\sqrt[3]{n} \\ b\sqrt[3]{n} & a & c\sqrt[3]{n^2} \\ c\sqrt[3]{n^2} & b\sqrt[3]{n} & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\sqrt[3]{n} \\ \gamma\sqrt[3]{n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta n + b\gamma n + a\alpha \\ (c\gamma n + b\alpha + a\beta)\sqrt[3]{n} \\ (c\alpha + b\beta + a\gamma)\sqrt[3]{n^2} \end{pmatrix}.$$

Якщо працювати лише з коефіцієнтами цих кубічних форм, то можна користуватися наступною матричною формою їх добутку:

$$\begin{pmatrix} a & cn & bn \\ b & a & cn \\ c & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta n + b\gamma n + a\alpha \\ c\gamma n + b\alpha + a\beta \\ c\alpha + b\beta + a\gamma \end{pmatrix}.$$

Нехай кубічна форма $x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$ задається вектором коефіцієнтів $x = (a, b, c)$ і

$$A = \begin{pmatrix} a & cn & bn \\ b & a & cn \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

тоді виконуються рівності

$$x^2 = Ax = (a^2 + 2bcn, c^2n + 2ab, b^2 + 2ac),$$

$$x^3 = A(Ax) = A^2x = Ax^2 =$$

$$= (6abcn + b^3n + c^3n^2 + a^3, 3c^2an + 3cb^2n + 3ba^2, 3ca^2 + 3b^2a + 3c^2bn)$$

і т.д.

2. *Спряжена кубічна форма.*

Спряженою кубічною формою

$$\overline{x} = \alpha + \beta\sqrt[3]{n} + \gamma\sqrt[3]{n^2}$$

до кубічної форми

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2} \qquad (3.9.2)$$

називають таку форму для якої виконується рівність

$$\overline{x}x = \Delta,$$

де Δ — деяке раціональне число.

Для того, щоб для кубічної форми

$$a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$$

побудувати спряжену кубічну форму

$$\alpha + \beta\sqrt[3]{n} + \gamma\sqrt[3]{n^2},$$

необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} c\alpha + b\beta + a\gamma = 0, \\ c\gamma n + b\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$$

відносно γ та β. Тоді матимемо:

$$\alpha = a^2 - bcn, \beta = c^2n - ab, \gamma = b^2 - ac. \qquad (3.9.3)$$

Тобто $\overline{x} = (a^2 - bcn, c^2n - ab, b^2 - ac)$, причому цей вектор слугуватиме першим стовпцем матриці A^{-1}, оберненої до матриці A. Інші два стовпці можна побудувати за аналогією до другого і третього стовпця матриці A. Добуток кубічної форми $a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$ на відповідну їй спряжену кубічну форму дорівнює

$$\Delta = det(A) = a^3 + b^3n + c^3n^2 - 3abcn. \qquad (3.9.4)$$

3. Знайдемо кубічне рівняння

$$x^3 = qx^2 + px + r, \qquad (3.9.5)$$

якому задовольняє кубічна форма

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}.$$

Для цього знаходимо:

$$x^2 = (2cbn + a^2) + (2ba + c^2n)\sqrt[3]{n} + (2ac + b^2)\sqrt[3]{n^2};$$

$$x^3 = (6abcn + b^3n + c^3n^2 + a^3) + (3c^2an + 3cb^2n + 3ba^2)\sqrt[3]{n} +$$
$$+ (3ca^2 + 3b^2a + 3c^2bn)\sqrt[3]{n^2}$$

та розв'язуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3ca^2 + 3b^2a + 3c^2bn = q(2ac + b^2) + cp, \\ 3c^2an + 3cb^2n + 3ba^2 = q(2ba + c^2n) + bp, \\ 6abcn + b^3n + c^3n^2 + a^3 = q(2cbn + a^2) + ap + r. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{cases} q = 3a, \\ p = 3(cbn - a^2), \\ r = b^3n + c^3n^2 + a^3 - 3abcn \end{cases} \qquad (3.9.6)$$

Зауважимо, що рівняння (3.9.5) має ще два комплексно спряжені корені:

$$-\frac{1}{2}c\sqrt[3]{n^2} - \frac{1}{2}b\sqrt[3]{n} + a + \frac{\sqrt{3}}{2}(c\sqrt[3]{n^2} - b\sqrt[3]{n})i,$$

$$-\frac{1}{2}c\sqrt[3]{n^2}-\frac{1}{2}b\sqrt[3]{n}+a-\frac{\sqrt{3}}{2}(c\sqrt[3]{n^2}-b\sqrt[3]{n})i.$$

В цьому легко переконатися звичайною перевіркою.

Якщо норма кубічної форми дорівнює одиниці, то довільний її степінь також дорівнює одиниці. В зв'язку з цим виникають циклічні групи одиниць. Для генерування елементів таких груп корисними виявляються наступні дві теореми.

Теорема 3.9.1. *Якщо*

$$x^3 = qx^2 + px + r,$$

і

$$x^m = Q_m x^2 + P_m x + R_m,$$

то виконуються рівності:

$$Q_m = \left[\begin{array}{ccccccc} q & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_{m-2},$$

$$P_m = \left[\begin{array}{ccccccc} p & & & & & & \\ \frac{r}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_{m-2},$$

$$R_m = \left[\begin{array}{ccccccc} r & & & & & & \\ 0 & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_{m-2}, \quad m = 3, 4, \dots.$$

Доведення. Маємо

$$x^{m+1} = Q_{m+1}x^2 + P_{m+1}x + R_{m+1}.$$

З іншої сторони маємо рівності:

$$x^{m+1} = Q_m x^3 + P_m x^2 + R_m x = Q_m(qx^2 + px + r) + P_m x^2 + R_m x =$$

$$= (qQ_m + P_m)x^2 + (pQ_m + R_m)x + Q_m r,$$

але коефіцієнти

$$qQ_m + P_m, pQ_m + R_m, Q_m r$$

є відповідно розкладом парадетермінантів $Q_{m+1}, P_{m+1}, R_{m+1}$ за елементами першого стовпця. □

Розкладаючи параперманент Q_m у теоремі 3.9.1 за елементами останнього рядка маємо лінійне рекурентне рівняння третього порядку

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3},$$

з початковими умовами

$$Q_2 = 1, Q_{<0} = 0.$$

Розкладаючи параперманент для P_m за елементами першого стовпця дістанемо рекурсію

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}, m = 3, 4, \dots.$$

Аналогічно можна дістати рекурсію

$$R_m = rQ_{m-1}, m = 3, 4, \ldots .$$

Таким чином, коефіцієнти

$$Q_m, P_m, R_m, m = 3, 4, \ldots$$

у теоремі 3.9.1 можна знайти із рекурсій

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, Q_2 = 1, Q_{<0} = 0,$$

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}, m = 3, 4, \ldots,$$

$$R_m = rQ_{m-1}, m = 3, 4, \ldots,$$

які дають простий алгоритм їх обчислення.

Теорема 3.9.2. *Нехай*

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$$

є коренем рівняння

$$x^3 = qx^2 + px + r,$$

тоді

$$x^m = A_m + B_m\sqrt[3]{n} + C_m\sqrt[3]{n^2},$$

причому

$$3A_m = \left[\begin{array}{ccccccc} q & & & & & & \\ \frac{2p}{q} & q & & & & & \\ \frac{3r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_m . \qquad (3.9.7)$$

$$B_m = \left[\begin{array}{ccccccc} b & & & & & & \\ \frac{nc^2-ab}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_m .$$

$$C_m = \left[\begin{array}{ccccccc} c & & & & & & \\ \frac{b^2-ac}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_m .$$

Доведення. Розкладаючи параперманент (3.9.7) за елементами першого стовпця, можна отримати рівності:

$$3A_m = q[]_{m-1} + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} = q(q[]_{m-2} + p[]_{m-3} + r[]_{m-4}) +$$

$$+ 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} = (q^2 + 2p)[]_{n-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + qr[]_{m-4},$$

де символом $[]_m$ позначено параперманент

$$\left[\begin{array}{ccccccc} q & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{array}\right]_m .$$

З другої сторони, згідно з теоремою 3.9.1, маємо рівності

$$x^m = Q_m x^2 + P_m x + R_m =$$

$$= \left((a^2+2bcn) + (c^2n+2ab)\sqrt[3]{n} + (b^2+2ac)\sqrt[3]{n^2}\right) Q_m +$$

$$+(a+b\sqrt[3]{n}+c\sqrt[3]{n^2})P_m + R_m = \left((a^2+2bcn)Q_m + aP_m + R_m\right) +$$

$$+\left((c^2n+2ab)Q_m + bP_m\right)\sqrt[3]{n} + \left((b^2+2ac)Q_m + cP_m\right)\sqrt[3]{n^2}.$$

Тому справедлива рівність

$$A_m = (a^2+2bcn)Q_m + aP_m + R_m.$$

Але, згідно з рівностями (3.9.6) маємо $a^2+2bcn = \frac{1}{3}(q^2+2p)$ і $a = \frac{q}{3}$, отже,

$$3A_m = (q^2+2p)[\,]_{m-2} + q(p[\,]_{m-3} + r[\,]_{m-4}) + 3r[\,]_{m-3} =$$

$$= (q^2+2p)[\,]_{m-2} + (qp+3r)[\,]_{m-3} + qr[\,]_{m-4}.$$

□

Позначивши у теоремі 3.9.2 параперманент

$$\begin{bmatrix} q &&&&&& \\ \frac{p}{q} & q &&&&& \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&&& \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&& \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q && \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m$$

через Q_m, для якого справедлива рекурсія

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, Q_0 = 1, Q_{<0} = 0,$$

коефіцієнти A_m, B_m, C_m можна знайти із рекурсій

$$3A_m = qQ_{m-1} + 2pQ_{m-2} + 3rQ_{m-3},$$

$$B_m = bQ_{m-1} + (nc^2 - ab)Q_{m-2},$$

$$C_m = cQ_{m-1} + (b^2 - ac)Q_{m-2}, m = 1, 2, \ldots.$$

Означення 3.9.1. *Кубічна форма виду $x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$, яка є коренем незвідного над полем раціональних чисел кубічного рівняння*

$$x^3 = qx^2 + px + 1,\ q, p \in \mathbb{N}$$

*називається **цілою кубічною одиницею**.*

Відшукання цілих кубічних одиниць рівнозначне розв'язанню деякого діофантового рівняння з трьома невідомими. Справедлива наступна

Теорема 3.9.3. *Діофантове рівняння*

$$|F(3,m)| = det \begin{pmatrix} s_0 & s_2m & s_1m \\ s_1 & s_0 & s_2m \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{pmatrix} = s_0^3 + s_1^3m + s_2^3m^2 - 3s_0s_1s_2m = 1, \quad (3.9.8)$$

має розв'язки:

1) $m = \dfrac{k}{n}(p-3), s_0 = (p-2)(p-1)-1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1), \quad (3.9.9)$

2) $m = \dfrac{k}{n}(p+3), s_0 = (p+2)(p+1)-1, s_1 = kn(p+2), s_2 = n(p+1), \quad (3.9.10)$

де $p = k^2n$.

Доведення. Доведення цієї теореми випливає із безпосередньої підстановки цього розв'язку в рівняння чи доведення того факту, що відповідний детермінант дорівнює одиниці при довільних значеннях параметрів k та n. □

Приклад 3.9.1. При допомозі розв'язку (3.9.10) діофантового рівняння (3.9.8) можна, наприклад, отримати його числовий розв'язок:

$m = 723987228393108691193640947846484436296496962279511135$

974934755582575468179641313855769259727641974609798138893255
525211182516975159833221705921278768192182515320441657882401
010319428973812885522960333217672876733752301462230992931472
909904767713450913240634917893148613016192814762213558096464
402885840589676123168302402549079960138122269110454764380482
620797212301828876999333286096636315349989543361123952286204
679568796728357647509618040687075931376908228422344437391718
598847301096960325148718064874625829071932050706560411935363
097129685477802808489613517468157406211390960108809283162275
086186714073920595021715659951203220403390183303468032708161
048148186272608066667799184997780960378585296561952602849633
261805881923550356499415702867592774593662323899734807289980
768201261654488304289541162853189580522455748182295602375207
298343703588386419599807672013076867243091847913861105093811

84003,

$s_0 = 5241575068763353274345186852093150332602451917539901799$

932282202278664005900121988404431292090932896640188251981680
326006813119732590132197563293690094647723171139535411516659
033189312863606609940147337891254811171282064557496488402243

617969658697073506591959974748435341221226735197582720381982
299223922948600684651564931177032848265679312201428827959001
983962562284328721926456192013117840486119368302870988948460
525587477841663879827970098875001133833949548499240589613091
535101060988495239283487157834796036977947636759176039961934
635983735619442324532910010967441297842323402115179325365224
245869281413952853346561463816495884323228588257539790111535
747953054994512900080325152302710423732719820889455301956641
861857282819629676959400601048120714983887659901278623613182
407879535162028668083576182989214435953539550841881883975282
254526281252669102943716630553173127420155080795347352070812
016381586784193433265072280590538909341829945733502452641625
931520640623887413956468162623695016290163104755307070450565
018386797664109367099985840845436742946338689084059438529370
980293569397369513919276599750601135570615318764192038306604
625048781009391683175362913228909806064167749424746695866250
167155583420998090725390393566830479390865308186951243348805
128955195908146359128484607204108672995078355407650230047302
525656852598329814864510572426666443716411444025574130235274
997855448580076587298245238361118200320906537084395631166706
552169049171921781816738304163317987099463732868320419686342
623468541037782483471350549375617711059947138423616726380877
798997774685802919400817546371507105036207154258163449863192
006072439921566891914553763235700570806637937053080647921850

6593121494311386784434613714067074705669606475910549586665075374186844787980078612567782376642332712723975182894476999955
52001,

$s_1 =$ 58373828124530801927825100126860568959532071853240731633268979819579336829496955135079834910294869200121886275044941778939216579582203887840013702758560980373830855317629635229711891563216831034766488845541211457079196270548221350249967135983227928957357758127145085229347721013613526838614327200739001141069122270582712638354885141737762109297130317281430206589809593980296361201224876516148191735469903171077865171784102154008563438582147165534263704239514805530966757127744689580776993398327054879041420901682004087227702011415826645604524494056421294402503570986854254460745669180602197911323630071627464081158329545416278857980216355039476429253496842825340146472166574341754608022287080116851708951507723255710876155502923369318293090135720090927670090803257575235365915100139926187549580683299975474758695310481426024472421187784938063791246267457642022742603041407146638435549578959108986984141864331273243233675792631270487645590734053060717718825968269516216380347974683397583398997679736612169507649135984161710911170712590671935672746045751850759768836994294293260045901245782080429690223130068585211589393564284498506424166582158884063816349543639722459709537738311132591909051453536519104233872536292048033092748741450562617333162244144188198827751199541097564337997956703777066684016802402252447983420448669006585298426071993786161597675522970466736914808012641717662482042465211657049448973108237283948135748482750270978220905041313944575789878263858106342365675264976461233415398

87200,

$s_2 =$ 65009157843010667063157082954842012542296162014985030332259365136150509934201896167016168301783780719008364704901546577320674571799571576573337948512560348949681362643307633264830014041782150655564820154700950557704403363149874047075391186878436078836387537851530458319992145674832832669630333244686279597764060393261309052804227337746032408101303467647074233553720827364016803472647079673744595044148660714278073683891327355939099330211768285974174940847026047087656570621338643157777017705548904875640192764852091665327884472292890325217674511760092435075005413248920875093881274805993183720949993018115854079321945067200149553418925746124536507598903538444726373575409639765980588423061002677670405839262002203313947727565564297205463435297711983538176350735903999315307267003419720236219155394552870841021541474981481944647062907384479685424501974211405389277324290201416322623051925232679 17

4253303246815482075076715184776447452047138710888040784149905419190342005782121402808340016963171777670492063044259994221591800676192060144346556791735281733243987748333097796092409284882675684390447488162087773570416575255806069259800573170889068321607148421554468505968982500055572360906219657504683044 0,

де $n = k = \lfloor 10^{300}\{10^{10}\pi\}\rfloor + 374$, а символом $\{\cdot\}$ позначено дробову частину числа.

В цьому прикладі m — просте 900-цифрове число, а s_0, s_1, s_2 — числа, що містять відповідно по $1800, 1500, 1300$ цифр.

Спряжені до наведених в теоремі 3.9.3 розв'язків рівняння (3.9.8) також є розв'язками цього рівняння. Ось ці розв'язки:

$$m = \frac{k}{n}(p-3), \overline{s_0} = 1, \overline{s_1} = -nk, \overline{s_2} = n,$$

$$m = \frac{k}{n}(p+3), \overline{s_0} = 1, \overline{s_1} = nk, \overline{s_2} = -n,$$

де $p = k^2 n$.

Цікавими виявляються і розв'язки:

$$m = \frac{k}{n} \cdot \frac{p^4 - 6p^3 + 12p^2 - 9p + 3}{(p-1)^3},$$

$$s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$$

та

$$m = \frac{k}{n} \cdot \frac{p^4 - 6p^3 + 12p^2 - 9p + 3}{(p-1)^3}, s_0 = 1, s_1 = -kn, s_2 = n,$$

де $p = k^2 n$.

Для відшукання раціональних одиниць послідовних натуральних чисел можна скористатися формулами

2) $m,\ s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$

де $p = k^2 n, n = \frac{3k}{k^3 - m}$,

2) $m,\ s_0 = (p-2)(p-1) - 1, s_1 = kn(p-2), s_2 = n(p-1),$

де $p = k^2 n, n = \frac{3k}{k^3 + m}$.

Використовуючи останні дві формули можна знайти раціональні одиниці кубічних полів для довільного натурального числа m.

У [24], [155] наведено таблиці цілих одиниць для всіх натуральних значень не більших за 70 та 250 відповідно.

Наведемо таблицю раціональних одиниць для всіх простих чисел m, які не перевищують 2000 (див. додаток 6 на стор. 458).

3.9.1 Раціональні наближення кубічних форм

Теорема 3.9.4. *Нехай*

$$n = k^3 \pm 3 \cdot \frac{k}{m}, s_0 = k^4 m^2 \pm 3k^2 m + 1, s_1 = k^3 m^2 \pm 2km, s_2 = k^2 m^2 \pm m, \tag{3.9.11}$$

причому існує скінченна границя

$$\lim_{r\to\infty} A_r,$$

де

$$A_r = \frac{P_r}{P_{r-1}} = \left[\begin{array}{c|cccccc} 3s_0 & & & & & & \\ -\frac{1}{s_0} & 3s_0 & & & & & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{s_0} & 3s_0 & & & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{s_0} & 3s_0 & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{s_0} & 3s_0 & & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{s_0} & 3s_0 \end{array}\right]_r,$$

тоді A_r слугує r-тим раціональним наближенням до значення кубічної форми

$$s_0 + s_1\sqrt[3]{n} + s_2\sqrt[3]{n^2},$$

причому параперманенти P_r, на базі яких будуються рекурентні дроби, задовольняють рекурентне рівняння

$$P_r = 3s_0P_{r-1} - 3P_{r-2} + P_{r-3}$$

із початковою умовою $P_0 = 1, P_{<0} = 0$.

Доведення. Позаяк коефіцієнти кубічної форми (3.9.2), що задовольняє кубічне рівняння

$$x^3 = qx^2 + px + r$$

пов'язані з його коефіцієнтами співвідношеннями (3.9.6), то враховуючи співвідношення (3.9.11) маємо

$$q = 3s_0, p = -3, r = 1.$$

Дальше теорема випливає з теореми 3.8.1. □

Наведемо приклади деяких кубічних форм та відповідні їм 2-періодичні рекурентні дроби.

$$\alpha = \sqrt[3]{N^3+1}, \quad \beta = (\sqrt[3]{N^3+1})^2 - N\sqrt[3]{N^3+1} + N^2,$$

$$\alpha = \left[\begin{array}{c|cccccc} N & & & & & & \\ \frac{0}{2N} & 2N & & & & & \\ \frac{1}{N^2} & N & N & & & & \\ 0 & \frac{1}{0} & \frac{0}{2N} & 2N & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{N^2} & N & N & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0} & \frac{0}{2N} & 2N & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_\infty, \qquad (3.9.12)$$

$$\beta = \left[\begin{array}{c|cccccc} N^2 & & & & & & \\ \frac{1}{2N} & 2N & & & & & \\ 0 & N & N & & & & \\ 0 & \frac{1}{0} & \frac{0}{2N} & 2N & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{N^2} & N & N & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0} & \frac{0}{2N} & 2N & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array}\right]_\infty, \qquad (3.9.13)$$

3.10 Алгебраїчні форми n-го порядку

Означення 3.10.1. ***Алгебраїчною*** *(n, m)*-***формою*** *(далі коротко (n, m)*-***формою***) *назвемо дійсне число*

$$x = F(n, m) = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},\ n \in \mathbb{N},\ s_i, m \in \mathbb{Q}, \qquad (3.10.1)$$

або n-вимірний вектор

$$x = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \qquad (3.10.2)$$

коефіцієнтів цього числа, яке є коренем незвідного над полем раціональних чисел рівняння

$$x^n = a_{n1}x^{n-1} + a_{n2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n} \qquad (3.10.3)$$

з цілими коефіцієнтами.

