

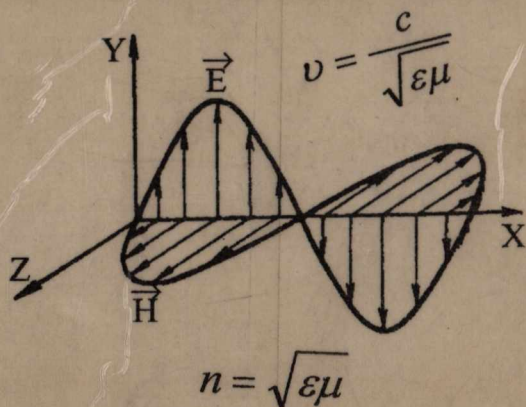
22.34273

076

Б.К.ОСТАФІЙЧУК, М.А.РУВІНСЬКИЙ, М.М.ЯЦУРА

# ПРАКТИКУМ

розв'язування задач з курсу  
загальної фізики  
Оптика



**Б.К.ОСТАФІЙЧУК, М.А.РУВІНСЬКИЙ, М.М.ЯЦУРА**

**ПРАКТИКУМ**  
**розв'язування задач з курсу**  
**загальної фізики**  
**Оптика**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів  
(№ 14/18.2-1725 від 30.11.2001 р.)*

За редакцією д-ра фіз.-мат. наук,  
проф. *Б.К.Остафійчука*

**НБ ПНУС**



**758585**

Івано-Франківськ  
Видавництво "Плай"

2001

ББК 22.34

УДК я 73

**Практикум для рішення задач по курсу общей физики. Оптика: Учебное пособие**  
/Б.К.Остафийчук, М.А.Рувинский, М.М.Яцура / – Ивано-Франковск: Плай, 2001.  
– 372 с. – На укр. языке.

Книга є методичним посібником для розв'язування задач з курсу загальної фізики (розділ “Оптика”), який може бути використаний у вищих навчальних закладах фізико-технічного профілю при проведенні практичних навчальних занять та організації самостійної роботи студентів

Табл. 21. Іл. 230. Бібліогр.: 20 назв.

Книга является методическим пособием для решения задач по курсу общей физики (раздел “Оптика”), которое может быть использовано в высших учебных заведениях физико-технического профиля при проведении практических учебных занятий и организации самостоятельной работы студентов.

Табл. 21. Ил. 230. Библиогр.: 20 назв.

Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника  
код 02125266  
**НАУКОВА БІБЛІОТЕКА**  
Інв. № **758585**

**Рецензенти:** д-р фіз.-мат. наук, проф. З.В.Стасюк (Львівський національний університет ім. І.Франка),

к. фіз.-мат. наук, доц. Г.С.Подвальних (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу).

© Прикарпатський університет  
ім.Василя Стефаника, 2001

ISBN 966-640-071-5

## ПЕРЕДМОВА

Розв'язування задач є важливою складовою частиною навчального процесу підготовки фахівців з фізики в університеті. У сучасній схемі університетської освіти вміння розв'язувати задачі відпрацьовується на практичних заняттях, підготовка до яких передбачає значну позааудиторну роботу студента. Однак, якщо при самостійній роботі над теоретичним курсом використовуються конспекти лекцій, підручники і посібники, в яких міститься теоретичний матеріал і окремі задачі для його ілюстрації, то для підготовки з практичних занять сьогодні майже немає докладних посібників, які б могли допомогти студенту організувати його самостійну роботу з розвитку вміння розв'язувати задачі. Існуючі традиційні збірники задач в основному є посібниками з контролю вміння розв'язувати задачі, а не посібниками з розвитку цього вміння. Тому необхідний посібник, який можна було б використати студенту при самостійному розв'язуванні задач. Враховуючи нестачу аудиторного навчального часу на практичних заняттях, дана проблема стає ще більш актуальною.

Цей методичний посібник з розділу курсу загальної фізики “Оптика” складено з таким розрахунком, щоб ним можна користуватися при проведенні фізичного практикуму. Весь матеріал курсу розбитий на теми, у відповідності до навчальної програми. Кожна тема складається із шести частин: “Програмні питання”, де перераховуються теоретичні питання, які студент повинен засвоїти перш, ніж приступити до розв'язування задач; “Основні поняття, закони і формули”, де міститься формулювання основних фізичних понять і законів та приводяться формули, які найбільш часто використовуються при розв'язуванні такого типу задач; “Контрольні питання”, які дозволяють студенту здійснити самоконтроль засвоєння ним теоретичного матеріалу; “Методичні вказівки до розв'язування задач”, в яких обговорюються основні особливості задач даної теми, вказуються загальні методи і прийоми їх розв'язування; “Приклади розв'язування задач”, де наводяться типові задачі з їх розв'язками і коментарями; “Задачі для самостійного розв'язку”, які можуть бути рекомендовані студентам в якості домашніх завдань та проведенні контрольних робіт.

В кінці посібника наведено найбільш важливі фізичні константи, оптичні величини та деякі математичні формули, до яких студент може при потребі звертатися.

Навчальний посібник підготовлений на основі чималого досвіду

проведення авторами практичних занять і організації самостійної роботи студентів у Прикарпатському університеті ім. В. Стефаника. Переважна більшість розглянутих задач в посібнику пропонувалася студентам на практичних заняттях, колоквиумах, екзаменах із загального курсу фізики. Посібник розрахований, в основному, на студентів фізичних спеціальностей університетів, але може бути корисним і для студентів інших вузів природничих і технічних спеціальностей. Всі зауваження і побажання, спрямовані на покращення книги, ми з вдячністю врахуємо.

Автори висловлюють щире подяку рецензентам доктору фізико-математичних наук, професору З. В. Стасюку і кандидату фізико-математичних наук, доценту Г. С. Подвальних за цінні зауваження, зроблені при рецензуванні рукопису.

*Автори*

## ТЕМА I ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ СВІТЛА

### 1.1. Програмні питання

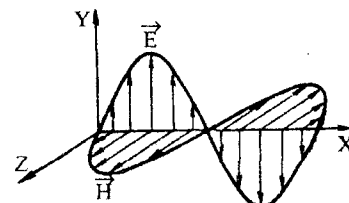
Електромагнітна природа світла. Оптичний діапазон електромагнітних хвиль.

Світлові хвилі. Монохроматичні коливання і хвилі. Поняття про розклад Фур'є. Принцип суперпозиції. Енергія, яка переноситься хвилею. Класифікація хвиль.

### 1.2. Основні поняття, закони і формули

#### 1.2.1. Світло – електромагнітні хвилі малої довжини

Рівняння Максвелла приводять до хвильових рівнянь, якими описується процес поширення електромагнітних хвиль:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{c}{\epsilon\mu} \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \frac{c}{\epsilon\mu} \left( \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Рис. 1.1

де  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  – напруженості електричного і магнітного полів світлової хвилі. Частинні розв'язки рівнянь (1.1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right), \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вирази (1.2) є рівняннями плоскої гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж осі X.

#### Швидкість поширення електромагнітних хвиль

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (1.3)$$

де  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  – швидкість світла у вакуумі,  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  – відповідно електрична

і магнітна сталі,  $\epsilon$  і  $\mu$  – відносні діелектрична і магнітна проникності середовища.

**Закон Максвелла:**

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (1.4)$$

де  $n$  – показник заломлення середовища.

Зв'язок між  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  електромагнітної (світлової) хвилі:

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \frac{B}{\sqrt{\mu_0\mu}}. \quad (1.5)$$

При  $\mu = 1$  (діелектрик):

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{B}{\mu_0}. \quad (1.6)$$

При  $\epsilon = \mu = 1$  (вакуум):

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = \frac{B}{\mu_0}. \quad (1.6, a)$$

Хвилю, яка вільно поширюється в просторі, називають біжучою хвилею.

**1.2.2. Оптичний діапазон електромагнітних хвиль:**  $10^{-11} \text{ м} < \lambda < 10^{-2} \text{ м}$

**Циклічна (колова) частота світлових коливань**

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.7)$$

**Лінійна частота світлових коливань**

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \text{або} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.8)$$

де  $T$  – період коливань.

**Довжина світлової хвилі**

$$\lambda = cT, \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (1.9)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

**Рівняння плоскої монохроматичної хвилі**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x}{v} \right) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx), \quad (1.10)$$

можна записати у комплексній формі:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-ikx} e^{i\omega t}, \quad (1.11)$$

де  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля світлової хвилі,  $\vec{E}_0$  – її амплітуда,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  – колова частота,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – хвильове число,  $v$  – швидкість поширення хвилі.

Світлову хвилю називають монохроматичною, якщо її період  $T$ , амплітуда  $\vec{E}_0$  і початкова фаза  $\Phi$  не залежать від часу.

Геометричне місце точок, які знаходяться в одній фазі, називають фронтом хвилі.

**Рівняння сферичної хвилі** (для фіксованого моменту часу фронт хвилі є сферою  $r = \text{const}$ ):

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin(\omega t - kr), \quad (1.12)$$

де  $\vec{E}_0$  – амплітуда на відстані  $r = 1$  м від джерела.

**Рівняння плоскої хвилі** (фронт хвилі є площиною  $x = \text{const}$ ):

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx), \quad (1.13)$$

**Принцип суперпозиції в оптиці:**

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \sum_i \vec{E}_i, \quad (1.14)$$

де  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  – напруженості світлових хвиль, що накладаються.

**1.2.3. Енергія, яка переноситься світловою хвилею**

Векторна величина, яка чисельно дорівнює кількості енергії, що переноситься за одиницю часу через одиничну площадку перпендикулярно до напрямку її поширення, називається густиною потоку енергії або вектором Пойнтінга ( $|\vec{S}| = S$ ).

У вакуумі

$$\left. \begin{aligned} S &= \varepsilon_0 c E^2, \\ S &= \mu_0 c H^2, \\ S &= \frac{c B^2}{\mu_0}, \end{aligned} \right\} \text{ або } \left. \begin{aligned} \langle S \rangle_\tau &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2, \\ \langle S \rangle_\tau &= \frac{1}{2} \mu_0 c H_0^2, \\ \langle S \rangle_\tau &= \frac{1}{2} \frac{c B^2}{\mu_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

де  $\langle S \rangle_\tau$  – середнє (за часом) значення густини потоку енергії. Для довільного середовища в формулах (1.15) слід зробити заміну:  $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ ,  $c \rightarrow v$ .

### 1.3. Контрольні запитання

1.3.1. Що таке електромагнітна хвиля? З'ясуйте причини виникнення електромагнітних хвиль.

1.3.2. Запишіть рівняння Максвелла і дайте їм відповідну фізичну інтерпретацію.

1.3.3. Які факти дозволили Максвеллу зробити висновок про електромагнітну природу світла?

1.3.4. З'ясуйте фізичний зміст закону Максвелла.

1.3.5. Доведіть, що саме із теорії електромагнітного поля Максвелла

впливає, що вектори,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{D}$  складають праву трійку, тобто, що електромагнітні хвилі є поперечними.

1.3.6. Вектор напруженості електричного поля в електромагнітній хвилі, яка поширюється на північ, коливається в напрямку схід-захід. Вказати напрямок коливання індукції магнітного поля цієї хвилі.

1.3.7. Що таке шкала електромагнітних хвиль?

1.3.8. Який діапазон довжин хвиль називають оптичним? видимим?

1.3.9. З'ясуйте, чому хвилі з довжиною  $0,76 \text{ мкм} < \lambda < 0,38 \text{ мкм}$  не придатні для зору?

1.3.10. Яку світлову хвилю називають монохроматичною? Запишіть її рівняння в дійсній і комплексній формах.

1.3.11. З'ясуйте фізичну суть принципу суперпозиції електромагнітних хвиль.

1.3.12. Що таке розклад Фур'є? Де і для чого його можна застосувати в оптиці? Наведіть приклади.

1.3.13. Яку світлову хвилю називають плоскою? сферичною? Запишіть їх рівняння.

1.3.14. Яка світлова хвиля називається гармонічною?

1.3.15. Доведіть, що потік енергії в стоячій хвилі дорівнює нулю.

1.3.16. Точкове джерело випромінює рівномірно у всіх напрямках світлову енергію із середньою потужністю  $P_0$  на фіксованій частоті  $\omega$ . Покажіть, що амплітудне значення напруженості електричного поля в

цій хвилі рівне  $E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{2\pi^2}}$ .

### 1.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задачі цієї теми розв'язують за допомогою принципу суперпозиції електродинаміки (1.14), основних формул для швидкості поширення електромагнітних хвиль (1.3), закону Максвелла (1.4) для показника заломлення середовища, співвідношень для величин електричного і магнітного полів (1.4), (1.5), (1.6), (1.6,а), основних рівнянь плоскої гармонічної хвилі (1.2), (1.10), (1.11), (1.13) і сферичної хвилі (1.12), а також відповідних формул абсолютної величини вектора Пойнтінга  $|\vec{S}| = S$  (1.15)

для вакууму і для довільного однорідного середовища. Слід зауважити, що часто користуються середнім за часом значенням  $\langle S \rangle_\tau$  і поняттям інтенсивності світлової енергії.

При застосуванні принципу суперпозиції слід використовувати формули тригонометрії. Математичні перетворення спрощуються, якщо рівняння хвиль задаються в комплексній формі. У збірниках задач використовуються в основному система одиниць СІ і гауссова система. Вище згадані в розділі 1.2 закони і формули подані в системі СІ. При переході від гауссової системи одиниць в систему СІ рекомендуємо звертатися до додатку 4 "Про зв'язок гауссової системи одиниць із СІ" в посібнику [2].

### 1.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 1.5.1** Довести, що світлова хвиля, яка задається рівнянням  $\vec{E} = \vec{A} \cos(\omega t - kz)$  є немонохроматичною, якщо  $\vec{A}$  – величина змінна і змінюється за законом  $\vec{A} = \vec{a} [1 + \cos(\omega_0 t - kz)]$ .

**Розв'язок:** При врахуванні значення  $\bar{A}$  рівняння хвилі набуде такого вигляду:

$$\vec{E} = \bar{a} [1 + \cos(\omega_0 t - kz)] \cos(\omega t - kz). \quad (1)$$

Після елементарних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{a} \cos(\omega t - kz) + \bar{a} \cos(\omega_0 t - kz) \cos(\omega t - kz) = \\ &= \bar{a} \cos(\omega t - kz) + \frac{\bar{a}}{2} \cos[(\omega + \omega_0)t - 2kz] + \frac{\bar{a}}{2} \cos(\omega - \omega_0)t. \end{aligned} \quad (2)$$

Із (2) видно, що задана світлова хвиля є сукупністю трьох монохроматичних хвиль з амплітудами  $\bar{a}$ ,  $\frac{\bar{a}}{2}$ ,  $\frac{\bar{a}}{2}$  і частотами  $\omega$ ,  $\omega + \omega_0$  і  $\omega - \omega_0$ .

**Задача 1.5.2.** Знайти амплітуду напруженостей електричного і магнітного полів хвилі у вакуумі, середня густина потоку енергії якої  $1 \text{ Вт/м}^2$ .

**Розв'язок:** Середня за часом густина потоку енергії електромагнітної хвилі у вакуумі виражається формулами (1.15):

$$\left. \begin{aligned} \langle S \rangle_\tau &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2, \\ \langle S \rangle_\tau &= \frac{1}{2} \mu_0 c H_0^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де  $E_0$  і  $H_0$  – відповідно амплітудні значення напруженостей електричного і магнітного полів,  $\varepsilon_0$  і  $\mu_0$  – електрична і магнітна сталі відповідно.

Із (1) маємо:

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \sqrt{\frac{2 \langle S \rangle_\tau}{c \varepsilon_0}}, \\ H_0 &= \sqrt{\frac{2 \langle S \rangle_\tau}{c \mu_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення відповідних величин ( $\langle S \rangle_\tau = 1 \text{ Вт/м}^2$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\varepsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$ ;  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ ) і провівши обрахунки, отримаємо:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 10^8 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11}}} = 27,45 \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}}} = 0,073 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

**Відповідь:**  $E_0 = 27,45 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ ;  $H_0 = 0,073 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ .

**Задача 1.5.3.** Знайти амплітуду напруженості магнітного поля хвилі, яка поширюється у воді ( $n = 1,33$ ), і густину потоку енергії хвиль, якщо амплітуда електричного поля  $E_0 = 20 \text{ кВ/м}$ .

**Розв'язок:** Перш ніж знайти амплітуду напруженості магнітного поля хвилі, що поширюється у воді, знайдемо густину потоку енергії хвиль у діелектрику ( $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = n^2$ ,  $\nu = c/n$ ):

$$\langle S \rangle_\tau = \frac{1}{2} \nu \varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n E_0^2. \quad (1)$$

Відповідно (1.15) для діелектрика

$$H_0 = \sqrt{\frac{2 \langle S \rangle_\tau}{\mu_0 \nu}}. \quad (2)$$

При врахуванні (1) формула (2) запишеться так:

$$H_0 = E_0 n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}. \quad (3)***$$

Підставляючи в (1) і (2) числові значення відповідних величин

$$* [E_0] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{Ф}}{\text{м}}} \right] = \left[ \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}}} \right] = \left[ \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{В}}} \right] = \left[ \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2} \right] = \left[ \frac{\text{В}}{\text{м}} \right].$$

$$** [H_0] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{Гн}}{\text{м}}} \right] = \left[ \frac{\text{А}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{В} \cdot \text{с}} \right] = \left[ \frac{\text{А}^2}{\text{м}^2} \right] = \left[ \frac{\text{А}}{\text{м}} \right].$$

\*\*\* Цю ж формулу отримаємо із (1.6), замінивши в ній напруженості  $E$  і  $H$  на амплітуди  $E_0$  і  $H_0$ .

( $E_0 = 2 \cdot 10^4$  В/м;  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м) і провівши обрахунки, отримаємо:

$$\langle S \rangle_r = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 706,23 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2},$$

$$H_0 = 2 \cdot 10^4 \cdot 1,33 \sqrt{\frac{0,885 \cdot 10^{-11}}{1,257 \cdot 10^{-6}}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = 70,6 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Відповідь:  $\langle S \rangle_r = 706,23 \text{ кВт/м}^2$ ;  $H_0 = 70,6 \text{ А/м}$ .

**Задача 1.5.4.** Точкове джерело світла потужністю  $P = 1$  Вт випромінює рівномірно у всіх напрямках фотони з довжиною хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм. Яка густина  $\rho$  потоку фотонів на відстані  $R = 1$  км від джерела?

**Розв'язок:** Кількість фотонів, що випромінюється джерелом за 1 с, дорівнює:

$$N = \frac{P}{\epsilon_f} = \frac{P\lambda}{hc}, \quad (1)$$

де  $P$  – потужність випромінювання,  $\epsilon_f = \frac{hc}{\lambda}$  – енергія фотона,  $h$  – стала

Планка,  $c$  – швидкість поширення світла у вакуумі,  $\lambda$  – довжина світлової хвилі.

Густина потоку фотонів на відстані  $R$  від точкового джерела

$$\rho = \frac{N}{S} = \frac{N}{4\pi R^2} = \frac{P\lambda}{4\pi R^2 hc}, \quad (2)$$

де  $S = 4\pi R^2$  – площа сфери радіуса  $R$ .

Підставляючи в (2) числові значення відповідних величин ( $P = 1$  Вт;  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м;  $R = 10^3$  м;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с) і провівши обрахунки, отримаємо:

$$\rho = \frac{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3,14 \cdot (10^3)^2 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{фотонів}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Відповідь:  $\rho = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{фотонів}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ .

**Задача 1.5.5.** Виразити інтенсивність світла через амплітуду світлового вектора, якщо світло поширюється у певному напрямку в одному

середовищі з показником заломлення  $n$ .

**Розв'язок:** Інтенсивністю світлової хвилі називається кількість енергії, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі.

Виходячи із означення, інтенсивність світлової хвилі дорівнює густині потоку енергії. Для випадку середовища з відносними діелектричною і магнітною проникностями  $\epsilon$  і  $\mu$  маємо:

$$I = \langle S \rangle_r = \frac{1}{2} \nu \epsilon \epsilon_0 E_0^2, \quad (1)$$

де  $\nu$  – швидкість світла в середовищі. Враховуючи, що  $\nu = \frac{c}{n}$ , а  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ,

одержимо:

$$I = \frac{\epsilon}{2n} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2. \quad (3)$$

Це і є шукана формула. Якщо врахувати, що  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ , остання формула набуде вигляду:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2. \quad (4)$$

**Задача 1.5.6.** Вертикальна антена радіостанції потужністю  $P_0 = 35$  кВт випромінює у всі напрямки електромагнітну хвилю. а) Знайти інтенсивність  $I$  сигналу (в одиницях  $\text{Вт/м}^2$ ) на відстані  $r_0 = 20,0$  км від передаючої антени. б) Визначити середньоквадратичне значення напруженості поля  $\bar{E}$  в цій точці, коли станція працює на повну потужність. в) Якою повинна бути потужність станції, щоб її сигнал мав таку ж потужність на відстані  $r_1 = 100$  км?

**Розв'язок:** Інтенсивність сигналу на певній відстані від антени дорівнює густині потоку енергії  $\langle S \rangle_r$ , яка в свою чергу дорівнює кількості енергії, що переноситься через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку, в якому відбувається передача енергії, тобто до напрямку поширення електромагнітної хвилі. Тоді

$$I = \langle S \rangle_r = \frac{P_0}{\sigma_0} = \frac{P_0}{4\pi r_0^2}, \quad (1)$$



де  $\sigma_0 = 4\pi r_0^2$  – площа сфери радіуса  $r_0$ .

Підставляючи в (1) числові дані відповідних величин і провівши обрахунки, маємо:

$$I = \langle S \rangle_r = \frac{35 \cdot 10^3}{4 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^4} \frac{Vm}{m^2} = 0,139 \frac{Vm}{m^2}.$$

б) Оскільки напруженість електричного поля електромагнітної хвилі змінюється за синусоїдальним законом, то її середньоквадратичне значення дорівнює:

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2, \quad (2)$$

де  $E_0$  – амплітудне значення напруженості  $E$ . Амплітудне значення знайдемо із (1.15):

$$E_0^2 = \frac{2 \langle S \rangle_r}{\epsilon_0 c}. \quad (3)$$

Тоді

$$\sqrt{\langle E^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\langle S \rangle_r}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{0,139}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8} \frac{B^2}{m}} = 7,24 \frac{B}{m}.$$

в) За умовою задачі густина потку енергії на відстані  $r_1$  від станції така ж як і на відстані  $r_0$ , тобто вона рівна  $\langle S \rangle_r = 0,139 \frac{Vm}{m^2}$ . Тоді

$$\langle S \rangle_r = \frac{P_1}{\sigma_1} = \frac{P_1}{4\pi r_1^2}, \quad (4)$$

де  $\sigma_1 = 4\pi r_1^2$  – площа сфери радіуса  $r_1$ .

Із (4) маємо:

$$P_1 = 4\pi r_1^2 \langle S \rangle_r = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^5 \cdot 0,139 Vm = 175 \cdot 10^4 Vm = 175 \text{ кВм}.$$

### 1.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми I

**1.6.1.** На рис. 1.2 наведено "миттєвий знімок" електромагнітної хвилі. Визначити, в якому напрямку поширюється хвиля, зображена на рисунку.

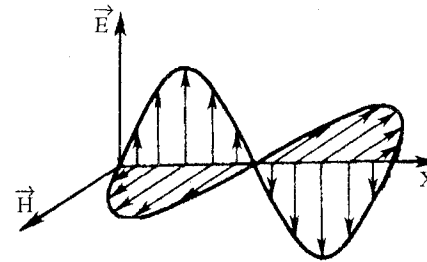


Рис. 1.2

**1.6.2.** Як зміниться напрямок поширення електромагнітної хвилі, якщо в хвилі, зображеної на рис. 1.2, змінити на протилежний напрямок: а) вектора напруженості магнітного поля; б) вектора напруженості електричного поля?

**Відповідь:** а) зміниться на протилежний; б) не зміниться.

**1.6.3.** Дві синусоїдальні хвилі з однаковою поляризацією

$$E_{01} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_1 \right] \text{ і } E_{02} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_2 \right]$$

накладаються одна на одну.

Визначити амплітуду напруженості електричного поля результуючої хвилі. Знайти фазу цієї хвилі.

$$\text{Відповідь: } E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \text{arctg} \frac{E_{01} \sin \varphi_1 + E_{02} \sin \varphi_2}{E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2}.$$

**1.6.4.** Дві плоскі синусоїдальні хвилі, амплітуди яких рівні  $E_0$ , мають частоти  $\omega$  і  $\omega + \Delta\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega$ ), поширюються в одному напрямку і накладаються одна на одну. Знайти максимальну амплітуду результуючої хвилі. Визначити розподіл середньої густини енергії результуючої хвилі вздовж напрямку поширення її.

$$\text{Відповідь: } E_m = 2E_0;$$

$$\langle W \rangle = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \left[ \left( t - \frac{x}{c} \right) \Delta\omega + \varphi \right].$$

**1.6.5** а) На рис. 1.3 зображено електричне поле плоскої синусоїдальної хвилі в нульовий момент часу. Напрямок поши-

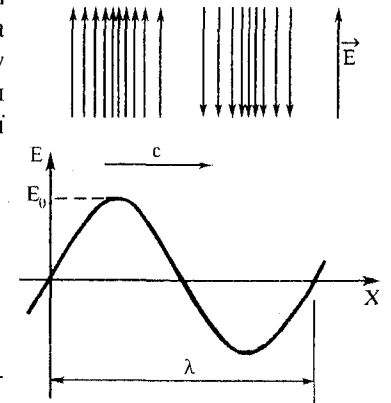


Рис. 1.3

рення хвилі показано стрілкою. Як залежить напруженість електричного поля від  $x$  і  $t$ ? б) Запишіть рівняння плоскої синусоїдальної хвилі, яка поширюється вздовж лінії, що складає кути  $\alpha, \beta, \gamma$  з осями координат. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі рівна  $E_0$ , довжина хвилі –  $\lambda$ .

Відповідь: а)  $E = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$ ;

б)  $E = E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - ct)$ .

1.6.6. Електричний пробій в повітрі настає приблизно при напруженості електричного поля  $E = 3 \text{ МВ/м}$ . При якій середній густині потоку енергії плоских електромагнітних хвиль можна спостерігати іскру в повітрі?

Відповідь:  $\langle S \rangle_r = 1,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

1.6.7. Обчислити середньоквадратичні значення електричного і магнітного векторів у випромінюванні 50-ватної лампи на відстані 1 м від неї. Вважати, що лампа є точковим джерелом світла, і з усієї потужності 75 % віддає у вигляді випромінювання.

Відповідь:  $\sqrt{\langle H^2 \rangle} = 0,09 \frac{\text{А}}{\text{м}}$ ;  $\sqrt{\langle E^2 \rangle} = 33,6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ .

1.6.8. Чому при переході електромагнітної хвилі через плоску межу вакуум – непровідне середовище: а) нормальна складова напруженості електричного поля зменшується в  $\epsilon$  раз, а паралельна не змінюється; б) нормальна складова напруженості магнітного поля не міняється, а паралельна змінюється в  $\mu$  разів?  $\epsilon$  і  $\mu$  – відповідно відносні діелектрична і магнітна проникності середовища.

1.6.9. Покажіть, що в сферичній хвилі, випроміненої точковим джерелом, амплітуди напруженості електричних і магнітних полів зменшуються обернено пропорційно відстані від джерела, якщо енергія хвилі поглинається середовищем.

1.6.10. В електромагнітній хвилі, яка поширюється на захід, площина коливань індукції магнітного поля вертикальна. Частота коливань

індукції магнітного поля дорівнює  $\nu = 180 \text{ кГц}$ , а середньоквадратичне значення індукції  $\sqrt{\langle B^2 \rangle} = 8,65 \cdot 10^{-9} \text{ Тл}$ . В якому напрямку коливається напруженість електричного поля? Яка частота і середньоквадратичне значення напруженості електричного поля?

Відповідь:  $\nu = 180 \text{ кГц}$ ;  $\sqrt{\langle E_0^2 \rangle} = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ .

1.6.11. Електричне поле в плоскій електромагнітній хвилі змінюється за законом  $E_x = E_0 \cos(\omega t + kz)$ ,  $E_y = E_z = 0$ . Визначити: а) величину і напрямок  $\vec{B}$ ; б) напрямок поширення хвилі.

Відповідь:  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{n}$ .

1.6.12. Амплітуда напруженості електричного поля в електромагнітній хвилі дорівнює  $E_0 = 38 \text{ мВ/м}$ . Визначити середньоквадратичне значення енергії, що переноситься хвилею.

Відповідь:  $\sqrt{\langle S^2 \rangle} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$ .

1.6.13. Середньоквадратичне значення індукції магнітного поля в електромагнітній хвилі дорівнює  $\sqrt{\langle B^2 \rangle} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Тл}$ . Яку енергію переносить ця хвиля щосекунди через  $1 \text{ м}^2$ ?

Відповідь:  $\langle S \rangle_r = 1,49 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ .

1.6.14. Яка енергія переноситься за  $t = 1 \text{ год}$  через площадку  $\sigma = 1,0 \text{ см}^2$  електромагнітною хвилею, в якій середньоквадратичне значення напруженості електричного поля дорівнює  $\sqrt{\langle E^2 \rangle} = 25 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ ?

Відповідь:  $W = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$ .

1.6.15. Промінь лазера потужністю  $W = 1 \text{ Вт}$  має діаметр  $d = 2,0 \text{ мм}$ . Визначити середньоквадратичні значення  $\sqrt{\langle E^2 \rangle}$  і  $\sqrt{\langle B^2 \rangle}$  в промені лазера.

Відповідь:  $\sqrt{\langle E^2 \rangle} = 774,6 \frac{B}{m}$ ;  $\sqrt{\langle B^2 \rangle} = 2,58 \cdot 10^{-6} Tл$ .

1.6.16. Оцінити середню потужність Сонця, якщо густина потоку енергії, що йде до Землі на межі атмосфери дорівнює  $\langle S \rangle_r = 1350 \frac{Bm}{m^2}$ .

Відповідь:  $\langle P \rangle = 3,82 \cdot 10^{26} Bm$ .

1.6.17. Знайти амплітудні значення  $E_0$  і  $B_0$  хвилі на відстані  $r = 10$  см від джерела світла потужністю  $P = 100 Bm$ . Вважати, що джерело випромінює світло у всіх напрямках на одній частоті.

Відповідь:  $E_0 = 7,74 \frac{B}{m}$ ;  $B_0 = 2,58 \cdot 10^{-8} Tл$ .

## ТЕМА II СВІТЛОВІ ВИМІРЮВАННЯ (ФОТОМЕТРІЯ)

### 2.1. Програмні питання

Потік променевої енергії. Функція розподілу енергії за довжинами хвиль. Функція видності. Ефект Пуркіньє. Світловий потік. Сила світла. Освітленість. Закони освітленості. Яскравість і світність. Одиниці вимірювання світлових і енергетичних величин. Співвідношення між світловими та енергетичними величинами випромінювання.

### 2.2. Основні поняття, закони і формули

Потік променевої енергії  $P$  – це кількість енергії, яка переноситься через площадку за одиницю часу:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.1)$$

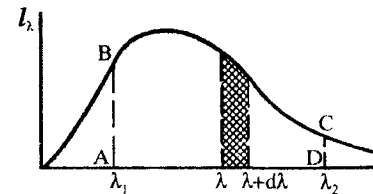


Рис. 2.1

Розподіл енергії за довжинами хвиль (рис. 2.1). Тут  $l_\lambda$  – функція розподілу за довжинами хвиль, яка дорівнює потужності випромінювання, віднесеного до одиничного інтервалу довжин хвиль поблизу довжини хвилі  $\lambda$ .

Повний потік променевої енергії

$$P = \int_0^{\infty} l_\lambda d\lambda \quad (2.2)$$

Світловий потік  $\Phi_v$  – це променевий потік, оцінений за зоровими відчуттями. Він визначається добутком потоку світлової енергії на функцію видності:

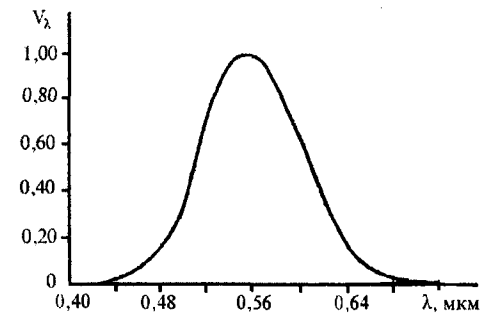


Рис. 2.2

$$\Phi_v = \int_0^{\infty} V_\lambda l_\lambda d\lambda \quad (2.3)$$

де  $V_\lambda$  – функція видності, яка характеризує залежність середньої чутливості ока від довжини хвилі (рис 2.2).

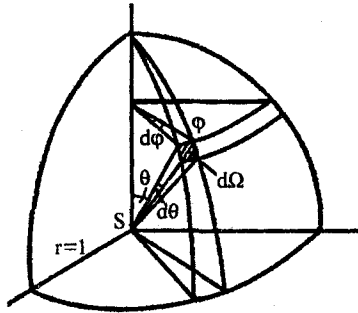


Рис. 2.3

Енергетична сила світла  $I_e$  – це потік енергетичної енергії, що припадає на одиницю тілесного кута:

$$I_e = \frac{dP}{d\Omega} \quad (2.4)$$

При рівномірному розподілі випромінювання у всіх напрямках

$$I_e = \frac{P}{\Omega} = \frac{P}{4\pi}, \quad (2.5)$$

звідки:

$$P = \int_{\Omega=4\pi} dP = \int_{\Omega=4\pi} I_{0e} d\Omega = 4\pi I_{0e}, \quad (2.6)$$

де  $I_{0e} = const.$

Для загального випадку ( $I_e = f(\theta, \varphi)$ ):

$$P = \int I(\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta, \quad (2.7)$$

де  $d\Omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi.$

Сила світла  $I_v$  – це величина світлового потоку, що припадає на одиницю тілесного кута:

$$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega} \quad (2.8)$$

При рівномірному розподілі світлового потоку у всіх напрямках

$$I_v = \frac{\Phi_v}{\Omega} = \frac{\Phi_v}{4\pi}, \quad (2.9)$$

звідки:

$$\Phi_v = 4\pi I_v \quad (2.10)$$

Для загального випадку ( $I_v = f(\theta, \varphi)$ ):

$$\Phi_v = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_v(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.11)$$

Енергетична яскравість джерела  $B_\varphi$  – це величина, яка характеризує випромінювання елемента поверхні джерела в даному напрямку:

$$B_e = \frac{dP}{d\sigma \cos \theta} = \frac{I_e}{d\sigma \cos \theta}. \quad (2.12)$$

Фотометрична яскравість  $B_v$ :

$$B_v = \frac{d\Phi_v}{d\sigma \cos \theta d\Omega} = \frac{I_v}{d\sigma \cos \theta}, \quad (2.13)$$

де  $\theta$  – кут між напрямком випромінювання і нормаллю до поверхні (рис. 2.4).

Із (2.13):

$$I_v = B_v d\sigma \cos \theta. \quad (2.14)$$

Якщо  $B_v$  не залежить від напрямку, то  $B_v d\sigma = const.$

Тоді

$$I_v = I_{0v} \cos \theta, \quad (2.15)$$

де  $I_{0v} = B_v d\sigma.$

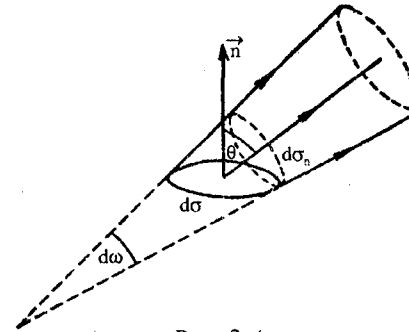


Рис. 2.4

Таблиця 2.1

Значення яскравостей окремих джерел

Джерело	$B_v$ , кд/м <sup>2</sup>
Нічне безмісячне небо	$\approx 10^{-4}$
Повний місяць	$10^3$
Безхмарне ясне денне небо	$10^4$
Вольфрамова нитка лампи розжарювання	$10^6$
Сонце	$10^9$
Лазер	$10^{11}$

Енергетична світність – це величина, яка характеризує випромінювання елемента поверхні джерела у всіх напрямках (всередині тілесного кута  $2\pi$ ):

\* Індекс  $v$  вказує, що відповідна величина є світловою характеристикою.

$$R_e = \frac{dP}{d\sigma} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} B_e \cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (2.16)$$

При  $B_e = \text{const}$

$$R_e = \pi B_e. \quad (2.17)$$

Фотометрична світність  $R_v$ :

$$R_v = \frac{d\Phi_v}{d\sigma} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} B_v \cos\theta \sin\theta d\theta. \quad (2.18)$$

При  $B_v = \text{const}$

$$R_v = \pi B_v. \quad (2.19)$$

Енергетична освітленість  $E_e$  чисельно дорівнює потужності випромінювання, що припадає на одиницю площі освітлюваної поверхні тіла:

$$E_e = \frac{dP}{d\sigma} = \frac{I_e \cos\theta}{L^2}, \quad (2.20)$$

де  $\theta$  – кут між напрямком енергетичного потоку і нормаллю до освітлюваної поверхні,  $L$  – відстань від джерела до освітлюваної поверхні.

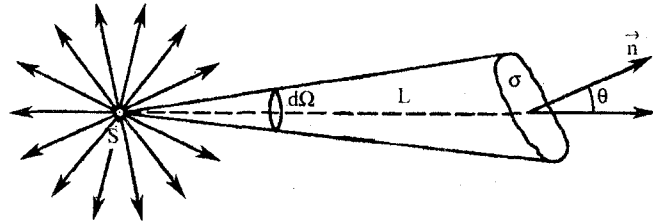


Рис. 2.5

Фотометрична освітленість  $E_v$ :

$$E_v = \frac{d\Phi_v}{d\sigma} = \frac{I_v \cos\theta}{L^2}. \quad (2.21)$$

Енергетична експозиція  $H_e$  – це повна енергія випромінювання, яка падає на поверхню тіла площею  $1 \text{ м}^2$  за одиницю часу  $dt$ :

$$dH_e = E_e dt. \quad (2.22)$$

При сталій освітленості

$$H_e = E_e t. \quad (2.23)$$

Світлова експозиція  $H_v$  – це добуток фотометричної освітленості  $E_v$  на час освітлювання:

$$H_v = E_v t. \quad (2.24)$$

Таблиця 2.2

Одиниці вимірювання енергетичних і фотометричних величин

Енергетичні величини	Одиниці вимірювання	Фотометричні величини	Одиниці вимірювання
Енергетичний потік, P	Вт	Світловий потік, $\Phi_v$	лм
Енергетична сила світла, $I_e$	Вт/ср	Сила світла, $I_v$	кд
Енергетична яскравість, $B_e$	Вт/(ср·м <sup>2</sup> )	Яскравість, $B_v$	лм/ср·м <sup>2</sup>
Енергетична світність, $R_e$	Вт/м <sup>2</sup>	Світність, $R_v$	лм/м <sup>2</sup>
Енергетична освітленість, $E_e$	Вт/м <sup>2</sup>	Освітленість, $E_v$	лк
Енергетична експозиція, $H_e$	Дж·с	Світлова експозиція, $H_v$	лк·с

Зв'язок спектральних енергетичних і світлових характеристик світла:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{v\lambda} &= \frac{P_\lambda}{K_\lambda} = P_\lambda \frac{V_\lambda}{K(0,555 \text{ мкм})} \\ \Phi_{v\lambda} &= P_\lambda A_\lambda = P_\lambda V_\lambda A(0,555 \text{ мкм}) \end{aligned} \right\}, \quad (2.25)^*$$

де  $K_\lambda \equiv K(\lambda)$  – механічний еквівалент світла,  $K(0,555 \text{ мкм}) = 0,0016 \text{ Вт/лм}$  – мінімальний механічний еквівалент світла,  $A_\lambda \equiv A(\lambda)$  – спектральна світлова ефективність,  $A(0,555 \text{ мкм}) = 680 \text{ лм/Вт}$  – максимальна світлова ефективність.

\* Індекс  $\lambda$  вказує, що дана величина є спектральною характеристикою.

**Зв'язок енергетичних і світлових характеристик видимого діапазону світла:**

$$\Phi_V = \frac{1}{K(0,555 \text{ мкм})} \int_{\lambda_1=0,380 \text{ мкм}}^{\lambda_2=0,780 \text{ мкм}} V_\lambda P_\lambda d\lambda = 680 \int_{\lambda_1=0,380 \text{ мкм}}^{\lambda_2=0,780 \text{ мкм}} V_\lambda P_\lambda d\lambda \quad (2.26)$$

Таблиця 2.3

Числові значення функції видності  $V_\lambda$ 

$\lambda$ , мкм	$V_\lambda$	$\lambda$ , мкм	$V_\lambda$	$\lambda$ , мкм	$V_\lambda$
0,400	0,0004	0,520	0,710	0,640	0,175
0,410	0,0012	0,530	0,862	0,650	0,107
0,420	0,0040	0,540	0,954	0,660	0,061
0,430	0,0116	0,550	0,995	0,670	0,032
0,440	0,0230	0,560	0,995	0,680	0,017
0,450	0,0380	0,570	0,952	0,690	0,0082
0,460	0,0600	0,580	0,870	0,700	0,0041
0,470	0,0910	0,590	0,757	0,710	0,0021
0,480	0,1390	0,600	0,631	0,720	0,00105
0,490	0,2080	0,610	0,503	0,730	0,00052
0,500	0,3230	0,620	0,381	0,740	0,00025
0,510	0,5030	0,630	0,265	0,750	0,00012
				0,760	0,00006

### 2.3. Контрольні запитання

**2.3.1.** Сформулюйте визначення основних енергетичних характеристик випромінювання: потоку енергії випромінювання, енергетичної освітленості, сили світла, яскравості і світності. В яких одиницях вони вимірюються? Дайте визначення цих одиниць.

**2.3.2.** Поясніть зміст основних світлових характеристик випромінювання: світлового потоку, освітленості, сили світла, яскравості і світності. В яких одиницях їх виражають? Дайте визначення цих одиниць.

**2.3.3.** Чому поряд з енергетичними характеристиками необхідно вводити світлові (світлотехнічні)?

**2.3.4.** Покажіть, як можна перейти від світлотехнічних характеристик випромінювання до енергетичних і навпаки?

**2.3.5.** Що таке точкове джерело світла? Від яких параметрів (величин) залежить створювана ним освітленість?

**2.3.6.** За яких умов протягне джерело називають ламбертовим? Наведіть приклади ламбертових джерел.

**2.3.7.** Який повний світловий потік створює джерело з силою світла 10 кд? Що відбувається з світловим потоком, якщо дане джерело помістити в кульовий світильник? циліндричний світильник? світильник у вигляді куба?

**2.3.8.** Лампа силою світла  $I$  підвішена на стелі кімнати. Який сумарний світловий потік, що падає на стіни і підлогу кімнати? Як мінятиметься величина потоку при переміщенні лампи по стелі? по вертикалі вниз?

**2.3.9.** Як залежить яскравість розжареної кулі від відстані до неї?

**2.3.10.** Для читання вважається нормальною освітленість в 50 лк. На якій висоті над столом слід повісити лампу силою світла 50 кд, щоб забезпечити таку освітленість поверхні стола, безпосередньо під лампою?

**2.3.11.** Чому освітленість зображення, яке створюється лінзою, більше в середній його частині і зменшується до країв?

**2.3.12.** У скільки разів зміниться освітленість зображення Сонця, отриманого плоскоопуклою лінзою, якщо лінзу розрізати по діаметру і скласти плоскими сторонами?

**2.3.13.** Для деякого джерела сила світла пропорційна косинусу кута між напрямком випромінювання і нормаллю. Що можна сказати про світність такого джерела?

**2.3.14.** Куля і куб випромінюють світло із сталою яскравістю по всій поверхні. Яке тіло має більшу середню силу світла, якщо: а) їх поверхні однакові; б) тіла однорідні і їх маси однакові.

**2.3.15.** Кутова висота Сонця змінюється від  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Як змінюється освітленість поверхні Землі?

**2.3.16.** Яку криву світлорозподілу повинна мати лампа, щоб давати рівномірну освітленість площини стола, розміщеного під лампою?

### 2.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

При розв'язуванні задач з фотометрії потрібно мати на увазі, що основою для розрахунків освітленості служить закон освітленості (2.21). Однак, він справедливий тільки для точкових джерел світла. Слід пам'ятати, що освітленість, яка створюється системою точкових джерел, дорівнює сумі освітленостей від кожного джерела.

Якщо на поверхню падає світло не безпосередньо від точкового джерела, а після відбиття від дзеркала або після заломлення лінзою, то для визначення освітленості необхідно спочатку знайти зображення

джерела, яке дає дзеркало або лінза, а потім розглядати його як світну точку джерела. Силу світла  $I_2$  зображення можна знайти, знаючи силу світла  $I_1$  від джерела за формулою (2.9). Вважаючи, що лінза, наприклад, повністю пропускає падаючий на неї світловий потік і обмежуючись параксіальними пучками\*, отримаємо:

$$\Phi_V = I_1 \Omega_1 = I_2 \Omega_2, \quad (2.27)$$

де  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  – тілесні кути, в яких поширюються відповідно падаючий на лінзу і заломлений лінзою пучки світла. Із геометричних міркувань:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}, \quad (2.28)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – відстані відповідно від лінзи до предмета і до зображення (рис. 2.6). Все, що стосується лінз, в такій самій мірі стосується і дзеркал.

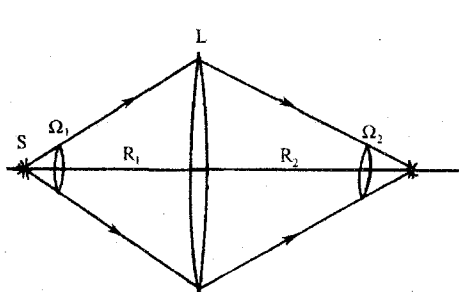


Рис. 2.6

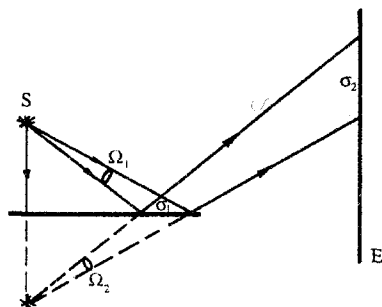


Рис. 2.7

Однак, потрібно мати на увазі, що плоске дзеркало, відбиваючи світло, не змінює тілесного кута, в якому поширюється світловий потік. Тоді у формулі (2.27)  $\Omega_1 = \Omega_2$ , а значить  $I_1 = I_2$  (за умови, що коефіцієнт відбиття  $\rho = 1$ ) (рис. 2.7).

Постійність світлового потоку при відбиванні і заломленні світла можна використати для визначення освітленості за допомогою формули (2.21):

$$E_V = \frac{d\Phi_V}{d\sigma}. \quad (2.29)$$

Знаючи освітленість  $E_1$  дзеркала, його площу  $\sigma_1$  і площу "світлої" смуги на екрані  $\sigma_2$  (рис. 2.7), знаходимо освітленість  $E_2$  екрана із співвідношення

\* Параксіальні пучки – це пучки, крайні промені яких створюють з головною оптичною віссю малі кути.

$$\Phi_V = E_1 \sigma_1 = E_2 \sigma_2. \quad (2.30)$$

Для характеристики протяжних джерел світла, як показано вище, служить яскравість, яка визначається за формулою (2.13):

$$B_V = \frac{dI_V}{d\sigma_m} = \frac{dI_V}{d\sigma \cos \theta}, \quad (2.31)$$

де  $\theta$  – кут між нормаллю до елемента поверхні і заданим напрямком. Яскравість, як і сила світла багатьох протяжних джерел залежить від напрямку. Якщо  $B_V$  не залежить від напрямку, то  $B_V d\sigma$  в формулі (2.31) є сталою величиною. Тобто

$$I_{0V} = B_V d\sigma = const, \quad (2.32)$$

де  $I_{0V}$  – сила світла в напрямку нормалі до поверхні  $d\sigma$  джерела. Враховуючи (2.31), із (2.32) маємо:

$$I_V = I_{0V} \cos \theta, \quad (2.33)$$

де  $I_V$  – сила світла в напрямку кута  $\theta$ . Залежність (2.33) називається законом Ламберта. Діаграма напрямленості такого джерела наведена на рис. 2.8. Випромінювання такого протяжного джерела називають дифузним.

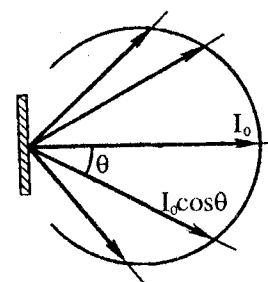


Рис. 2.8

Щоб знайти освітленість, яка створюється протяжним джерелом, його необхідно розбити на елементарні ділянки  $d\sigma$ . Враховуючи за допомогою формули (2.31) силу світла  $dI_V$  для кожної ділянки і розрахувавши за формулою (2.21) освітленість  $dE$ , створену елементом  $d\sigma$ , необхідно проінтегрувати отриманий вираз по всій площі джерела. Як правило, так можна поступати, якщо всі елементи мають однакову яскравість. Якщо розміри протяжного джерела невеликі порівняно з відстанню від джерела до освітлюваної поверхні, для визначення освітленості поверхні можна скористатись формулою (2.9), тобто джерело можна приймати за точкове.

Яскравість зображення протяжного джерела світла ніколи не може перевищувати яскравості джерела, якщо джерело і зображення знаходяться в одному середовищі і зображення розглядається безпосередньо (без екрана).

Якщо світність тіла зумовлена його освітленістю, то використовується співвідношення:

$$R_V = k E_V, \quad (2.34)$$

де  $k$  – коефіцієнт розсіяння (відбиття), який показує, яка доля світлового потоку, що впав на поверхню даного тіла, розсіюється ним.

Якщо тіло випромінює відповідно закону Ламберта, то світність і яскравість зв'язані співвідношенням (2.19):

$$R_V = \pi B_V. \quad (2.35)$$

При необхідності переходу від енергетичної характеристики світла до світлової користуються формулами, які зв'язують спектральну густину світлового потоку  $\Phi_\lambda$  із спектральною потужністю  $P_\lambda$  (2.25). Світловий потік складного випромінювання визначається формулою (2.26).

### 2.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 2.5.1.** Точкове джерело світла  $S$  освітлює поверхню  $MN$  (рис. 2.9). Як зміниться освітленість в точці  $A$ , в якій промені від  $S$  падають на поверхню нормально, якщо з боку на такій же відстані, як і освітлювана поверхня, розмістити дзеркало  $Z$ , яке відбиває світло в точку  $A$ ? Коефіцієнт відбиття  $R = 1$ .

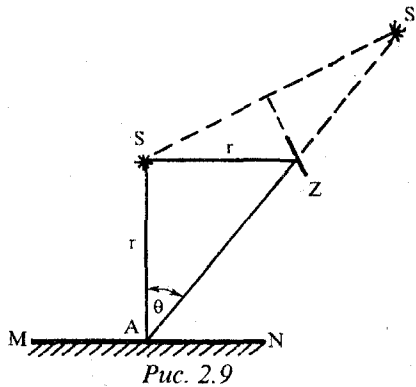


Рис. 2.9

**Розв'язок:** У випадку відсутності дзеркала освітленість в точці  $A$  дорівнює:

$$E_{V0} = \frac{I_V}{r^2}. \quad (1)$$

Внаслідок відбивання світлового потоку від дзеркала  $Z$  освітленість в точці  $A$  збільшиться на якусь величину  $E'_V$ , внаслідок чого освітленість  $E_V$  в точці  $A$  виразиться так:

$$E_V = E_{V0} + E'_V. \quad (2)$$

Освітленість  $E'_V$  створюється зображенням  $S'$ , сила світла якого рівна силі світла джерела  $S$ , оскільки при відбиванні величина потоку, що припадає на тілесний кут  $d\Omega$ , не змінюється. Тому можна вважати, що освітленість в точці  $A$  створюється двома джерелами  $S$  і  $S'$ . Для визначення  $E'_V$  можна скористатись формулою (2.21). Тоді

$$E'_V = \frac{I_V}{r_1^2} \cos \theta, \quad (3)$$

де  $r_1 = AS'$ . Із рис.2.9 маємо:

$$AS' = r_1 = (\sqrt{2} + 1)r. \quad (4)$$

При врахуванні значення  $r_1$  і  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  рівність (3) матиме вигляд:

$$E'_V = \frac{I_V}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)^2 r^2}. \quad (5)$$

Підставляючи в (2) значення  $E_{V0}$  із (1) і  $E'_V$  із (5), отримаємо:

$$E_V = \frac{I_V}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)^2} \right]. \quad (6)$$

Спростивши вираз (6), матимемо:

$$E_V = 1,12 \frac{I_V}{r^2}, \quad \text{або} \quad E_V = 1,12 E_{V0}.$$

**Відповідь:**  $E = 1,12 E_{V0}$ .

**Задача 2.5.2.** Над центром круглого стола радіуса  $r = 1,0$  м підвісили світильник у вигляді плоского горизонтального диска площею  $\sigma = 100$  см<sup>2</sup>. Яскравість світильника  $B_V = 1,6 \cdot 10^4$  кд/м<sup>2</sup> і не залежить від напрямку. На якій висоті  $h$  від поверхні стола треба розмістити світильник, щоб освітленість периферійних точок стола була максимальною? Яка буде ця освітленість?

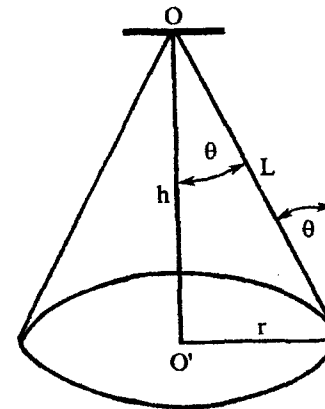


Рис. 2.10

**Розв'язок:** Оскільки яскравість  $B_V$  не залежить від напрямку ( $B_V = \text{const}$ ), то світильник є ламбертівським, для якого  $I_{V\theta} = I_{V0} \cos \theta$ .

Освітленість периферійних точок стола виразиться так:



$$E_V = \frac{I_{V\theta}}{L^2} \cos \theta = \frac{I_{V0} \cos^2 \theta}{L^2} \quad (1)$$

Із рис. 2.10:

$$L = \frac{r}{\sin \theta} \quad (2)$$

Тоді

$$E_V = \frac{I_{V0} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2} \quad (3)$$

Для знаходження максимуму  $E_V$  візьмемо похідну  $dE_V / d\theta$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dE_V}{d\theta} = \frac{I_{V0}}{r^2} (2 \sin \theta \cos^3 \theta - 2 \cos \theta \sin^3 \theta) = 0, \quad (4)$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha = 1. \quad (5)$$

Шукана висота  $h$  буде рівна (із рис. 2.10):

$$h = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (6)$$

Враховуючи (5), знаходимо, що  $h = r = 1$  м.

Максимальну освітленість знаходимо за формулою (3), маючи на увазі, що  $I_{V0} = B_V \sigma$ . Тоді

$$E_{V\max} = \frac{B_V \sigma \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2}$$

Враховуючи, що  $\sin \theta = \frac{r}{L}$ ,  $\cos \theta = \frac{h}{L}$ ,  $L^2 = 2r^2$ ,  $h = r$ , отримаємо:

$$E_{V\max} = \frac{B_V \sigma}{4r^2} = \frac{1,6 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 1^2} = 40 \text{ лк.}$$

Відповідь:  $h = 1$  м;  $E_{V\max} = 40$  лк.

**Задача 2.5.3.** Проектор близького освітлення дає пучок світла у вигляді конуса з кутом розхилу  $2\theta = 40^\circ$ . Світловий потік прожектора рівний 80 клм. Припускаючи, що світловий потік розподілений в середині

конуса рівномірно, визначити силу світла прожектора.

**Розв'язок:** Силу світла ізотропного джерела можна визначити за формулою (2.9):

$$I_V = \frac{\Phi_V}{\Omega} \quad (1)$$

Тілесний кут  $\Omega$  виразимо через кут розхилу  $2\theta$ . Із рис. 2.11 маємо:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

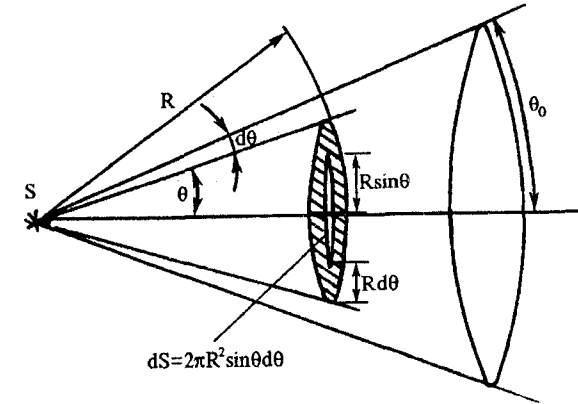


Рис. 2.11

Тілесний кут, який відповідає куту розхилу  $2\theta$  конуса, виразиться інтегралом:

$$\Omega = 2\pi \int_0^\theta \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

звідки

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Підставивши в (1) замість  $\Omega$  його значення із (3), отримаємо:

$$I_V = \frac{\Phi_V}{4\pi \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $\Phi_V = 8 \cdot 10^4$  лм;  $\theta = 20^\circ$ ) і зробивши розрахунки, отримаємо:  $I_V = 2,11 \cdot 10^5$  ккд = 211 ккд.

Відповідь:  $I_V = 211$  ккд.

**Задача 2.5.4.** Визначити енергетичну світність поверхні Сонця, якщо

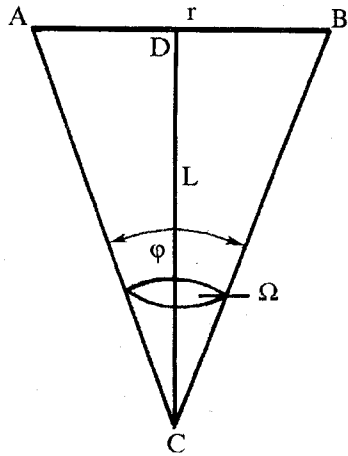


Рис. 2.12

на земній орбіті густина потоку енергії сонячного випромінювання складає  $P_0 = 1400 \text{ Вт/м}^2$ , а діаметр Сонця видно із Землі під кутом  $\varphi = 32'$ .

**Розв'язок:** Оскільки Сонце випромінює світло у всіх напрямках рівномірно, то його енергетична яскравість є сталою ( $B_e = \text{const}$ ) і, значить, світність і яскравість зв'язані між собою співвідношенням (2.17):

$$R_e = \pi B_e. \quad (1)$$

Яскравість можна виразити через енергетичну силу світла  $I_e$ . Зокрема

$$B_e = \frac{I_e}{\sigma} = \frac{P}{\Omega \sigma} = \frac{P_0}{\Omega}. \quad (2)$$

де  $\sigma$  – поверхня видимого із землі сонячного диска,  $P = P_0 \sigma$  – повна густина потоку енергії, яка випромінюється диском Сонця,  $\Omega$  – тілесний кут, в який випромінюється енергетичний потік, що приходить в точку C (рис. 2.12).

Враховуючи, що

$$\Omega = \frac{\sigma}{L^2} = \frac{\pi r^2}{L^2}, \quad (3)$$

отримаємо:

$$B_e = \frac{P_0 L^2}{\pi r^2}, \quad (4)$$

де  $r$  – радіус сонячного диска,  $L$  – відстань від Сонця до Землі.

Радіус Сонця  $r$  визначимо із рис. 2.12:

$$\text{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{L}, \quad \text{або} \quad r = \frac{\varphi L}{2}. \quad (5)$$

В (5) враховано, що кут  $\varphi$  є малий. Враховуючи (4) і (5), остаточно отримаємо:

$$R_e = \frac{4P_0}{\pi \varphi^2}.$$

Підставивши в (6) числові значення відповідних величин, попередньо

перетворивши в радіани значення кута ( $\varphi = 9,3 \cdot 10^{-3}$  рад), отримаємо:

$$R_e = \frac{4 \cdot 1400}{3,14 \cdot (9,3 \cdot 10^{-3})^2} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 20,62 \frac{\text{МВт}}{\text{м}^2}.$$

**Відповідь:**  $R_e = 20,62 \text{ МВт/м}^2$ .

**Задача 2.5.5.** Обчислити освітленість, яку дає джерело у формі диска радіуса  $R$  на перпендикулярно розташованій площині  $\sigma$ , яка міститься на відстані  $L$  від центра диска. Яскравість джерела однакова у всіх напрямках (джерело ламбертове).

**Розв'язок:** Визначимо насамперед елементарну освітленість  $dE_v$ , що

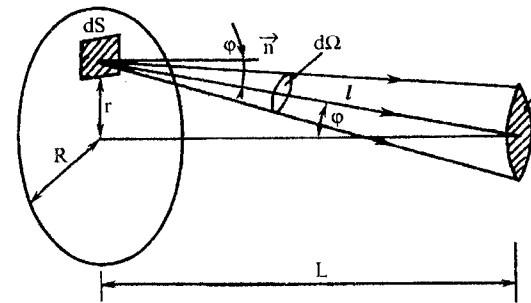


Рис. 2.13

створюється на площині  $\sigma$  елементом  $dS$  площини диска (джерела), який міститься на відстані  $r$  від центра диска (рис. 2.13). Елемент площадки  $dS$  в напрямку площини  $\sigma$  випромінює в одиничний тілесний кут світловий потік

$$d\Phi'_v = B_v dS \cos \varphi, \quad (1)$$

де  $B_v$  – яскравість джерела. Світловий потік  $d\Phi_v$ , що випромінюється в тілесний кут  $d\Omega$ , який спирається на площадку  $\sigma$  дорівнює

$$d\Phi_v = B_v dS \cos \varphi d\Omega. \quad (2)$$

Із рис. 2.13:

$$d\Omega = \frac{\sigma \cos \varphi}{l^2}, \quad (3)$$

де  $l$  – відстань від  $dS$  до  $\sigma$ .

Користуючись формулою (2.21) елементарна освітленість  $dE_v$  дорівнюватиме:

$$dE_v = \frac{d\Phi_v}{\sigma} = \frac{B_v dS \cos \varphi d\Omega}{\sigma} = \frac{B_v dS \cos^2 \varphi}{l^2}. \quad (4)$$

Із рис. 2.13:

$$\cos \varphi = \frac{L}{l}, \quad l^2 = r^2 + L^2. \quad (5)$$

Тоді

$$dE_V = \frac{B_V dSL^2}{(r^2 + L^2)^2}. \quad (6)$$

У полярній системі координат на диску елемент площини  $dS$  дорівнює:

$$dS = r dr d\theta. \quad (7)$$

Враховуючи (7), остаточно вираз для  $dE_V$  буде такий:

$$dE_V = \frac{B_V L^2 r dr d\theta}{(r^2 + L^2)^2}. \quad (8)$$

Для знаходження шуканої освітленості  $E_V$ , яка створюється всім джерелом на площадці  $\sigma$ , вираз (8) треба проінтегрувати по  $\theta$  (від 0 до  $2\pi$ ) і по  $r$  (від 0 до  $R$ ). Тоді

$$E_V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{B_V L^2 r dr d\theta}{(r^2 + L^2)^2} = B_V L^2 \pi \left[ -\frac{1}{r^2 + L^2} \right]_0^R = \frac{\pi B_V R^2}{R^2 + L^2}. \quad (9)$$

Зауважимо, що:

а) якщо  $R \gg L$ , то

$$E_V = \frac{\pi B_V}{1 + \frac{L^2}{R^2}} \cong \pi B_V. \quad (10)$$

б) якщо  $R \ll L$ , то

$$E_V = \frac{\pi B_V R^2}{R^2 + L^2} \cong \frac{\pi B_V R^2}{L^2} = \frac{B_V S}{L^2} = \frac{I_V}{L^2}, \quad (11)$$

де  $\pi R^2 = S$  – площа диска,  $B_V S = I_V$  – сила світла джерела – диска.

**Задача 2.5.6.** Вгнуте дзеркало дає дійсне зображення джерела світла на білому екрані, який розсіює світло за законом Ламберта. Від чого залежить видима поверхнева яскравість зображення?

**Розв'язок:** При  $S_1 \gg r$ , де  $r$  – радіус діючого отвору дзеркала, дзеркало видно з місця джерела під тілесним кутом

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{S_1^2}. \quad (1)$$

Елемент поверхні  $d\sigma$  джерела випромінює в одиничний тілесний кут

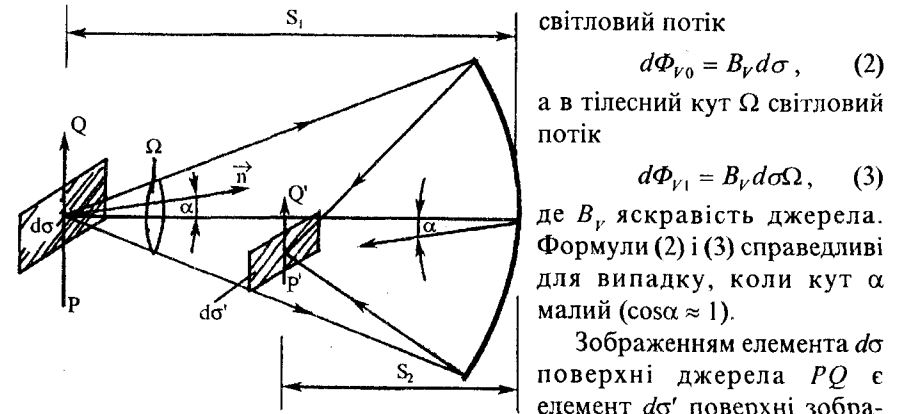


Рис. 2.14

світловий потік

$$d\Phi_{V0} = B_V d\sigma, \quad (2)$$

а в тілесний кут  $\Omega$  світловий потік

$$d\Phi_{V1} = B_V d\sigma \Omega, \quad (3)$$

де  $B_V$  – яскравість джерела. Формули (2) і (3) справедливі для випадку, коли кут  $\alpha$  малий ( $\cos \alpha \approx 1$ ).