1. Ізоморфізм (n, m)-форм із деякими класами матриць

Нехай задано дві (n, m)-форми

$$x' = s'_0 + s'_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}, \qquad (3.10.4)$$

$$x'' = s''_0 + s''_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s''_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}. \qquad (3.10.5)$$

Легко переконатися в тому, що добуток $x'x''$ цих (n, m)-форм є (n, m)-формою виду

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},$$

де

$$s_i = \sum_{j=0}^{i} s'_j s''_{i-j} + m \sum_{j=i+1}^{n-1} s'_j s''_{i-j},\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.10.6}$$

(n, m)-формам (3.10.1), (3.10.2) поставимо у відповідність циркулянт n-го порядку

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} \\ s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s_3\sqrt[n]{m^3} & s_2\sqrt[n]{m^2} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & \cdots & s_4\sqrt[n]{m^4} & s_3\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s_{n-4}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 \end{pmatrix} \tag{3.10.7}$$

та матрицю виду

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}. \tag{3.10.8}$$

Кожна з останніх двох матриць однозначно задається своїм першим стовпцем.

Нехай (n, m)-формам (3.10.4), (3.10.5) відповідають матриці X' та X''. Очевидно, що елемент s_i першого стовпця матриці $X = X'X''$ збігається з елементом s_i, що задається рівністю (3.10.6). Отже, справедлива наступна

Теорема 3.10.1. *Множини (n, m)-форм* (3.10.1), (3.10.2) *ізоморфні відповідно множинам матриць* (3.10.7), (3.10.8).

Таким чином, k-тому степеню (n, m)-форми (3.10.4) відповідає k-тий степінь матриці

$$X' = \begin{pmatrix} s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s'_2\sqrt[n]{m^2} & s'_1\sqrt[n]{m} \\ s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s'_3\sqrt[n]{m^3} & s'_2\sqrt[n]{m^2} \\ s'_2\sqrt[n]{m^2} & s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 & \cdots & s'_4\sqrt[n]{m^4} & s'_3\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s'_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s'_{n-4}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s'_0 & s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s'_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s'_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s'_1\sqrt[n]{m} & s'_0 \end{pmatrix}$$

чи матриці

$$X' = \begin{pmatrix} s'_0 & ms_{n-1} & ms'_{n-2} & \cdots & ms'_2 & ms'_1 \\ s'_1 & s'_0 & ms'_{n-1} & \cdots & ms'_3 & ms'_2 \\ s'_2 & s'_1 & s'_0 & \cdots & ms'_4 & ms'_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s'_{n-2} & s'_{n-3} & s'_{n-4} & \cdots & s'_0 & ms'_{n-1} \\ s'_{n-1} & s'_{n-2} & s'_{n-3} & \cdots & s'_1 & s'_0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно також, що якщо останні дві матриці перемножити відповідно на матриці-стовпці

$$X'' = \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1\sqrt[n]{m} \\ s''_2\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s''_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s''_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix},\ X'' = \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \end{pmatrix},$$

то отримаємо відповідно матриці-стовпці

$$X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1\sqrt[n]{m} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{pmatrix},$$

де s_i задаються рівностями (3.10.6).

2. Для довільної (n, m)-форми

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

можна знайти лише одну (n, m)-форму

$$\overline{x} = \overline{s_0} + \overline{s_1}\sqrt[n]{m} + \ldots + \overline{s_{n-1}}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

таку, що їх добуток $x\overline{x}$ є деяким дійсним числом. При цьому (n, m)-форму $\overline{x}$ називають спряженою (n, m)-формою до (n, m)-форми $x = F(n, m)$, а їх добуток — нормою останньої і позначують через $|F(n, m)|$.

Нехай X і $\overline{X}$ — матриці відповідні (n, m)-формі

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

та спряженій (n, m)-формі $\overline{x}$. Тоді

$$X \cdot \overline{X} = |F(n, m) \cdot |E,$$

де E — одинична матриця. причому, норма (n, m)-форми x дорівнює детермінанту матриці X, а матриця відповідна спряженій (n, m)-формі $\overline{x}$ є оберненою матрицею до матриці X, помноженою на детермінант матриці X.

Таким чином, n-вимірним узагальненням рівняння Пелля

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} = s_0^2 - ms_1^2 = \pm 1$$

є рівняння

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (3.10.9)$$

для (n, m)-форми $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$.

Наведемо приклади діофантових рівнянь, аналогічних рівнянню Пелля:

$$|F(3, m)| = s_0^3 + s_1^3 m + s_2^3 m^2 - 3s_0 s_1 s_2 m = 1,$$

$$|F(4, m)| = s_0^4 - s_1^4 m + s_2^4 m^2 - s_3^4 m^3 +$$
$$+4(s_0 s_1^2 s_2 m - s_0^2 s_1 s_3 m + s_0 s_2 s_3^2 m^2 - s_1 s_2^2 s_3 m^2) -$$
$$-2(s_0^2 s_2^2 m - s_1^2 s_3^2 m^2) = 1.$$

$$|F(5, m)| = (s_0^5 + s_1^5 m + s_2^5 m^2 + s_3^5 m^3 + s_4^5 m^4) -$$
$$-5(s_0^3 s_1 s_4 m + s_0^3 s_2 s_3 m + s_1^3 s_0 s_2 m + s_1^3 s_3 s_4 m^2 + s_2^3 s_0 s_4 m^2 + + s_2^3 s_1 s_3 m^2$$
$$+ s_3^3 s_0 s_1 m^2 + s_3^3 s_2 s_4 m^3 + s_4^3 s_0 s_3 m^3 + s_4^3 s_1 s_2 m^3) + 5(s_0^2 s_1^2 s_3 m + s_0^2 s_2 s_4^2 m^2$$
$$+ s_1 s_0^2 s_2^2 m + s_4 s_0^2 s_3^2 m^2 + s_0 s_4^2 s_1^2 m^2 + s_0 s_2^2 s_3^2 m^2 + s_1^2 s_4 s_2^2 m^2 + s_2 s_1^2 s_3^2 m^2$$
$$+ s_1 s_3^2 s_4^2 m^3 + s_4^2 s_2^2 s_3 m^3) - 5s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 m^2 = 1.$$

$$|F(6, m)| = s_0^6 - s_1^6 m + s_2^6 m^2 - s_3^6 m^3 + s_4^6 m^4 - s_5^6 m^5 +$$
$$3(s_0^2 s_3^4 m^2 - s_3^2 s_0^4 m + s_1^4 s_4^2 m^2 - s_1^2 s_4^4 m^3 + s_5^4 s_2^2 m^4 - s_5^2 s_2^4 m^3) +$$
$$2(s_0^3 s_4^3 m^2 + s_0^3 s_2^3 m - s_5^3 s_1^3 m^3 - s_1^3 s_3^3 m^2 + s_2^3 s_4^3 m^3 - s_5^3 s_3^3 m^4) +$$
$$6(s_0 s_1^4 s_2 m - s_0^4 s_5 s_1 m - s_0^4 s_4 s_2 m - s_0 s_2^4 s_4 m^2 - s_0 s_4^4 s_2 m^3 + s_0 s_5^4 s_4 m^4 +$$
$$s_5 s_1 s_3^4 m^3 + s_5 s_1^4 s_3 m^2 + s_5^4 s_1 s_3 m^4 - s_1 s_2^4 s_3 m^2 + s_2 s_3^4 s_4 m^3 - s_5 s_3 s_4^4 m^4)$$
$$+6(s_0^3 s_5^2 s_2 m^2 + s_0^3 s_4 s_1^2 m - s_1^3 s_0^2 s_3 m - s_5^3 s_3 s_0^2 m^3 + s_0 s_4^3 s_3^2 m^3 + s_0 s_2^3 s_3^2 m^2 -$$

$$s_5s_1^3s_2^2m^2-s_5^3s_1s_4^2m^4-s_1s_4^2s_3^3m^3+s_1^2s_2^3s_4m^2-s_5s_2^2s_3^3m^3+s_5^2s_2s_4^3m^4)+$$
$$18(s_3^2s_5^2s_0s_2m^3+s_3^2s_4s_1^2s_0m^2-s_4^2s_3s_1s_0^2m^2-s_2^2s_0^2s_3s_5m^2-s_5s_1s_2^2s_4^2m^3+$$
$$s_1^2s_5^2s_2s_4m^3)+9(s_1^2s_0^2s_5^2m^2+s_2^2s_0^2s_4^2m^2-s_0^2s_1^2s_2^2m-s_0^2s_4^2s_5^2m^3-s_1^2s_5^2s_3^2m^3+$$
$$s_1^2s_2^2s_3^2m^2-s_2^2s_4^2s_3^2m^3+s_3^2s_5^2s_4^2m^4)+12(s_1s_0^3s_3s_2m+s_4s_3s_5s_0^3m^2-$$
$$s_0s_1s_5^3s_2m^3+s_0s_1s_2^3s_5m^2-s_0s_1^3s_5s_4m^2-s_0s_4s_3^3s_5m^3-s_0s_2s_3^3s_1m^2+$$
$$s_0s_5s_4^3s_1m^3-s_1^3s_4s_3s_2m^2+s_1s_4^3s_3s_2m^3+s_2^3s_5s_3s_4m^3-s_2s_5^3s_3s_4m^4).$$

3.10.1 Зв'язок (n,m)-форм з алгебраїчними рівняннями

Знайдемо цілі коефіцієнти рівняння

$$x^n=a_{n1}x^{n-1}+a_{n2}x^{n-2}+\ldots+a_{n,n-1}x^1+a_{n,n},$$

коренем якого є (n,m)-форма

$$x=F(n,m)=s_0+s_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},\ s_i\in\mathbb{Q},\ m\in\mathbb{N}.$$

Нехай маємо загальну матрицю

$$X=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}. \tag{3.10.10}$$

Головний мінор r-го порядку цієї матриці позначимо через (див. [18], стор. 13):

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_r}\\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_r}\\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ a_{i_r,i_1} & a_{i_r,i_2} & \cdots & a_{i_r,i_r}\end{vmatrix},$$

де

$$i_1<i_2<\ldots<i_r.$$

Характеристичне рівняння

$$det(X-xE)=0,$$

матриці (3.10.10), як відомо, має розгорнутий вигляд

$$x^n=\alpha_{n,1}x^{n-1}+\alpha_{n,2}x^{n-2}+\ldots+\alpha_{n,n-1}x^1+\alpha_{n,n}, \tag{3.10.11}$$

де

$$\alpha_{n,j}=(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant n}X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_j\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_j\end{pmatrix}. \tag{3.10.12}$$

Згідно з теоремою Гамільтона-Келі, кожна квадратна матриця задовольняє своє характеристичне рівняння, тому справедлива тотожність

$$X^n=\alpha_{n,1}X^{n-1}+\alpha_{n,2}X^{n-2}+\ldots+\alpha_{n,n-1}X^1+\alpha_{n,n}, \tag{3.10.13}$$

з коефіцієнтами (3.10.12), де X — матриця (3.10.10).

Нехай матриця X у рівнянні (3.10.13) задається рівністю (3.10.8), тоді коефіцієнти $a_{n,j}$ рівняння (3.10.3), коренем якого є (n,m)-форма (3.10.2), можна знайти користуючись рівностями (3.10.12). Таким чином, справедлива

Теорема 3.10.2. *Якщо (n,m)-форма*

$$x=s_0+s_1\sqrt[n]{m}+\ldots+s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

є коренем рівняння

$$x^n=a_{n1}x^{n-1}+a_{n2}x^{n-2}+\ldots+a_{n,n-1}x^1+a_{n,n},$$

то коефіцієнти цього рівняння дорівнюють

$$a_{n,j}=(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_j\leqslant n}X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_j\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_j\end{pmatrix},$$

де

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_j \\ i_1 & i_2 & \dots & i_j \end{pmatrix}$$

— головні мінори матриці

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}.$$

Наведемо формули для обчислень коефіцієнтів алгебраїчних рівнянь, коренями яких є (n, m)-форми при $n = 2, 3, 4, 5$.

$$a_{21} = 2s_0,\ a_{22} = -\begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix};$$

$$a_{31} = 3s_0,\ a_{32} = -3\begin{vmatrix} s_0 & ms_2 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix},\ a_{33} = \begin{vmatrix} s_0 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_o \end{vmatrix};$$

$$a_{41} = 4s_0,\ a_{42} = -4\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} s_0 & ms_2 \\ s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{43} = 4\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},\ a_{44} = -\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}.$$

$$a_{51} = 5s_0,\ a_{52} = -5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} s_0 & ms_3 \\ s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{53} = 5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_0 \end{vmatrix},$$

$$a_{54} = -5\begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\ s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix},\ a_{55} = \begin{vmatrix} s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 & ms_3 \\ s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_4 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 \end{vmatrix}$$

Справедлива наступна

Теорема 3.10.3. $(n, m^n + 1)$*-форма виду*

$$m^{n-1} + m^{n-2}\sqrt[n]{m^n+1} + \ldots + m\sqrt[n]{(m^n+1)^{n-2}} + \sqrt[n]{(m^n+1)^{n-1}} \tag{3.10.14}$$

є коренем алгебраїчного рівняння

$$x^n = \binom{n}{1}m^{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{2}m^{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}mx + \binom{n}{n} \tag{3.10.15}$$

Доведення. Позаяк всі головні мінори одного порядку матриці

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \dots & m^{n-3}(m^n+1) & m^{n-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \dots & m^{n-4}(m^n+1) & m^{n-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \dots & m^{n-5}(m^n+1) & m^{n-4}(m^n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & m^2 & m^3 & \dots & m^{n-1} & m^n+1 \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^{n-2} & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

рівні між собою, то достатньо обчислити один із них. Обчислимо головний мінор s-того порядку

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \cdots & m^{s-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \cdots & m^{s-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{s-4}(m^n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m^{n-s} & m^{n-s+1} & m^{n-s+2} & \cdots & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

Перемножимо перший стовпець на $-m^r, r = 1, 2, \ldots, s-1$ та додамо до $(r+1)$-го стовпця, тоді отримаємо детермінант

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & 1 & m & \cdots & m^{s-2} \\ m^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & m^{s-3} \\ m^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & m^{s-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^{n-s} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо останній детермінант за елементами першого стовпця, отримаємо

$$(-1)^{s+1}m^{n-s}.$$

Таким чином, згідно з теоремою 3.10.2 коефіцієнт $a_{n.s}$ дорівнює

$$(-1)^{s-1}(-1)^{s+1}m^{n-s}\binom{n}{s} = m^{n-s}\binom{n}{s}.$$

□

Теорема 3.10.4. (n, m^n-1)*-форма виду*

$$m^{n-1} + m^{n-2}\sqrt[n]{m^n-1} + \ldots + m\sqrt[n]{(m^n-1)^{n-2}} + \sqrt[n]{(m^n-1)^{n-1}} \tag{3.10.16}$$

є коренем алгебраїчного рівняння

$$x^n = \binom{n}{1}m^{n-1}x^{n-1} - \binom{n}{2}m^{n-2}x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}mx+$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n} \tag{3.10.17}$$

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 3.10.3 з тією лише різницею, що мінор s-того порядку має вигляд

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n-1 & m(m^n-1) & \cdots & m^{s-2}(m^n-1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n-1 & \cdots & m^{s-3}(m^n-1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{s-4}(m^n-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m^{n-s} & m^{n-s+1} & m^{n-s+2} & \cdots & m^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тому

$$a_{ns} = (-1)^{s-1}m^{n-s}\binom{n}{s}.$$

□

3.10.2 Поля (n, m)-форм та їх одиниці

При заданих натуральних числах n та m та звичайних операціях суми та добутку (n, m)-форми утворюють числове поле.

Для вивчення структури числових полів важливою задачею є дослідження кільця цілих чисел, зокрема їх фундаментальних одиниць (див., наприклад, [24],[10],[16].)

Дослідження цілих одиниць тісно пов'язане з відшуканням цілих чи раціональних коренів діофантових рівнянь, зокрема (у випадку кубічних полів) трьохвимірного узагальнення рівняння Пелля

$$x^3 + my^3 + m^2z^3 - 3mxyz = 1, \tag{3.10.18}$$

про яке йшлося вище. Над розв'язанням цієї проблеми працювали такі відомі математики як Ерміт, Якобі, Пуанкаре, Гурвіц.

Запишемо деякі взаємно спряжені пари загальних розв'язків діофантових рівнянь вищих порядків (3.10.9):

1) $|F(4,m)| = 1 : m = \frac{4k}{r}\cdot(1-rk^3), s_0 = 1, s_1 = -2rk^2, s_2 = 2rk, s_3 = -r,$

2) $|F(4,m)| = 1 : m = \frac{4k}{r}\cdot(1-rk^3), s_0 = 1, s_1 = 2rk^2, s_2 = 2rk, s_3 = r,$

$$1)\ |F(5,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^4 - 5),$$
$$s_0 = 1, s_1 = -rk^3, s_2 = 2rk^2, s_3 = -2rk, s_4 = r,$$
$$2)\ |F(5,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^4 - 5),$$
$$s_0 = 1 + 30r^2k^8 - 25rk^4 + r^4k^{16} - 10r^3k^{12},$$

$$s_1 = rk^3(r^3k^{12} - 9r^2k^8 + 23rk^4 - 14),$$
$$s_2 = rk^2(r^3k^{12} - 8r^2k^8 + 17rk^4 - 7),$$
$$s_3 = kr(r^3k^{12} - 7r^2k^8 + 12rk^4 - 3),$$
$$s_4 = r(r^3k^{12} - 6r^2k^8 + 8rk^4 - 1)$$

$$3)\, |F(5,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^4 + 5),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^3, s_2 = -2rk^2, s_3 = 2rk, s_4 = -r,$$
$$4)\, |F(5,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^4 + 5),$$
$$s_0 = 1 + 30r^2k^8 + 25rk^4 + r^4k^{16} + 10r^3k^{12},$$
$$s_1 = rk^3(r^3k^{12} + 9r^2k^8 + 23rk^4 + 14),$$
$$s_2 = rk^2(r^3k^{12} + 8r^2k^8 + 17rk^4 + 7),$$
$$s_3 = kr(r^3k^{12} + 7r^2k^8 + 12rk^4 + 3),$$
$$s_4 = r(r^3k^{12} + 6r^2k^8 + 8rk^4 + 1)$$

$$1)\, |F(7,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^6 - 7),$$
$$s_0 = 1, s_1 = -rk^5, s_2 = 3rk^4, s_3 = -5rk^3, s_4 = 5rk^2,$$
$$s_5 = -3rk, s_6 = r,$$
$$2)\, |F(7,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^6 - 7),$$
$$s_0 = r^6k^{36} - 21r^5k^{30} + 161r^4k^{24} - 539r^3k^{18} + 721r^2k^{12} - 245rk^6 + 1,$$
$$s_1 = rk^5(r^5k^{30} - 20r^4k^{24} + 144r^3k^{18} - 442r^2k^{12} + 516rk^6 - 132),$$
$$s_2 = rk^4(r^5k^{30} - 19r^4k^{24} + 128r^3k^{18} - 358r^2k^{12} + 360rk^6 - 66),$$
$$s_3 = rk^3(r^5k^{30} - 18r^4k^{24} + 113r^3k^{18} - 286r^2k^{12} + 244rk^6 - 30),$$
$$s_4 = rk^2(r^5k^{30} - 17r^4k^{24} + 99r^3k^{18} - 225r^2k^{12} + 160rk^6 - 12),$$

$$s_5 = rk(r^5k^{30} - 16r^4k^{24} + 86r^3k^{18} - 174r^2k^{12} + 101rk^6 - 4),$$
$$s_6 = r(r^5k^{30} - 15r^4k^{24} + 74r^3k^{18} - 132r^2k^{12} + 61rk^6 - 1)$$

$$3)\, |F(7,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^6 + 7),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^5, s_2 = -3rk^4, s_3 = 5rk^3, s_4 = -5rk^2,$$
$$s_5 = 3rk, s_6 = -r,$$
$$4)\, |F(7,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^6 + 7),$$
$$s_0 = r^6k^{36} + 21r^5k^{30} + 161r^4k^{24} + 539r^3k^{18} + 721r^2k^{12} + 245rk^6 + 1,$$
$$s_1 = rk^5(r^5k^{30} + 20r^4k^{24} + 144r^3k^{18} + 442r^2k^{12} + 516rk^6 + 132),$$
$$s_2 = rk^4(r^5k^{30} + 19r^4k^{24} + 128r^3k^{18} + 358r^2k^{12} + 360rk^6 + 66),$$
$$s_3 = rk^3(r^5k^{30} + 18r^4k^{24} + 113r^3k^{18} + 286r^2k^{12} + 244rk^6 + 30),$$
$$s_4 = rk^2(r^5k^{30} + 17r^4k^{24} + 99r^3k^{18} + 225r^2k^{12} + 160rk^6 + 12),$$
$$s_5 = rk(r^5k^{30} + 16r^4k^{24} + 86r^3k^{18} + 174r^2k^{12} + 101rk^6 + 4),$$
$$s_6 = r(r^5k^{30} + 15r^4k^{24} + 74r^3k^{18} + 132r^2k^{12} + 61rk^6 + 1)$$

$$1)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^8 - 3),$$
$$s_0 = 1, s_1 = -rk^7, s_2 = rk^6, s_3 = -rk^5, s_4 = 2rk^4,$$
$$s_5 = -2rk^3, s_6 = rk^2, s_7 = -rk, s_8 = r,$$
$$2)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r}\cdot(rk^8 - 3),$$
$$s_0 = 9m^4k^{32} - 54k^{24}m^3 + 97m^2k^{16} - 48mk^8 + 1,$$
$$s_1 = mk^7(9k^{24}m^3 - 51m^2k^{16} + 84mk^8 - 35),$$
$$s_2 = mk^6(9k^{24}m^3 - 48m^2k^{16} + 72mk^8 - 25),$$
$$s_3 = k^5m(9k^{24}m^3 - 45m^2k^{16} + 61mk^8 - 17),$$

$$s_4 = mk^4(9k^{24}m^3 - 42m^2k^{16} + 51mk^8 - 11),$$

$$s_5 = k^3m(9k^{24}m^3 - 39m^2k^{16} + 42mk^8 - 7),$$

$$s_6 = k^2m(9k^{24}m^3 - 36m^2k^{16} + 34mk^8 - 4),$$

$$s_7 = mk(9k^{24}m^3 - 33m^2k^{16} + 27mk^8 - 2),$$

$$s_8 = m(9k^{24}m^3 - 30m^2k^{16} + 21mk^8 - 1),$$

$$3)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 + 3),$$

$$s_0 = 1, s_1 = rk^7, s_2 = -rk^6, s_3 = rk^5, s_4 = -2rk^4,$$

$$s_5 = 2rk^3, s_6 = -rk^2, s_7 = rk, s_8 = -r,$$

$$4)\, |F(9,m)| = 1 : m = \frac{k}{r} \cdot (rk^8 + 3),$$

$$s_0 = 9m^4k^{32} + 54k^{24}m^3 + 97m^2k^{16} + 48mk^8 + 1,$$

$$s_1 = mk^7(9k^{24}m^3 + 51m^2k^{16} + 84mk^8 + 35),$$

$$s_2 = mk^6(9k^{24}m^3 + 48m^2k^{16} + 72mk^8 + 25),$$

$$s_3 = k^5m(9k^{24}m^3 + 45m^2k^{16} + 61mk^8 + 17),$$

$$s_4 = mk^4(9k^{24}m^3 + 42m^2k^{16} + 51mk^8 + 11),$$

$$s_5 = k^3m(9k^{24}m^3 + 39m^2k^{16} + 42mk^8 + 7),$$

$$s_6 = k^2m(9k^{24}m^3 + 36m^2k^{16} + 34mk^8 + 4),$$

$$s_7 = mk(9k^{24}m^3 + 33m^2k^{16} + 27mk^8 + 2),$$

$$s_8 = m(9k^{24}m^3 + 30m^2k^{16} + 21mk^8 + 1),$$

Розв'язками діофантового рівняння

$$|F(11,m)| =$$

$$\begin{vmatrix}
s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 & ms_1 \\
s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 & ms_2 \\
s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 & ms_3 \\
s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 & ms_4 \\
s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 & ms_5 \\
s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 & ms_6 \\
s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 & ms_7 \\
s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 & ms_8 \\
s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} & ms_9 \\
s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & ms_{10} \\
s_{10} & s_9 & s_8 & s_7 & s_6 & s_5 & s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
\end{vmatrix} = 1$$

є:

$$1)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} - 11),$$

$$s_0 = 1, s_1 = -rk^9, s_2 = 5rk^8, s_3 = -15rk^7,$$

$$s_4 = 30rk^6, s_5 = -42rk^5, s_6 = 42rk^4, s_7 = -30rk^3, s_8 = 15rk^2,$$

$$s_9 = -5rk, s_{10} = r,$$

$$2)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} - 11),$$

$$s_0 = r^{10}k^{100} - 55r^9k^{90} + 1265r^8k^{80} - 15730r^7k^{70} + 114037r^6k^{60} -$$

$$-483637r^5k^{50} + 1137015r^4k^{40} - 1295910r^3k^{30} + 527329r^2k^{20} -$$

$$-32065rk^{10} + 1,$$

$$s_1 = rk^9(r^9k^{90} - 54r^8k^{80} + 1216r^7k^{70} - 14749r^6k^{60} + 103758r^5k^{50} -$$

$$423776r^4k^{40} + 947934r^3k^{30} - 1005966r^2k^{20} + 363493rk^{10} - 16796),$$

$$s_2 = rk^8(r^9k^{90} - 53r^8k^{80} + 1168r^7k^{70} - 13811r^6k^{60} + 94212r^5k^{50} -$$

$$-370171r^4k^{40} + 786526r^3k^{30} - 774787r^2k^{20} + 246779rk^{10} - 8398),$$

$$s_3 = rk^7(r^9k^{90} - 52r^8k^{80} + 1121r^7k^{70} - 12915r^6k^{60} + 85362r^5k^{50} -$$

$$-322301r^4k^{40} + 649346r^3k^{30} - 591812r^2k^{20} + 164814rk^{10} - 3978),$$

$$s_4 = rk^6(r^9k^{90} - 51r^8k^{80} + 1075r^7k^{70} - 12060r^6k^{60} + 77172r^5k^{50} -$$
$$-279676r^4k^{40} + 533294r^3k^{30} - 448110r^2k^{20} + 108134rk^{10} - 1768),$$
$$s_5 = rk^5(r^9k^{90} - 50r^8k^{80} + 1030r^7k^{70} - 11245r^6k^{60} + 69607r^5k^{50} -$$
$$-241836r^4k^{40} + 435590r^3k^{30} - 336175r^2k^{20} + 69589rk^{10} - 728),$$
$$s_6 = rk^4(r^9k^{90} - 49r^8k^{80} + 986r^7k^{70} - 10469r^6k^{60} + 62633r^5k^{50} -$$
$$-208350r^4k^{40} + 353750r^3k^{30} - 249740r^2k^{20} + 43849rk^{10} - 273),$$
$$s_7 = rk^3(r^9k^{90} - 48r^8k^{80} + 943r^7k^{70} - 9731r^6k^{60} + 56217r^5k^{50} -$$
$$-178815r^4k^{40} + 285563r^3k^{30} - 183609r^2k^{20} + 26998rk^{10} - 91),$$
$$s_8 = rk^2(r^9k^{90} - 47r^8k^{80} + 901r^7k^{70} - 9030r^6k^{60} + 50327r^5k^{50} -$$
$$-152855r^4k^{40} + 229069r^3k^{30} - 133506r^2k^{20} + 16204rk^{10} - 26),$$
$$s_9 = rk(r^9k^{90} - 46r^8k^{80} + 860r^7k^{70} - 8365r^6k^{60} + 44932r^5k^{50} -$$
$$-130120r^4k^{40} + 182538r^3k^{30} - 95940r^2k^{20} + 9454rk^{10} - 6),$$
$$s_{10} = r(r^9k^{90} - 45r^8k^{80} + 820r^7k^{70} - 7735r^6k^{60} + 40002r^5k^{50} -$$
$$-110285r^4k^{40} + 144450r^3k^{30} - 68085r^2k^{20} + 5344rk^{10} - 1),$$

$$3)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} + 11),$$
$$s_0 = 1, s_1 = rk^9, s_2 = -5rk^8, s_3 = 15rk^7,$$
$$s_4 = -30rk^6, s_5 = 42rk^5, s_6 = -42rk^4, s_7 = 30rk^3, s_8 = -15rk^2,$$
$$s_9 = 5rk, s_{10} = -r,$$
$$4)\, m = \frac{k}{r} \cdot (rk^{10} + 11),$$
$$s_0 = r^{10}r^{100} + 55r^9k^{90} + 1265r^8k^{80} + 15730r^7k^{70} + 114037r^6k^{60} +$$
$$483637r^5k^{50} + 1137015r^4k^{40} + 1295910r^3k^{30} + 527329r^2k^{20} +$$
$$+32065rk^{10} + 1,$$

$$s_1 = rk^9(r^9k^{90} + 54r^8k^{80} + 1216r^7k^{70} + 14749r^6k^{60} + 103758r^5k^{50} +$$
$$423776r^4k^{40} + 947934r^3k^{30} + 1005966r^2k^{20} + 363493rk^{10} + 16796),$$
$$s_2 = rk^8(r^9k^{90} + 53r^8k^{80} + 1168r^7k^{70} + 13811r^6k^{60} + 94212r^5k^{50} +$$
$$+370171r^4k^{40} + 786526r^3k^{30} + 774787r^2k^{20} + 246779rk^{10} + 8398),$$
$$s_3 = rk^7(r^9k^{90} + 52r^8k^{80} + 1121r^7k^{70} + 12915r^6k^{60} + 85362r^5k^{50} +$$
$$+322301r^4k^{40} + 649346r^3k^{30} + 591812r^2k^{20} + 164814rk^{10} + 3978),$$
$$s_4 = rk^6(r^9k^{90} + 51r^8k^{80} + 1075r^7k^{70} + 12060r^6k^{60} + 77172r^5k^{50} +$$
$$+279676r^4k^{40} + 533294r^3k^{30} + 448110r^2k^{20} + 108134rk^{10} + 1768),$$
$$s_5 = rk^5(r^9k^{90} + 50r^8k^{80} + 1030r^7k^{70} + 11245r^6k^{60} + 69607r^5k^{50} +$$
$$+241836r^4k^{40} + 435590r^3k^{30} + 336175r^2k^{20} + 69589rk^{10} + 728),$$
$$s_6 = rk^4(r^9k^{90} + 49r^8k^{80} + 986r^7k^{70} + 10469r^6k^{60} + 62633r^5k^{50} +$$
$$+208350r^4k^{40} + 353750r^3k^{30} + 249740r^2k^{20} + 43849rk^{10} + 273),$$
$$s_7 = rk^3(r^9k^{90} + 48r^8k^{80} + 943r^7k^{70} + 9731r^6k^{60} + 56217r^5k^{50} +$$
$$+178815r^4k^{40} + 285563r^3k^{30} + 183609r^2k^{20} + 26998rk^{10} + 91),$$
$$s_8 = rk^2(r^9k^{90} + 47r^8k^{80} + 901r^7k^{70} + 9030r^6k^{60} + 50327r^5k^{50} +$$
$$+152855r^4k^{40} + 229069r^3k^{30} + 133506r^2k^{20} + 16204rk^{10} + 26),$$
$$s_9 = rk(r^9k^{90} + 46r^8k^{80} + 860r^7k^{70} + 8365r^6k^{60} + 44932r^5k^{50} +$$
$$+130120r^4k^{40} + 182538r^3k^{30} + 95940r^2k^{20} + 9454rk^{10} + 6),$$
$$s_{10} = r(r^9k^{90} + 45r^8k^{80} + 820r^7k^{70} + 7735r^6k^{60} + 40002r^5k^{50} +$$
$$+110285r^4k^{40} + 144450r^3k^{30} + 68085r^2k^{20} + 5344rk^{10} + 1)$$

і т. д.

Зауваження 3.10.1. *Для доведення того факту, що наведені вище формули є розв'язками відповідних діофантових рівнянь, достатньо показати, що відповідні цим рівнянням детермінанти дорівнюють одиниці. З цією метою слід вибрати простіші розв'язки 1) чи 3). Розв'язки 2) і 4) спряжені до розв'язків 1) і 3). Доведення залишаємо для читача.*

Зауваження 3.10.2. *Модулі коефіцієнтів многочленів, що є розв'язками діофантових рівнянь* $|F(2n-1,m)| = 1$, *очевидно пов'язані з числовим трикутником*

$$\begin{array}{lccccc} n=2: & 1 & & & & \\ n=3: & 1 & 2 & & & \\ n=4: & 1 & 3 & 5 & & \\ n=5: & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ n=6: & 1 & 5 & 15 & 30 & 42 \end{array},$$

а елементи цього числового трикутника із факторизацією числа $2n-1$.

Зауваження 3.10.3. *Вільні члени многочленів, що є розв'язками 2) та 4) також пов'язані з наведеним вище числовим трикутником.*

Наприклад, для модулів вільних членів $s_6^0, s_7^0, s_8^0, s_9^0, s_{10}^0$ *многочленів* $s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}$ *розв'язків 2) і 4) діофантового рівняння* $|F(11,m)| = 1$ *справедливі співвідношення:*

$$s_{10}^0 = 1,$$

$$s_9^0 - s_{10}^0 = 5,$$

$$s_8^0 - 2s_9^0 + s_{10}^0 = 15,$$

$$s_7^0 - 3s_8^0 + 3s_9^0 - s_{10}^0 = 30,$$

$$s_6^0 - 4s_7^0 + 6s_8^0 - 4s_9^0 + s_{10}^0 = 42.$$

Наведемо приклади розв'язків діофантового рівняння

$$|F(n,m)| = \pm 1,$$

які випливають з теорем 3.10.3, 3.10.4.

Теорема 3.10.5. *Розв'язками діофантових рівнянь*

$$|F(n, m^n - 1)| = 1, n = 2, 3, \ldots,$$

$$|F(2n-1, m^{2n-1} + 1)| = 1, n = 2, 3, \ldots,$$

$$|F(2n, m^{2n} + 1)| = -1, n = 1, 2, \ldots$$

є відповідно:

$$s_0 = m^{n-1}, s_1 = m^{n-2}, \ldots, s_{n-2} = m, s_{n-1} = 1,$$

$$s_0 = m^{2n-2}, s_1 = m^{2n-3}, \ldots, s_{2n-3} = m, s_{2n-2} = 1,$$

$$s_0 = m^{2n-1}, s_1 = m^{2n-2}, \ldots, s_{2n-2} = m, s_{2n-1} = 1.$$

Обчислення спряжених розв'язків до наведених в цій теоремі розв'язків залишаємо для читача.

3.11 Задача про шляхи на похилій діаграмі

"Як десь у світі є порядок,
немає кращої поради
ті обминати береги.
Там вас занудить від нудьги."
— Винарський В.

– Де мама? – запитала гостя.
— Пішла!
— Куди?
У північно-західному напрямку.[9]"

Задачі балотування та математичної статистики, задачі про випадкові блукання на решітках (див. [71], [138], [23]), породили новий напрям у комбінаторному аналізі, де вивчаються траєкторії на цілочисельних решітках. У зв'язку з цим природно виникають задачі про шляхи на цілочисельних решітках із різними природними обмеженнями [28]. Зокрема, є цілий ряд важливих задач, що стосуються шляхів на графах Ферре та похилих діаграмах.

Традиційною задачею, яка розглядається в цілому ряді підручників з кобінаторного аналізу є задача про число найкоротших шляхів, з дозволеними рухами вліво та вверх, від точки A до точки B на цілочисельній решітці зображеній на рисунку

[9]Надія Іванівна Слонова, актриса Московского театру сатири, у своїх спогадах розповідає, що зайшовши якось до Арнольдів, застала лише пятирічного Володимира. Там і відбувся цей діалог [4].

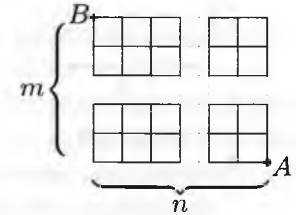


Рис. 3.1.

Як відомо, це число дорівнює

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

Наступна теорема дає розв'язок загальної задачі про цілочисельні решітки.

Теорема 3.11.1. [32]. *Число найкоротших шляхів між крайньою північно-західною і крайньою південно-східною точками на похилій діаграмі*

$$diagr(A, B),$$

де

$$A = \{a_1^{\lambda_1}, \dots, a_n^{\lambda_n}\},\ B = \{a_1^{\mu_1}, \dots, a_n^{\mu_n}\},$$

причому $\mu_i \leqslant \lambda_i,\ i = 1, 2, \dots, n,$ *дорівнює*

$$L(A, B) = L\begin{pmatrix}\lambda_1 \dots \lambda_n \\ \mu_1 \dots \mu_n\end{pmatrix} = ddet^{\circ}(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}, \tag{3.11.1}$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - \mu_j + j - i + 1, & \text{якщо } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 < 0. \end{cases} \tag{3.11.2}$$

Доведення. Очевидно, що число найкоротших шляхів на діаграмі

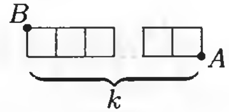


Рис. 3.2.

дорівнює $k+1$, де k — число клітинок цієї діаграми. Діаграма з рис. в термінах мультимножини може бути записана у вигляді $diagr\left(\{1^k\},\varnothing\right)$, тому

$$L\left(\begin{array}{c}\underbrace{1,\ldots,1}_{k}\\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k}\end{array}\right)=\left\langle\begin{array}{ccccc}2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\end{array}\right\rangle_k^{\circ}=k+1.$$

Розглянемо загальну похилу діаграму $diagr(A,B)$.

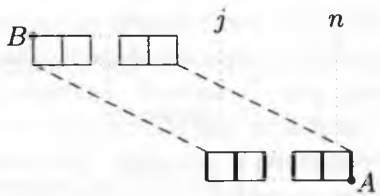


Рис. 3.3.

На рис. зображено $n-j+1$ клітинок нижнього ряду цієї діаграми і k клітинок верхнього її ряду. Очевидно, що число всіх найкоротших шляхів від крайньої північно-західної точки до крайньої південно-східної точки, на цій діаграмі, дорівнює сумі $n-j+2$ чисел $L(j-1),\ldots,L(n)$, які відповідно дорівнюють числам найкоротших шляхів, що проходять через ліву вертикальну сторону j-тої клітинки і кожну праву вертикальну сторону i-тої $(i=j,\ldots,n)$

клітинки нижнього ряду діаграми. На рис. 3.3. ці сторони виділено жирними лініями. Але число $L(i)$, $i=j-1,\ldots,n$ дорівнює аналогічному числу найкоротших шляхів діаграми, яка утворюється із діаграми $diagr(A,B)$ в результаті відкидання всіх клітинок нижнього ряду і всіх клітинок цієї діаграми, які лежать правіше i-го стовпця. Отже, виконується рекурсія:

$$L\left(\begin{array}{cccccccc}\lambda_1 & \ldots & \lambda_{j-1} & \lambda_j & \lambda_{j+1} & \ldots & \lambda_n\\ \mu_1 & \ldots & \mu_{j-1} & 0 & 0 & \ldots & 0\end{array}\right)=L\left(\begin{array}{ccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1\end{array}\right)+$$

$$+\sum_{i=j}^{n}L\left(\begin{array}{cccccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1 & \ldots & \lambda_i-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1 & 0 & \ldots & 0\end{array}\right), \qquad (3.11.3)$$

де

$$L(i)=L\left(\begin{array}{cccccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1 & \ldots & \lambda_i-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1 & 0 & \ldots & 0\end{array}\right),\ i=j,\ldots,n,$$

$$L(j-1)=L\left(\begin{array}{ccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1\end{array}\right).$$

Таким чином, при допомозі рекурсії (3.11.3), знаходження числа найкоротших шляхів, після скінченного числа кроків, приводить до обчислення числа найкоротших шляхів на діаграмах, що зображені на рис. .

Доведемо, що верхній F-парадетермінант (3.11.1), при умові (3.11.2), задовольняє рекурсію (3.11.3). З цією метою для чисел

$$L\left(\begin{array}{cccccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1 & \ldots & \lambda_i-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1 & 0 & \ldots & 0\end{array}\right),\ L\left(\begin{array}{ccc}\lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1\\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1\end{array}\right)$$

із рівності (3.11.3), при допомозі (3.11.2), побудуємо відповідно трикутні матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc}\lambda_1-\mu_1+1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ \lambda_{j-1}-\mu_1-j+3 & \ldots & \lambda_{j-1}-\mu_{j-1}+1\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\lambda_1-\mu_1+1 & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & & \\
\lambda_{j-1}-\mu_1-j+3 & \ldots & \lambda_{j-1}-\mu_{j-1}+1 & & & \\
\lambda_j-\mu_1-j+2 & \ldots & \lambda_j-\mu_{j-1} & \lambda_j & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\
\lambda_i-\mu_1-i+2 & \ldots & \lambda_i-\mu_{j-1}-i+j & \lambda_i-i+j & \ldots & \lambda_i
\end{array}\right).$$

Цим матрицям відповідають верхні F-парадетермінанти виду

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1}),\ \mathrm{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix} j & \ldots & i \\ -1 & \ldots & -1\end{pmatrix},\ j\leqslant i\leqslant n,$$

тут через R позначено роги матриці (3.11.2). Таким чином, нам необхідно довести, що верхній F-парадетермінант із цієї теореми задовольняє рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1})+\sum_{i=j}^{n}\mathrm{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix} j & \ldots & i \\ -1 & \ldots & -1\end{pmatrix}. \tag{3.11.4}$$

Перш за все відзначимо, що F-парадетермінант, що знаходиться в лівій частині рівності (3.11.4), матрицю якого позначимо через M, є F-парадетермінантом змішаного типу, тобто його частина з j-го по n-тий стовпець має вигляд верхнього F-парадетермінанта $\Diamond 1^{\circ}_{n-j+1}$. Для кращої очності ми відділяємо його вертикальною лінією[10]. Таким чином, згідно із твердженням 2.9.3 маємо рівність (2.9.12) з якої внаслідок того, що

$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n,s+1}-\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n,\frac{s+1}{s}}=1,\ \ s=j,\ldots,n-1$$

випливає рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}M=\mathrm{ddet}^{\circ}\begin{pmatrix} s \\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^{\circ}R_{s-1,1}, \tag{3.11.5}$$

[10]Не сплутайте цей парадетермінант із рекурентними дробами.