Зображенням елемента  $d\sigma$  поверхні джерела  $PQ$  є елемент  $d\sigma'$  поверхні зображення  $P'Q'$ . Тому світловий потік, що посиляється

дзеркалом на цей елемент  $d\sigma'$  поверхні зображення дорівнює:

$$d\Phi'_V = k d\Phi_{V1}, \quad (4)$$

де  $k$  – коефіцієнт відбиття дзеркала.

Світність зображення

$$R_V = \frac{k' d\Phi'_V}{d\sigma'} = \frac{kk' B_V d\sigma \Omega}{d\sigma'}, \quad (5)$$

де  $k'$  – коефіцієнт дифузного розсіяння екрана, на якому утворюється зображення. Оскільки розсіяння відбувається за законом Ламберта, то яскравість зображення:

$$B'_V = \frac{R_V}{\pi} = \frac{kk' B_V d\sigma \Omega}{\pi d\sigma'}. \quad (6)$$

Легко бачити із рис.2.14, що

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1}{\beta^2}, \quad (7)$$

де  $\beta = \frac{S_2}{S_1}$  – лінійне поперечне збільшення, яке дає вгнуте дзеркало. Таким чином

$$B'_V = \frac{kk' B_V \pi r^2 S_1^2}{\pi S_1^2 S_2^2} = \frac{kk' B_V D^2}{4S_2^2}, \quad (8)$$

де  $D$  – діаметр отвору дзеркала,  $\frac{\pi r^2}{S_1^2} = \Omega$ . Користуючись формулою вгнутого дзеркала [див. ф-лу (5.38)], формулу (8) можна звести до вигляду:

$$B'_V = \frac{kk'B_V D^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{S_1}\right)^2}{4}, \quad (9)$$

де  $f$  – фокусна відстань дзеркала. При досить великих  $S_1$  яскравість дійсного зображення

$$B'_V = \frac{kk'B_V \left(\frac{D}{f}\right)^2}{4}, \quad (10)$$

де  $\frac{D}{f}$  – світлосила дзеркала.

**Відповідь:** Видима поверхнева яскравість зображення залежить від діаметра  $D$  діючого отвору дзеркала (прямо пропорційна  $D^2$ ) і від фокусної відстані  $f$  (обернено пропорційна  $f^2$ ).

**Задача 2.5.7.** На рис. 2.15 наведено криву видності, яка характеризує

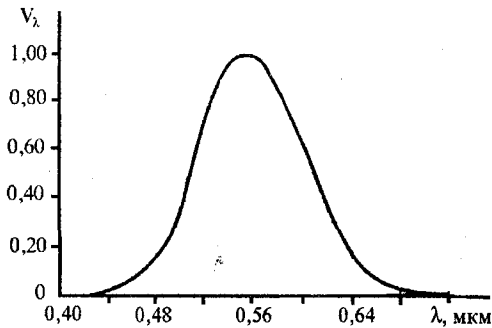


Рис. 2.15

чутливість нормального ока до світлових хвиль різної довжини. Яка потужність світлового потоку в 1 лм, якщо світло монохроматичне і довжина хвилі рівна: а)  $\lambda_1 = 0,61$  мкм; б)  $\lambda_2 = 0,52$  мкм.

**Розв'язок:** Співвідношення між енергетичними і світловими характеристиками випромінювання різної довжини встановлюються за функцією

видності  $V_\lambda$  (рис. 2.15) та механічного еквівалента світла  $K_\lambda$ . Дослідним шляхом встановлено, що світловому потоку в  $\Phi = 1$  лм з довжиною хвилі  $\lambda = 0,555$  мкм відповідає потужність випромінювання  $P = 0,0016$  Вт. Цю величину позначають  $K_{0,555}$  і називають її мінімальним механічним еквівалентом світла. Тобто

$$K_{0,555} = 0,0016 \text{ Вт/лм.}$$

Якщо потужність випромінювання, яка відповідає довжині хвилі  $\lambda$ , позначити через  $K_\lambda$  то можна записати, що

$$V_\lambda = \frac{K_{0,555}}{K_\lambda}, \quad (1)$$

звідки

$$K_\lambda = \frac{K_{0,555}}{V_\lambda}. \quad (2)$$

Функцію видності  $V_\lambda$  для різних довжин хвиль знаходимо за кривою видності або за таблицею 2.3. Для нашого випадку  $V_{\lambda=0,61 \text{ мкм}} = 0,503$  і  $\lambda_2 = 0,52 \text{ мкм} = 0,71$ . Тоді

$$K_{\lambda_1} = \frac{0,0016}{0,503} = 0,0032 \frac{\text{Вт}}{\text{лм}}, \quad K_{\lambda_2} = \frac{0,0016}{0,71} = 0,0023 \frac{\text{Вт}}{\text{лм}}.$$

**Відповідь:** а)  $K_{\lambda_1=0,61 \text{ мкм}} = 0,0032 \frac{\text{Вт}}{\text{лм}}$ ; б)  $K_{\lambda_2=0,52 \text{ мкм}} = 0,0023 \frac{\text{Вт}}{\text{лм}}$ .

**Задача 2.5.8.** Визначити потужність фіолетового ( $\lambda_\phi = 0,40$  мкм) і червоного ( $\lambda_\nu = 0,750$  мкм) випромінювань, якщо їх світловий потік дорівнює світловому потоку жовто-зеленого ( $\lambda_\nu = 0,555$  мкм) випромінювання потужністю  $P = 1$  Вт.

**Розв'язок:** Величина світлового потоку  $d\Phi_{V\lambda}$  і величина енергетичного потоку  $dP_\lambda$  для інтервалу довжин хвиль  $d\lambda$  пов'язані між собою співвідношенням (2.25):

$$d\Phi_{V\lambda} = dP_\lambda A_\lambda, \quad (1)$$

де  $A_\lambda$  – спектральна світлова ефективність.

Для монохроматичного випромінювання

$$\Phi_{V\lambda} = P_\lambda A_\lambda. \quad (2)$$

Тоді світловий потік монохроматичного  $\lambda_i$  випромінювання

$$\Phi_{V\lambda_i} = P_{\lambda_i} A_{\lambda_i}. \quad (3)$$

Відповідно до умови задачі світлові потоки трьох випромінювань рівні:

$$\Phi_{V\lambda_\phi} = \Phi_{V\lambda_\nu} = \Phi_{V\lambda}. \quad (4)$$

Використовуючи функцію видності

$$V_{\lambda} = \frac{A_{\lambda}}{A_{\lambda_{\max}}}, \quad (5)$$

де  $A_{\lambda_{\max}} = 680 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1}$ , і враховуючи (2) і (4), маємо:

$$P_{\lambda} V_{\lambda} A_{\lambda_{\max}} = P_{\lambda_2} V_{\lambda_2} A_{\lambda_{\max}}, \quad (6)$$

звідки

$$P_{\lambda} = \frac{P_{\lambda_2} V_{\lambda_2} A_{\lambda_{\max}}}{V_{\lambda} A_{\lambda_{\max}}}. \quad (7)$$

Беручи до уваги, що при  $\lambda_2 = 555 \text{ нм}$   $V_{\lambda_2} = 1$ , отримаємо:

$$P_{\lambda} = \frac{P_{\lambda_2}}{V_{\lambda}}. \quad (8)$$

Підставляючи по чергово у (8)  $V_{\lambda_{\text{ф}}} = 0,0004$  і  $V_{\lambda_{\text{ч}}} = 0,00012$ , знайдені за табл. 2.3, отримуємо потужність фіолетового  $P_{\lambda_{\text{ф}}} = 2500 \text{ Вт}$  і червоного  $P_{\lambda_{\text{ч}}} = 8333,3 \text{ Вт}$  випромінювань.

**Відповідь:**  $P_{\lambda_{\text{ф}}} = 2500 \text{ Вт}$ ;  $P_{\lambda_{\text{ч}}} = 8333,3 \text{ Вт}$ .

**Задача 2.5.9.** Точкове ізотропне джерело випромінює світловий потік  $\Phi_{\nu} = 10 \text{ лм}$  з довжиною хвилі  $\lambda = 0,59 \text{ мкм}$ . Знайти амплітудні значення напруженості електричного і магнітного полів цього світлового потоку на відстані  $1 \text{ м}$  від джерела.

**Розв'язок:** Енергія електромагнітної хвилі визначається співвідношенням:

$$P = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2, \quad \text{або} \quad P = \frac{1}{2} \mu_0 c H_0^2, \quad (1)$$

де  $E_0$  і  $H_0$  – відповідно амплітудні значення електричного і магнітного полів світлової хвилі,  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  – електрична і магнітна сталі відповідно.

Із (1) маємо:

$$E_0^2 = \frac{2P}{\epsilon_0 c}, \quad H_0^2 = \frac{2P}{\mu_0 c}. \quad (2)$$

Враховуючи, що  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , формули (2) можна записати так:

$$E_0^2 = 2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} P, \quad H_0^2 = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} P. \quad (3)$$

Оскільки джерело, яке випромінює світлові хвилі є точкове, то амплітудні значення  $E_0$  і  $H_0$  зменшуються обернено пропорційно до площі поверхні сфери. Тоді

$$E_0^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{2P}{4\pi r^2}, \quad H_0^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{2P}{4\pi r^2}. \quad (4)$$

Від світлового потоку до енергетичного перейдемо, скориставшись формулою (2.25):

$$P_{\lambda} = \frac{\Phi_{\nu\lambda} K(0,555 \text{ мкм})}{V_{\lambda}}. \quad (5)$$

Оскільки в нашому випадку  $P = P_{\lambda}$ , формули (4) переписуться так:

$$E_0^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\Phi_{\nu\lambda} K(0,555)}{2\pi r^2 V_{\lambda}}, \quad H_0^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\Phi_{\nu\lambda} K(0,555)}{2\pi r^2 V_{\lambda}}. \quad (6)$$

де  $V_{\lambda} = 0,757$  – функція видності знайдена за кривою видності,  $K(0,555 \text{ мкм})$  – мінімальний механічний еквівалент світла. Підставивши в (6) числові значення відповідних величин ( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ ;  $\Phi_{\nu\lambda} = 10 \text{ лм}$ ;  $r = 1 \text{ м}$ ;  $K(0,555 \text{ мкм}) = 0,0016 \text{ Вт/лм}$ ;  $V_{\lambda} = 0,757$ ), отримуємо:

$$E_0^2 = \sqrt{\frac{1,257 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} \frac{10 \cdot 0,0016}{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 0,757} = 1,27 \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}; \quad E_0 = 1,1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

$$H_0^2 = \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{1,257 \cdot 10^{-6}}} \frac{10 \cdot 0,0016}{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 0,757} = 8,93 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}; \quad H_0 = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

**Відповідь:**  $E_0 = 1,1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ ;  $H_0 = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{В}}{\text{м}}$ .

**Задача 2.5.10.** Знайти світловий потік, що припадає на інтервал довжин хвиль від  $\lambda_1 = 0,58$  до  $\lambda_2 = 0,63 \text{ мкм}$ , якщо йому відповідає потік енергії  $P = 4,5 \text{ мВт}$ , причому останній рівномірно розподілений за довжинами хвиль цього інтервалу (вважати, що в даному спектральному інтервалі

функція видності залежить лінійно від довжини хвилі).

**Розв'язок:** Світловий потік, що відповідає енергетичному потоку з довжиною хвилі  $\lambda$ , визначається за однією із формул (2.25):

$$\Phi_{V\lambda} = P(\lambda)V(\lambda)A(0,555), \quad (1)$$

де  $P(\lambda)$  – енергетичний потік, що відповідає довжині хвилі  $\lambda$ ,  $V(\lambda)$  – функція видності,  $A(0,555) = 680 \text{ лм/Вт}$  – максимальна спектральна світлова ефективність.

Однак, відповідно до умови задачі, світловий потік розподілений в інтервалі довжин хвиль від  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ . Тому

$$\Phi_V = A(0,555) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho(\lambda)V(\lambda)d\lambda, \quad (2)$$

де  $\rho(\lambda) = \frac{dP}{d\lambda}$  – густина розподілу енергетичного потоку за довжинами хвиль. Оскільки в нашому випадку енергетичний потік рівномірно розподілений в інтервалі від  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ , то

$$\rho(\lambda) = \frac{P}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (3)$$

Тоді

$$\Phi_V = \frac{A(0,555)P}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)d\lambda. \quad (4)$$

Виходячи із умови лінійності  $V(\lambda)$  в інтервалі довжин хвиль від  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ , можна записати:

$$\frac{V(\lambda) - V(\lambda_1)}{V(\lambda_2) - V(\lambda_1)} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (5)$$

Із (5) маємо:

$$V(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} [V(\lambda_2) - V(\lambda_1)] + V(\lambda_1). \quad (6)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)d\lambda &= \frac{V(\lambda_2) - V(\lambda_1)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) - \frac{V(\lambda_2) - V(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 - \lambda_1) + \\ &+ V(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) = [V(\lambda_2) - V(\lambda_1)] \left[ \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} - \lambda_1 \right] + V(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) = \\ &= [V(\lambda_2) - V(\lambda_1)] \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right) + V(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{[V(\lambda_2) - V(\lambda_1)](\lambda_2 - \lambda_1)}{2}. \quad (7) \end{aligned}$$

Враховуючи в (4) значення інтеграла  $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)d\lambda$  із (7), отримаємо робочу формулу:

$$\Phi_V = \frac{A(0,555)P[V(\lambda_2) - V(\lambda_1)]}{2} \quad (8)$$

Підставляючи в (8) числові значення відповідних величин [ $V(\lambda_1) = 0,87$  і  $V(\lambda_2) = 0,265$ ], знайдених за кривою видності (рис.2.15) або за таблицею 2.3, знаходимо:

$$\Phi_V = \frac{680 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3} (0,265 + 0,87) \text{ лм}}{2} = 1,74 \text{ лм}.$$

Відповідь  $\Phi_V = 1,74 \text{ лм}$ .

## 2.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми II

**2.6.1** Над поверхнею на висоті  $h = 2 \text{ м}$  розміщене точкове джерело світла силою  $I_V = 120 \text{ кд}$ . На відстані  $l = 1 \text{ м}$  від джерела перпендикулярно до поверхні знаходиться плоске абсолютно відбиваюче дзеркало. Визначити освітленість поверхні під джерелом.

**Відповідь:**  $E_V = 41 \text{ лк}$ .

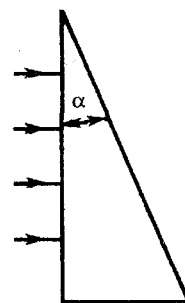


Рис. 2.16

E

**2.6.2.** Екран освітлюється сонячним світлом, що падає перпендикулярно до його площини. Як зміниться освітленість екрана, якщо на шляху світла поставити скляну

призму з кутом при вершині  $\alpha$  (рис. 2.16)? Грань, на яку падає світло, паралельна площині екрана. Показник заломлення скла дорівнює  $n$ . Вважати відбитий світловий потік рівним нулю.

**Відповідь:** 
$$\frac{E_2}{E_1} = (1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \left[ (1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} + n \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \right].$$

**2.6.3.** Точкове джерело світла знаходиться на відстані  $S_1 = 30$  см від опуклого сферичного дзеркала з радіусом  $R = 60$  см. Знайти освітленість  $E_{\nu}$  на відстані  $l = 60$  см від поверхні дзеркала, якщо на відстані  $L = 120$  см вона рівна  $E_{\nu L} = 200$  лк.

**Відповідь:**  $E_{\nu l} \approx 770$  лк.

**2.6.4.** Визначити освітленість, світність і яскравість екрана, який розсіює світло рівномірно у всіх напрямках, якщо падаючий на екран світловий потік із об'єктива кіноапарата (без кінострічки), рівний  $\Phi_{\nu} = 1800$  лм. Розміри екрана  $5 \times 3,6$  м, коефіцієнт відбиття  $\rho = 0,75$ .

**Відповідь:**  $E_{\nu} = 100$  лк;  $R_{\nu} = 75$  лм/м<sup>2</sup>;  $B_{\nu} = 23,9$  кд/м<sup>2</sup>.

**2.6.5.** В центрі квадратної кімнати площею  $S = 25$  м<sup>2</sup> висить лампа. Вважаючи лампу точковим джерелом світла, знайти, на якій висоті  $h$  від підлоги повинна знаходитися лампа, щоб освітленість в кутах кімнати була найбільшою.

**Відповідь:**  $h = \frac{b}{2} = 2,5$  м, де  $b$  – сторона квадратної підлоги.

**2.6.6.** Знайти яскравість поверхні Сонця, знаючи, що в ясний день пряме падіння сонячного випромінювання створює на поверхні, перпендикулярній напрямку на Сонце, освітленість  $E_{\nu} = 7 \cdot 10^4$  лк. Поглинанням і розсіянням сонячних променів в атмосфері знехтувати.

**Відповідь:**  $B_{\nu} = 10^9$  кд/м<sup>2</sup>.

**2.6.7.** Спіраль електричної лампи з силою світла  $I_{\nu} = 100$  кд поміщена в сферичну колбу діаметром: 1)  $\sqrt{5}$  см і 2)  $\sqrt{10}$  см. Знайти світність і яскравість в обидвох випадках. Втратою світла в оболонці колби знехтувати.

**Відповідь:**  $B_{\nu 1} = 658$  кд/м<sup>2</sup>;  $R_{\nu 1} = 2064$  лм/м<sup>2</sup>;  $B_{\nu 2} = 13$  кд/м<sup>2</sup>;  $R_{\nu 2} = 40$  лм/м<sup>2</sup>.

**2.6.8.** За допомогою двоопуклої лінзи діаметром  $D = 10$  см і фокусною відстанню  $f = 50$  см зображення Сонця проектується на екран. У скільки разів освітленість, яка створюється зображенням Сонця, буде більшою за освітленість, що створюється Сонцем безпосередньо? Кутівий діаметр Сонця вважати рівним  $\alpha = 32'$ .

**Відповідь:** 
$$\frac{E'}{E} = \frac{D^2}{4f^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \approx 462.$$

**2.6.9.** На столі лежить книга на відстані  $l = 1$  м від перпендикуляра, опущеного із лампи на площину стола. Лампа може переміщатись тільки ввєрх і вниз. На якій висоті  $H$  над столом слід її підвісити, щоб освітленість книги була найбільшою?

**Відповідь:**  $H = \frac{l}{\sqrt{2}} = 0,7$  м<sup>2</sup>.

**2.6.10.** Освітленість, яка отримується при нормальному падінні сонячних променів на поверхню Землі,  $E_{\nu 0} = 10^5$  лк. Вважаючи, що випромінювання Сонця підкоряється закону Ламберта і нехтуючи поглинанням світла в атмосфері, визначити яскравість Сонця, якщо відомо, що радіус земної орбіти  $R = 1,5 \cdot 10^8$  км, а діаметр Сонця  $D = 1,4 \cdot 10^4$  км.

**Відповідь:**  $B_{\nu} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{R}{D} \right) E_{\nu 0} = 1,5 \cdot 10^9$  Кд/м<sup>2</sup>.

**2.6.11.** Освітленість, яка отримується при нормальному падінні сонячних променів на поверхню Землі, складає приблизно  $E_0 = 100000$  лк. Яка освітленість зображення Сонця, яке створюється вільною від абераций лінзою діаметром  $D = 5$  см і фокусною відстанню  $f = 10$  см? Кутівий діаметр Сонця  $d = 30'$ .

**Відповідь:**  $E_{\nu} = E_{\nu 0} \frac{\pi D^2}{4f^2 \alpha^2} = 2,58 \cdot 10^8$  лк.

**2.6.12.** Яку освітленість потрібно створити на білому аркуші паперу з коефіцієнтом відбиття  $\rho = 0,85$ , щоб його яскравість була рівною  $B_{\nu} = 3 \cdot 10^4$  кд/м<sup>2</sup>. Папір розсіює світло за законом Ламберта.

**Відповідь:**  $E_{\nu} = \frac{\pi B}{\rho} = 11 \cdot 10^4$  лк.

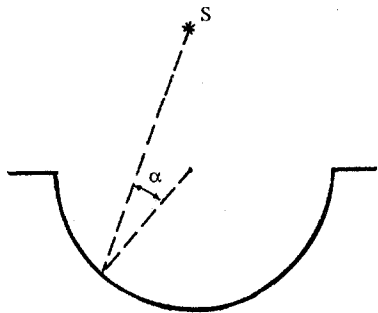


Рис. 2.17

**2.6.13** Над півсферою знаходиться точкове джерело світла ( $I = 50$  кд) на висоті, рівній діаметру півсфери (рис. 2.17). Визначити освітленість в тій точці сфери, де промені падають під кутом  $\alpha = 35^\circ$ , та величину світлового потоку, який падає в півсферу. Радіус півсфери рівний  $R = 1$  м.

**Відповідь:**  $E_v = 15,3$  лк;  $\Phi_v = 157$  лм.

**2.6.14** Світильник, який має вигляд рівномірно світної сфери з радіусом  $r_0 = 6$  см, знаходиться на відстані  $h = 3,0$  м від підлоги. Яскравість світильника  $B_v = 2 \cdot 10^4$  кд/м<sup>2</sup> і не залежить від напрямку. Знайти освітленість підлоги безпосередньо під світильником.

**Відповідь:**  $E_v = \frac{\pi B_v r_0^2}{h^2} \approx 418$  лк.

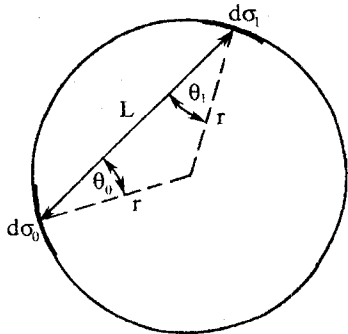


Рис. 2.18

**2.6.15.** Елемент  $d\sigma_0$  кульової поверхні з радіусом  $r$  випромінює світло у відповідності із законом Ламберта. Визначити освітленість різних точок поверхні порожнини (рис. 2.18).

**Відповідь:**  $E_v = \frac{B_v d\sigma_0}{4L^2}$ .

**2.6.16.** Знайти середню освітленість опромінюваної частини непрозорої сфери, якщо на неї падає: а) паралельний світловий потік, який створює в точці нормального падіння освітленість  $E_{v0}$ ; б) світло від точкового ізотропного джерела, яке знаходиться на відстані  $l = 100$  см від центра сфери; радіус сфери  $r = 60$  см а сила світла джерела  $I_v = 36$  кд.

**Відповідь:** а)  $\langle E \rangle = \frac{E_{v0}}{2}$ ; б)  $\langle E \rangle = \frac{I}{r^2} \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}}{1 - \left(\frac{r}{l}\right)} = 50$  лк.

**2.6.17** Знаючи мінімальний механічний еквівалент світла ( $K_{0,555} = 0,0016$

Вт/м), що відповідає максимуму чутливості ока, оцінити к.к.д. потужної газонаповненої лампи розжарювання, яка споживає потужність  $0,5$  Вт на  $1$  кд. Наближено можна вважати, що середня чутливість ока в спектральній області, яку займає випромінювання лампи, вдвічі менша за максимальну.

**Відповідь:**  $\eta \approx 2\%$ .

**2.6.18.** Згідно норм освітленості робочого місця металіста, виконуючого тонку роботу, освітленість повинна бути  $E_v = 100$  лк. На якій висоті  $h$  від робочого місця повинна бути розміщена лампа силою світла  $I_v = 100$  кд? Яка потужність  $P$  цієї лампи (у Вт), якщо тільки десята частина енергії струму переходить у світлову енергію?

**Відповідь:**  $h = 1$  м;  $P = 20$  Вт.

**2.6.19.** Деяка світна поверхня підкоряється закону Ламберта. Її яскравість рівна  $B_v$ . Знайти: а) світловий потік випромінюваний елементом  $d\sigma$  цієї поверхні в середину конуса, вісь якого нормальна до даного елемента, якщо кут між віссю конуса і його твірною рівний  $\theta$ ; б) світність  $R_v$  такого джерела.

**Відповідь:** а)  $\Phi_v = \pi B_v d\sigma \sin^2 \theta$ ; б)  $R_v = \pi B_v$ .

**2.6.20.** Через отвір у ставні в кімнату падає пучок сонячних променів, які утворюють зайчик на аркуші білого паперу, який лежить на підлозі. Площа зайчика  $S = 80$  см<sup>2</sup>, освітленість  $E_{v0} = 10000$  лк, коефіцієнт відбиття паперу  $\rho = 0,8$ . Яка освітленість: а) стелі кімнати над аркушем паперу, якщо висота кімнати рівна  $h = 4$  м? б) стіни на висоті  $h = 2$  м від підлоги? Стіна знаходиться на відстані  $l = 3$  м від зайчика і розміщена перпендикулярно до площини падіння променя Сонця на підлогу.

**Відповідь:** а)  $E_{va} = 1,27$  лк; б)  $E_{vb} = 0,72$  лк.

**2.6.21.** На плоску поверхню під кутом  $45^\circ$  падає випромінювання, яке містить довжини хвиль між  $\lambda_1 = 550$  нм і  $\lambda_2 = 600$  нм. Спектральна густина потоку енергії випромінювання в напрямку поверхні за шкалою довжин хвиль на довжині хвилі  $555$  нм рівна  $10^4$  Вт/м<sup>2</sup> і спадає до нуля на хвилі  $600$  нм лінійно. Вважати, що відносна спектральна ефективність в цьому інтервалі довжин хвиль залежить також лінійно від  $K_1 = 1$  до  $K_2 = 0,5$ . Знайти освітленість поверхні.



Відповідь:  $E_V = 54$  лк.

2.6.22. Електрична лампа силою світла  $I = 100$  кд випромінює у всіх напрямках щосекунди  $W = 122$  Дж енергії. Знайти: а) механічний еквівалент світла  $K$ ; б) к.к.д.  $\eta$  світлової віддачі, якщо лампа споживає потужність  $P = 100$  Вт.

Відповідь:  $K = 0,097$  Вт/лм;  $\eta = 1,84\%$ .

2.6.23. Знайти напруженості електричного і магнітного полів хвилі з довжиною 555 нм, якщо при нормальному падінні вона створює освітленість 500 лк.

Відповідь:  $E = 23,35$  В/м;  $H = 7,6 \cdot 10^{-2}$  А/м.

2.6.24. Чи можна, збираючи промені Сонця в фокусі сферичного дзеркала, отримати освітленість більшу за яскравість на поверхні Сонця? Яку максимальну освітленість можна отримати в фокусі дзеркала? Площа і радіус кривизни дзеркала відповідно  $S$  і  $R$ , яскравість поверхні Сонця  $B_0$ .

Відповідь: Ні;  $E_V \approx \frac{B_0 S}{\pi R^2}$ .

## ТЕМА III ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ СВІТЛА

### 3.1. Теоретичний матеріал

Додавання світлових хвиль. Інтерференція хвиль. Когерентність. Просторова і часова когерентність. Методи спостереження інтерференції в оптиці: схема Юнга, дзеркала Френеля, біпризма Френеля, білінза Бйє, дослід Месліна, дзеркала Ллойда, дослід Поля. Вплив розмірів джерел і монохроматичності світла на інтерференційну картину.

Двопроменева інтерференція. Інтерференція в тонких плівках і пластинках. Смуги рівного нахилу і рівної товщини. Кільця Ньютонна. Двопроменеві інтерферометри Жамена, Майкельсона, Тваймана-Гріна, Релея.

Багатопроменева інтерференція. Інтерферометри Фабрі-Перо і Люммера-Герке.

Інтерференційні фільтри. Просвітлення оптики.

### 3.2. Основні поняття, закони і формули

3.2.1. Інтерференція – це результат накладання світлових хвиль внаслідок чого відбувається просторовий перерозподіл світлової енергії, тобто в одних місцях простору енергія збільшується (виникають максимуми), в інших місцях – зменшується (виникають мінімуми), а загальний запас енергії в просторі залишається незмінним.

Результуюча інтенсивність  $I$  при накладанні двох світлових хвиль з інтенсивностями  $I_1$  і  $I_2$ :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (3.1)$$

де  $\Phi_2 - \Phi_1$  – різниця фаз хвиль. Для випадку інтерференції будь-якого числа світлових хвиль різної інтенсивності

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_2 - \Phi_1) + \dots + 2\sqrt{I_{n-1} I_n} \cos(\Phi_n - \Phi_{n-1}). \quad (3.2)$$

Інтерферують тільки когерентні світлові хвилі. Когерентними називають такі світлові хвилі, які мають сталу різницю фаз і однакову частоту.

### 3.2.2. Параметр видності $V$ (контраст) інтерференційної картини

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.3)$$

3.2.3 Різниця фаз  $\delta = \Phi_2 - \Phi_1$ ,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (3.4)$$

де  $\lambda_0$  -- довжина світлової хвилі у вакуумі,  $L = ns$  – оптичний шлях,  $\Delta = (L_2 - L_1)$  – оптична різниця ходу.

3.2.4. Методи одержання когерентних хвиль

Метод Юнга

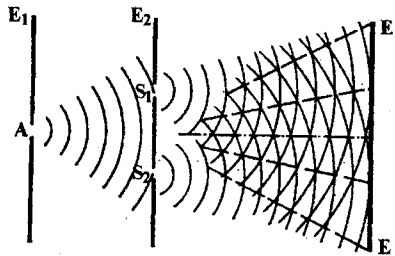


Рис. 3.1

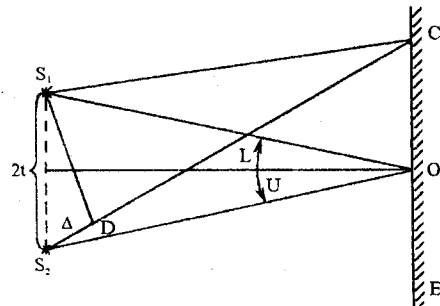


Рис. 3.2

Максимуми виникають в тих місцях простору, де різниця ходу  $\Delta$  рівна цілому числу хвиль, або парному числу півхвиль:

$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.5)$$

Мінімуми – де різниця ходу  $\Delta$  рівна непарному числу півхвиль:

$$\Delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.6)$$

Відстань від центра екрана до  $k$ -ої світлої смуги ( $k$ -ого максимуму)

$$I_k^{\max} = k \frac{\lambda}{2t} L, \quad \text{або} \quad I_k^{\max} = k \frac{\lambda}{u}, \quad (3.7)$$

до темної  $k$ -ої смуги ( $k$ -ого мінімуму)

$$I_k^{\min} = (2k+1) \frac{\lambda}{2t} L, \quad \text{або} \quad I_k^{\min} = (2k+1) \frac{\lambda}{u}, \quad (3.8)$$

Ширина світлої смуги – це відстань між двома найближчими

мінімумами:

$$\Delta l = I_{\min}(k+1) - I_{\min}(k) = \frac{\lambda}{2t} L, \quad (3.9)$$

або

$$\Delta l = \frac{\lambda}{u}, \quad (3.10)$$

де  $2t$  – відстань між щілинами  $S_1$  і  $S_2$ ,  $L$  – відстань від  $S_1$  і  $S_2$  до екрана спостереження ( $2t \ll L$ ),  $u$  – кут, під яким видно когерентні джерела з точки  $O$  (центра екрана) (рис.3.2).

Дзеркала Френеля

Ширина інтерференційної світлої смуги

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2t} L = \frac{(L_0 + r)}{2\varphi r} \lambda. \quad (3.11)$$

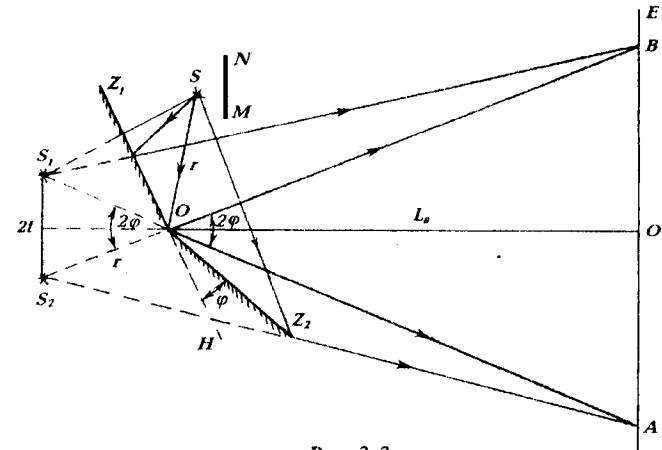


Рис. 3.3

Довжина світлової хвилі

$$\lambda = \frac{2\varphi r \Delta l}{L_0 + r}. \quad (3.12)$$

Ширина інтерференційної картини

$$AB = 2L_0\varphi. \quad (3.13)$$

Число смуг, спостережуваних на екрані

$$N = \frac{AB}{\Delta l} = \frac{4\varphi^2 L_0 r}{(L_0 + r)\lambda}, \quad (3.14)$$

де  $L_0$  – відстань від лінії стику дзеркал до екрана спостереження,  $r$  – відстань від лінії стику дзеркал до щілини,  $L_0 + r$  – відстань від уявних зображень  $S_1$  і  $S_2$  до екрана спостереження,  $\varphi$  – кут між дзеркалами.

**Біпризма Френеля**

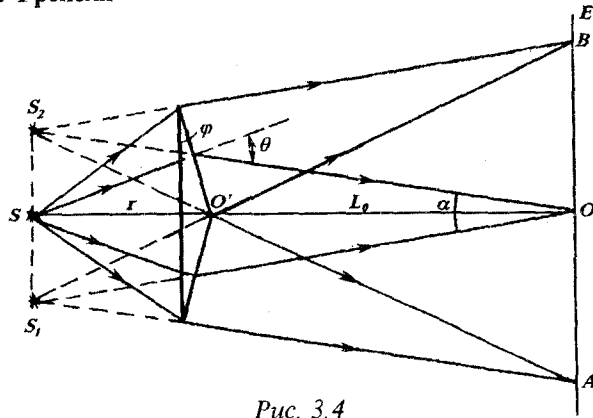


Рис. 3.4

**Ширина інтерференційної світлої смуги**

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2t} L = \frac{(L_0 + r)}{2r(n-1)\varphi} \lambda. \quad (3.15)$$

**Довжина світлової хвилі**

$$\lambda = \frac{2r(n-1)\varphi(\Delta l)}{L_0 + r}. \quad (3.16)$$

**Ширина інтерференційної картини**

$$AB = 2L_0(n-1)\varphi. \quad (3.17)$$

**Число смуг спостережуваних на екрані**

$$N = \frac{AB}{\Delta l} = \frac{4L_0 r(n-1)^2 \varphi^2}{(L_0 + r)\lambda}, \quad (3.18)$$

де  $n$  – показник заломлення речовини призми,  $r$  – відстань від призми до уявних джерел  $S_1$  і  $S_2$ ,  $\varphi$  – заломний кут біпризми,  $L_0$  – відстань від призми до екрана спостереження.

**Білінза Бйє**

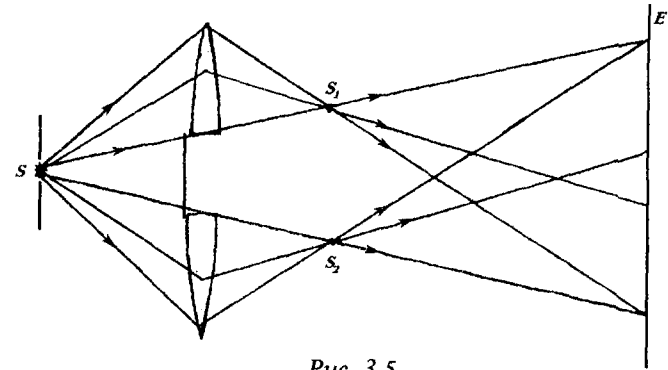


Рис. 3.5

**Дослід Месліна**

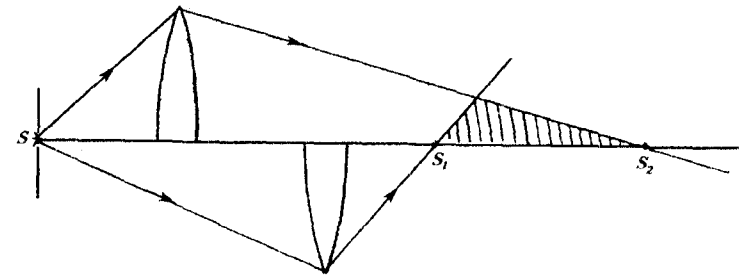


Рис. 3.6

**Дзеркало Ллойда**

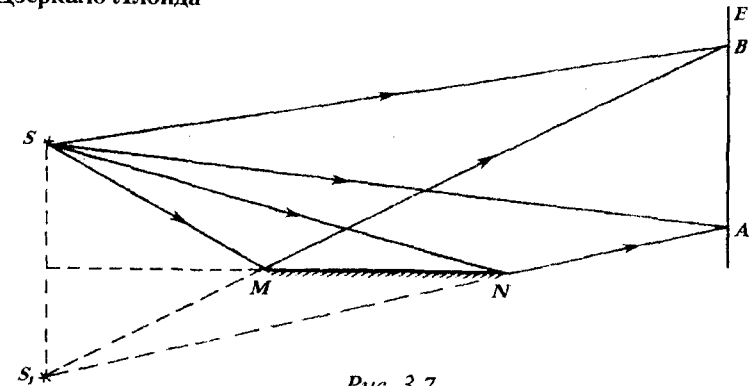


Рис. 3.7

Дослід Поля

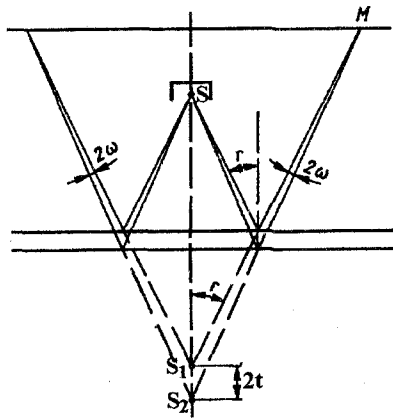


Рис. 3.8

3.2.5. Вплив розмірів джерела на інтерференцію

Інтерференційна картина буде достатньо різкою за виконання умови

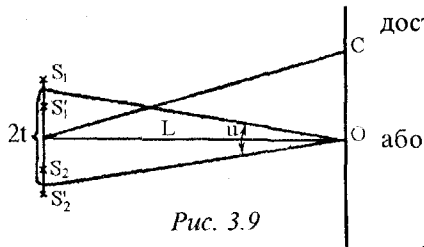


Рис. 3.9

$$d \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2t} L, \quad (3.19)$$

$$d \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{u}, \quad (3.20)$$

де  $d$  – протяжність джерел,  $2t$  – відстань між джерелами,  $L$  – відстань від джерел до екрана спостереження.

3.2.6. Інтерференція немонахроматичних хвиль

Для можливості спостереження інтерференційної картини в немонахроматичному світлі, необхідно, щоб ширина інтервалу довжин хвиль  $\Delta\lambda$  не перевершувала граничного інтервалу, що визначається умовою:

$$\Delta\lambda \leq (\Delta\lambda)_{gr} = \frac{\lambda}{k}, \quad (3.21)$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$  – порядок інтерференції.

3.2.7. Двопроменева інтерференція

Інтерференційні смуги рівного нахилу

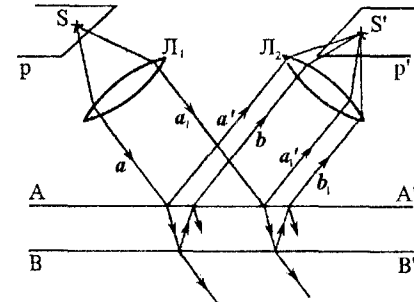


Рис. 3.10

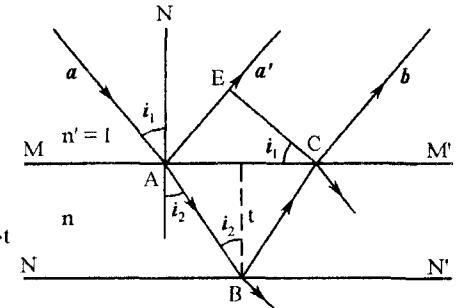


Рис. 3.11

Оптична різниця ходу променів  $a'$  і  $b$  при  $n' = 1$  (рис. 3.11)

$$\Delta = 2tn \cos i_2 - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.22)$$

або

$$\Delta = 2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2}. \quad (3.23)$$

Якщо  $n' \neq 1$

$$\Delta = 2t\sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.24)$$

де  $t$  – товщина пластинки,  $n$  – показник заломлення речовини пластинки,  $n'$  – показник заломлення середовища, в якому знаходиться пластинка,  $i_1$  і  $i_2$  – відповідно кути падіння і заломлення,  $\lambda$  – довжина хвилі.

Умова максимумів інтенсивності:

$$2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad (3.25)$$

Умова мінімумів інтенсивності:

$$2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3.26)$$

де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – порядок інтерференції.

Форма смуг рівного нахилу наведена на рис. 3.12. Кожна смуга утворюється

променями, які падають на пластинку під однаковими кутами.

Інтерференційні смуги рівної товщини виникають на пластинці змінної товщини (наприклад, клині) (рис. 3.13).

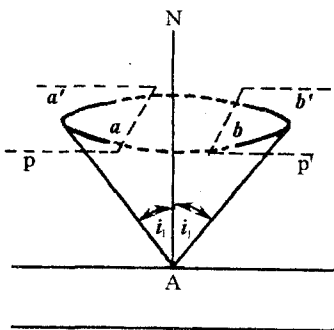


Рис. 3.12

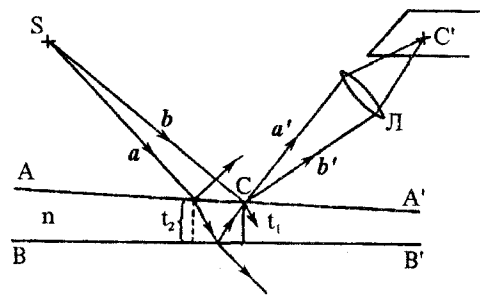


Рис. 3.13

Якщо кут між поверхнями пластинки малий, а джерело розміщене достатньо далеко (щоб можна було вважати кут падіння для всіх променів сталим), різницю ходу  $\Delta$  наближено можна виразити формулою (3.24). Оскільки,  $i_1 = const$ , то різниця ходу між інтерферуючими променями визначається лише товщиною пластинки  $t$ , наприклад, в точці С. Звідси випливає, що всім точкам поверхні пластинки однакової товщини відповідає одна і та ж інтерференційна картина.

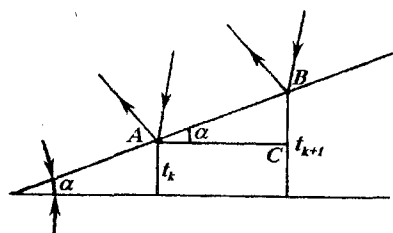


Рис. 3.14

Відстань між двома сусідніми смугами, що виникають на поверхні клина

$$l = AB = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{\Delta t}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha} \quad (3.27)$$

де  $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{\lambda}{2n}$ .

Кільця Ньютона – це смуги рівної товщини, які виникають на повітряному прошарку, що утворюється між поверхню плоскопаралельної пластинки і опуклою поверхню лінзи (рис. 3.15).

Радіуси послідовних світлих кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_k = \sqrt{R\lambda(k - \frac{1}{2})} \quad (3.28)$$

темних кілець

$$r_k = \sqrt{R\lambda k} \quad (3.29)$$

де  $R$  – радіус кривизни опуклої поверхні лінзи,  $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – порядок інтерференції.

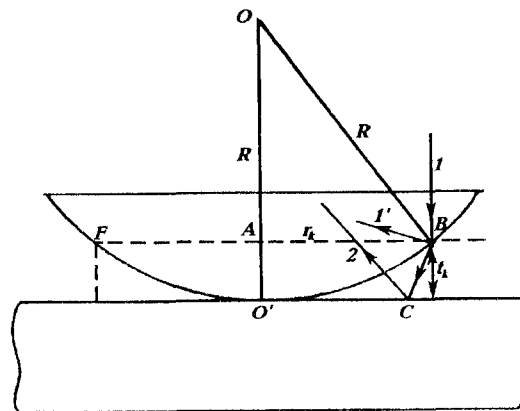


Рис. 3.15

Відстань між сусідніми кільцями Ньютона

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = \frac{\sqrt{R\lambda}}{2\sqrt{k}} \quad (3.30)$$

### 3.2.8. Багатопроменева інтерференція

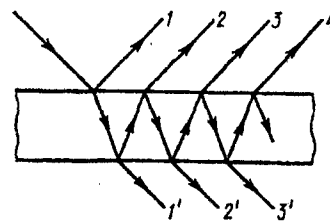


Рис. 3.16

Інтерференція, яка виникає в результаті додавання великої кількості світлових променів, називається багатопроменевою інтерференцією. Велику кількість променів можна отримати при багаторазовому відбиванні світла від поверхонь плоскопаралельної прозорої пластинки (рис. 3.16).

Інтенсивність відбитого світла

$$I_r = I_0 \frac{4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.31)$$

прохідного світла

$$I_{\tau} = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (3.32)$$

де  $R$  і  $T$  – відповідно енергетичні коефіцієнти відбиття і пропускання,  $\delta$  – різниця фаз між інтерферуючими пучками.

Оскільки  $\delta$  змінюється від  $2k\pi$  до  $2(k+1)\frac{\pi}{2}$  то:

$$I_r^{\max} = I_0 \frac{4R}{(1+R)^2}, \quad I_r^{\min} = 0, \quad (3.33)$$

$$I_{\tau}^{\max} = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}, \quad I_{\tau}^{\min} = I_0 \frac{T^2}{(1+R)^2}, \quad (3.34)$$

Графіки залежності інтенсивностей від різниці фаз  $\delta$  при даному значенні  $R$  наведені на рис. 3.17.

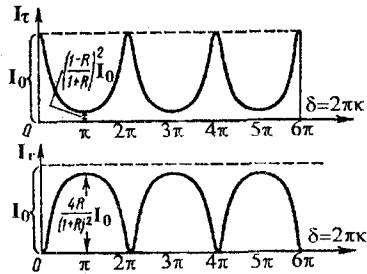


Рис. 3.17

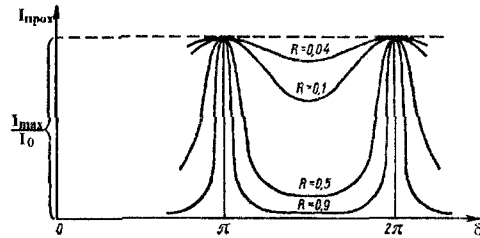


Рис. 3.18

Функція видимості інтерференційної картини у прохідному світлі

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2R}{1+R^2}, \quad (3.35)$$

контрастність

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{(1+R^2)}{(1-R^2)}. \quad (3.36)$$

Криві розподілу відносної інтенсивності  $I_{\max}/I_0$  в прохідному світлі залежно від різниці фаз  $\delta$  для різних значень коефіцієнта відбиття  $R$  наведені на рис. 3.18.

### 3.2.9. Інтерферометри

Інтерферометр Фабрі-Перо (рис. 3.19)

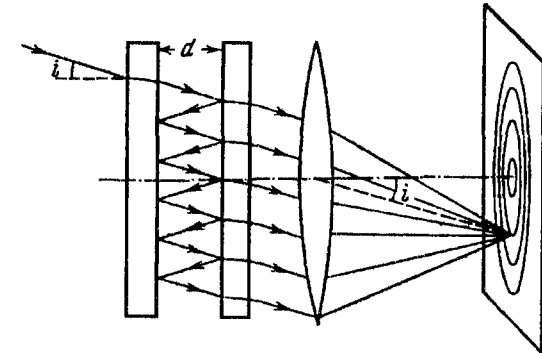


Рис. 3.19

Умова максимумів:

$$2t \cos i = k\lambda, \quad (3.37)$$

де  $t$  – відстань між пластинками,  $i$  – кут між променем, який виходить із пластинки і нормаллю до неї,  $k$  – порядок інтерференції,  $\lambda$  – довжина хвилі.

Кутова дисперсія

$$\frac{\partial i}{\partial \lambda} = \frac{k}{2ti} = \frac{1}{\lambda i}. \quad (3.38)$$

Роздільна сила (здатність)

$$\mathfrak{R} = \frac{\lambda}{\partial \lambda} = 2\pi R \frac{\sqrt{R}}{1-R} = RN, \quad (3.39)$$

де  $R$  – коефіцієнт відбиття,  $k$  – порядок інтерференції,  $N$  – кількість ефективних пучків, які інтерферують.

Інтерферометр (пластинка) Льюмера-Герке (рис. 3.20)

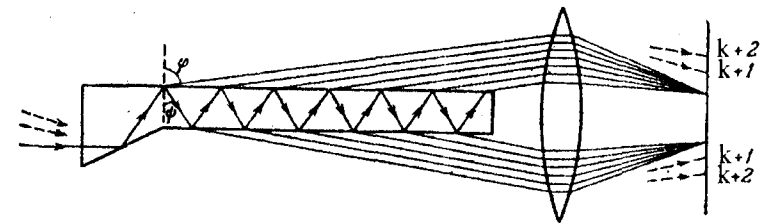


Рис. 3.20

Умова максимумів:

$$\boxed{2tn \cos \psi = k\lambda}, \quad \text{або} \quad \boxed{2t\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} = k\lambda}, \quad (3.40)$$

Число інтерферуючих пучків з одного боку пластинки

$$N = \frac{L}{2tg\psi}, \quad \text{або} \quad N = \frac{L}{2t}\sqrt{n^2 - 1}, \quad (3.41)$$

де  $L$  – довжина пластинки,  $\psi$  – кут заломлення,  $n$  – показник заломлення речовини, з якої виготовлена пластинка,  $t$  – товщина пластинки,  $\alpha$  – кут між променем і поверхнею пластинки.

Максимальний порядок інтерференції

$$\boxed{k_{\max} = \frac{2tn^2 - 1}{\lambda}}. \quad (3.42)$$

### 3.3. Контрольні запитання

3.3.1. В якому випадку при накладенні двох світлових хвиль однакової частоти завжди, тобто при будь-яких фазових співвідношеннях, відбувається просте додавання інтенсивностей.

3.3.2. За яким законом змінюється освітленість екрана, де спостерігається інтерференція двох плоских монохроматичних хвиль однакової інтенсивності? різної інтенсивності?

3.3.3. Якої форми інтерференційні смуги при падінні на екран монохроматичних хвиль від двох точкових джерел?

3.3.4. Чому для спостереження інтерференції світла від звичайних джерел інтерферуючі пучки повинні виходити від одного і того ж джерела?

3.3.5. З'ясуйте суть часової і просторової когерентності. Яку величину називають довжиною когерентності?

3.3.6. Чому в методі Юнга інтерференція не спостерігатиметься, якщо на щілини падатиме світло безпосередньо від джерела (наприклад, від лампи розжарювання)?

3.3.7. Як буде змінюватися інтерференційна картина, якщо відстань між щілинами в методі Юнга збільшувати? зменшувати?

3.3.8. На скільки в бік зміститься центральний максимум в інтерференційній картині від двох щілин, якщо одну з них закрити тонкою плоскопаралельною пластинкою товщини  $t$  і з показником заломлення  $n$ ? Відстань від щілини до екрана  $L$ .

3.3.9. Чому тупий кут біпризми Френеля повинен бути близьким до  $180^\circ$ ?

3.3.10. З'ясуйте суть дослідів Вінера та висновки, що з них випливають.

3.3.11. Чому при спостереженні смуг рівного нахилу можна використовувати протяжні джерела світла? Де локалізовані смуги рівного нахилу?

3.3.12. Чому з випаровуванням мильної плівки відстань між інтерференційними смугами зростає?

3.3.13. Коефіцієнт відбивання світла від сухого скла майже в 1,7 разів більший, ніж від вологого. Чому?

3.3.14. Чому: для спостереження кілець Ньютона лінза повинна мати великий радіус кривизни поверхні? ширина кілець Ньютона і відстань між ними зменшується із збільшенням порядку інтерференції? у відбитому світлі центр кілець Ньютона – темний, а в прохідному – світлий?

3.3.15. Чи спостерігатимуться інтерференційні смуги на екрані, якщо в установці Бійє джерело помістити між лінзою і її фокусом?

3.3.16. На склі, що довгий час піддавалося атмосферним впливам, або пролежало довгий час в сирій землі, спостерігаються красиві райдужні відтінки. Поясніть їх походження.

3.3.17. Тонка плівка освітлюється джерелом світла. Світло, відбите від плівки, проектується лінзою на екран. Як потрібно встановити лінзу, щоб на екрані спостерігались інтерференційні смуги?

3.3.18. Є дві тонкі плівки з однакової речовини. При освітленні їх білим світлом, промені якого перпендикулярні до поверхонь плівок, одна з них здається червоною, а друга – синьою. Чи можна сказати, яка з цих плівок є товщою? Чи можна вирахувати товщину плівок? Що для цього треба ще знати?

3.3.19. Зимою на скляних вікнах трамваїв і автобусів утворюються тонкі льодові плівки, які забарвлюють все видиме через них в зеленуватий колір. Оцініть, яка найменша товщина цих плівок (показник заломлення льодових плівок прийняти рівним 1,33).

3.3.20. Чим відрізняються смуги рівного нахилу в дво- і багатопромених інтерференційних картинах?

3.3.21. Яким чином із спостереження смуг двопроменевої інтерференції можна отримати інформацію про спектральний склад випромінювання?

3.3.22. Поясніть принцип дії інтерферометрів Фабрі-Перо і Люммера-Герке.

3.3.23. Від яких параметрів, що характеризують інтерферометр, залежить різкість смуг?

3.3.24. В чому полягає суть просвітлення оптики?

3.3.25. Якими перевагами володіють дзеркала з багатошаровими діелектричними покриттями в порівнянні з металічними? В чому полягає

принцип їх дії?

**3.3.26.** Яка будова інтерференційних фільтрів? В чому полягає принцип їх дії?

#### 3.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задачі по інтерференції світла можна розділити в основному на дві групи: задачі, які пов'язані з інтерференцією світла від двох когерентних джерел, і задачі на інтерференцію в тонких плівках і пластинках. До задач першої групи відносяться випадки інтерференції, отримані за допомогою дзеркал і біпризми Френеля, білінзи Бійє, дзеркала Ллойда, а також – в досліді Юнга. Для розрахунків інтерференційної картини використовують формули (3.5) і (3.6), які є умовами виникнення підсилення і послаблення світла.

Для визначення відстані  $l_k$  від центра екрана до  $k$ -ої інтерференційної світлої смуги та відстані  $\Delta l$  між світлими (темними) смугами на екрані користуються формулами (3.7)–(3.10).

Крім того при розрахунках інтерференційної картини користуються формулою оптичного шляху  $L$ , який проходить промінь в однорідному середовищі з показником заломлення  $n$

$$L = nS, \quad (3.43)$$

де  $S$  – геометрична довжина шляху, та формулою (3.4), яка зв'язує різницю фаз  $\delta$  із різницею ходу  $\Delta$ .

Розв'язуючи задачі, пов'язані із інтерференцією світла в тонких пластинках (плівках), слід мати на увазі, що формула (3.23) для оптичної різниці ходу двох променів, відбитих від передньої і задньої поверхонь пластинки, виведена для випадку, коли пластинка оточена однаковими середовищами (рис. 3.21). При цьому приймалось, що  $n' = 1$  (для випадку вакууму). Поява у формулі (3.23) другого доданка  $\lambda/2$  пов'язана із втратою півхвилі при відбиванні світла на передній поверхні (межа поділу двох середовищ: оптично менш густе – оптично більш густе середовище). При відбиванні світла від задньої поверхні втрати півхвилі не спостерігається (межа поділу: оптично більш густе – оптично менш густе середовище).

Якщо тонка пластинка оточена різними середовищами (рис. 3.22), то, залежно від співвідношення між показниками заломлення середовищ,  $n_1$ ,  $n_2$  і пластинки можливі такі випадки:

- а)  $n > n_1$ ,  $n > n_2$ , при цьому тільки промінь 1, відбитий від межі з оптично більш густим середовищем, “втрачає” півхвилі.
- б)  $n < n_1$ ,  $n < n_2$  – “втрачає” півхвилі тільки промінь 2.
- в)  $n_1 < n < n_2$  – обидва промені “втрачають” півхвилі.
- г)  $n_1 > n > n_2$  – ні один промінь не “втрачає” півхвилі.

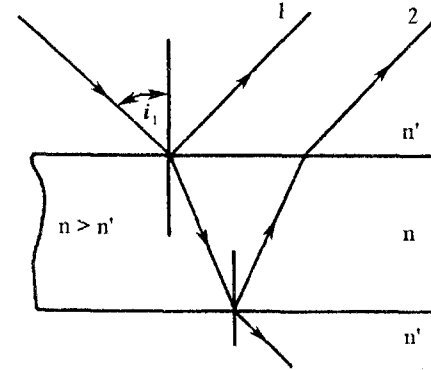


Рис. 3.21

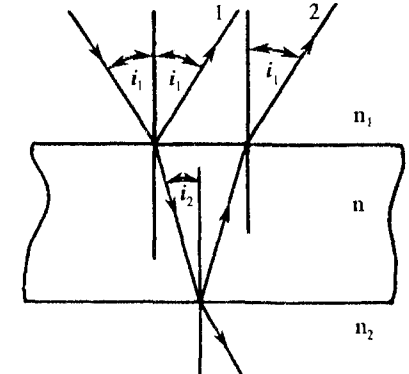


Рис. 3.22

Очевидно, що в перших двох випадках формула (3.23) залишається в силі. В останніх двох випадках в формулі (3.23) величину  $\lambda/2$  потрібно відкинути, оскільки втрата обидвома променями півхвилі не змінить їх різниці ходу. Тоді формулу (3.23) можна виразити так:

$$\Delta = 2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}. \quad (3.44)$$

При інтерференції світла, відомої під назвою кілець Ньютона, роль тонкої пластинки відіграє прошарок (в більшості випадків повітряний) між поверхнею плоскопаралельної пластинки і опуклою поверхнею притиснутої до неї лінзи. Радіуси кілець Ньютона у відбитому світлі можна вирахувати, користуючись формулами (3.28) і (3.29). Ці формули виведені з припущення, що прошарок оточений однаковими середовищами, тобто пластинка і лінза мають однакові показники заломлення. Приймаючи  $n_1$ ,  $n$  і  $n_2$  за показники заломлення відповідно лінзи, прошарку і пластинки і, повторивши вище наведені міркування, вважаючи, що прошарок оточений різними середовищами ( $n_1 \neq n_2$ ), прийдемо до висновку, що формули (3.28) і (3.29) залишаються вірними у випадках “а” і “б”. Якщо виконується умова “в” або “г”, то величина  $\Delta$  буде відрізнятись від тієї,



що була у випадках "а" і "б" на  $\lambda/2$ . Внаслідок цього світлі і темні кільця поміняються місцями: формула (3.28) буде визначати радіуси темних кілець, а (3.29) – світлих.

При розв'язуванні задач з використанням багатопроменевих інтерферометрів користуються такими ж загальними формулами, що і при спостереженні інтерференції за допомогою будь-якого із вище розглянутих методів. Оскільки в інтерферометрі Фабрі-Перо виникають смуги однакового нахилу, то умовою виникнення інтерференційного максимуму  $k$ -ого порядку є формула (3.37):

$$2tn \cos i = k\lambda, \quad (3.45)$$

де  $t$  – відстань між дзеркалами (рис. 3.19),  $n$  – показник заломлення середовища між дзеркалами,  $i$  – кут між променем, що виходить із пластинки і нормаллю до неї. Якщо покласти, що  $n = 1$  (повітря),  $i = 0$ , то формула (3.45) набуде вигляду:

$$2t \approx k\lambda, \quad (3.46)$$

звідки

$$k \approx \frac{2t}{\lambda}. \quad (3.47)$$

Формула (3.47) дає можливість визначити максимальний порядок інтерференції світла з довжиною хвилі  $\lambda$ .

В інтерферометрі (пластинці) Льюмера-Герке також виникають інтерференційні смуги однакового нахилу. Умовою інтерференційного максимуму  $k$ -ого порядку є формула (3.45)

$$2tn \cos \psi = k\lambda, \quad (3.48)$$

де  $t$  – товщина пластинки,  $\psi$  – кут заломлення (рис. 3.20).

### 3.5 Приклади розв'язування задач

**Задача 3.5.1** Відстань між точковими джерелами  $2t = \lambda/2$ , а хвилі, які випромінюються ними, мають різницю фаз  $\delta_0 = \pi$  і кожна зокрема дають інтенсивність  $I_0$ . Знайти розподіл інтенсивності в інтеференційній картині на екрані.

**Розв'язок:** Результуюча інтенсивність при додаванні двох монохроматичних хвиль визначається за формулою (3.1):

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta), \quad (1)$$

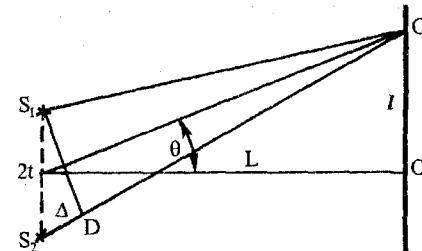


Рис. 3.23

де  $I_0$  – початкова інтенсивність кожної хвилі зокрема,  $\delta$  – різниця фаз хвиль в момент додавання (наприклад в точці C, рис. 3.23). Для даного випадку різниця фаз дорівнює

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta + \pi, \quad (2)$$

де  $\Delta = S_2D$  – різниця ходу, із (рис. 3.23) маємо:

$$\Delta = \frac{2t}{L}, \quad \text{або} \quad \Delta = \frac{\lambda}{2} \sin \theta, \quad (3)$$

де  $2t = \lambda/2$  – відстань між джерелами, а  $\sin \theta \approx \frac{l}{L}$ . Тоді

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \sin \theta + \pi = \pi \sin \theta + \pi. \quad (4)$$

При врахуванні (4) формула (1) набуде вигляду

$$I = 2I_0[1 + \cos(\pi \sin \theta + \pi)]. \quad (5)$$

Оскільки  $\cos(\pi \sin \theta + \pi) = -\cos(\pi \sin \theta)$ , то отримаємо:

$$I = 2I_0[1 - \cos(\pi \sin \theta)].$$

Беручи до уваги, що  $1 - \cos(\pi \sin \theta) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{2} \sin \theta)$ , отримаємо остаточний вираз розподілу інтенсивності в інтерференційній картині на екрані:

$$I = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right).$$

**Задача 3.5.2.** Кут між дзеркалами Френеля  $\alpha = 10'$ . На дзеркала падає світло від щілини, яка знаходиться на відстані  $r = 10$  см від лінії перетину дзеркал. Довжина світлової хвилі джерела  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ . Відбите від дзеркал світло дає інтерференційну картину на екрані, який розміщений на відстані  $L_0 = 270$  см від лінії перетину дзеркал. Визначити відстань між інтерференційними смугами на екрані. Як зміниться інтерференційна картина на екрані, якщо щілину зсунути на відстань  $d = 2$  мм в напрямку,

щоб її відстань від лінії перетину дзеркал не змінилася? Як зміниться картина на екрані, якщо відстань від щілини до перетину дзеркал збільшиться в два рази? Визначити максимальну ширину щілини, при якій інтерференційна картина ще може спостерігатися. Визначити кількість інтерференційних смуг на екрані.

**Розв'язок:** 1. Для визначення відстані між інтерференційними смугами скористаємось формулою (3.9):

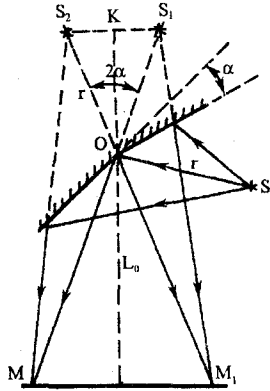


Рис. 3.24

де  $L = L_0 + OK$  – відстань від джерел до екрана,  $2t$  – відстань між когерентними джерелами  $S_1$  і  $S_2$ . Із  $\Delta S_1 S_2 O$  (рис. 3.24) знайдемо  $OK$ :

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2t} L, \quad (1)$$

$$OK = r \cos \alpha. \quad (2)$$

Оскільки кут  $\alpha$  малий  $\cos \alpha \approx 1$ , то

$$OK \approx r. \quad (3)$$

Тоді

$$L = L_0 + r. \quad (4)$$

Відстань між уявними джерелами знаходимо із рис.2.24:

$$2t = 2r \sin \alpha. \quad (5)$$

Внаслідок малості кута  $\alpha$   $\sin \alpha$  в (5) можна замінити самим кутом. Тоді

$$2t = 2r\alpha. \quad (6)$$

При врахуванні (3), (4) і (6) формула (1) в кінцевому вигляді запишеться так:

$$\Delta l = \frac{\lambda(L_0 + r)}{2r\alpha}. \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $\alpha$  необхідно виразити в радіанах), отримуємо:

$$\Delta l = \frac{6 \cdot 10^{-7} (2,7 + 0,1)}{2 \cdot 0,1 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,9 \text{ мм}.$$

**Зверніть увагу!** Аналізуючи формулу (7) бачимо, що кут  $\alpha$  (кут між дзеркалами) повинен бути малим – кілька хвилин. Якщо кут  $\alpha$  буде складати кілька градусів (наприклад  $3^\circ$ ), а інші величини залишаться

попередніми, то отримаємо  $\Delta l = 1,6 \cdot 10^{-4}$  м. Смуга такої товщини важко доступна для спостереження.