аналогічна до рівності (2.9.18). Рівності (3.11.5) для $\mathrm{ddet}^{\circ}R_{s-1,1}$ при $s=j+1,\ldots,n$ мають відповідно вигляд:

$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j1}=\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j1}\begin{pmatrix} j \\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j-1,1},$$
$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j+1,1}=\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j+1,1}\begin{pmatrix} j+1 \\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j,1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n1}=\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n1}\begin{pmatrix} n \\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n-1,1}.$$

Додаючи їх, отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}A=\sum_{i=j}^{n}\mathrm{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1\end{pmatrix}+\mathrm{ddet}^{\circ}R_{j-1,1}. \tag{3.11.6}$$

Але, позаяк

$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n,s+1}\begin{pmatrix} s+1 \\ -1\end{pmatrix}-\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n,\frac{s+1}{s}}=0$$

при $s=j,\ldots,n$, то, внаслідок рівності (2.9.12), отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1\end{pmatrix}=\mathrm{ddet}^{\circ}R_{i1}R_{i1}\begin{pmatrix} j\ldots i \\ -1\ldots-1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, рівність (3.11.6) дістане вигляд рівності (3.11.4).

Позаяк вилучення клітинок нижнього ряду похилої діаграми змінює тільки елементи матриці, які лежать по праву сторону від вертикальної лінії, яка розділює матрицю змішаного вигляду, причому елементи рогу R_{nj}, внаслідок нерівностей $\lambda_i>0$, $1\leqslant j\leqslant i\leqslant n$ і рівності (3.11.2), додатні, то від'ємні елементи матриці (3.11.1) можна замінити нулями. □

Зауваження 3.11.1. При симетрії діаграми відносно бісектриси першого квадранта, тобто при переході до спряженої діаграми, число найкоротших шляхів не змінюється. Тому замість діаграми, зображеної на рис. 3.2.

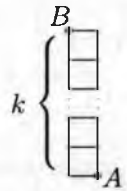


Рис. 3.4.

можна розглядати діаграму, яка складається із k клітинок в одному стовпці. При цьому маємо $\lambda_1 = k$, $\mu_1 = 0$, і відповідний їй F-парадетермінант буде мати вигляд $\langle k+1\rangle_1^\circ$. Отже, порядок F-парадетермінанта типу $\Diamond 1$ іноді можна зменшити, переходячи до спряженої діаграми.

Зауваження 3.11.2. При $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$ матриця змішаного типу переходить в матрицю типу $\Diamond 1_n^\circ$, а похила діаграма переходить в діаграму Ферре, рис.

Зауваження 3.11.3. При допомозі діаграм Ферре можна отримати нові цікаві рекурсії для верхніх F-парадетермінантів типу $\Diamond 1_n^\circ$, а при допомозі останніх, — нові комбінаторні тотожності. Наприклад, очевидно, що число всіх найкоротших шляхів на цій діаграмі Ферре між точками A і B, дорівнює сумі всіх найкоротших шляхів, які проходять через виділені на рис. відрізки A_iC_i, $i = 0, \ldots, \lambda_n$. Отже, виконується рекурсія.

$$L\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_n \\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\lambda_n} L\begin{pmatrix} \lambda_1 - i & \ldots & \lambda_{n-1} - i \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

яка в термінах верхнього F-парадетермінанта матиме вигляд

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{i=0}^{\lambda_n} ddet^\circ R_{n-1,1}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 \\ -i & \ldots & -1 \end{pmatrix}.$$

Нехай, наприклад, діаграма Ферре має вигляд прямокутника, тобто $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = k$, тоді верхній F-парадетермінант, який дорівнює числу найкоротших шляхів на цій діаграмі є F-парадетермінант типу $\Diamond 1$ і має вигляд

$$\Diamond 1_n^\circ = \left\langle \begin{matrix} k+1 & & & \\ k & k+1 & & \\ \vdots & \ldots & \ddots & \\ k-n+2 & k-n+3 & \ldots & k+1 \end{matrix} \right\rangle_n^\circ, \qquad (3.11.7)$$

Застосовуючи до F-парадетермінанта (3.11.7) твердження 2.9.16 і, враховуючи те, що

$$ddet^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & j \\ -k & \ldots & -k \end{pmatrix} = 1,$$

при $j = 0, \ldots, n$, отримаємо рівність

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^{n} \frac{(j+1)^{(k-1)\{1\}}}{(k-1)!} \overset{(1.1.7)}{=} \frac{(n+1)^{k\{1\}}}{k!} = \frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

Бібліографічні зауваження

До п. 3.2.3. Розклад різних класів натуральних чисел у суму квадратів має давню історію. Згадаємо лише гіпотезу Ферма, доведену Ойлером, яка стверджує, що кожне просте число виду $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$ розкладається в суму двох квадратів натуральних чисел, чи теорему Лагранжа про те, що довільне натуральне число можна подати у вигляді суми чотирьох квадратів цілих невід'ємних чисел. Звернемо увагу читача на те, що останні дві теореми є лише теоремами існування і не дають конструкції відповідного розкладу. Теорему Лагранжа можна довести за допомогою білінійного закону композиції для чотирьох змінних, що є координатами кватерніонів. Згідно з теоремою Гурвіца білінійний закон композиції існує для однієї, двох, чотирьох та восьми змінних (восьмивимірна неасоціативна алгебра — це алгебра октав Келі).

До п. 3.2.4. Історію розвитку позиційних систем числення та відповідну бібліографію можна знайти в [53].

До п. 3.3 Назва "ряд Маклорена" історично неправильна, бо Тейлор розглядав такі ряди ще раніше, у 1715 році.

Вперше генератриси ввів А. де Муавр з метою дослідження лінійних рекурентних рівнянь. Подальший розвиток метод генератрис отримав у роботах Дж. Стірлінга [149], Л. Ойлера [78], П.С. Лапласа [127].

На жаль, після Ойлера математики уникали розбіжних рядів і тільки на початку XX сторіччя, у працях Е. Бореля, Г.Ф. Вороного та Е. Чезаро, теорія розбіжних рядів дістала новий поштовх для розвитку і нові важливі застосування (див.[86]). Обґрунтування операцій з генератрисами без поняття їх збіжності можна знайти в [92], [137], [121]. Чудовим вступом до теорії генератрис може слугувати монографія Герберта Вільфа [158].

Композиціям генератрис присвячено п'ятий розділ другого тому монографії Річарда Стенлі [146]. Там, зокрема, читач знайде (див. стор. 36–44) інформацію про формули обернення Лагранжа.

Формула (3.3.1) була відкрита Фаа ді Бруно у 1857 році [106].

До п. 3.4 Серед монографій, в яких зібрано та, певною мірою систематизовано формули обернення, у першу чергу слід виділити монографію Дж. Ріордана [66], в якій їм присвячено два розділи. Однак, у передмові до цієї монографії (стор. 6) Ріордан зазначає, що "... комбінаторні тотожності невичерпні та непередбачувані. Стара мета навести порядок у цьому хаосі, видається приреченою на поразку." І далі (стор. 7-8): "Число різних пар взаємно обернених співвідношень поки-що невелике, а можливості для подальшого збільшення їх числа визначити важко." Зрозуміло, що такі можливості могли б дати загальні підходи для побудови таких співвідношень. Тут слід виділити монографію Стенлі [146], в якій він розглядає загальний матричний метод побудови взаємно обернених співвідношень. Проте найкраще ідею цього загального методу

побудови формул обернення висвітлено в монографіях М. Айгнера ([1], стор. 119–121) та Платонова М.Л. ([61], стор. 57–109). У першій монографії автор виділяє клас біноміальних послідовностей, для якого цей загальний метод реалізовується порівняно просто. Проте Айгнер також звертає увагу на значні труднощі знаходження коефіцієнтів зв'язку для довільних послідовностей (стор. 124). У другій монографії розглядаються обернення матриць з різними узагальненими комбінаторними числами, введено поняття ротації, що є зручним методом перетворення комбінаторних тотожностей, та наводиться ряд формул обернення. Цікаві результати, що мають пряме відношення до обернення формул, читач знайде також у [115]-[152].

До п. 3.5.1. Теорема 3.6.1 є новою.

До п. 3.7. Всі поняття та теореми цього параграфу є новими.

До п. 3.8. Фундаментальною роботою, на базі якої побудовано цей параграф є забута робота [112] столітньої давності німецького математика Е. Фюрстенау (E.Furshtenau).

До п. 3.9. Теореми 3.9.1, 3.9.2, можливо, є новими. Теорема 3.9.3 про загальний розв'язок діофантового рівняння, що є 3-вимірним аналогом рівняння Пелля та теорема 3.9.4 про раціональні наближення кубічних форм є новими.

Багато цікавої інформації читач знайде у статтях: [24],[10],[98], [128],[99].

До п. 3.10. Теорема 3.10.1 про ізоморфізм (n, m)-форм з деякими класами квадратних матриць та теорема 3.10.2 про зв'язок (n, m)-форм з алгебраїчними рівняннями n-го порядку, можливо, є новими. Теореми 3.10.3, 3.10.4 та всі результати п. 3.10.2 є новими.

До п. 3.11. У цьому параграфі доведено одну загальну комбінаторну теорему 3.11.1 про найкоротші шляхи на похилій діаграмі. Дослідження у цьому напрямку привели автора до поняття парафункцій трикутних матриць.

Додатки

Додаток 1. Розвинення многочленів

$$x^{n(k)},\ x^{n(k)},\ n = 1, 2, \ldots, 10$$

за степенями x **:**

$$x^{0\{k\}} = 1,$$
$$x^{1\{k\}} = x,$$
$$x^{2\{k\}} = x^2 + kx,$$
$$x^{3\{k\}} = x^3 + 3kx^2 + 2k^2x,$$
$$x^{4\{k\}} = x^4 + 6kx^3 + 11k^2x^2 + 6k^3x,$$
$$x^{5\{k\}} = x^5 + 10kx^4 + 35k^2x^3 + 50k^3x^2 + 24k^4x,$$
$$x^{6\{k\}} = x^6 + 15kx^5 + 85k^2x^4 + 225k^3x^3 + 274k^4x^2 + 120k^5x,$$
$$x^{7\{k\}} = x^7 + 21kx^6 + 175k^2x^5 + 735k^3x^4 + 1624k^4x^3 + 1764k^5x^2 +$$
$$+720k^6x,$$
$$x^{8\{k\}} = x^8 + 28kx^7 + 322k^2x^6 + 1960k^3x^5 + 6769k^4x^4 + 13132k^5x^3 +$$
$$+13068k^6x^2 + 5040k^7x,$$
$$x^{9\{k\}} = x^9 + 36kx^8 + 546k^2x^7 + 4536k^3x^6 + 22449k^4x^5 + 67284k^5x^4 +$$
$$+118124k^6x^3 + 109584k^7x^2 + 40320k^8x,$$
$$x^{10\{k\}} = x^{10} + 45kx^9 + 870k^2x^8 + 9450k^3x^7 + 63273k^4x^6 + 269325k^5x^5 +$$
$$+723680k^6x^4 + 1172700k^7x^3 + 1026576k^8x^2 + 362880k^9x.$$

$$x^{0\{-k\}} = 1,$$
$$x^{1\{-k\}} = x,$$
$$x^{2\{-k\}} = x^2 - kx,$$
$$x^{3\{-k\}} = x^3 - 3kx^2 + 2k^2x,$$
$$x^{4\{-k\}} = x^4 - 6kx^3 + 11k^2x^2 - 6k^3x,$$
$$x^{5\{-k\}} = x^5 - 10kx^4 + 35k^2x^3 - 50k^3x^2 + 24k^4x,$$
$$x^{6\{-k\}} = x^6 - 15kx^5 + 85k^2x^4 - 225k^3x^3 + 274k^4x^2 - 120k^5x,$$
$$x^{7\{-k\}} = x^7 - 21kx^6 + 175k^2x^5 - 735k^3x^4 + 1624k^4x^3 - 1764k^5x^2 + +720k^6x,$$
$$x^{8\{-k\}} = x^8 - 28kx^7 + 322k^2x^6 - 1960k^3x^5 + 6769k^4x^4 - 13132k^5x^3 +$$
$$+13068k^6x^2 - 5040k^7x,$$
$$x^{9\{-k\}} = x^9 - 36kx^8 + 546k^2x^7 - 4536k^3x^6 + 22449k^4x^5 - 67284k^5x^4 +$$
$$+118124k^6x^3 - 109584k^7x^2 + 40320k^8x,$$
$$x^{10\{-k\}} = x^{10} - 45kx^9 + 870k^2x^8 - 9450k^3x^7 + 63273k^4x^6 - 269325k^5x^5 +$$
$$+723680k^6x^4 - 1172700k^7x^3 + 1026576k^8x^2 - 362880k^9x.$$

Додаток 2. Розвинення факторіального степеня $(x+t)^{n(k)}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$ за степенями x :

$$(x+t)^{0\{k\}} = 1,$$
$$(x+t)^{1\{k\}} = x + t,$$
$$(x+t)^{2\{k\}} = x^2 + (2t + k)x + (t^2 + kt),$$
$$(x+t)^{3\{k\}} = x^3 + (3t + 3k)x^2 + (3t^2 + 6kt + 2k^2)x + (t^3 + 3kt^2 + 2k^2t),$$
$$(x+t)^{4\{k\}} = x^4 + (4t + 6k)x^3 + (6t^2 + 18kt + 11k^2)x^2 +$$
$$+(4t^3 + 18kt^2 + 22k^2t + 6k^3)x + (t^4 + 6kt^3 + 11k^2t^2 + 6k^3t),$$
$$(x+t)^{5\{k\}} = x^5 + (5t + 10k)x^4 + (10t^2 + 40kt + 35k^2)x^3 +$$
$$+(10t^3 + 60kt^2 + 105k^2t + 50k^3)x^2 +$$
$$+(5t^4 + 40kt^3 + 105k^2t^2 + 100k^3t + 24k^4)x +$$
$$+(t^5 + 10kt^4 + 35k^2t^3 + 50k^3t^2 + 24k^4t),$$
$$(x+t)^{6\{k\}} = x^6 + (6t + 15k)x^5 + (15t^2 + 75kt + 85k^2)x^4 +$$
$$+(20t^3 + 150kt^2 + 340k^2t + 225k^3)x^3 +$$
$$+(15t^4 + 150kt^3 + 510k^2t^2 + 675k^3t + 274k^4)x^2 +$$
$$+(6t^5 + 75kt^4 + 340k^2t^3 + 675k^3t^2 + 548k^4t + 120k^5)x +$$
$$+(t^6 + 15kt^5 + 85k^2t^4 + 225k^3t^3 + 274k^4t^2 + 120k^5t),$$
$$(x+t)^{7\{k\}} = x^7 + (7t + 21k)x^6 + (21t^2 + 126kt + 175k^2)x^5 +$$
$$+(35t^3 + 315kt^2 + 875k^2t + 735k^3)x^4 +$$
$$+(35t^4 + 420kt^3 + 1750k^2t^2 + 2940k^3t + 1624k^4)x^3 +$$
$$+(21t^5 + 315kt^4 + 1750k^2t^3 + 4410k^3t^2 + 4872k^4t + 1764k^5)x^2 +$$
$$+(7t^6 + 126kt^5 + 875k^2t^4 + 2940k^3t^3 + 4872k^4t^2 + 3528k^5t + 720k^6)x +$$
$$+(t^7 + 21kt^6 + 175k^2t^5 + 735k^3t^4 + 1624k^4t^3 + 1764k^5t^2 + 720k^6t),$$
$$(x+t)^{8\{k\}} = x^8 + (8t + 28k)x^7 + (28t^2 + 196kt + 322k^2)x^6 +$$
$$+(56t^3 + 588kt^2 + 1932k^2t + 1960k^3)x^5 +$$
$$+(70t^4 + 980kt^3 + 4830k^2t^2 + 9800k^3t + 6769k^4)x^4 +$$
$$+(56t^5 + 980kt^4 + 6440k^2t^3 + 19600k^3t^2 + 27076k^4t + 13132k^5)x^3 +$$
$$+(28t^6 + 588kt^5 + 4830k^2t^4 + 19600k^3t^3 + 40614k^4t^2 + 39396k^5t + 13068k^6)x^2 +$$
$$+(8t^7 + 196kt^6 + 1932k^2t^5 + 9800k^3t^4 + 27076k^4t^3 + 39396k^5t^2 + 26136k^6t + 5040k^7)x$$
$$+(t^8 + 28kt^7 + 322k^2t^6 + 1960k^3t^5 + 6769k^4t^4 + 13132k^5t^3 + 13068k^6t^2 + 5040k^7t),$$
$$(x+t)^{9\{k\}} = x^9 + (9t + 36k)x^8 + (36t^2 + 288kt + 546k^2)x^7 +$$
$$+(84t^3 + 1008kt^2 + 3822k^2t + 4536k^3)x^6 +$$
$$+(126t^4 + 2016kt^3 + 11466k^2t^2 + 27216k^3t + 22449k^4)x^5 +$$
$$+(126t^5 + 2520kt^4 + 19110k^2t^3 + 68040k^3t^2 + 112245k^4t + 67284k^5)x^4 +$$
$$+(84t^6 + 2016kt^5 + 19110k^2t^4 + 90720k^3t^3 + 224490k^4t^2 + 269136k^5t + 118124k^6)x^3 +$$
$$(36t^7 + 1008kt^6 + 11466k^2t^5 + 68040k^3t^4 + 224490k^4t^3 + 403704k^5t^2 + 354372k^6t + 109584k^7)x^2 +$$

$$(9t^8+288kt^7+3822k^2t^6+27216k^3t^5+112245k^4t^4+269136k^5t^3+354372k^6t^2+219168k^7t+40320k^8)x+$$
$$(t^9+36kt^8+546k^2t^7+4536k^3t^6+22449k^4t^5+67284k^5t^4+118124k^6t^3+109584k^7t^2+40320k^8t),$$
$$(x+t)^{10\{k\}} = x^{10} + (10t+45k)x^9 + (45t^2+405kt+870k^2)x^8+$$
$$+(120t^3+1620kt^2+6960k^2t+9450k^3)x^7+$$
$$+(210t^4+3780kt^3+24360k^2t^2+66150k^3t+63273k^4)x^6+$$
$$+(252t^5+5670kt^4+48720k^2t^3+198450k^3t^2+379638k^4t+269325k^5)x^5+$$
$$+(210t^6+5670kt^5+60900k^2t^4+330750k^3t^3+949095k^4t^2+1346625k^5t+723680k^6)x^4+$$
$$(120t^7+3780kt^6+48720k^2t^5+330750k^3t^4+1265460k^4t^3+2693250k^5t^2+2894720k^6t+1172700k^7)x^3+$$
$$(45t^8+1620kt^7+24360k^2t^6+198450k^3t^5+949095k^4t^4+2693250k^5t^3+4342080k^6t^2+3518100k^7t+1026576k^8)x^2+$$
$$(10t^9+405kt^8+6960k^2t^7+66150k^3t^6+379638k^4t^5+1346625k^5t^4+2894720k^6t^3+3518100k^7t^2+2053152k^8t+362880k^9)x+$$
$$(t^{10}+45kt^9+870k^2t^8+9450k^3t^7+63273k^4t^6+269325k^5t^5+723680k^6t^4+1172700k^7t^3+1026576k^8t^2+362880k^9t).$$

Додаток 3. Факторіальні числові трикутники. Нижче запис

$$(x+m)^{n\{k\}} \to (x+t)^{i\{s\}}$$

означає представлення многочлена $(x+m)^{n\{k\}}$ у вигляді лінійної комбінації многочленів $(x+t)^{i\{s\}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

При $n = 0, 1, 2, \ldots$ коефіцієнти лінійних комбінацій утворюють деякий числовий трикутник t_j, $j = 1, 2, \ldots, 42$.