2. Якщо щілину перемістити на відстань  $d$ , не змінюючи її відстані від лінії перетину дзеркал, то ширина смуг на екрані не зміниться, оскільки вона залежить від положення джерела відносно лінії перетину дзеркал, але точка К (середина відстані між уявними джерелами переміститься в точку  $K'$ ) (рис. 3.25). Тоді центральна інтерференційна смуга на екрані переміститься на величину  $AA'$ . Значить і вся інтерференційна картина зміститься на екрані.

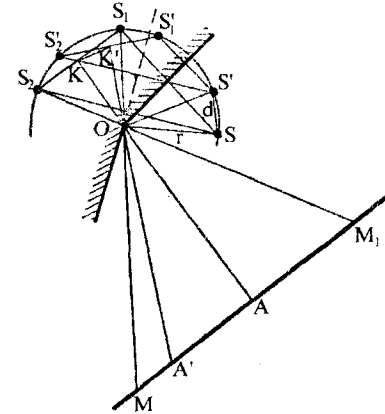


Рис. 3.25

Із подібності трикутників  $SOS'$  і  $KOK'$  (рис. 3.25) знайдемо  $KK'$ :

$$KK' = d \cos \alpha, \quad (8)$$

а із подібності трикутників  $AOA'$  і  $KOK'$  знайдемо  $AA'$ :

$$AA' : KK' = L_0 : OK,$$

звідки

$$AA' = \frac{KK' \cdot L_0}{OK}. \quad (9)$$

Враховуючи (2) і (8), формулі (9) можна надати вигляду:

$$AA' = \frac{d \cos \alpha L_0}{r \cos \alpha} = \frac{d \cdot L_0}{r}. \quad (10)$$

Підставляючи в (10) числові значення відповідних величин ( $d = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $L_0 = 2,7$  м;  $r = 0,1$  м), отримуємо:

$$AA' = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

3. Якщо відстань від щілини до лінії перетину дзеркал збільшити в два рази, то відстань між уявними джерелами збільшиться також в два рази ( $2t = 4r\alpha$ ), а відстань від уявних джерел до екрана майже не зміниться, оскільки в у формулу (7)

$$\Delta l = \lambda \frac{(L_0 + 2r)}{4r\alpha}, \quad (11)$$

$2r$  входить в чисельник як доданок і, крім того,  $2r \ll L_0$ . Значить, ширина

інтерференційних смуг зменшиться в два рази.

4. Допустима ширина щілини  $\Delta S$  може бути визначена із умови (3.19):

$$\Delta S \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\alpha r} (L_0 + r). \quad (12)$$

Підставляючи в (12) числові значення відповідних величин ( $\alpha = 2,9 \cdot 10^{-3}$  рад;  $r = 0,1$  м;  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м;  $L_0 = 2,7$  м), отримаємо:

$$\Delta S \leq 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

5. Ширина всієї інтерференційної картини  $MM_1$  (рис. 3.24) визначається величиною апертурного кута  $\alpha$ :

$$MM_1 = 2L_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (13)$$

Число смуг на екрані:

$$N = \frac{MM_1}{\Delta l} = \frac{4L_0 r \alpha^2}{\lambda(L_0 + r)}. \quad (14)$$

В (14)  $\operatorname{tg} \alpha$  замінемо на  $\alpha$ , внаслідок малості кута  $\alpha$ . Підставивши в (14) числові дані відповідних величин, отримаємо  $N = 5$  смуг.

**Задача 3.5.3.** Від вузької щілини за допомогою біпризми Френеля із заломним кутом  $\varphi = 20'$  отримують на екрані  $E$  інтерференційну картину. Щілина розміщена на відстані  $d = 25$  см від біпризми, а екран – на відстані  $L_0 = 100$  см. Визначити довжину хвилі світла, яке освітлює щілину, якщо ширина інтерференційних смуг на екрані  $\Delta l = 0,55$  мм. Показник заломлення речовини біпризми Френеля  $n = 1,5$ .

**Розв'язок:** Від щілини промені падають на біпризму під всіма

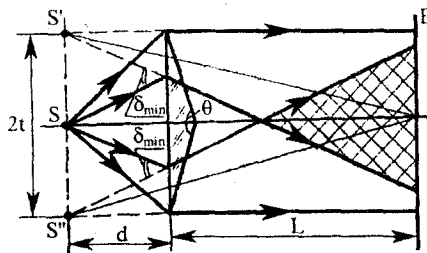


Рис. 3.26

можливими кутами і серед них є промені, які падають на верхню і нижню половини біпризми під такими кутами, що кути відхилення для них будуть мінімальними ( $\delta_{\min}$ ).

Крім того, слід врахувати, що оскільки заломний кут призми  $\varphi$  дуже малий, то уявні зображення щілини і сама щілина розміщені

практично в одній площині (рис.3.26). При невеликому значенні заломного кута призми має місце співвідношення :

$$\delta_{\min} = (n-1)\varphi, \quad (1)$$

де  $n$  – показник заломлення речовини призми,  $\varphi$  – заломний кут призми. Із рис.3.26

$$\frac{t}{2} = dtg \frac{(\delta_{\min})}{2}, \quad (2)$$

або

$$2t = 4dtg \frac{(\delta_{\min})}{2}. \quad (3)$$

Оскільки  $\delta_{\min}$  мале, то  $tg \frac{(\delta_{\min})}{2}$  в (3) можна замінити самим кутом  $\frac{(\delta_{\min})}{2}$ .

Тоді

$$2t = 2d\delta_{\min}. \quad (4)$$

При врахуванні (1), рівність (4) набуде вигляду

$$2t = 2d\varphi(n-1). \quad (5)$$

Ширина інтерференційних смуг, як відомо, визначається формулою (3.9):

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2t} L, \quad (6)$$

звідки

$$\lambda = \frac{2t\Delta l}{L}. \quad (7)$$

Враховуючи (5) і те, що  $L = L_0 + d$ , отримаємо робочу формулу:

$$\lambda = \frac{2d\varphi(n-1)\Delta l}{L_0 + d}. \quad (8)$$

Підставивши в (6) числові значення відповідних величин ( $d = 0,25$  м;  $\varphi = 5,8 \cdot 10^{-3}$  рад;  $n = 1,5$ ;  $\Delta l = 5,5 \cdot 10^{-4}$  м;  $L_0 = 1$  м), отримаємо:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 5,8 \cdot 10^{-3} \cdot (1,5 - 1) \cdot 5,5 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,25} \text{ м} = 6,38 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 6380 \text{ \AA}$$

**Відповідь:**  $\lambda = 6380 \text{ \AA}$ .

**Задача 3.5.4.** Із тонкої лінзи з фокусною відстанню  $f = 0,1$  м паралельно до її діаметра вирізана симетрично відносно діаметра смужка товщиною  $d = 10^{-3}$  м, після чого частинки, що залишилися, зсунуті щільно одна до одної. Визначити довжину світлової хвилі точкового джерела  $P$ , розміщеного на відстані  $a = 8 \cdot 10^{-2}$  м від лінзи, якщо на екрані, розміщеному на відстані  $L_0 = 1,6$  м від лінзи, спостерігається інтерференційна картина, в якій відстань між сусідніми максимумами  $\Delta l = 3 \cdot 10^{-4}$  м.

**Розв'язок:** Для знаходження довжини хвилі світла скористаємось формулою (3.9). Із неї маємо:

$$\lambda = \frac{2t\Delta l}{l}, \quad (1)$$

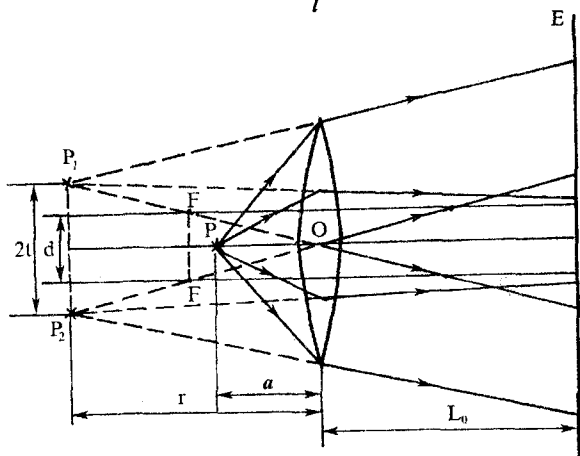


Рис. 3.27

де  $2t$  – відстань між когерентними джерелами (в нашому випадку між зображеннями джерела  $P_1$  і  $P_2$ ),  $L = L_0 + r$  – відстань від джерела до екрана,  $r$  – відстань від лінзи до зображень  $P_1$  і  $P_2$ , яка знаходиться із формули лінзи:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{r} = \frac{1}{f},$$

звідки

$$r = \frac{fa}{f-a}. \quad (2)$$

Тоді

$$L = L_0 + \frac{fa}{f-a}. \quad (3)$$

Відстань  $2t$  між зображеннями  $P_1$  і  $P_2$  знайдемо із рис. 3.27. Із подібності трикутників  $P_1P_2O$  і  $FFO$  маємо:

$$\frac{2t}{d} = \frac{r}{f},$$

звідки

$$2t = \frac{r}{f} d, \quad (4)$$

де  $d$  – товщина смужки вирізаної із лінзи.

Підставляючи в (4) значення  $r$  із (2), отримаємо:

$$2t = \frac{ad}{f-a}. \quad (5)$$

При врахуванні (3) і (5) формула (2) набуде вигляду:

$$\lambda = \frac{\Delta l da}{L_0(f-a) + fa}. \quad (6)$$

Підставляючи в (6) числові значення відповідних величин ( $\Delta l = 3 \cdot 10^{-4}$  м;  $d = 10^{-3}$  м;  $a = 8 \cdot 10^{-2}$  м;  $L_0 = 1,6$  м;  $f = 0,1$  м) і провівши обчислення, отримаємо  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м.

**Відповідь:**  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м.

**Задача 3.5.5.** Точкове джерело світла (щілина), яке освітлює дзеркало Ллойда, розміщене на висоті  $l = 1$  см над його площиною і на відстані  $L = 5,5$  м від екрана, розміщеного перпендикулярно до площини дзеркала. Екран щільно прилягає до дзеркала з протилежного боку від джерела світла. Довжина дзеркала  $L_0 = 50$  см. Знайти відстань між максимумами та число світлих і темних смуг в інтерференційній картині. Довжина хвилі світла  $\lambda = 0,5$  мкм.

**Розв'язок:** Відстань між максимумами в інтерференційній картині

визначається за формулою (3.9):

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2t} L, \quad (1)$$

де  $2t$  – відстань від джерела  $P$  до його зображення  $P'$ . Підставляючи в (1) числові значення відповідних величин ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $L_0 = 5,5 \text{ м}$ ;  $2t = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ), маємо:

$$\Delta l = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-2}} 5,5 \text{ м} = 13,75 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

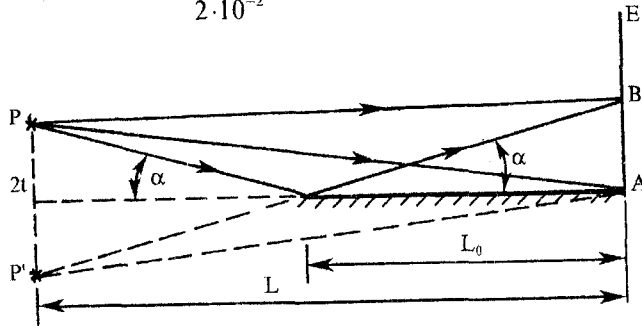


Рис. 3.28

Для знаходження кількості світлих і темних смуг на екрані перш за все необхідно знайти ширину інтерференційної картини. Із рис. 3.28 маємо:

$$\frac{t}{L - L_0} = \frac{AB}{L_0} = \operatorname{tg} \alpha,$$

звідки

$$AB = \frac{tL_0}{L - L_0}. \quad (2)$$

Формула (1) визначає як відстань між світлими, так і відстань між темними смугами. Кількість світлих смуг знайдемо із співвідношення:

$$N = \frac{AB}{\Delta l} = \frac{2L_0 t^2}{(L - L_0) \lambda L}. \quad (3)$$

Підставивши в (3) числові значення відповідних величин ( $L_0 = 0,5 \text{ м}$ ;  $t = 0,01 \text{ м}$ ;  $L = 5,5 \text{ м}$ ;  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ), маємо:

$$N = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}}{(5,5 - 0,5) \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 5,5} = 7.$$

**Відповідь:** Інтерференційна картина складається із 7 світлих і 6 темних смуг.

**Задача 3.5.6.** Для зменшення втрат світла при відбиванні в повітря ( $n_1 = 1,0$ ) від скла на поверхню об'єктива ( $n_2 = 1,7$ ) нанесена тонка прозора плівка ( $n = 1,3$ ). При якій найменшій товщині плівки відбудеться максимальне послаблення відбитого світла, довжина хвилі якого припадає на середню частину видимого спектра ( $\lambda = 5600 \text{ Å}$ ). Вважати, що промені падають на поверхню об'єктива нормально.

**Розв'язок:** Світло, падаючи на об'єктив, відбивається як від першої, так і від другої поверхонь тонкої плівки. Хід променів для випадку їх похилого падіння зображений на рис. 3.21. Відбиті промені 1 і 2 когерентні і інтерферують. Для того, щоб відбиті від поверхонь плівки промені погасили один одного необхідно, щоб їх оптична різниця ходу  $\Delta$  була рівна непарному числу півхвиль, тобто

$$\Delta = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Оптична різниця ходу променів, відбитих від поверхонь плівки, оточеної однаковими середовищами, визначається формулою (3.23):

$$\Delta = 2t \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

де  $t$  – товщина плівки,  $i_1$  – кут падіння променя. В даному випадку плівка оточена різними середовищами – повітрям ( $n_1 = 1,00$ ) і склом ( $n_2 = 1,7$ ). Із нерівності  $n_1 < n < n_2$  випливає, що обидва промені відбиваються від межі з оптично більш густим середовищем і “втрачають” півхвилі. Оскільки це не впливає на різницю ходу, то в (2) слід відкинути член  $\lambda/2$ . При  $i_1 = 0$ , отримаємо:

$$\Delta = 2tn. \quad (3)$$

Прирівнюючи (1) і (3), знаходимо товщину плівки, при якій відбувається максимальне послаблення відбитого світла:

$$t = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{4n}. \quad (4)$$

Враховуючи, що  $t$  – величина додатня і що  $t_{\min}$  відповідає  $k = 0$ , отримаємо:

$$t_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{5600}{4 \cdot 1,3} \text{ \AA} = 1077 \text{ \AA}.$$

**Відповідь:**  $t_{\min} = 1077 \text{ \AA}$ .

**Задача 3.5.7.** Мильна плівка, яка розміщена вертикально, утворює клин внаслідок стікання рідини. Спостерігаючи інтерференційні смуги у відбитому світлі ртутної дуги ( $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ ), знаходимо, що відстань, на якій вкладається 5 світлих смуг ( $N = 5$ ), рівна  $l = 2 \text{ см}$ . Знайти кут клина в секундах. Світло падає нормально до поверхні плівки. Показник заломлення мильної води  $n = 1,33$ .

**Розв'язок:** Перш за все відмітимо, що смуги розміщуються паралельно ребру клина і перпендикулярно до площини рисунка.

Нехай точки  $A$  і  $B$  відповідають двом сусіднім інтерференційним смугам (рис. 3.29), які знаходяться на відстані  $\Delta l$  (рис. 3.30). Із рис. 3.29 маємо:

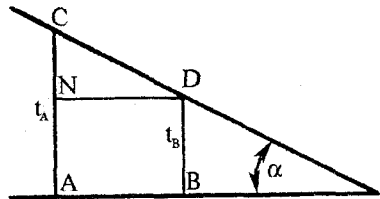


Рис. 3.29

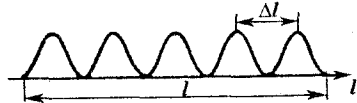


Рис. 3.30

$$tg\alpha = \frac{CN}{ND}, \text{ або } tg\alpha = \frac{t_A - t_B}{\Delta l}, \quad (1)$$

де  $CN = t_A - t_B$  – різниця товщин клина, які відповідають двом сусіднім максимумам,  $ND = \Delta l$  – відстань між

сусідніми світлими смугами. Враховуючи, що  $\Delta l = l/N$ , отримаємо:

$$tg\alpha = \frac{(t_A - t_B)N}{l}. \quad (2)$$

Умовою максимумів є:

$$2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad (3)$$

Оскільки  $i_1 = 0$ , рівність (3) набуде вигляду:

$$2tn - \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad (4)$$

звідки

$$t = \frac{k\lambda}{2n} + \frac{\lambda}{4n}. \quad (5)$$

Величини  $t_A$  і  $t_B$  відносяться до сусідніх смуг, тому числа  $k$ , які відповідають величинам  $t_A$  і  $t_B$ , повинні відрізнятися на одиницю. Значить,

$$t_A - t_B = \frac{k_A\lambda}{2n} - \frac{k_B\lambda}{2n} = (k_A - k_B)\frac{\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{2n}. \quad (6)$$

До такого ж результату приходимо, припустивши, що  $AB$  є відстань між двома сусідніми темними смугами.

Підставляючи значення  $t_A - t_B$  з формули (6) в формулу (2), знайдемо:

$$tg\alpha = \frac{\lambda N}{2ln}. \quad (7)$$

Виконавши розрахунки після підстановки в (7) числових даних відповідних величин, отримаємо  $\alpha = 10,4''$ .

**Відповідь:**  $\alpha = 10,4''$ .

**Задача 3.5.8.** Плоскоопукла лінза покладена на скляну пластинку, причому внаслідок попадання пилу між лінзою і пластинкою немає контакту (рис. 3.31). Діаметри 5-го і 15-го темних кілець Ньютона, які спостерігаються у відбитому світлі, відповідно дорівнюють 0,7 і 1,7 мм. Визначити радіус кривизни опуклої поверхні лінзи, якщо система

освітлюється світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 5810 \text{ \AA}$ .

**Розв'язок:** Нехай на систему, показану на рис. 3.31, падає світло перпендикулярно до поверхні пластинки. При цьому світло в точці  $A$  частково відбивається, а частково пройде в повітряний прошарок між лінзою і пластинкою і відбивається від поверхні пластинки. В точці  $A$  обидва пучки зустрічаються, маючи різницю ходу

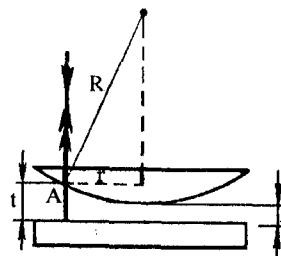


Рис. 3.31

$$\Delta = 2t + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)^*$$

де  $t$  – товщина повітряного прошарку, яка

\* Формула (1) отримана із (3.23) за умови,  $n = 1, i_1 = 0$

відповідає точці  $A$ . Залежно від того, чи буде різниця ходу рівна парному або непарному числу півхвиль, в точці  $A$  виникне максимум або мінімум світла.

Виходячи із цього, значення товщини прошарку, на якому виникає мінімум світла, отримаємо із умови:

$$2t + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

звідки

$$t = \frac{k\lambda}{2}. \quad (3)$$

Радіус  $r$  темного кільця для випадку відсутності оптичного контакту знайдемо із рис. 3.31:

$$r^2 = R^2 - [R - (t-x)]^2, \quad \text{або} \quad r^2 = 2R(t-x) - (t-x)^2, \quad (4)$$

де  $R$  – радіус кривизни поверхні лінзи. Оскільки  $(t-x)^2$  мале порівняно з  $2R(t-x)$ , то цим членом можна знехтувати, і формула (4) набуде такого вигляду:

$$r^2 = 2R(t-x). \quad (5)$$

Підставляючи в (5) значення  $t$  із (3) для темного кільця, отримаємо:

$$r^2 = 2R\left(\frac{k\lambda}{2} - x\right). \quad (6)$$

За умовою задачі радіуси  $r_k$  і  $r_i$  темних кілець відомі. Виходячи із (6), маємо:

$$r_k^2 = 2R\left(\frac{k\lambda}{2} - x\right), \quad r_i^2 = 2R\left(\frac{i\lambda}{2} - x\right). \quad (7)$$

Взявши різницю  $r_k^2 - r_i^2$ , виключимо невідому величину  $x$ :

$$r_k^2 - r_i^2 = R\lambda(k-i), \quad (8)$$

звідки:

$$R = \frac{r_k^2 - r_i^2}{\lambda(k-i)} = \frac{d_k^2 - d_i^2}{4\lambda(k-i)}. \quad (9)$$

Підставивши в (9) числові дані відповідних величин ( $d_k = 1,7 \cdot 10^{-3}$  м;  $d_i = 0,7 \cdot 10^{-3}$  м;  $\lambda = 5,81 \cdot 10^{-7}$  м;  $k = 15$ ;  $i = 5$ ), отримаємо  $R = 0,103$  м.

Відповідь:  $R = 0,103$  м.

**Задача 3.5.9.** Знайти фокусну відстань  $f$  плоско-опуклої лінзи, яка застосовується для отримання кілець Ньютонa, якщо радіус третього світлого кільця  $r_3 = 1,1$  мм,  $n_{\text{скла}} = 1,6$ ,  $\lambda = 5890$  Å. Кільця спостерігаються у відбитому світлі.

**Розв'язок:** Фокусну відстань можна знайти з формули для тонкої лінзи [див. [2], Ф-ла (8.70)]:

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}, \quad (1)$$

де  $n$  – показник заломлення речовини лінзи,  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни поверхонь двоопуклої лінзи. Для плоско-опуклої лінзи  $R_2 = \infty$  а  $1/R_2 = 0$ . Тоді

$$f = \frac{R}{n-1}. \quad (2)$$

Радіус кривизни  $R$  опуклої поверхні лінзи визначимо із співвідношення (3.28), яке пов'язує радіус  $r_k$   $k$ -го світлого кільця і радіус  $R$  кривизни лінзи:

$$r_k^2 = R\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right), \quad (3)$$

звідки

$$R = \frac{r_k^2}{\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right)}. \quad (4)$$

Підставляючи в (2), замість  $R$ , його значення із (4), отримаємо:

$$f = \frac{r_k^2}{(n-1)\lambda\left(k - \frac{1}{2}\right)} = \frac{(1,1 \cdot 10^{-3})^2}{(1,6-1)5,89 \cdot 10^{-7}(3-1/2)} \text{ м} = 1,37 \text{ м}. \quad (5)$$

Відповідь:  $f = 1,37$  м.

**Задача 3.5.10.** Пучок білого світла нормально падає на скляну пластинку товщиною  $t = 0,4$  мкм. Показник заломлення скла  $n = 1,5$ . Які довжини хвиль, що лежать в межах видимого діапазону світла ( $4 \cdot 10^{-4} < \lambda < 7 \cdot 10^{-4}$  мм), підсилюються у відбитому світлі?

**Розв'язок:** Для знаходження довжин хвиль, які підсилюються у видимому діапазоні світла, скористаємось умовою (3,23), за якої виникають максимуми (підсилення):

$$2t\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad (1)$$

Оскільки згідно умови задачі  $i_1 = 0$  формула (1) набуде вигляду:

$$2tn = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

звідки

$$\lambda = \frac{4tn}{2k + 1}. \quad (3)$$

Як видно із (3), довжина хвилі  $\lambda$ , яка задовільняє умові (1), визначається числом  $k$ , що набуває значень 0, 1, 2, ... Підставляючи в (3) числові значення величин  $t$  і  $n$  і почергово значення  $k$ , отримаємо:

$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{2 \cdot 0 + 1} \text{ мм} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ мм};$$

$$\lambda_2 = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{2 \cdot 1 + 1} \text{ мм} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ мм};$$

$$\lambda_3 = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{2 \cdot 2 + 1} \text{ мм} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ мм};$$

$$\lambda_4 = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{2 \cdot 3 + 1} \text{ мм} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

**Відповідь:** Із отриманих результатів видно, що тільки світло однієї довжини хвилі ( $\lambda_3 = 4,8 \cdot 10^{-4}$  мм) при відбиванні від скляної пластинки вказаної товщини буде підсилюватися. Така пластинка у відбитому світлі буде голубою.

**Задача 3.5.11.** Як, користуючись явищем кілець Ньютона, можна визначити швидкість поширення світла у воді, знаючи швидкість поширення світла у вакуумі?

**Розв'язок:** Радіус світлого кільця Ньютона, у відбитому світлі, якщо проміжок між поверхнями лінзи і пластинки заповнений повітрям, визначається формулою (3.28):

$$r_k^{нов} = \sqrt{\frac{R\lambda(2k-1)}{2}}. \quad (1)$$

Якщо ж проміжок між поверхнями лінзи і пластинки заповнити водою, то формула (3.28) запишеться так:

$$r_k^a = \sqrt{\frac{R\lambda(2k-1)}{2n}}, \quad (2)$$

де  $n$  – абсолютний показник заломлення води.

Розділимо почленно формулу (1) на (2). Тоді отримаємо:

$$\frac{(r_k^{нов})^2}{(r_k^a)^2} = n. \quad (3)$$

Оскільки  $n = c/v$  (де  $v$  – швидкість поширення світла у воді,  $c$  – швидкість поширення світла у вакуумі), формула (3) набуде вигляду:

$$\frac{(r_k^{нов})^2}{(r_k^a)^2} = \frac{c}{v},$$

звідки

$$v = c \frac{(r_k^a)^2}{(r_k^{нов})^2}. \quad (4)$$

Формула (4) є робочою формулою для розрахунку швидкості поширення світла у воді. Для цього необхідно лише експериментально визначити радіуси  $k$ -их кілець Ньютона у воді і в повітрі.

**Задача 3.5.12.** В інтерферометрі Жамена дві однакові трубки довжиною  $l = 15$  см наповнені повітрям. При заміні однієї із них такою ж трубкою, наповненою киснем, інтерференційна картина змістилась на  $N = 6$  смуг при довжині хвилі падаючого світла  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м. Визначити показник



заломлення кисню  $n_2$ , якщо показник заломлення повітря  $n_1 = 1,000292$ .

**Розв'язок:** При заміні однієї із трубок такою ж трубкою, наповненою киснем, інтерференційна картина зміститься внаслідок появи додаткової різниці ходу:

$$\Delta' = l(n_1 - n_2), \quad (1)$$

де  $l$  – довжина трубок,  $n_1$  – показник заломлення повітря,  $n_2$  – показник заломлення кисню.

З другого боку, додаткова різниця ходу  $\Delta'$  дорівнює:

$$\Delta' = N\lambda, \quad (2)$$

де  $N$  – кількість смуг, на які змістилася інтерференційна картина. Із (1) і (2) маємо:

$$N\lambda = l(n_1 - n_2), \quad (3)$$

звідки

$$n_2 = n_1 - \frac{N\lambda}{l}. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $N = 6$ ;  $l = 0,15 \text{ м}$ ;  $n_1 = 1,000292$ ) і зробивши обрахунки, отримаємо:  $n_2 = 1,000272$ .

**Відповідь:**  $n_2 = 1,000272$ .

**Задача 3.5.13.** Інтерферометр Майкельсона був застосований для визначення довжини світлової хвилі. Для цієї мети вимірювалась відстань, на яку необхідно пересунути одне із дзеркал для того, щоб змістити інтерференційну картину на  $N = 100$  смуг. Ця відстань виявилася рівною

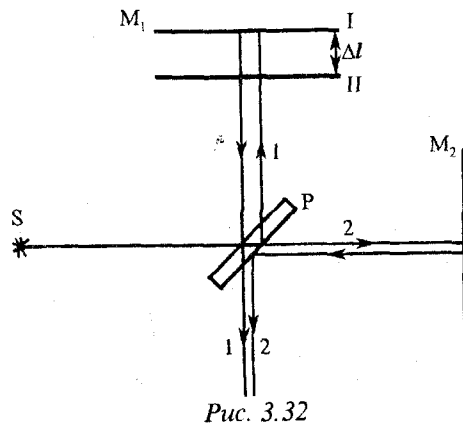


Рис. 3.32

$\Delta l = 2,94 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ . Визначити довжину світлової хвилі  $\lambda$ .

**Розв'язок:** Нехай довжина плечей інтерферометра однакова і рівна  $l$ . Якщо прийняти, що інтерферометр знаходиться в середовищі з показником заломлення  $n = 1$ , то різниця ходу променів 1 і 2 дорівнює  $\Delta = 0$ . При переміщенні дзеркала  $M_1$  із положення I в положення II виникає додаткова різниця ходу  $\Delta'$ , яка дорівнює подвоєній

відстані, на яку переміщено дзеркало  $M_1$  (рис. 3.32):

$$\Delta' = 2\Delta l. \quad (1)$$

Однак

$$\Delta' = N\lambda. \quad (2)$$

Із (1) і (2) маємо:

$$N\lambda = 2\Delta l,$$

звідки

$$\lambda = \frac{2\Delta l}{N} = 5,88 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $\lambda = 5,88 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**Залача 3.5.14.** При освітленні еталона Фабрі-Перо розбіжним пучком монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda$  в фокальній площині лінзи виникає інтерференційна картина – система концентричних кілець (рис. 3.19). Товщина еталона рівна  $t$ . Визначити: 1) де знаходяться смуги вищих порядків – ближче до центра, чи далі від нього? 2) як залежить ширина смуги від порядку інтерференції  $k$ , довжини хвилі  $\lambda$ , товщини еталона  $t$ ?

**Розв'язок:** Умовою максимумів в даному випадку є умова (3.37):

$$2t \cos i = k\lambda, \quad (1)$$

де  $i$  – кут між променем, який виходить із пластинки і нормаллю до неї. Із (1) маємо:

$$k = \frac{2t \cos i}{\lambda}. \quad (2)$$

Аналіз формули (2) показує, що із збільшенням кута  $i$ , тобто радіуса кілець, порядок інтерференції зменшується.

2) Візьмемо диференціал від обох частин рівняння (1) і маючи на увазі, що  $k$  змінюється на одиницю, отримаємо:

$$\delta i = \frac{\lambda}{2t \sin i}. \quad (3)$$

Із (3) видно, що ширина смуг із збільшенням довжини хвилі і порядку інтерференції збільшується, і зменшується при збільшенні товщини еталона.

**Задача 3.5.15.** Смуги різних порядків в пластинці Люммера-Герке розміщуються по обидва боки від пластинки. Визначити: 1) де знаходяться

смуги вищих порядків – ближче до центра чи далше від нього? 2) як залежить ширина смуги від порядку інтерференції  $k$ , довжини світлової хвилі  $\lambda$ , товщини пластинки  $t$ ?

**Розв'язок:** Скористаємось умовою інтерференційного максимуму  $k$ -го порядку (3.40):

$$2t\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} = k\lambda, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – кут між поверхнею пластинки і променем, що виходить із пластинки,  $k$  – порядок інтерференції (рис. 3.20). Із (1) отримуємо:

$$k = \frac{2t\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}{\lambda}. \quad (2)$$

Із формули (2) випливає, що із збільшенням кута  $\alpha$  порядок смуги зростає, тобто із збільшенням порядку смуги віддаляються від пластинки.

2) Як і в попередній задачі продиференціюємо обидві частини рівняння (1) і, маючи на увазі, що  $k$  змінюється на одиницю, а при малих  $\alpha$   $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , отримаємо:

$$\delta \alpha = \frac{\lambda \sqrt{n^2 - 1}}{2t\alpha}. \quad (3)$$

З (3) видно, що ширина смуг збільшується із довжиною хвилі  $\lambda$  і зменшується при збільшенні товщини пластинки і порядку інтерференції.

### 3.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми III

**3.6.1.** У якому випадку дві електромагнітні хвилі однакової частоти додаються завжди (тобто при будь-яких фазових співвідношеннях) так, що інтенсивність результуючого коливання  $I$  дорівнює сумі інтенсивностей вихідних коливань  $I_1$  і  $I_2$ ?

**3.6.2.** Відстань між точковими джерелами світла рівна  $t = \lambda/4$ , а випромінювані ними хвилі мають різницю фаз  $\delta = \pi/2$ , і кожна з них має інтенсивність  $I_0$ . Знайти розподіл інтенсивності в інтерференційній картині.

$$\text{Відповідь: } I = 2I_0 \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi}{2} \sin \theta \right) \right].$$

**3.6.3.** На якій мінімальній відстані повинні знаходитися щілини в досліді Юнга для того, щоб спостерігати інтерференційну картину від випромінювання Сонця? Кутовий розмір Сонця  $\varphi = 32'$ . Довжину хвилі вважати рівною  $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$ .

**Відповідь:**  $t_{\min} = 0,03 \text{ мм}$ .

**3.6.4.** Знайти розподіл інтенсивності  $I(l)$  на екрані в установці із дзеркалами Френеля (див. рис. 3.3), вважаючи щілину  $S$  нескінченно вузькою. Скільки інтерференційних смуг  $N$  можна спостерігати на екрані?

$$\text{Відповідь: } I(l) = 4I_0 \cos^2 \left[ \frac{4\pi r \varphi}{\lambda(r + L_0)} l \right]; \quad N = \frac{4\varphi^2 r L_0}{\lambda(L_0 + r)}.$$

**3.6.5.** Яка черговість кольорів в досліді із дзеркалами Френеля, якщо на дзеркала падає біле світло?

**3.6.6.** При освітленні дзеркал Френеля монохроматичним світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 486 \text{ нм}$  на екрані, який розміщений на відстані  $L_0 = 1 \text{ м}$  від лінії перетину дзеркал, спостерігаються інтерференційні смуги, ширина яких рівна  $\Delta l = 1 \text{ мм}$ . Джерело світла знаходиться на відстані  $r = 10 \text{ см}$  від лінії перетину дзеркал. Визначити кут  $\varphi$  між дзеркалами.

**Відповідь:**  $\varphi \approx 9,2'$ .

**3.6.7.** Визначити відстань між центральною і п'ятою світлими смугами, якщо кут між дзеркалами Френеля  $\varphi = 20'$ . Джерело світла ( $\lambda = 589 \text{ нм}$ ) знаходиться від лінії перетину дзеркал на відстані  $r = 10 \text{ см}$ , а екран на відстані  $L_0 = 1 \text{ м}$ .

**Відповідь:**  $l = 2,78 \text{ мм}$ .

**3.6.8.** Дзеркала Френеля утворюють кут  $\alpha = 1'$ . На них падає світло від щілини, яка міститься на відстані  $r = 10 \text{ см}$  від лінії перетину дзеркал. Екран розміщено на відстані  $L_0 = 1 \text{ м}$  від стику дзеркал. Визначити найбільшу ширину щілини, при якій ще може спостерігатися інтерференційна картина. Щілина освітлюється світлом з  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**Відповідь:**  $d \leq 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

**3.6.9.** Біпризма Френеля з малим заломним кутом  $\varphi$  розміщена на відстані  $r$  від джерела і на відстані  $L_0$  від екрана. Показник заломлення речовини біпризми  $n$ , довжина хвилі світла  $\lambda$ . Знайти відстань  $l_k$  до  $k$ -ої світлої смуги на екрані, відстань між світлими смугами  $\Delta l$ , ширину інтерференційної картини, число смуг інтерференції та ширину щілини, при якій ще можлива інтерференція.

**Відповідь:**  $l_k = k \frac{L_0 + r}{2r(n-1)\varphi} \lambda$ ;  $\Delta l = \frac{L_0 + r}{2r(n-1)\varphi} \lambda$ ;  $AB = 2L_0(n-1)\varphi$ ;

$$N = \frac{4L_0r(n-1)^2\varphi^2}{(L_0+r)\lambda}; \quad d = \frac{\lambda(L_0+r)}{4r(n-1)\varphi}$$

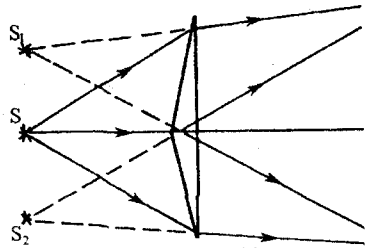


Рис. 3.33

**3.6.10.** Як потрібно розмістити збиральну лінзу в досліді з біпризмою (рис. 3.33), щоб ширина інтерференційних смуг  $\Delta l$  не залежала від положення екрана. Знайти  $\Delta l$  та максимальне число  $N$  смуг, яке може спостерігатися в цій установці, якщо екран спостереження знаходиться від біпризми на відстані  $L_0$ .

**Відповідь:**  $\Delta l = \frac{\lambda}{2(n-1)\varphi}$ ;  $N = \frac{4L_0(n-1)^2\varphi^2}{\lambda}$ .

**3.6.11.** При якій відстані  $L_0$  екрана від біпризми в попередній задачі число  $N$  інтерференційних смуг буде максимальним, якщо відстань між вершинами біпризми дорівнює  $Y$ . Знайти  $N_{max}$ . При якому положенні екрана смуги зникнуть?

**Відповідь:**  $L_0 = \frac{Y}{4(n-1)\varphi}$ ;  $N_{max} = \frac{4L_0(n-1)^2\varphi^2}{\lambda}$ ; смуги зникнуть при

віддаленні екрана від біпризми на відстань  $L \geq 2L_0$ .

**3.6.12.** В досліді з біпризмою Френеля екран спостереження розміщений перпендикулярно до осі установки. Нульова смуга отримується в центрі

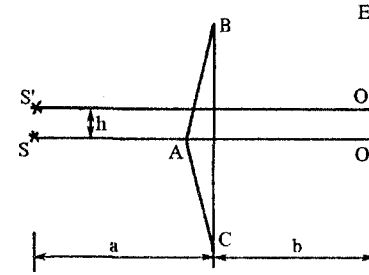


Рис. 3.34

екрана (точка  $O$ ). В який бік і на яку величину  $l$  зміститься нульова смуга, якщо світну щілину змістити в бік на величину  $h$  перпендикулярно до осі установки? (рис.3.34).

**Відповідь:** вниз на  $l = \frac{hb}{a}$ .

**3.6.13.** Тонка збиральна лінза розрізана на дві половинки, які розсунуті на відстань  $d = 1$  мм. З одного боку від лінзи знаходиться джерело монохроматичного світла (нагріта нитка з фільтром), а з другого – екран, на якому отримують інтерференційні смуги. а) Пояснити походження смуг. б) Визначити ширину інтерференційних смуг, якщо джерело світла знаходиться на відстані  $L_0 = 450$  см. Фокусна відстань лінзи  $f = 10$  см. Довжина світлової хвилі  $\lambda = 500$  нм. в) Яким повинен бути діаметр нитки, щоб спостерігалась інтерференційна картина? г) Скільки інтерференційних смуг видно на екрані?  $a = 20$  см,  $L_0 = 450$  см

**Відповідь:** б)  $\Delta l = 1,1$  нм; в)  $d \leq 5,5 \cdot 10^{-2}$  см; г)  $N = 21$ .

**3.6.14.** Із лінзи з фокусною відстанню  $f = 50$  см вирізали центральну частину шириною  $d$  і обидві половинки зсунули до дотику. Лінзу помістили між точковим джерелом монохроматичного світла ( $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м) і екраном, на якому спостерігаються інтерференційні смуги шириною  $\Delta l = 0,5$  мм. Побудувати зображення джерела і визначити ширину  $d$  вирізаної частини лінзи. Відстань від джерела до лінзи  $a = 100$  см, від лінзи до екрана  $L_0 = 20$  см.

**Відповідь:**  $d = 0,48$  мм.

**3.6.15.** Білінза Бйє виготовлена із лінзи з фокусною відстанню  $f = 15$  см, а її половинки розсунуті на відстань  $d = 1$  мм одна від одної. Джерелом світла є щілина, яка розміщена на відстані  $a = 30$  см від білінзи, а екран від білінзи знаходиться на відстані  $b = 5$  м. Довжина хвилі світла  $\lambda = 0,55$  мкм. Знайти: а) відстань між інтерференційними смугами; б) ширину інтерференційної картини на екрані; в) кількість смуг  $N$  інтерференції.

Відповідь:  $\Delta l = 1,9 \text{ мм}$ ;  $AB = 1,77 \text{ см}$ ;  $N = 9$ .

3.6.16. На рис. 3.35 зображена інтерференційна схема досліду Ллойда. Точкове джерело світла  $S$  розміщене на відстані  $b = 20 \text{ см}$  від плоского дзеркала на висоті  $l = 10 \text{ см}$  над його площиною. Довжина дзеркала  $l = 10 \text{ см}$ . На відстані  $L = 1 \text{ м}$  від джерела розміщений екран  $E$ . Визначити розмір інтерференційної картини  $AB$  на екрані.

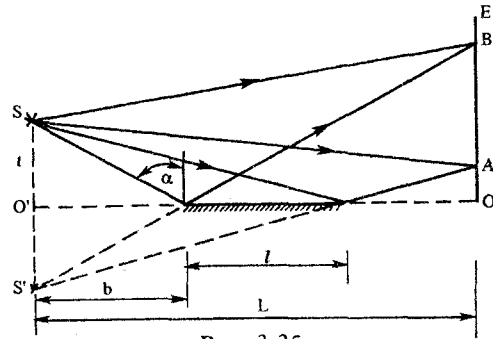


Рис. 3.35

Відповідь:  $AB = \frac{Ltl}{b(b+l)} = 16,6 \text{ см}$ .

3.6.17. В установці з дзеркалом Ллойда інтерференційні смуги спостерігаються на екрані, встановленого на відстані  $L_0 = 2 \text{ м}$  від правого кінця дзеркала. Довжина дзеркала  $l = 10 \text{ см}$ . Джерело світла ( $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ ) міститься на висоті  $l = 0,2 \text{ м}$  від площини дзеркала так, що промінь світла падає на його лівий край під кутом  $\alpha = 15^\circ$ . Визначити максимальне число смуг, які спостерігаються на екрані.

Відповідь:  $N = 23023$  смуг.

3.6.18. Між двома плоскими паралельними дзеркалами розміщено джерело світла (електрична лампочка). На екрані після включення лампочки появляються світлі і темні смуги. Зарисувати схему досліду і пояснити явище.

3.6.19. Смуги рівного нахилу спостерігаються у відбитому світлі з

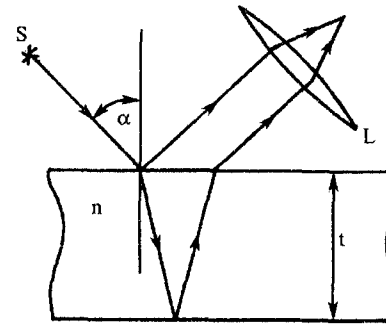


Рис. 3.36

довжиною хвилі  $\lambda$ , яке відбивається від поверхонь плоскопаралельної пластинки товщиною  $t$  (рис. 3.36). Знайти кутовий радіус  $k$ -ого від центра світлого кільця. Центр кільця світлий.

Відповідь:

$$\alpha_k = \arcsin \sqrt{n^2 - \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{4t^2}}$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  – показник заломлення

пластинки.

3.6.20. На плоскій пластинці лежить циліндрична збиральна лінза опуклою частиною до пластини (рис. 3.37). Яку форму мають інтерференційні смуги і як по мірі віддалення від лінзи з пластинкою мінятиметься відстань між смугами і їх ширина?

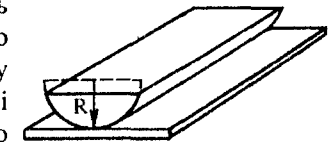


Рис. 3.37

3.6.21. Дві циліндричні лінзи покладали опуклими частинами одна на одну так, щоб їх твірні утворювали прямий кут. Яку форму мають інтерференційні смуги і як з віддаленням від точки дотику буде мінятися їх ширина і відстань між ними.

3.6.22. Плоско-опукла лінза з радіусом кривизни  $R_1$  лежить на відбиваючій опуклій поверхні циліндричної лінзи, радіус кривизни якої рівний  $R_2$ . Лінзу освітлюють зверху. Яку форму мають інтерференційні смуги і як з віддаленням від точки дотику лінз змінюватиметься відстань між смугами і їх ширина.

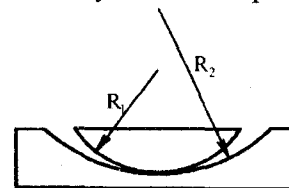


Рис. 3.38

3.6.23. Кільця Ньютона отримуються за допомогою плоско-опуклої лінзи з радіусом кривизни  $R_1$ , покладеної на вгнуту сферичну поверхню з радіусом кривизни  $R_2 > R_1$  (рис. 3.38). Кільця спостерігаються у відбитому світлі.

Визначити радіус  $r_k$   $k$ -ого темного кільця, якщо довжина світлової хвилі рівна  $\lambda$ .

Відповідь:  $r_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}}$ .

**3.6.24.** Лінза із крону ( $n = 1,50$ ) лежить на пластинці, одна половинка якої виготовлена із того ж крону, а друга – із флінта з показником заломлення 1,75. Прошарок між пластинкою і лінзою заповнений сірководнем ( $n = 1,62$ ) (рис.3.39). Описати розміщення кілець, які утворюються внаслідок інтерференції.

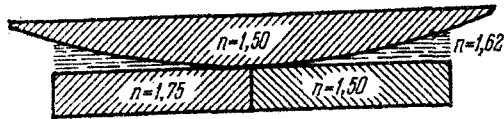


Рис. 3.39

Відповідь: Темні кільця над кроном зійдуться із світлими півкільцями над флінтом, і навпаки.

**3.6.25.** На шляху одного із променів в досліді Юнга поставлена трубка з плоскопаралельними скляними торцями довжиною  $l = 2$  см. При заповненні трубки хлором вся інтерференційна картина на екрані зміщується на  $N = 20$  смуг. Вирахувати показник заломлення хлору, вважаючи, що показник заломлення повітря  $n_{\text{пов.}} = 1,000292$ , довжина хвилі світла, що випромінюється джерелом,  $\lambda = 589$  нм.

Відповідь:  $n_{Cl} = 1,0003509$ .

**3.6.26.** На скляний клин нормально падає пучок світла ( $\lambda = 5,82 \cdot 10^{-7}$  м). Кут клина рівний  $\varphi = 20'$ . Яке число темних інтерференційних смуг припадає на одиницю довжини клина? Показник заломлення скла рівний  $n = 1,5$ .

Відповідь:  $N = 6 \text{ см}^{-1}$ .

**3.6.27.** Промені, які падають під кутом  $i = 49^\circ$  на пластинку інтерферометра Жамена з товщиною  $t = 2$  см і показником заломлення  $n = 1,51$ , дають

максимум 5-ого порядку для  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . Визначити кут між пластинками.

Відповідь:  $\theta \approx 0,6^\circ$ .

**3.6.28.** Як зміниться розмір інтерференційних кілець при заміні повітряного прошарку в еталоні Фабрі-Перо на скляний ( $n = 1,5$ )?

Відповідь: радіуси кілець збільшаться у відношенні  $\frac{\text{tgi}}{\text{tgr}}$ .

**3.6.29.** Як зміниться інтерференційна картина, яка створюється пластинкою Льюмера-Герке із крону ( $n = 1,50$ ), якщо одна поверхня її занурена у сірководень ( $n = 1,75$ )?

Відповідь: картина зміститься на 0,5 смуги.

**3.6.30.** На поверхню скляного об'єктива ( $n_0 = 1,5$ ) нанесена тонка плівка, показник заломлення якої  $n = 1,2$ . При якій найменшій товщині цієї плівки відбудеться максимальне послаблення відбитого світла в середній частині видимого спектра?

Відповідь:  $t = 1,14 \text{ \AA}$ .

**3.6.31.** Який показник заломлення  $n$  повинен мати матеріал для просвітлюючого покриття на поверхні скла з показником заломлення  $n = 1,52$ ?

Відповідь:  $n = 1,23$ .

**3.6.32.** З метою зменшення або підвищення доли відбитого світла від поверхні скла, на неї наносять тонку плівку, показник заломлення якої більший або менший від показника заломлення скла (просвітлення оптики). Пучок білого світла ( $400 \text{ нм} < \lambda \leq 700 \text{ нм}$ ) падає нормально на нанесену на скло плівку. Показник заломлення плівки  $n = 4/3$ , а її товщина  $t = 600 \text{ нм}$ . При яких довжинах хвиль відбите світло максимально послаблюється?

Відповідь:  $\lambda_1 = 640 \text{ нм}$ ;  $\lambda_2 = 457 \text{ нм}$ .

## ТЕМА IV ДИФРАКЦІЯ СВІТЛА

### 4.1. Програмні питання

Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля. Зональна пластинка. Найпростіші дифракційні проблеми.

Дифракція на щілині, на двох щілинах, дифракційна решітка. Дисперсія та роздільна здатність дифракційної решітки.

Дифракція на багатовимірних структурах. Дифракція рентгенівських променів.

Порівняльні характеристики спектральних апаратів.

### 4.2. Основні поняття, закони і формули

Дифракція світла – це огинання світловими хвилями перешкод (заходження світлових хвиль в область геометричної тіні).

#### ① 4.2.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

1. Кожна точка світлової поверхні (сфери) є самостійним джерелом вторинних хвиль, які поширюються із швидкістю світла.

2. Вторинні джерела еквівалентні первинному і вони когерентні.

#### 4.2.2. Метод зон Френеля

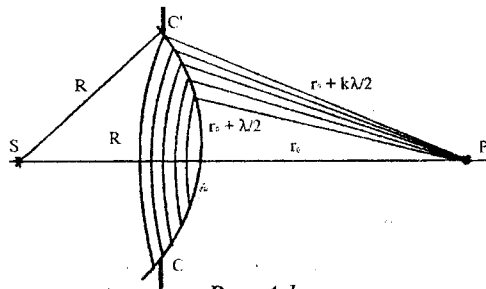


Рис. 4.1

Вільна частина хвильового фронту розбивається на зони так, щоб різниця відстаней від країв двох сусідніх зон до точки P була рівна  $\lambda/2$  (рис. 4.1). Тобто

$$r_k = r_0 + \frac{k\lambda}{2}. \quad (4.1)$$

Результуюча амплітуда в точці P

$$A_P = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2}, \quad (4.2)$$

де  $a_1$  і  $a_k$  – відповідно амплітуди коливань, які доходять до точки P від 1-ої і k-ої зон Френеля, знак “+” береться коли k непарне, “-” – коли k парне.

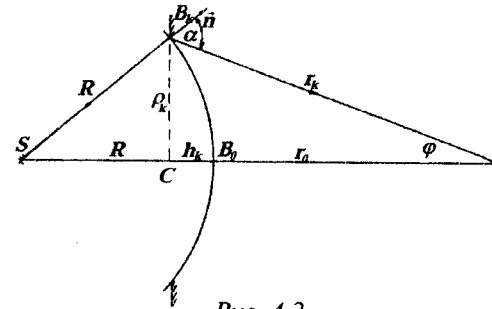


Рис. 4.2

Радіус k-ої зони Френеля  $\rho_k$

(рис. 4.2):

– для сферичного фронту хвилі

$$\rho_k = \sqrt{k \frac{Rr_0}{R+r_0} \lambda}, \quad (4.3)$$

– для плоского фронту хвилі

$$\rho_k = \sqrt{kr_0 \lambda}, \quad (4.4)$$

де R і  $r_0$  – відповідно відстані від джерела до отвору, і від отвору до точки спостереження,  $k = 1, 2, 3, \dots$  – ціле число (номер зони Френеля),  $\lambda$  – довжина світлової хвилі.

4.2.3. Зональна пластинка – це екран, за допомогою якого можна в точці P (рис. 4.2) багато разів підсилити інтенсивність світла.

Фокусні відстані зональної пластинки:

– для основного фокуса

$$f = \frac{\rho_k^2}{k\lambda}, \quad (4.5)$$

– для фокусів вищих порядків

$$f_n = \frac{f}{2n+1}, \quad (4.6)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$  – цілі числа,  $\rho_k$  – радіус k-ої зони Френеля,  $\lambda$  – довжина світлової хвилі (див. [1], § 3.4).

Від'ємним значенням n відповідають розбіжні хвилі і уявні фокуси, які розміщені перед пластинкою, тобто збоку джерела.

Для зональної пластинки справедливе співвідношення:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}. \quad (4.7)$$

**4.2.4. Дифракційні явища Френеля** – це клас дифракційних явищ, коли дифракційна картина спостерігається на скінченній відстані від екранів, які обмежують падаючу хвилю.

**Дифракція на круглому отворі**

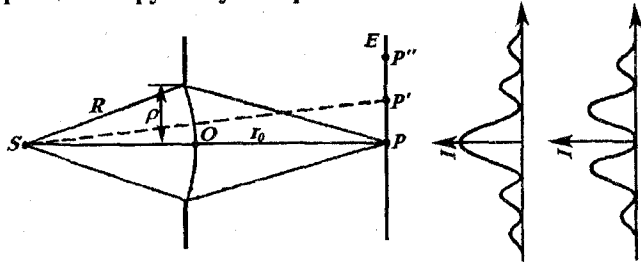


Рис. 4.4

Амплітуда коливань в точці P

$$A_p = \frac{a_1 \pm a_k}{2}, \quad (4.8)$$

де  $a_1$  і  $a_k$  – відповідно амплітуди коливань, які доходять до точки P від 1-ої і k-ої зон Френеля, знак “+” береться коли k непарне, “-” – коли k парне.

Екран з отвором, який відкриває невелике непарне число зон Френеля, не послаблює світло в точці P, а навпаки, призводить до збільшення амплітуди майже в два рази, а інтенсивності майже в чотири рази.

**Дифракція на круглому непрозорому екрані**

Амплітуда коливань в точці P

$$A_p = \frac{a_{k+1}}{2}, \quad (4.9)$$

де  $a_{k+1}$  – амплітуда коливань, яка приходить від першої (k+1) – ої відкритої зони Френеля в точку P.

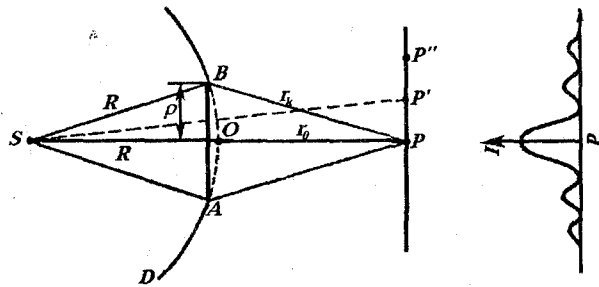


Рис. 4.5

Незалежно від розмірів і положення непрозорого екрана в центрі його

геометричної тіні (в точці P) завжди буде світла пляма (максимум). Від значення k залежить лише її інтенсивність.

**4.2.5. Дифракційні явища Фраунгофера** відповідають випадку, коли дифракційна картина локалізується на нескінченній відстані від екранів, які обмежують падаючу хвилю. Цей вид дифракції відбувається в паралельних пучках із застосуванням оптичних інструментів.

**Дифракція на одній щілині**

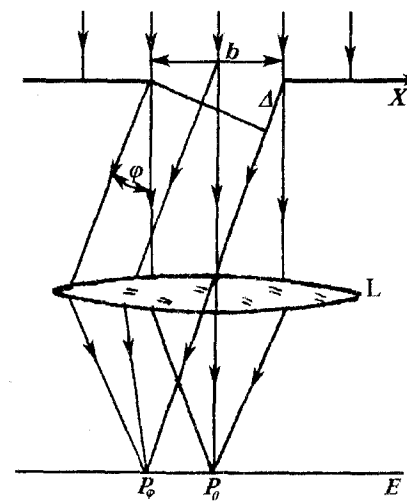


Рис. 4.6

Функція розподілу інтенсивності на екрані від кута дифракції:

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}, \quad (4.10)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючої на щілину світлової хвилі,  $u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$ ,

b – ширина щілини,  $\varphi$  – кут дифракції.

Умова дифракційних максимумів:

$$b \sin \varphi = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

Умова мінімумів:

$$b \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

Похиłe падіння променів на щілину

Умова дифракційних максимумів:

$$b(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (4.13)$$

Умова мінімумів:

$$b(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = k \lambda, \quad (4.14)$$

де  $\varphi_0$  – кут падіння,  $\varphi$  – кут дифракції, b – ширина щілини.

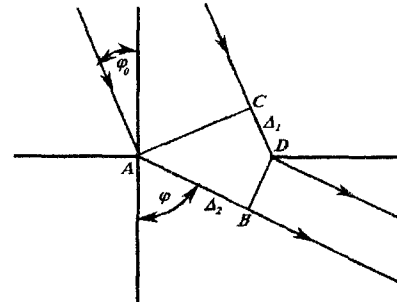


Рис. 4.7

Дифракція на круглому отворі

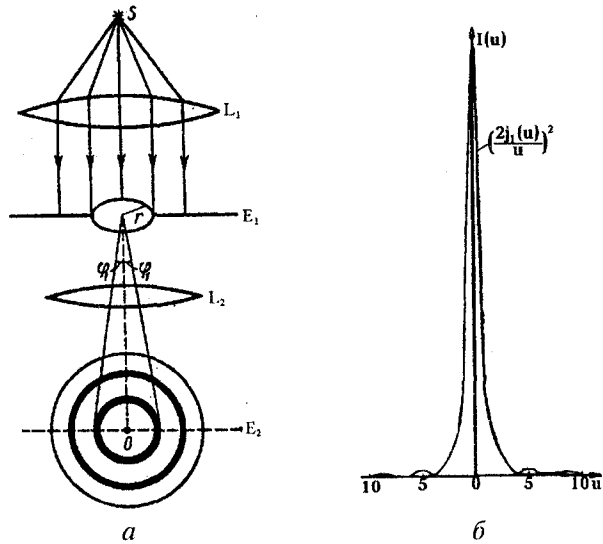


Рис. 4.8

Таблиця 4.1

Кутові радіуси темних і світлих кілець і їх відносні інтенсивності

Темні кільця	Світлі кільця	Інтенсивність в максимумах
$\sin \varphi_1 = 0,61 \frac{\lambda}{r}$	$\sin \varphi'_1 = 0$	1,00
$\sin \varphi_2 = 1,12 \frac{\lambda}{r}$	$\sin \varphi'_2 = 0,81 \frac{\lambda}{2}$	0,0175
$\sin \varphi_3 = 1,62 \frac{\lambda}{r}$	$\sin \varphi'_3 = 1,33 \frac{\lambda}{2}$	0,0042
$\sin \varphi_4 = 2,12 \frac{\lambda}{r}$	$\sin \varphi'_4 = 1,85 \frac{\lambda}{2}$	0,0016

Тут  $r$  – радіус отвору.

Дифракція на двох щілинах

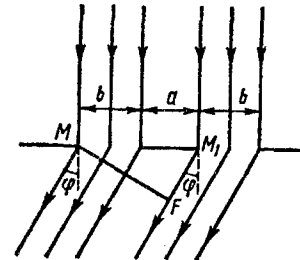


Рис. 4.9

Функція розподілу інтенсивності на екрані від кута дифракції:

5 
$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cos^2 V, \quad (4.15)$$

де  $u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi$ ,  $V = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi$ ,  $I_0$  – інтенсивність падаючого на щілину світла,  $\varphi$  – кут дифракції.

Умова мінімумів:

6 
$$d \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots (4.16)$$

Умова головних максимумів:

7 
$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots (4.17)$$

Кількість головних максимумів

8 
$$n = 2 \frac{a}{b} + 1, \quad (4.18)$$

де  $b$  – ширина щілини,  $a$  – відстань між щілинами,  $d = a + b$ .

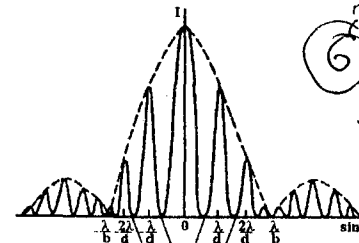


Рис. 4.10

Дифракційна решітка

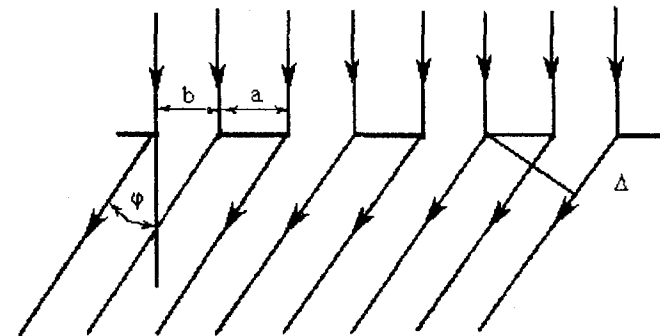


Рис. 4.11

Функція розподілу інтенсивності на екрані від кута дифракції:



$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u \sin^2 NV}{u^2 \sin^2 V}, \quad (4.19)$$

де  $u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi$ ,  $V = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi$ ,  $N$  – кількість щілин,  $I_0$  – інтенсивність падаючого на решітку світла,  $\varphi$  – кут дифракції.

Умова головних максимумів:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.20)$$

Максимальні значення інтенсивності головних максимумів:

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} N^2. \quad (4.21)$$

Інтенсивність нульового (центрального) максимуму:

$$I_{\varphi=0} = I_0 N^2. \quad (4.22)$$

Умова мінімумів:

$$d \sin \varphi = \left(k + \frac{P}{N}\right) \lambda, \quad (4.23)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad P = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm(N-1).$$

Умова головних максимумів при похилому падінні світла на:

а) прозору дифракційну решітку (рис.4.12)

$$d(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_k) = k\lambda, \quad d(\varphi_0 - \varphi) = k\lambda, \quad (4.24)$$

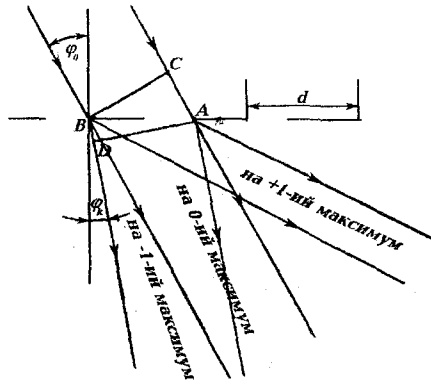


Рис. 4.12

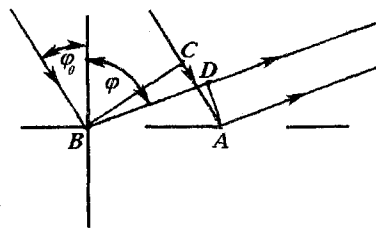


Рис. 4.13

в) відбивну дифракційну решітку (рис.4.13)

$$d \cos \varphi_0 (\varphi_0 - \varphi_k) = k\lambda, \quad (4.25)$$

де  $d$  – стала дифракційної решітки,  $\varphi_0$  – кут падіння,  $\varphi_k$  – напрямок на головний максимум  $k$ -ого порядку,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Дифракція на двовимірних решітках

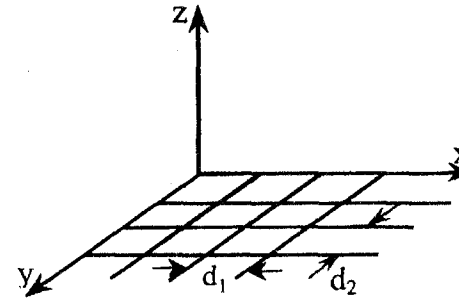


Рис. 4.14

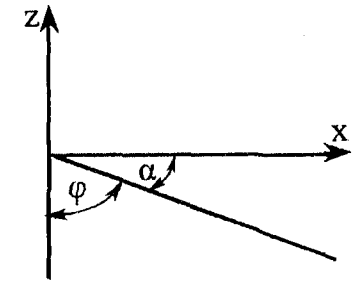


Рис. 4.15

Умови головних максимумів:

$$\begin{cases} d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda, \\ d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda, \end{cases} \quad (4.26)$$

де  $d_1$  і  $d_2$  – відповідно періоди решітки в напрямках осей  $X$  і  $Y$ ,  $\alpha_0, \beta_0$  – відповідно кути між падаючими променями і осями  $X$  і  $Y$ ,  $\alpha$  і  $\beta$  – відповідно кути між дифрагуючими променями і осями  $X$  і  $Y$ ,  $k_1$  і  $k_2$  – сталі цілі числа,  $\lambda$  – довжина хвилі.

Дифракція на тривимірних решітках

Умова головних максимумів (рис. 4.16):

$$\begin{cases} d_1(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda, \\ d_2(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda, \\ d_3(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = k_3 \lambda, \end{cases} \quad (4.27)$$

де  $k_1, k_2, k_3$  – сталі цілі числа,  $\gamma_0$  і  $\gamma$  – кути між віссю  $Z$  і відповідно падаючими і дифрагуючими променями.

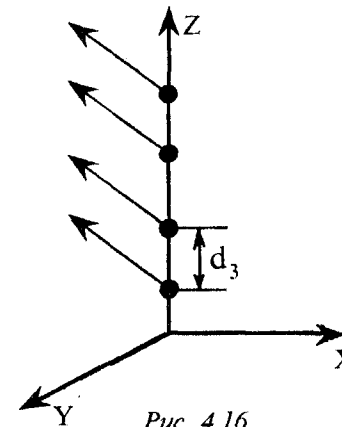


Рис. 4.16

### 4.2.6. Порівняльні характеристики спектральних приладів

Кутова дисперсія  $D_\varphi$  – визначає, як швидко змінюється кутова відстань між двома спектральними лініями при зміні довжини хвилі:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (4.29)$$

Лінійна дисперсія  $D_l$ , визначає, як швидко змінюється лінійна відстань між двома спектральними лініями при зміні довжини хвилі:

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda} \quad (4.30)$$

Роздільна здатність (сила)  $R$  спектрального приладу

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (4.31)$$

де  $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$  – найменша різниця довжин хвиль двох близьких спектральних ліній, при якій вони ще розрізняються.

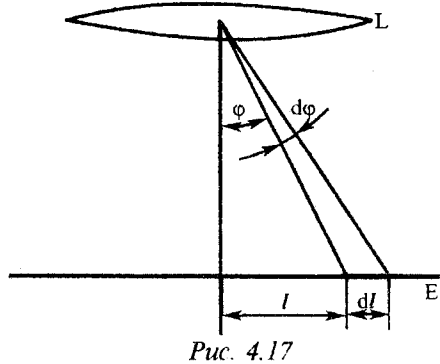


Рис. 4.17

Критерій Релея: дві спектральні лінії однакової інтенсивності із однаковими симетричними контурами можна вважати розділеними, якщо кутова відстань  $d\varphi$  між ними дорівнює кутовій відстані  $d\varphi'$  між головним максимумом і найближчим до нього мінімумом (рис. 4.18).

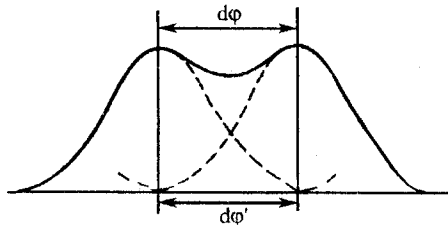


Рис. 4.18

Амплітудна дифракційна решітка

Кутова дисперсія

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} k N_0 = k \frac{N}{l} \quad (4.32)$$

Лінійна дисперсія

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda} = f \frac{k}{d} = f k N_0 \quad (4.33)$$

Роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN = \frac{l \sin \varphi}{\lambda} \quad (4.34)$$

Максимальна роздільна здатність

$$R_{\max} \leq \frac{l}{\lambda}, \quad (4.34, a)$$

де  $k$  – порядок спектра,  $N$  – число щілин решітки,  $N_0$  – число щілин на одиниці довжини решітки,  $l$  – довжина робочої ділянки спектра,  $f$  – фокусна відстань лінзи (об'єктива),  $\varphi$  – кут дифракції.

Фазова дифракційна решітка (ешелон Майкельсона)

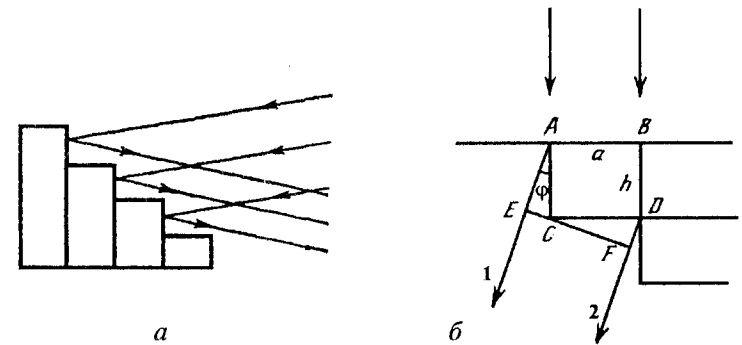


Рис. 4.19

Кутова дисперсія

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{h(n-1)}{a\lambda}, \quad (4.35)$$

Роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN, \quad (4.36)$$

де  $k$  – порядок спектра,  $h$  – товщина пластинки,  $a$  – довжина виступу пластинки,  $n$  – показник заломлення пластинки (скла),  $N$  – число пластинок.

Інтерферометр Фабрі-Перо

Кутова дисперсія

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{2t \sin \varphi} \approx \frac{1}{\lambda \varphi}, \quad (4.37)$$

Роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2\pi k \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}} = kN, \quad (4.38)$$

де  $t$  – відстань між пластинками (дзеркалами),  $\varphi$  – кут між променем, що

виходить із пластинки і нормаллю до неї,  $N = 2\pi \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{1-\mathcal{R}}$  – кількість

інтерферуючих пучків,  $\mathcal{R}$  – коефіцієнт відбиття,  $k$  – порядок спектра.

**Пластинка Льюмера-Герке**

Кутова дисперсія

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{\sqrt{4t^2 n^2 - k^2 \lambda^2}}. \quad (4.39)$$

Роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = L \left( \frac{n^2 - 1}{\lambda} - n \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (4.40)$$

де  $t$  – товщина пластинки,  $k$  – порядок спектра,  $n$  – показник заломлення

пластинки,  $L$  – довжина пластинки,  $\frac{dn}{d\lambda}$  – дисперсія показника заломлення.

Таблиця 4.2

### Характеристики окремих спектральних апаратів

Назва спектрального апарату	k	N	R	$\delta\lambda$
Дифракційна решітка	3	$10^5$	$3 \cdot 10^5$	0,017
Ешелон Майкельсона	$10^4$	30	$3 \cdot 10^5$	0,017
Пластинка Льюмера-Герке	$5 \cdot 10^4$	10	$3 \cdot 10^5$	0,01
Еталон Фабрі-Перо $t = 25 \text{ см}, R = 0,9$	$10^5$	30	$3 \cdot 10^6$	0,0017

### 4.3. Контрольні запитання

4.3.1. Сформулюйте принцип Гюйгенса-Френеля.

4.3.2. З'ясуйте суть методу зон Френеля.

4.3.3. Виведіть формулу для визначення радіуса  $\rho_k$   $k$ -ої зони Френеля.

4.3.4. Як, користуючись методом зон Френеля, знайти результуючу амплітуду світлової хвилі в точці  $P$  на прямій, яка проходить через точкове джерело і центр круглої діафрагми, перпендикулярної до даної прямої.

4.3.5. Покажіть, що зональна пластинка володіє не одним, а декількома фокусами. Скільки цих фокусів? Як знайти положення фокусів зональної пластинки? У скільки разів інтенсивність світла в головному фокусі зональної пластинки більша, ніж у фокусі  $n$ -ого порядку?

4.3.6. Покажіть, що при дифракції від круглого екрана в центрі дифракційної картини завжди світла смуга (смуга Пуассона)? Від чого залежить її інтенсивність?

4.3.7. Як виглядатиме дифракційна картина, якщо круглий отвір або непрозорий екран будуть достатньо великі? Чому так?

4.3.8. Як впливають на дифракційну картину немонохроматичність і розміри джерела.

4.3.9. З'ясуйте умови виникнення максимумів і мінімумів при дифракції на одній щілині.

4.3.10. Як міняється дифракційна картина на екрані спостереження, якщо: ширину щілини збільшувати (зменшувати); довжину хвилі збільшувати (зменшувати)?

4.3.11. Як зміниться дифракційна картина, що виникає від однієї щілини, якщо всю установку помістити замість повітря у: а) воду; б) вакуум?

4.3.12. Який вигляд має дифракційна картина при похилому падінні плоскої світлової хвилі на щілину? Чим вона відрізняється від дифракційної картини, яка виникає при нормальному падінні світла на щілину?

4.3.13. З'ясуйте суть і характер дифракції світла на двох щілинах; відмінність дифракційних картин від однієї і від двох щілин.

4.3.14. Як змінюватиметься дифракційна картина від двох щілин при зміні: а) довжини хвилі; б) відстані між щілинами; в) ширини щілини.

4.3.15. Як мінятиметься характер дифракційної картини, якщо до двох щілин додати третю, четверту, і т.д. щілину?

4.3.16. З'ясуйте умови максимумів інтенсивності світла на одновиірній дифракційній решітці.

4.3.17. В чому перевага спектрів низьких порядків при використанні решітки в якості диспергуючого елемента?

**4.3.18.** При якому співвідношенні ширини щілини  $b$  і періоду решітки  $d$  в дифракційній картині буде відсутній спектр другого порядку?

**4.3.19.** Знайти умови рівності нулю інтенсивності  $k$ -ого максимуму для дифракційної решітки з періодом  $d$  і шириною щілини  $b$ .

**4.3.20.** Чому порядок дифракційного спектра обмежений?

**4.3.21.** Якщо дифракційну решітку освітлювати білим світлом, то дифракційна картина за решіткою буде являти собою сукупність чергування максимумів хвиль різної довжини, тобто отримується спектр, що нагадує спектр, одержаний за допомогою призми. Чим вірізняється дифракційний спектр від дисперсійного, одержаного за допомогою призми?

**4.3.22.** Який максимальний порядок спектра може спостерігатися при дифракції світла з довжиною хвилі  $\lambda$  на решітці з періодом  $d$ ?

**4.3.23.** Опишіть характер спектрів дифракційної решітки, якщо її стала рівна 1)  $2b$ , 2)  $3b$ , 3)  $4b$ , (де  $b$  – ширина щілини).

**4.3.24.** Чому в центральній частині спектра, що виникає на екрані під час освітлення дифракційної решітки білим світлом, завжди помітно білу смугу?

**4.3.25.** Чому в дифракційному спектрі максимуми другого порядку яскравіші за максимуми третього порядку і т.д.?

**4.3.26.** З'ясуйте умови виникнення головних максимумів (мінімумів) та характер розподілу інтенсивності світла при дифракції на двовимірній решітці.

**4.3.27.** З'ясуйте умови виникнення головних максимумів (мінімумів) та характер розподілу інтенсивності світла при дифракції на тривимірній решітці.

**4.3.28.** З'ясуйте умови дифракції рентгенівських променів на кристалічній ґратці.

**4.3.29.** З'ясуйте фізичний зміст кутової дисперсії та роздільної здатності дифракційної решітки.

**4.3.30.** Як зміниться дифракційна картина, яка отримана за допомогою дифракційної решітки, якщо:

- збільшити сталу решітки, не змінюючи загального числа штрихів;
- збільшити загальне число штрихів, не змінюючи сталої решітки;
- збільшити ширину щілин, залишивши незмінним сталу решітки і число штрихів.

**4.3.31.** Чому рівна роздільна здатність дифракційної решітки з  $N$  штрихами в спектрі  $k$ -ого порядку? Яким параметром решітки визначається найбільша роздільна здатність для довжини хвилі  $\lambda$ ?

**4.3.32.** В чому перевага дифракційної решітки: а) з великим числом щілин; б) з малим періодом решітки?

**4.3.33.** Діаметр атомів порядку  $10^{-8}$  см. Чи можна, використовуючи видиме світло, візуально спостерігати атом? Пояснити, чому можна чи чому не можна?

**4.3.34.** Світло з довжинами хвиль від  $4 \cdot 10^{-7}$  до  $7 \cdot 10^{-7}$  м падає нормально на решітку. В яких порядках (якщо такі існують) може відбуватися перекриття максимумів? Чи залежить відповідь від ширини щілини?

**4.3.35.** Чому в спектроскопії перевагу віддають дифракційній решітці, а не призмі?

**4.3.36.** Як узгоджується корпускулярна теорія з явищем дифракції?

#### 4.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Розв'язати дифракційну задачу означає знайти відносний розподіл інтенсивності на екрані залежно від форми і розмірів неоднорідностей, які викликають дифракцію. В загальному випадку розв'язок такої задачі є достатньо складним. В курсі загальної фізики розглядаються лише випадки, в яких міркування симетрії спрощують розрахунки, наприклад, в задачах дифракції від круглого отвору, вузької щілини тощо.

1. При розв'язуванні задач, які стосуються дифракційних проблем Френеля, слід мати на увазі, що радіуси отвору (перегородки) і  $k$ -ої відкритої (закритої) зони Френеля співпадають і визначаються за формулами (4.3) і (4.4).

2. У випадку дифракції в паралельних променях на одній щілині положення максимумів освітленості на екрані визначається умовою (4.10), а мінімумів – (4.11). Однак зауважимо, що умова (4.10), на відміну від умови (4.11) є неточною (див. [1], § 3.8), вона дає дещо завищені значення кута  $\varphi$ . При  $k=1$  похибка для  $\sin \varphi$  складає  $\sim 5\%$ ; при збільшенні  $k$  похибка зменшується.

#### 4.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 4.5.1.** Між точковим джерелом світла ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м) і екраном помістили діафрагму з круглим отвором радіуса  $r = 1,00$  мм. Відстань від діафрагми до джерела і екрана відповідно дорівнює  $R = 1$  м і  $r_0 = 2$  м. Як зміниться освітленість екрана в точці  $P$ , що знаходиться проти центра отвору, якщо діафрагму забрати?

**Розв'язок.** В результаті дифракції світла на краях отвору діафрагми і

інтерференції вторинних хвиль на екрані виникає дифракційна картина – світлі і темні кільця, які чергуються між собою. При цьому в точці  $P$ , яка є центром картини, буде світла або темна смуга, в залежності від числа відкритих зон Френеля. Парному числу зон відповідає світла смуга, непарному – темна. Знайдемо це число. Для цього скористаємось формулою (4.3) для радіуса  $k$ -ої зони Френеля:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{k\lambda Rr_0}{R+r_0}}. \quad (1)$$

Вважаючи в формулі (1) величину  $\rho_k$  рівною радіусу  $r$  отвору діафрагми, отримаємо:

$$k = \frac{r^2(R+r_0)}{\lambda Rr_0} = \frac{10^{-6}(1+2)}{1.2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 3,00. \quad (2)$$

Таким чином, внаслідок того, що діафрагма відкриває непарне число зон Френеля, рівне 3, в точці  $P$  буде світла смуга. Щоб відповісти на питання задачі, необхідно перш за все знайти результуючу амплітуду  $A_p$  (а значить, і інтенсивність  $I_p$ ) в точці  $P$ , коли світло проходить через діафрагму. Вона визначається формулою (4.2):

$$A_p = \frac{a_1}{2} \pm \frac{a_k}{2}, \quad (3)$$

де  $a_1$  і  $a_k$  – амплітуди світлових коливань, які доходять до точки  $P$  від 1-ої і  $k$ -ої відкритих зон Френеля. Оскільки в нашому випадку діафрагма відкриває три зони Френеля ( $k = 3$ ) то

$$A_p = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2}. \quad (4)$$

Вважаючи, що  $a_1 \approx a_3$ , формула (4) запишеться так:

$$A_p = a_1 \quad (5)$$

Однак відомо, що із збільшенням числа відкритих зон Френеля величина другого члена в формулі (3) монотонно зменшується і коли  $k \rightarrow \infty$ , його величина прямує до нуля ( $a_k/2 \rightarrow 0$ ). Коли  $k = \infty$ , то це означає, що фронт хвилі повністю відкритий. Тому, якщо діафрагму забрати ( $k = \infty$ ), результуюча амплітуда  $A_p$  дорівнюватиме:

$$A_p = \frac{a_1}{2}. \quad (6)$$

**Висновок:** Якщо забрати діафрагму, то це призведе до зменшення в два рази результуючої амплітуди світлових коливань в точці  $P$ . Оскільки освітленість пропорційна квадрату амплітуди світлових коливань ( $I_p \sim A_p^2$ ), то вона зменшиться в чотири рази.

**Задача 4.5.2.** Екран знаходиться на відстані  $l = 40$  м від точкового монохроматичного джерела світла ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м). На відстані  $R = 20$  м від джерела світла розміщений екран з ірисовою діафрагмою. При якому радіусі отвору діафрагми центр дифракційної картини буде: а) найбільш темним; б) найбільш світлим?

**Розв'язок.** Нехай отвір діафрагми відкриває  $k$  зон Френеля. Тоді радіус

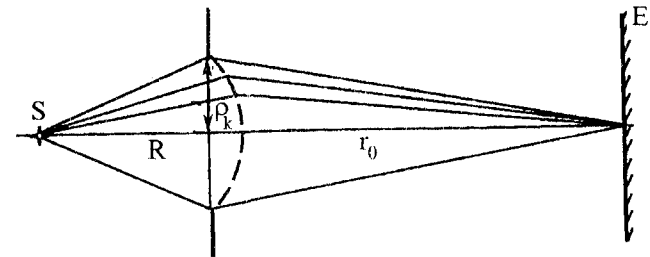


Рис. 4.20

$k$ -ої зони  $\rho_k$  є одночасно і радіусом отвору діафрагми, який визначається формулою (4.3):

$$\rho_k = \sqrt{\frac{k\lambda Rr_0}{R+r_0}},$$

де за умовою  $R + r_0 = l$ . Найменша освітленість в центрі дифракційної картини буде при  $k = 2$ . Тоді

$$\rho_2 = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \frac{20 \cdot 20}{40}} \text{ м} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Найбільша освітленість в центрі дифракційної картини буде при  $k = 1$ , коли

$$\rho_1 = \sqrt{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \frac{20 \cdot 20}{40}} \text{ м} = 2,24 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $\rho_1 = 2,24 \cdot 10^{-3}$  м – мінімальна освітленість;

$\rho_2 = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  – максимальна освітленість.

**Задача 4.5.3.** На шляху плоскої світлової хвилі з  $\lambda = 5,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  поставили тонку збиральну лінзу з фокусною відстанню  $f = 0,5 \text{ м}$ , безпосередньо за нею – діафрагму з круглим отвором і на відстані  $r_0 = 0,75 \text{ м}$  від діафрагми – екран. При яких радіусах отвору  $\rho_k$  центр дифракційної картини має максимальну освітленість?

**Розв'язок.** Оскільки безпосередньо перед діафрагмою знаходиться збиральна лінза, то на діафрагму буде падати збіжна сферична хвиля з центром кривизни в фокусі  $F$  лінзи (рис.4.21). Тому зони Френеля в даному

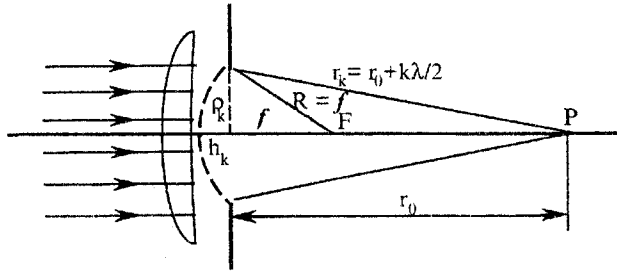


Рис. 4.21

випадку будуть з боку вгнутої поверхні сферичної хвилі. Знайдемо формулу для розрахунку радіуса  $\rho_k$  крайньої ( $k$ -ої) зони Френеля, що пропускається отвором діафрагми.  $\rho_k$  і  $r_0$  є радіусом отвору. Із рис. 4.21 маємо:

$$\rho_k^2 = R^2 - (f - h_k)^2 = R^2 - f^2 + 2fh_k - h_k^2. \quad (1)$$

Враховуючи, що  $R = f$  і те що  $h_k$  мале в порівнянні з  $f$ , отримаємо:

$$\rho_k^2 = 2fh_k. \quad (2)$$

Із рисунка (4.21) також можна записати

$$R^2 - f^2 + 2fh_k - h_k^2 = r_k^2 - r_0^2 + 2r_0h_k - h_k^2, \quad (3)$$

звідки:

$$h_k = \frac{r_k^2 - r_0^2}{2(f - r_0)}. \quad (4)$$

Враховуючи, що  $r_k = r_0 + k \frac{\lambda}{2}$ , маємо

$$r_k^2 - r_0^2 = kr_0\lambda. \quad (5)$$

З урахуванням (4) і (5) формула (2) набуде вигляду:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{k\lambda fr_0}{|f - r_0|}}. \quad (6)$$

Освітленість в центрі дифракційної картини залежить від кількості відкритих зон Френеля, тобто від числа  $k$ . Якщо  $k$  – парне, то центр дифракційної картини буде мінімально освітлений, якщо  $k$  – непарне – максимально. Тому підставляючи в (6) числові дані відповідних величин (крім  $k$ ), отримаємо:

$$\rho_k = \sqrt{\frac{k \cdot 5,4 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 0,75}{0,75 - 0,5}} \text{ м} = 0,9\sqrt{k} \text{ мм}.$$

Якщо, замість  $k$ , в останню формулу підставляти значення  $k = 1, 3, 5, \dots$ , то отримаємо радіуси отвору діафрагми, при яких центр дифракційної картини буде максимально освітлений.

Відповідь:  $\rho_k = \sqrt{\frac{k\lambda fr_0}{|f - r_0|}} = 0,9\sqrt{k} \text{ мм}$ , де  $k = 1, 3, 5, \dots$

**Задача 4.5.4.** Точкове джерело монохроматичного світла розміщене перед зональною пластинкою на відстані  $R = 1,5 \text{ м}$  від неї. Зображення джерела утворюється на відстані  $r_0 = 1 \text{ м}$  від пластинки. Знайти положення головного  $F$  і всіх інших  $F_n$  фокусів зональної пластинки.

**Розв'язок.** Для знаходження головного фокуса  $F$  зональної пластинки скористаємось формулою (4.7):

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

звідки

$$f = \frac{Rr_0}{R + r_0}. \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові дані відповідних величин ( $R = 1,5 \text{ м}$ ;  $r_0 = 1 \text{ м}$ ), отримаємо:  $f = 0,6 \text{ м}$ .

Положення інших фокусів знайдемо, користуючись формулою (4.6):

$$f_n = \frac{f}{2n+1}, \quad (3)$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$  Тоді:  $f_1 = f/3 = 0,2 \text{ м}$ ,  $f_2 = f/5 = 0,12 \text{ м}$ ,  $f_3 = f/7 = 0,086 \text{ м}, \dots$   
 На рис.4.22 показано положення головного і ще трьох фокусів.

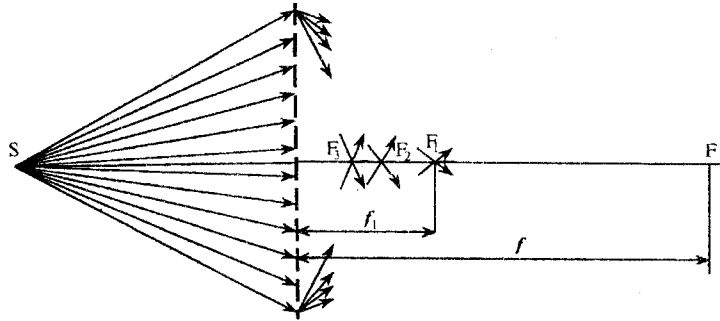


Рис. 4.22

Відповідь:  $f = 0,6 \text{ м}$ ;  $f_1 = 0,2 \text{ м}$ ;  $f_2 = 0,12 \text{ м}$ ;  $f_3 = 0,086 \text{ м}$ .

**Задача 4.5.5.** На щілину шириною  $b = 0,1 \text{ мм}$  нормально падає пучок світла від монохроматичного джерела ( $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ ). Визначити ширину центрального максимуму в дифракційній картині, яка проектується за допомогою лінзи, розміщеної безпосередньо за щілиною на екран, що знаходиться на відстані  $L = 1 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Центральний максимум займає область між найближчими правим і лівим мінімумами, розмір якої дорівнює відстані між ними (рис.4.23). Мінімуми інтенсивності при дифракції світла від однієї щілини спостерігаються під кутами  $\varphi$ , які визначаються умовою (4.12):

$$b \sin \varphi = k\lambda, \quad (1)$$

де  $b$  – ширина щілини,  $\lambda$  – довжина світлової хвилі,  $k$  – порядок мінімуму ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ).

В даному випадку  $k = \pm 1$ . Відстань між двома мінімумами на екрані можна визначити із рис. 4.23:

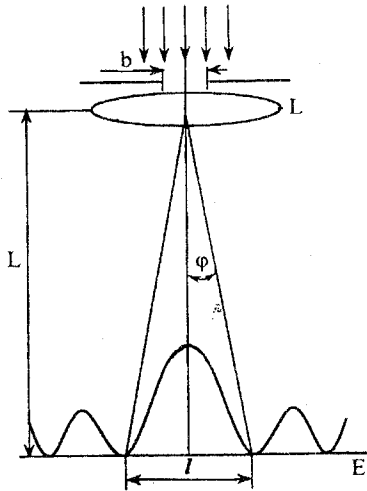


Рис. 4.23

$$l = 2L \operatorname{tg} \varphi. \quad (2)$$

Якщо врахувати, що при малих кутах дифракції  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$ , а  $\sin \varphi = \frac{k\lambda}{b}$

[див ф-лу (1)], то формула (2) набуде вигляду:

$$l = 2L \frac{k\lambda}{b} \quad (3)$$

Підставивши в формулу (3) числові значення відповідних величин ( $L = 1 \text{ м}$ ;  $k = 1$ ;  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $b = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ), отримаємо  $l = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Відповідь:  $l = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

**Задача 4.5.6.** Квадратний отвір освітлюється паралельним пучком променів, які падають перпендикулярно до площини отвору. Знайти розмір  $L \times L$  зображення отвору на екрані, віддаленому на  $D = 50 \text{ м}$  від нього. Сторона отвору  $L_0 = 0,2 \text{ см}$ ; площина екрана паралельна площині отвору.

**Розв'язок.** Межею зображення на екрані можна вважати положення першого дифракційного мінімуму для променів, які найбільше відхиляються. Для видимого світла це будуть промені з  $\lambda = 7600 \text{ \AA}$ .

Положення першого дифракційного мінімуму визначається умовою:

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{L_0} = \frac{\lambda}{L_0}, \quad (1)$$

де  $L_0$  – ширина отвору,  $k = 1$  – порядок мінімуму.

Довжина сторони зображення  $L$  на екрані буде (див. рис. 4.23):

$$L = 2D \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Оскільки тангенс малого кута дорівнює синусові, то враховуючи (1), матимемо:

$$L = \frac{2D\lambda}{L_0} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{2 \cdot 10^{-3}} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,8 \text{ см}.$$

Отже, зображення на екрані матиме вигляд квадрата із стороною  $3,38 \text{ см}$ .

**Задача 4.5.7.** На дифракційну решітку нормально до її поверхні падає паралельний пучок променів з довжиною хвилі  $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7}$  м. Розміщена поблизу решітки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, віддалений від лінзи на відстань  $L = 1$  м. Відстань між двома максимумами першого порядку, які спостерігаються на екрані,  $l = 20,2$  см (рис. 4.24). Визначити: а) сталу дифракційної решітки; б) число штрихів на 1 см; в) кількість максимумів, що дає при цьому дифракційна решітка; г) максимальний кут відхилення променів, які відповідають останньому дифракційному максимуму.

**Розв'язок.** а) Стала дифракційної решітки  $a + b = d$ , довжина хвилі  $\lambda$  і кут відхилення  $\varphi$ , який відповідає  $k$ -ому дифракційному максимуму, пов'язані співвідношенням (4.20):

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad (1)$$

де  $k$  – порядок спектра. В даному випадку  $k = 1$ . Із рис.4.24 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2L}. \quad (2)$$

При малих кутах  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$ . Тоді

$$\sin \varphi = \frac{l}{2L}. \quad (3)$$

З урахуванням рівності (3) і того, що  $k = 1$ , формула (1) набуде вигляду:

$$d \frac{l}{2L} = \lambda, \quad (4)$$

звідки шукана величина

$$d = \frac{2L\lambda}{l}. \quad (5)$$

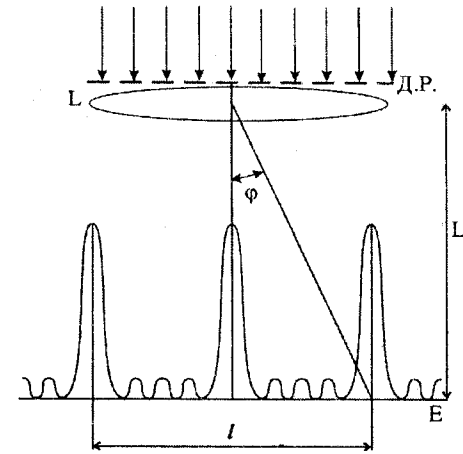


Рис. 4.24

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $L = 1$  м,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м,  $l = 20,2 \cdot 10^{-2}$  м), отримуємо:  $d = 4,95 \cdot 10^{-6}$  м.

б) Число штрихів на 1 см знайдемо за формулою:

$$N_0 = \frac{1}{d}. \quad (6)$$

Після підстановки в (6) числових значень маємо:  $N_0 = 2,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1} = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

в) Для визначення числа максимумів, що дає дифракційна решітка,

вирахуємо спочатку максимальне значення  $k_{\max}$ , виходячи із того, що максимальний кут відхилення дифракційною решіткою не може перевищувати  $90^\circ$ . Тоді із (1) матимемо:

$$k_{\max} = \frac{d \sin \frac{\pi}{2}}{\lambda}. \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення величин ( $d = 4,95 \cdot 10^{-6}$  м;  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м), отримуємо:

$$k_{\max} = \frac{4,95 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 9,9.$$

Однак число  $k$  обов'язково повинно бути цілим. В той же час воно не може мати значення рівне 10, тому що при цьому значенні  $\sin \varphi$  повинен би бути більшим за одиницю. Значить  $k_{\max} = 9$ .

Загальне число максимумів, що дає дифракційна решітка, підрахуємо таким чином. Вліво і вправо від центрального максимуму буде спостерігатися однакова кількість максимумів, рівного  $k_{\max}$ , тобто всього  $2k_{\max}$ . Якщо врахувати також і центральний (нульовий) максимум, то отримуємо, що число максимумів визначиться за формулою :

$$n = 2k_{\max} + 1. \quad (8)$$

Підставляючи значення  $k_{\max}$  у (8), знайдемо, що

$$n = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

г) Максимальний кут відхилення променів, які відповідають останньому дифракційному максимуму, знайдемо за формулою (1):

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{k_{\max} \lambda}{d}. \quad (9)$$

Підставляючи в (9) числові значення відповідних величин, маємо:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{9 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{4,95 \cdot 10^{-6}} = 0,91.$$

Звідси шукане значення кута:

$$\varphi_{\max} = 65,5^\circ.$$

Відповідь:  $d = 4,95 \cdot 10^{-6}$  м;  $N_0 = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ ;  $k_{\max} = 9$ ;  $n = 19$ ;  $\varphi_{\max} = 65,5^\circ$ .



**Задача 4.5.8.** Визначити довжину хвилі монохроматичного світла, яке нормально падає на дифракційну решітку з періодом  $d = 2,20 \text{ мкм}$ , якщо кут між максимумами першого і другого порядків спектра  $\Delta\varphi = 15^\circ$  (рис. 4.25).

**Розв'язок.** Нехай  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – кути дифракції, які відповідають максимумам першого ( $k = 1$ ) і другого ( $k = 2$ ) порядків. За умовою:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi. \quad (1)$$

Умови головних максимумів, що відповідають кутам  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , запишемо так:

$$d \sin \varphi_1 = \lambda, \quad (2)$$

$$d \sin \varphi_2 = 2\lambda, \quad (3)$$

Із (2) і (3) знаходимо, що

$$\sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1. \quad (4)$$

Враховавши (1), рівняння (4) перепишемо так:

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1. \quad (5)$$

Розв'язавши тригонометричне рівняння відносно  $\sin \varphi_1$ , знайдемо, що

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}. \quad (6)$$

Враховуючи (6) із рівняння (2), визначимо шукану величину:

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}. \quad (7)$$

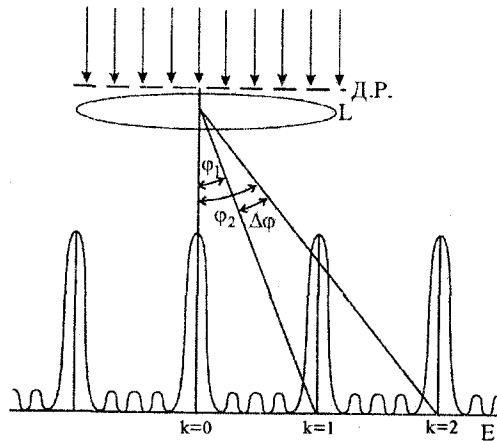


Рис. 4.25

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $d = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $\Delta\varphi = 15^\circ$ ), отримаємо:  $\lambda = 5,34 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**Відповідь:**  $\lambda = 5,34 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**Задача 4.5.9.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  падає нормально на дифракційну решітку з періодом  $d = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  і з загальною кількістю штрихів  $N = 10^4$ . Знайти кутову ширину дифракційного максимуму другого порядку.

**Розв'язок.** Кутова ширина дифракційного максимуму визначається різницею кутових відстаней найближчих до нього мінімумів зліва і справа (рис. 4.26).

Умовою виникнення мінімумів в дифракційній картині, що виникла на дифракційній решітці, є умова (4.23):

$$d \sin \varphi = \left(k + \frac{P}{N}\right) \lambda, \quad (1)$$

де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $P = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm(N-1)$ .

В нашому випадку  $k = +2$ , а  $P = \pm 1$ . Враховуючи це, умовою найближчого мінімуму до головного максимуму 2-ого порядку зліва є:

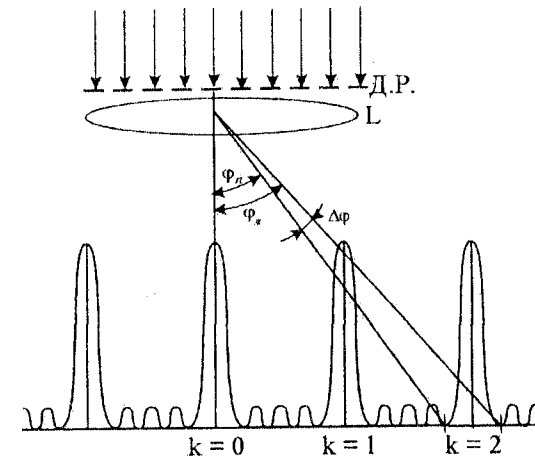


Рис. 4.26

$$d \sin \varphi_L = 2\lambda - \frac{\lambda}{N}, \quad (2)$$

а справа:

$$d \sin \varphi_P = 2\lambda + \frac{\lambda}{N}, \quad (3)$$

Віднімемо почленно від рівності (3) рівність (2). Тоді

$$d(\sin \varphi_P - \sin \varphi_L) = \frac{2\lambda}{N}. \quad (4)$$

Останню рівність перетворимо, використавши відому тригономет-

ричну формулу різниці синусів. Тоді матимемо:

$$2d \cos \frac{\varphi_{\Pi} + \varphi_{\text{Л}}}{2} \sin \frac{\varphi_{\Pi} - \varphi_{\text{Л}}}{2} = \frac{2\lambda}{N}. \quad (5)$$

Враховуючи, що  $\varphi_{\Pi} - \varphi_{\text{Л}} = \Delta\varphi$  є малий кут,  $\sin \Delta\varphi$  в (5) замінимо самим кутом, а кут  $\frac{\varphi_{\Pi} + \varphi_{\text{Л}}}{2}$  замінимо кутом  $\varphi$ , в напрямку якого виникає максимум другого порядку ( $k = 2$ ). Тоді

$$d \cos \varphi \cdot \Delta\varphi = \frac{2\lambda}{N},$$

звідки

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{d \cdot N \cos \varphi}. \quad (6)$$

Враховуючи, що  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ , а  $\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d}$ , отримаємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{d \cdot N \sqrt{1 - \left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}} = \frac{2\lambda}{N \sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2}}. \quad (7)$$

Підставляючи в (6) числові дані відповідних величин ( $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7}$  м;  $N = 10^4$ ;  $d = 2,5 \cdot 10^{-6}$  м;  $k = 2$ ) і зробивши обрахунки, отримаємо:

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot 5,89 \cdot 10^{-7}}{10^4 \sqrt{(2,5 \cdot 10^{-6})^2 - 4(5,89 \cdot 10^{-7})^2}} \text{ рад} = 5,34 \cdot 10^{-5} \text{ рад},$$

або

$$\Delta\varphi = \frac{5,34 \cdot 10^{-5}}{4,85 \cdot 10^{-6}} \text{ кут.сек} = 11''.$$

**Відповідь:**  $\Delta\varphi = 11''$ .

**Задача 4.5.10.** Скільки повних спектрів можна спостерігати за допомогою дифракційної решітки з 500 штрихами на 1 мм довжини, якщо

\*  $1''$  (кут.сек) =  $4,85 \cdot 10^{-6}$  рад

ширина щілини дорівнює ширині проміжку між щілинами. Вважаючи, що повний спектр видимого світла з боку довгохвильового краю обмежений довжиною хвилі  $\lambda = 7600 \text{ \AA}$ .

**Розв'язок.** Стала дифракційної решітки

$$d = a + b; \quad d = \frac{1}{N_0}, \quad (1)$$

де  $N_0$  – кількість штрихів на одиниці довжини (1 мм),  $b$  – ширина щілини,  $a$  – ширина проміжку між щілинами. Число  $k$  повних спектрів з кожного боку від спектра нульового порядку визначається з умови:

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d} \leq 1, \quad (2)$$

звідки

$$k = \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{N_0 \lambda} = \frac{1}{500 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4}} = 2,63. \quad (3)$$

Число  $k$  є цілим числом, тому  $k = 2$ . Якщо покласти, що  $k = 3$ , то умова (2) не виконуватиметься.

Довгохвильові кутові межі спектрів визначаються за формулою:

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d}. \quad (4)$$

звідки

$$\sin \varphi_1 = \frac{k_1 \lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \lambda N_0 = 7,6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = 0,38; \quad \varphi_1 = 22,33^\circ.$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{k_2 \lambda}{d} = \frac{2\lambda}{d} = 2\lambda N_0 = 2 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = 0,76; \quad \varphi_2 = 49,46^\circ.$$

Однак, при  $\lambda = 7,6 \cdot 10^{-4}$  мм на кутовій відстані  $\varphi' = 49,46^\circ$  розміщується мінімум від однієї щілини, який визначається умовою:

$$k\lambda = a \sin \varphi',$$

звідки

$$\sin \varphi' = \frac{k\lambda}{b} = \frac{2k\lambda}{d} = 2kN_0 \lambda,$$

де  $b = \frac{d^*}{2}$ ,  $d = \frac{1}{N_0}$ ,  $k = \pm 1$ .

Тоді

$$\sin \varphi' = 2 \cdot 7,6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = 0,76; \quad \varphi' = 49,46^\circ.$$

Звідси випливає, що спектри другого порядку впадуть внаслідок дифракції від однієї щілини. Отже, на екрані буде видно два спектри – по одному з кожного боку від центральної смуги (смуги нульового порядку).

**Задача 4.5.11.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda = 5,3 \cdot 10^{-7}$  м падає на прозору дифракційну решітку, період якої рівний  $d = 1,5 \cdot 10^{-6}$  м. Знайти максимальний кут відхилення променів, які відповідають останньому дифракційному максимуму, якщо світло падає на решітку: а) нормально; б) під кутом  $60^\circ$  до нормалі.

**Розв'язок.** а) Для того, щоб знайти максимальний кут  $\varphi_{\max}$  дифракції, що відповідає останньому максимуму, спочатку знайдемо максимальне значення  $k_{\max}$  із умови максимуму (4.20), поклавши, що  $\sin \varphi = 1$ . Тоді

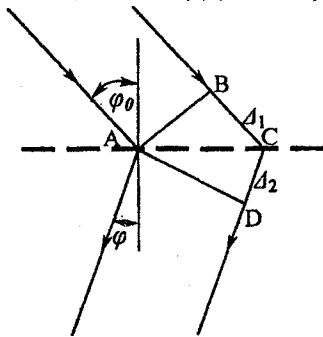


Рис. 4.27

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{5,3 \cdot 10^{-7}} = 2,8.$$

Оскільки число  $k$  повинно бути цілим і в той же час не може бути рівним 3, то  $k = 2$ .

Знаючи максимальне значення  $k_{\max}$ ,  $\varphi_{\max}$  знайдемо із формули:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{k_{\max} \lambda}{d} = \frac{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 0,7066; \quad \varphi_{\max} = 44^\circ 58'.$$

б) При похилому падінні на решітку променів умовою виникнення максимумів є

$$d(\sin \varphi_k + \sin \varphi_0) = k\lambda, \quad (1)^{**}$$

Поклавши, що  $\sin \varphi_k = 1$ , знайдемо  $k_{\max}$ :

\* За умовою задачі  $a = b$

\*\* Формула (1) легко отримується із рис. 4.12  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ ,  $\Delta_1 = d \sin \varphi_0$ ;  $\Delta_2 = d \sin \varphi_k$

$$k_{\max} = \frac{d(1 + \sin \varphi_0)}{\lambda} = \frac{1,5 \cdot 10^{-6}(1 + \sin 60^\circ)}{5,3 \cdot 10^{-7}} = 5,28.$$

Значить,  $k_{\max} = 5$ . Із (1), враховуючи значення  $k_{\max}$ , знаходимо значення  $\varphi_{\max}$ :

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{k_{\max} \lambda - \sin \varphi_0}{d} = \frac{5 \cdot 5,3 \cdot 10^{-7} - 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 60^\circ}{1,5 \cdot 10^{-6}} = 0,90;$$

$$\varphi_{\max} = 64^\circ 14'.$$

Відповідь: а)  $\varphi_{\max} = 44^\circ 58'$ ; б)  $\varphi_{\max} = 64^\circ 14'$ .

**Задача 4.5.12.** Знайти відношення інтенсивності головного максимуму  $k$ -ого порядку до інтенсивності  $I_{k=0}$  центрального максимуму.

**Розв'язок.** Максимальні значення інтенсивності головних максимумів виражаються формулою (4.21):

$$I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} N^2, \quad (1)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючої на щілину світлової хвилі,  $u = \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda}$ ,  $N$  –

кількість щілин решітки,  $b$  – ширина щілини,  $\varphi$  – кут дифракції.

Для того, щоб знайти інтенсивності головних максимумів в різних порядках інтерференції (залежність  $I$  від  $k$ ), з функцією  $u$  зробимо такі перетворення:

$$u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = \frac{\pi b}{\lambda} \frac{k\lambda}{d} = \frac{\pi kb}{d}. \quad (2)^*$$

Тоді

$$\frac{\sin^2 u}{u^2} = \frac{d^2 \sin^2(\pi kb/d)}{\pi^2 k^2 b^2}. \quad (3)$$

З урахуванням (3) інтенсивність  $k$ -ого головного максимуму (1) виразиться так:

$$I_k = I_0 N^2 d^2 \frac{\sin^2(\pi kb/d)}{\pi^2 k^2 b^2}. \quad (4)$$

\* Тут ми врахували умову головних максимумів (4.20)

Маючи на увазі, що при  $k = 0$  ( $\varphi = 0$ ),

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1,$$

інтенсивність головного максимуму нульового порядку

$$I_{k=0} = I_0 N^2. \quad (5)$$

Тоді

$$\frac{I_k}{I_{k=0}} = \frac{I_0 N^2 d^2 \frac{\sin^2(\pi k b / d)}{\pi^2 k^2 b^2}}{I_0 N^2} = d^2 \frac{\sin^2(\pi k b / d)}{\pi^2 k^2 b^2}. \quad (6)$$

Відповідь:  $\frac{I_k}{I_{k=0}} \approx \frac{1}{k^2}.$

**Задача 4.5.13.** За якої умови  $k$ -ий головний максимум для дифракційної решітки з періодом  $d$  і шириною щілини  $b$  перетворюється в нуль?

**Розв'язок:** Положення головних максимумів визначається умовою (4.20):

$$d \sin \varphi = k \lambda, \quad (1)$$

де  $d = b + a$  – стала дифракційної решітки,  $b$  – ширина щілини,  $a$  – відстань між щілинами,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  – порядок максимуму.

Покладемо  $a = b/2$ . Тоді умова (1) набуде вигляду

$$b \sin \varphi = \frac{2}{3} k \lambda. \quad (2)$$

При  $k = 3, 6, 9, \dots$  вираз (2) перетворюється в умову мінімумів від однієї щілини [див. ф-лу (4.12)] тобто, якщо  $a = b/2$ , то кожен третій головний максимум перетвориться в нуль. Якщо  $a = b$ , то випаде кожен парний максимум (при  $k = 2, 4, 6, \dots$ ). При  $a = 2b$  випаде також кожен третій (при  $k = 3, 6, 9, \dots$ ) головний максимум тощо.

Щоб знайти загальну умову перетворення  $k$ -ого головного максимуму в нуль скористаємось формулою (4) попередньої задачі для інтенсивності  $k$ -ого головного максимуму:

$$I_k = I_0 N^2 d^2 \frac{\sin^2(\pi k b / d)}{\pi^2 k^2 b^2}, \quad (3)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючої на щілину світлової хвилі,  $N$  – кількість щілин решітки.

Щоб  $I_k$  перетворилось в нуль ( $I_k = 0$ ), необхідно, щоб  $\sin(\pi k b / d) = 0$ , а це

можливо за умови, що  $k = \frac{m d}{b}$ , де  $m$  – ціле число.

**Відповідь:** при  $k = \frac{m d}{b}$ , де  $m$  – ціле число.

**Задача 4.5.14.** Пучок рентгенівських променів з довжиною хвилі  $\lambda = 4 \cdot 10^{-11}$  м падає під кутом ковзання  $\theta_0 = 60,0^\circ$  на лінійний ланцюжок із розсіюючих центрів з періодом  $b$ . Знайти кути ковзання, що відповідають всім дифракційним максимумам, якщо  $\lambda = \frac{2}{5} b$ .

**Розв'язок.** Умовою виникнення дифракційних максимумів на лінійному ланцюжку розсіюючих центрів є (див. § 3.18 [1]).

$$b(\cos \varphi - \cos \varphi_0) = k \lambda, \quad (1)$$

де  $b$  – відстань між розсіюючими центрами,  $\theta_0$  і  $\theta$  – відповідно доповнювальні кути до кутів падіння  $\alpha$  і  $\varphi$  дифракції. Підставляючи в (1) значення  $\lambda$ , знаходимо, що

$$\cos \theta = \frac{2}{5} k + \cos \theta_0, \quad (2)$$

де  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Однак дифракційні максимуми виникнуть не при будь-яких значеннях  $k$ , а саме

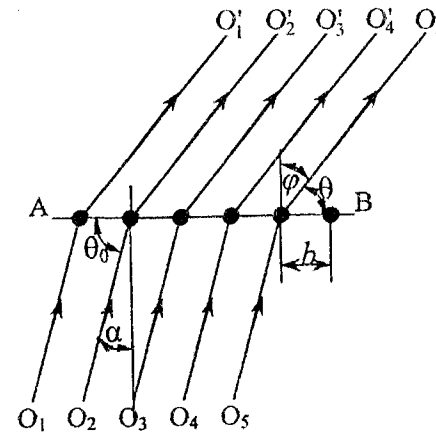


Рис. 4.28

при  $k = 0, \pm 1, -2, -3$ . При цих значеннях  $k$  отримаємо:  $\theta_1 = 25,84^\circ$ ,  $\theta_2 = 60,0^\circ$ ,  $\theta_3 = 84,26^\circ$ ,  $\theta_4 = 107,45^\circ$ ,  $\theta_5 = 134,45^\circ$ . Значення  $k = +2, +3$  випадають, оскільки  $\cos \theta$  при цих значеннях більший за одиницю, що неможливо.

**Відповідь:**  $\theta_1 = 25,84^\circ$ ,  $\theta_2 = 60,0^\circ$ ,  $\theta_3 = 84,26^\circ$ ,  $\theta_4 = 107,45^\circ$ ,  $\theta_5 = 134,45^\circ$ .

**Задача 4.5.15.** Пучок рентгенівських променів падає на тривимірну прямокутну дифракційну решітку, періоди якої  $a, b, c$ . Напрямок

падаючого пучка складає кути з напрямками решітки вздовж періодів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  відповідно  $\alpha_0 = \beta_0 = \frac{\pi}{2}$  і  $\gamma_0 = 0$ . Знайти напрямки на дифракційні максимуми і довжини хвиль, для яких ці максимуми будуть спостерігатися.

**Розв'язок.** Нахай  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  – кути між напрямками на дифракційний максимум і напрямками решітки вздовж періодів  $a$ ,  $b$  і  $c$  відповідно. Значення цих кутів визначаться з умов (4.27):

$$\left. \begin{aligned} a \cos \alpha &= k_1 \lambda, \\ b \cos \beta &= k_2 \lambda, \\ c \cos \gamma &= k_3 \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де  $k_1, k_2, k_3$  – сталі цілі числа.

Із (1) маємо:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{k_1 \lambda}{a}, \\ \cos \beta &= \frac{k_2 \lambda}{b}, \\ \cos \gamma &= \frac{k_3 \lambda}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Із (2) знаходимо напрямки ( $\alpha, \beta$  і  $\gamma$ ) на дифракційні максимуми.

Для знаходження довжин хвиль, для яких будуть виникати дифракційні максимуми, скористаємось умовою:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (3)$$

яка випливає із геометричних міркувань ([1], § 3.18).

Підставляючи в (3) значення  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , із (2) отримаємо:

$$\lambda = \frac{2k_3/c}{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{k_3}{c}\right)^2}. \quad (4)$$

**Задача 4.5.16.** На якій відстані одна від одної розмістяться на екрані дві лінії у випромінюванні ртутної лампи ( $\lambda_1 = 5770 \text{ \AA}$ ;  $\lambda_2 = 5791 \text{ \AA}$ ) в

спектрі першого порядку, утвореного за допомогою дифракційної решітки з періодом  $d = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ ? Фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран,  $f = 60 \text{ см}$ .

**Розв'язок.** Лінійна дисперсія дифракційної решітки визначається формулою (4.33):

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda} = D_\varphi f, \quad (1)$$

де  $f$  – фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран,  $D_\varphi$  – кутова дисперсія дифракційної решітки.

Для знаходження кутової дисперсії скористаємось умовою головних максимумів (4.20) і продиференціюємо її зліва по  $\varphi$ , а справа по  $\lambda$ :

$$d \cos \varphi d\varphi = k d\lambda,$$

звідки:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}. \quad (2)$$

де  $k$  – порядок спектра,  $d$  – стала дифракційної решітки,  $\varphi$  – кут дифракції.

Враховуючи (2), маємо:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi} f. \quad (3)$$

Далі зробимо в (3) заміну:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2}}{d}, \quad (4)$$

де  $\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d}$  – напрямки на максимуми. Тоді

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{kf}{\sqrt{d^2 - (k\lambda)^2}} = \frac{1 \cdot 600 (\text{мм}/\text{Å})}{\sqrt{(2 \cdot 10^4)^2 - (5770)^2}} \approx 0,031 \text{ мм}/\text{Å}.$$

Лінійна дисперсія решітки дорівнює

$$\frac{dl}{d\lambda} = 0,031 \text{ мм}/\text{Å}.$$

Отже, шукана відстань між лініями  $\lambda_1 = 5770 \text{ \AA}$  і  $\lambda_2 = 5791 \text{ \AA}$  на екрані

$$dl = 0,031d\lambda = 0,031 \cdot 21 \text{ мм} = 0,65 \text{ мм},$$

де  $d\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 5791 - 5770 = 21(\text{\AA})$ .

Відповідь:  $dl = 21 \text{ \AA}$ .

**Задача 4.5.17.** 1) Обчислити кутову дисперсію в спектрі першого порядку для решітки, яка має  $N_0 = 3937$  штрихів на 1 см. 2) Обчислити лінійну дисперсію спектрографа з такою ж решіткою, якщо його об'єктив має фокусну відстань  $f = 50$  см. 3) Обчислити величину, обернену до

лінійної дисперсії (число  $\text{\AA}$  на 1 мм). При обчисленнях вважати, що кути дифракції малі ( $\cos \varphi = 1$ ).

**Розв'язок.** 1) Кутова дисперсія дифракційної решітки визначається за формулою (2) задачі 4.5.16:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}. \quad (1)$$

Оскільки за умовою задачі кути дифракції малі ( $\cos \varphi = 1$ ) то:

$$D_\varphi = \left( \frac{d\varphi}{d\lambda} \right)_{\varphi=0} = \frac{k}{d} = kN_0 = 393,7 \frac{\text{рад}}{\text{мм}}, \quad (2)$$

$$\text{де } d = \frac{1}{N_0}.$$

Для того, щоб отримати в (2) розмірність  $\frac{\text{кут. сек}}{\text{\AA}}$  необхідно мм перетво-

рити в  $\text{\AA}$  ( $1 \text{ мм} = 10^7 \text{ \AA}$ ), а радіани в кут. сек ( $1 \text{ кут. сек} = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ рад}$ ).  
Тоді:

$$D_\varphi = \frac{393,7}{10^7 \cdot 4,85 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{кут. сек}}{\text{\AA}} \approx 8,1 \frac{\text{кут. сек}}{\text{\AA}}.$$

2) Лінійна дисперсія спектрографа дорівнює:

$$D_l = \frac{dl}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda} f = \frac{kf}{d} = \frac{500 \cdot 393,7}{10^7} \frac{\text{мм}}{\text{\AA}} = 0,0197 \frac{\text{мм}}{\text{\AA}}.$$

(див. ф-лу (3) задачі 4.5.16).

3) Величина обернена до лінійної дисперсії буде:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{1}{0,0197} \frac{\text{\AA}}{\text{мм}} \approx 50,8 \frac{\text{\AA}}{\text{мм}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{d\varphi}{d\lambda} \approx 8,1 \frac{\text{кут. сек}}{\text{\AA}}; \frac{dl}{d\lambda} = 0,0197 \frac{\text{мм}}{\text{\AA}}; \frac{d\lambda}{dl} \approx 50,8 \frac{\text{\AA}}{\text{мм}}.$$

**Задача 4.5.18.** Прозора дифракційна решітка має період  $d = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Знайти кутову дисперсію  $D_\varphi$  (в кутових хв/мм), яка відповідає максимуму найбільшого порядку спектральної лінії  $\lambda = 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , якщо світло падає на решітку: а) нормально; б) під кутом  $\varphi_0 = 45^\circ$  до нормалі.

**Розв'язок.** Кутову дисперсію знайдемо скориставшись формулою (2) задачі 4.5.16:

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}. \quad (1)$$

В (1) замінимо  $\cos \varphi$  відповідно відомій тригонометричній формулі, тобто

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left( \frac{k\lambda}{d} \right)^2}. \quad (2)$$

Тоді

$$D_\varphi = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \sqrt{1 - \left( \frac{k\lambda}{d} \right)^2}} = \frac{k}{\sqrt{d^2 - (k\lambda)^2}}. \quad (3)$$

Порядок максимуму  $k$ , що входить в (4), є максимальним і його можна визначити із (4.20), поклавши  $\sin \varphi = 1$ . Тоді

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} = 2,8; \quad (k_{\max} = 2). \quad (4)$$

Враховуючи (4), отримаємо:

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k_{\max}}{\sqrt{d^2 - (k_{\max}\lambda)^2}} \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $k_{\max} = 2$ ;  $d = 1,5 \cdot 10^{-6}$  м;  $\lambda = 5,3 \cdot 10^{-7}$  м) і зробивши обчислення, отримаємо:  $D_{\varphi} = 6,5$  кут.хв./нм (див. задачу 4.5.17).

б) Для знаходження дисперсії у випадку похилого падіння світла на решітку скористаємось формулою (1):

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}. \quad (6)$$

Як і в першому випадку  $\cos \varphi$  в (1) замінимо на  $\sin \varphi$ , для чого скористаємось умовою головних максимумів для випадку похилого падіння променів на решітку (4.24):

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = k\lambda, \quad (7)$$

де  $\varphi_0$  і  $\varphi$  – кути між перпендикуляром до площини решітки і, відповідно, падаючими і дифрагованими пучками. З (7) маємо, що

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda - d \sin \varphi_0}{d}. \quad (8)$$

Тоді

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left( \frac{k\lambda - d \sin \varphi_0}{d} \right)^2}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) формула (6) набуде вигляду:

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k_{\max}}{d \sqrt{1 - \left( \frac{k_{\max}\lambda}{d} - \sin \varphi_0 \right)^2}}, \quad (10)$$

де  $k_{\max}$  визначимо із (8), поклавши  $\sin \varphi = 1$ :

$$k_{\max} = \frac{d(1 + \sin \varphi_0)}{\lambda} = 4,8; \quad k_{\max} = 4.$$

Підставляючи в (8) числові значення величин ( $d = 1,5 \cdot 10^{-6}$  м;  $\lambda = 5,3 \cdot 10^{-7}$  м;  $\varphi_0 = 45^\circ$ ;  $k_{\max} = 4$ ) і провівши обчислення, отримаємо  $D_{\varphi} = 13$  кут.хв./нм.

Відповідь: а)  $D_{\varphi} = 6,5$  кут.хв./нм; б)  $D_{\varphi} = 13$  кут.хв./нм.

**Задача 4.5.19.** При якій мінімальній кількості штрихів дифракційної решітки з періодом  $d = 2,9 \cdot 10^{-6}$  м можна розділити компоненти дублета жовтої лінії натрію ( $\lambda_1 = 5,89 \cdot 10^{-7}$  м і  $\lambda_2 = 5,896 \cdot 10^{-7}$  м)?

**Розв'язок.** Кількість штрихів  $N$  решітки пов'язано з її роздільною силою  $R$  і порядком спектра  $k$  співвідношенням (4.34):

$$R = kN, \quad (1)$$

звідки

$$N = \frac{R}{k}. \quad (2)$$

Мінімальному значенню кількості штрихів  $N_{\min}$  відповідає мінімальне значення роздільної сили  $R_{\min}$  решітки і максимальне значення числа  $k_{\max}$ , тобто

$$N_{\min} = \frac{R_{\min}}{k_{\max}}. \quad (2, a)$$

Мінімальна роздільна сила  $R_{\min}$  решітки, яка необхідна для розділення дублета (двох складових) жовтої лінії натрію, виражається через величини  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  формулою:

$$R_{\min} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (3)$$

Число  $k_{\max}$  знайдемо з умови головних максимумів:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad (4)$$

якщо прийняти  $\sin \varphi = 1$ ,  $\lambda = \lambda_2$ . Тоді

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda_2} = 4,918; \quad (k_{\max} = 4). \quad (5)$$

При врахуванні (3) і (5) рівність (2, а) набуде вигляду:

$$N_{\min} = \frac{\lambda_1}{k_{\max}(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (6)$$

Підставивши в (6) числові значення величин, отримаємо:  $N_{\min} = 2,5 \cdot 10^2$ .

**Відповідь:**  $N_{\min} = 2,5 \cdot 10^2$ .

**Задача 4.5.20.** Показати, що при нормальному падінні світла на дифракційну решітку максимальна величина її роздільної здатності не може перевищувати значення  $l/\lambda$ , де  $l$  – ширина решітки,  $\lambda$  – довжина світлової хвилі.

**Розв'язок.** Роздільна здатність дифракційної решітки визначається формулою (4.34):

$$R = kN, \quad (1)$$

або

$$R = k \frac{l}{d}. \quad (2)$$

де  $k$  – порядок максимуму,  $N = \frac{l}{d}$  – кількість щілин дифракційної решітки,

$l = Nd$  – ширина дифракційної решітки,  $d$  – стала решітки.

Максимальне значення роздільної здатності відповідає максимальному значенню  $k$ . Тобто

$$R_{\max} = k_{\max} \frac{l}{d}. \quad (3)$$

Значення  $k_{\max}$  знайдемо із умови (4.20), поклавши  $\sin \varphi = 1$ .

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda}. \quad (4)$$

Враховавши (4), формулу (3) для  $R_{\max}$  можна записати так:

$$R_{\max} = \frac{l}{\lambda}. \quad (5)$$

**Задача 4.5.21.** Яку мінімальну довжину  $L_{\min}$  повинна мати пластинка Люммера-Герке, щоб розділити лінію водню  $\lambda = 6,563 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , яка є дублетом з відстанню між компонентами  $\delta\lambda = 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ . Показник заломлення пластинки  $n = 1,5$ .

**Розв'язок.** Для знаходження  $L_{\min}$  скористаємось формулою (4.40):

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = L \left( \frac{n^2 - 1}{\lambda} - n \frac{dn}{d\lambda} \right), \quad (1)$$

де  $L$  – довжина пластинки Люммера-Герке,  $n$  – показник заломлення скла,

з якого виготовлена пластинка,  $\frac{dn}{d\lambda}$  – дисперсія скла. В більшості випадків

дисперсією можна знехтувати. Тоді формула (1) запишеться так:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = L \frac{n^2 - 1}{\lambda}, \quad (2)$$

звідки

$$L_{\min} = \frac{\lambda^2}{(n-1)\delta\lambda} = 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $L_{\min} = 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

**Задача 4.5.22.** По прямій дорозі рухається автомобіль із ввімкненими фарами, які розглядаються як точкові джерела світла. Відстань між фарами автомобіля  $l = 120 \text{ см}$ . На якій відстані  $L$  від спостерігача повинен знаходитися автомобіль, щоб спостерігач був впевнений, що бачить два джерела світла, а не одне? Прийняти діаметр зіниці ока рівним  $d = 0,5 \text{ см}$ , а ефективну довжину хвилі світла, випромінюваного фарами, рівною

$\lambda = 5500 \text{ Å}$ . Той факт, що світло “біле” (тобто суміш променів з різними довжинами хвиль) полегшує або утруднює розділення двох джерел світла?

**Розв'язок.** Кутова роздільна здатність ока

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі світла,  $d$  – діаметр зіниці ока,  $\theta$  – кут, під яким видно інтервал  $l$  між фарами на відстані  $L$ . Із рис. 4.29 маємо:

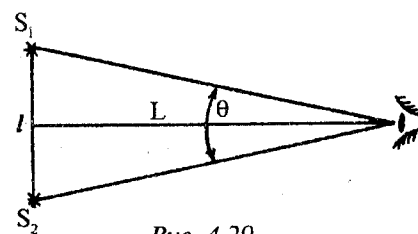


Рис. 4.29

$$\theta = \frac{l}{L}. \quad (2)$$



Прирівнюючи (1) і (2), отримуємо:

$$L = \frac{ld}{1,22\lambda} \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові значення величин ( $l = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ км}$ ;  $d = 5 \cdot 10^{-6} \text{ км}$ ;  $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-10} \text{ км}$ ), маємо:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{1,22 \cdot 5,5 \cdot 10^{-10}} \text{ км} \approx 9 \text{ км}.$$

**Відповідь:**  $L \approx 9 \text{ км}$ .

#### 4.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми IV

**4.6.1.** Зональна пластинка виготовлена із поляроїда. У всіх парних зонах поляроїд орієнтований вертикально, у всіх непарних – горизонтально. Яка буде інтенсивність в основному фокусі пластинки, якщо вона освітлюється неполяризованим світлом?

**4.6.2.** Яка інтенсивність світла  $I$  в фокусі зональної пластинки, якщо закрити всі зони, крім першої? Інтенсивність світла без пластинки  $I_0$ .

**Відповідь:**  $I = 4I_0$ .

**4.6.3.** Яка інтенсивність світла  $I$  в фокусі зональної пластинки, якщо закрити всю зональну пластинку, за виключенням верхньої половини першої зони? Інтенсивність світла без пластинки  $I_0$ .

**Відповідь:**  $I = I_0$ .

**4.6.4.** На екрані отримано неперевний спектр за допомогою щілини, освітленої електричною дугою, об'єктива і призми. Що буде відбуватися, якщо ширину щілини поступово збільшувати?

**4.6.5.** Яка інтенсивність світла  $I$  в центрі дифракційної картини від круглого непрозорого екрана, якщо він закриває першу зону Френеля? Інтенсивність світла при відсутності екрана  $I_0$ .

**Відповідь:**  $I = I_0$ .

**4.6.6.** Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю  $I_0$  падає нормально на непрозорий екран з круглим отвором. Яка інтенсивність світла  $I$  за екраном в точці для якої отвір: а) рівний першій зоні Френеля; внутрішній половині першої зони; б) зробили рівним першій зоні Френеля,

а потім закрили його половину по діаметру?

**Відповідь:** а)  $I \approx 4I_0$ ,  $I \approx 2I_0$ , б)  $I \approx I_0$ .

**4.6.7.** Плоска монохроматична світлова хвиля з інтенсивністю  $I_0$  падає нормально на непрозорий диск, який закриває для точки спостереження  $P$  першу зону Френеля. Якою стала інтенсивність світла  $I$  в точці  $P$  після того, як у диска видалили: а) половину (по діаметру); б) половину зовнішньої половини (по діаметру).

**Відповідь:** а)  $I = 0$ ; б)  $I = I_0/2$ .

**4.6.8.** Якщо круглий отвір (наприклад ірисова діафрагма) збільшується таким чином, що його радіус зростає від радіуса зони до радіуса двох зон, то освітленість в точці  $P$  (точка  $P$  – зображення джерела світла, яке дає діафрагма) падає майже до нуля. Як узгодити цей факт із збільшенням всього світлового потоку через діафрагму в два рази.

**4.6.9.** Точкове джерело монохроматичного світла розміщене на відстані  $R$  від круглої діафрагми, а екран з протилежного боку – на відстані  $r_0$  від неї. При яких радіусах  $\rho_k$  діафрагми центр дифракційних кілець, які спостерігаються на екрані, буде темним, а при яких – світлим, якщо перпендикуляр, опущений із джерела на площину діафрагми, проходить через її центр.

**Відповідь:**  $\rho_k = \sqrt{\frac{k\lambda R r_0}{R + r_0}}$ , центр кілець темний, якщо  $k$  – парне число, і

світлий, якщо  $k$  – непарне число.

4.6.10.

**4.6.10.** На круглий отвір радіуса  $\rho = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  в непрозорому екрані падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . На якій максимальній відстані від отвору на екрані в центрі дифракційної картини буде спостерігатися темна смуга?

**Відповідь:**  $r_0 = \frac{\rho^2}{k\lambda} = 4 \text{ м}$ , де  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{2k\lambda r_0} \quad , \quad k = 2, \\ \rho^2 &= 2k\lambda r_0 \\ r_0 &= \frac{\rho^2}{2\lambda} \end{aligned}$$

**4.6.11.** Екран знаходиться на відстані 40 м від точкового монохроматичного джерела світла ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ). На відстані  $R = 20 \text{ м}$  від

джерела розміщений екран з ірисовою діафрагмою. При якому радіусі отвору діафрагми центр дифракційного зображення отвору буде: а) найбільш темним; б) найбільш світлим.

**Відповідь:**  $\rho_k = k\lambda \frac{R(L-R)}{L}$ ; при  $k = 2$  центр дифракційної картини буде

найбільш темним ( $\rho_0 = 3,18 \text{ мм}$ ), при  $k = 1$ , центр буде найбільш світлим ( $\rho = 2,26 \text{ мм}$ ).

**4.6.12.** Точкове джерело світла ( $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ) знаходиться на відстані 11 м від екрана. Між джерелом світла і екраном на відстані  $r_0 = 5 \text{ м}$  від екрана розміщена ширма з круглим отвором, діаметр якого  $d = 4,2 \text{ мм}$ . Як зміниться освітленість в точці, яка знаходиться в центрі дифракційної картини, якщо ширму забрати?

**Відповідь:** Зменшиться.

**4.6.13.** Монохроматичне точкове джерело світла розміщене на осі зональної пластинки на відстані  $R$  від неї. Найбільш яскраве зображення джерела отримується на відстані  $r_0$  від пластинки. На яких відстанях отримуються інші зображення джерела?