t1. $(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
6 & -4 & 1 \\
-24 & 18 & -6 & 1 \\
120 & -96 & 36 & -8 & 1 \\
-720 & 600 & -240 & 60 & -10 & 1 \\
5040 & -4320 & 1800 & -480 & 90 & -12 & 1 \\
-40320 & 35280 & -15120 & 4200 & -840 & 126 & & 1 \\
362880 & -322560 & 141120 & -40320 & 8400 & 1344 & 168 & -16 & 1 \\
-3628800 & 3265920 & -1451520 & 423360 & -90720 & 15120 & -2016 & 216 & -18 & 1
\end{pmatrix}$$

t2. $(x-1)^{n\{-1\}} \to (x+1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-3 & 1 \\
12 & -7 & 1 \\
-60 & 47 & -12 & 1 \\
360 & -342 & 119 & -18 & 1 \\
-2520 & 2754 & -1175 & 245 & -25 & 1 \\
20160 & -24552 & 12154 & -3135 & 445 & -33 & 1 \\
-181440 & 241128 & -133938 & 40369 & -7140 & 742 & -42 & 1 \\
1814400 & -2592720 & 1580508 & -537628 & 111769 & -14560 & 1162 & -52 & 1 \\
-19958400 & 30334320 & -19978308 & 7494416 & -1767087 & 271929 & -27342 & 1734 & -63 & 1
\end{pmatrix}$$

t3. $(x-1)^{n\{-1\}} = (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-4 & 1 \\
20 & -10 & 1 \\
-120 & 90 & -18 & 1 \\
840 & -840 & 252 & -28 & 1 \\
-6720 & 8400 & -3360 & 560 & -40 & 1 \\
60480 & -90720 & 45360 & -10080 & 1080 & -54 & 1 \\
-604800 & 1058400 & -635040 & 176400 & -25200 & 1890 & -70 & 1 \\
6652800 & -13305600 & 9313920 & -3104640 & 554400 & -55440 & 3080 & -88 & 1 \\
-79833600 & 179625600 & -143700480 & 55883520 & -11975040 & 1496880 & -110880 & 4752 & -108 & 1
\end{pmatrix}$$

t4. $(x-1)^{n} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
1 & -1 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 5 & 5 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 10 & 20 & 9 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 21 & 70 & 56 & 14 & 1 \\
1 & -1 & 1 & 42 & 231 & 294 & 126 & 20 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 85 & 735 & 1407 & 924 & 246 & 27 & 1
\end{pmatrix}$$

t5. $(x-1)^{n} \to (x+1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
4 & -4 & 1 \\
-8 & 12 & -6 & 1 \\
16 & -32 & 24 & -8 & 1 \\
-32 & 80 & -80 & 40 & -10 & 1 \\
64 & -192 & 240 & -160 & 60 & -12 & 1 \\
-128 & 448 & -672 & 560 & -280 & 84 & -14 & 1 \\
256 & -1024 & 1792 & -1792 & 1120 & -448 & 112 & -16 & 1 \\
-512 & 2304 & -4608 & 5376 & -4032 & 2016 & -672 & 144 & -18 & 1
\end{pmatrix}$$

t6. $(x-1)^{n} \to (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-3 & 1 \\
9 & -7 & 1 \\
-27 & 37 & -12 & 1 \\
81 & -175 & 97 & -18 & 1 \\
-243 & 781 & -660 & 205 & -25 & 1 \\
729 & -3367 & 4081 & -1890 & 380 & -33 & 1 \\
-2187 & 14197 & -23772 & 15421 & -4550 & 644 & -42 & 1 \\
6561 & -58975 & 133057 & -116298 & 47271 & -9702 & 1022 & -52 & 1 \\
-19683 & 242461 & -724260 & 830845 & -447195 & 124887 & -18900 & 1542 & -63 & 1
\end{pmatrix}$$

t7. $(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 6 & 6 & 1 \\
0 & 24 & 36 & 12 & 1 \\
0 & 120 & 240 & 120 & 20 & 1 \\
0 & 720 & 1800 & 1200 & 630 & 30 & 1 \\
0 & 5040 & 15120 & 12600 & 4200 & 644 & 42 & 1 \\
0 & 40320 & 141120 & 141120 & 58800 & 11760 & 1176 & 56 & 1 \\
0 & 362880 & 1451520 & 1693440 & 846720 & 211680 & 28224 & 2016 & 72 & 1
\end{pmatrix}$$

t8. $(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -2 & -1 & 2 & 1 \\
0 & -6 & -5 & 5 & 5 & 1 \\
0 & -24 & -26 & 15 & 25 & 9 & 1 \\
0 & -120 & -154 & 49 & 140 & 70 & 14 & 1 \\
0 & -720 & -1044 & 140 & 889 & 560 & 154 & 20 & 1 \\
0 & -5040 & -8028 & -64 & 6363 & 4809 & 1638 & 294 & 27 & 1
\end{pmatrix}$$

t9. $(x-1)^{n\{1\}} \to (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
2 & -4 & 1 \\
0 & 6 & -6 & 1 \\
0 & 0 & 12 & -8 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 20 & -10 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 30 & -12 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & -14 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56 & -16 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & -18 & 1
\end{pmatrix}$$

t10. $x^{n\{-1\}} \to x^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
2 & -3 & 1 \\
-6 & 11 & -6 & 1 \\
24 & -50 & 35 & -10 & 1 \\
-120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 \\
720 & -1764 & 1624 & -735 & 175 & -21 & 1 \\
-5040 & 13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1 \\
40320 & -109584 & 118124 & -67284 & 22449 & -4536 & 546 & -36 & 1 \\
-362880 & 1026576 & -1172700 & 723680 & -269325 & 63273 & -9450 & 870 & -45 & 1
\end{pmatrix}$$

t11. $x^{n\{-1\}} \to x^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
6 & -6 & 1 \\
-24 & 36 & -12 & 1 \\
120 & -240 & 120 & -20 & 1 \\
-720 & 1800 & -1200 & 300 & -30 & 1 \\
5040 & -15120 & 12600 & -4200 & 630 & -42 & 1 \\
-40320 & 141120 & -141120 & 58800 & -11760 & 1176 & -56 & 1 \\
362880 & -1451520 & 1693440 & -846720 & 211680 & -28224 & 2016 & -72 & 1 \\
-3628800 & 16329600 & -21772800 & 12700800 & -3810240 & 635040 & -60480 & 3240 & -90 & 1
\end{pmatrix}$$

t12. $x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
2 & -2 & 1 \\
-6 & 6 & -3 & 1 \\
24 & -24 & 12 & -4 & 1 \\
-120 & 120 & -60 & 20 & -5 & 1 \\
720 & -720 & 360 & -120 & 30 & -6 & 1 \\
-5040 & 5040 & -2520 & 840 & -210 & 42 & -7 & 1 \\
40320 & -40320 & 20160 & -6720 & 1680 & -336 & 56 & -8 & 1 \\
-362880 & 362880 & -181440 & 60480 & -15120 & 3024 & -504 & 72 & -9 & 1
\end{pmatrix}$$

t13. $x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
6 & -5 & 1 \\
-24 & 26 & -9 & 1 \\
120 & -154 & 71 & -14 & 1 \\
-720 & 1044 & -580 & 155 & -20 & 1 \\
5040 & -8028 & 5104 & -1665 & 295 & -27 & 1 \\
-40320 & 69264 & -48860 & 18424 & -4025 & 511 & -35 & 1 \\
362880 & -663696 & 509004 & -214676 & 54649 & -8624 & 826 & -44 & 1 \\
-3628800 & 6999840 & -5753736 & 2655764 & -761166 & 140889 & -16884 & 1266 & -54 & 1
\end{pmatrix}$$

t14. $x^{n\{-1\}} \to (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-3 & 1 \\
12 & -8 & 1 \\
-60 & 60 & -15 & 1 \\
360 & -480 & 180 & -24 & 1 \\
-2520 & 4200 & -2100 & 420 & -35 & 1 \\
20160 & -40320 & 25200 & -6720 & 840 & -48 & 1 \\
-181440 & 423360 & -317520 & 105840 & -17640 & 1512 & -63 & 1 \\
1814400 & -4838400 & 4233600 & -1693440 & 352800 & -40320 & 2520 & -80 & 1 \\
-19958400 & 59875200 & -59875200 & 27941760 & -6985440 & 997920 & -83160 & 3960 & -99 & 1
\end{pmatrix}$$

t15. $x^{n} \to x^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 3 & 1 \\
1 & 7 & 6 & 1 \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \\
1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 \\
1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \\
1 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1 \\
1 & 511 & 9330 & 34105 & 42525 & 22827 & 5880 & 750 & 45 & 1
\end{pmatrix}$$

t16. $x^n \to x^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
1 & -3 & 1 \\
-1 & 7 & -6 & 1 \\
1 & -15 & 25 & -10 & 1 \\
-1 & 31 & -90 & 65 & -15 & 1 \\
1 & -63 & 301 & -350 & 140 & -21 & 1 \\
-1 & 127 & -966 & 1701 & -1050 & 266 & -28 & 1 \\
1 & -255 & 3025 & -7770 & 6951 & -2646 & 462 & -36 & 1 \\
-1 & 511 & -9330 & 34105 & -42525 & 22827 & -5880 & 750 & -45 & 1
\end{pmatrix}$$

t17. $x^n \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 7 & 6 & 1 \\
0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \\
0 & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 \\
0 & 1 & 127 & 966 & 1701 & 1050 & 266 & 28 & 1 \\
0 & 1 & 255 & 3025 & 7770 & 6951 & 2646 & 462 & 36 & 1
\end{pmatrix}$$

t18. $x^n \to (x+1)^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
1 & -2 & 1 \\
-1 & 3 & -3 & 1 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
-1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\
1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\
-1 & 7 & -21 & 35 & -35 & 21 & -7 & 1 \\
1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \\
-1 & 9 & -36 & 84 & -126 & 126 & -84 & 36 & -9 & 1
\end{pmatrix}$$

t19. $x^n \to (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-2 & 1 \\
4 & -5 & 1 \\
-8 & 19 & -9 & 1 \\
16 & -65 & 55 & -14 & 1 \\
-32 & 211 & -285 & 125 & -20 & 1 \\
64 & -665 & 1351 & -910 & 245 & -27 & 1 \\
-128 & 2059 & -6069 & 5901 & -2380 & 434 & -35 & 1 \\
256 & -6305 & 26335 & -35574 & 20181 & -5418 & 714 & -44 & 1 \\
-512 & 19171 & -111645 & 204205 & -156660 & 58107 & -11130 & 1110 & -54 & 1
\end{pmatrix}$$

t20. $x^{n\{1\}} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
3 & 1 \\
12 & 8 & 1 \\
60 & 60 & 15 & 1 \\
360 & 480 & 180 & 24 & 1 \\
2520 & 4200 & 2100 & 420 & 35 & 1 \\
20160 & 40320 & 25200 & 6720 & 840 & 48 & 1 \\
181440 & 423360 & 317520 & 105840 & 17640 & 1512 & 63 & 1 \\
1814400 & 4838400 & 4233600 & 1693440 & 352800 & 40320 & 2520 & 80 & 1
\end{pmatrix}$$

t21. $x^{n\{1\}} \to (x-1)^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
6 & 5 & 1 \\
24 & 26 & 9 & 1 \\
120 & 154 & 71 & 14 & 1 \\
720 & 1044 & 580 & 155 & 20 & 1 \\
5040 & 8028 & 5104 & 1665 & 295 & 27 & 1 \\
40320 & 69264 & 48860 & 18424 & 4025 & 511 & 35 & 1 \\
362880 & 663696 & 509004 & 214676 & 54649 & 8624 & 826 & 44 & 1 \\
3628800 & 6999840 & 5753736 & 2655764 & 761166 & 140889 & 16884 & 1266 & 54 & 1
\end{pmatrix}$$

t22. $x^{n\{1\}} \to (x-1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
6 & 6 & 3 & 1 \\
24 & 24 & 12 & 4 & 1 \\
120 & 120 & 60 & 20 & 5 & 1 \\
720 & 720 & 360 & 120 & 30 & 6 & 1 \\
5040 & 5040 & 2520 & 840 & 210 & 42 & 7 & 1 \\
40320 & 40320 & 20160 & 6720 & 1680 & 336 & 56 & 8 & 1 \\
362880 & 362880 & 181440 & 60480 & 15120 & 3024 & 504 & 72 & 9 & 1
\end{pmatrix}$$

t23. $x^{n\{1\}} \to x^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
6 & 6 & 1 \\
24 & 36 & 12 & 1 \\
120 & 240 & 120 & 20 & 1 \\
720 & 1800 & 1200 & 300 & 30 & 1 \\
5040 & 15120 & 12600 & 4200 & 630 & 42 & 1 \\
40320 & 141120 & 141120 & 58800 & 11760 & 1176 & 56 & 1 \\
362880 & 1451520 & 1693440 & 846720 & 211680 & 28224 & 2016 & 72 & 1 \\
3628800 & 16329600 & 21772800 & 12700800 & 3810240 & 635040 & 60480 & 3240 & 90 & 1
\end{pmatrix}$$

t24. $x^{n\{1\}} \to x^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
2 & 3 & 1 \\
6 & 11 & 6 & 1 \\
24 & 50 & 35 & 10 & 1 \\
120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1 \\
720 & 1764 & 1624 & 735 & 175 & 21 & 1 \\
5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \\
40320 & 109584 & 118124 & 67284 & 22449 & 4536 & 546 & 36 & 1 \\
362880 & 1026576 & 1172700 & 723680 & 269325 & 63273 & 9450 & 870 & 45 & 1
\end{pmatrix}$$

t25. $x^{n\{1\}} \to (x+1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
2 & 4 & 1 \\
6 & 18 & 9 & 1 \\
24 & 96 & 72 & 16 & 1 \\
120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 \\
720 & 4320 & 5400 & 2400 & 450 & 36 & 1 \\
5040 & 35280 & 52920 & 29400 & 7350 & 882 & 49 & 1 \\
40320 & 322560 & 564480 & 376320 & 117600 & 18816 & 1568 & 64 & 1 \\
362880 & 3265920 & 6531840 & 5080320 & 1905120 & 381024 & 42336 & 2592 & 81 & 1
\end{pmatrix}$$

t26. $x^{n\{1\}} \to (x+1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 3 & 1 \\
0 & 6 & 11 & 6 & 1 \\
0 & 24 & 50 & 35 & 10 & 1 \\
0 & 120 & 274 & 225 & 85 & 15 & 1 \\
0 & 720 & 1764 & 1624 & 735 & 175 & 21 & 1 \\
0 & 5040 & 13068 & 13132 & 6769 & 1960 & 322 & 28 & 1 \\
0 & 40320 & 109584 & 118124 & 67284 & 22449 & 4536 & 546 & 36 & 1
\end{pmatrix}$$

t27. $x^{n\{1\}} \to (x+1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & -3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 1
\end{pmatrix}$$

t28. $(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
2 & 4 & 1 \\
0 & 6 & 6 & 1 \\
0 & 0 & 12 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 20 & 10 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 12 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 42 & 14 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56 & 16 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 18 & 1
\end{pmatrix}$$

t29. $(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\
0 & -6 & 5 & 5 & -5 & 1 \\
0 & 24 & -26 & -15 & 25 & -9 & 1 \\
0 & -120 & 154 & 49 & -140 & 70 & -14 & 1 \\
0 & 720 & -1044 & -140 & 889 & -560 & 154 & -20 & 1 \\
0 & -5040 & 8028 & -64 & -6363 & 4809 & -1638 & 294 & -27 & 1
\end{pmatrix}$$

t30. $(x+1)^{n\{-1\}} \to (x-1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & -2 & 1 \\
0 & 6 & -6 & 1 \\
0 & -24 & 36 & -12 & 1 \\
0 & 120 & -240 & 120 & -20 & 1 \\
0 & -720 & 1800 & -1200 & 300 & -30 & 1 \\
0 & 5040 & -15120 & 12600 & -4200 & 630 & -42 & 1 \\
0 & -40320 & 141120 & -141120 & 58800 & -11760 & 1176 & -56 & 1 \\
0 & 362880 & -1451520 & 1693440 & -846720 & 211680 & -28224 & 2016 & -72 & 1
\end{pmatrix}$$

t31. $(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1
\end{pmatrix}$$

t32. $(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{i}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & 2 & -3 & 1 \\
0 & -6 & 11 & -6 & 1 \\
0 & 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \\
0 & -120 & 274 & -225 & 85 & -15 & 1 \\
0 & 720 & -1764 & 1624 & -735 & 175 & -21 & 1 \\
0 & -5040 & 13068 & -13132 & 6769 & -1960 & 322 & -28 & 1 \\
0 & 40320 & -109584 & 118124 & -67284 & 22449 & -4536 & 546 & -36 & 1
\end{pmatrix}$$

t33. $(x+1)^{n\{-1\}} \to x^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
-1 & 1 \\
2 & -4 & 1 \\
-6 & 18 & -9 & 1 \\
24 & -96 & 72 & -16 & 1 \\
-120 & 600 & -600 & 200 & -25 & 1 \\
720 & -4320 & 5400 & -2400 & 450 & -36 & 1 \\
-5040 & 35280 & -52920 & 29400 & -7350 & 882 & -49 & 1 \\
40320 & -322560 & 564480 & -376320 & 117600 & -18816 & 1568 & -64 & 1 \\
-362880 & 3265920 & -6531840 & 5080320 & -1905120 & 381024 & -42336 & 2592 & -81 & 1
\end{pmatrix}$$

t34. $(x+1)^n \to (x-1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
3 & 1 \\
9 & 7 & 1 \\
27 & 37 & 12 & 1 \\
81 & 175 & 97 & 18 & 1 \\
243 & 781 & 660 & 205 & 25 & 1 \\
729 & 3367 & 4081 & 1890 & 380 & 33 & 1 \\
2187 & 14197 & 23772 & 15421 & 4550 & 644 & 42 & 1 \\
6561 & 58975 & 133057 & 116298 & 47271 & 9702 & 1022 & 52 & 1 \\
19683 & 242461 & 724260 & 830845 & 447195 & 124887 & 18900 & 1542 & 63 & 1
\end{pmatrix}$$

t35. $(x+1)^n \to (x-1)^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
4 & 4 & 1 \\
8 & 12 & 6 & 1 \\
16 & 32 & 24 & 8 & 1 \\
32 & 80 & 80 & 40 & 10 & 1 \\
64 & 192 & 240 & 160 & 60 & 12 & 1 \\
128 & 448 & 672 & 560 & 280 & 84 & 14 & 1 \\
256 & 1024 & 1792 & 1792 & 1120 & 448 & 112 & 16 & 1 \\
512 & 2304 & 4608 & 5376 & 4032 & 2016 & 672 & 144 & 18 & 1
\end{pmatrix}$$

t36. $(x+1)^n \to (x-1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 5 & -5 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -10 & 20 & -9 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 21 & -70 & 56 & -14 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -42 & 231 & -294 & 126 & -20 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 85 & -735 & 1407 & -924 & 246 & -27 & 1
\end{pmatrix}$$

t37. $(x+1)^n \to x^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
4 & 5 & 1 \\
8 & 19 & 9 & 1 \\
16 & 65 & 55 & 14 & 1 \\
32 & 211 & 285 & 125 & 20 & 1 \\
64 & 665 & 1351 & 910 & 245 & 27 & 1 \\
128 & 2059 & 6069 & 5901 & 2380 & 434 & 35 & 1 \\
256 & 6305 & 26335 & 35574 & 20181 & 5418 & 714 & 44 & 1 \\
512 & 19171 & 111645 & 204205 & 156660 & 58107 & 11130 & 1110 & 54 & 1
\end{pmatrix}$$

t38. $(x+1)^n \to x^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
1 & 9 & 36 & 84 & 126 & 126 & 84 & 36 & 9 & 1
\end{pmatrix}$$

t39. $(x+1)^n \to x^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
0 & 1 \\
0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -3 & 1 \\
0 & -1 & 7 & -6 & 1 \\
0 & 1 & -15 & 25 & -10 & 1 \\
0 & -1 & 31 & -90 & 65 & -15 & 1 \\
0 & 1 & -63 & 301 & -350 & 140 & -21 & 1 \\
0 & -1 & 127 & -966 & 1701 & -1050 & 266 & -28 & 1 \\
0 & 1 & -255 & 3025 & -7770 & 6951 & -2646 & 462 & -36 & 1
\end{pmatrix}$$

t40. $(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{i\{-1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
4 & 1 \\
20 & 10 & 1 \\
120 & 90 & 18 & 1 \\
840 & 840 & 252 & 28 & 1 \\
6720 & 8400 & 3360 & 560 & 40 & 1 \\
60480 & 90720 & 45360 & 10080 & 1080 & 54 & 1 \\
604800 & 1058400 & 635040 & 176400 & 25200 & 1890 & 70 & 1 \\
6652800 & 13305600 & 9313920 & 3104640 & 554400 & 55440 & 3080 & 88 & 1 \\
79833600 & 179625600 & 143700480 & 55883520 & 11975040 & 1496880 & 110880 & 4752 & 108 & 1
\end{pmatrix}$$

t41. $(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^i$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
3 & 1 \\
12 & 7 & 1 \\
60 & 47 & 12 & 1 \\
360 & 342 & 119 & 18 & 1 \\
2520 & 2754 & 1175 & 245 & 25 & 1 \\
20160 & 24552 & 12154 & 3135 & 445 & 33 & 1 \\
181440 & 241128 & 133938 & 40369 & 7140 & 742 & 42 & 1 \\
1814400 & 2592720 & 1580508 & 537628 & 111769 & 14560 & 1162 & 52 & 1 \\
19958400 & 30334320 & 19978308 & 7494416 & 1767087 & 271929 & 27342 & 1734 & 63 & 1
\end{pmatrix}$$

t42. $(x+1)^{n\{1\}} \to (x-1)^{i\{1\}}$.

$$\begin{pmatrix}
1 \\
2 & 1 \\
6 & 4 & 1 \\
24 & 18 & 6 & 1 \\
120 & 96 & 36 & 8 & 1 \\
720 & 600 & 240 & 60 & 10 & 1 \\
5040 & 4320 & 1800 & 480 & 90 & 12 & 1 \\
40320 & 35280 & 15120 & 4200 & 840 & 126 & 14 & 1 \\
362880 & 322560 & 141120 & 40320 & 8400 & 1344 & 168 & 16 & 1 \\
3628800 & 3265920 & 1451520 & 423360 & 90720 & 15120 & 2016 & 216 & 18 & 1
\end{pmatrix}$$

Додаток 4. Унімодальні та симетричні трикутні матриці із крайніми одиничними елементами.