**Відповідь:**  $r_n = \frac{r_0}{2n+1}$ , де  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$d \sin \varphi = k\lambda = 2n\lambda \Rightarrow \sin \varphi = \frac{k\lambda}{d}$$

$$d \sin(\varphi + \Delta\varphi) = \lambda / (k + \frac{1}{2})$$

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{\lambda}{2} (k + \frac{1}{2})$$

**4.6.14.** Знайти умову появи головного дифракційного максимуму при похилому падінні променів на решітку (кут падіння  $\theta_0$ ). Який вигляд

приймає ця умова, якщо  $d > \lambda$ , а порядок спектра  $k \ll \frac{d}{\lambda}$ ?

**3.1.40 4.6.15.** На щілину нормально падає паралельний пучок монохроматичного світла. Довжина хвилі падаючого світла вкладається в ширині щілини 8 раз. Яка ширина  $l$  нульового максимуму в дифракційній картині, що проектується лінзою на екран, який знаходиться від лінзи на відстані  $L = 1 \text{ м}$ .

**Відповідь:**  $l = \frac{L}{4} = 0,25 \text{ м}$ .

$$e = \frac{2L\lambda}{8\lambda} = \frac{2L}{8} = \frac{L}{4}$$

$$b \sin \theta = k\lambda \quad k_{\max} = \frac{b}{\lambda} = 5,1$$

$$b = k_{\max} \lambda, \quad n = (2k_{\max} + 1)$$

**3.1.49 4.6.16.** Який найбільший порядок  $k_{\max}$  для жовтої лінії ( $\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ) при нормальному падінні променів на щілину шириною  $b = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ? Скільки всього спостерігається дифракційних максимумів?

**Відповідь:**  $k_{\max} = \frac{b}{\lambda} = 5$ ;  $n = 2k + 1 = 11$ .

**3.1.44 4.6.17.** Яка кутова відстань між головним максимумом і найближчим до нього мінімумом спектра дифракційної решітки?

**Відповідь:**  $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k\lambda}{d}}}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{R}$$

$$f = \frac{Rr_0}{R+r_0} = \frac{r_0 R}{r_0 + R} \cdot \frac{1}{R}$$

$$f_n = \frac{R}{2n+1} = \frac{1}{\frac{r_0 + R}{r_0} (2n+1)}$$

$$\frac{1}{f_n} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R}; \quad r_n = \frac{f_n \cdot R}{R - f_n} = \frac{Rr_0}{(2n+1)R + 2n r_0}$$

**4.6.18.** Знайти кутовий розподіл дифракційних максимумів при дифракції на решітці, період якої рівний  $d$ , ширина щілини -  $b$ .

**4.6.19.** Чи можуть перекритися спектри першого і другого порядків дифракційної решітки при освітленні її видимим світлом ( $4000 \text{ \AA} < \lambda < 7000 \text{ \AA}$ )?

**Відповідь:** Ні, не можуть.

**3.1.45 4.6.20.** Довжини хвиль дублета у випромінюванні натрію рівні  $\lambda_1 = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ,  $\lambda_2 = 5,896 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Знайти мінімальне число щілин в дифракційній решітці, щоб розділити цей дублет в другому порядку? в першому порядку?

**Відповідь:**  $N_{k=2} = 491$ ;  $N_{k=1} = 989$ .  $\frac{d\lambda}{\lambda^2} = k N_k$ ;  $N_{k=2} = \frac{N\lambda}{2\lambda} = 491$ ;  $N_{k=1} = \frac{N\lambda}{\lambda} = 989$

**4.6.21.** Довжина хвиль  $D$ -ліній в спектрі збудження натрію рівні  $5889,95$  і  $5895,92 \text{ \AA}$  відповідно. Яку довжину повинна мати решітка, яка містить 600 штрихів на  $1 \text{ мм}$ , щоб розділяти ці лінії в спектрі першого порядку?

**Відповідь:**  $l = 1,7 \text{ мм}$ .

**4.6.22.** Довжини хвиль спектральних ліній, як правило, вимірюються

з точністю біля  $0,001 \text{ \AA}$  за допомогою спектрографів, роздільна сила яких складає тільки  $0,010 \text{ \AA}$ . Чи не порушуються при цьому якісь основні закони фізики? Пояснити.

**4.6.23.** Дифракційна решітка має  $N_0 = 200$  штрихів на міліметр. Під яким кутом повинно падати випромінювання на решітку, щоб в перпендикулярному до решітки напрямку спостерігався дифракційний максимум другого порядку при довжині хвилі  $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ?

**Відповідь:**  $\lambda_0 = 23^\circ 30'$ .

**4.6.24.** Зобразити приблизну дифракційну картину, що виникає при дифракції Фраунгофера від решітки з трьох однакових щілин, якщо відношення періоду решітки до ширини щілини рівне: а) двом; б) трьом.

**4.6.25.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda$  падає нормально на довгу прямокутну щілину ширини  $b$ . Знайти кутовий розподіл інтенсивності світла при Фраунгоферовій дифракції, а також кутове положення мінімумів і максимумів.

**Відповідь:**  $I_\varphi = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$ , де  $u = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi$ ; умова мінімумів:  $b \sin \varphi = k\lambda$ , де

$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ; умова максимумів:  $b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , де  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

**4.6.26.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  падає на щілину шириною  $b = 10^{-5} \text{ м}$  під кутом  $\varphi_0 = 30^\circ$  до її нормалі. Знайти кутове положення перших мінімумів, розміщених по обидві сторони центрального Фраунгоферового максимуму.

**Відповідь:**  $b(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = k\lambda$ , де  $k = +1$  і  $k = -1$ ; кути  $\varphi$  рівні відповідно  $33^\circ$  і  $27^\circ$ .

**4.6.27.** При нормальному падінні світла на дифракційну решітку кут дифракції для лінії  $\lambda = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  в другому порядку рівний  $45^\circ$ . Знайти

кут дифракції для лінії  $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  в третьому порядку.

**Відповідь:**  $\varphi = 55^\circ$ .

**4.6.28.** Світло з довжиною хвилі  $\lambda$  падає нормально на дифракційну решітку ширини  $l$ . Знайти її кутову дисперсію в залежності від кута дифракції  $\varphi$ .

**Відповідь:**  $\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\text{tg}\varphi}{\lambda}$ .

**4.6.29.** Є дві дифракційні решітки з періодами  $d_1$  і  $d_2$  і загальним числом штрихів  $N_1$  і  $N_2$ . При цьому  $d_1 < d_2$ , а  $N_1 > N_2$ , але добуток  $dN$  для обидвох решіток однаковий. У якій з решіток максимальна роздільна здатність більша, якщо спостерігати одну і ту ж спектральну лінію при нормальному падінні світла на решітку?

**Відповідь:**  $R_{\max} \leq \frac{dN}{\lambda}$ .

**4.6.30.** Грамофонну платівку можна використати в якості відбиваючої дифракційної решітки. Чому при цьому для отримання достатньо чіткої дифракційної картини необхідно направляти світло під можливо більшим кутом до поверхні платівки?

**4.6.31.** Чи зміниться роздільна здатність і дисперсійна область дифракційної решітки, якщо закріпивши нерухомо трубу, в якій спостерігаються дифракційні спектри, закрити через одну щілини решітки?

**4.6.32.** Чи змінюється роздільна здатність решітки при зміні нахилу первинного пучка, падаючого на неї?

**Відповідь:** Ні.

**4.6.33.** Як зміниться роздільна здатність і дисперсійна область пластинки Люмера-Герке, якщо: а) її товщину збільшити в два рази, а довжину залишити без зміни; б) довжину збільшити в два рази, а товщину залишити без зміни?

**Відповідь:** а) роздільна здатність не зміниться, а дисперсійна область

зменшиться в два рази;

б) роздільна здатність збільшиться в два рази, дисперсійна область не зміниться.

4.6.34. Якою повинна бути довжина  $t$  основи скляної призми, щоб вона мала таку ж роздільну здатність, як і пластинка Льюммера-Герке з довжиною  $0,20$  м? Показник заломлення пластинки  $n = 1,5$ ; дисперсія показника заломлення призми  $dn/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$ ;  $\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

Відповідь:  $t = \frac{L(n-1)}{\lambda \frac{dn}{d\lambda}} = 44 \text{ мм}$ .

4.6.35. Ешелон Майкельсона складається із  $N = 30$  скляних пластинок з показником заломлення  $n = 1,5$ , товщина кожної з них  $h = 1 \text{ см}$ . Якою повинна бути довжина  $t$  основи скляної призми, щоб вона мала таку ж роздільну здатність, що і розглядуваний ешелон? Дисперсія показника заломлення призми  $dn/d\lambda = 956 \text{ см}^{-1}$ ,  $\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

Відповідь:  $t = \frac{Nh(n-1)}{\lambda \frac{dn_{np}}{d\lambda}} = 2,6 \text{ мм}$ .

4.6.34.  $d \sin \varphi = R \Delta \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{R \Delta \varphi}{d}$   
 $d \sin (\varphi + \Delta \varphi) = R \left( \Delta \varphi + \frac{1}{N} \right)$   
 $\sin (\varphi + \Delta \varphi) = \frac{R}{d} \left( \Delta \varphi + \frac{1}{N} \right)$   
 $\sin (\varphi + \Delta \varphi) \approx \sin \varphi + (\sin \varphi)' \Delta \varphi = \sin \varphi + \cos \varphi \cdot \Delta \varphi$   
 $\Delta \varphi = \frac{\sin (\varphi + \Delta \varphi) - \sin \varphi}{\cos \varphi}$   
 $\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{R^2 \Delta \varphi^2}{d^2}}$   
 $\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \Delta \varphi^2}{d^2}}} \left( \frac{R \Delta \varphi}{d} + \frac{1}{N} \right) = \frac{\lambda}{d \Delta \varphi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R^2 \Delta \varphi^2}{d^2}}$

ТЕМА V

ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

5.1. Програмні питання

Геометрична оптика – граничний випадок хвильової оптики. Принцип Ферма. Закони геометричної оптики. Заломлення світла на плоскій поверхні. Відбивання світла на плоскій поверхні. Відбивання і заломлення світла на сферичній поверхні. Правило знаків. Лінза. Побудова зображень в лінзах. Плоскі і сферичні дзеркала.

Аберації оптичних систем. Сферична і хроматична аберації. Астигматизм.

Мікроскоп і телескоп. Проекційні апарати. Роздільна здатність і світлосила об'єктива. Око, як оптичний прилад.

5.2. Основні поняття, закони і формули

Світна точка – це джерело світла, яке не має розмірів.

Світловий промінь – лінія, нормальна до хвильової поверхні, вздовж якої переноситься світлова енергія. Сукупність світлових променів називається світловим пучком.

Пучок, промені якого мають одну спільну точку перетину, називають гомоцентричним.

5.2.1. Закони геометричної оптики

Закон прямолінійного поширення світла: світло в однорідному середовищі поширюється по прямій лінії.

Закон незалежності поширення світлових пучків: зустрічаючись в просторі два або більше світлових пучків, що поширюються в різних напрямках, не впливають один на одного.

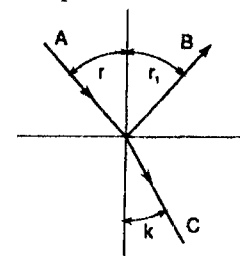


Рис. 5.1

Закон відбивання світла: падаючий і відбитий промені та нормаль до відбиваючої поверхні в точці падіння лежать в одній площині, причому

$$r_1 = r, \tag{5.1}$$

де  $r$  – кут падіння,  $r_1$  – кут відбивання (рис. 5.1).

Закон заломлення світла: падаючий і заломлений промені та нормаль до поверхні поділу в точці падіння лежать в одній площині, причому

$$\Delta \varphi = \frac{1}{N \cos \varphi} \left( \frac{R \Delta \varphi}{d} + \frac{1}{N} \right)$$

$$\frac{\sin r}{\sin k} = n_{21}, \quad \text{або} \quad \frac{\sin k}{\sin r} = n_{21}, \quad (5.2)$$

де  $k$  – кут заломлення,  $n_{21}$  – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого,  $n_{12}$  – відносний показник заломлення першого середовища відносно другого.

Із (5.2)

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}. \quad (5.3)$$

Абсолютний показник заломлення  $n$  показує, в скільки разів швидкість світла у вакуумі більша за швидкість світла в даному середовищі:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (5.4)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $v$  – швидкість світла в даному середовищі.

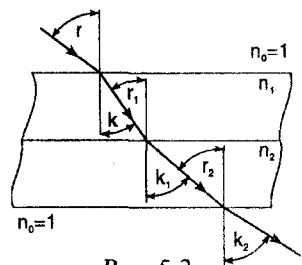


Рис. 5.2

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (5.5)$$

або

$$n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2, \quad (5.6)$$

тобто

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (5.7)$$

де  $v_1$  і  $v_2$  – відповідно швидкості світла в першому і другому середовищах,  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – довжини хвиль світла в першому і другому середовищах.

### 5.2.2. Повне внутрішнє відбивання

**Умова повного відбивання:** світло повинно переходити із оптичного більш густого середовища в оптично менш густе ( $n_1 > n_2$ ).

Кут падіння  $r$ , якому відповідає кут заломлення  $k = \pi/2$ , називається **граничним кутом** (рис. 5.3):

$$\sin r_{zp} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.8)$$

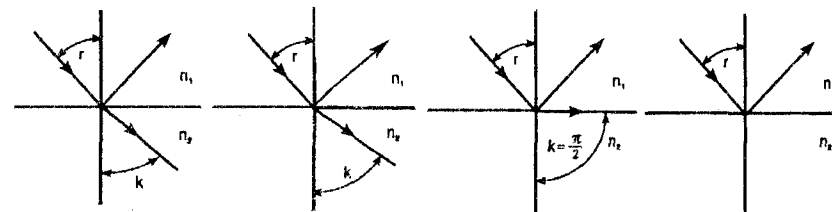


Рис. 5.3

### 5.2.3. Принцип Ферма

Світло поширюється шляхом, оптична довжина якого екстремальна, тобто вона є або мінімальною, або максимальною, або однаковою для всіх можливих шляхів між розглянутими точками.

Умовою екстремальної оптичної довжини шляху є рівність нулю варіації інтеграла, що визначає оптичну довжину шляху променя:

$$\delta \int_1^2 n ds = 0. \quad (5.9)$$

Рис. 5.4

### 5.2.4. Заломлення світла плоскою поверхню

Гомоцентричний пучок після проходження через плоску поверхню перестає бути гомоцентричним. Для малих кутів має місце співвідношення:

$$\frac{s'}{s} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.10)$$

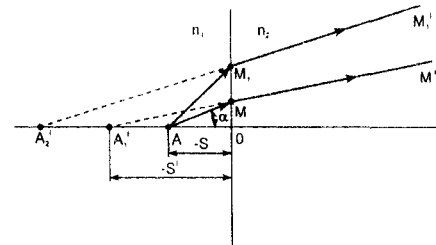


Рис. 5.5

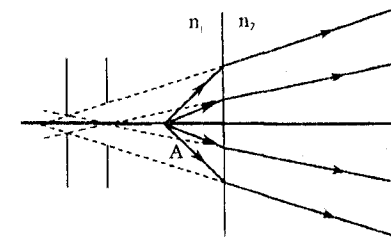


Рис. 5.6

### 5.2.5. Заломлення світла плоскопаралельною пластинкою

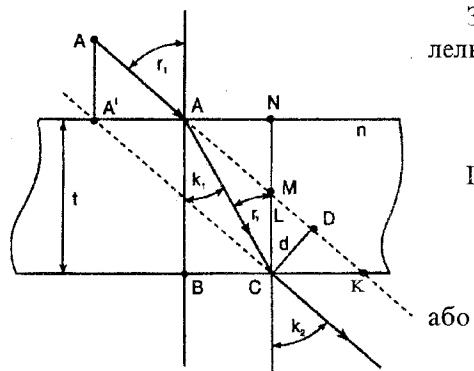


Рис. 5.7

Зміщення променя плоскопаралельною пластинкою

$$d = \frac{t \sin(r-k)}{\cos k} \quad (5.11)$$

Поздовжнє зміщення ( $AA' = CM = L$ )

$$L = t \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} k}{\operatorname{tgr}} \right) \quad (5.12)$$

$$L = t \frac{n-1}{n} \quad (5.13)$$

### 5.2.6. Заломлення променів призмою

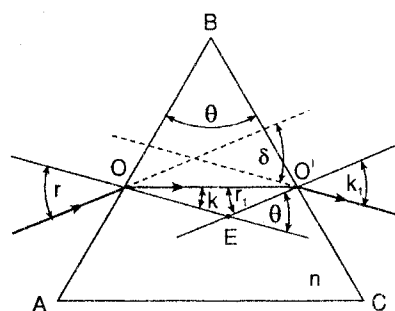


Рис. 5.8

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (5.14)$$

де  $\theta$  – заломний кут призми,  $\delta$  – кут повного відхилення променя,  $n$  – показник заломлення призми.

Для оптичного клина (кут  $\theta$  – малий)

$$\delta = \theta(n-1) \quad (5.15)$$

Гранична роздільна здатність призми

$$R = a \frac{dn}{d\lambda} \quad (5.15, a)$$

де  $a$  – величина основи призми,  $dn/d\lambda$  – дисперсія призми.

### 5.2.7. Правила знаків

1. Лінійні відрізки вважаються додатними, якщо напрямок їх відліку від оптичної системи (деталі) співпадає з напрямком поширення світла і навпаки (рис. 5.9).

2. Радіус кривизни поверхні вважається додатним, якщо центр кривизни знаходиться справа від поверхні, і навпаки (рис 5.10).

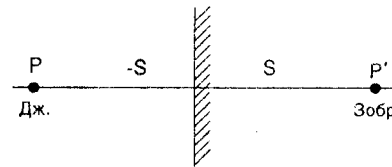


Рис. 5.9

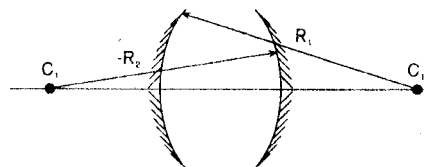


Рис. 5.10

3. Величини товщин оптичних деталей та повітряних проміжків між заломними поверхнями завжди вважаються додатними.

4. Величини предметів та їх зображень додатні, якщо вони знаходяться над оптичною віссю і навпаки (рис 5.11).

5. Кут променя з оптичною віссю вважається додатним, якщо для суміщення осі з променем вісь треба повертати за годинниковою стрілкою, і навпаки (рис. 5.12; кути  $-u$  і  $u$ ).

6. Кут між променем і нормаллю до поверхні в точці падіння променя вважається додатним, якщо для суміщення нормалі і променя, нормаль треба повертати за годинниковою стрілкою, і навпаки (рис. 5.12; кути  $-r$  і  $-k$ ).

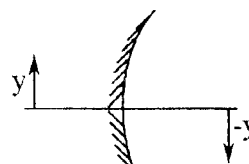


Рис. 5.11

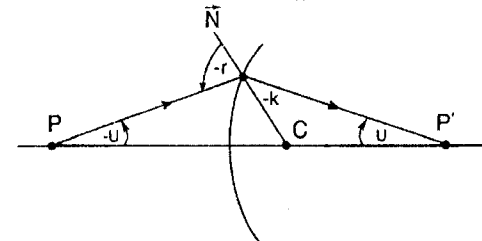


Рис. 5.12

### 5.2.8. Заломлення світла на сферичній поверхні

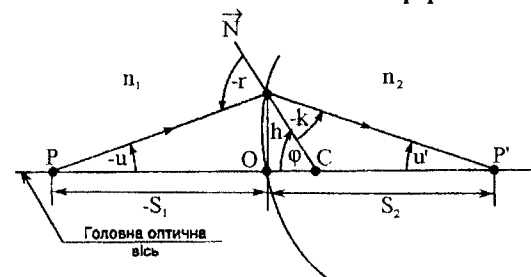


Рис. 5.13

Головна оптична вісь сферичної поверхні – пряма, яка проходить через точкове джерело  $P$  і центр кривизни сферичної поверхні.

Параксіальні промені – промені, які виходять з точки, що лежить на головній оптичній осі, і

складають з нею такі малі кути, синуси і тангенси яких можна замінити самими кутами, а косинуси вважати рівними одиниці.

**Нульовий інваріант Аббе:**

$$n_1 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{S_1} \right) = n_2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{S_2} \right). \quad (5.16)$$

**Рівняння нульового променя:**

$$\frac{n_2}{S_2} - \frac{n_1}{S_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (5.17)$$

де  $n_1$  і  $n_2$  – абсолютні показники заломлення відповідно 1-го і 2-го середовищ,  $R$  – радіус кривизни сферичної поверхні,  $S_1$  – відстань від точки  $P$  до сферичної поверхні,  $S_2$  – відстань від сферичної поверхні до точки  $P'$ .

**Оптична сила заломлюючої поверхні**

$$\Phi = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (5.18)$$

або

$$\Phi = \frac{n_2}{S_2} - \frac{n_1}{S_1}. \quad (5.19)$$

**Фокуси заломлюючої поверхні**

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}. \quad (5.20)$$

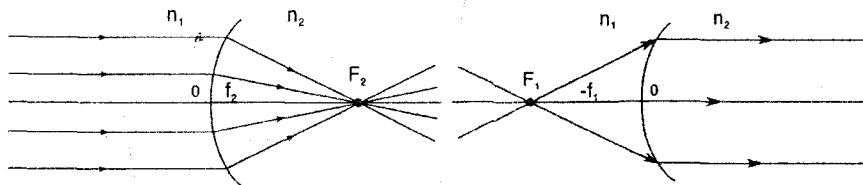


Рис. 5.14

Рис. 5.15

$$f_1 = \frac{-n_2 R}{n_2 - n_1}. \quad (5.21)$$

Із (5.20) і (5.21):

$$\frac{f_2}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1}. \quad (5.22)$$

**Формула (рівняння) сферичної поверхні:**

$$\frac{f_2}{S_2} - \frac{f_1}{S_1} = 1. \quad (5.23)$$

**Формула Ньютона:**

$$x_1 x_2 = f_1 f_2. \quad (5.24)$$

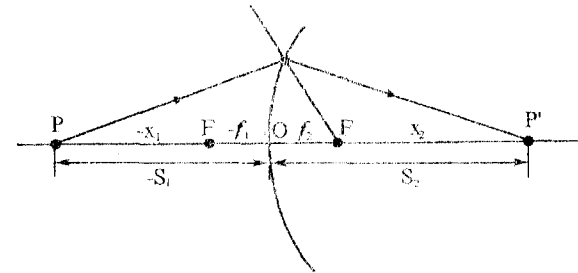


Рис. 5.16

**Оптична сила заломлюючої поверхні:**

$$\Phi = -\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}. \quad (5.25)$$

**5.2.9. Оптична система** – це сукупність відбиваючих і заломлюючих поверхонь, віддалених одна від одної оптично однорідними середовищами.

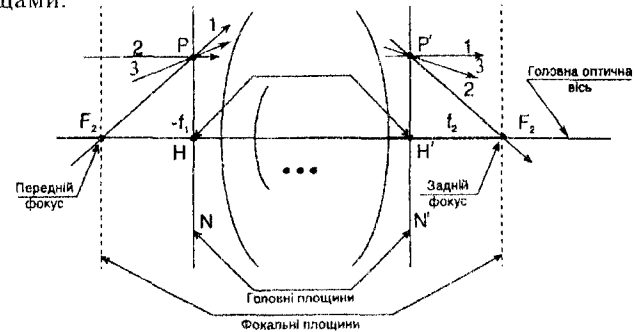


Рис. 5.17

**Центрована оптична система** – це оптична система, центри кривизни поверхонь якої лежать на одній прямій (рис. 5.17).

**Головні площини центрованої оптичної системи** – спряжені площини, в яких об'єкт і його зображення мають однакові розміри ( $\beta = +1$ ).

**5.2.10. Тонкі лінзи** – це лінзи, товщина яких мала в порівнянні з радіусами кривизни поверхонь, які обмежують лінзу.

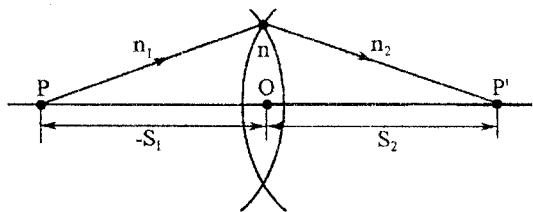


Рис. 5.18

**Формула лінзи** (якщо  $n_1 = n_2$ ):

$$\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} = (N-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.26)$$

де  $S_1$  і  $S_2$  – відповідно відстані від об'єкта (точки  $P$ ) до лінзи і від лінзи до зображення точки  $P'$ ,  $N = \frac{n}{n_1}$  – відносний показник заломлення речовини лінзи (відносно однорідного середовища, в якому знаходиться лінза).

**Фокуси лінзи**

$$f_2 = \frac{1}{(N-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (5.27)$$

$$f_1 = -\frac{1}{(N-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (5.28)$$

При  $n_1 = n_2$

$$f_1 = -f_2. \quad (5.29)$$

При  $n_1 \neq n_2$

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}. \quad (5.30)$$

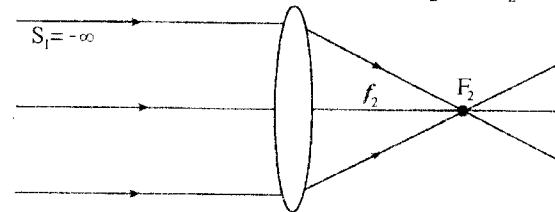


Рис. 5.19

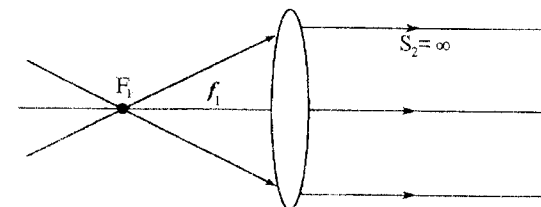


Рис. 5.20

**Косе падіння променів на лінзу:**

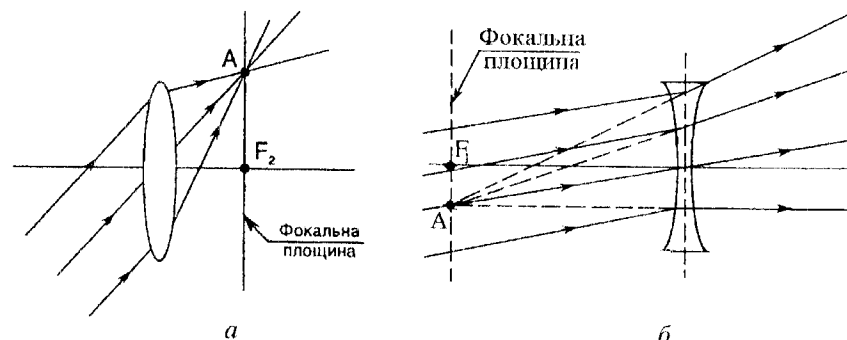


Рис. 5.21

**Оптична сила лінзи**

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (5.31)$$

**Діоптрія** – оптична сила лінзи в повітрі, фокусна відстань якої дорівнює 1 м.



Формула тонкої лінзи:

$$\frac{1}{S_1} \pm \frac{1}{S_2} = \pm \frac{1}{f} \quad (5.32)$$

Тут знак “-” перед  $1/f$  ставиться у випадку розсіювальних лінз, знак “-” перед  $1/S_2$  ставиться у випадку коли зображення отримується уявним.

Побудова зображень в лінзах

Знаходження зображення точкового об’єкта встановлюється двома із трьох променів:

- промінь, паралельний головній оптичній осі (промінь 1, рис. 5.22), після заломлення в лінзі проходить через задній фокус;
- промінь, який проходить через фокус (промінь 2, рис. 5.22), після заломлення в лінзі проходить паралельно головній оптичній осі;
- промінь, який проходить через оптичний центр (промінь 3, рис. 5.22), не заломлюється.

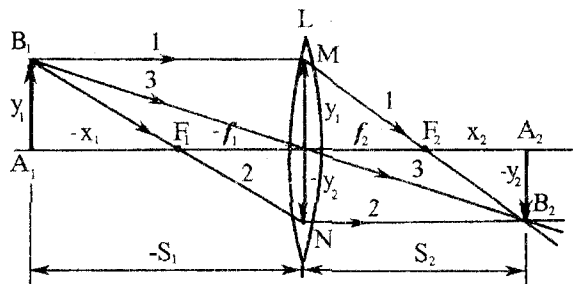


Рис. 5.22

Збиральна лінза

а) предмет знаходиться за подвійним фокусом

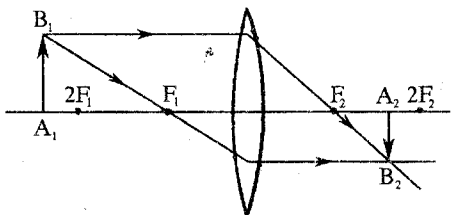


Рис. 5.23

Зображення дійсне, обернене, зменшене.

б) предмет знаходиться між подвійним фокусом і фокусом:

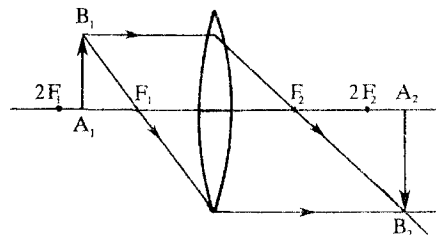


Рис. 5.24

Зображення дійсне, обернене, збільшене.

в) предмет знаходиться між лінзою і фокусом:

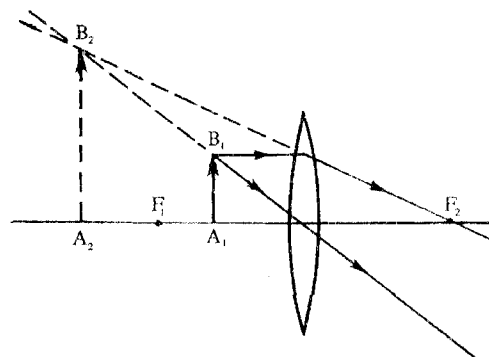


Рис. 5.25

Зображення уявне, пряме, збільшене.

Розсіювальна лінза

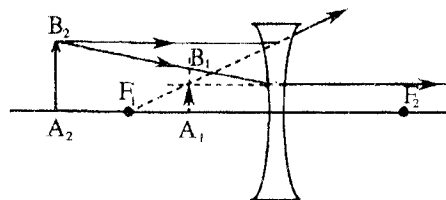


Рис. 5.26

Зображення уявне, пряме, зменшене.

Лінійне збільшення лінзи ( $\beta$ ) (рис. 5.22)

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (5.33)$$

або

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1} \quad (5.34)$$

Система із двох лінз (рис. 5.27):

$$f_c = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}, \quad (5.35)$$

$$\Phi_c = \Phi_1 + \Phi_2 - l\Phi_1\Phi_2, \quad (5.36)$$

де  $f_1'$ ,  $f_2'$  і  $f_c$  – відповідно фокусні відстані кожної із лінз і системи із 2-х лінз,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  і  $\Phi_c$  – оптичні сили лінз і системи із 2-х лінз відповідно.

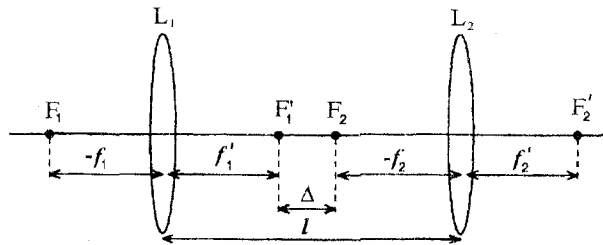


Рис. 5.27

### 5.2.11. Дзеркала

Дзеркало – тіло, виготовлене із скла, металу або пластмаси, одна із поверхонь якого володіє правильною формою, покрита відбиваючим шаром і має шорховатість, не більшу сотих долей довжини світлової хвилі.

#### Плоске дзеркало

Якщо відбиті промені утворюють розбіжний гомоцентричний пучок, то зображення  $S'$  точки  $S$  є уявне (рис. 5.28).

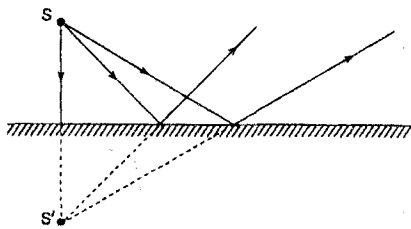


Рис. 5.28

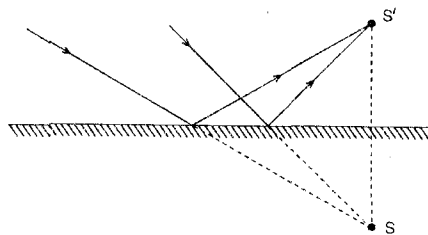
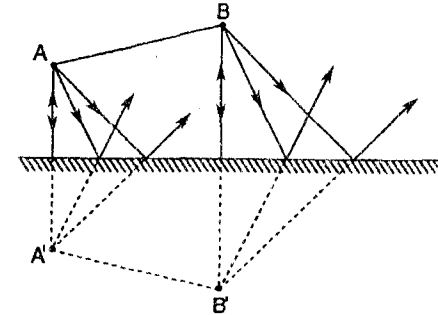


Рис. 5.29

Якщо на дзеркало падає збіжний гомоцентричний пучок, то плоске дзеркало дає дійсне зображення, розміщене перед дзеркалом (рис. 5.29).

#### Зображення протяжного об'єкта



Зображення є дзеркальним.

Рис. 5.30

#### Сферичні дзеркала Вгнуте дзеркало

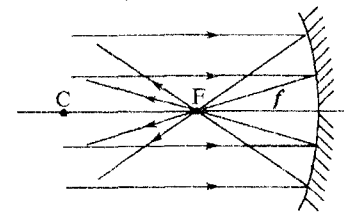


Рис. 5.31

#### Опукле дзеркало

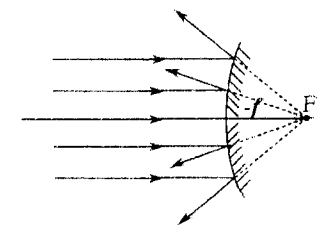


Рис. 5.32

$$f = \frac{R}{2}, \quad (5.37)$$

де  $R$  – радіус кривизни дзеркала.

#### Формула сферичного дзеркала:

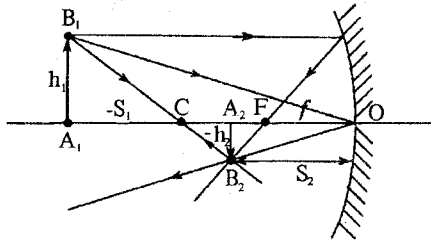
$$\frac{1}{S_1} \pm \frac{1}{S_2} = \pm \frac{1}{f}, \quad (5.38)$$

де  $S_1$  – відстань від об'єкта до дзеркала,  $S_2$  – відстань від дзеркала до зображення, знак “-” перед  $1/f$  відноситься до дзеркала з уявним фокусом (опукле дзеркало), знак “-” перед  $1/S_2$  ставиться, коли зображення є уявним.

#### Побудова зображень в сферичних дзеркалах

##### Вгнуте дзеркало

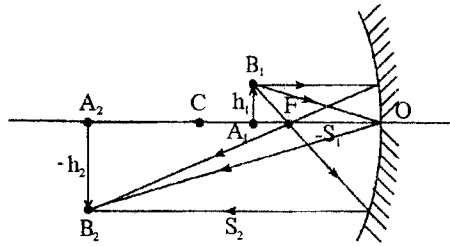
- Об'єкт за центром кривизни



Зображення  
дійсне, обернене, зменшене.

Рис. 5.33

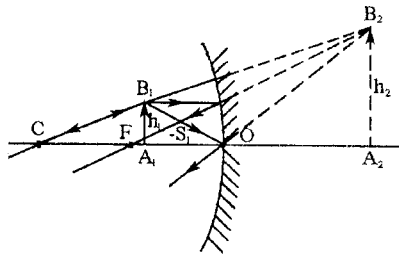
• Об'єкт між центром кривизни і фокусом



Зображення  
дійсне, обернене, збільшене.

Рис. 5.34

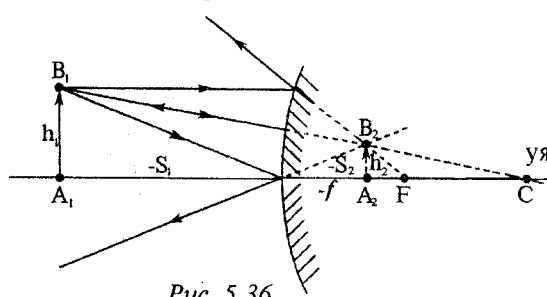
• Об'єкт між фокусом і дзеркалом



Зображення  
уявне, пряме, збільшене.

Рис. 5.35

• Опукле дзеркало



Зображення  
уявне, пряме, зменшене.

Рис. 5.36

Лінійне збільшення зображення в сферичному дзеркалі (див. рис. 5.34)

$$\beta = \frac{h_2}{h_1} = \pm \frac{S_2}{S_1} \quad (5.39)$$

В формулі (5.39) знак "+" ставиться, коли зображення пряме, знак "-", коли зображення обернене.

### 5.2.12. Оптичні прилади

Лу́па – проста система (одна або декілька лінз) з невеликою фокусною відстанню (від 100 до 10 мм), яка розміщується між розглядуваним предметом і оком.

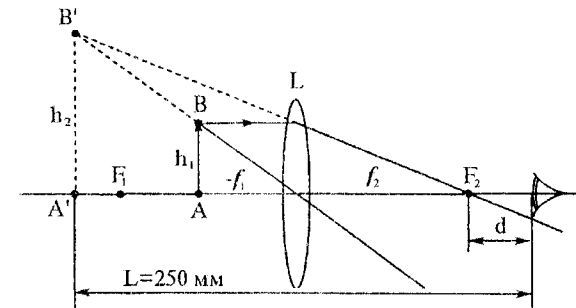


Рис. 5.37

Збільшення лупи

$$\beta = \frac{250}{f} \left( 1 + \frac{d}{L} \right), \quad (5.40)$$

або, якщо  $d = 0$ ,

$$\beta = \frac{250}{f}, \quad (5.41)$$

де  $d$  – відстань від ока до фокуса лупи,  $L = 250$  мм – відстань найкращого бачення,  $f_1 = f_2 = f$  – фокусна відстань лупи (всі характерні відстані вираженні в мм).

**Мікроскоп**

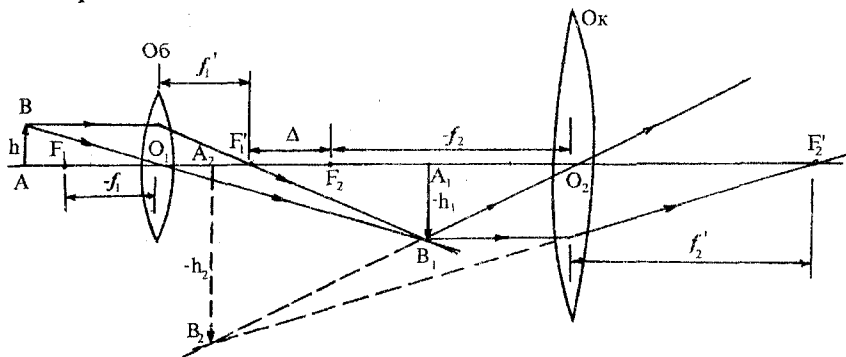


Рис. 5.38

**Збільшення мікроскопа**

$$\beta = \beta_{об} \cdot \beta_{ок}, \quad \text{або} \quad \boxed{|\beta| = \frac{L}{f} = \frac{L\Delta}{f_{об} f_{ок}}} \quad (5.42)$$

де  $\beta_{об} = \frac{\Delta}{f_{об}}$  – збільшення об'єктива,  $\beta_{ок} = \frac{L}{f_{ок}}$  – збільшення окуляра,

$L = 250 \text{ мм}$  – відстань найкращого бачення,  $f = \frac{\Delta}{f_{об} \cdot f_{ок}}$  – фокусна відстань

всієї оптичної системи мікроскопа,  $f_{об}$  і  $f_{ок}$  – відповідно фокусні відстані об'єктива і окуляра,  $\Delta$  – відстань між заднім фокусом об'єктива і переднім фокусом окуляра (оптична довжина тубуса мікроскопа).

**Числова апертура  $A$**  мікроскопа характеризує його світлосилу і роздільну здатність. Числовою апертурою називають добуток показника заломлення  $n$  імерсійного середовища на синус апертурного кута  $u_A$ :

$$\boxed{A = n \sin u_A} \quad (5.43)$$

**Роздільна сила мікроскопа** – це найменша відстань між двома точками розглядуваного об'єкта, при якій їх ще видно роздільно:

$$\boxed{d \geq \frac{0,5\lambda_0}{A} = \frac{0,5\lambda_0}{n \sin u_A}} \quad (5.44)$$

де  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі,  $A = n \sin u_A$  – числова апертура об'єктива.

**Зорова труба Кеплера**

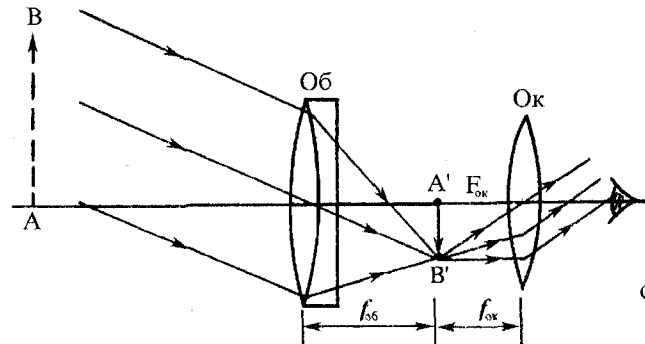


Рис. 5.39

**Збільшення зорової труби Кеплера**

$$|\beta| = \frac{f_{об}}{f_{ок}} = \frac{D}{D'} \quad (5.45)$$

де  $D$  – діаметр вхідної зіниці (діаметр вхідного пучка),  $D'$  – діаметр вихідної зіниці (діаметр вихідного пучка).

**Зорова труба Галілея**

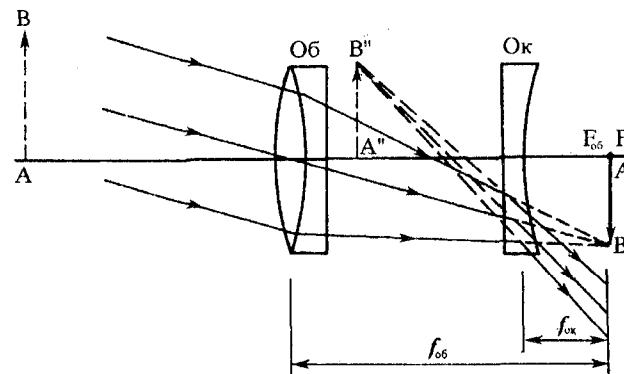


Рис. 5.40

**Збільшення зорової труби Галілея**

$$|\beta| = \frac{f'_{об}}{f_{ок}} \quad (5.46)$$

**Світлосила приладу** визначає освітленість зображення при заданій яскравості об'єкта.

## Світлосила об'єктива фотоапарата

$$E = \frac{k\pi B}{4} \left(\frac{D}{f}\right)^2, \quad (5.47)$$

де  $k < 1$  – коефіцієнт послаблення,  $f$  – фокусна відстань об'єктива,  $D$  – його діаметр,  $D/f$  – відносний отвір об'єктива,  $B$  – яскравість об'єкта.

## Світлосила проєкційного об'єктива:

$$E = \frac{k\pi B}{\beta^2} \left(\frac{D}{f}\right)^2, \quad (5.48)$$

де  $\beta$  – лінійне збільшення.

## 5.3. Контрольні запитання

**5.3.1.** Використовуючи принцип Гюйгенса, вивести закони відбивання і заломлення світла на межі двох середовищ.

**5.3.2.** З'ясуйте фізичний зміст абсолютного та відносного показників заломлення світла?

**5.3.3.** З'ясуйте, чому не може виникнути повного відбивання при переході світла із води в скло?

**5.3.4.** З'ясуйте механізм виникнення “місячної доріжки” на поверхні водоймища в ясну місячну ніч? Від чого залежить довжина “місячної доріжки”?

**5.3.5.** Людина, яка стоїть на березі озера, бачить у дзеркальній поверхні води зображення Сонця. Як перемішатиметься це зображення, якщо людина відходить від озера? Вважати, що сонячні промені паралельні.

**5.3.6.** Якої форми повинна бути відбиваюча поверхня, щоб вона збирала всі паралельні промені в одній точці?

**5.3.7.** Світна точка знаходиться в фокальній площині збиральної лінзи на деякій відстані від головної оптичної осі. Позаду лінзи перпендикулярно до головної оптичної осі розміщено плоске дзеркало. Де буде знаходитись зображення світної точки?

**5.3.8.** Розмістити дві лінзи так, щоб паралельні промені, пройшовши через обидві лінзи і залишилися паралельними. Зробити це: а) у випадку двох збиральних лінз; б) у випадку однієї розсіювальної і однієї збиральної лінз.

**5.3.9.** На якій відстані від збиральної лінзи потрібно розмістити предмет, щоб відстань від предмета до його дійсного зображення була найменшою?

**5.3.10.** На рис. 5.41 показано хід променя на межі двох середовищ. В якому із цих середовищ швидкість світла більша?

**5.3.11.** Опишіть ґрунтуючись на атомній моделі, чому синє світло поширюється в склі повільніше, ніж червоне?

**5.3.12.** На збиральну лінзу падає пучок променів із точки  $S$ , розміщеної в фокальній площині лінзи (рис. 5.42). Як підуть ці промені після лінзи?

**5.3.13.** На розсіювальну лінзу падає пучок променів із точки  $S$ , розміщеної в фокальній площині лінзи (рис. 5.43). Як підуть ці промені після лінзи?

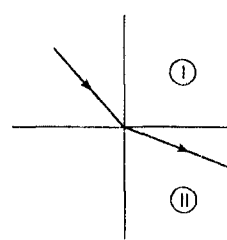


Рис. 5.41

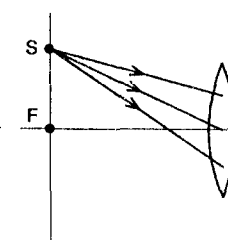


Рис. 5.42

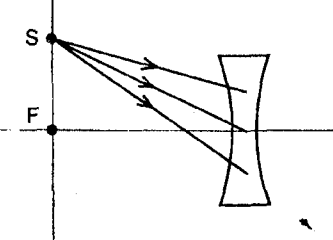


Рис. 5.43

**5.3.14.** Побудуйте хід променів в кулі, яка дає 5-кратне збільшення.

**5.3.15.** За якої умови зображення предмета у збиральній лінзі буде уявним? Чи можна бачити це зображення? Як? Чи можна дістати його на екрані? Чи можна його сфотографувати?

**5.3.16.** Розрахуйте дволінзовий мікроскоп із 100-кратним збільшенням, і зробіть в масштабі рисунок головних променів.

**5.3.17.** Як зміниться зображення, отримане за допомогою лінзи, якщо половину лінзи заклеїти чорним папером? Як зміниться зображення, якщо, не зсуваючи лінзи, поміняти місцями предмет і екран?

**5.3.18.** В якому випадку одна і та ж лінза є розсіювальною, а в якому – збиральною?

**5.3.19.** Чому для телескопів застосовуються довгофокусні, а для мікроскопів – короткофокусні об'єктиви?

**5.3.20.** Яким повинно бути збільшення мікроскопа, якщо повністю використати роздільну здатність його об'єктива?

**5.3.21.** Поясніть, чому для того, щоб отримати чітке зображення предмета, короткозорий примружує очі?

**5.3.22.** Які окуляри слід приписати людині, яка у воді бачить нормально?

**5.3.23.** Поясніть, чому далекозорі люди, втративши окуляри, можуть читати дивлячись у маленький 3,5 мм отвір, зроблений в аркуші паперу.

5.3.24. Як відрізнити окуляри для далекозорих від окулярів для короткозорих ?

5.3.25. Якою повинна бути мінімальна відстань між предметом і екраном, при якій можливе отримання дійсного зображення предмета за допомогою збиральної лінзи з оптичною силою  $\Phi$ ?

5.3.26. Незалежно від збільшення оптичного приладу, за допомогою якого ми спостерігаємо зірки, більшість зірок залишаються точковими джерелами і утворюють точкові зображення. Чи насправді їх зображення будуть тільки точками? Як залежить розмір зображення від діаметра лінзи?

#### 5.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задачі з геометричної оптики умовно можна поділити на три типи: а) задачі, пов'язані з відбиванням і заломленням світла на плоских поверхнях; б) задачі, пов'язані з відбиванням і заломленням світла на сферичних поверхнях; в) задачі, пов'язані з оптичними приладами (лупа, мікроскопи, телескопи, зображувальні апарати тощо).

Задачі, в яких вимагається визначити хід світлового променя при наявності однієї або декількох заломлюючих поверхонь (наприклад, хід променя через плоскопаралельну пластину чи призму), розв'язують користуючись законом заломлення (5.6)

$$\frac{\sin r}{\sin k} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{або} \quad n_1 \sin r = n_2 \sin k, \quad (5.49)$$

де  $r$  – кут падіння,  $k$  – кут заломлення,  $n_{12}$  – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого,  $n_1$  і  $n_2$  – абсолютні показники заломлення середовищ, тобто їх показники заломлення відносно вакууму. Формулу (5.49) необхідно застосовувати до кожного випадку заломлення світла на межі двох середовищ, використовуючи геометричні співвідношення, які випливають із умови задачі. Якщо, за умовою, промінь падає на межу поділу двох середовищ з боку оптично більш густого ( $n_1 > n_2$ ), то розрахунки можуть дати значення синуса кута заломлення більшого за одиницю. Це означає, що промінь не заломлюється на межі, а повністю відбивається від неї (має місце повне відбивання).

Розв'язуючи задачі, в яких треба знайти зображення світної точки, яке отримується в результаті заломлення на плоскій поверхні, слід пам'ятати, що при цьому гомоцентричність світлових пучків не зберігається. Так, продовження трьох заломлених на плоскій поверхні променів 1,2,3 перетинаються в точках А, В, С (рис. 5.44). Тут не існує

такої однієї точки  $S_2$ , яка була б зображенням точки  $S_1$ . У випадку вузьких світлових пучків, які падають на межу поділу двох середовищ нормально (рис.5.45), їх гомоцентричність зберігається. Відстані від світної точки  $S_1$  і його уявного зображення  $S_2$  до заломлюючої поверхні відповідно  $l_1$  і  $l_2$  пов'язані формулою (5.10):

$$\frac{l_1}{n_1} = \frac{l_2}{n_2}. \quad (5.50)$$

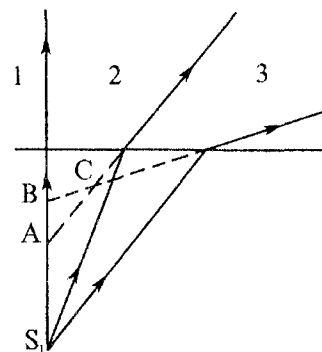


Рис.5.44

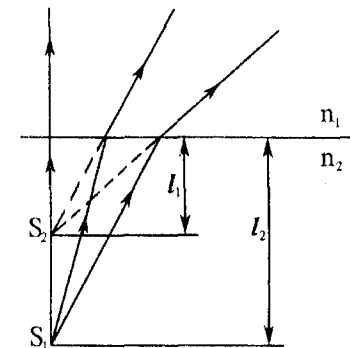


Рис.5.45

Той факт, що  $l_1$  і  $l_2$  мають однакові знаки свідчить, що точки  $S_1$  і  $S_2$  лежать завжди по один бік від заломлюючої поверхні.

За допомогою формули (5.50) можна також знайти зображення при наявності декількох паралельних площин, які розділяють середовища з різними показниками заломлення. В таких випадках зображення, яке утворене при першому заломленні, приймають за об'єкт і за формулою (5.50) знаходять нове зображення, яке отримується при наступному заломленні.

При заломленні світла на сферичних поверхнях користуються параксіальними пучками, оскільки тільки вони зберігають гомоцентричність. При розв'язку задач в даному випадку користуються наведеними вище співвідношеннями (5.16) – (5.39). Зауважимо лише, що при використанні вказаних формул необхідно враховувати правила знаків. Крім того, формула (5.32)

$$\frac{1}{S_1} \pm \frac{1}{S_2} = \pm \frac{1}{f},$$

одночасно є і формулою сферичного дзеркала. Тут також, при її застосуванні, необхідно враховувати правила знаків.

При розв'язуванні задач пов'язаних з оптичними приладами і інструментами, користуються формулами, згадуваними в п.п. а і б та формулами (5.41) – (5.48), які визначають збільшення і роздільну здатність оптичного приладу чи інструменту. Додамо лише, що роздільна здатність телескопа

$$R = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{D}{1,22\lambda}, \quad (5.51)$$

де  $\delta\varphi$  – кутова відстань між найближчими точками, які ще розділяються,  $D$  – діаметр об'єктива телескопа,  $\lambda$  – довжина хвилі світла.

### 5.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 5.5.1.** Два середовища розділені плоскопаралельною пластинкою (рис.5.46). Показник заломлення першого і другого середовищ та пластинки, відповідно рівні  $n_1$ ,  $n_2$  і  $n$  ( $n > n_1$ ). Промінь світла падає із першого середовища на пластинку під кутом  $r_1$ . Визначити кут  $k_2$ , під яким промінь вийде із пластинки.

**Розв'язок.** Проходячи через пластинку, світловий промінь двічі заломлюється на її гранях. У випадку падіння променя на межу першого середовища з пластинкою маємо:

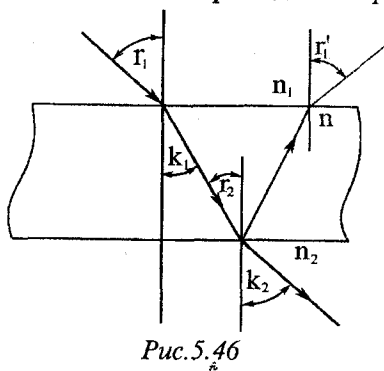


Рис.5.46

$$n_1 \sin r_1 = n \sin k_1, \quad (1)$$

а при падінні світла на межу пластинки із другим середовищем:

$$n \sin r_2 = n_2 \sin k_2. \quad (2)$$

Із (1) і (2) отримуємо, враховуючи,

що  $k_1 = r_2$ :

$$n_1 \sin r_1 = n_2 \sin k_2, \quad (3)$$

Таким чином, шуканий нами кут  $k_2$  визначиться із рівності (3):

$$\sin k_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin r_1. \quad (4)$$

Якщо  $n_1 > n_2$ , то може виявитись, що  $\sin k_2$ , врахований за (4), буде більшим за одиницю. Це означатиме, що промінь не ввійде в друге середовище, а повністю відіб'ється від межі пластинки з другим середовищем. Легко можна довести, що при цьому промінь знову

виявиться в першому середовищі, вийшовши із пластинки під кутом  $r_1' = r_1$ . Якщо  $n_1 = n_2$ , то  $\sin k_2 = \sin r_1$  тобто  $k_2 = r_1$ .

**Задача 5.5.2.** Визначити, наскільки плоскопаралельна скляна пластинка товщиною  $t = 10$  см зміщує промінь світла, який падає на неї під кутом  $r_1 = 70^\circ$ . Показник заломлення скла  $n = 1,5$ .

**Розв'язок.** Після заломлення світлового променя в точці  $A$  (на межі повітря-скло) (рис. 5.47) він падає не в точку  $K$ , а в точку  $C$  (на межі скло-повітря), тобто він зміститься паралельно сам собі на величину  $CD$ , яку необхідно знайти. Із рис. 5.47 маємо:

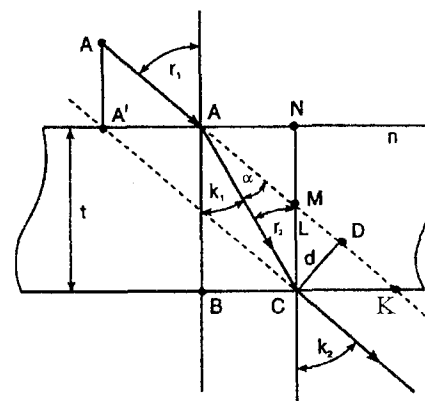


Рис.5.47

$$CD = AC \sin \alpha, \quad (1)$$

де  $\alpha = r_1 - k_1$ . Тоді:

$$CD = AC \sin (r_1 - k_1). \quad (2)$$

Із  $\Delta ABC$  знайдемо  $AC$ :

$$AC = \frac{AB}{\cos k_1} = \frac{t}{\cos k_1}. \quad (3)$$

При врахуванні (3), рівність (2) набуде вигляду:

$$CD = t \frac{\sin(r_1 - k_1)}{\cos k_1}, \quad (4)$$

де  $AC = t$  – товщина пластинки.

Кут заломлення  $k_1$  знайдемо із співвідношення

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = n, \quad (5)$$

або

$$\sin k_1 = \frac{\sin r_1}{n}, \quad (6)$$

звідки:

$$k_1 = \arcsin\left(\frac{\sin r_1}{n}\right). \quad (7)$$

Підставивши в (4) замість  $k_1$  його значення із (7), отримаємо робочу формулу:

$$CD = t \frac{\sin \left[ r_1 - \arcsin \left( \frac{\sin r_1}{n} \right) \right]}{\cos \left[ \arcsin \left( \frac{\sin r_1}{n} \right) \right]} \quad (8)$$

Формулу (8) можна записати і в іншій формі. Для цього в (4) зробимо такі перетворення:

$$d = t \frac{\sin(r_1 - k_1)}{\cos k_1} = t \frac{(\sin r_1 \cos k_1 - \cos r_1 \sin k_1)}{\cos k_1} \quad (9)$$

В (9) замінимо кут заломлення  $k_1$  на кут падіння  $r_1$ , використавши відомі співвідношення:

$$\cos k_1 = \sqrt{1 - \sin^2 k_1}, \quad \text{і} \quad \frac{\sin r_1}{\sin k_1} = n.$$

Тоді

$$\cos k_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 r_1}}{n} \quad (10)$$

Використовуючи (10), отримаємо:

$$d = \frac{t \sin r_1 \sqrt{n^2 - \sin^2 r_1} - \cos r_1 \sin r_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r_1}},$$

звідки

$$d = t \sin r_1 \left( 1 - \frac{\cos r_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 r_1}} \right) \quad (11)$$

Підставляючи в (8) або в (11) числові значення відповідних величин ( $t = 0,1 \text{ м}$ ;  $n = 1,5$ ;  $r_1 = 70^\circ$ ), отримаємо  $d = 6,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

**Відповідь:**  $d = 6,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

*Примітка.* Іноді необхідно знати не тільки поперечне зміщення променя  $CD = d$ , але і так зване поздовжнє зміщення  $CM = L$  (рис. 5.47).

Із рис. 5.47 і (9) випливає, що

$$CM = L = \frac{CD}{\sin r_1} = \frac{t(\sin r_1 \cos k_1 - \cos r_1 \sin k_1)}{\cos k_1 \sin r_1} = t \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} k_1}{\operatorname{tg} r_1} \right) \quad (12)$$

При малих кутах  $r_1$  і  $k_1$ , маємо:

$$L = t \left( 1 - \frac{\sin k_1}{\sin r_1} \right) = t \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad (13)$$

**Відповідь:**  $L = t \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ .

**Задача 5.5.3.** На якій глибині  $h$  під водою перебуває водолаз, якщо він бачить відображеними від поверхні води ті частини горизонтального дна, які розташовані від нього на відстані  $l = 15 \text{ м}$  і далі? Зріст водолаза  $d = 1,8 \text{ м}$ , показник заломлення води  $n = 1,33$ .

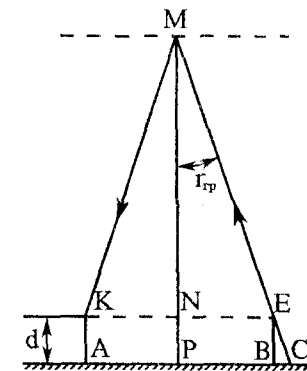


Рис. 5.48

**Розв'язок.** Бачити відбиття дна, дивлячись на поверхню води, водолаз може лише завдяки повному внутрішньому відбиванню. Отже, промені, що йдуть від деталей дна, розташованих від водолаза на відстані  $l$ , направлені до поверхні води під кутом падіння, який дорівнює його граничному значенню  $r_{\text{гп}}$ . На рис. 5.48 відрізок  $MP = h$ ,  $AK = d$  (зріст водолаза) і  $AC = l$ .

Із рис. 5.48 видно, що

$$h = MP = MN + d. \quad (1)$$

$MN$  визначимо із  $\triangle MNE$ :

$$MN = \frac{NE}{\operatorname{tg} r_{\text{гп}}} \quad (2)$$

Із врахуванням (2) рівність (1) матиме вигляд:

$$h = d + \frac{NE}{\operatorname{tg} r_{\text{гп}}} \quad (3)$$

Із рис. 5.48:

$$NE = \frac{AC - BC}{2} \quad (4)$$

Тоді



$$h = d + \frac{AC - BC}{2 \operatorname{tg} r_{\text{сп}}} \quad (5)$$

де  $BC = d \operatorname{tg} r_{\text{сп}}$  (із  $\triangle BEC$ ). В кінцевому рахунку, рівність (5) набуде вигляду:

$$h = d + \frac{l - d \operatorname{tg} r_{\text{сп}}}{2 \operatorname{tg} r_{\text{сп}}} = \frac{d}{2} + \frac{l}{2 \operatorname{tg} r_{\text{сп}}} \quad (6)$$

Скориставшись виразом  $\sin r_{\text{сп}} = 1/n$ , робочу формулу (6) можна записати так:

$$h = \frac{d}{2} + \frac{l}{2} \sqrt{n^2 - 1} \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $l = 15 \text{ м}$ ;  $d = 1,8 \text{ м}$ ;  $n = 1,33$ ), отримаємо:

$$h = \frac{1,8}{2} + \frac{15}{2} \sqrt{1,33^2 - 1} \text{ м} = 7,5 \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $h = 7,5 \text{ м}$ .

**Задача 5.5.4.** Визначити заломний кут призми, виготовленої із скла з показником заломлення  $n = 1,54$ , якщо промінь, що нормально падає на одну із її граней, виходить вздовж іншої грані (рис. 5.49).

**Розв'язок.** Оскільки за умовою промінь, що вийшов із призми проходить по грані, то кут падіння променя на цю грань буде граничним, тобто

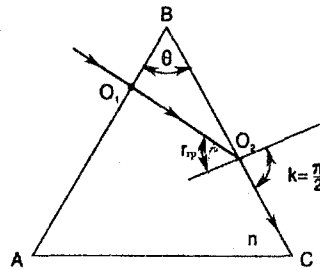


Рис. 5.49

$$\sin r_{\text{сп}} = \frac{1}{n} \quad (1)$$

Заломний кут призми  $\theta$  рівний граничному куту  $r_{\text{сп}}$ , як кути із взаємно перпендикулярними сторонами: ( $\theta = r_{\text{сп}}$ ), і

$$\sin \theta = \frac{1}{n} \quad (2)$$

Підставивши в (2) значення  $n = 1,54$ , знаходимо, що  $\theta = 40^\circ 29' 34''$ .

**Відповідь:**  $\theta = 40^\circ 29' 34''$ .

**Задача 5.5.5.** Заломний кут рівнобедреної призми  $\theta = 10^\circ$ . Промінь монохроматичного світла падає на бічну грань під кутом  $r_1 = 10^\circ$ . Знайти кут повного відхилення  $\delta$  променя. Показник заломлення призми  $n = 1,6$ .

**Розв'язок:** Із рис. 5.50 маємо, що

$$\delta = r_1 - k_1 + k_2 - r_2 \quad (1)$$

Кут заломлення  $k_1$  знайдемо, скориставшись законом заломлення:

$$\frac{\sin r_1}{\sin k_1} = n,$$

$$\sin k_1 = \frac{\sin r_1}{n} = \frac{\sin 10^\circ}{1,6} = 0,1085;$$

$$k_1 = 6,23^\circ.$$

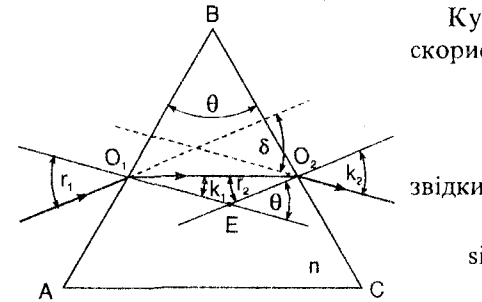


Рис. 5.50

Кут  $\theta$  зовнішній для  $\triangle O_1 O_2 E$ , тому

$$\theta = k_1 + r_2, \quad (3)$$

$$r_2 = \theta - k_1 = 10^\circ - 6,23^\circ = 3,76^\circ. \quad (4)$$

Кут  $k_2$  знайдемо, скориставшись законом заломлення:

$$\frac{\sin k_2}{\sin r_2} = n.$$

Отже

$$\sin k_2 = n \sin r_2 = 1,6 \sin 3,76 = 0,1049; \quad k_2 = 6,02^\circ. \quad (5)$$

Підставляючи в (1) значення кутів  $r_1, k_1, r_2, k_2$ , отримаємо:

$$\delta = 10^\circ + 6,23^\circ + 3,76^\circ + 6,02^\circ = 26^\circ.$$

**Відповідь:**  $\delta = 26^\circ$ .

**Задача 5.5.6.** Знайти найменше значення величини основи призми, виготовленої із скла, дисперсія якої поблизу  $D$ -лінії натрію дорівнює

$\frac{dn}{d\lambda} = 956 \text{ см}^{-1}$  і яка може розділити жовтий дублет натрію

( $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ ,  $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ ).

**Розв'язок:** Гранична роздільна здатність призми визначається виразом

$$R = a \frac{dn}{d\lambda}, \quad (1)$$

де  $a$  – величина основи призми (див. формулу (9) в [6] § 313).

За визначенням, роздільна здатність

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (2)$$

тут  $\lambda = \lambda_1$ .

Прирівнюючи (1) і (2), маємо:

$$a = \frac{\lambda/d\lambda}{(dn/d\lambda)} = \frac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)dn/d\lambda}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові значення відповідних величин ( $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$ ;

$\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ ;  $\frac{dn}{d\lambda} = 956 \text{ см}^{-1}$ ), отримуємо:

$$a = \frac{5890}{(5896 - 5890)956} \text{ см} = 1,03 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $a = 1,03 \text{ см}$ .

**Задача 5.5.7.** Паралельний пучок світла, що поширюється в повітрі, збирається в фокусі заломлюючої поверхні, яка обмежує ділянку з показником заломлення  $n$ . Знайти форму цієї поверхні.

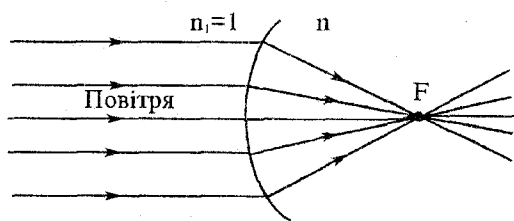


Рис. 5.51

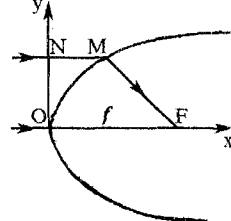


Рис. 5.52

**Розв'язок:** Для того, щоб всі промені після заломлення на сферичній поверхні зібралися в точці  $F$  необхідно, щоб час ходу основного променя через точку  $O$  дорівнював часу ходу довільного променя, що проходить

через будь-яку точку  $M$  (з координатами  $x, y$ ), яка лежить на заломній поверхні (рис. 5.52). Різниця цих часів визначається виразом

$$\frac{NM}{c} + n \frac{MF}{c} - \frac{nf}{c} = \Delta t, \quad (1)$$

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $f = OF$ .

Із рис.5.52 знаходимо, що

$$FM = \sqrt{y^2 + (f - x)^2}.$$

Тоді

$$\frac{x}{c} + \frac{n\sqrt{y^2 + (f - x)^2}}{c} - \frac{nf}{c} = \Delta t, \quad (2)$$

де  $x = NM$ ,  $y = ON$ .

Поклавши  $\Delta t = 0$ , отримаємо шукане рівняння поверхні:

$$\frac{x}{c} + \frac{n\sqrt{y^2 + (f - x)^2}}{c} - \frac{nf}{c} = 0, \quad (3)$$

Розв'язуючи (3) відносно  $y$ , приходимо до виразу:

$$y = \pm \frac{1}{n} \sqrt{2xfn(n-1) - x^2(n^2 - 1)}. \quad (4)$$

**Задача 5.5.8.** За допомогою тонкої збиральної симетричної лінзи з показником заломлення  $n_1 = 3/2$  отримано дійсне зображення на відстані  $S_2 = 0,1 \text{ м}$  від лінзи. Після того, як предмет і лінзу помістили у воду, не змінюючи відстані між ними, отримали зображення предмета на відстані  $S'_2 = 0,6 \text{ м}$  від лінзи. Знайти оптичну силу лінзи у повітрі, якщо показник заломлення води  $n_2 = 4/3$ .

**Розв'язок:** Оптична сила симетричної лінзи у повітрі визначається за формулою (5.26), яка з врахуванням правила знаків має вигляд:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \left( \frac{n_1}{n_0} - 1 \right) \frac{2}{R} = \Phi, \quad (1)$$

де  $S_1$  – відстань від предмета до лінзи,  $S_2$  – відстань від лінзи до зображення,  $n_1$  – показник заломлення лінзи,  $n_0 = 1$  – показник заломлення повітря,  $R$  – радіус кривизни поверхонь лінзи,  $\Phi$  – оптична сила лінзи в повітрі.

Формула (1) для випадку, коли лінза і предмет поміщені у воду, запишеться так:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2'} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \frac{2}{R} = \Phi', \quad (2)$$

де  $S_2'$  – відстань від лінзи до зображення, коли лінзу помістили у воду.

Із (1) і (2) знаходимо радіус сферичних поверхонь лінзи

$$R = \frac{2n_1(n_2 - 1)S_2S_2'}{n_2(S_2' - S_2)}. \quad (3)$$

Враховуючи значення  $R$  із (3), отримуємо робочу формулу:

$$\Phi = \left(\frac{n_1}{n_0} - 1\right) \frac{2}{R} = \frac{(n_1 - 1)n_2}{(n_2 - 1)n_1} \cdot \frac{(S_2' - S_2)}{S_2S_2'}. \quad (4)$$

Підставивши в (4) значення величин  $S_2, S_2', n_1$  і  $n_2$  і виконавши обчислення, отримаємо:  $\Phi = 11,1 \text{ Дп}$ .

Відповідь:  $\Phi = 11,1 \text{ Дп}$ .

**Задача 5.5.9.** Збиральна лінза дає чітке зображення предмета на екрані. Висота зображення дорівнює  $a$ . Залишаючи нерухомим екран і предмет, починають переміщувати лінзу і знаходять, що висота другого чіткого зображення дорівнює  $b$ . Знайти справжню висоту  $c$  предмета.

**Розв'язок:** Із рис. 5.53,  $a$  для першого зображення маємо:

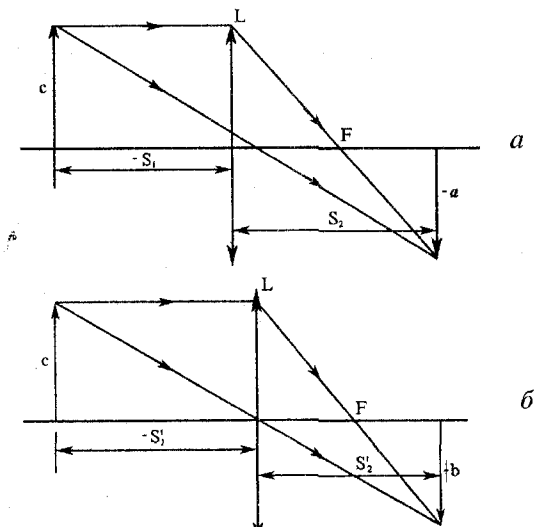


Рис. 5.53

$$\frac{a}{c} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (1)$$

Внаслідок спряженості зображення і предмета повинно існувати ще одне (і лише одне) чітке зображення, яке перебуває від лінзи на відстані  $S_2' = S_1$ . Для другого зображення із рис. 5.53 б маємо:

$$\frac{b}{c} = \frac{S_2'}{S_1'}. \quad (2)$$

При врахуванні, що  $S_2' = S_1$  і  $S_1' = S_2$  формула (2) набуде вигляду:

$$\frac{b}{c} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (3)$$

Тоді із (1) і (3), маємо:

$$c = \sqrt{ab}. \quad (4)$$

Відповідь:  $c = \sqrt{ab}$ .

**Задача 5.5.10.** Відстань від об'єкта до екрана  $L = 50 \text{ см}$ . Збиральна лінза, поміщена між ними, дає чітке зображення на екрані у двох положеннях, відстань між якими  $l = 10 \text{ см}$ . Якими будуть збільшення у цих двох положеннях лінзи.

**Розв'язок:** Користуючись формулою лінзи і рисунком 5.54, легко скласти таку систему рівнянь:

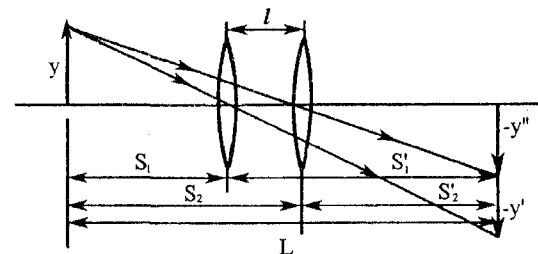


Рис. 5.54

$$\left. \begin{aligned} S_1 + S_1' &= L, & (a) \\ S_1 + S_1' &= S_2 + S_2', & (б) \\ S_1 + S_2' &= L - l, & (в) \\ S_1S_1' &= S_2S_2' & (г) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рівняння (а) – (в) очевидні, а рівняння (г) випливає із формули тонкої лінзи:

$$\frac{1}{S'_1} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{S'_2} + \frac{1}{S_2} \quad (2)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) відносно невідомих  $S_1, S'_1, S_2, S'_2$ , знаходимо:

$$S_1 = \frac{L-l}{2}; \quad S'_1 = \frac{L+l}{2}; \quad S_2 = \frac{L+l}{2}; \quad S'_2 = \frac{L-l}{2} \quad (3)$$

У першому випадку збільшення буде

$$\beta_1 = \frac{S'_1}{S_1} = \frac{L+l}{L-l} = \frac{60}{40} = 1,5.$$

У другому випадку

$$\beta_2 = \frac{S'_2}{S_2} = \frac{L-l}{L+l} = \frac{40}{60} = 0,66.$$

**Відповідь:**  $\beta_1 = 1,5; \beta_2 = 0,66$ .

**Задача 5.5.11.** Плоский бік плоско-опуклої лінзи, фокусна відстань і показник заломлення якої відповідно рівні  $f$  і  $n$ , посріблений. Знайти фокусну відстань такого дзеркала.

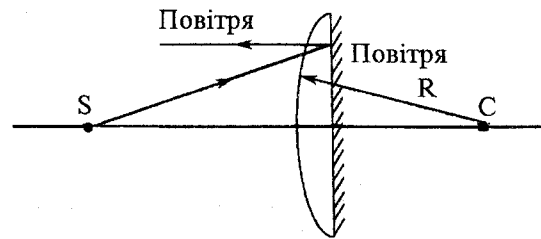


Рис. 5.55

**Розв'язок:** Оптична сила такого дзеркала

$$\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \quad (1)$$

де  $\Phi_1$  – оптична сила опуклої поверхні,  $\Phi_2$  – оптична сила плоскої посрібленої поверхні,  $\Phi_3$  – оптична сила опуклої

поверхні, але при заломленні відбитого від плоскої поверхні світла. Як видно із рис. 5.55, для падаючого світла  $R > 0$ , для відбитого –  $R < 0$ . Отже,

$$\Phi_1 = \frac{n-1}{R}, \quad \Phi_2 = \frac{-n-n}{R_2} = 0^*, \quad \Phi_3 = \frac{1-n}{-R}.$$

\*  $\Phi_2 = 0$  – радіус кривизни плоскої поверхні  $R_2 = \infty$ .

Тоді

$$\Phi' = \frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{R} = 2 \frac{n-1}{R} = 2\Phi, \quad (2)$$

де  $\Phi = \frac{n-1}{R}$  – оптична сила плоско-опуклої лінзи. Враховуючи, що  $\Phi' = 1/f'$ , а  $\Phi = 1/f$  маємо:

$$\frac{1}{f'} = \frac{2}{f}, \quad (3)$$

звідки

$$\boxed{f' = \frac{f}{2}} \quad (4)$$

**Відповідь:**  $f' = \frac{f}{2}$ .

**Задача 5.5.12.** Визначити фокусну відстань оптичної системи, яка складається із двох тонких лінз в повітрі, кожна із яких має фокусну відстань, рівну  $f_1 = f_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  м, і розміщених на відстані  $d = 2 \cdot 10^{-2}$  м одна від одної.

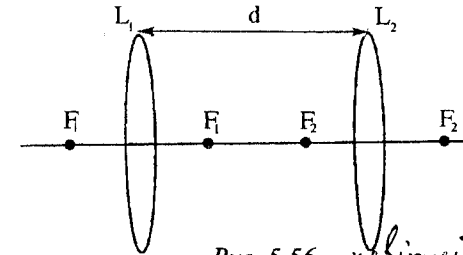


Рис. 5.56 – неввірний

**Розв'язок:** На рис. 5.56 наведена схема такої системи. Для знаходження фокусної відстані системи скористаємось формулою:

$$f_c = \frac{1}{\Phi_c}, \quad (1)$$

де  $f_c$  – фокусна відстань системи,  $\Phi_c$  – оптична сила системи. Оптичну силу системи знайдемо за формулою (5.36):

$$\Phi_c = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2, \quad (2)$$

де  $\Phi_1 = 1/f_1$  і  $\Phi_2 = 1/f_2$  – оптичні сили першої і другої лінз відповідно,  $d$  – відстань між лінзами. Тоді:

$$\Phi_c = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - d \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 f_2} \quad (3)$$

Враховуючи (3), маємо:

$$f_c = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $f_1 = 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $f_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  м;  $d = 2 \cdot 10^{-2}$  м), отримуємо:

$$f_c = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}}{5 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}} = 0,0313 \text{ м} = 31,3 \text{ мм}$$

Відповідь:  $f_c = 31,3$  мм.

**Задача 5.5.13.** Спостерігач розглядає своє зображення в опуклому дзеркалі крізь тонку скляну пластину. Переміщаючи пластинку, він відшукує таке її положення, при якому зображення його очей в дзеркалі і в скляній пластинці накладаються одне на одне. На якій відстані  $x$  від очей спостерігача слід помістити пластинку, якщо фокусна відстань дзеркала  $f = 10$  см, а відстань від спостерігача до дзеркала дорівнює  $S_1 = 40$  см.

**Розв'язок:** Спочатку знайдемо, де знаходиться уявне зображення спостерігача в опуклому дзеркалі при відсутності пластинки. Для цього скористаємось формулою (5.39):

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} = -\frac{1}{f}, \quad (1)$$

де  $f$  – фокусна відстань опуклого дзеркала,  $S_1$  і  $S_2$  – відповідно відстані від очей спостерігача, до дзеркала і від дзеркала до зображення очей.

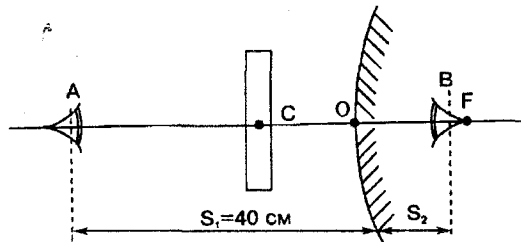


Рис. 5.57

Із (1) маємо

$$S_2 = \frac{f S_1}{S_1 + f} = -\frac{400}{50} = -8 \text{ см.}$$

Уявне зображення  $B$  лежить праворуч від вершини  $O$  опуклого дзеркала на відстані 8 см (рис.5.57).

Оскільки плоске дзеркало дає уявне зображення, розташоване симетрично нього, по другий бік від дзеркала, то скляну пластинку слід помістити в таку точку  $C$ , для якої

$$AC = CB = \frac{AO + OB}{2} = \frac{40 + 8}{2} \text{ см} = 24 \text{ см.}$$

Відповідь:  $AC = CB = 24$  см.

**Задача 5.5.14.** Радіус кривизни вгнутого сферичного дзеркала  $R = 40$  см. Знайти положення об'єкта, при якому: а) зображення дійсне і збільшене в два рази; б) уявне і збільшене в два рази.

**Розв'язок:** а) Згідно з формулою (5.40), збільшення сферичного дзеркала

$$\beta = -\frac{S_2}{S_1}, \quad (1)$$

де  $S_1$  і  $S_2$  – відповідно відстані від дзеркала до предмета і від дзеркала до його зображення.

Оскільки зображення є оберненим (рис.5.58), то  $\beta = -2$ . Тоді із (1) маємо, що

$$S_2 = 2S_1. \quad (2)$$

Далі, скориставшись формулою (5.39)

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{R}, \quad (3)$$

з врахуванням (2), отримуємо:

$$S_1 = \frac{3}{4} R = \frac{3}{4} 40 \text{ см} = 30 \text{ см.}$$

б) В даному випадку зображення є прямим і  $\beta = 2$  (рис. 5.59). Отже, згідно з формулою (5.40), маємо:

$$S_2 = -2S_1. \quad (4)$$

Тоді

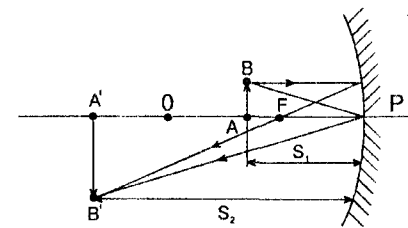


Рис. 5.58

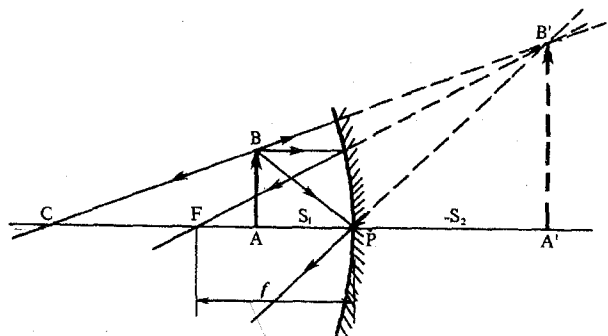


Рис. 5.59

$$\frac{1}{-2S_1} + \frac{1}{S_1} = \frac{2}{R}, \quad (5)$$

звідки

$$S_1 = \frac{R}{4} = \frac{40}{4} \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

**Відповідь:** а)  $S_1 = 30 \text{ см}$ ; б)  $S_1 = 10 \text{ см}$ .

**Задача 5.5.15.** Зображення предмета у вгнутому дзеркалі втричі менше від самого предмета. Якщо предмет наблизити до дзеркала на  $l = 0,15 \text{ м}$ , то зображення стане в 1,5 рази менше від предмета. Визначити фокусну відстань дзеркала.

**Розв'язок:** Нехай відстані від предмета і його зображення до дзеркала в першому випадку відповідно дорівнюють  $S_1$  і  $S'_1$ , а в другому  $-S_2$  і  $S'_2$ . За формулою (5.39) для першого і другого випадків маємо відповідно:

$$f = \frac{S_1 S'_1}{S_1 + S'_1}, \quad \text{і} \quad f = \frac{S_2 S'_2}{S_2 + S'_2}, \quad (1)$$

де  $f$  – шукана величина. Оскільки в першому випадку зображення в три рази менше від предмета, а в другому – в 1,5 рази, дістанемо (використавши при цьому співвідношення  $\beta = S'/S$ ):

$$\frac{S'_1}{S_1} = \frac{1}{3} \quad \text{і} \quad \frac{S'_2}{S_2} = \frac{1}{1,5}. \quad (2)$$

Тоді  $S_1 = 3 S'_1$  і, при  $S_2 = S_1 - l$  (за умовою)

$$S'_2 = \frac{S_1 - l}{1,5}. \quad (3)$$

Поділивши чисельник і знаменник правої частини першої з рівностей (1) на  $S'_1$ , а другої на  $S_2$ , і використовуючи (2), отримаємо:

$$f = \frac{S_1}{\frac{S_1}{S'_1} + 1} = \frac{S_1}{3 + 1} = \frac{S_1}{4}, \quad (4)$$

і

$$f = \frac{S'_2}{\frac{S'_2}{S_2} + 1} = \frac{S'_2}{\frac{1}{1,5} + 1} = \frac{1,5 S'_2}{2,5}. \quad (5)$$

При врахуванні (3) і (4) рівність (5) набуде такого вигляду:

$$f = \frac{4f - l}{2,5}, \quad (6)$$

звідки

$$f = \frac{l}{1,5}. \quad (7)$$

Підставивши у (8) значення  $l = 15 \text{ см}$ , отримаємо  $f = 10 \text{ см}$ .

**Відповідь:**  $f = 10 \text{ см}$ .

**Задача 5.5.16.** Точкове джерело  $P$ , сила світла якого  $I_1 = 100 \text{ кд}$ , розміщене на відстані  $S_1 = 0,2 \text{ м}$  від вершини вгнутого дзеркала з фокусною відстанню  $f = 0,25 \text{ м}$ . Визначити силу світла у відбитому пучку, якщо коефіцієнт відбиття дзеркала  $R = 0,8$ .

**Розв'язок:** Сила світла чисельно дорівнює світловому потоку, який припадає на одиничний тілесний кут. Оскільки ми маємо справу з точковим джерелом, то

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \quad (1)$$

Із рис. 5.60 маємо

$$I_1 = \frac{\Phi}{\Omega_1}, \quad \text{і} \quad I_2 = R \frac{\Phi}{\Omega_2}, \quad (2)$$

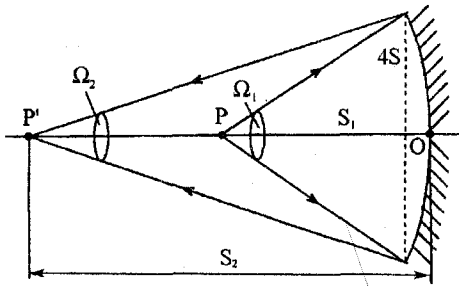


Рис. 5.60

де  $R$  – коефіцієнт відбиття дзеркала. Поділивши почленно рівності (2) знайдемо:

$$I_2 = I_1 R \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \quad (3)$$

Величини тілесних кутів  $\Omega_1$  і  $\Omega_2$  визначаються за відомою формулою:

$$\Omega = \frac{\Delta S_n}{L^2}, \quad (4)$$

де  $L$  – відстань від джерела до елемента поверхні сферичного дзеркала  $\Delta S_n$ , нормально орієнтованого до напрямку  $L$ . Тоді

$$\Omega_1 = \frac{\Delta S}{S_1^2}, \quad \text{і} \quad \Omega_2 = \frac{\Delta S}{S_2^2}, \quad (5)$$

де  $S_1$  і  $S_2$  – відповідно відстані від джерела  $P$  і його зображення  $P'$  до вершини  $O$  вгнутого дзеркала,  $\Delta S = \Delta S_n$ .

Із (5) маємо:

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{S_2^2}{S_1^2}, \quad (6)$$

При врахуванні (6) формула (3) набуде вигляду:

$$I_2 = R I_1 \frac{S_2^2}{S_1^2} \quad (7)$$

Відстань  $S_2$  від вершини  $O$  вгнутого дзеркала до зображення джерела  $P'$  знайдемо скориставшись формулою дзеркала:

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_1} = \frac{1}{f} \quad (8)$$

Звідки, враховуючи правила знаків, будемо мати

$$S_2 = \frac{f S_1}{f - S_1} \quad (9)$$

Підставляючи  $S_2$  із (9) в (7), в кінцевому рахунку отримаємо робочу формулу:

$$S_2 = R I_1 \frac{f^2}{(f - S_1)^2} \quad (10)$$

Після підстановки в (10) числових значень відповідних величин ( $I_1 = 100 \text{ кд}$ ;  $R = 0,8$ ;  $f = 0,25 \text{ м}$ ;  $S_1 = 0,24$ ), знайдемо:

$$I_2 = 0,8 \cdot 100 \frac{0,25^2}{(0,25 - 0,20)^2} \text{ кд} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ кд}.$$

Відповідь:  $I_2 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ кд}$ .

**Задача 5.5.17.** Знайти роздільну силу ока. Діаметр зіниці при нормальній освітленості  $d \approx 2 \text{ мм}$ .

**Розв'язок:** Око є складним природним оптичним приладом, який характеризується фізичною і психофізичною дією: процесом зору і процесом бачення. Роздільна сила ока, як і будь-якого іншого оптичного приладу, обмежена дифракційними явищами і пов'язана з розмірами зіниці. Для знаходження роздільної сили ока можна скористатися формулою:

$$\delta\psi = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (1)^*$$

де  $\delta\psi$  – граничний кут розділення (рис. 5.61),  $\lambda$  – довжина світлової хвилі,  $D$  – діаметр зіниці ока.

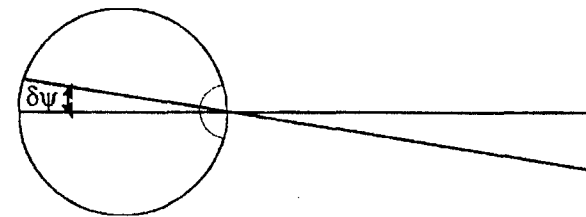


Рис. 5.61

Для довжини хвилі  $\lambda = 5,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  і  $D = d \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , отримаємо:

$$\delta\psi = 1,22 \frac{5,55 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}} = 3,3855 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 1,16'$$

\* Див. [2], § 10.6, формулу (10.45).

**Відповідь:**  $\delta\psi \approx 1,16'$ .

**Задача 5.5.18.** Зорова труба з фокусною відстанню об'єктива  $f_{об} = 50$  см встановлена на нескінченність. На яку відстань  $\Delta l$  потрібно пересунути окуляр труби, щоб чітко бачити предмети на відстані  $S_1 = 50$  м?

**Розв'язок:** При настройці зорової труби на нескінченність, задній фокус  $F_1$  об'єктива суміщений із переднім фокусом  $F_2$  окуляра (рис. 5.62). В цьому випадку зображення предмета отримується у фокальній площині об'єктива. Якщо ж предмет знаходиться на скінченній відстані, то його зображення отримаємо на відстані  $\Delta l$  справа від точки  $F_1$  (рис. 5.63). Оскільки зорова труба була встановлена так, що передній фокус окуляра співпадає із заднім фокусом об'єктива, то окуляр потрібно пересунути вправо на відстань  $\Delta l$ , щоб зображення попало в передню фокальну площину окуляра.

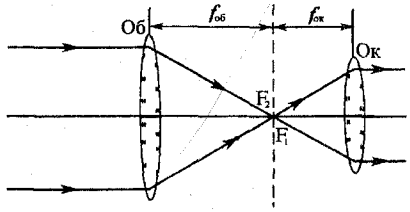


Рис. 5.62

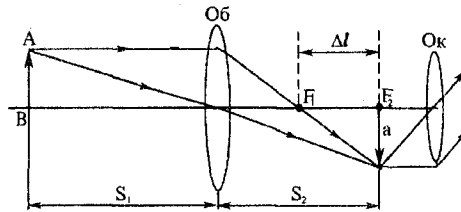


Рис. 5.63

Для знаходження  $\Delta l$  запишемо формулу (5.32) в такому вигляді:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f_{об}}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{S_1} + \frac{1}{f_{об} + \Delta l} = \frac{1}{f_{об}}, \quad (1)$$

де  $S_2 = f_{об} + \Delta l$  – відстань від об'єктива до зображення предмета,  $\Delta l$  – відстань від заднього фокуса  $F_1$  об'єктива до зображення предмета,  $S_1$  – відстань від предмета до об'єктива,  $f_{об}$  – фокусна відстань об'єктива.

Із (1) маємо

$$\Delta l = \frac{f_{об}^2}{S_1 - f_{об}} = \frac{(0,5)^2}{50 - 0,5} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм}.$$

**Відповідь:**  $\Delta l = 5$  мм.

**Задача 5.5.19.** 1) Обчислити роздільну здатність зорової труби з діаметром об'єктива  $D = 5$  см. 2) При якому збільшенні буде використана повна роздільна здатність цієї труби? Діаметр зіниці ока  $d = 0,2$  см.

**Розв'язок:** 1) Роздільна кутова відстань зорової труби визначається формулою:

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (1)$$

де  $D$  – діаметр об'єктива. При візуальних спостереженнях можна вважати, що  $\lambda = 5500 \text{ \AA}$ . Тоді

$$\theta = 1,22 \frac{5,5 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-2}} = 1,342 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 2,76''.$$

2) Нехай розглядуваний об'єкт видно неозброєним оком під кутом

$$\beta = N\alpha, \quad (2)$$

де  $N$  – збільшення труби. Кут  $\beta$  повинен бути не меншим від кута

$$\gamma = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad (3)$$

граничного для розділення очом ( $d$  – діаметр зіниці ока).

З умови  $\beta \geq \gamma$  знайдемо

$$N = \frac{D}{d} = \frac{5}{0,2} = 25.$$

Отже, із збільшенням  $N = 25$  буде використана повна роздільна здатність труби. Збільшення  $N = D/d$  називається нормальним. При менших збільшеннях об'єктів використовується не повністю, і роздільна здатність системи “труба-око” знижується. Збільшення більші за нормальне, не є раціональними, бо при цьому роздільна здатність системи не збільшується, а яскравість зображення зменшується.

**Відповідь:** 1)  $\theta = 2,76''$ ;  $N = 25$ .

**Задача 5.5.20.** Фокусна відстань об'єктива мікроскопа  $f_{об} = 3 \cdot 10^{-3}$  м. Предмет знаходиться від об'єктива на відстані  $S_1 = 3,1 \cdot 10^{-3}$  м. Знайти збільшення  $\beta$  мікроскопа, якщо фокусна відстань окуляра  $f_{ок} = 5 \cdot 10^{-2}$  м.



**Розв'язок:** Збільшення мікроскопа виражається формулою (5.43):

$$\beta = \beta_{об} \beta_{ок}, \quad (1)$$

де  $\beta_{об}$  і  $\beta_{ок}$  – відповідно лінійні збільшення об'єктива і окуляра.

Лінійне збільшення об'єктива  $\beta_{об}$  визначимо із рис. 5.64:

$$\beta_{об} = \frac{y_1}{y} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (2)$$

де  $S_1$  і  $S_2$  – відстань від предмета до об'єктива і від об'єктива до зображення, яке отримується в об'єктиві.

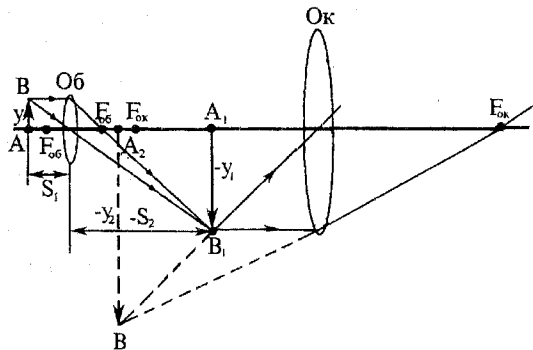


Рис. 5.64

Відстань  $S_2$  знайдемо, скориставшись формулою тонкої лінзи:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f_{об}}, \quad (3)$$

звідки:

$$S_2 = \frac{S_1 f_{об}}{S_1 - f_{об}}. \quad (4)$$

Тоді

$$\beta_{об} = \frac{f_{об}}{S_1 - f_{об}}. \quad (5)$$

Лінійне збільшення окуляра визначимо за формулою (5.43):

$$\beta_{ок} = \frac{250}{f_{ок}}, \quad (6)$$

де 250 мм – відстань найкращого бачення,  $f_{ок}$  – фокусна відстань окуляра (в мм).

Враховуючи (5) і (6), отримаємо робочу формулу для збільшення мікроскопа:

$$\beta = \beta_{об} \beta_{ок} = \frac{f_{об}}{S_1 - f_{об}} \frac{250}{f_{ок}} = \frac{3 \cdot 250}{(3,1 - 3)50} = 150 \text{ раз}.$$

**Відповідь:**  $\beta = 150$  раз.

**Задача 5.5.21.** З якої відстані необхідно фотографувати будинок довжиною  $y_1 = 50$  м, щоб весь його фасад вмістився на кадрі плівки розміром  $24 \times 36$  мм? Фокусна відстань об'єктива  $f_{об} = 50$  мм.

**Розв'язок:** Схема утворення зображення в фотографічному апараті

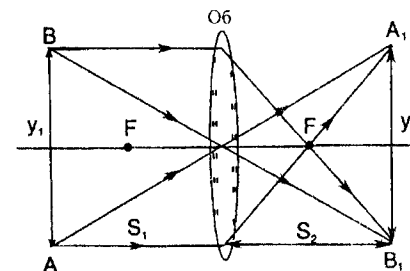


Рис. 5.65

показана на рис.5.65. Зображення  $y_2$  предмета утворюється в площині фотографічної плівки. Тому максимальний розмір зображення визначається розміром кадра плівки

$y_2 = 36 \cdot 10^{-3}$  м. Відстані  $S_1$  і  $S_2$  відповідно від предмета до об'єктива і від об'єктива до зображення, пов'язані з фокусною відстанню  $f_{об}$  об'єктива формулою лінзи:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f_{об}}. \quad (1)$$

Через відстані  $S_1$  і  $S_2$  можна виразити і лінійне збільшення  $\beta$ :

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (2)$$

Із системи рівнянь (1) і (2) з двома невідомими визначимо  $S_1$ :

$$S_1 = f_{об} \frac{1 + \beta}{\beta}, \quad (3)$$

або

$$S_1 = f_{об} \frac{(y_1 + y_2)}{y_2}. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $f_{об} = 50 \cdot 10^{-3}$  м;  $y_1 = 50$  м;  $y_2 = 36 \cdot 10^{-3}$  м), отримаємо:

$$S_1 = 50 \cdot 10^{-3} \frac{(50 + 36 \cdot 10^{-3})}{36 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 69,5 \text{ м} \approx 70 \text{ м}.$$

Відповідь:  $S_1 = 69,5 \text{ м} \approx 70 \text{ м}$ .

**Задача 5.5.22.** Фокусна відстань об'єктива зорової труби  $f_{об} = 60 \text{ см}$ , а окуляра  $f_{ок} = 4 \text{ см}$ . Об'єктив і окуляр виготовлені із скла, показник заломлення якого  $n_c = 3/2$ . Зорову трубу занурюють у воду, яка заповнює її внутрішній об'єм. Яким об'єктивом із того самого сорту скла потрібно замінити перший об'єктив труби, щоб за допомогою труби можна було розглядати у воді віддалені предмети? Чому дорівнюватиме при цьому збільшення труби? Показник заломлення води  $n_w = 4/3$ .

**Розв'язок:** Схематичне зображення зорової труби, призначеної для

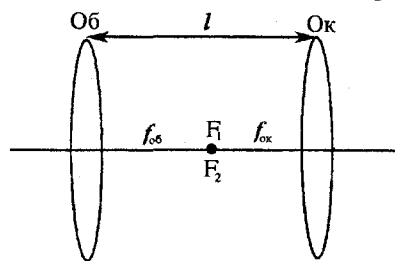


Рис. 5.66

спостереження віддалених предметів наведено на рис. 5.66. Довжина тубуса в такій труби в повітрі дорівнює:

$$l = f_{об} + f_{ок}. \quad (1)$$

Фокусна відстань окуляра  $f_{ок}$  в повітрі:

$$f_{ок} = \frac{1}{n_c - 1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}, \quad (2)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривизни сферичних поверхонь лінзи окуляра. Фокусна відстань  $f'_{ок}$  цього ж самого окуляра у воді:

$$f'_{ок} = \frac{n_w}{n_c - n_w} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}. \quad (3)$$

Поділивши почленно (3) на (2), знайдемо фокусну відстань окуляра у воді:

$$f'_{ок} = f_{ок} \frac{n_w(n_c - 1)}{n_c - n_w}. \quad (4)$$

При спостереженні віддалених предметів довжина тубуса труби залишається сталою тобто  $l = f_{об} + f_{ок} = f'_{об} + f'_{ок}$  і фокусна відстань нового об'єктива у воді буде дорівнювати

$$f'_{об} = l - f'_{ок}, \quad (5)$$

або, враховуючи (4) і (1), маємо:

$$f'_{об} = l - f_{ок} \frac{n_w(n_c - 1)}{n_c - n_w} = f_{об} + f_{ок} \left[ 1 - \frac{n_w(n_c - 1)}{n_c - n_w} \right]. \quad (6)$$

Після підстановки в (6) числових даних відповідних величин ( $f_{об} = 60 \text{ см}$ ;  $f_{ок} = 4 \text{ см}$ ;  $n_w = 4/3$ ;  $n_c = 3/2$ ), отримуємо:

$$f'_{об} = 48 \text{ см}.$$

Збільшення телескопічної системи дорівнює

$$\beta = \frac{f_{об}}{f_{ок}}. \quad (7)$$

Отже, труба дасть у воді збільшення

$$\beta' = \frac{f'_{об}}{f'_{ок}} = \frac{48}{16} = 3.$$

Відповідь:  $f'_{об} = 48 \text{ см}$ ;  $\beta' = 3$ .

**Задача 5.5.23.** Знайти величину середньої напруженості електричного поля  $\vec{E}$  світлового випромінювання Сонця в місці зображення Сонця, що утворюється лінзою, світлосила якої  $D/f$  відома. Кутовий діаметр Сонця дорівнює  $\alpha$  радіан. Сонячна стала дорівнює  $Q$ .

**Розв'язок:** Нехай  $\bar{w}_0$  середня об'ємна густина енергії електромагнітного поля сонячного випромінювання біля поверхні Землі. Оскільки сонячні промені практично паралельні, то на лінзу попадає потік випромінювання

$$\Phi_0 = \bar{w}_0 c \sigma_0, \quad (1)$$

де  $\sigma_0 = \frac{\pi D^2}{4}$  – площа лінзи,  $D$  – діаметр лінзи,  $c$  – швидкість поширення світла. Потік випромінювання, що утворює зображення Сонця:

$$\Phi_1 = \bar{w}_1 c \sigma_1, \quad (2)$$

\*  $f'_{ок} \approx 16 \text{ см}$  знайдено за формулою (4).

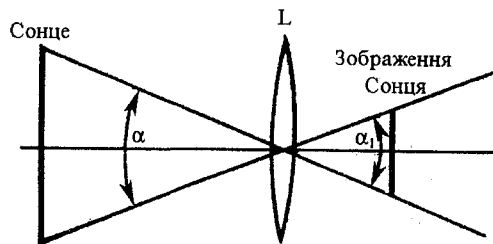


Рис. 5.67

де  $\bar{w}_1$  – середня густина електромагнітного поля сонячного випромінювання, сфокусованого лінзою в місці зображення Сонця,  $\sigma_1$  – площа зображення Сонця, яку можна визначити із рис. 5.67:

$$\sigma_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \alpha^2 f^2, \quad (3)$$

де  $d$  – діаметр зображення Сонця,  $\alpha$  – кутовий діаметр Сонця,  $f$  – фокусна відстань лінзи. Величина потоку випромінювання, що падає на лінзу, не міняється ( $\Phi_0 = \Phi_1$ ), лінза тільки розподіляє цей потік ( $\Phi_0$ )\* на площі зображення Сонця. Отже, прирівнявши праві частини (1) і (2) і враховуючи значення  $\sigma_0$  і  $\sigma_1$ , маємо:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_0 \frac{\sigma_0}{\sigma_1} = \bar{w}_0 \frac{D^2}{\alpha^2 f^2}. \quad (4)$$

Сонячна стала  $Q$  – це середній потік сонячного випромінювання, що потрапляє протягом 1 хв на 1 см<sup>2</sup> земної поверхні, перпендикулярної напрямку променів, тобто

$$Q = 60c\bar{w}_0, \quad (5)$$

звідки

$$\bar{w}_0 = \frac{Q}{60c}. \quad (5,а)$$

Крім того

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{E}^2}{4\pi}, \quad (6)$$

де  $\bar{E}$  – шукана напруженість електричного поля світлового випромінювання Сонця. Враховуючи (5) і (6), знаходимо:

\* Втрати на відбивання і поглинання знехтувати.

$$\bar{E}^2 = \frac{4\pi Q}{60c} \frac{D^2}{\alpha^2 f^2}; \quad \bar{E} = \frac{D}{\alpha f} \sqrt{\frac{\pi Q}{15c}}, \quad (7)$$

### 5.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми V

5.6.1. Під скляною пластинкою товщиною  $h = 15$  см лежить маленька крупинка. На якій відстані  $l$  від верхньої поверхні пластинки утворюється її видиме зображення, якщо промінь зору є перпендикулярним до поверхні пластинки, а показник заломлення скла  $n = 1,5$ ?

Відповідь:  $l = h/n = 10$  см.

5.6.2. Плоска скляна пластинка товщиною  $h = 3$  мм розглядається в мікроскоп. Спершу мікроскоп установлюють для спостереження верхньої поверхні пластинки, а потім зміщують тубус мікроскопа вниз доти, поки не буде чітко видна нижня поверхня пластинки (для зручності спостереження на поверхнях пластинки зроблені позначки). Зміщення тубуса виявилось рівним  $d = 2$  мм. Знайти показник заломлення пластинки  $n$ .

Відповідь:  $n = 1,5$ .

5.6.3. На дні посудини, наповненої водою, лежить плоске дзеркало. Людина, нахилившись над посудиною, бачить зображення свого ока, на відстані  $d = 25$  см, коли відстань від ока до поверхні води  $h = 5$  см. Визначити глибину посудини. Показник заломлення води  $n = 4/5$ .

Відповідь:  $H = \frac{d-2h}{2} n = 10$  см.

5.6.4. Що відбудеться із зображенням точкового джерела в плоскому дзеркалі, якщо між джерелом і дзеркалом поставити паралельно дзеркалу скляну пластинку товщиною  $h$  з показником заломлення  $n$  (рис.5.68)?

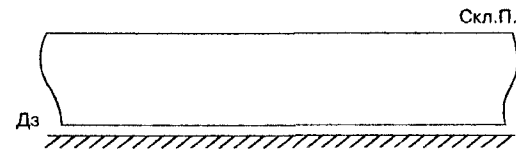


Рис. 5.68

5.6.5. Над акваріумом глибиною  $h$ , (рис. 5.69) накритим товстим склом товщиною  $d$  і показником заломлення  $n_0$ , висить точкове джерело світла. Світло конусом з розхилом  $2\alpha$  падає на скло. Акваріум до скла наповнений

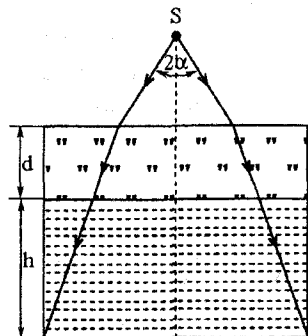


Рис. 5.69

водою, показник заломлення якої  $n$ . На скільки зміниться радіус світлої плями на дні, якщо забрати скло і вилити воду?

**Відповідь:**

$$\Delta = (d+h) \operatorname{tg} \alpha - \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{n_0^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{h \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

**5.6.6.** Як зміститься фокус об'єктива фотоапарата, якщо в середину камери на шляху променів (перпендикулярно до головної оптичної осі) помістити плоскопаралельну

скляну пластинку товщиною 6 мм з показником заломлення  $n = 1,5$ ? (Об'єктів сильно задіафрагмований).

**Відповідь:** фокус зміститься на  $\frac{d(n-1)}{n} = 2$  мм від об'єктива.

**5.6.7.** а) Уявна глибина водойми 2 м. Яка справжня глибина водойми.  
б) З підводного човна, в зануреному стані, визначили швидкість літака, який пролітав над човном. У скільки разів уявна швидкість літака відрізняється від справжньої?

**Відповідь:** а)  $h = 2,66$  м; б) при невеликому зануренні уявна швидкість літака в 1,33 рази менша справжньої.

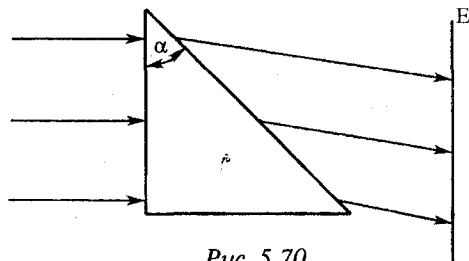


Рис. 5.70

**5.6.8.** Екран освітлюється сонячним світлом, яке падає перпендикулярно до його площини. Як зміниться освітленість екрана, якщо на шляху поширення світла поставити скляну призму з кутом  $\alpha$  при вершині (рис. 5.70). Грань, на яку падає світло, паралельна до площини екрана. Показник заломлення скла рівний  $n$ . Вважати, що відбивання світла від граней призми немає.

**Відповідь:**  $\frac{E_2}{E_1} = (1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} \left[ (1 - n^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} + n \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \right]$ .

**5.6.9.** На плоску поверхню скляного півциліндра падають промені світла під кутом  $\alpha = 45^\circ$ . Промені проходять в площині, перпендикулярній до поздовжньої осі півциліндра. З якої частини бічної поверхні виходитимуть промені світла? Показник заломлення скла  $n = \sqrt{2}$ .

**5.6.10.** Промінь світла падає під кутом  $\alpha$  на стопу плоских прозорих пластинок однакової товщини, показник заломлення кожної із яких в  $k$  раз менший, ніж у тієї, яка лежить зверху. При якому найменшому куті падіння промінь не пройде крізь стопу? Показник заломлення верхньої пластинки рівний  $n$ , число пластинок рівне  $N$ .

**Відповідь:**  $\alpha_{\min} = \arcsin \frac{n}{k^{N-1}}$ .

**5.6.11.** На склянку, наповнену водою, покладена скляна пластинка. Під яким кутом повинен падати на пластинку промінь світла, щоб від поверхні поділу скло-вода відбулося повне внутрішнє відбивання? Показник заломлення скла  $n = 1,5$ .

**5.6.12.** а) Визначити кути повного внутрішнього відбивання для алмазу ( $n_a = 2,4$ ), води ( $n_w = 1,33$ ) і для алмазу, зануреного у воду. б) Чому невеликі бульбашки повітря у воді "сріблясті"?

**Відповідь:** а)  $\alpha_a = 25^\circ$ ;  $\alpha_w = 45^\circ$ ;  $\alpha_{aw} = 33^\circ$ .

**5.6.13.** Якою повинна бути найменша висота  $H$  вертикально розміщеного плоского дзеркала, щоб людина могла в ньому бачити своє зображення у весь зріст, не змінюючи положення голови? (Зріст людини  $h$ ). Зробити пояснювальний рисунок.

**Відповідь:**  $H = \frac{h}{2}$ .

**5.6.14.** В кімнаті довжиною  $L$  і висотою  $H$  висить на стіні плоске дзеркало. Людина, яка знаходиться на відстані  $l$  від нього, дивиться в дзеркало. Якою повинна бути найменша висота дзеркала, щоб людина могла бачити стінку, яка знаходиться за її спиною, по всій висоті.

**Відповідь:**  $h_{\min} = \frac{H}{1 + \frac{l}{L}}$ .

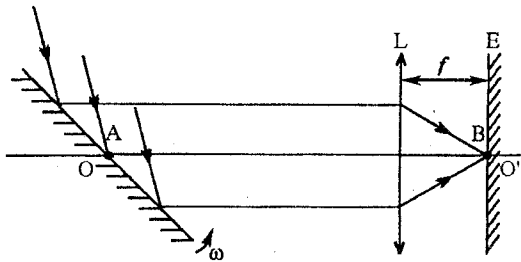


Рис. 5.71

5.6.15. На головній оптичній осі  $OO'$  збиральної лінзи розміщене плоске дзеркало, яке обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі, яка проходить через точку  $A$ , перпендикулярно до площини рисунка (рис. 5.71). На дзеркало падає паралельний пучок променів, який після відбивання фокусується на екрані. Знайти миттєву швидкість світлової плями на екрані в момент, коли вона проходить точку  $B$ , яка знаходиться на головній оптичній осі. Площина екрана перпендикулярна до цієї осі. Фокусна відстань лінзи рівна  $f$ .

Відповідь:  $v = 2\omega f$ .

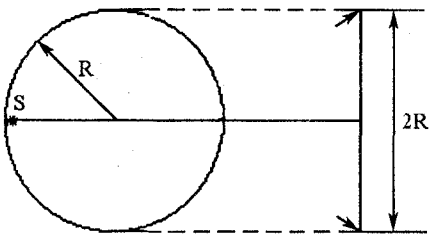


Рис. 5.72

5.6.16. Всередині скляної кулі радіуса  $R = 0,1$  м зліва від її центра поблизу поверхні знаходиться точкове джерело світла  $S$  (рис. 5.72). На якій відстані справа від центра кулі радіус світлового пучка, який вийде із кулі, буде рівний  $R$ ? Показник заломлення скла  $n = 2$ .

Відповідь:  $x = R(2 + \sqrt{3}) = 0,37$  м.

5.6.17. В яких межах може змінюватись кут відхилення, який дає скляна призма із заломним кутом  $60^\circ$ ?

Відповідь:  $39^\circ < \delta < 59^\circ 33'$ .

5.6.18. Призма із заломним кутом  $50^\circ$  дає кут найменшого відхилення  $\delta_{\min} = 35^\circ$ . Яким буде цей кут, якщо призму занурити у воду?

Відповідь:  $\delta' = 11^\circ$ .

5.6.19. Для деякої скляної призми кут найменшого відхилення променя

дорівнює заломному куту  $\theta$  призми. Знайти останній.

Відповідь:  $\theta = 83^\circ$ .

5.6.20. На рис. 5.73 показано хід одного із променів в рівнобедреній призмі, який до і після призми поширюється паралельно її основи. Показати, що при будь-якому показнику заломлення матеріалу призми  $n > 1$  в точці  $A$  відбувається повне внутрішнє відбивання.

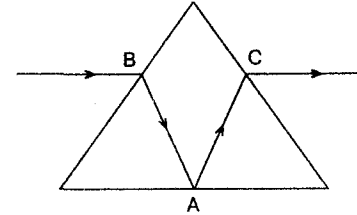


Рис. 5.73

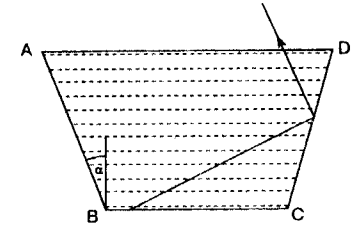


Рис. 5.74

5.6.21. З яким кутом  $\alpha$  потрібно взяти трапецієдальну посудину з водою (рис. 5.74), щоб крізь її бокову стінку не було видно предмета, який покладено на дно посудини? Показник заломлення води  $n = 1,33$ . Дно посудини має вигляд прямокутника.

Відповідь:  $\sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{n} = 0,752$ ;  $\alpha = 97^\circ 30'$ .

5.6.22. На якій відстані від скляної кулі радіуса  $R$  необхідно розмістити точкове джерело світла  $S$ , щоб його зображення  $S'$  виявилось з протилежного боку від кулі та тій же відстані? Показник заломлення скла дорівнює  $n$ . Зображення створюється вузьким пучком променів, близьких до оптичної осі.

Відповідь:  $x = \frac{R}{n-1}$ .

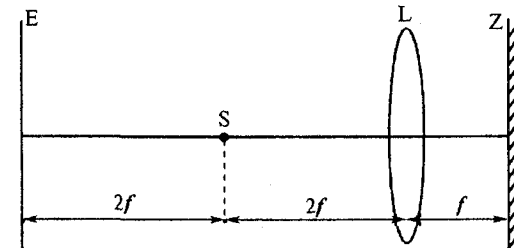


Рис. 5.75

5.6.23. На оптичній лаві послідовно розміщені екран  $E$ , точкове джерело світла  $S$ , збиральна лінза  $L$  і плоске дзеркало  $Z$ . Відстані вказані на рис. 5.75. У скільки разів зміниться освітленість в центрі екрана, якщо плоске

дзеркало пересунути вправо на відстань, рівну фокусній відстані лінзи?

**Відповідь:** Не зміниться.

3. 1. 55 **5.6.24.** Дзеркальний гальванометр, розміщений на відстані 2 м від шкали. На який кут повернется дзеркальце гальванометра, якщо зайчик змістився від центра шкали на 0,5 м?

**Відповідь:**  $\alpha = 7^\circ 15'$ .

3. 1. 56 **5.6.25.** Відстань між вгнутиим сферичним дзеркалом радіуса  $R$  і екраном рівна  $d$ . На якій відстані  $b$  від сферичного дзеркала на осі оптичної системи необхідно розмістити маленький об'єкт, щоб отримати його чітке зображення на екрані? Яке при цьому буде збільшення?

**Відповідь:**  $b = \frac{Rd}{2d-R}$ ;  $\beta = \frac{2d-R}{R}$ .

3. 1. 57 **5.6.26.** Плоскопаралельна пластинка розміщена між лінзою і зображенням предмета. Показник заломлення матеріалу пластинки  $n > 1$ . На яку відстань  $\Delta l$  в результаті цього переміститься зображення?

**Відповідь:**  $\Delta l = d \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$ , де  $d$  – відстань від лінзи до зображення при відсутності пластинки.

**5.6.27.** Визначити фокусну відстань вгнутого дзеркала якщо:

а) при відстані між предметом і зображенням  $l = 0,15$  м поперечне збільшення  $\beta = 2,0$ ;

б) при одному положенні предмета поперечне збільшення  $\beta = 0,50$ , а при іншому положенні, зміщеному відносно першого на відстань 0,5 м, поперечне збільшення  $\beta = 0,25$ .

**Відповідь:** а)  $f = \frac{l\beta}{(1-\beta)^2} = 0,1$  м; б)  $f = \frac{l\beta_1\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)} = 0,025$  м.

**5.6.28.** Збіжний пучок променів падає на опукле дзеркало так, що точка перетину продовження цих променів знаходиться на головній оптичній осі дзеркала на відстані  $l_1 = 0,20$  м від нього. Після відбиття ці промені перетинають оптичну вісь на відстані  $l_2 = 0,6$  м від дзеркала. Знайти фокусну відстань  $f$  та радіус кривизни  $R$  дзеркала.

**Відповідь:**  $f = 0,3$  м;  $R = 0,6$  м.

**5.6.29.** Точкове джерело світла рівномірно рухається по колу радіуса  $R = 0,5$  м. Лінійна швидкість його обертання  $v = 3$  м/с. На відстані  $d = 5$  м від центра кола перпендикулярно до осі обертання розміщене сферичне дзеркало з радіусом кривизни  $r = 2$  м. Знайти прискорення, з яким рухається зображення джерела в дзеркалі.

**Відповідь:**  $a = \frac{v^2 R}{r(2d-R)} = 4,5$  м/с.

**5.6.30.** Якої висоти потрібно взяти опукле дзеркало радіуса  $R$ , щоб людина бачила себе у весь зріст? Висота людини  $H$ , відстань на якій знаходиться людина від дзеркала,  $d$ .

**Відповідь:**  $h = \frac{H}{2} \frac{R}{(R+d)}$ .

**5.6.31.** Точкове джерело світла знаходиться на відстані  $L = 0,30$  м від опуклого сферичного дзеркала з радіусом кривизни  $R = 0,60$  м. Знайти освітленість на відстані  $L_1 = 0,60$  м від поверхні дзеркала, якщо на відстані  $L_2 = 1,20$  м вона дорівнює 200 лк.

**Відповідь:**  $E_1 = 1684$  лк.

**5.6.32.** Радіус кривизни вгнутого дзеркала  $R = 0,4$  м. Знайти положення предмета, при якому його зображення буде дійсним і збільшеним в 2 рази; уявним і збільшеним в 2 рази.

**Відповідь:**  $S_1 = \frac{3}{4} R$ ;  $S_1 = \frac{R}{4}$ .

**5.6.33.** В фокусі сферичного дзеркала розміщена посудина, що містить 100 г води. Яким повинен бути діаметр дзеркала, щоб вода закипіла через 1 хв, якщо дзеркало направити на Сонце? Густина потоку енергії від Сонця  $1400$  Вт/м<sup>2</sup>. Втратами енергії знехтувати.

**Відповідь:**  $D \approx 1$  м.

**5.6.34.** Вгнуте сферичне металічне дзеркало, що направлене на Сонце,

зібрало світло в точку, яка розміщена на осі дзеркала на відстані  $l_1$  від його центра. Температура дзеркала при цьому була  $t_1$ . На якій відстані від центра дзеркала буде знаходитися зображення після того, як дзеркало нагріється до температури  $t_2$ . Полюс дзеркала закріплений. Температурний коефіцієнт лінійного розширення металу рівний  $\alpha$ .

**Відповідь:**  $l_2 = \frac{1 + \alpha t_2}{1 - \alpha t_2} l_1$ , або правильніше  $l_2 = l_1(1 + \alpha(t_2 - t_1))$ .

**5.6.35.** В центрі сферичного дзеркала розміщене точкове джерело світла  $S$ . Дзеркало розізали навпіл. Обидві половини симетрично розвели на відстань  $h$  від головної оптичної осі цілого дзеркала. Знайти відстань між зображеннями джерела світла в дзеркалах.

**Відповідь:**  $l = 2h$ .

**5.6.36.** На оптичній осі вгнутого дзеркала, яке ідеально відбиває світло, міститься точкове джерело світла на відстані  $R$  і невеликий фотоелемент на відстані  $2R$  від центра ( $R$  – радіус кривизни дзеркала). У скільки разів зміниться сила фотоструму  $I_\phi$ , що проходить через фотоелемент, якщо джерело перемістити в точку, яка знаходиться від центра на відстані  $R/2$ ?

**Відповідь:**  $\frac{I_{\phi 1}}{I_{\phi 2}} = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{9}{10}$  раз.

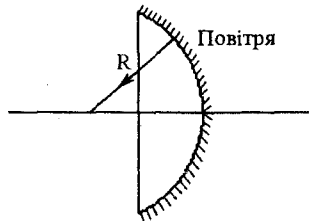


Рис. 5.76

**5.6.37.** Опуклий бік плоско-опуклої лінзи, фокусна відстань і показник заломлення якої відповідно рівні  $f$  і  $n$ , посріблено (рис. 5.76). Знайти фокусну відстань утвореного дзеркала.

**Відповідь:**  $f' = \frac{r}{2n}$ .

**5.6.38.** На якій відстані від лінзи розміщений предмет, якщо відстань між предметом і його дійсним зображенням мінімальна? Фокусна відстань лінзи  $f$ .

**5.6.39.** На фокусній відстані  $f$  від лінзи розміщене плоске дзеркало. Знайти, на якій відстані від лінзи буде знаходитися зображення предмета,

розміщеного на відстані  $S_1$  від лінзи (рис. 5.77). Побудуйте хід променів.

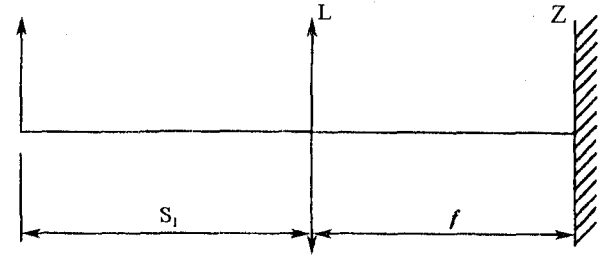


Рис. 5.77

**Відповідь:**  $S_2 = f \frac{S_1 - 2f}{S_1 - f}$ .

**5.6.40.** Лінзи з фокусними відстанями  $f_1 = f_2 = 30$  см знаходяться на відстані  $\Delta = 15$  см одна від одної. Знайти, при яких положеннях предмета система дає дійсне зображення? 3.162

**Відповідь:** На відстані не ближче 20 см до найближчої лінзи.

**5.6.41.** Знайти фокусну відстань двоопуклої лінзи, обмеженої сферичними поверхнями з радіусами кривизни  $R_1 = 2,5$  мм і  $R_2 = 40$  мм. Показник заломлення скла лінзи  $n = 1,5$ .

**Відповідь:**  $f = 30,5$  мм.

**5.6.42.** На якій відстані  $S_1$  від лінзи потрібно розмістити точкове джерело світла на головній оптичній осі, щоб промені, які проходять через лінзу, утворили на екрані світлу смугу діаметром  $d = 4$  см? Відстань від лінзи до екрана  $L = 100$  см. Діаметр лінзи  $D = 6$  см, фокусна відстань лінзи  $f = 15$  см. 3.163

**Відповідь:**  $S_1 = 20$  см і  $S_1' = 15,8$  см.

**5.6.43.** Лінза з фокусною відстанню  $f = 10$  см виготовлена із скла з показником заломлення  $n = 1,5$ . Знайти фокусну відстань лінзи, поміщеної у воду ( $n_{\text{води}} = 4/3$ ).

**Відповідь:**  $f' = 40$  см.

**5.6.44.** На екрані за допомогою тонкої лінзи отримано зображення 3.164





збиральної лінзи з  $f_1 = 1,5a$  і розсіювальної з  $f_2 = -1,5a$ , де  $a$  – відстань між лінзами; б) система із двох збиральних лінз з  $f_1 = 1,5a$  і  $f_2 = 0,5a$ . Відмітити положення фокусів обидвох систем. Предмет знаходиться на відстані  $S_1 = 10a$  від першої лінзи.

**5.6.56.** Об'єктив складається із двох лінз: додатньої з фокусною відстанню  $f_1 = 20$  см і від'ємної з фокусною відстанню  $-f_2 = -10$  см. Лінзи розміщені на відстані  $l = 15$  см одна від одної. Їх головні оптичні осі співпадають. За допомогою цього об'єктива отримують на екрані зображення Сонця. Яку фокусну відстань повинна мати тонка лінза, щоб зображення Сонця, яке отримується за її допомоги, мало б такий же розмір?

Відповідь:  $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l} = 40$  см.

**5.6.57.** Телескоп має фокусну відстань  $f = 160$  м. Яка різниця в положенні зображення при спостереженні: а) Місяця; б) штучного спутника, який знаходиться від Землі на відстані 320 км?

Відповідь:  $\Delta l = 8$  см.

**5.6.58.** У світлонепроникній камері горить лампа. На задній стінці камери розміщене плоске дзеркало  $Z$ , а в передню вставлена збиральна лінза  $L$  з фокусною відстанню  $f$  (рис. 5.79). В цій системі спостерігаються два прями збільшені зображення нитки лампи, причому одне зображення в два рази більше від іншого. Знайти відстань  $x$  від лампи до дзеркала, якщо відстань від лампи до лінзи  $l$ .

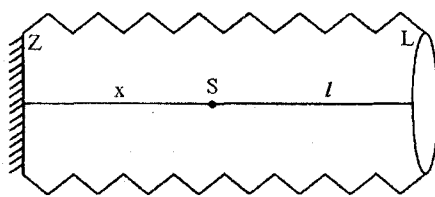


Рис. 5.79

Відповідь:  $x = \frac{f-l}{4}$ .

**5.6.59.** При фотографуванні предмета з відстані  $S_1 = 15$  м висота його зображення на фотоплівці виявилася рівною  $h_1 = 30$  мм, а при фотографуванні з відстані  $S_2 = 9$  м, висота зображення рівна  $h_2 = 51$  мм. Знайти фокусну відстань  $f_{об}$  об'єктива фотоапарата.

Відповідь:  $f_{об} = \frac{S_2 h_2 - S_1 h_1}{h_2 - h_1} = 43$  см.

**5.6.60.** Відстань від лінзи до предмета на 3 см відрізняється від відстані від лінзи до його дійсного зображення, яке створюється із двократним збільшенням. Визначити фокусну відстань лінзи.

Відповідь:  $f = \frac{S_2 - S_1}{\beta - \frac{1}{\beta}} = 2$  см, (де  $S_1$  і  $S_2$  - відповідно відстані від

предмета до лінзи і від лінзи до зображення,  $\beta$  – збільшення лінзи).

**5.6.61.** Предмет  $AB$  знаходиться перед лінзою. Промінь  $AC$

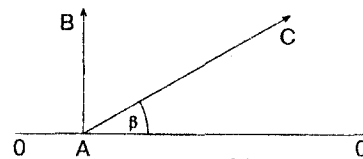


Рис. 5.80

поширюється під кутом до головної оптичної осі  $OO'$  лінзи. Після заломлення в лінзі цей промінь йде перпендикулярно до напрямку  $AC$  (рис. 5.80) Знайти відношення розміру зображення предмета  $AB$ , яке створюється лінзою, до розміру предмета.

Відповідь:  $\beta = \frac{h_2}{h_1} = \text{tg}^2 \beta$ .

**5.6.62.** Широкий пучок паралельних променів падає перпендикулярно на екран. На шляху світла паралельно до екрана встановили від'ємну лінзу. Відстань між лінзою і екраном втричі більша за фокусну відстань лінзи. Площа на екрані, де після установки лінзи освітленість зросла, виявилася рівною  $15$  см<sup>2</sup>. Визначити діаметр лінзи.

Відповідь:  $D = 2$  см.

**5.6.63.** Фокусна відстань тонкої лінзи складає 9 % відстані між предметом і екраном. У скільки разів збільшене зображення предмета, яке створюється лінзою на екрані, більше за зменшене?

Відповідь:  $\frac{\beta_1}{\beta_2} = 81$ .

## РОЗДІЛ VI ПОЛЯРИЗАЦІЯ СВІТЛА

### 6.1. Програмні питання

Природне і поляризоване світло. Поляризація світла при відбиванні і заломленні. Закон Брюстера. Подвійне променезаломлення світла. Закон Малюса. Інтерференція поляризованого світла.

Еліптична і колова поляризація світла: отримання і аналіз. Внутрішня структура поляризованого світла. Анізотропні середовища. Одно- і двовісні кристали. Штучна анізотропія: анізотропія при деформаціях, явища Керра і Поккельса та ефект Коттона – Мутона.

Повертання площини поляризації в кристалах і аморфних тілах. Елементарна феноменологічна теорія повертання площини поляризації. Магнітне повертання площини поляризації.

### 6.2. Основні поняття, закони і формули

Світлові хвилі поперечні: вектори електричного і магнітного полів  $\vec{E}$  і  $\vec{B}$  взаємно ортогональні і орієнтовані перпендикулярно до напрямку поширення променя світла. Однак в природному світлі напрямки коливань електричного вектора, перпендикулярні до променя, рівномірні, що виявляється в строгій симетрії відносно напрямку поширення світла (рис. 6.1).

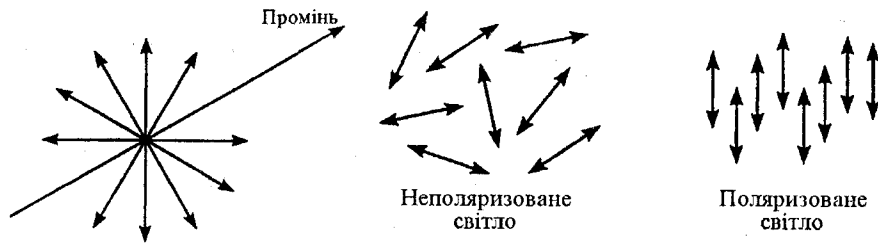


Рис. 6.1

Рис. 6.2

Поляризувати можна тільки поперечні хвилі.