Нижче наведено матрицю коефіцієнтів рекурентного співвідношення (1.6.10) (див. стор. 51) та відповідні їй трикутна матриця і обернена до неї трикутна матриця.

$$M_1 = L\begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 11 & 11 & 1 \\ 1 & -44 & -154 & -44 & 1 \\ 1 & 117 & 1562 & 1562 & 117 & 1 \\ 1 & -370 & -12689 & -34364 & -12689 & -370 & 1 \\ 1 & 1087 & 95853 & 568339 & 568339 & 95853 & 1087 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ -7 & 6 & 1 \\ 87 & -77 & -11 & 1 \\ 2705 & -2420 & -330 & 44 & 1 \\ -441329 & 393925 & 54230 & -6710 & -117 & 1 \\ -126067511 & 112475346 & 15512415 & -1890020 & -30601 & 370 & 1 \\ 177751962663 & -158601027849 & -21866395549 & 2672050115 & 43909749 & -498043 & -1087 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = L\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -14 & -30 & -14 & 1 \\ 1 & 17 & 262 & 262 & 17 & 1 \\ 1 & -48 & -1497 & -4192 & -1497 & -48 & 1 \\ 1 & 79 & 8157 & 50003 & 50003 & 8157 & 79 & 1 \\ 1 & -178 & -42128 & -514222 & -1100066 & -514222 & -42128 & -178 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 17 & -15 & -3 & 1 \\ 73 & -76 & -12 & 14 & 1 \\ -4369 & 4157 & 728 & -500 & -17 & 1 \\ -36701 & 28920 & 5901 & 1150 & 681 & 48 & 1 \\ 34077905 & -31675763 & -5662587 & 3237605 & 34867 & -11949 & -79 & 1 \\ 2361927217 & -2373472856 & -399690872 & 383545036 & 27253786 & 409444 & 28066 & 178 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 9 & -5 & -5 & 9 & -5 & 1 \\ 1 & -8 & 28 & -56 & 70 & -56 & 28 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & -2 & 4 & 1 \\ -9 & 5 & -10 & 10 & 3 & 1 \\ -11 & 6 & -25 & 20 & 3 & 6 & 1 \\ -13 & 7 & -49 & 35 & -7 & 21 & 5 & 1 \\ -15 & 8 & -84 & 56 & -42 & 56 & 12 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & -8 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 9 & -5 & -5 & 9 & -5 & 1 \\ 1 & -6 & 16 & -26 & 30 & -26 & 16 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ -17 & 13 & -4 & 4 & 3 & 1 \\ -41 & 36 & -15 & 10 & 5 & 4 & 1 \\ -99 & 93 & -43 & 29 & 3 & 11 & 5 & 1 \\ -239 & 232 & -112 & 84 & -14 & 28 & 14 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 23 & 23 & 1 \\ 1 & 76 & 230 & 76 & 1 \\ 1 & 237 & 1682 & 1682 & 237 & 1 \\ 1 & 722 & 10543 & 23548 & 10543 & 722 & 1 \\ 1 & 2179 & 60657 & 259723 & 259723 & 60657 & 2179 & 1 \\ 1 & 6552 & 331612 & 2485288 & 4675014 & 2485288 & 331612 & 6552 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ -93 & 115 & -23 & 1 \\ 5993 & -7436 & 1518 & -76 & 1 \\ -1272089 & 1578757 & -322762 & 16330 & -237 & 1 \\ 857402029 & -1064110290 & 217560951 & -11012540 & 160571 & -722 & 1 \\ -1792650585525 & 2224835452407 & -454875884137 & 23025275075 & -335768223 & 1512581 & -2179 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 39 & 39 & 1 \\ 1 & 166 & 546 & 166 & 1 \\ 1 & 677 & 5482 & 5482 & 677 & 1 \\ 1 & 2724 & 47175 & 109640 & 47175 & 2724 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ 7 & -8 & 1 \\ -235 & 273 & -39 & 1 \\ 35353 & -41116 & 5928 & -166 & 1 \\ -22683409 & 26382125 & -3804940 & 106900 & -677 & 1 \\ 60147266239 & -69954818244 & 10089231945 & -283474190 & 1796973 & -2724 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 59 & 59 & 1 \\ 1 & 308 & 1062 & 308 & 1 \\ 1 & 1557 & 13562 & 13562 & 1557 & 1 \\ 1 & 7806 & 148527 & 352612 & 148527 & 7806 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ 9 & -10 & 1 \\ -473 & 531 & -59 & 1 \\ 136433 & -153236 & 17110 & -308 & 1 \\ -206131857 & 231521093 & -25853674 & 465994 & -1557 & 1 \\ 1588966748089 & -1784679728094 & 199293137855 & -3592155460 & 12005415 & -7806 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_8 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 83 & 83 & 1 \\ 1 & 514 & 1826 & 514 & 1 \\ 1 & 3105 & 28310 & 28310 & 3105 & 1 \\ 1 & 18656 & 376615 & 905920 & 376615 & 18656 & 1 \\ 1 & 111967 & 4627821 & 22403635 & 22403635 & 4627821 & 111967 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 & 1 \\ 11 & -12 & 1 \\ -831 & 913 & -83 & 1 \\ 407561 & -447884 & 40836 & -514 & 1 \\ -1242259601 & 1365169405 & -124474360 & 1567660 & -3105 & 1 \\ 23022850225651 & -25300743191256 & 2306889024765 & -29053590770 & 57550265 & -18656 & 1 \end{pmatrix}$$

Додаток 5. Таблиця 21 перших $d_{n,m}$–многочленів:

$$\begin{aligned}
d_{n,1} &= 1, \\
d_{n,2} &= -1, \\
d_{n,3} &= 0, \\
d_{n,4} &= 1, \\
d_{n,5} &= -1, \\
d_{n,6} &= n-1, \\
d_{n,7} &= -(n-2), \\
d_{n,8} &= n^2-3n+1, \\
d_{n,9} &= -(n^2-4n+3), \\
d_{n,10} &= n^3-5n^2+6n-1, \\
d_{n,11} &= -(n^3-6n^2+10n-4), \\
d_{n,12} &= n^4-7n^3+15n^2-10n+1, \\
d_{n,13} &= -(n^4-8n^3+21n^2-20n+5), \\
d_{n,14} &= n^5-9n^4+28n^3-35n^2+15n-1, \\
d_{n,15} &= -(n^5-10n^4+36n^3-56n^2+35n-6), \\
d_{n,16} &= n^6-11n^5+45n^4-84n^3+70n^2-21n+1, \\
d_{n,17} &= -(n^6-12n^5+55n^4-120n^3+126n^2-56n+7), \\
d_{n,18} &= n^7-13n^6+66n^5-165n^4+210n^3-126n^2+28n-1, \\
d_{n,19} &= -(n^7-14n^6+78n^5-220n^4+330n^3-252n^2+84n-8), \\
d_{n,20} &= n^8-15n^7+91n^6-286n^5+495n^4-462n^3+210n^2-36n+1, \\
d_{n,21} &= -(n^8-16n^7+105n^6-364n^5+715n^4-792n^3+462n^2-120n+9)
\end{aligned}$$

Матриця значень $(d_{n,m}), n = 1, 2, \ldots, 10;\ m = 1, 2, \ldots, 21$:

$$\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 5 & -3 & 7 & -4 & 9 & -5 & 11 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -3 & 11 & -8 & 29 & -21 & 76 & -55 & 199 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5 & -4 & 19 & -15 & 71 & -56 & 265 & -209 & 989 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 6 & -5 & 29 & -24 & 139 & -115 & 666 & -551 & 3191 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 7 & -6 & 41 & -35 & 239 & -204 & 1393 & -1189 & 8119 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 8 & -7 & 55 & -48 & 377 & -329 & 2584 & -2255 & 17711 \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 9 & -8 & 71 & -63 & 559 & -496 & 4401 & -3905 & 34649
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 \\
-1 & -1 & 1 & 5 & 11 & 19 & 29 & 41 & 55 & 71 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -8 & -15 & -24 & -35 & -48 & -63 \\
1 & -1 & -1 & 7 & 29 & 71 & 139 & 239 & 377 & 559 \\
-1 & 0 & 1 & -4 & -21 & -56 & -115 & -204 & -329 & -496 \\
0 & 1 & -2 & 9 & 76 & 265 & 666 & 1393 & 2584 & 4401 \\
1 & -1 & 1 & -5 & -55 & -209 & -551 & -1189 & -2255 & -3905 \\
-1 & 1 & -1 & 11 & 199 & 989 & 3191 & 8119 & 17711 & 34649 \\
0 & 0 & 0 & -6 & -144 & -780 & -2640 & -6930 & -15456 & -30744 \\
1 & -1 & 1 & 13 & 521 & 3691 & 15289 & 47321 & 121393 & 272791 \\
-1 & 1 & -1 & -7 & -377 & -2911 & -12649 & -40391 & -105937 & -242047 \\
0 & -1 & 2 & 15 & 1364 & 13775 & 73254 & 275807 & 275807 & 2147679 \\
1 & 0 & -1 & -8 & -987 & -10864 & -60605 & -235416 & -726103 & -1905632 \\
-1 & 1 & 1 & 17 & 3571 & 51409 & 350981 & 1607521 & 5702887 & 16908641 \\
0 & -1 & 0 & -9 & -2584 & -40545 & -290376 & -1372105 & -4976784 & -15003009
\end{pmatrix}$$

Додаток 6. Таблиця раціональних одиниць $\frac{a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}}{d}$ кубічних полів для всіх простих чисел не більших за 2000.

p	a	b	c	d
2	1	1	1	1
3	4	3	2	1
5	41	24	14	1
7	4	2	1	1
11	89	40	11	1
13	94	40	17	1
17	324	126	49	1
19	14	5	2	3
23	209	72	26	25
29	7051	2295	747	4
31	131	21	11	100
37	100	30	9	1
41	449	120	38	121
43	49	14	4	1
47	545	136	42	169
53	649	152	46	225
59	34009	8736	2244	25

p	a	b	c	d
61	3905	992	252	1
67	4289	1056	260	1
71	9199	2225	535	324
73	99928	23910	5721	1
79	370454	86336	20121	1
83	1289	232	66	625
89	1441	248	70	729
97	6329	1376	300	121
101	12689	2725	585	64
103	6761	1440	308	169
107	13411	2825	595	36
109	7201	1504	316	225
113	14141	2925	605	16
127	142879	28425	5655	4
131	16379	3225	635	4
137	17141	3325	645	16
139	9521	1824	356	625
149	18689	3525	665	64
151	2651	101	51	2500
157	11009	2016	380	961
163	11521	2080	388	1089
167	21071	3825	695	196
173	21881	3925	705	256
179	22699	4025	715	324
181	13105	2272	412	1521
191	24359	4225	735	484
193	4289	129	65	4096
197	25201	4325	745	576
199	29927	5126	878	3
211	410209	68904	11574	25
223	5699	149	75	5476
227	441409	72360	11862	121
229	45665	7464	1220	1

p	a	b	c	d
233	453241	73656	11970	289
239	7841	648	170	5929
241	83819	13475	2163	1156
251	33139	5225	835	1764
257	34061	5325	845	1936
263	34991	5425	855	2116
269	9721	728	190	7569
271	22105	3232	532	4761
277	95495	14651	2247	484
281	37829	5725	885	2704
283	97469	14847	2261	400
293	39761	5925	905	3136
307	105445	15631	2317	144
311	42719	6225	935	3844
313	107459	15827	2331	100
317	43721	6325	945	4096
331	113549	16415	2373	16
337	115595	16611	2387	4
347	1071205	152439	21693	16
349	119711	17003	2415	4
353	183545	25984	3672	2809
359	1108489	155967	21945	256
367	125945	17591	2457	64
373	128039	17787	2471	100
379	130141	17983	2485	144
383	1183921	163023	22449	1600
389	56369	7525	1065	7744
397	136495	18571	2527	324
401	206681	28032	3800	1369
409	140771	18963	2555	484
419	215489	28800	3848	961
421	145079	19355	2583	676
431	23329	1160	298	19881

p	a	b	c	d
433	149419	19747	2611	900
439	151601	19943	2625	1024
443	227345	29824	3912	529
449	230329	30080	3928	441
457	158195	20531	2667	1444
461	236321	30592	3960	289
463	160409	20727	2681	1600
467	239329	30848	3976	225
479	245369	31360	4008	121
487	169345	21511	2737	2304
491	251441	31872	4040	49
499	173861	21903	2765	2704
503	257545	32384	4072	9
509	260609	32640	4088	1
521	266761	33152	4120	9
523	2410105	299136	37128	121
541	2493769	306048	37560	841
547	192245	23471	2877	4624
557	285409	34688	4216	225
563	288545	34944	4232	289
569	291689	35200	4248	361
571	2634649	317568	38280	3481
577	2663041	319872	38424	4225
587	301169	35968	4296	625
593	304345	36224	4312	729
599	307529	36480	4328	841
601	213539	25235	3003	7396
607	215945	25431	3017	7744
613	218359	25627	3031	8100
617	317129	37248	4376	1225
619	43055	413	207	42436
631	225649	26215	3073	9216
641	330041	38272	4440	1849

p	a	b	c	d
643	4226119	489645	56727	7396
647	333289	38528	4456	2025
653	336545	38784	4472	2209
659	339809	39040	4488	2401
661	237959	27195	3143	11236
673	4418689	504225	57537	3136
677	4444501	506169	57645	2704
683	4483279	509085	57807	2116
691	4535095	512973	58023	1444
701	4600045	517833	58293	784
709	4652149	521721	58509	400
719	4717459	526581	58779	100
727	4769851	530469	58995	4
733	4809229	533385	59157	16
739	4848679	536301	59319	100
743	4875019	538245	59427	196
751	4927795	542133	59643	484
757	4967461	545049	59805	784
761	4993945	546993	59913	1024
769	5047009	550881	60129	1600
773	5073589	552825	60237	1936
787	5166871	559629	60615	3364
797	5233741	564489	60885	4624
809	5314249	570321	61209	6400
811	5327695	571293	61263	6724
821	5395045	576153	61533	8464
823	826481	88200	9410	3481
827	5435551	579069	61695	9604
829	832249	88600	9430	3249
839	441449	46720	4968	11881
853	855401	90200	9510	2401
857	452009	47488	5016	13225
859	861209	90600	9530	2209

p	a	b	c	d
863	455545	47744	5032	13689
877	878681	91800	9590	1681
881	466201	48512	5080	15129
883	884521	92200	9610	1521
887	469769	48768	5096	15625
907	907961	93800	9690	961
911	8206921	846600	87330	7921
919	919729	94600	9730	729
929	8366041	857400	87870	5041
937	937441	95800	9790	441
941	8472481	864600	88230	3481
947	8525809	868200	88410	2809
953	8579209	871800	88590	2209
967	967121	97800	9890	121
971	8739841	882600	89130	841
977	8793529	886200	89310	529
983	8847289	889800	89490	289
991	991009	99400	9970	9
997	997001	99800	9990	1
1009	1009009	100600	10030	9
1013	9117169	907800	90390	169
1019	9171361	911400	90570	361
1021	1021049	101400	10070	49
1031	9279961	918600	90930	961
1033	1033121	102200	10110	121
1039	1039169	102600	10130	169
1049	9443401	929400	91470	2401
1051	1051289	103400	10170	289
1061	9552721	936600	91830	3721
1063	1063441	104200	10210	441
1069	1069529	104600	10230	529
1087	1087841	105800	10290	841
1091	1458521	141691	13761	6400

p	a	b	c	d
1093	1093961	106200	10310	961
1097	1466191	142175	13783	6084
1103	1473869	142659	13805	5776
1109	1481555	143143	13827	5476
1117	1118521	107800	10390	1521
1123	1124681	108200	10410	1681
1129	1130849	108600	10430	1849
1151	1535581	146531	13981	3600
1153	1155601	110200	10510	2601
1163	1551089	147499	14025	3136
1171	1174249	111400	10570	3249
1181	1574411	148951	14091	2500
1187	1582201	149435	14113	2304
1193	1589999	149919	14135	2116
1201	1205489	113400	10670	4489
1213	1218041	114200	10710	5041
1217	1621271	151855	14223	1444
1223	1629109	152339	14245	1296
1229	1636955	152823	14267	1156
1231	1236929	115400	10770	5929
1237	1243241	115800	10790	6241
1249	14968495	1389927	129063	6724
1259	1676305	155243	14377	576
1277	1700011	156695	14443	324
1279	15323845	1411707	130053	2704
1283	1707929	157179	14465	256
1289	1715855	157663	14487	196
1291	15466489	1420419	130449	1600
1297	15537919	1424775	130647	1156
1301	1731731	158631	14531	100
1303	15609421	1429131	130845	784
1307	1739681	159115	14553	64
1319	1755605	160083	14597	16

p	a	b	c	d
1321	15824359	1442199	131439	100
1327	15896149	1446555	131637	16
1361	1811591	163471	14751	100
1367	1819621	163955	14773	144
1373	1827659	164439	14795	196
1381	16545499	1485759	133419	2500
1399	16763245	1498827	134013	4624
1409	1876055	167343	14927	676
1423	17054581	1516251	134805	8464
1427	1900361	168795	14993	1024
1429	17127595	1520607	135003	9604
1433	1908479	169279	15015	1156
1439	1916605	169763	15037	1296
1447	17347069	1533675	135597	13456
1451	1932881	170731	15081	1600
1453	3253745	287469	25337	61504
1459	17493745	1542387	135993	16384
1471	17640709	1551099	136389	19600
1481	1973711	173151	15191	2500
1483	17787961	1559811	136785	23104
1487	1981901	173635	15213	2704
1489	17861695	1564167	136983	24964
1493	1990099	174119	15235	2916
1499	1998305	174603	15257	3136
1511	2014741	175571	15301	3600
1523	2031209	176539	15345	4096
1531	1562329	135400	11770	31329
1543	1575761	136200	11810	32761
1549	24122089	2084832	180180	32041
1553	2072519	178959	15455	5476
1559	2080805	179443	15477	5776
1567	24395905	2100384	180828	25921
1571	2097401	180411	15521	6400

p	a	b	c	d
1579	24578809	2110752	181260	22201
1583	2114029	181379	15565	7056
1597	24853705	2126304	181908	17161
1601	2139031	182831	15631	8100
1607	2147381	183315	15653	8464
1609	25037329	2136672	182340	14161
1613	2155739	183799	15675	8836
1619	2164105	184283	15697	9216
1621	25221241	2147040	182772	11449
1627	25313305	2152224	182988	10201
1637	25466905	2160864	183348	8281
1657	25774705	2178144	184068	5041
1663	25867201	2183328	184284	4225
1667	25928905	2186784	184428	3721
1669	25959769	2188512	184500	3481
1693	26330761	2209248	185364	1225
1697	26392705	2212704	185508	961
1699	26423689	2214432	185580	841
1709	26578729	2223072	185940	361
1721	26765041	2233440	186372	49
1723	26796121	2235168	186444	25
1733	26951641	2243808	186804	25
1741	27076201	2250720	187092	169
1747	27169705	2255904	187308	361
1753	27263281	2261088	187524	625
1759	27356929	2266272	187740	961
1777	27638305	2281824	188388	2401
1783	27732241	2287008	188604	3025
1787	27794905	2290464	188748	3481
1789	27826249	2292192	188820	3721
1801	28014481	2302560	189252	5329
1811	28171561	2311200	189612	6889
1823	28360321	2321568	190044	9025

p	a	b	c	d
1831	28486321	2328480	190332	10609
1847	28738705	2342304	190908	14161
1861	4101161	333437	27105	12544
1867	4113899	334113	27131	12100
1871	29118241	2363040	191772	20449
1873	4126645	334789	27157	11664
1877	29213305	2368224	191988	22201
1879	4139399	335465	27183	11236
1889	29403649	2378592	192420	25921
1889	5264641	426104	34426	81225
1901	29594281	2388960	192852	29929
1907	29689705	2394144	193068	32041
1913	29785201	2399328	193284	34225
1931	2610161	209451	16841	40000
1933	4254545	341549	27417	7744
1949	2636555	210903	16907	42436
1951	4293071	343577	27495	6724
1973	2671859	212839	16995	45796
1979	2680705	213323	17017	46656
1987	4370339	347633	27651	4900
1993	4383245	348309	27677	4624
1997	39526681	3138837	249249	40000
1999	4396159	348985	27703	4356

Вказівки та відповіді

1.1.3. При $r = 1$ маємо

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot i \cdot (i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (i-1) \cdot i} = \frac{(i+1)^{\overline{1}}}{1!}.$$

Далі легко доводиться за індукцією:

$$\frac{(r+1)^{\overline{s+1}}}{(s+1)!} = \frac{(r+1)^{\overline{s}}(r+s+1)}{s!(s+1)} = \frac{(s+1)^{\overline{r}}}{r!} \cdot \frac{r+s+1}{s+1} = \frac{(s+2)^{\overline{r}}}{r!}.$$

1.1.4.

$$\frac{r^{\underline{i}}}{i!} = \frac{(r-i+1)^{\overline{i}}}{i!} = \frac{(i+1)^{\overline{r-i}}}{(r-i)!} = \frac{r^{\underline{r-i}}}{(r-i)!}.$$

1.1.5. Насамперед доведемо, що генератрисою послідовності $u_r = (i+1)^{\overline{r}}/r!$ є функція $f(x) = (1-x)^{-(r+1)}$. З цією метою знайдемо коефіцієнт при x^i в розкладі $f(x)$ у ряд Маклорена. Маємо

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} = \frac{(r+1)^{\overline{i}}}{i!} = \frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!}.$$

Таким чином,

$$(1-x)^{-(r+1)} = \frac{1^{\overline{r}}}{r!} + \frac{2^{\overline{r}}}{r!}x + \ldots + \frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!}x^i + \ldots,$$

тому коефіцієнт при x^{i-1} в добутку $(1-x)^{-1}(1-x)^{-r}$ дорівнює

$$\frac{1^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \frac{2^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \ldots + \frac{i^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} = \sum_{j=1}^{i} \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}.$$

Для доведення другої тотожності зауважимо, що

$$\frac{i^{\underline{r}}}{r!} = \frac{(i-r+1)^{\overline{r}}}{r!} = \sum_{j=1}^{i-r+1} \frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} = \sum_{j=1}^{i-r+1} \frac{(j+r-2)^{\underline{r-1}}}{(r-1)!}.$$

Якщо покласти в останній сумі $k = j + r - 2$, то отримаємо праву частину тотожності, яку треба довести.