**Види поляризації:** лінійна (плоска); колова (циркулярна); еліптична.

Лінійно поляризоване світло – це світло, в якому коливання електричного вектора  $\vec{E}$  відбуваються тільки в одному напрямку.

Хвилю з коловою або еліптичною поляризацією можна розкласти на дві лінійно поляризовані хвилі.

Світло, в якому існує переважаючий напрямок коливань електричного вектора  $\vec{E}$ , називають частково поляризованим.

Пристрої, за допомогою яких із природного світла отримують поляризоване називають поляризаторами. Для виявлення (аналізу) поляризації служать аналізатори, які за своїм принципом дії ідентичні поляризаторам.

#### 6.2.1. Поляризація при відбиванні

**Закон Брюстера:** при певному куті падіння  $r_B$  (різному для різних пар діелектриків) відбитий промінь повністю лінійно поляризований. При цьому електричний вектор у відбитому промені коливається в напрямку, перпендикулярному до площини падіння, відбитий і заломлені промені утворюють прямий кут (рис. 6.3), а

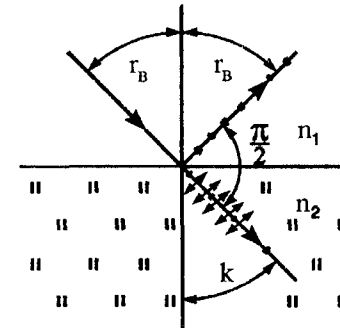


Рис. 6.3

$$\operatorname{tg} r_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (6.1)$$

де  $n_1$  і  $n_2$  – відповідно показники заломлення 1-ого і 2-ого середовищ (діелектриків),  $n_{21}$  – відносний показник заломлення другого середовища по відношенню до першого,  $r_B$  – кут Брюстера.

#### 6.2.2. Поляризація при подвійному променезаломленні

Подвійним променезаломленням називають явище, пов'язане із здатністю деяких речовин розщеплювати падаючий світловий промінь на два промені – звичайний (o) і незвичайний (e), які поширюються в різних напрямках з різною фазовою швидкістю і поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках. Для незвичайного променя характерні відхилення від звичайного закону заломлення, зокрема, залежність показника заломлення  $n_e$  від напрямку.

Подвійним променезаломленням володіють ісландський шпат, кварц, слюда, турмалін і ряд інших речовин.

Однопроменеві поляризаційні призми

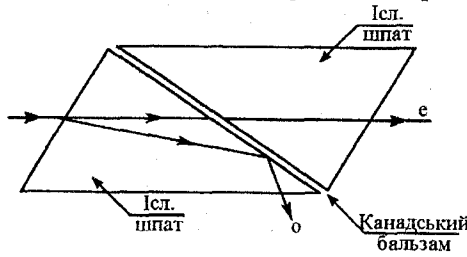


Рис. 6.4. Призма Ніколя

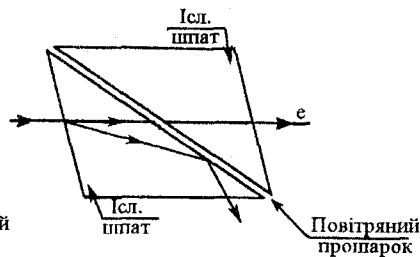


Рис. 6.5. Призма Фуко

Двопроменеві поляризаційні призми

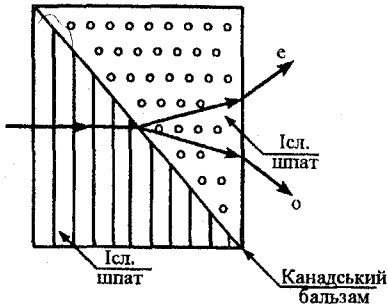


Рис. 6.6. Призма Волластона

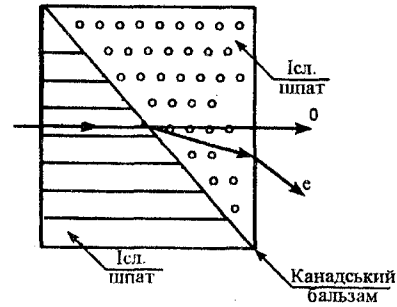


Рис. 6.7. Призма Рошона

6.2.3. Аналіз лінійно поляризованого світла

Інтенсивність природного світла, яке пройшло через поляризатор (рис. 6.8),

$$I_p = \frac{1}{2} k_p I_0, \quad (6.2)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючого на поляризатор природного світла,  $k_p$  – коефіцієнт прозорості поляризатора.

Інтенсивність поляризованого світла, яке пройшло через аналізатор,

$$I_a = I_p k_a \cos^2 \alpha, \quad (6.3)$$

або

$$I_a = \frac{1}{2} k_p k_a I_0 \cos^2 \alpha, \quad (6.4)$$

де  $k_p$  і  $k_a$  – відповідно коефіцієнти прозорості поляризатора і аналізатора,

$\alpha$  – кут між оптичними осями поляризатора і аналізатора. Формулу (6.4) називають законом Малюса.

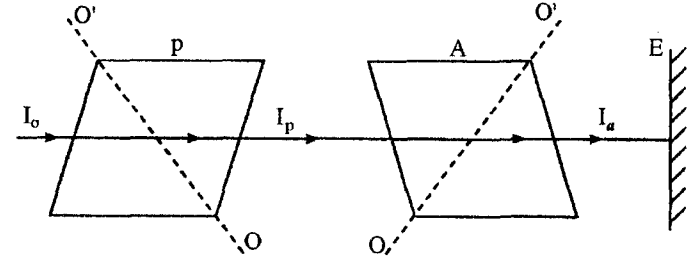


Рис. 6.8

Ступінь поляризації частково поляризованого світла

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (6.5)$$

де  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  – максимальна і мінімальна інтенсивності світла, які відповідають двом взаємно перпендикулярним напрямкам світлових коливань.

6.2.4. Еліптична і колова поляризації

Світло, в якого кінець електричного вектора світлової хвилі описує еліпс, називають поляризованим по еліпсу (рис. 6.9).

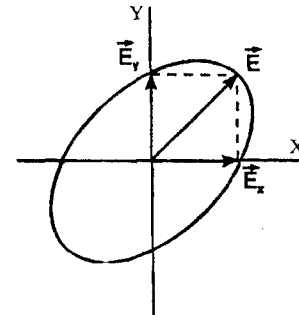


Рис. 6.9

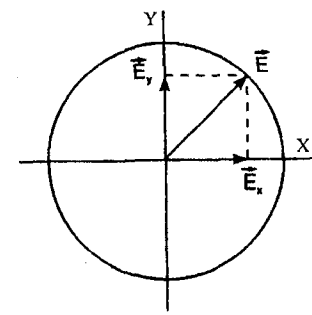


Рис. 6.10

Якщо кінець електричного вектора світлової хвилі описує коло, то таке світло називають поляризованим по колу (рис. 6.10). Якщо спостерігач дивиться назустріч поширенню світлової хвилі, то права поляризація світла відповідає обертанню електричного вектора  $\vec{E}$  за годинниковою стрілкою, а ліва поляризація – обертанню  $\vec{E}$  проти годинникової стрілки.

Загальне правило визначення напрямку поляризації зручно представити через комплексні амплітуди: додатному знаку уявної частини відношення

комплексних амплітуд  $\frac{E_{0y}}{E_{0x}}$  ( $I_m \frac{E_{0y}}{E_{0x}} > 0$ ) відповідає права поляризація, а

випадку  $I_m \frac{E_{0y}}{E_{0x}} < 0$  – ліва поляризація. При цьому завжди

використовується права система координат  $x, y, z$ .

**Отримання світла, поляризованого по еліпсу.** Для цього використовують поляризатор і фазову пластинку ( $\Phi.П.$ ) в  $\lambda/4$  (рис. 6.11). Якщо  $\alpha$  (кут між оптичними осями поляризатора і фазової пластинки в  $\lambda/4$ ) не дорівнює  $\pi/4$ , то світло, що вийде із фазової пластинки, буде поляризоване по еліпсу. При  $\alpha = \pi/4$  отримується світло, поляризоване по колу.

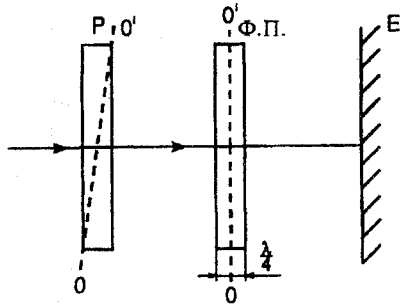


Рис. 6.11

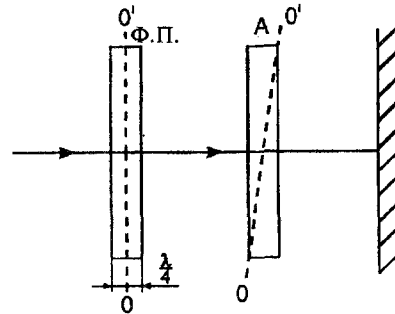


Рис. 6.12

Якщо замість фазової пластинки в  $\lambda/4$  (рис. 6.11) використати фазову пластинку в  $\lambda/2$  або фазову пластинку в  $\lambda$ , то на виході із пластинки утвориться лінійно поляризоване світло.

Повний аналіз поляризованого світла можна здійснити за допомогою фазової пластинки в  $\lambda/4$  і аналізатора (рис. 6.12). За зміною інтенсивності світла на виході його із аналізатора можна зробити однозначні висновки:

1) Якщо без пластинки в  $\lambda/4$  інтенсивність світла не змінюється, а при наявності пластинки змінюється при обертанні аналізатора  $A$  (навколо напрямку поширення світла) від  $I_{\max}$  до  $I_{\min}$ , то світло є поляризованим по колу. При цьому, якщо  $I_{\min} = 0$ , то світло повністю поляризоване по колу; при  $I_{\min} \neq 0$ , світло частково поляризоване по колу, тобто його слід вважати сумішшю природного світла і поляризованого по колу.

2) Якщо інтенсивність світла не змінюється ні з пластинкою в  $\lambda/4$ , ні без неї, то світло є природним.

1) отримані  
2) аналіз.

3) Якщо без пластинки в  $\lambda/4$  інтенсивність світла змінюється від  $I_{\max}$  до  $I_{\min} = 0$ , то світло є повністю лінійно поляризованим.

4) Якщо без пластинки в  $\lambda/4$   $I_{\min} \neq 0$ , а з пластинкою при певному положенні аналізатора, який не співпадає з напрямком попереднього положення, при якому спостерігалось  $I_{\min}$ , мінімальна інтенсивність стає рівною нулю, то в цьому випадку світло, падаюче на пластинку, повністю еліптично поляризоване. Якщо ж з пластинкою  $I_{\min}$  залишається відмінним від нуля, то можуть бути два випадки:

а) світло – частково лінійно поляризоване;

б) світло – частково еліптично поляризоване.

Перше має місце у випадку, якщо напрямки аналізатора, які відповідають  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$ , після введення пластинки в  $\lambda/4$  повністю співпадають з відповідними напрямками аналізатора без пластинки. Друге має місце, коли напрямки аналізатора, які відповідають  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  після введення пластинки в  $\lambda/4$ , не співпадають з відповідними напрямками аналізатора до введення пластинки в  $\lambda/4$ .

Наведені вище результати повністю вичерпують всі можливі випадки поляризації світлового променя і тому в сукупності дають метод повного якісного аналізу стану поляризації.

### 6.2.5. Оптична анізотропія

Залежність оптичних властивостей середовища від напрямку поширення світла в ньому і характеру поляризації світлової хвилі називають оптичною анізотропією середовища.

Мірою анізотропії може служити різниця показників заломлення звичайного і незвичайного променів –  $n_o - n_e$ .

Різниця ходу  $\Delta$  або різниця фаз  $\delta$  між звичайним і незвичайним променями, що виникають при штучній анізотропії:

– при механічних деформаціях:

$$\Delta = d(n_o - n_e) = \sigma kd = \frac{F}{S} kd, \quad (6.6)$$

і

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_o - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sigma kd = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{F}{S} kd, \quad (6.7)$$

де  $d$  – товщина пластинки,  $n_o$  і  $n_e$  – відповідно показники заломлення звичайного і незвичайного променів,  $n_o - n_e = k\sigma$ ,  $\sigma = \frac{F}{S}$  – механічна

напруга,  $k$  – коефіцієнт пропорційності, характерний для даної речовини (стала Брюстера),  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі.

– при дії електричного поля:

$$\Delta = d(n_0 - n_e) = kE^2 d = \lambda_0 B E^2 d, \quad (6.8)$$

i

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_0 - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0} kE^2 d = 2\pi B E^2 d, \quad (6.9)$$

де  $E$  – напруженість електричного поля,  $n_0 - n_e = kE^2$ ,  $B = \frac{k}{\lambda_0}$  – стала

Керра,  $d$  – шлях світла в речовині,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

– для електрооптичного ефекту Погкельса:

$$\Delta = d(n_0 - n_e) = aEd, \quad (6.10)$$

i

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_0 - n_e) = \frac{2\pi}{\lambda_0} aEd, \quad (6.11)$$

де  $n_0 - n_e = aE$ ,  $a$  – стала величина,  $d$  – шлях світла в речовині.

– при дії магнітного поля:

$$\Delta = d(n_0 - n_e) = CdB^2 \lambda_0, \quad (6.12)$$

i

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_0 - n_e) = 2\pi CdB^2, \quad (6.13)$$

де  $d$  – шлях світла в речовині,  $n_0 - n_e = CB^2 \lambda_0$ ,  $B$  – індукція магнітного поля,

$C$  – стала Коттона-Мутона, яка залежить від властивостей середовища і його фізичного стану.

### 6.2.6. Повертання площини поляризації світла

Кут повороту площини поляризації оптично активними кристалічними речовинами

$$\varphi = \alpha d, \quad (6.14)$$

де  $\alpha$  – питоме повертання, яке чисельно дорівнює куту повороту  $\varphi$  площини поляризації світла шаром одиничної товщини (1 мм),  $d$  –

товщина шару речовини.

Кут повороту площини поляризації розчинами

$$\varphi = [\alpha]cd, \quad (6.15)$$

де  $[\alpha]$  – стала повертання,  $c$  – концентрація оптично активної речовини,  $d$  – товщина шару розчину.

Правообертаючими називають речовини, які повертають площину поляризації за годинниковою стрілкою для спостерігача, який дивиться назустріч променю. Лівообертаючі речовини повертають площину поляризації проти годинникової стрілки відносно того ж спостерігача.

Деякі оптично неактивні речовини здатні повертати площину поляризації під дією магнітного поля:

$$\varphi = VdH, \quad \text{або} \quad \varphi = Vd \frac{B}{\mu_0}, \quad (6.16)$$

де  $\varphi$  – кут повороту площини поляризації,  $V$  – стала Верде (магнітна обертальна здатність), яка різна для різних речовин,  $d$  – товщина шару речовини,  $H$  – напруженість магнітного поля,  $B$  – індукція магнітного поля.

Правообертаючими ( $V > 0$ ) називають речовини, які повертають площину поляризації вправо для спостерігача, який дивиться вздовж магнітного поля. Лівообертаючі ( $V < 0$ ) речовини повертають площину поляризації навпаки.

### 6.3. Контрольні запитання

6.3.1. В чому різниця між лінійно поляризованим світлом і природним?

6.3.2. Поясніть, чому випромінювання джерела, яке містить велике число атомів, є неполяризованим, не зважаючи на те, що хвильові цуги, випромінювані окремими атомами, характеризуються певним станом поляризації.

6.3.3. Як і за допомогою яких приладів можна відрізнити природне світло від лінійно поляризованого?

6.3.4. З'ясуйте фізичну суть поляризації світла при відбиванні і заломленні світла на межі двох діелектриків.

6.3.5. З'ясуйте характер поляризації світла при проходженні його через призму Ніколя? призму Волластона?

6.3.6. Сонячне світло не проходить через два поляроїди, якщо їх осі схрещені, тобто якщо їх оптичні осі розміщені під прямим кутом. Що відбудеться, коли між цими поляроїдами помістити третій поляроїд, вісь якого утворює з осями двох інших поляроїдів кут  $45^\circ$ ?

**6.3.7.** Лінійно поляризоване світло спостерігають через ніколь-аналізатор. Чи зміниться інтенсивність світла, якщо на шляху поширення світла перед аналізатором розташувати нормально до напрямку поширення світла “пластинку в півхвилі”, оптична вісь якої перпендикулярна до головної оптичної осі аналізатора.

**6.3.8.** Чи завжди в двозаломлюючому середовищі незвичайний промінь поширюється із швидкістю  $c/n_e$ ?

**6.3.9.** З матеріалів, наведених в таблиці 6.1, виготовили чвертьхвильові пластинки. Із яких матеріалів отрималась би найтовща і найтонша пластинки?

Таблиця 6.1

Кристал	$n_o$	$n_e$
Лід	1,309	1,313
Кварц	1,544	1,553
Кальцит	1,658	1,486
Доломит	1,681	1,500

**6.3.10.** Як визначити напрямок оптичної осі в чвертьхвильовій пластинці?

**6.3.11.** На шляху пучка природного світла стоїть поляризатор. Як буде змінюватись (і чому) інтенсивність світла, що падає на екран після поляризатора, при обертанні поляризатора навколо напрямку променя? Як буде змінюватись інтенсивність, якщо перед екраном поставити аналізатор і його обертати навколо променя, залишаючи поляризатор нерухомим?

**6.3.12.** Як і за допомогою яких приладів можна отримати світло поляризоване по колу? по еліпсу?

**6.3.13.** Як відрізнити: а) лівополяризоване по колу світло від правополяризованого; б) природне світло від поляризованого по колу, від еліптично поляризованого, і від суміші природного світла з поляризованим по колу?

**6.3.14.** Паралельний пучок монохроматичного світла, поляризованого по колу, падає нормально на пластинку в півхвилі. Знайти характер поляризації світла, яке пройшло через пластинку.

**6.3.15.** Поляризоване по колу світло при проходженні через пластинку в  $\lambda/4$  перетворюється в лінійно поляризоване. Яким буде напрямок його

поляризації?

**6.3.16.** Як відрізнити: еліптично поляризоване світло від частково лінійно поляризованого світла та від суміші природного світла з еліптично поляризованим світлом.

**6.3.17.** Пластинка кварцу товщиною в 1 мм вирізана перпендикулярно до оптичної осі. Як визначити, з право- чи з лівообертаючого кварцу виготовлена пластинка, маючи у своєму розпорядженні два ніколи і джерело: а) монохроматичного світла; б) білого світла?

**6.3.18.** Як відрізнити пластинку кварцу, вирізаної перпендикулярно до оптичної осі, від пластинки кварцу, вирізаної паралельно осі, маючи у своєму розпорядженні два ніколи і джерело білого світла?

**6.3.19.** Пластинка кварцу товщиною в 1 мм, вирізана перпендикулярно до оптичної осі і розміщена між схрещеними ніколями. Чому при будь-якій довжині хвилі падаючого світла вона буде залишатися освітленою?

**6.3.20.** Чому при повертанні аналізатора пластинка кварцу, вирізана перпендикулярно до оптичної осі і розміщена між ніколями, міняє свій колір?

**6.3.21.** В яких випадках тонка кристалічна пластинка, вирізана перпендикулярно до оптичної осі і розміщена між схрещеними ніколями, здається темною в монохроматичному світлі.

**6.3.22.** Вітрове скло і фари машин обладнані пластинками із поляроїда. Як повинні бути розміщені ці пластинки, щоб водій міг бачити дорогу, освітлену світлом фар його автомашини, і не страждав би від фар зустрічних машин?

**6.3.23.** Лінійно поляризоване світло падає під кутом  $45^\circ$  на металічне дзеркало, яке покрите дуже тонким фотошаром (товщина фотошару  $\ll \lambda$ ).

В одному випадку вектор  $\vec{E}$  лежить в площині падіння, а в іншому – перпендикулярний до площини падіння. В якому випадку фотошар почорніє?

**6.3.24.** Світло, відбившись від поверхні води, частково поляризується. Як пересвідчитись в цьому, маючи поляроїд?

**6.3.25.** Якщо дивитись на спокійну поверхню неглибокого водоймища крізь поляроїд, поступово повертаючи його, то при певному положенні поляроїда дно водоймища можна буде бачити найкраще. Пояснити це явище.

**6.3.26.** Припустимо, що зональна пластинка зроблена з поляроїда. У всіх парних зонах поляроїд має одну орієнтацію, у всіх непарних – вона перпендикулярна до орієнтації в парних зонах. Порівняйте дію такої пластинки з дією звичайної пластинки.

**6.3.27.** Чи будуть спостерігатися кільця Ньютона, якщо на плоскоопуклу скляну лінзу, яка лежить на скляній металічній поверхні під кутом Брюстера падає світло поляризоване: а) в площині падіння; б) перпендикулярно до площини падіння?

**6.4. Методичні вказівки до розв'язування задач**

Задачі даної теми можна умовно розділити на чотири групи:

1. **Задачі, пов'язані з лінійною поляризацією світла.** Вони розв'язуються з використанням законів Брюстера (6.1) і Малюса (6.4). Для знаходження ступеня поляризації використовують формулу (6.5).

2. **Задачі, пов'язані з поляризацією світла по колу і по еліпсу.** Оскільки для отримання поляризованого світла по колу (чи по еліпсу) використовуються двозаломлюючі кристали (фазові пластинки в  $\lambda/4$ ), то для розрахунку різниці фаз між звичайним і незвичайним променями, що виходять з кристала, використовують формулу:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_o - n_e), \quad (6.17)$$

де  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі,  $n_o$  і  $n_e$  – відповідно показники заломлення звичайного і незвичайного променів,  $d$  – товщина кристала.

3. **Задачі, пов'язані з явищем штучної оптичної анізотропії,** розв'язуються з використанням формул (6.6) – (6.13).

4. **Задачі, пов'язані з повертанням площини поляризації лінійно поляризованого світла.** Тут користуються формулами (6.14) – (6.16), але потрібно мати на увазі, що в (6.14) питоме повертання  $\alpha$  вимірюється в

$$\frac{\text{град}}{\text{мм}}, \text{ а в (6.15) – в } \frac{\text{град}}{\text{см}^3} \Delta m.$$

**6.5. Приклади розв'язування задач**

**Задача 6.5.1.** Під яким кутом повинен падати пучок світла із повітря на поверхню рідини, щоб при відбиванні від дна скляної посудини ( $n_2 = 1,5$ ), наповненої водою ( $n_1 = 1,33$ ), світло було повністю поляризованим?

**Розв'язок.** На межу повітря–вода падає природне світло під кутом  $r$  (промінь 1, рис. 6.13). В точці  $A$  воно частково відбивається (промінь 2), і частково заломлюється (промінь 3). Промінь 2 і 3 частково лінійно поляризовані: в промені 2 переважаючий напрямок коливання електрич-

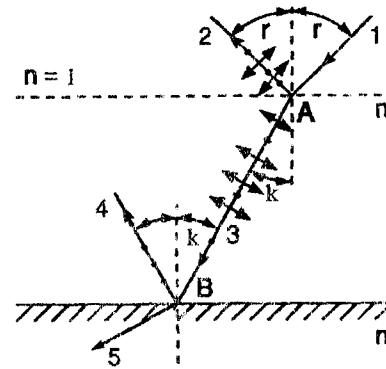


Рис. 6.13

ного вектора перпендикулярний до площини падіння, а в промені 3 електричний вектор лежить переважно в площині падіння.

Відповідно до закону заломлення

$$\sin r = n_1 \sin k. \quad (1)$$

На межу поділу вода–скло падає частково поляризоване світло під кутом  $k$ . В точці  $B$  воно частково відбивається (промінь 4), і частково заломлюється (промінь 5).

Промінь 4 повинен бути повністю поляризованим (за умовою). При цьому кут між променями 4 і 5 дорівнює  $90^\circ$ . Кут  $k$  є кутом Брюстера. Тому:

$$\text{tg } k_B = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2)$$

або

$$\text{ctg } k_B = \frac{n_1}{n_2}, \quad \sin k_B = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 k_B}} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \quad (3)$$

Із (1) знаходимо  $r$ :

$$\sin r = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} = \frac{1,33 \cdot 1,5}{\sqrt{(1,33)^2 + (1,5)^2}} = 0,99515; \quad r = 84^\circ 21'.$$

**Відповідь:**  $r = 84^\circ 21'$ .

**Задача 6.5.2.** Для порівняння яскравостей освітлення двох поверхонь одну із них розглядають безпосередньо, а другу через два ніколи. Яке відношення яскравостей, якщо освітлення обох поверхонь здається однаковим у випадку, коли кут між ніколями  $\alpha = 70^\circ$ ? Кожний ніколь поглинає 10% енергії, яка проходить через нього.

**Розв'язок.** Природне світло з інтенсивністю  $I_0$  при переході через поверхню призми ніколя розділяється на два промені (рис. 6.14): в напрямку  $AM$  поширюється незвичайний промінь інтенсивності  $I_0/2$ , а в напрямку  $AO$  – звичайний промінь також інтенсивності  $I_0/2$ .

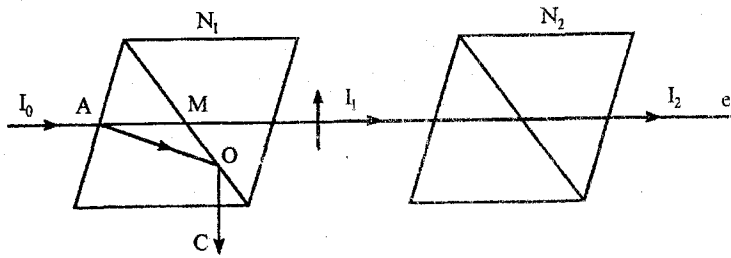


Рис. 6.14

В точці  $O$  звичайний промінь внаслідок повного внутрішнього відбивання вийде із ніколя в напрямку  $OC$ , а незвичайний поширюється в попередньому напрямку.

Через першу призму Ніколя проходять тільки коливання, які лежать в площині рисунка, причому 10 % енергії, яка проходить через ніколь, поглинається ним.

Інтенсивність світла, що пройшло через перший ніколь, дорівнює

$$I_1 = \frac{1}{2} 0,9 I_0. \quad (1)$$

За законом Малюса (6.4) інтенсивність світла, що пройшло через другий ніколь (аналізатор), пропорційна інтенсивності лінійно поляризованого світла, яке падає на нього і квадрату косинуса кута  $\alpha$  між головними площинами ніколей.

Враховуючи поглинання світла другим ніколем, маємо:

$$I_2 = 0,9 I_1 \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

При врахуванні (1) рівняння (2) набуде такого вигляду:

$$I_2 = \frac{1}{2} 0,81 I_0 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

При проходженні світла через два ніколи інтенсивність його зменшилась в  $k = \frac{I_0}{I_2} = \frac{1}{0,5 \cdot 0,81 \cdot \cos^2 70^\circ} = 21$  раз ( $\cos 70^\circ = 0,342$ ). Значить,

яскравість поверхні, що спостерігається через два ніколи, в 21 раз більша за яскравість поверхні, що спостерігається безпосередньо.

**Задача 6.5.3.** Два поляроїди розміщені під прямим кутом, а третій розміщується між ними так, щоб його оптична вісь складала кут  $\theta$  з оптичною віссю першого поляроїда. Яка інтенсивність світла, що пройде

через такий пристрій (втрати світла знехтувати)?

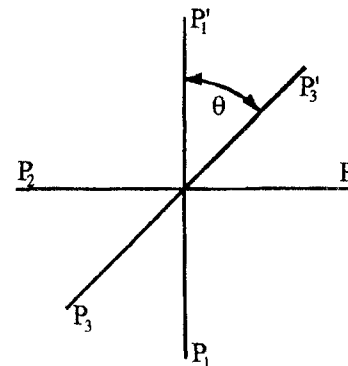


Рис. 6.15

**Розв'язок.** Якщо початковий пучок світла не поляризований, то при початковій інтенсивності  $I_0$  інтенсивність після проходження послідовних поляроїдів буде:

– після першого

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad (1)$$

– після другого (з оптичною віссю  $P_3P_3'$ )

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta, \quad (2)$$

– після третього (з оптичною віссю  $P_2P_2'$ )

$$I_3 = I_2 \cos^2(90^\circ - \theta) = I_2 \sin^2 \theta = \frac{I_0}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (3)$$

Або

$$I_3 = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta. \quad (4)$$

Відповідь:  $I_3 = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta$ .

**Задача 6.5.4.** Ступінь поляризації у відсотках частково поляризованого світла визначається відношенням:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} 100\%, \quad (1)$$

де  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  – максимальна і мінімальна інтенсивності світла, що пройшло через поляризатор. Таке світло можна розглядати, як суперпозицію двох лінійно поляризованих пучків неоднакової інтенсивності  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  із взаємно перпендикулярними площинами поляризації. Довести, що світло, яке пройшло через поляризатор з напрямком осі, що утворює кут  $\varphi$  з напрямком, якому відповідає  $I_{\max}$ , має інтенсивність

$$I_\varphi = \frac{1 + p \cos 2\varphi}{1 + p} I_{\max}, \quad (2)$$



де  $p = \frac{P}{100}$  – “частка поляризації”.

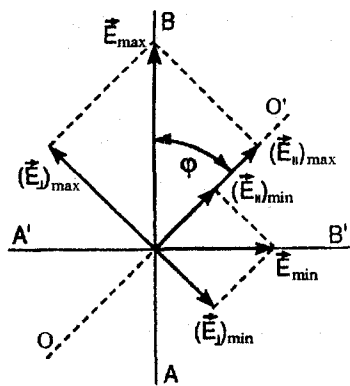


Рис. 6.16

**Розв’язок.** Нехай напрямки коливань електричного вектора світлових пучків неоднакової інтенсивності  $AB$  і  $A'B'$  (рис. 6.16). Напрямок  $AB$  відповідає максимальній  $I_{\max}$ , а  $A'B'$  – мінімальній  $I_{\min}$  інтенсивностям. Напрямок оптичної осі поляризатора позначимо через  $OO'$ , який складає з напрямком  $AB$ , тобто з напрямком коливання вектора  $\vec{E}_{\max}$ , кут  $\varphi$ . Слід врахувати, що через поляризатор пройдуть не вектори  $\vec{E}_{\max}$  і  $\vec{E}_{\min}$ , а тільки їх складові, паралельні до  $OO'$  –  $(\vec{E}_{\parallel})_{\max}$  і  $(\vec{E}_{\parallel})_{\min}$ . Цьому напрямку

буде відповідати інтенсивність некогерентного світла, пропорційна сумі квадратів складових амплітуд:

$$I_{\varphi} \sim (E_{\parallel})_{\max}^2 + (E_{\parallel})_{\min}^2. \quad (3)$$

Із рисунка маємо:

$$(E_{\parallel})_{\max} = E_{\max} \cos \varphi, \quad \text{і} \quad (E_{\parallel})_{\min} = E_{\min} \sin \varphi. \quad (4)$$

Тоді

$$I_{\varphi} = I_{\max} \cos^2 \varphi + I_{\min} \sin^2 \varphi. \quad (5)$$

Із (1) знайдемо, що

$$I_{\min} = \frac{1-p}{1+p} I_{\max}, \quad (6)$$

де

$$p = \frac{P}{100}.$$

При врахуванні (6) вираз (5) набуде остаточного вигляду:

$$I_{\varphi} = \frac{1+p(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{1+p} I_{\max} = \frac{1+p \cos 2\varphi}{1+p} I_{\max}.$$

**Задача 6.5.5.** Частково поляризоване світло проходить через ніколь. При повороті ніколя на кут  $\alpha = 60^\circ$  від положення, яке відповідає максимальній яскравості, яскравість пучка зменшилась в два рази. Нехтуючи поглинанням світла в ніколі, визначити: а) відношення інтенсивностей природного і лінійно поляризованого світла; б) ступінь поляризації світла.

**Розв’язок.** При першому положенні ніколя через нього проходить все раніше поляризоване світло з інтенсивністю  $I_p$  і поляризоване світло, інтенсивність якого складає 1/2 інтенсивності природного світла. Таким чином, інтенсивність світла, що пройшло через ніколь, рівна

$$I_1 = I_p + \frac{1}{2} I_{np}. \quad (1)$$

При другому положенні ніколя, тобто коли ніколь повернути на кут  $\alpha = 60^\circ$ , інтенсивність світла буде

$$I_2 = I_p \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} I_{np}. \quad (2)$$

За умовою задачі

$$I_1 = 2I_2. \quad (3)$$

Тоді

$$I_p + \frac{1}{2} I_{np} = 2 \left( I_p \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} I_{np} \right). \quad (4)$$

Якщо в (4) підставити замість  $\alpha$  його значення ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ) і спростити вираз, то отримаємо, що

$$I_p = I_{np}, \quad \text{або} \quad \frac{I_p}{I_{np}} = 1. \quad (5)$$

б) Для визначення ступеня поляризації скористаємось формулою (6.4):

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (6)$$

Максимальне значення інтенсивності  $I_{\max}$  визначимо за формулою (1), скориставшись при цьому умовою (5). Тоді

$$I_{\max} = I_1 = I_p + \frac{1}{2} I_{np} = \frac{3}{2} I_p. \quad (7)$$

Мінімальне значення інтенсивності  $I_{\min}$  отримаємо, якщо повернути ніколь на  $90^\circ$ :

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{np} = \frac{1}{2} I_p. \quad (8)$$

Підставляючи в (6) значення  $I_{\min}$  і  $I_{\max}$ , отримаємо

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_p - \frac{1}{2} I_p}{\frac{3}{2} I_p + \frac{1}{2} I_p} = \frac{I_p}{2 I_p} = 0,5.$$

Відповідь: а)  $\frac{I_p}{I_{np}} = 1$ ; б)  $P = 0,5$ .

**Задача 6.5.6.** Частково лінійно поляризоване світло аналізують за допомогою ніколя. При повороті ніколя на кут  $\alpha = 40^\circ$  від положення мінімальної яскравості інтенсивність зростає в  $n = 3$  рази. Визначити ступінь поляризації світла.

**Розв'язок.** Ступінь поляризації частково лінійно поляризованого світла визначимо, скориставшись формулою (6.5):

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (1)$$

Щоб визначити  $I_{\max}$  і  $I_{\min}$  покладемо, що частково лінійно поляризоване світло складається із природного і лінійно поляризованого. Позначимо їх інтенсивності відповідно  $I_{np}$  і  $I_p$ .

Очевидно, мінімальна інтенсивність відповідає випадку, коли лінійно поляризоване світло повністю гаситься, отже

$$I_{\min} = \frac{1}{2} I_{np}, \quad (2)$$

бо при будь-якому положенні головної площини аналізатора він пропускає половину інтенсивності природного світла. Повертання аналізатора на кут  $\alpha$  від положення мінімальної інтенсивності відповідало б повертання на кут  $90^\circ - \alpha$  від положення максимальної інтенсивності. Позначимо інтенсивність, яка спостерігається після повертання аналізатора, через  $I_1$ . Тоді

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{np} + I_p \cos^2(90^\circ - \alpha), \quad (3)$$

або

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{np} + I_p \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

За умовою задачі

$$I_1 = n I_{\min} = \frac{1}{2} n I_{np}. \quad (5)$$

Прирівнюючи праві частини (4) і (5), маємо

$$\frac{1}{2} n I_{np} = \frac{1}{2} I_{np} + I_p \sin^2 \alpha, \quad (6)$$

звідки

$$I_p = \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{\sin^2 \alpha} I_{np}. \quad (7)$$

Очевидно, що максимальна інтенсивність буде при  $\alpha = 90^\circ$ , тобто

$$I_{\max} = \frac{1}{2} I_{np} + I_p. \quad (8)$$

Скориставшись (7), виразимо  $I_{\max}$  через  $I_{np}$ :

$$I_{\max} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n-1}{\sin^2 \alpha} \right) I_{np} = \frac{n-1 + \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} I_{np}. \quad (9)$$

Далі підставимо значення  $I_{\min}$  (2) і  $I_{\max}$  (9) в формулу (1) і скорочуючи на  $\frac{I_{np}}{2}$ , матимемо:

$$P = \frac{\frac{n-1 + \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} - 1}{\frac{n-1 + \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha} + 1} = \frac{n-1}{n-1 + 2 \sin^2 \alpha}. \quad (10)$$

Підставляючи в (10) числові значення відповідних величин ( $n = 3$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ), отримаємо:

$$P = \frac{3-1}{3-1+2\sin^2 40^\circ} = 0,71.$$

Відповідь:  $P = 0,71$ .

**Задача 6.5.7.** Який характер поляризації має плоска електромагнітна хвиля, проекція вектора  $\vec{E}$  якої на осі  $X$  і  $Y$ , перпендикулярних до напрямку її поширення, визначаються такими рівняннями:

а)  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ ,  $E_y = E_0 \sin(\omega t - kz)$ ;

б)  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ ,  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{4})$ ;

в)  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ ,  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \pi)$ .

**Розв'язок.** Для того, щоб дати відповідь на питання в кожному із трьох випадків, необхідно знайти рівняння результуючого коливання і його вигляд покаже характер поляризації електромагнітної хвилі.

а) Рівняння першого випадку запишемо так:

$$\frac{E_x}{E_0} = \cos(\omega t - kz), \quad \frac{E_y}{E_0} = \sin(\omega t - kz). \quad (1)$$

Піднесемо праві і ліві частини рівнянь (1) до квадрату і почленно їх додамо.

Тоді:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = \sin^2(\omega t - kz) + \cos^2(\omega t - kz), \quad (2)$$

звідки:

$$\boxed{E_x^2 + E_y^2 = E_0^2}. \quad (3)$$

Рівняння (3) є рівнянням кола, тобто у випадку (а) хвиля поляризована по колу: кінець вектора  $\vec{E}$  описує коло. Цей випадок зображено на рис. 6.17, із якого видно, що це ліва колова поляризація (вектор  $\vec{E}$  обертається проти годинникової стрілки, якщо дивитися назустріч напрямку поширення світлової хвилі).

Для того, щоб дати відповідь для другого і третього випадків, розглянемо загальний випадок. Нехай рівняння проекцій  $E_x$  і  $E_y$  мають такий вигляд:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad \text{і} \quad E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad (4)$$

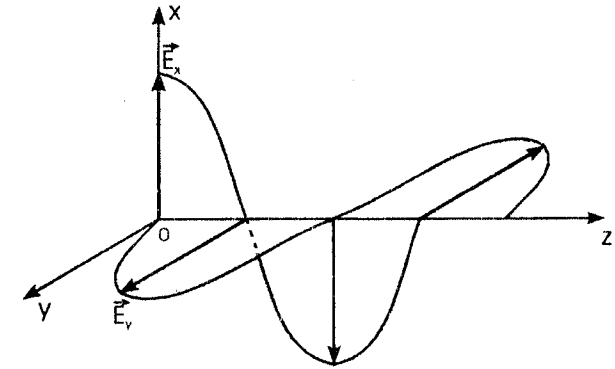


Рис. 6.17

Далі рівняння (4) запишемо так:

$$\frac{E_x}{E_0} = \cos(\omega t - kz), \quad (5)$$

$$\frac{E_y}{E_0} = \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad (6)$$

У правій частині рівності (6) врахуємо відому формулу тригонометрії:

$$\frac{E_y}{E_0} = \cos(\omega t - kz) \cos \alpha - \sin(\omega t - kz) \sin \alpha, \quad (7)$$

і перепишемо далі (7) так:

$$\sin(\omega t - kz) \sin \alpha = \cos(\omega t - kz) \cos \alpha - \frac{E_y}{E_0}. \quad (8)$$

Із врахуванням (5) рівність (8) набуде такого вигляду:

$$\sin(\omega t - kz) \sin \alpha = \frac{E_x}{E_0} \cos \alpha - \frac{E_y}{E_0}. \quad (9)$$

Далі, підносячи рівність (9) до квадрату і додаючи її почленно з рівністю (10):

$$[\cos(\omega t - kz) \sin \alpha]^2 = \frac{E_x^2}{E_0^2} \sin^2 \alpha, \quad (10)^*$$

отримаємо

$$\sin^2 \alpha [\sin^2(\omega t - kz) + \cos^2(\omega t - kz)] = \frac{E_x^2}{E_0^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{E_x E_y}{E_0^2} \cos \alpha + \frac{E_y^2}{E_0^2} \sin^2 \alpha + \frac{E_y^2}{E_0^2}. \quad (11)$$

Після нескладних перетворень рівняння (11) набуде такого вигляду:

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_0^2} \cos \alpha + \frac{E_y^2}{E_0^2} = \sin^2 \alpha. \quad (12)$$

Рівняння (12) є рівнянням еліпса, осі якого орієнтовані відносно координатних осей  $X$  і  $Y$  довільно. Орієнтація еліпса і величина його півосей залежить лише від кута  $\alpha$  (різниці фаз).

Розглянемо рівняння еліпса у випадках, коли  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  і  $\alpha = \pi$ .

б) Нехай  $\alpha = \pi/4$ . Рівняння (12) після підстановки значення  $\alpha$  залишається рівнянням еліпса, тобто плоска електромагнітна хвиля, проекції вектора  $\vec{E}$  якої на осі  $X$  і  $Y$  визначаються рівняннями (6) (див. умову задачі), поляризована по еліпсу (вектор  $\vec{E}$  обертається за годинниковою стрілкою) (рис. 6.18).

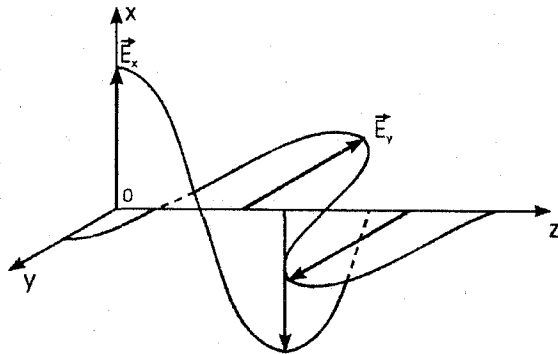


Рис. 6.18

в) Нехай  $\alpha = \pi$ . Рівняння (12) після підстановки значення  $\alpha$  перетворюється в рівняння прямої:

\* Рівняння (10) отримується із (5), якщо праву і ліву частини рівняння (5) домножити на  $\sin \alpha$  і піднести їх до квадрату.

$$E_x + E_y = 0, \quad (13)$$

тобто світло є лінійно поляризованим (рис. 6.19,а), вектор  $\vec{E}$  лежить у другому і четвертому квадрантах (рис. 6.19,б).

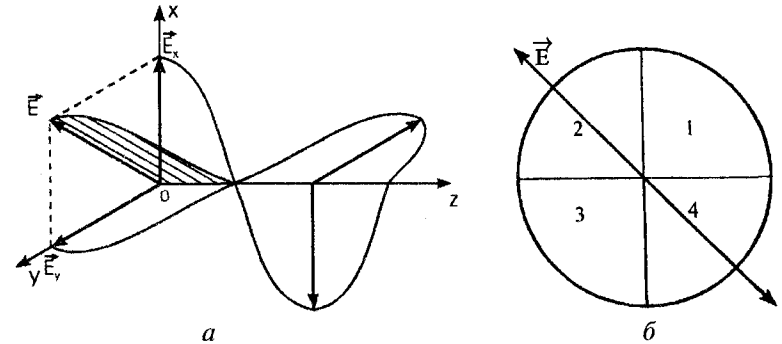


Рис. 6.19

Відповідь: У випадку (а) світло поляризоване по колу, у випадку (б) – по еліпсу, а у випадку (в) – світло лінійно поляризоване.

**Задача 6.5.8.** Як за допомогою поляроїда і пластинки в чверть хвилі, виготовленої із додатного одновісного кристала ( $n_e > n_o$ ), відрізнити:

- світло, лівополяризоване по колу, від правополяризованого;
- природне світло від поляризованого по колу, від еліптично поляризованого і від суміші природного з поляризованим по колу.

**Розв'язок.** Поляризоване світло по колу можна отримати, якщо лінійно поляризоване світло пропустити через подвійнозаломлюючу кристалічну пластинку з оптичною товщиною  $\lambda/4$  (фазова пластинка в чверть хвилі, рис. 6.20). Промінь лінійно поляризованого світла в подвійнозаломлюючій пластинці розбивається на два промені – звичайний і незвичайний, які поширюються в одному напрямку, але з різними швидкостями. Оскільки оптична товщина пластинки рівна  $\lambda/4$ , то при виході із пластинки між звичайним і незвичайним променями виникне різниця ходу  $\Delta = \lambda/4$ , що аналогічно різниці фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Якщо кут між оптичними осями поляризатора і фазової пластинки рівний  $\alpha = 45^\circ$ , то амплітуди звичайного і незвичайного променів будуть рівні. Тому за виконання умов  $\delta = \pi/2$  і  $\alpha = 45^\circ$  світло, яке вийде із

подвійнозаломлюючої пластинки, буде поляризоване по колу (вектор  $\vec{E}$  обертається проти годинникової стрілки відносно спостерігача, який дивиться проти напрямку поширення світла). Це є *права колова поляризація* (рис. 6.20).

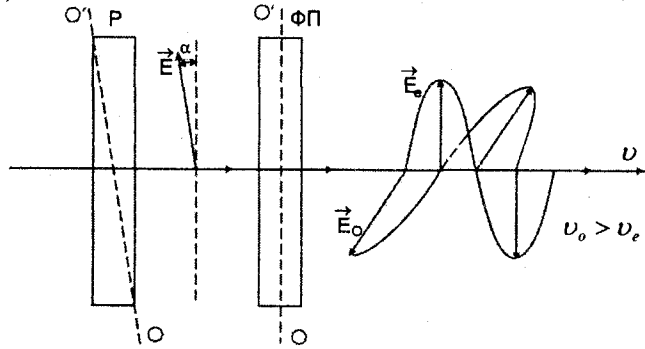


Рис. 6.20

Якщо це світло пропустити ще раз через пластинку в чверть хвили, то звичайний і незвичайний промені набудуть додаткової різниці ходу рівної  $\Delta = \lambda/4$ , внаслідок чого загальна різниця фаз між ними буде рівна  $\pi$ . Поява різниці ходу, рівної  $\pi$ , призведе до утворення після пластинки лінійно поляризованого світла (рис. 6.21), електричний вектор  $\vec{E}$  якого колива-

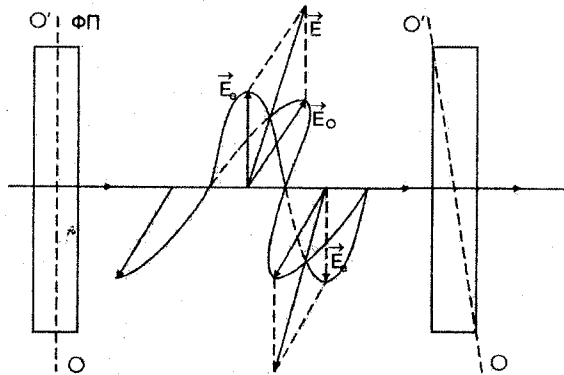


Рис. 6.21

тиметься в першому і третьому квадрантах (рис. 6.22, а).

Якщо те ж саме проробити з лівополяризованим по колу світлом, то електричний вектор утвореного після фазової пластинки лінійно

поляризованого світла буде коливатись в другому і четвертому квадрантах (рис. 6.22, б). В тому, що після пластинки в чверть хвили утворилось лінійно поляризоване світло, можна перекопати за допомогою аналізатора (рис. 6.21), при обертанні якого навколо напрямку поширення світла інтенсивність змінюватиметься від  $I_{\min} = 0$  до  $I_{\max}$  і навпаки, через кожні  $90^\circ$ .

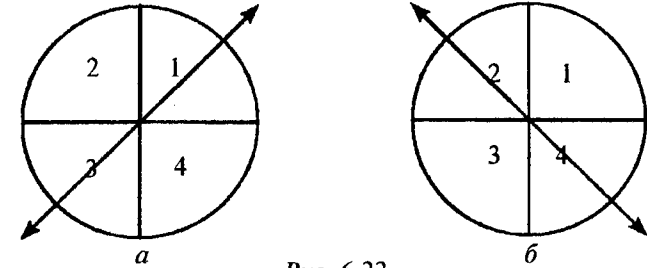


Рис. 6.22

б) Для аналізу світла, приведеного в пункті (б), необхідно світловий пучок пропустити через пластинку в чверть хвили і аналізатор (рис. 6.21).

Якщо при повертанні аналізатора при будь-якому положенні пластинки інтенсивність світла, що пройшло через систему, не змінюється, світло природне; якщо змінюється від  $I_{\max}$  до нуля, то світло поляризоване по колу; якщо змінюється, але не падає до нуля, то світло поляризоване по еліпсу, або є сумішшю природного з поляризованим по колу. Для того, щоб відрізнити останні два види світла, необхідно зафіксувати пластинку в чвертьхвили так, щоб її оптична вісь співпала з великою або малою піввіссю еліпса. Якщо після цього при повертанні аналізатора інтенсивність світла, яке пройшло через систему, буде змінюватись від  $I_{\max}$  до нуля, то світло поляризоване по еліпсу; якщо інтенсивність змінюється і не падає до нуля, то світло є сумішшю природного і поляризованого по колу.

**Задача 6.5.9.** Яку товщину повинна мати чвертьхвильова пластинка з кальциту ( $n_e = 1,486$ ;  $n_o = 1,658$ ) для світла з довжиною хвилі  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ .

**Розв'язок.** Число довжин хвиль  $N_e$  незвичайного променя, яке вкладається на товщині  $t$  кристала

$$N_e = \frac{t}{\lambda_e} = \frac{tn_e}{\lambda}, \quad (1)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі в повітрі,  $\lambda_e = \frac{\lambda}{n_e}$  – довжина хвилі незвичайного променя.

Число довжин хвиль  $N_0$  звичайного променя, яке вкладається на товщині  $t$  кристала

$$N_0 = \frac{t}{\lambda_0} = \frac{tn_0}{\lambda} \quad (2)$$

Оскільки різниця ходу між звичайним і незвичайним променями повинна бути  $\lambda/4$  (згідно умови пластинка повинна бути чвертьхвильовою), то

$$\frac{1}{4} = N_0 - N_e = \frac{t}{\lambda}(n_0 - n_e) \quad (3)$$

Розв'язавши (3) відносно  $t$  і підставивши числові значення відповідних величин ( $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ;  $n_0 = 1,658$ ;  $n_e = 1,486$ ), отримаємо:

$$t = \frac{\lambda}{4(n_0 - n_e)} = \frac{5890}{4(1,658 - 1,486)} \text{ \AA} = 8561 \text{ \AA}$$

Відповідь:  $t = 8,561 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

**Задача 6.5.10.** Із кварцу потрібно вирізати пластинку, паралельну до оптичної осі так, щоб лінійно поляризований промінь жовтого світла ( $\lambda = 0,589 \text{ мкм}$ ), пройшовши через пластинку, став поляризованим по колу. Розрахувати товщину пластинки, якщо для жовтих променів у кварці показники заломлення звичайного і незвичайного променів відповідно рівні:  $n_0 = 1,544$ ,  $n_e = 1,533$ .

**Розв'язок.** Оскільки пластинка кварцу вирізана паралельно до оптичної осі, то лінійно поляризований промінь, що падає на неї, розіб'ється на два – звичайний і незвичайний, які поширюються в одному напрямку, просторово не розділяючись, з різними швидкостями. У звичайному промені коливання електричного вектора перпендикулярні до оптичної осі кристала і мають амплітуду  $E \sin \alpha$ , у незвичайному промені коливання паралельні до оптичної осі і мають

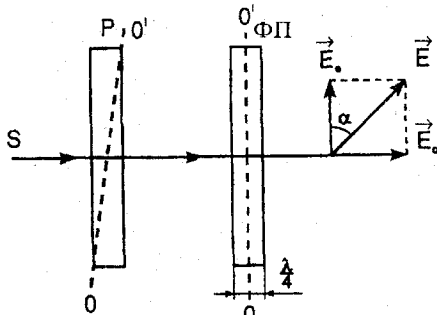


Рис. 6.23

амплітуду  $E \cos \alpha$ . Зауважимо, що  $\alpha$  – кут між вектором світлових коливань  $\vec{E}$  лінійно поляризованого світла і оптичною віссю кристала. Якщо  $\alpha = 45^\circ$ , амплітуди звичайного і незвичайного променів рівні ( $E_e = E_0$ ).

Володіючи різними швидкостями ( $v_e > v_0$ ), звичайний і незвичайний промені, пройшовши фазову пластинку ФП, набудуть деякої різниці фаз  $\delta$ .

Щоб утворилося світло, поляризоване по колу, різниця фаз звичайного і незвичайного променів на виході із ФП повинна дорівнювати  $\delta = \pi/2$ . Користуючись формулою (6.17), маємо:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_0)d = \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_0)}$$

Підставляючи в останню формулу числові дані відповідних величин ( $\lambda = 0,589 \text{ мкм}$ ;  $n_0 = 1,544$ ;  $n_e = 1,533$ ), отримаємо:

$$d = \frac{0,589}{4(1,533 - 1,544)} \text{ мкм} = 16,36 \text{ мкм}$$

Відповідь:  $d = 16,36 \text{ мкм}$ ; оскільки  $v_e > v_0$  із ФП товщиною  $d = 16,36 \text{ мкм}$  вийде світло з лівою коловою поляризацією.

**Задача 6.5.11.** Паралелепіпед, вирізаний із плексигласу з лінійними розмірами  $a = 2b = 3d = 0,5 \text{ см}$  стискується силою  $\vec{F}$  в напрямку осі  $Z$

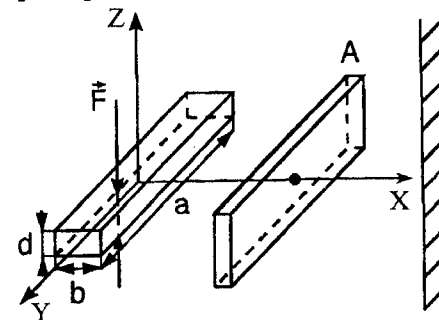


Рис. 6.24

(рис. 6.24) і освітлюється лінійно поляризованим монохроматичним світлом ( $\lambda = 500 \text{ нм}$ ) в напрямку осі  $X$ . Площина коливань падаючого світла складає з віссю анізотропії кут  $45^\circ$ . Коефіцієнт фотопружності плексигласу  $k = 2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ . При якій силі тиску  $\vec{F}$  світло вийде із плексигласу поляризованим по колу? Як в цьому випадку при

поворотах аналізатора  $A$  відносно променя змінюватиметься освітленість екрана? Як буде змінюватись освітленість екрана, якщо перед аналізатором поставити пластинку в чверть хвилі?

**Розв'язок.** а) При прикладанні до пластинки сили  $\vec{F}$  пластинка набуває властивостей подвійнозаломлюючого кристала, тобто падаючий на пластинку лінійно поляризований промінь розщепиться в пластинці на звичайний і незвичайний промені, при чому з однаковими амплітудами, оскільки площина коливань падаючого світла складає з віссю анізотропії кут  $\alpha = 45^\circ$ . Щоб світло, яке вийде із пластинки, було поляризоване по колу, необхідно, щоб різниця ходу  $\Delta$  між звичайним і незвичайним променями була рівною

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}. \quad (1)$$

З другого боку

$$\Delta = k\sigma l = \frac{k l F}{S}, \quad (2)$$

де  $k$  – коефіцієнт фотопружності,  $l = b$  – шлях світла в плексигласі,  $\sigma = \frac{F}{S}$  –

механічна напруга, яка виникає під дією сили  $\vec{F}$ . Прирівнюючи праві частини (1) і (2), отримуємо

$$\frac{k l F}{S} = \frac{\lambda}{4}, \quad (3)$$

звідки

$$F = \frac{\lambda S}{4kl} = \frac{\lambda ab}{4kb} = \frac{\lambda a}{4k}, \quad (4)$$

де  $S = ab$ ,  $l = b$ .

Підставляючи в (4) числові дані відповідних величин ( $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7}$  м;  $a = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $k = 2 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Н), отримаємо, що  $F = 31,3$  Н.

б) При обертанні аналізатора навколо напрямку поширення променя, у випадку, коли до паралелепіпеда прикладена сила  $F = 31,3$  Н вздовж вісі  $Z$ , освітленість екрана не змінюватиметься, оскільки світло, яке падатиме на аналізатор, буде поляризоване по колу.

в) Якщо перед аналізатором поставити чвертьхвильову пластинку, то при обертанні аналізатора навколо напрямку поширення променя освітленість екрана буде змінюватись від нуля до максимуму і навпаки,

через кожні  $90^\circ$ . Це пов'язано з тим, що чвертьхвильова пластинка перетворює поляризоване світло по колу в лінійно поляризоване.

**Задача 6.5.12.** Зважаючи на труднощі виготовлення тонких фазових пластинок, раціонально використовувати пластинки в  $1/4$  хвилі, які дають різницю ходу  $(k + 1/4)\lambda$  при досить великому  $k$ . Розрахувати таку пластинку для кварцу ( $n_o = 1,544$ ;  $n_e = 1,553$ ) з тим, щоб її товщина була близько 1 мм. Вважати, що  $\lambda = 5890$  Å.

**Розв'язок.** Різниця ходу звичайного і незвичайного променів

$$\Delta = (n_e - n_o)l, \quad (1)$$

де  $l$  – товщина пластинки.

За умовою різниця ходу повинна бути:

$$\Delta = \left(k + \frac{1}{4}\right)\lambda. \quad (2)$$

Із (1) і (2) маємо:

$$l = \frac{\left(k + \frac{1}{4}\right)\lambda}{n_e - n_o}. \quad (3)$$

Внаслідок малості величини  $\lambda/(n_e - n_o)$  потрібне значення  $l$  можна забезпечити лише вибором досить великих  $k$ . За умовою задачі товщину визначено лише приблизно, тому спочатку знайдемо значення  $k$ , потрібне для того, щоб забезпечити товщину близько 1 мм за наближеною формулою, знехтувавши в (3)  $1/4$  поруч з  $k$ , тобто за співвідношенням

$$l = \frac{k\lambda}{n_e - n_o}, \quad (4)$$

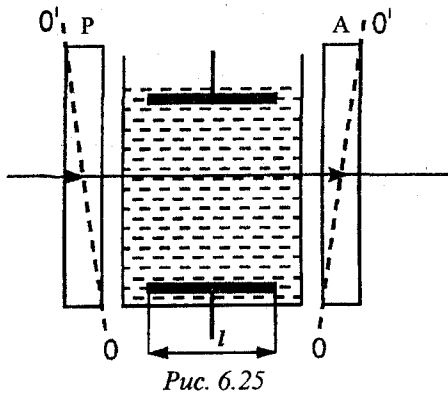
звідки знаходимо:

$$k = \frac{l(n_e - n_o)}{\lambda} = 15. \quad (5)$$

Далі підставимо це значення  $k$  в (3) і розрахуємо точне значення  $l$ , що задовільняє умові задачі:

$$l = \frac{\left(15 + \frac{1}{4}\right)5,89 \cdot 10^{-4}}{0,009} \text{ мм} = 0,998 \text{ мм}.$$

Задача 6.5.13. Комірка Керра (рис. 6.25) заповнена нітробензолом.



Вектор напруженості електричного поля між пластинками конденсатора складає кут  $\alpha = 45^\circ$  з оптичною віссю поляризатора. Визначити сталу Керра  $B$  для нітробензолу, якщо найменше значення напруженості електричного поля, при якому положення аналізатора не впливає на поле зору, рівне  $E_1 = 10^6 \text{ В/м}$ . Яка найменша напруженість поля конденсатора, якщо при схрещених поляризаторі і аналізаторі поле зору має найменшу освітленість?

Чи зміниться поле зору, якщо, не змінюючи напруженості поля, змінити світлофільтр? Довжина пластинок конденсатора  $l = 10 \text{ см}$ .

Розв'язок. а) Положення аналізатора не впливатиме на поле зору в тому випадку, коли із комірки Керра буде виходити поляризоване світло по колу. Комірка Керра діє як двозаломлююча кристалічна пластинка, в якій утворюються звичайний і незвичайний промені з різницею ходу на виході із неї

$$\Delta = B l E^2, \quad (1)$$

(тут  $B$  – стала Керра для нітробензолу,  $l$  – довжина пластинок конденсатора,  $E$  – напруженість електричного поля між пластинками конденсатора) і рівними амплітудами, оскільки вектор напруженості електричного поля між пластинками конденсатора складає кут  $\alpha = 45^\circ$  з оптичною віссю поляризатора. Щоб в результаті додавання звичайного і незвичайного променів утворилося світло, поляризоване по колу, необхідно, щоб різниця ходу між ними була рівна:

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}. \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини (1) і (2), отримаємо:

$$\frac{\lambda}{4} = B l E^2, \quad (3)$$

звідки

$$B = \frac{1}{4 l E^2} = \frac{1}{4 \cdot 0,1 \cdot (10^6)^2} = 2,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}}{\text{В}^2}.$$

б) Для того, щоб аналізатор максимально погасив промінь, який вийде із комірки Керра, необхідно, щоб він (промінь) залишився таким, яким він був після поляризатора, тобто лінійно поляризованим, а електричний вектор його коливався б в напрямку, перпендикулярному до оптичної осі аналізатора, тобто в тому ж самому напрямку. Для цього потрібно, щоб при виході із комірки Керра звичайний і незвичайний промені набули різниці ходу  $\Delta = k \lambda$ , де  $k = 1, 2, 3, \dots$  Враховуючи (1), матимемо:

$$B l E^2 = k \lambda. \quad (4)$$

Відповідно до умови задачі напруженість поля між пластинками конденсатора повинна бути мінімальною. Ця умова виконується при  $k = 1$ . Тоді

$$\lambda = B l E_{\min}^2, \quad (5)$$

звідки

$$E_{\min} = \sqrt{\frac{\lambda}{B l}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

в) Оскільки різниця ходу  $\Delta$ , що виникає між звичайним і незвичайним променями пропорційна  $\lambda$ , і визначає характер поляризації (при сталому  $E$ ) світла, яке вийде із комірки Керра, то зрозуміло, що заміна світлофільтра не призведе до зміни освітленості поля зору.

Відповідь: а)  $B = 2,5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}}{\text{В}^2}$ ; б)  $E_{\min} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ .

Задача 6.5.14. На рис.6.26 наведена схема демонстраційного досліду М.О.Умова. Світло від джерела  $S$  проходить через поляроїд  $P$ , а потім йде зверху вниз крізь трішки каламутний розчин цукру в скляній посудині  $B$ , в якій видно гвинтову райдужно забарвлену смугу. а) Пояснити явище. б) Яка довжина кроку гвинтової смуги в розчині при умові, що розчин містить  $650 \text{ г}$  цукру на  $1 \text{ л}$  води, густина розчину  $1,32 \text{ г/см}^3$ , розчин освітлюється світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 5,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , питоме повертання



$$\alpha_0 = 87 \frac{\text{град}}{(\text{г} \cdot \text{дм}) / \text{см}^3}.$$

Розв'язок. а) Спостережувана картина пояснюється так. Світло, яке поширюється в посудині вертикально, спостерігає

Рис.6.26



не бачить, до нього попадають тільки промені, які розсіюються трішки каламутним розчином. Ці промені виникають при вимушених коливаннях електронів в молекулах розчину під дією електричного поля падаючої світлової хвилі. Випромінювання, яке при цьому з'являється, максимальне в площині, перпендикулярній до напрямку коливань диполів, і рівне нулю вздовж напрямку коливань. Якщо падаюче світло поляризоване так, що його коливання направлені до спостерігача, то ясно, що розсіяного світла в цьому напрямку не буде.

В цукровому розчині площина поляризації світла поступово повертається, яскравість розсіяного світла то поступово росте, то поступово зменшується, і так картина повторюється. При цьому яскраві місця розміщуються, очевидно, по гвинтовій лінії. Оскільки поворот площини поляризації залежить від довжини хвилі, то гвинтова смуга райдужно забарвлена.

б) Кут повороту площини поляризації розчином прямо пропорційний концентрації розчиненої речовини  $C$  і довжині шляху  $l$ , який проходить світло в розчині:

$$\varphi = \alpha_0 C l, \quad (1)$$

де  $\alpha_0$  – питома повертання. Щоб смуга зробила один повний оберт, площина поляризації повинна повернутись на  $360^\circ$ . Якщо  $\varphi = 360^\circ$ , то  $l$  в формулі (1) буде довжиною кроку гвинтової смуги. Тоді із (1) отримаємо:

$$l = \frac{\varphi}{\alpha_0 C}. \quad (2)$$

Концентрація розчину виразиться формулою:

$$C = \frac{m_0 \rho}{100}, \quad (3)$$

де  $m_0$  – маса цукру на 100 г розчину,  $\rho$  – густина розчину, цифра 100 означає масу розчину. Враховуючи (3), отримаємо:

$$l = \frac{100\varphi}{\alpha_0 m_0 \rho}. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові дані відповідних величин ( $\varphi = 360^\circ$ ;

$$\alpha_0 = 87 \frac{\text{град}}{\left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right) \text{дм}}; m_0 = 39,39 \text{ г}; \rho = 1,32 \text{ г/см}^3, \text{ отримаємо, що } l \approx 80 \text{ см} \approx 8 \text{ дм}.$$

Відповідь:  $l \approx 8 \text{ дм}$ .