1.1.6. Використайте задачу 3 і замініть $\frac{k^{\overline{j}}}{j!}$ на $\frac{(j+1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!}$. Потім використайте першу тотожність задачі 1.1.5.

1.1.7. a) Доведення можна знайти в ([1], стор. 110–111.)

b) Замініть в рівності (1.1.8) x на $-x$ та використайте рівності (1.1.3), (1.1.2).

1.2.1.

1) $[A] = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$, $[B] = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

2)$S(A) = \{1, 3, \ldots, 4n-1\} = \{1^1, 2^0, 3^1, \ldots, (4n-3)^1, (4n-2)^0, 4n-1^1\}$,

$S(B) = \{2n-1, 2n-1, \ldots, 2n-1\} = \{1^0, 2^0, \ldots, (2n-2)^0, (2n-1)^n\}$;

3)

$$\overline{A} = \{a_1^{2n}, a_2^{2n-1}, a_3^{2n-1}, \ldots, a_k^{2n-\left[\frac{k}{2}\right]}, \ldots, a_{4n-2}^1, a_{4n-1}^1\},$$

$$\overline{B} = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_{2n-2}^n, a_{2n-1}^n\}$$

1.2.2.

1) $A \cup B = \{a_1^{2n-1}, a_2^{2n-1}, \ldots, a_n^{2n-1}, a_{n+1}^{2n+1}, \ldots, a_{2n}^{4n-1}\}$;

2) $A \cap B = \{a_1^1, a_2^3, \ldots, a_n^{2n-1}\}$;

3) $A + B = \{a_1^{2n}, a_2^{2n+2}, \ldots, a_n^{4n-2}, a_{n+1}^{2n+1}, \ldots, a_{2n}^{4n-1}\}$;

4) $B \backslash A = \{a_1^{2n-2}, a_2^{2n-4}, \ldots, a_{n-1}^2\}$.

1.2.3. Діаграми $diagr(A)$ и $diagr(B)$ зображені відповідно на мал. і мал.

5) Діаграми $diagr(\overline{A})$ и $diagr(\overline{B})$ зображені відповідно на мал. і мал.

1.2.4. Мультимножина $B = \{a_1^{s_1}, a_2^{s_2}, \ldots, a_n^{s_n}\}$ буде підмультимножиною мультимножини A тоді й лише тоді, коли вектор $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ належить декартовому добутку

$$\{0, 1, \ldots, k_1\} \times \{0, 1, \ldots, k_2\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, k_n\}.$$

Тому $|2^A| = \prod_{i=1}^n (k_i + 1)$.

1.2.5. Таку бієкцію можна побудувати при допомозі верхніх східців діаграм $Diagr(B)$, $B \in 2^A$.

1.2.6. Встановіть бієкцію між сукупністю мультимножин C, які задовольняють включення $A \subseteq C \subseteq B$, та відповідною частиною множини $2^{B \backslash A}$ і використайте результат вправи 4. Відповідь. $\prod_{i=1}^n (s_i - r_i + 1)$.

1.2.7. Можна. Для цього слід кожній мультимножині C поставити у відповідність верхні східці похилої діаграми $diagr(C, B)$.

1.3.2. Встановіть бієкцію між розбиттями та спряженими до них розбиттями. [11]

1.3.3. Встановіть бієкцію між частинними похідними n-го порядку від цієї функції та цілими невідємними розв'язками рівняння $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$ та скористайтесь зауваженням 1.2.2 (див. стор. 19).

1.4.1. Використайте алгоритм із твердження 1.4.2.

1.4.2. Скористайтеся твердженням 1.4.3 та симетрією таблиці із прикладу 1.4.3. Відповідь. $\frac{3^{n-1}-1}{2}$.

1.4.3. Використайте бієкцію множин $\Xi(n)$ і $\mathbb{P}(n,+)$ (див. твердження 1.4.1 на стор. 31).

1.6.1.

$L\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$m=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n=0$	1									
1	1	1								
2	1	0	1							
3	1	-1	-1	1						
4	1	-2	2	-2	1					
5	1	-3	2	2	-3	1				
6	1	-4	7	-8	7	-4	1			
7	1	-5	9	-5	-5	9	-5	1		
8	1	-6	16	-26	30	-26	16	-6	1	
8	1	-7	20	-28	14	14	-28	20	-7	1

Многочленом нульового рядка є t^0. Решта многочленів парних рядків мають вигляд $(1+t^2)(1-t)^{2n-2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Многочленами непарних рядків є: $(1+t)(1-t)^{2n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

[11] Розв'язання задачі читач знайде в [79].

1.6.2. Модулі всіх елементів обидвох таблиць збігаються, але знаки елементів стовпців з непарними номерами поміняються на протилежні. Тут числовий трикутник починається нульовим стовпчиком.

1.6.3. Рекурентне співвідношення:

$$LL(n,m) = (\alpha_{11}n+\alpha_{12}m+\beta_1)LL(n-1,m)+(\alpha_{21}n+\alpha_{22}m+\beta_2)LL(n-1,m+1)$$

$$+(\alpha_{31}n + \alpha_{32}m + \beta_3)LL(n-1, m+2),$$

Початкові умови:

$$LL(n,n) = a,\ n = 0, 1, \ldots;\ LL(n, n-1) = b,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Тут ми вважаємо, що $LL(n,m) = 0$ при $m > n$.

Матриця коефіцієнтів:

$$LL\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Якщо $j = i$, то

$$\frac{i \cdot \delta_{ij} + j}{2i - j \cdot \delta_{ij}} = 2.$$

Якщо ж $i \neq j$, то

$$\frac{i \cdot \delta_{ij} + j}{2i - j \cdot \delta_{ij}} = \frac{j}{2i}.$$

2.1.2. $((1-\delta_{ij})a_{ij} + a_i\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$.

2.1.3. $\left(\frac{j(\delta_{ij}+1)}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$.

2.3.1. 1.

2.3.2. 1.

2.3.3. Розгляньте спочатку парадетермінант трикутної матриці, у якій всі елементи дорівнюють -1, і лише після цього приступіть до обчислення парадетермінанта заданої матриці. Він відрізняється від парадетермінанта попередньої трикутної матриці лише одним нульовим доданком. Отже, парадетермінант заданої матриці дорівнює 1.

2.3.4. Достатньо знайти принаймні одну пару трикутних матриць другого порядку, для яких парадетермінант добутку двох матриць не дорівнює добутку парадетермінантів цих матриць.

2.3.5.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} & & \\ \binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} & \\ \binom{n+1}{2} & \binom{n}{1} & \binom{n-1}{0} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$pper(A^n) = \frac{n^3+n^2-4n+2}{2}.$$

2.3.6. $$\begin{bmatrix} u_1 & & \\ \frac{u_2-u_1^2}{u_1} & u_1 & \\ \frac{u_3-2u_1u_2+u_1^3}{u_2-u_1^2} & \frac{u_2-u_1^2}{u_1} & u_1 \end{bmatrix}.$$

2.3.7. $$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ -a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ (Дивись теорему 2.4.5 на стор. 116.)

2.4.1. Значення парадетермінантів цієї матриці при n=1,2,3,4,5 відповідно дорівнюють $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}$, а відповідні значення параперманентів — $1, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{75}{24}, \frac{541}{120}$. Для обчислення парафункцій трикутних матриць 5–го порядку можна використати теорему 3.2.11.

2.4.2. Позначіть дану трикутну матрицю через A_n і розкладіть її за елементами останнього рядка. При цьому отримаєте рекурентні співвідношення $\mathrm{ddet}\,(A_n) = \alpha_n \mathrm{ddet}\,(A_{n-1})$, $pper(A_n) = \alpha_n pper(A_{n-1})$, $n = 3, 4, \dots$, де $\mathrm{ddet}\,(A_2) = \alpha_2(\alpha_1 - 1)$, $pper(A_2) = \alpha_2(\alpha_1+1)$.

2.4.3. Нехай у матриці (2.1.1) елементи вписаної, невиродженої таблиці $T(i)$ задовольняють умову наслідку 2.4.1.3 , тобто

$$a_{sr} = b_r, \quad s \in \{i, \dots, n\}; \quad r \in \{1, \dots, i.\}$$

Розглянемо суму $\sum\limits_{s=i}^{n} \{a_{sr}\} D_{sr}$. Враховуючи умову наслідку, матимемо

$$\sum_{s=i}^{n} \{a_{sr}\} D_{sr} =$$

$$(-1)^{r-i} b_r b_{r+1} \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \mathrm{ddet}(R_{r-1,1}) \sum_{s=i}^{n} (-1)^{s+i} \{a_{si}\} \mathrm{ddet}(R_{n,s+1}) =$$

$$= (-1)^{r-i} b_r b_{r+1} \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \cdot \mathrm{ddet}(R_{r-1,1}) \cdot \mathrm{ddet}(R_{ni}).$$

Але $\mathrm{ddet}(R_{ni}) = 0$.

2.4.4.

$$\mathrm{ddet}\,((-1)^{i-j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = $$

$$= \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 2, & n \geqslant 2. \end{cases} =$$

$$= pper((-1)^{i-j})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n=2, \\ -2, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

2.4.5. Скористайтесь теоремою 2.4.5 та задачею 3 із попереднього пункту.

2.4.6. Розглянемо деяке впорядковане розбиття $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ числа n. Можливі два випадки: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 > 1$. В першому випадку розбиттю α поставимо у відповідність єдине корозбиття $\alpha' = (\alpha_2 + 1, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$, а у другому — єдине корозбиття $\alpha' = (1, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. Таким чином, всі впорядковані розбиття числа n можна розбити на пари (α, α'). Позаяк всі елементи першого стовпчика трикутної матриці (2.1.1) однакові, то розбиттям, які належать парі (α, α'), відповідають нормальні набори ключових елементів, добутки факторіальних добутків яких однакові.

Нехай (α, α') — деяка пара розбиттів, де α — корозбиття розбиття α'. Не зменшуючи загальності доведення, вважатимемо, що

$\alpha = (1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r)$, $\alpha' = (\alpha_2 + 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_r)$. Порівняємо парність сум індексів ключових елементів, відповідних першим двом компонентам розбиття α із сумою індексів ключового елемента, відповідного першій компоненті розбиття α'. Компоненті 1 розбиття α відповідає ключовий елемент a_{11}, сума індексів якого не змінює парності. Нехай компоненті α_2 розбиття α відповідає ключовий елемент a_{i2}, $i \in \{2, \ldots, n\}$, тоді першій компоненті $\alpha_2 + 1$ розбиття α' відповідає ключовий елемент a_{i1} із сумою індексів, яка відрізняється від суми індексів елемента a_{i2} на одиницю. Отже, при обчисленні парадетермінанта, кожній парі розбиттів (α, α') відповідають два доданки рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком і парадетермінант за означенням 2.3.2 дорівнює нулю.

При обчисленні параперманента за означенням 2.3.3 всі доданки, які відповідають розбиттям із нульовою першою компонентою ввійдуть до виразу $a \cdot pper(R_{n2})$, тому параперманент заданої трикутної матриці дорівнює $2 \cdot a \cdot pper(R_{n2})$.

2.4.7. Позначте парадетермінант через u_n та розкладіть його за елементами останнього рядка, отримаєте рекурентну рівність

$$u_n = 2u_{n-1} - u_n$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1,\ u_1 = 2.$$

Отже, $u_n = n + 1$.

2.4.8. Перейдіть до рекурентної рівності

$$u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-2}$$

із початковими умовами

$$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 6.$$

Кінцево отримаємо

$$u_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Для узагальнення задач 7 та 8 використайте трикутник Паскаля та побудуйте парадетермінант $n-$го порядку із значенням $\frac{(n+k)^{\underline{k}}}{k!}$.

2.4.9. Розкладіть даний парадетермінант за елементами останнього рядка. При цьому легко отримати результат $\sum_{i=1}^{n} i!$.

2.4.10. Для цього достатньо розкласти парадетермінант за елементами останнього рядка.

2.4.11. Використайте теорему 3.2.11 та зробіть позначення $x = a + s - 1$, $y = a - s + 1$. При цьому отримаєте біном.

2.4.12.

$$\mathrm{ddet}\,(A) = (-1)^{n-1},\ \mathrm{ddet}\,(B) = (-1)^n 2^{n-1}.$$

Відповідні тотожності матимуть вигляд:

$$1 = \binom{2n-1}{n} - \sum_{s=2}^{n} \binom{2n-s}{n-1},$$

$$-2^{n-1} = \frac{(n-2)(n-4) \cdot \ldots \cdot (n-2n)}{n!} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{n} 2^{s-2} \frac{(n-2s)(n-2s-2) \cdot \ldots \cdot (n-2n)}{(n-s+1)!}.$$

2.4.13. Перші стовпці перших трьох ітерацій відповідно дорівнюють:

$$a_{i1}^{(1)} = \frac{2i+3}{i+1-\delta_{i+1,2}},\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$a_{i1}^{(2)} = \frac{3i+5}{i+1-\delta_{i+1,2}},\ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$a_{i1}^{(3)} = \frac{5i+8}{i+1-\delta_{i+1,2}},\ i = 1, 2, \ldots, n-3.$$

Після трьох ітерацій видно, що ми маємо справу із послідовністю чисел Фібоначчі, в якій кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх чисел:

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, \ldots.$$

Перевіримо виконання індукційного кроку. Нехай у $(k-2)$–ій ітерації

$$a_{11}^{(k-2)} = F_{k+1},\ a_{i+1,1}^{(k-2)} = \frac{F_{k-1}(i+1)+F_k}{i+2},\ i=1,2,\ldots,n-k+2,$$

$$a_{i+1,2}^{(k-2)} = \frac{i+2}{i+1-\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-k+2,$$

тоді

$$a_{i1}^{(k-1)} = \left(F_{k+1} - \frac{F_{k-1}(i+1)+F_k}{i+2}\right)\cdot\frac{i+2}{i+1-\delta_{i+1,2}} =$$

$$\frac{(F_{k+1}i+2F_{k+1}-F_{k-1}(i+1)-F_k}{i+1-\delta_{i+1,2}} = \frac{F_k i+F_k+F_{k-1}}{i+1-\delta_{i+1,2}} =$$

$$\frac{F_k i+F_{k+1}}{i+1-\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-k+1.$$

Тобто індукційний крок виконується і після $(k-1)$–ої ітерації отримаємо парадетермінант виду

$$\left\langle\frac{F_k i+F_{k+1}}{i+1-\delta_{i+1,2}}\right\rangle_1,$$

який при $i=1$ дорівнює F_{k+2}. Таким чином, справедлива рівність

$$\left\langle\frac{i-j+3}{i-j+2-\delta_{ij}}\right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = F_{k+2}. \qquad (3.11.8)$$

2.4.14. Справедливість першої рівності випливає із рівності (2.4.31) при $n=1$.

Знайдемо значення цього парадетермінанта, використовуючи теорему 2.4.2.

Перша ітерація.

$$a_{11}=1,\ a_{i+1,1}=\frac{i+1}{i},\ i=1,2,\ldots,n,$$

$$a_{i+1,2} = \frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n.$$

$$a_{i1}^{(1)} = (a_{11}-a_{i+1,1})a_{i+1,2} = \left(1-\frac{i+1}{i}\right)\cdot\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}} =$$

$$= -\frac{1}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-1.$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}},\ i,j=2,3,\ldots,n-1.$$

Друга ітерація.

$$a_{11}^{(1)}=-1,\ a_{i+1,1}^{(1)} = -\frac{1}{i},\ i=1,2,\ldots,n-1,\ a_{i+1,2}^{(1)} =$$

$$= -\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-1.$$

$$a_{i1}^{(2)} = (a_{11}^{(1)}-a_{i+1,1}^{(1)})a_{i+1,2}^{(1)} = \left(1-\frac{1}{i}\right)\cdot\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}} =$$

$$= \frac{i-1}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-2.$$

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}},\ i,j=2,3,\ldots,n-2.$$

Третя ітерація.

$$a_{11}^{(2)}=0, a_{i+1,1}^{(2)}=1, i=1,2,\ldots,n-2, a_{i+1,2}^{(2)}=\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}}, i=2,3,\ldots$$

$$a_{i1}^{(3)} = (a_{11}^{(2)}-a_{i+1,1}^{(2)})a_{i+1,2}^{(2)} = -\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i=1,2,\ldots,n-3.$$

$$a_{ij}^{(3)} = \frac{i-j+1}{i-j+\delta_{ij}}.$$

Четверта ітерація.

$$a_{11}^{(3)}=-1,\ a_{i+1,1}^{(3)} = -\frac{i+1}{i} =,\ i=1,2,\ldots,n-3,\ a_{i+1,2}^{(3)} =$$

$$= -\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}},\ i = 1, 2, \ldots, n-3.$$

$$a_{i1}^{(4)} = -\frac{i}{i-1+\delta_{i+1,2}}.$$

Елементи парадетермінанта першого стовпця після четвертої ітерації збігаються з елементами детермінанта першого стовпця, що є результатом першої ітерації, тому справедлива рівність (2.4.43).

Справедливість рівності для параперманента цієї трикутної матриці перевіряється аналогічно.

2.5.1. Тотожності а) і б) випливають із тотожності (2.5.24) відповідно при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1,$$

та

$$x_i = \begin{cases} -1, & \text{якщо } i \text{ парне}, \\ 1, & \text{якщо } i \text{ непарне}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2.5.2. Спочатку доведіть справедливість рівності

$$\left\langle \frac{i-j+k}{i-j+k-1} \right\rangle_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} = (-1)^{n-2} \frac{(k-2)^{n-2}}{(k-1)^n}.$$

Це можна зробити, принаймні, двома способами:

1. Розкласти парадетермінант за елементами останнього рядка і отримати рекурентну рівність. Переконатися в тому, що значення парадетермінанта задовольняє цю рівність. Покласти в рівності (2.5.25) $x_i = \frac{n+i-1}{n-1}$.

2. Використати теорему 2.4.2, після чого у рівності (2.5.25), зробити аналогічну підстановку.

2.8.1. -13.

2.8.2. $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 9z$. Те, що коренями цього многочлена є $z = 0$ і $z = 1$, видно із самого добутку вектора на парадетермінант.

2.8.3. Подайте спочатку добуток у вигляді

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ \frac{3}{3} & 3 & & & \\ \frac{9}{3} & \frac{3}{3} & 3 & & \\ \frac{18}{9} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} & 3 & \\ \frac{18}{18} & \frac{18}{9} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} & 3 \end{bmatrix}$$

і скористайтесь кілька разів наслідком 2.8.1.1 та твердженням 2.8.2. В результаті отримаєте 1089.

2.10.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$.

2.10.2. $\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ -\{a_{21}\} & a_{22} & 1 & 0 \\ \{a_{31}\} & -\{a_{32}\} & a_{33} & 1 \\ -\{a_{41}\} & \{a_{42}\} & -\{a_{43}\} & a_{44} \end{vmatrix}$.

2.10.3. $a_{12} a_{23}^{(1)} \left\langle \begin{matrix} \frac{a_{11}}{a_{12}} & & \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{23}^{(1)}} & \\ \frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{32}}{a_{33}^{(1)}} & a_{33}^{(1)} \end{matrix} \right\rangle$,

тут

$$a_{23}^{(1)} = \frac{A\binom{12}{23}}{A\binom{1}{2}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{12}},\quad a_{33}^{(1)} = \frac{A\binom{13}{23}}{A\binom{1}{2}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{12}}.$$

2.10.4. Із другого і третього стовпчика детермінанта винесіть за його знак відповідно множники 2 і 3 та скористайтесь рівністю (2.10.4)

$$6 \cdot \left\langle \begin{matrix} 1 & & & \\ \frac{2}{0} & 0 & & \\ \frac{8}{3} & \frac{9}{4} & \frac{2}{3} & \\ \frac{2}{0} & \frac{0}{0} & \frac{0}{2} & 2 \end{matrix} \right\rangle.$$

2.10.6. $\frac{1}{24}$.

Бібліоґрафія

[1] *Айгнер М.* Комбинаторная теория: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 558 с.

[2] *Андерсон Д.А.* Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс 2003. — 960 с.

[3] *Арнольд В.И.*, Цепные дроби, М. Изд-во Московского центра непрерывного матем. образов., 2001. — 40 с.

[4] *Арнольд В.И.*, Истории давние и недавние. — М.:ФАЗИС, 2002.— 87 с.

[5] *Атаманюк О.Б., Заторський Р.А.* Застосування функцій трикутних матриць до розв'язання деяких систем рівнянь // Матеріали міжнар. конф., присвяченої 125 річниці від дня народж. Ганса Гана.– Чернівці.– 2004.– с.7-8.

[6] *Бауэр Ф.Л., Гооз Г.* Информатика. ч.2 М.:Мир, 1990. — 742 с.

[7] *Безущак О.О., Ганюшкін О.Г.* Елементи теорії чисел: Навчальний посібник. — К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2003. — 202 с.

[8] *Бейкер Дж. мл.*, Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде: Пер. с англ. 1986. — 502 с.

[9] *Беллман Р.*, Введение в теорию матриц, М.: Наука., 1969. — 368 с.

[10] *Биллевич К. К.*, Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков, Матем. сб., 40, № 1 (1956), 123-136.

[11] *Битківський Ю., Семенчук А.* Екстремальні задачі на квадратних та трикутних матрицях.//Еврика – VII. Збірник студентських наукових праць. Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника. м. Івано–Франківськ, 2006. стор.178–179.

[12] *Боднар Д.І.* Багатовимірні узагальнення неперервних дробів.// Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2003. - 46, № 3. – С. 32–39.

[13] *Босс В.* Лекции по математике: линейная алгебра. Т.3. — М.: КомКнига, 2005. 224 с.

[14] *Вейль Г.* Полвека математики. – М.:Знание, 1969. - 48 с.

[15] *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. Изд. 4-тое. М.:Наука, 1978. 144 с.

[16] *Вороной Г.Ф.* Собрание сочинений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. — Т.1. — 400 с.

[17] *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов./ Перев. с англ. А.Р.Логунова.— Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 272 стр.

[18] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.:Наука, 1966. — 576 с.

[19] *Ганюшкін О.Г., Заторський Р.А., Ліщинський І.І.* До паравизначників і параперманентів. // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. - 2005.- Вип.1.- с. 35-41.

[20] *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. ли-ры, 1959. — 400 с.

[21] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998.— 703 с. ил.

[22] *Грин Д., Кнут Д.* Математические методы анализа алгоритмов. — М.:Мир, 1987. — 120 с.

[23] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. Под. ред. В.Е. Тараканова. — М.: Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 504 с.

[24] *Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К.* Теория иррациональностей третьей степени. М.:Изд-во АН СССР, 1940 г., 340 с.

[25] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985. 415 с.

[26] *Дубиле П., Рота Дж.-К., Стенли Р.*. Об основаниях комбинаторной теории (IV): идея производящей функции. — В сб. Перечислительные задачи комбинаторного анализа. — Пер. с англ. —М.: Мир, 1979.

[27] *Дяків Н.М., Заторський Р.А.* До $F-$парадетермінантів і $F-$параперманентів трикутних матриць// Мат. Методи та фіз.-мех. поля. - 2005.—48, №1.— С.21-24.

[28] *Заторський Р.А.* Деякі методи та задачі комбінаторного аналізу (Спеціальний курс математики) Івано-Франківськ. Лік, 2006. — 136 с.

[29] *Заторський Р.А.* Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С. 3 – 17.

[30] *Заторський Р.А.* Паравизначники та параперманенти трикутних матриць// Доповіді НАН України. – 2002.- №8.– с. 21–25.

[31] *Заторський Р.А.* Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої сторіччю від початку роботи Д.О. Граве в Київському університеті, Київ, 2002 р., с. 138.

[32] *Заторский Р.А.* Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре//Математические заметки. — 2002. — Т.72, Вып.6 — С.834–852.

[33] *Заторський Р.А.* Неперервні дроби, K-многочлени і параперманенти// Мат. Методи та фіз.-мех. поля. - 2002.— №4.— С. 12-21.

[34] *Заторський Р.А.* Про многочлени розбиттів і їх паравизначники та параперманенти // Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука.– К: НТУУ (КПІ). - 2004. - с. 383.

[35] *Заторский Р.А.* Подсчет m-подмультимножеств через их вторичные спецификации // Комбинаторный анализ. Вып.7 / Под ред. К.А.Рыбникова.-М.: МГУ, 1986, с. 136-145.

[36] *Заторський Р.А.* Про число сполучень на мультимножинах // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. - 2000.- Вип.3.- с. 42-47.

[37] *Заторський Р.А.* Про деякі комбінаторні задачі на мультимножинах // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука.- К: НТУУ (КПІ). - 2002. - с. 426.

[38] *Заторский Р.А.* Про один алгоритм підрахунку числа m-перестановок на довільних мультимножинах. // Математичні студії. - 2002. - Т.17, №2. С. 215-219.

[39] *Заторський Р.А.* Парафункції і комбінаторні тотожності // Науковий вісник Чернівецького університету. Зб. наук. пр. Випуск 336-337. Математика. - Чернівці: ЧНУ, 2007. - С. 79-84.

[40] *Заторський Р.А.* Операції з формальними степеневими рядами з ненульовим вільним членом. // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. — 2008.— Вип.1.— с. 36-39.

[41] *Заторський Р.А.*, Парадетермінанти і многочлени розбиттів.//УМЖ. — 2008., т. 60, №11. — с. 1457-1469.

[42] *Заторський Р.А.* Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці та його застосування.//Прикарпатський вісник НТШ. Число, 1(1)–2008, с. 22-30.

[43] *Заторський Р.А.* Рекурсії та позиційні системи числення.// Прикарпатський вісник НТШ. Число, 1(5)–2009, с. 30-33.

[44] *Заторський Р.А.* Рекурентні дроби k-го порядку // Матеріали Українського математичного Конгресу, присвяченого 100-річчю від дня народження Боголюбова М.М., м. Київ, Інститут математики НАН України, 27-29 серпня 2009 р.

[45] *Заторський Р.А., Ліщинський І.І.* Про зв'язок детермінантів із парадетермінантами. // Математичні студії. - 2006. Т. 25. № 1 стор. 97 - 102.

[46] *Заторський Р.А., Литвиненко І.М.* Застосування параперманентів до лінійних рекурентних рівнянь.//Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008., №5. — с. 122-128.

[47] *Заторський Р.А., Малярчук О.Р.* Нескінченні лінійні рекурентні рівняння та параперманенти.//Карпатські математичні публікації. — 2008., Т.1, №1. — с. 35-46.

[48] *Заторский Р.А., Малярчук А.Р.* Треугольные матрицы и комбинаторные формулы обращения. // Матем. заметки, 85:1(2009), 12-21.

[49] *Заторський Р.А., Малярчук О.Р.* Факторіальні степені та трикутні матриці.//Карпатські математичні публікації. — 2009., Т.1, №2. — с. 161-171.

[50] *Заторський Р., Семенчук А.* Зображення деяких класів кубічних ірраціональностей періодичними рекурентними дробами// Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 50-річчю кафедри алгебри і математичної логіки КНУ ім. Т. Шевченка.- К: КНУ ім. Т.Шевченка. — 22-23 грудня 2009. - с. 45.

[51] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — 430 с.

[52] *Кац М., Улам С.* Математика и логика Ретроспектива и перспективы. Пер. с англ.-М.: Мир,1971.-250с.

[53] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ, т.2: Получисельные алгоритмы. Перев. с англ.— М.: Мир, 1978.

[54] Колмогоров в воспоминаниях учеников: Сб. ст. / Ред.-сост. А.Н.Ширяев. М.: МЦНМО, 2006. — 472 с., 24 с. ил.

[55] Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учебное пособие/ Под ред. К.А.Рыбникова. — М.:Наука, 1982

[56] *Круковський Б.В.* До теорії нескінченних неперервних дробів 2-го класу// Журн. Ін-ту математики УАН. – 1933. — №1. — С. 195–206.

[57] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — 9-е изд. — М.: Наука, 1968. — 431 с.

[58] *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 224 с., ил.

[59] *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. — М.: Наука. 1975, 48 с.

[60] *Минк Х.* Перманенты. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 213 с.

[61] *Платонов М.Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М.:Наука, 1979. — 154 с.

[62] *Прасолов В.В.* Многочлены. — 3-е изд., исправленное. — М.: МЦНМО, 2003. — 336 с.

[63] *Проблемы Гильберта.* Сборник под ред. П.С.Александрова М.:Наука, 1969. — 240 с.

[64] *Протасов І.В., Хромуляк О.М.* Методи лінійної алгебри в комбінаториці. К., 1997, 40 стор.

[65] *Райзер Г.Д.*, Комбинаторная математика. Пер. с англ.— М.:Мир,1966.— 154 с.

[66] *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества: пер. с англ. М.: Наука, 1982, 255 с.

[67] *Сачков В.Н.* Комбинаторные методы дискретной математики.- М.: Наука, 1977.-319 с.

[68] *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982, 384 с.

[69] *Серре И.А.* Курс высшей алгебры. Второе русское изд. под ред. Л.А. Левенстерна. М. Изд-во т-ва М.О. Вольф, 1902.

[70] *Скляревский Е.* Интересные числа. //Домашний компьютер, № 12, 2001 г.

[71] *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания: Пер. с англ. — М.: Мир, 1969. — 472 с.

[72] *Стечкин Б.С.* Наборы и их использование в комбинаторных схемах (об одной комбинаторной формализации) // Сб. "Комбин. и асимпт. анализ Изд-во Крас. ГУ, 1977., с. 44-54.

[73] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 440 с., ил.

[74] *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. изд. 4 пер. с нем. М.: Наука, 1984, 284 с.

[75] *Стюарт Я.* Концепции современной математики. Пер. с англ.-Минск.: Вышэйшая школа,1980.-384 с.

[76] *Тараканов В.Е.* Комбинаторные задачи и $(0,1)$–матрицы. — М.: Наука. 1985. — 192 с.

[77] *Тараканов В.Е., Заторский Р.А.* О связи детерминантов с перманентами. // Матем. заметки, 85:2 (2009), 292-299.

[78] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных т. I изд. 2, М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 315 с.

[79] *Эндрюс Г.*. Теория развиений: Пер. с англ. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 256 с.

[80] *Егорычев Г.П.* К обращению комбинаторных соотношений. — В кн.: Комбинаторный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1974, вып.3, с. 10-14.

[81] *Чезаро Э.* Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Пер. с нем.: Одесса, 1913 г. 651 с.

[82] *Ейлер Л.* Письма к ученым. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 397 с.

[83] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами: Пер. с англ. — М.: Наука, 1979. — 832 с., ил.

[84] *Фоата Д.* Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок. В кн. Проблемы комбинаторного анализа. Сборник статей. Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Мир, 1980. – стр. 120–139.

[85] *Федер Е.* Фракталы. Пер. с англ.-М.: Мир,1991.-254с.

[86] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. Пер. Д.А. Райкова. Статья С.Б. Стечкина. М., ИЛ, 1951.

[87] *Хинчин А.Я.*, Цепные дроби, 3 изд., М.:Гос. издат. физ.-мат. лит-ры. 1961. 112 с.

[88] *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. — 203 с.

[89] *Холл М.* Комбинаторика. Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

[90] *Ядренко М.Й.* Дискретна математика: навчальний посібник. — К.: Вид.-поліграф. центр "Експрес 2003.— 244 с.

[91] *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics with Applications to Geometry and Computer Science., Preliminary Version 2, Department of Computer Science The University of Chicago, (September 1992), 216 p.

[92] *Bell E.T.*, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), 135-154.

[93] *Bell E.T.* Partition polynomials. — Ann. Math. 29, 1927, p. 38 – 46.

[94] *Bernoulli D.* Disquisitiones ulteriores de indola fractionum continuarum. Novi comm. Acad. sci. Imper. Petropol. **20** (1775).

[95] *Brenner J., Cummings L.* The Hadamard Maximum Determinant Problem. *Amer. Math. Montly* **79**, 1972.–626–630.

[96] *Brocot A.* Calcul des rouages par approximation, nouvelle methode // Revue Chronometrique 6 (1860), 186–194.

[97] *Capelli A.* Giornale di Matematiche di Battaglini **31**(1893), 291-313.

[98] *David S. Dummit, Jonathan W. Sands, and Brett A. Tangedal.* Computing stark Units for totally Real cubic Fields // Mayhematics of Computation., Volume 66, Number 219, July 1997, Pages 1239–1267.

[99] *F. Diaz Y Diaz.* A Table of Totally Real Quintic number Fields// Mathematics of computation volume 56, number 194 1991, pages 801-808.

[100] *Eulero L.* Observationes analyticae variae de combinationibus. Comment. acad. sc. Petrop., 13(1741/3), 1751, p. 64.

[101] *Eulero L.* Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum. Novi comment. acad. sc. Petrop., 5 (1754/5), 1760, p. 76.

[102] *Eulero L.* Institutiones calculi differentialis, 1755 №41, p. 99–101

[103] *Eulero L.* Introductio in Analysin Infinitorum 1 (1748),76

[104] *Euler L.* De fractionibus continuis, Comm. Acad. Sci. Imper. Petropol. **9** (1737)

[105] *Eulero L.* Methodus universalis series summandi ulterius promota, *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* 8 (1736), 147-158.

[106] *Faa di Bruno F.*, Note sur un nouvelle formule de calcul differentiel,*Quarterly J. Math.* **1**(1857), 359–360.

[107] *Fadeev D.K., Sominskii I.S.* Problems in Higher Algebra. San Francisko: W.H. Freeman, 1965.

[108] *Fine N.J.* Sums over partitions.— Report of the Institute in the Theory of Numbers, Boulder, 1959, p. 86-94.

[109] *Frame J.S., Robinson G. de B., Thrall R.M.* The hook graphs of Sn. // Canad. J. Math. 6, 1954, p. 316-324.

[110] *Franklin J.* Sur le developpement du produit infini $(1-x)(1-x^2)\ldots$, Comptes Rendus Acad. Fr., **82** (1881). 448-450.

[111] *Fujiwara M.* A problem of Diophantine approximations in the old Japanese mathematics// Proc. Acad. Tokyo. — 1939. — 15. —P.101-104.

[112] *Fürshtenau E.* Über Kettenbruche höherer Ordnung // Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik. — 1876. — S. 133–135.

[113] *Galois E.* Annales de Mathematiques de M. Gergonne, **19**, 1828-1829, P.294.

[114] *Gibson P.M.* Conversion of the permanent into the determinant, Proc. Amer. Math. Soc. 27 (1971), 471-476.

[115] *Gould H.W.* A q-binomial coefficient series transform. — Bull. Amer. Math. Soc.,1960, 66, №5. p. 383-387.

[116] *Graham, R.L., Groetschel M., and Lovasz L., eds.* (1996). Handbook of Combinatorics, Volumes 1 and 2. Elsevier (North-Holland), Amsterdam, and MIT Press, Cambridge, Mass.

[117] *Green C., Kleitman D.I.*Proof. Techniques in the theory of finite sets. // In Studies in combinatorics, edited by G.-C. Rota, MAA Studies in Math., 17, Math. Assoc. of Amer., Washington, D.C., 1978, pp. 22-79.

[118] *Hadamard J.* Résolution d'une question relative aux déterminants. *Bull. Sci. Math.* **17**, 1893.– 30–31.

[119] *Halphen G.H.* Sur des suites de fractions analogues a la suite de Farey // Bulletin de la Sosiete mathematique de France 5 (1876), 170–175.

[120] *Hardy G.H.,Ramanujan S.* Asymptotic formulae in combinatory analysis.— Proc. London Math. Soc., (2), **17** (1918) p. 75-115.

[121] *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis 1 (Wiley, 1974).

[122] *Jacobi C.G.J.* Allgemeine Theorie der Kettenbruchahnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahe aus drei vorhergehruden gibildet wird // J. fur die Reine und Angew. Math. — 1868. — 69. — S.29–64.

[123] *Johnson S.M.* Generation of permutations by adjacent transpositions. Math, Comp, 1963. 17, s. 282—285.

[124] *Knopfmacher A., Ridley J. N.*; Reciprocal sums over partitions and compositions. SIAM J. Discrete Math. 6 (1993), no. 3, 388-399.

[125] *Lagrange J.L.* Sur l'usage des fractions continues dans le calcul integrale. Nouv. Acad. Royale Sci. Belle-Lettres de Berlin (1776); Oeuvres, T. IV. pp. 301–332.

[126] *Lah I.* Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik. Mitteilungsblatt Math. Stat. 7, 203–212 (1955).

[127] *Laplace P. S.* Théorie Analytique des Probabilités.— Paris, 1812.

[128] *Y.Lee, R. Scheidler, and C. Yarrish.* Computation of the Fundamental Units and the Regulator of a Cyclic Cubic Function Field//Experimental Mathematics, Vol. 12 (2003), No. 2., p 212-225.

[129] *Mac Laurin C.* A treatise of fluxions, v. 1–2, Edinburgh, 1742.

[130] *Macmahon P.A.* Combinatory Analysis, London: Cambridge Univ. Press, — 1915. - 302 p.

[131] *Marcus M., May F.C.*, The permanent function, *Canad. J.Math.* **14**(1962), 177-189.

[132] *Marcus M., Minc H.*. On the relation between the determinant and the permanent, Illinois J. Math. 5 (1961), 376-381.

[133] *Measure Edgar G.A.*, Topology, and Fractal Geometry. — (Springer- Verlag.) — New York — 1995 - 222 p.

[134] *Mikami I.* On the Japanese Theory of Determinants.— Isis, 1914, 2,c. 9–36.

[135] *Minc H.* Evalution of permanents.— Proc. Edinburgh Math. Soc., 1979, **22**, p.27-32.

[136] *Muir T.*, The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, Vol. I, Part I, London, 1890.

[137] *Niven I.*) Formal pover series, American Mathematical Monthly, 76 (1969), 871-889.

[138] *Polya G.* Uber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz// Mathematische Annalen, 84 (1921), s. 149–160.

[139] *Polya G.* Aufgabe 424, Arch. Math. Phys. (3) 29 (1913), 271.

[140] *Proceedings of the American Mathematical Sosciety*,1958, vol. IX, p. 679.

[141] *Rademacher H.* On the partition function $p(n)$.— Proc. London Math. Soc. (2) **43** (1937) p. 241-254.

[142] *Rademacher H.* On the expansion of the partition in a series.— Ann. of math. **44** (1943) p. 416-422.

[143] *Rademacher H.* Topics in Analytic Number Theory — Springer, Berlin, 1973.

[144] *Riordan J.* An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958.

[145] *Rogers L.J.* On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions, Proc. London Math. Soc. (2), **4** (1907), 72–89; Supplementary note, Ibidem, p. 393—395.

[146] *Stanley R.P.*, Enumerative Combinatorics, volume 2. Cambridge University Press, 1999.— 585.

[147] *Stanley R.P.* Factorization of permutations into n–cycles.//Discrete Mathematics 37(1981), p. 255-262.

[148] *Stern M.A.* Über eine zhalentheoretische Funktion // Journal für die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 193-220.

[149] *Stirling J.* Methodus differentialis. London, 1730.

[150] *Sylvester J.J.* A constructive theory of partitions? Arranged in three acts, an interact and an exodion. - Amer. J. Math. 5, 1882-1884, p. 251-330; 334-336.

[151] *Takacs L.* On the method of inclusion and exclusion, J. Amer. Stat. Sos. 62 (1967) 102 — 113.

[152] *Tauber S.* Lah numbers for R-polynomials.— Fibonacci Quart., 1968, 6, p. 100-107.

[153] *Trotter H.F.* Perm (Algorithm 115), Comm. ACM, 1962, 5, s. 434—435.

[154] *Vandermonde A.* "Memoire sur des irrationnelles de differens orders avec une application au cercle *Histoire de l'Academie Royale des Sciences* 1772, part 1, 71-72; *Memoires de Mathematique et de Physique, Tires des Registres de l'Academie Royale des Sciences* 1772, 489-498.

[155] *Wada H.* A Table o f Fundamental Units o f Purely Cubic Fields. Proc. Japan Acad., 46 (1970), p 1135-1140.

[156] *Wallis J.* Tractatus de algebra, 1685.

[157] *Wallis J.* Arithmetica infinitorum. — 1655.

[158] *Wilf H.S.*, Generatingfunctionology, second edition (Academic Press, 1994).

[159] *Worpitzky J.* Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen // Journal für die reine und angewandte Mathematik 94 (1883), 203–232.

[160] *Zatorsky R.A.* Theory of paradeterminants and its applications // Algebra and Diskrete Mathematics №1, 2007, pp. 109-138.

[161] *Zatorsky R.* Paradeterminants and formal operations on series // 4^{th} International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, 2003., 242.

[162] *Zatorsky R.* Abelian groups of triangular matrices // 7^{th} International Algebraic Conference in Ukraine: abstracts of talks (18–23 August, 2009, Kharkiv)/ Ed. G. N. Zholtkevich. Kiev: 2009., 154 P.

[163] *Zeckendorf E.* Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, // *Bulletin de la Societe Royale des Sciences de Liege* **41**(1972),179-182.

Покажчик

Роман Андрійович Заторський

ЧИСЛЕННЯ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Редактор О.Г. Ганюшкін
Технічні редактори О.В. Махней,
О.Р. Никифорчин

Видавництво "Сімик"
76000, м.Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 46/111
тел.: (03422)3-25-91, e-mail: symyk@com.if.ua
Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру суб'єкта
видавн. справи серія ІФ №11 від 27.03.2001 р.

Підписано до друку 23.03.10 р.
Формат видання 60x84 1/16.
Папір офсетний. Умовн. друк. арк. 31,5
Зам. 63. Наклад 350 прим.

Віддруковано у друкарні видавництва ПП "Сімик"
м.Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 46/111,
тел.: (03422)3-25-91