Задача 6.5.15. Вузкий пучок лінійно поляризованого світла проходить

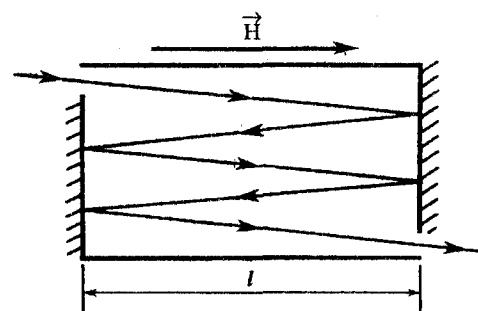


Рис. 6.27

через правовертаючу речовину, яка знаходиться в поздовжньому магнітному полі, як показано на рис.6.27. Знайти кут, на який повернеться площина поляризації світлового пучка, що вийшов із речовини, якщо довжина трубки з речовиною рівна  $l$ , стала повертання речовини  $\alpha$ , стала Верде  $V$  і напруженість магнітного поля  $\vec{H}$ .

Розв'язок. Величина кута  $\varphi$

повороту площини поляризації в даному випадку визначається двома чинниками: природним повертанням

$$\varphi_{\text{пр}} = l\alpha, \quad (1)$$

та повертанням площини поляризації під впливом магнітного поля

$$\varphi_{\text{магн}} = V l H. \quad (2)$$

Таким чином,

$$\varphi = \varphi_{\text{пр}} + \varphi_{\text{магн}}. \quad (3)$$

Оскільки світло в речовині проходить шлях  $l$  п'ять разів (рис. 6.27), то величина кута природного повороту визначиться формулою (1), бо повертання площини поляризації при зміні напрямку поширення променя змінюється на протилежне\*. Напрямок же повертання площини поляризації під впливом зовнішнього магнітного поля від напрямку поширення світла не залежить\*\*, і тому величина кута повороту площини поляризації магнітним полем

$$\varphi_{\text{магн}} = V l H N = V L H. \quad (4)$$

де  $L = l N$  – повний шлях, який проходить світло в речовині ( $N = 5$ ).

\* Правовертаючими називають речовини, які повертають площину поляризації вправо для спостерігача, який дивиться назустріч променю, і навпаки. Напрямок природного повертання площини поляризації залежить від напрямку поширення світла.

\*\* Правовертаючими під дією магнітного поля називають речовини, які повертають площину поляризації вправо відносно спостерігача, який дивиться вздовж магнітного поля, і навпаки. Напрямок повертання площини поляризації під дією магнітного поля не залежить від напрямку поширення світла.

Оскільки природне і магнітне повертання протилежні за напрямком, то остаточною формулою для знаходження величини кута повертання набуває вигляду:

$$\varphi = \alpha l - lVHN = (\alpha - VHN)l. \quad (5)$$

Відповідь:  $\varphi = (\alpha - VHN)l$ .

### 6.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми VI

3.2.1 - 6.6.1. Яким повинен бути заломний кут  $\theta$  скляної призми, щоб кути входу й виходу променя із призми були кутами повної поляризації (кутами Брюстера)? Який при такому заломному куті кут найменшого відхилення  $\delta$  променя?

Відповідь:  $\theta = 66^\circ 40'$ ;  $\delta = 46^\circ 40'$ .

3.2.2 - 6.6.2. Промінь світла проходить через рідину, налиту в скляну посудину, і відбивається від дна. Відбитий промінь повністю поляризований при падінні на дно посудини під кутом  $42^\circ 37'$ . Визначити: а) показник заломлення рідини; б) кут, під яким повинен падати на дно посудини промінь світла, що поширюється в цій рідині, щоб наступило повне відбивання?

Відповідь:  $n = 1,63$ ;  $\varphi = 67^\circ$ .

3.2.3 - 6.6.3. Два поляризатори орієнтовані під кутом  $45^\circ$  один відносно одного. На них падає неполяризоване світло. Яка доля інтенсивності світла пройде через обидва поляризатори? Поглинанням світла знехтувати.

Відповідь:  $\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{1}{4}$ .

6.6.4. Два поляроїди орієнтовані так, що пропускають максимум світла. На який кут  $\alpha$  потрібно повернути один із поляроїдів, щоб інтенсивність світла, що пройде через систему, зменшилась на половину?

Відповідь:  $\alpha = 45^\circ$ .

6.6.5. Два поляризатори орієнтовані взаємно під кутом  $34^\circ$ . Світло, поляризоване під кутом  $17^\circ$  відносно кожного поляризатора, проходить через обидва поляризатори. На скільки послабиться інтенсивність світла?

Відповідь: понизиться до 37,1 %.

6.6.6. Доведіть, що якщо два джерела світла однакової інтенсивності випромінюють лінійно поляризоване світло, причому їх площини поляризації взаємно перпендикулярні, то вони не зможуть створити інтерференційної картини навіть за умови, що різниця фаз постійно рівна нулю.

6.6.7. Пучок природного світла падає на систему із 6 ніколів, площина пропускання кожного із яких повернута на кут  $30^\circ$  відносно площини пропускання попереднього ніколя. Яка частина світлового потоку проходить через цю систему?

Відповідь:  $\eta = \frac{1}{2}(\cos \alpha)^{2(N-1)} = 0,12$ , де  $N$  – кількість ніколів в системі.

6.6.8. Яке мінімальне значення може мати кут Брюстера при падінні світла із повітря на будь-який діелектрик?

Відповідь:  $r_B > 45^\circ$ .

6.6.9. Пучок лінійно поляризованого світла, довжина хвилі якого у вакуумі дорівнює  $5890 \text{ \AA}$ , падає на пластинку ісландського шпату перпендикулярно до його оптичної осі. Знайти довжини хвиль звичайного і незвичайного променів в кристалі, якщо показники заломлення ісландського шпату для звичайного і незвичайного променів відповідно рівні  $n_o = 1,66$  і  $n_e = 1,49$ .

Відповідь:  $\lambda_o = 3,548 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $\lambda_e = 3,953 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

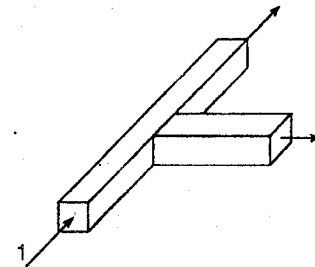


Рис. 6.28

6.6.10. Т-подібна трубка із зачорненими стінками заповнена каламутним середовищем (рис. 6.28). В напрямку, показаному стрілкою 1, падає світло. В результаті розсіювання частина світла виходить в напрямку, вказаному стрілкою 2. Довести, що це світло поляризоване і визначити напрямок коливання електричного вектора.

6.6.11. Ступінь поляризації частково поляризованого світла  $P = 0,25$ . Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної складової.

Відповідь:  $\frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{пр}}} = \frac{P}{1-P} = 0,3$ .

6.6.12. Частково поляризоване світло проходить через ніколь. Інтенсивність пучка збільшується вчетверо, якщо повернути ніколь на  $60^\circ$  від положення, яке відповідає мінімальній інтенсивності. Знайти ступінь поляризації  $P$ ?

Відповідь:  $P = 0,86$ .

2-6 - 6.6.13. Двозаломлюючий біологічний зразок товщиною  $1,65 \cdot 10^{-3}$  см має,

показники заломлення  $n_o$  1,322 і  $n_e$  1,331 для світла з довжиною хвилі  $5800 \text{ \AA}$ . Яка різниця фаз  $\delta$  між звичайним і незвичайним променями виникне після проходження їх через цей зразок?

Відповідь:  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

$\delta = (n_o - n_e) d$   
 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$   
 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d \approx 0,5 \pi = \frac{\pi}{2}$

6.6.14. На шляху частково поляризованого пучка світла помістили ніколь. При повороті ніколя на  $60^\circ$  із положення, яке відповідає максимуму пропускання світла, інтенсивність світла, що пройшло, зменшилась в  $\eta = 3,0$  рази. Знайти ступінь поляризації падаючого світла.

Відповідь:  $P = \frac{\eta - 1}{1 - \eta \cos 2\alpha} = 0,8$ .

6.6.15. Полярорід пропускає частково поляризоване світло. Яка ступінь поляризації, якщо відомо, що відношення мінімальної і максимальної амплітуд коливань в двох взаємно перпендикулярних напрямках дорівнює 0,2.

Відповідь:  $P = 0,92$ .

6.6.16. Призма Волластона (рис. 6.29) виготовлена із ісландського шпату ( $n_o = 1,658$ ;  $n_e = 1,486$ ). Кут  $\alpha = 15^\circ$ . Розрахувати, на який кут  $\varphi$  будуть розведені звичайний і незвичайний промені.

Відповідь:  $\varphi = 5^\circ 17'$ .

6.6.17. Двозаломлююча призма (рис. 6.30), яка складається із скляної призми з  $n = 1,66$  і призми із ісландського шпату з  $n_o = 1,660$  і  $n_e = 1,490$ . Кут  $\alpha = 30^\circ$ . Знайти кут  $\beta$  між променями на виході із призми, якщо в призму

промінь входить так, як показано на рисунку 6.30.

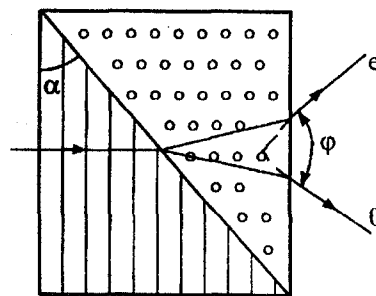


Рис. 6.29

Відповідь:  $\beta = 56,09^\circ$ .

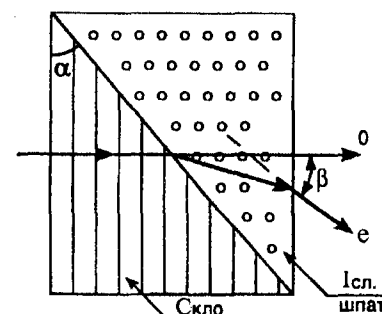


Рис. 6.30

6.6.18. Знайти найменшу товщину пластинки кварцу, вирізаного паралельно оптичній осі, щоб падаюче лінійно поляризоване світло вийшло поляризованим по колу ( $n_o = 1,5442$ ,  $n_e = 1,5533$ ,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м).

Відповідь:  $d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 0,014$  мм.

$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)}$   
 $d = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4(1,5533 - 1,5442)}$

6.6.19. Пластинка кварцу товщиною  $d = 0,014$  мм вирізана паралельно оптичній осі. Для довжини хвилі  $\lambda = 0,5$  мкм,  $n_o = 1,5442$  і  $n_e = 1,5533$ . Площина коливань електричного вектора лінійно поляризованого світла, яке падає на пластинку, складає з оптичною віссю пластинки кут  $\varphi = 25^\circ$ . Визначити характер поляризації світла, яке вийде із пластинки.

6.6.20. Показники заломлення кварцу для світла з довжиною хвилі  $\lambda = 0,4829$  мкм рівні  $n_o = 1,542$  і  $n_e = 1,553$ . Яку товщину повинна мати пластинка в  $1/4$  хвилі, яка вирізана із кварцу вздовж його оптичної осі?

Відповідь:  $d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} = 13,24$  мкм.

6.6.21. Опишіть поляризацію світла, що пройшло через півхвильову пластинку, якщо на неї падає: а) неполяризоване; б) лінійно поляризоване; в) поляризоване по колу світло. Відповіді обґрунтуйте.

6.6.22. Вектор поляризації падаючої на фазову пластинку світлової хвилі утворює з її оптичною віссю кут  $60^\circ$ . Як буде поляризоване світло після фазової пластинки, якщо нею є: а) чвертьхвильова пластинка; б) півхвильова пластинка.

6.6.23. Паралельний пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі  $\lambda$ , поляризований по правому колу, падає нормально на пластинку в півхвилі. Знайти стан поляризації світла, яке пройшло через пластинку.

6.6.24. Показники заломлення кристалічного кварцу для світла з довжиною хвилі  $\lambda = 600$  мкм рівні  $n_o = 1,544$  і  $n_e = 1,553$  для звичайного і незвичайного променів відповідно. В кристалі кварцу, вирізаного паралельно оптичній осі, можна отримати максимальну різницю швидкостей звичайного і незвичайного променів, якщо вони нормально падають на поверхню кристала. Якою повинна бути товщина кристала, щоб відбувся зсув фаз цих променів на  $\pi/2$ , якщо використовується світло вказаної довжини хвилі?

Відповідь:  $d = 16,7$  мм.

6.6.25. Припустимо, що показники заломлення кварцу для світла з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 410$  мкм рівні  $n_o = 1,557$  і  $n_e = 1,567$  і що кристал кварцу є чвертьхвильова пластинка для світла з довжиною хвилі  $\lambda_2 = 600$  мкм. Повністю описати стан поляризації світла з довжиною хвилі  $\lambda_1$ , що пройшло через кристал, якщо падаючі промені були лінійно поляризовані.

6.6.26. Суміш природного світла і світла поляризованого по колу розглядають через чвертьхвильову пластинку (ч.х.п.) і аналізатор (рис. 6.31). При повертанні аналізатора навколо напрямку світлового променя знайдено, що максимальна інтенсивність світла, яке пройшло через систему, в  $k = 3$  рази, переважає мінімальну інтенсивність. Знайти відношення інтенсивності світла  $I_p$ , поляризованого по колу, до інтенсивності природного світла  $I_{np}$ .

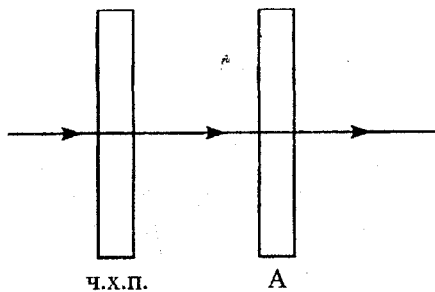


Рис. 6.31

Відповідь:  $\frac{I_p}{I_{np}} = \frac{k-1}{2} = 1$ .

6.6.27. Між двома паралельними ніколями помістили кварцову пластинку товщиною 1 мм, вирізану паралельно оптичній осі. При цьому площина поляризації монохроматичного світла, яке падає на поляризатор, повернулася на кут  $\varphi = 20^\circ$ . При якій мінімальній товщині пластинки світло не пройде через аналізатор?

Відповідь:  $d_{\min} = \frac{\pi d}{2\varphi} = 4,5$  мм.

6.6.28. Знайти число переривань світла за одну секунду, якщо на конденсатор комірки Керра, поміщений між двома схрещеними ніколями, подали змінну напругу з частотою  $\nu = 10$  МГц і амплітудним значенням напруженості  $E_0 = 50$  кВ/см. Проміжок між пластинками конденсатора заповнено нітробензолом, для якого стала  $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$  см/В<sup>2</sup>, довжина пластинок конденсатора  $l = 10$  см, довжина світлової хвилі  $\lambda = 0,50$  мкм.

Відповідь:  $N = 2,2 \cdot 10^8$  переривань за секунду.

6.6.29. Покажіть, що лінійно поляризоване світло можна представити як суму двох поляризованих по колу компонент.

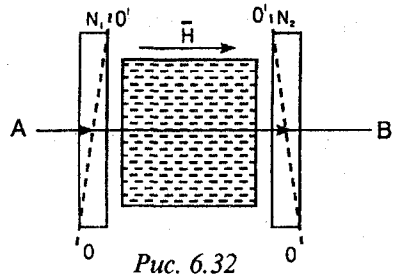
6.6.30. Якої товщини пластинку кварцу потрібно помістити між схрещеними ніколями, щоб поле зору стало максимально світлим? Як в цій пластинці повинна проходити оптична вісь? Дослід проводиться в монохроматичному світлі ( $\lambda = 500$  нм). Питоме повертання кварцу при цій довжині хвилі  $\alpha = 29,7$  град/мм.

Відповідь:  $d = 3,02$  мм.

6.6.31. Розчин цукру, налитий в трубку довжиною  $l = 18$  см і поміщений між поляризаторами, повертає площину коливань жовтих променів натрієвого полум'я на  $\varphi = 30^\circ$ . Яка маса цукру, що знаходиться в розчині об'ємом  $V = 1$  м<sup>3</sup>, якщо питоме повертання цукру для жовтих променів

натрію  $\alpha_0 = 66,7 \frac{\text{град}}{\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \text{дм}}$ .

Відповідь:  $m = 250$  кг.



6.6.32. Цукровий розчин концентрації  $0,3$  г/см<sup>3</sup> повертає площину поляризації монохроматичного світла на  $25^\circ$ . Визначити концентрацію розчину в іншій такій же трубці, якщо вона повертає площину поляризації на  $20^\circ$ .

Відповідь:  $C = 375$  кг/м<sup>3</sup>.

6.6.33. Деяку речовину помістили в поздовжнє магнітне поле соленоїда, розміщеного між двома поляроїдами. Довжина трубки з речовиною  $l = 30$  см. Знайти сталу Верде, якщо при напруженості поля  $H = 710$  А/м кут повороту площини поляризації  $\varphi_1 = 5^\circ 10'$  для одного напрямку поля і  $\varphi_2 = -3^\circ 20'$  для протилежного напрямку поля.

Відповідь:  $V = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2lH} = 0,012$  кут. хв./л(г·см).

6.6.34. Між двома ніколями  $N_1$  і  $N_2$  (рис. 6.32), головні перерізи яких утворюють кут  $45^\circ$ , в поздовжньому магнітному полі поміщено шар оптично активної речовини. На який кут цей шар повинен повертати площину поляризації, щоб система була оптичним вентиляем, тобто світло проходило б через нього тільки в одному напрямку (наприклад, від тіла А до тіла В).

Відповідь: На кут  $45^\circ + 180^\circ k$ , де  $k$  – ціле число.

6.6.35. Як буде вести себе оптичний вентилю, описаний в попередній задачі, якщо напрямок магнітного поля змінити на протилежний, залишаючи незмінним взаємне розміщення ніколя і величину напруженості магнітного поля.

Відповідь: Напрямок, в якому пропускається світло, зміниться на протилежний.

ТЕМА VII

ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ З РЕЧОВИНОЮ

7.1. Програмні питання

Взаємодія електромагнітної хвилі з речовиною. Формули Френеля. Поляризація світла при проходженні світла через межу двох діелектриків. Закон Брюстера.

Повне внутрішнє відбивання. Еліптична поляризація. Волоконна оптика.

7.2. Основні поняття, закони і формули

7.2.1. Амплітуди відбитої і заломленої хвиль при нормальному падінні світла на межу поділу двох середовищ (рис 7.1)

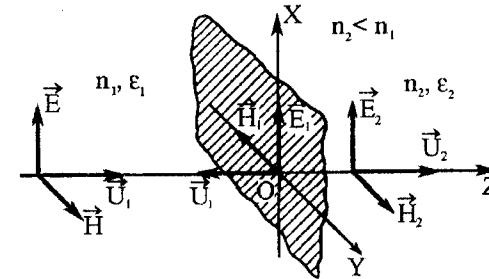


Рис. 7.1

$$E_{10} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{00}, \quad (7.1)$$

$$E_{20} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{00}, \quad (7.2)$$

де  $E_{00}$ ,  $E_{10}$  і  $E_{20}$  – відповідно амплітуди напруженостей електричних полів падаючої, відбитої і заломленої хвиль,  $n_1$

і  $n_2$  – показники заломлення середовища зліва і справа відповідно.

а) Якщо  $n_1 > n_2$  знаки  $E_{00}$  і  $E_{10}$  співпадають, що означає, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{E}_1$  на межі поділу двох середовищ коливаються синфазно, а фази векторів  $\vec{H}_1$  і  $\vec{H}$  відрізняються на  $\pi$ .

б) Якщо  $n_2 > n_1$  знаки  $E_{00}$  і  $E_{10}$  протилежні. А це означає, що при відбиванні має місце зміна на  $\pi$  фази вектора  $\vec{E}_1$ , а  $\vec{H}_1$  і  $\vec{H}$  коливаються синфазно.

Коефіцієнти відбиття  $R$  і пропускання  $T$ , які характеризують процеси відбиття і пропускання світла на межі поділу двох середовищ, дорівнюють:

$$R = \left( \frac{E_{01}}{E_{00}} \right)^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad (7.3)$$

$$T = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{E_{20}}{E_{00}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (7.4)$$

При відсутності поглинання

$$R + T = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} + \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1. \quad (7.5)$$

### 7.2.2. Формули Френеля

1. Вектор  $\vec{E}$  лежить в площині падіння електромагнітної хвилі (рис. 7.2)

Амплітуди відбитої  $(E_{10})_{\parallel}$  і заломленої  $(E_{20})_{\parallel}$  хвиль

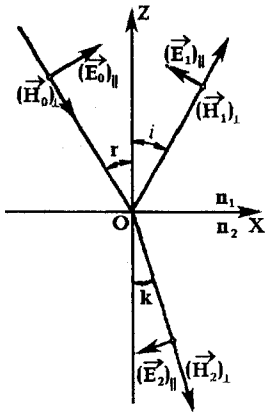


Рис. 7.2

$$(E_{10})_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(r-k)}{\operatorname{tg}(r+k)} (E_{00})_{\parallel}, \quad (7.6)$$

$$(E_{20})_{\parallel} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k) \cos(r-k)} (E_{00})_{\parallel}. \quad (7.7)$$

Амплітудні коефіцієнти відбиття  $r_{\parallel}$  і пропускання  $\tau_{\parallel}$ :

$$r_{\parallel} = \frac{(E_{10})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(r-k)}{\operatorname{tg}(r+k)}, \quad (7.8)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{(E_{20})_{\parallel}}{(E_{00})_{\parallel}} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k) \cos(r-k)}, \quad (7.9)$$

де  $(E_{00})_{\parallel}$ ,  $(E_{10})_{\parallel}$  і  $(E_{20})_{\parallel}$  – амплітуди напруженості електричного поля відповідно падаючої, відбитої і заломленої хвиль, поляризованих в площині падіння,  $r$  і  $k$  – відповідно кут падіння і кут заломлення.

2. Вектор  $\vec{E}$  перпендикулярний до площини падіння (рис 7.3)

Амплітуди відбитої  $(E_{10})_{\perp}$  і заломленої  $(E_{20})_{\perp}$  хвиль

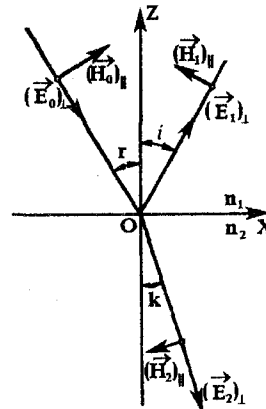


Рис. 7.3

$$(E_{10})_{\perp} = -\frac{\sin(r-k)}{\sin(r+k)} (E_{00})_{\perp}, \quad (7.10)$$

$$(E_{20})_{\perp} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k)} (E_{00})_{\perp}. \quad (7.11)$$

Амплітудні коефіцієнти відбиття  $r_{\perp}$  і пропускання  $\tau_{\perp}$ :

$$r_{\perp} = \frac{(E_{10})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = -\frac{\sin(r-k)}{\sin(r+k)}, \quad (7.12)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{(E_{20})_{\perp}}{(E_{00})_{\perp}} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k)}. \quad (7.13)$$

Рівняння (7.6), (7.7), (7.10) і (7.11) називаються рівняннями Френеля.

Енергетичний коефіцієнт відбиття  $R$

$$\left. \begin{aligned} R_{\parallel} &= (r_{\parallel})^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(r-k)}{\operatorname{tg}^2(r+k)}, \\ R_{\perp} &= (r_{\perp})^2 = \frac{\sin^2(r-k)}{\sin^2(r+k)} \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Сумарна середня інтенсивність відбитого світла

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(r-k)}{\operatorname{tg}^2(r+k)} + \frac{\sin^2(r-k)}{\sin^2(r+k)} \right], \quad (7.15)$$

де

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg}^2(r-k)}{\operatorname{tg}^2(r+k)} + \frac{\sin^2(r-k)}{\sin^2(r+k)} \right], \quad (7.16)$$

$R$  – середнє арифметичне  $R_{\parallel}$  і  $R_{\perp}$ ,  $I_0$  – інтенсивність падаючого природного світла.

### 7.3. Контрольні запитання

7.3.1. Яким умовам повинні задовільняти вектори електричного й магнітного полів на межі поділу двох середовищ?

7.3.2. Скільки незалежних умов і які для векторів електромагнітного

поля повинні виконуватися на межі поділу?

**7.3.3.** Поясніть, як із граничних умов (див. [1] ф-лу (5.4)) впливають закони відбивання й заломлення світла.

**7.3.4.** Як пов'язані (в точках межі поділу) фази відбитої і заломленої хвиль із фазою падаючої хвилі у випадку нормального падіння світла? У випадку похилого падіння променів?

**7.3.5.** Що таке кут Брюстера? Чим він вартий уваги?

**7.3.6.** Вам дано відполіровану пластинку з чорного обсидіану. Необхідно виміряти показник заломлення цього матеріалу. Опишіть ваші дії.

**7.3.7.** Чому при похилому падінні природного світла ( $\varphi \neq \varphi_B$ ) відбитий промінь частково поляризований?

**7.3.8.** Які відхилення від формул Френеля спостерігаються на досліді? Чому?

**7.3.9.** Виведіть формули Френеля для магнітного вектора і дослідіть питання про співвідношення його фаз для падаючої, відбитої і заломленої хвиль в залежності від показника заломлення і кута падіння.

**7.3.10.** При яких умовах відбиття світла на межі двох прозорих середовищ буде повним?

**7.3.11.** Як узгодити із законом збереження енергії повне відбиття падаючої хвилі і наявність потоку енергії, який переноситься поверхневою хвилею в другому середовищі?

**7.3.12.** Як змінюється стан поляризації при повному відбиванні?

**7.3.13.** Якими будуть поверхні сталої фази і поверхні сталої амплітуди хвилі в оптично менш густому середовищі при повному відбиванні?

**7.3.14.** Інтенсивність природного світла  $I_0$ . Які середні значення інтенсивностей і амплітуд коливань електричного вектора у взаємно перпендикулярних площинах, що містять промінь?

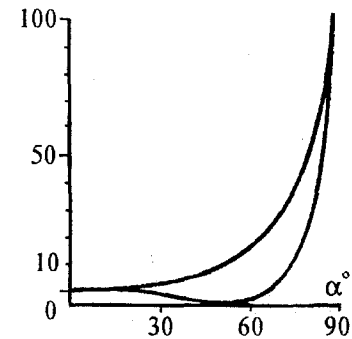


Рис. 7.4

**7.3.15.** Яка інтенсивність відбитого променя, якщо на ізотропний діелектрик падає під кутом Брюстера промінь лінійно поляризованого світла з електричним вектором: а) перпендикулярним площині падіння; б) що лежить в площині падіння?

**7.3.16.** На рис. 7.4 наведені криві, які виражають залежність відношення потоків енергії у відбитій і падаючій хвилях від кута падіння: 1 – світло, поляризоване в площині падіння, 2 – світло, поляризоване в площині,

перпендикулярній площині падіння. Як, користуючись таким графіком, визначити кут Брюстера?

### 7.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Задачі, в яких розглядається взаємодія електромагнітних хвиль із речовиною, розв'язуються за допомогою формул Френеля (7.6), (7.7), (7.10) та (7.11). Формули (7.1) і (7.2) є частинними випадками формул Френеля.

Коли треба знайти величину енергетичного коефіцієнта відбиття  $R$ , користуються формулами (7.14), (7.16), а для визначення коефіцієнта пропускання  $T$  – формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_{\parallel} &= (\tau_{\parallel})^2 = \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r}{\sin^2(r+k) \cos^2(r-k)}, \\ T_{\perp} &= (\tau_{\perp})^2 = \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r}{\sin^2(r+k)}, \\ T &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r}{\sin^2(r+k) \cos^2(r-k)} + \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r}{\sin^2(r+k)} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Для визначення інтенсивності відбитого й заломленого світла користуються формулами, які отримують із формул Френеля. Для цього потрібно скористатися умовою, що  $I \sim nE^2$ . Тоді

$$\left. \begin{aligned} (I_{10})_{\parallel} &\sim n_1 (E_{10})_{\parallel}^2, & (I_{10})_{\parallel} &= \frac{\operatorname{tg}^2(r-k)(I_{00})_{\parallel}}{\operatorname{tg}^2(r+k)}, \\ (I_{10})_{\perp} &\sim n_1 (E_{10})_{\perp}^2, & (I_{10})_{\perp} &= \frac{\sin^2(r-k)(I_{00})_{\perp}}{\sin^2(r+k)}, \\ (I_{20})_{\parallel} &\sim n_2 (E_{20})_{\parallel}^2, & (I_{20})_{\parallel} &= \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r (I_{00})_{\parallel} n_2}{\sin^2(r+k) \cos^2(r-k) n_1}, \\ (I_{20})_{\perp} &\sim n_2 (E_{20})_{\perp}^2, & (I_{20})_{\perp} &= \frac{4 \sin^2 k \cos^2 r (I_{00})_{\perp} n_2}{\sin^2(r+k) n_1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

де  $(I_{00})_{\parallel} \sim (E_{00})_{\parallel}^2 n_1$ ,  $(I_{00})_{\perp} \sim (E_{00})_{\perp}^2 n_1$ .

Для природного світла  $(E_{00})_{\parallel}^2 = (E_{00})_{\perp}^2 = \frac{(E_{00}^2)_{\text{пр}}}{2}$ . Тому сумарна інтенсивність відбитого світла визначається формулою (7.15).

## 7.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 7.5.1.** Визначити за допомогою формул Френеля:

а) коефіцієнт відбиття природного світла при нормальному падінні в повітрі на поверхню скла ( $n_c = 1,5$ ;  $n_{нов.} = 1$ );

б) відносну втрату світлового потоку за рахунок відбивання при проходженні параксіального пучка природного світла через центровану оптичну систему із п'яти скляних лінз (вторинним відбиттям світла знехтувати).

**Розв'язок:** а) Для розрахунків коефіцієнта відбиття світла у випадку нормального його падіння на межу поділу двох діелектриків можна скористатись формулою (7.3):

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (1)$$

де  $n_1$  – показник заломлення повітря,  $n_2$  – показник заломлення скла.

Підставляючи в (1) значення  $n_1$  і  $n_2$ , отримуємо:

$$R = \frac{(1-1,5)^2}{(1+1,5)^2} = \frac{0,25}{6,25} = 4 \cdot 10^{-2}, \quad \text{або} \quad R = 4 \%.$$

б) Відповідно умови задачі, світло, проходячи оптичну систему, падає нормально (або майже нормально) на поверхні всіх лінз. Однак, оскільки лінза має дві поверхні, то, проходячи через кожну лінзу, світло двічі відбивається: один раз на передній (по ходу світла) поверхні лінзи, вдруге – на задній поверхні. Очевидно, що величина світлового потоку, який пройде через усю систему, залежить від коефіцієнтів відбиття світла на обидвох поверхнях кожної лінзи.

Відбивання світла від передньої поверхні лінзи (вважаємо, що кожна лінза оточена повітрям) відповідає випадку “а” даної задачі, тому для коефіцієнта відбиття  $R$  на передній поверхні маємо:

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (2)$$

При відбиванні світла від задньої поверхні лінзи середовища міняються місцями: в даному випадку світло переходить межу поділу скло-повітря.

Формула для коефіцієнта відбиття  $R'$  на межі поділу скло-повітря має той же вигляд, що і формула (2), тільки показники заломлення слід поміняти місцями:

$$R' = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (3)$$

де  $n_1$  – показник заломлення скла,  $n_2$  – показник заломлення повітря.

Порівнюючи (2) і (3), бачимо, що  $R = R'$ . Таким чином, для всіх  $2N$  поверхонь  $N$  лінз коефіцієнти відбиття однакові.

Нехай  $\Phi$  і  $\Phi_1$  – відповідно потоки світла, падаючого на систему, і світла, яке пройшло першу межу. Із визначення коефіцієнта відбиття випливає, що величина світлового потоку, відбитого від першої межі, рівна  $R\Phi$ . Відповідно закону збереження

$$\Phi = R\Phi + \Phi_1, \quad (4)$$

звідки

$$\Phi_1 = \Phi(1 - R), \quad (5)$$

де  $\Phi_1$  – величина світлового потоку, який пройшов через першу межу поділу.

Аналогічно отримуємо величину світлового потоку  $\Phi_2$ , який пройшов через другу межу:

$$\Phi_2 = \Phi_1(1 - R) = \Phi(1 - R)^2, \quad (6)$$

і т.д. Звідси отримуємо величину світлового потоку, який пройшов всю систему:

$$\Phi_{2N} = \Phi(1 - R)^{2N}. \quad (7)$$

Скориставшись знову законом збереження енергії, отримуємо:

$$\Phi = \Delta\Phi + \Phi_{2N}, \quad (8)$$

де  $\Phi$  – величина падаючого світлового потоку,  $\Delta\Phi$  – втрата світлового потоку за рахунок відбиття (величина відбитого світлового потоку) при проходженні всієї системи,  $\Phi_{2N}$  – величина світлового потоку, після проходження всієї системи.

Із (8) маємо:

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_{2N}. \quad (9)$$

Враховуючи (7), отримуємо:

$$\Delta\Phi = \Phi[1 + (1 - R)^{2N}]. \quad (10)$$



Звідси відносна втрата світлового потоку за рахунок відбиття при проходженні параксiального світлового пучка через центровану систему буде рiвна:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 1 + (1 - R)^{2N}. \quad (11)$$

Пiдставляючи в (11) числовi значення вiдповiдних величин ( $R = 0,04$ ;  $N = 5$ ), отримаємо:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 1 + (1 - 0,04)^{25} = 0,34, \quad \text{або} \quad \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 34 \%$$

Вiдповiдь: а)  $R = 4 \%$ ; б)  $\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = 34 \%$ .

**Задача 7.5.2.** Природне свiтло падає на поверхню скла ( $n_c = 1,5$ ) пiд кутом Брюстера. Визначити за допомогою формул Френеля: 1) коефiцiєнт вiдбиття; 2) ступiнь поляризацiї заломленого свiтла.

Розв'язок: 1) Згiдно (7.16)

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{tg}^2(r - k)}{\text{tg}^2(r + k)} + \frac{\sin^2(r - k)}{\sin^2(r + k)} \right], \quad (1)$$

де  $r$  i  $k$  – вiдповiдно кути падiння i заломлення.

Оскiльки за умовою задачi  $r = r_B$ , то  $r_B + k = \frac{\pi}{2}$  (див. [1], § 4.3), у зв'язку з чим перший член рiвняння (1) перетворюється в нуль, а знаменник другого члена перетворюється в одиницю. Тодi

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \sin^2(r_B - k) = \frac{1}{2} \cos^2 2r_B = \frac{1}{2} (2 \cos^2 r_B - 1)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1 + \text{tg}^2 r_B} - 1 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1 + n^2} - 1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

(В (2) враховано закон Брюстера  $\text{tg} r_B = n$ ).

Пiдставляючи в (2) значення  $n = 1,5$ , отримаємо:

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - (1,5)^2}{1 + (1,5)^2} \right]^2 = 7,39 \cdot 10^{-2}, \quad \text{або} \quad R = 7,39 \%$$

2) За визначенням, ступiнь поляризацiї заломленого свiтла

$$P_{\text{зал}} = \frac{(I_{20})_{\text{max}} - (I_{20})_{\text{min}}}{(I_{20})_{\text{max}} + (I_{20})_{\text{min}}}. \quad (3)$$

В заломленому свiтлi переважаючим напрямком коливань електричного вектора є напрямок, який лежить в площинi падiння (паралельна складова). Тому

$$\left. \begin{aligned} (I_{20})_{\text{max}} &= (I_{20})_{\parallel} \\ (I_{20})_{\text{min}} &= (I_{20})_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При врахуванні (4) формула (3) перепишеться так:

$$P_{\text{зал}} = \frac{(I_{20})_{\parallel} - (I_{20})_{\perp}}{(I_{20})_{\parallel} + (I_{20})_{\perp}}. \quad (5)$$

Вiдповiдно формул Френеля (7.7) i (7.10) та з врахуванням того, що  $r = r_B$ , отримаємо:

$$(E_{20})_{\parallel} = \frac{2 \sin k \cos r_B}{\sin(r_B + k) \cos(r_B - k)} (E_{00})_{\parallel} = \frac{2 \cos^2 r_B}{\sin 2r_B} (E_{00})_{\parallel} = \frac{\cos r_B}{\sin r_B} (E_{00})_{\parallel} = \frac{(E_{00})_{\parallel}}{n}, \quad (6)$$

$$(E_{20})_{\perp} = \frac{2 \sin k \cos r_B}{\sin(r_B + k)} (E_{00})_{\perp} = 2 \sin k \cos r_B (E_{00})_{\perp} = 2 \cos^2 r_B (E_{00})_{\perp} = \frac{2(E_{00})_{\perp}}{1 + \text{tg}^2 r_B} = \frac{2(E_{00})_{\perp}}{1 + n^2}. \quad (7)$$

Оскiльки  $I \sim nE^2$  (див. [1], § 1.8), то

$$\left. \begin{aligned} (I_{20})_{\parallel} &\sim n_2 (E_{20})_{\parallel}^2 \\ (I_{20})_{\perp} &\sim n_2 (E_{20})_{\perp}^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Враховуючи (6) i (7), пiсля елементарних перетворень, отримаємо:

$$(I_{20})_{\parallel} \sim \frac{(I_{00})_{\parallel} n_2}{n^2 n_1}, \quad (I_{20})_{\perp} \sim \frac{(I_{00})_{\perp} n_2}{(1 + n^2)^2 n_1}. \quad (9)$$

Але  $\frac{n_2}{n_1} = n$ , а  $(I_{00})_{\parallel} = (I_{00})_{\perp} = \frac{I_{\text{np}}}{2}$ . Тому

$$(I_{20})_{\parallel} \sim \frac{I_{np}}{2n}, \quad (I_{20})_{\perp} \sim \frac{2I_{np}n}{(1+n^2)^2}. \quad (10)$$

Підставивши значення  $(I_{20})_{\parallel}$  і  $(I_{20})_{\perp}$  із (10) в (3), отримаємо шукану формулу для ступеня поляризації заломленого світла:

$$P_{\text{зал}} = \frac{(I_{20})_{\parallel} - (I_{20})_{\perp}}{(I_{20})_{\parallel} + (I_{20})_{\perp}} = \frac{(1+n^2)^2 - 4n^2}{(1+n^2)^2 + 4n^2}. \quad (11)$$

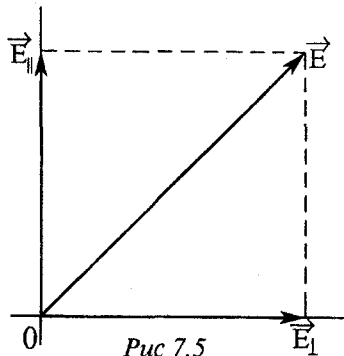
Враховуючи, що  $n = 1,5$ , маємо:

$$P = \frac{[(1+(1,5)^2)^2 - 4 \cdot (1,5)^2]}{[(1+(1,5)^2)^2 + 4 \cdot (1,5)^2]} = 7,98 \cdot 10^{-2}, \quad \text{або} \quad P = 7,98 \%.$$

Відповідь: 1)  $R = 7,39 \%$ ; 2)  $P = 7,98 \%$ .

**Задача 7.5.3.** На поверхню води під кутом Брюстера падає пучок лінійно поляризованого світла. Площина коливань світлового вектора складає кут  $\varphi = 45^\circ$  з площиною падіння. Знайти коефіцієнт відбиття.

**Розв'язок:** Перш за все знайдемо



складові вектора  $\vec{E}$ , одна із яких лежить в площині падіння  $\vec{E}_{\parallel}$ , а друга – перпендикулярна до площини падіння  $\vec{E}_{\perp}$ .

Оскільки кут  $\varphi = 45^\circ$  то  $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_{\perp}$ . За своєю суттю ці складові аналогічні  $(E_{00})_{\parallel}$  і  $(E_{00})_{\perp}$  у випадку, коли на межу поділу середовищ падає природне світло (рис 7.5). Тому для знаходження коефіцієнта відбиття  $R$  можна скористатися формулою (7.16):

$$R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{tg}^2(r-k)}{\text{tg}^2(r+k)} + \frac{\sin^2(r-k)}{\sin^2(r+k)} \right], \quad (1)$$

де  $r$  і  $k$  – відповідно кути падіння і заломлення.

Оскільки за умовою задачі  $r = r_B$ , то формула (1) переписеться так (див. попередню задачу):

$$R = \frac{1}{2} \sin^2(r_B - k) = \frac{1}{2} \cos^2 2r_B = \frac{1}{2} (2 \cos^2 r_B - 1)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1 + \text{tg}^2 r_B} - 1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{1+n^2} - 1 \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1-n^2}{1+n^2} \right)^2. \quad (2)$$

Поклавши  $n_s = 1,33$  і підставивши його в (2), отримаємо:

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{1-1,33^2}{1+1,33^2} \right)^2 = 0,039, \quad \text{або} \quad R = 3,9 \%.$$

Розв'язок:  $R = 3,9 \%$ .

**Задача 7.5.4.** На поверхню скла ( $n_c = 1,5$ ) під кутом  $45^\circ$  падає пучок природного світла. Знайти за допомогою формул Френеля ступінь поляризації: 1) відбитого світла; 2) заломленого світла.

**Розв'язок:** 1) За визначенням, ступінь поляризації відбитого світла

$$P_{\text{від}} = \frac{(I_{10})_{\text{max}} - (I_{10})_{\text{min}}}{(I_{10})_{\text{max}} + (I_{10})_{\text{min}}}. \quad (1)$$

Оскільки у відбитому світлі переважаючим напрямком коливань електричного вектора є напрямок, перпендикулярний до площини падіння, то

$$(I_{10})_{\text{max}} = (I_{10})_{\perp}, \quad (I_{10})_{\text{min}} = (I_{10})_{\parallel}. \quad (2)$$

При врахуванні (2) формула (1) переписеться так:

$$P_{\text{від}} = \frac{(I_{10})_{\perp} - (I_{10})_{\parallel}}{(I_{10})_{\perp} + (I_{10})_{\parallel}}. \quad (3)$$

Інтенсивності  $(I_{10})_{\perp}$  і  $(I_{10})_{\parallel}$  знайдемо за допомогою формул Френеля (7.6) і (7.14), враховуючи, що  $I \sim nE^2$  (див. задачу 7.5.2.):

$$(I_{10})_{\perp} = \frac{\sin^2(r-k)}{\sin^2(r+k)} (I_{00})_{\perp}, \quad (I_{10})_{\parallel} = \frac{\text{tg}^2(r-k)}{\text{tg}^2(r+k)} (I_{00})_{\parallel}. \quad (4)$$

де  $r$  і  $k$  – відповідно кути падіння і заломлення. Враховуючи, що  $r = 45^\circ$ , отримаємо:

$$(I_{10})_{\perp} = \frac{(\cos k - \sin k)^2}{(\cos k + \sin k)^2} (I_{00})_{\perp}, \quad (I_{10})_{\parallel} = \frac{(\cos k - \sin k)^4}{(\cos k + \sin k)^4} (I_{00})_{\parallel}. \quad (5)$$

Підставляючи в (3) значення  $(I_{10})_{\perp}$  і  $(I_{10})_{\parallel}$  із (5), отримаємо:

$$P_{\text{від}} = \frac{\frac{(\cos k - \sin k)^2}{(\cos k + \sin k)^2} \cdot \frac{(\cos k - \sin k)^4}{(\cos k + \sin k)^4}}{\frac{(\cos k - \sin k)^2}{(\cos k + \sin k)^2} + \frac{(\cos k - \sin k)^4}{(\cos k + \sin k)^4}} = 2 \sin k \cos k. \quad (6)$$

В (6) враховано, що для природного світла  $(I_{00})_{\perp} = (I_{00})_{\parallel}$ .

Скориставшись законом заломлення  $\frac{\sin r}{\sin k} = n_c$  знайдемо, що

$$\sin k = \frac{\sin r}{n_c}, \quad \text{а} \quad \cos k = \frac{\sqrt{n_c^2 - \sin^2 r}}{n_c}. \quad (7)$$

Враховуючи (7), а також те, що  $\sin r = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , формула (6)

набуває такого вигляду:

$$P_{\text{від}} = \frac{1}{n_c^2} \sqrt{2n_c^2 - 1}. \quad (8)$$

Тоді

$$P_{\text{від}} = \frac{1}{(1,5)^2} \sqrt{2(1,5)^2 - 1} = 0,83, \quad \text{або} \quad P_{\text{від}} = 83\%.$$

2) Ступінь поляризації заломленого світла

$$P_{\text{зал}} = \frac{(I_{20})_{\max} - (I_{20})_{\min}}{(I_{20})_{\max} + (I_{20})_{\min}}. \quad (9)$$

В заломленому світлі переважаючим напрямком коливань електричного вектора є напрямок, який лежить в площині падіння (паралельна складова). Тому

$$\left. \begin{aligned} (I_{20})_{\max} &= (I_{20})_{\parallel}, \\ (I_{20})_{\min} &= (I_{20})_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Враховуючи (10), маємо:

$$P_{\text{зал}} = \frac{(I_{20})_{\parallel} - (I_{20})_{\perp}}{(I_{20})_{\parallel} + (I_{20})_{\perp}}. \quad (11)$$

Перш ніж знайти інтенсивність  $(I_{20})_{\parallel}$  і  $(I_{20})_{\perp}$  формули Френеля (7.7) і (7.10) попередньо перетворимо, враховуючи, що  $r = 45^\circ$ , а  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ :

$$(E_{20})_{\parallel} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k) \cos(r-k)} (E_{00})_{\parallel} = \frac{2\sqrt{2} \sin k}{(\cos k + \sin k)^2} (E_{00})_{\parallel}, \quad (12)$$

$$(E_{20})_{\perp} = \frac{2 \sin k \cos r}{\sin(r+k)} (E_{00})_{\perp} = \frac{2 \sin k}{(\cos k + \sin k)} (E_{00})_{\perp}. \quad (13)$$

Тоді

$$(I_{20})_{\parallel} = \frac{8 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^4} (I_{00})_{\parallel}, \quad (14)$$

$$(I_{20})_{\perp} = \frac{4 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^2} (I_{00})_{\perp}. \quad (15)$$

Тут враховано, що  $I \sim nE^2$ .

Підставляючи значення  $(I_{20})_{\parallel}$  і  $(I_{20})_{\perp}$  із (14) і (15) в (11), отримаємо:

$$\begin{aligned} P_{\text{зал}} &= \frac{\frac{8 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^4} - \frac{4 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^2}}{\frac{8 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^4} + \frac{4 \sin^2 k \cdot n_c}{(\cos k + \sin k)^2}} = \frac{2 - (\cos k + \sin k)^2}{2 + (\cos k + \sin k)^2} = \\ &= \frac{2 - 2 \cos^2(45^\circ - k)}{2 + 2 \cos^2(45^\circ + k)} = \frac{1 - \cos^2(45^\circ - k)}{1 + \cos^2(45^\circ - k)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Кут заломлення  $k$  знайдемо із (7):

$$\sin k = \frac{\sin r}{n_c} = \frac{\sin 45^\circ}{1,5} = 0,47, \quad k = 28,126^\circ.$$

Тоді

$$P_{\text{зал}} = \frac{1 - \cos^2(45^\circ - 28,126^\circ)}{1 + \cos^2(45^\circ - 28,126^\circ)} = 0,044, \text{ або } P_{\text{зал}} = 4,4 \%$$

Відповідь: а)  $P_{\text{відб}} = 83 \%$ ; б)  $P_{\text{зал}} = 4,4 \%$ .

**Задача 7.5.5.** Природне світло падає з вакууму на межу поділу з середовищем, яке має показник заломлення  $n = 1,53$ . Кут падіння  $r = 15^\circ$ . Визначити: а) яка частина енергії відбивається; б) як зміниться частина відбитої енергії, якщо те саме середовище межує з водою?

**Розв'язок:** а) Частину відбитої енергії можна визначити так:

$$\eta_1 = \frac{I_r}{I_0} = \frac{RI_0}{I_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{tg}^2(r-k) + \sin^2(r-k)}{\text{tg}^2(r+k) + \sin^2(r+k)} \right], \quad (1)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючого світла,  $I_r$  – інтенсивність відбитого

світла,  $R = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{tg}^2(r-k) + \sin^2(r-k)}{\text{tg}^2(r+k) + \sin^2(r+k)} \right]$  – коефіцієнт відбиття.

Кут заломлення  $k$  визначимо із закону заломлення:

$$\frac{\sin r}{\sin k} = n, \quad (2)$$

звідки

$$\sin k = \frac{\sin r}{n} = \frac{\sin 15^\circ}{1,53} = 0,169, \quad k = 9,74^\circ. \quad (3)$$

Підставляючи в (1) числові значення кутів  $r = 15^\circ$  і  $k = 9,74^\circ$ , маємо:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{tg}^2(15^\circ - 9,74^\circ) + \sin^2(15^\circ - 9,74^\circ)}{\text{tg}^2(15^\circ + 9,74^\circ) + \sin^2(15^\circ + 9,74^\circ)} \right] = 0,044, \text{ або } \eta_1 = 4,4 \%$$

б) Якщо дане середовище межує не з вакуумом, а з водою (промінь переходить з води в середовище з показником заломлення  $n = 1,53$ ), то формула (1) зберігається, змінюється лише кут заломлення  $k$ . Формула (2) в цьому разі має вигляд:

$$\frac{\sin r}{\sin k} = \frac{n}{n'} \Rightarrow \sin k = \frac{n' \sin r}{n} = \frac{1,33 \sin 15^\circ}{1,53} = 0,225, \quad k = 13^\circ,$$

де  $n'$  – показник заломлення води.

Підставляючи в (1) числові значення кутів  $r = 15^\circ$  і  $k = 13^\circ$ , знаходимо:  $\eta_2 = 0,0049$ , або  $\eta_2 = 0,49 \%$ . Відбивання енергії значно зменшується.

Відповідь: а)  $\eta = 4,4 \%$ ; б)  $\eta = 0,49 \%$ .

**Задача 7.5.6.** Світловий потік проходить крізь скляну прямокутну рівнобічну призму, яка змінює його напрям на зворотний (рис 7.6). Показник заломлення скла  $n = 1,53$ . Визначити, яка частина світлового потоку втрачається в призмі внаслідок відбивання.

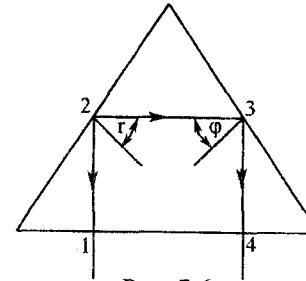


Рис. 7.6

**Розв'язок:** Кут падіння в точці 2 дорівнює

$r = 45^\circ$ . Отже  $\sin r = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{n}$ . Тому в точці 2 (і

так само в точці 3) має місце повне внутрішнє відбивання. Втрати за рахунок відбивання є лише в точках 1 і 4, причому в обох точках відносні долі втрат однакові, бо світло в цих точках нормально падає на грань призми.

Розглянемо спочатку точку 1. Нехай інтенсивність падаючого світла рівна  $I_0$ . Тоді інтенсивність відбитого світла, згідно з (7.3) (див задачу 7.5.2.),

$$I_r = RI_0, \quad (1)$$

а інтенсивність світла, яке пройшло в призму,

$$I_r = (1 - R)I_0, \quad (2)$$

де  $R$  – коефіцієнт відбиття. В точці 2 інтенсивність світла, що падає на поверхню поділу, становить  $I_r$ , а для світла, яке виходить із призми в точці 4,

$$I' = (1 - R)I_r = (1 - R)^2 I_0. \quad (3)$$

Отже, відносна втрата світлового потоку

$$\eta = \frac{I_0 - I'}{I_0} = \frac{I_0 - (1 - R)^2 I_0}{I_0} = 1 - (1 - R)^2 = R(2 - R). \quad (4)$$

Коефіцієнт відбиття при нормальному падінні світла визначається за формулою (7.3):

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (5)$$

Тоді

$$\eta = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \left[ 2 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right] = \left( \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} \right)^2 \left[ 2 - \left( \frac{1 - 1,5}{1 + 1,5} \right)^2 \right] = 0,08 = 8\%.$$

**Відповідь:** 8 %.

### 7.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми VII

7.6.1. Яким повинен бути кут заломлення  $\alpha$  призми, виготовленої із скла із показником заломлення  $n = 1,5$ , щоб світло лінійної поляризації могло пройти через неї без втрат на відбивання?

**Відповідь:**  $\alpha = \pi - 2\varphi_B = 67^\circ 22'$ , де  $\varphi_B$  – кут Брюстера.

7.6.2. Визначити кут повної поляризації для променя, відбитого від поверхні чорного скла ( $n = 1,65$ ). Під яким кутом до відбитого променя потрібно поставити таке ж скло (діелектричне дзеркало), щоб зменшити інтенсивність променя, ще в два рази?

**Відповідь:**  $r_B = 58^\circ 43'$ ;  $\varphi = 55^\circ 06'$ .

7.6.3. Природне світло проходить через плоскопаралельну скляну пластинку ( $n = 1,5$ ), падаючи на неї під дуже малим кутом. Нехтуючи втратами світла, визначити інтенсивність світла, що вийшло із пластинки.

**Відповідь:**  $I = 0,92I_0$ , де  $I_0$  – інтенсивність падаючого на пластинку світла.

7.6.4. Світло  $\hat{n}$  проходить через оптичну систему із двох лінз, виготовлених із скла з показником заломлення  $n_1 = 1,6$ . Вважаючи кут падіння світла на лінзи малим, визначити долю світла, яке пройшло через систему. В скільки разів зміняться втрати енергії на відбивання при нанесенні на поверхню лінз прозорого шару із матеріалу, який має показник заломлення  $n_2 = 1,3$ .

**Відповідь:**  $I = 0,8I_0$ ; Зменшиться в 2,25 рази.

7.6.5. За допомогою формул Френеля показати, що при відбиванні від оптично менш густого середовища ( $n_2 < n_1$ ) стрімкість кривих  $r_{\perp}(\varphi)$  і  $r_{\parallel}(\varphi)$  при наближенні до граничного кута повного відбивання  $\varphi_{\max}$  прямує до нескінченності.

7.6.6. Знайти ступінь поляризації вузького пучка променів природного світла після проходження плоскопаралельної пластинки із скла ( $n = 1,65$ ), якщо пучок падає на пластинку під кутом Брюстера.

**Відповідь:**  $P = \frac{16n^4 - (1+n^2)^4}{16n^4 + (1+n^2)^4} = 0,16.$

7.6.7. На поверхню скла ( $n = 1,5$ ) під кутом  $\varphi = 45^\circ$  із повітря падає лінійно поляризована хвиля, вектор напруженості електричного поля якої перпендикулярний до площини падіння. Знайти коефіцієнти відбиття  $R$  і пропускання  $T$ .

**Відповідь:**  $R = 0,08$ ;  $T = 0,92$ .

7.6.8. На поверхню скла ( $n = 1,6$ ) під кутом  $\varphi = 25^\circ$  із повітря падає лінійно поляризована хвиля, електричний вектор якої коливається в площині падіння. Визначити коефіцієнти відбиття  $R$  і пропускання  $T$ .

**Відповідь:**  $R = 0,04$ ;  $T = 0,96$ .

7.6.9. Знайти область кутів падіння лінійно поляризованої хвилі із повітря на поверхню води ( $n = 1,33$ ), при якій коефіцієнт відбиття більше 0,5. Площина коливань електричного вектора хвилі перпендикулярна до площини падіння.

**Відповідь:**  $r_{\text{над}} \geq 81,2^\circ$ .

7.6.10. Світло падає перпендикулярно до однієї із граней алмазу ( $n = 2,4$ ). а) Яка доля падаючого випромінювання відіб'ється? б) Який кут Брюстера для алмазу?

**Відповідь:** а)  $\cong 17\%$ ; б)  $r_B = 67,5^\circ$ .

7.6.11. Користуючись формулами Френеля, показати, що лінійно поляризоване світло залишається лінійно поляризованим після відбивання

на межі поділу двох прозорих ізотропних середовищ у всіх випадках, за виключенням випадку повного відбивання.

**7.6.12.** Природне світло падає під кутом Брюстера із повітря на поверхню скла з показником заломлення  $n = 1,5$ . Знайти інтенсивність  $I_r$  відбитого світла, якщо інтенсивність падаючого світла  $I_0$ .

**Відповідь:** 
$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right]^2 = 0,074.$$

**7.6.13.** Знайти ступінь поляризації прохідного світла при падінні на поверхню середовища з показником заломлення  $n$  під кутом Брюстера.

**Відповідь:** 
$$P = \frac{(1 + n^2) - 4n^2}{(1 + n^2) + 4n^2}.$$

**7.6.14.** Природне світло падає під кутом Брюстера із повітря на поверхню діелектрика з показником заломлення  $n$ . Знайти амплітуду  $(E_{20})_{\parallel}$  заломленої хвилі, якщо амплітуда падаючої хвилі тієї ж поляризації  $(E_{00})_{\parallel}$ .

**Відповідь:** 
$$(E_{20})_{\parallel} = \frac{(E_{00})_{\parallel}}{n}.$$

**7.6.15.** Світло падає на поверхню середовища з показником заломлення  $n$  під кутом Брюстера. Знайти амплітудний коефіцієнт відбиття  $r_{\perp}$ .

**Відповідь:** 
$$r_{\perp} = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

**7.6.16.** За яких умов промінь світла, який падає на бічну грань прозорої ізотропної призми із кутом заломлення  $A = 60^\circ$ , проходить через неї без втрат на відбивання?

**Відповідь:** Електричний вектор повинен лежати в площині падіння.

Показник заломлення призми повинен бути рівним  $n_{пр} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)} = \sqrt{3} = 1,73.$

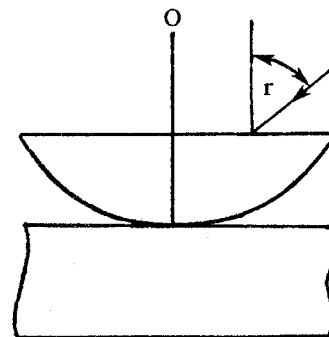


Рис. 7.7

**7.6.17.** Чи будуть спостерігатись кільця Ньютона, якщо на лінзу під кутом Брюстера (рис. 7.7) падає світло поляризоване: а) в площині падіння; б) перпендикулярно площині падіння.

**Відповідь:** а) будуть; б) не будуть.

**7.6.18.** Знайти ступінь поляризації світла, відбитого від поверхні скла під кутами  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $56^\circ 51'$  і  $90^\circ$ . (Показник заломлення скла  $n = 1,5$ ). Побудувати графік функції

$P = f(\varphi)$ . Падаюче світло – природне.

**Відповідь:**  $P = 0,000; 0,891; 1,000; 0,000.$

**7.6.19.** Знайти ступінь поляризації заломленого променя після виходу його із скляної пластинки з показником заломлення  $n = 1,5$  при кутах падіння  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  і  $80^\circ$ . Побудувати графік функції  $P = f(\varphi)$ . Падаюче світло – природне.

**Відповідь:**  $P = 0,015; 0,091; 0,176; 0,402.$

**7.6.20.** Визначити ступінь поляризації відбитого світла і світла, яке пройде крізь пластинку з плавленого кварцу, якщо кут падіння  $r = 20^\circ$ . Показник заломлення кварцу  $n = 1,54$ .

**Відповідь:**  $P_r = 16\% ; P_t = 14\% .$

**7.6.21.** Плоский пучок природного світла з інтенсивністю  $I_0$  падає під кутом Брюстера на поверхню води ( $n = 1,33$ ). При цьому  $0,039$  світлового потоку відбивається. Знайти інтенсивність заломленого пучка.

**Відповідь:** 
$$I_s = \frac{I_0(1 - R)}{n} = 0,72I_0.$$

7.6.22. Вузький пучок природного світла падає під кутом Брюстера на стопу Столетова, яка складається із  $N$  товстих плоскопаралельних скляних пластинок. Знайти:

- а) ступінь поляризації  $P$  пучка, який пройшов через стопу Столетова;  
б) ступінь поляризації  $P$  при  $N = 1, 2, 5$  і  $10$ .

Відповідь: а)  $P = (I - \alpha^{4N}) / (I + \alpha^{4N})$ , де  $\alpha = 2n / (1 + n^2)$ ,  $n$  – показник заломлення;

- б) відповідно 0,16; 0,31; 0,67 і 0,92.

## ТЕМА VIII

## ШВИДКІСТЬ СВІТЛА. ДИСПЕРСІЯ І ПОГЛИНАННЯ СВІТЛА

## 8.1. Програмні питання

Методи визначення швидкості світла. Фазова і групова швидкості світла.

Нормальна і аномальна дисперсія світла. Експериментальні дослідження дисперсії світла. Елементи класичної теорії дисперсії світла. Поняття про квантову теорію дисперсії.

Поглинання світла. Від'ємне поглинання світла.

## 8.2. Основні поняття, закони і формули

## 8.2.1. Швидкість світла в ізотропному середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \text{або} \quad v = \frac{c}{n}, \quad (8.1)$$

де  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла у вакуумі,  $\epsilon_0$  і  $\mu_0$  –

відповідно електрична і магнітна сталі,  $\epsilon$  і  $\mu$  – відповідно відносні електрична і магнітна проникності,  $n$  – показник заломлення середовища.

Фазова швидкість – це швидкість переміщення хвильової поверхні (поверхні сталої фази хвилі) в певному напрямку:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi} \omega = \frac{\omega}{k}, \quad (8.2)$$

де  $\lambda$  – довжина світлової хвилі,  $T$  – період,  $\omega$  – циклічна частота,  $k$  – хвильове число.

Групова швидкість – це швидкість поширення максимуму амплітуди коливань складного коливного процесу, який виникає при накладанні одне на одного окремих коливань:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad \text{або} \quad u = v \left( 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad (8.3)$$

В області нормальної дисперсії ( $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ , або  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ )  $u < v$ ; в області

аномальної дисперсії ( $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ , або  $\frac{dn}{d\lambda} > 0$ )  $u > v$ , але завжди  $u < c$ .

Враховуючи, що  $v = \omega/k$  маємо ще одну формулу для групової швидкості:

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (8.4)$$

### 8.2.2. Методи визначення швидкості світла

#### Метод Ремера

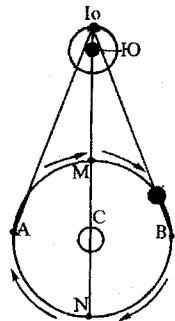


Рис. 8.1

$$c = \frac{T' + T''}{T' - T''} v, \quad (8.5)$$

де  $T'$  і  $T''$  – періоди затемнення супутника Юпітера Іо відповідно в першій і другій половині року,  $v$  – швидкість руху Землі по орбіті.  $c \approx 215000$  км/с.

#### Метод зоряної аберації

$$c = \frac{2v}{\Delta\varphi}, \quad (8.6)$$

де  $v$  – швидкість руху Землі по орбіті,  $\Delta\varphi$  – кут аберації.  $c \approx 303000$  км/с.

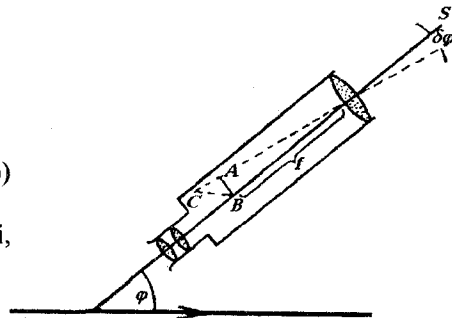


Рис. 8.2

#### Метод Фізо (метод зубчатого колеса)

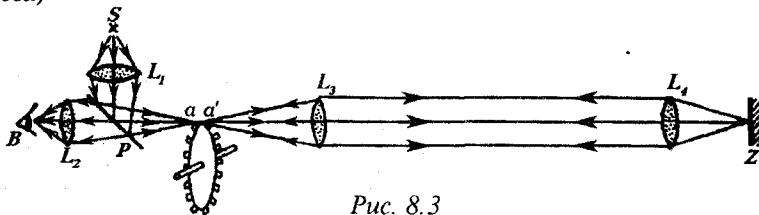


Рис. 8.3

$$c = 4nlv, \quad (8.7)$$

де  $l$  – відстань між лінзами  $L_3$  і  $L_4$ ,  $n$  – число зубців на колесі,  $v$  – частота обертання колеса.  $c = 299870 \pm 50$  км/с.

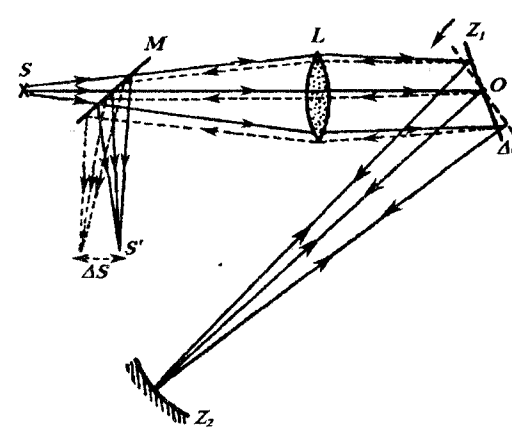


Рис. 8.4

#### Метод Фуко (метод обертового дзеркала)

$$c = \frac{4\omega Ll}{\Delta S}, \quad (8.8)$$

де  $l$  – відстань від лінзи до місця утворення зображення  $S'$ ,  $\omega$  – кутова швидкість обертання дзеркала  $Z_1$ ,  $L$  – відстань від обертового дзеркала  $Z_1$  до вгнутого дзеркала  $Z_2$ ,  $\Delta S$  – величина зміщення зображення.  $c = 298000 \pm 500$  км/с.

### 8.2.3. Дисперсія світла – це залежність коефіцієнта заломлення від довжини світлової хвилі:

$$n = f(\lambda). \quad (8.9)$$

Дисперсією речовини називають величину, яка показує, як швидко змінюється показник заломлення  $n$  із зміною довжини хвилі  $\lambda$ :

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (8.10)$$

При  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  ( $\frac{dn}{dv} > 0$ ) дисперсія називається нормальною, а при

$\frac{dn}{d\lambda} > 0$  ( $\frac{dn}{dv} < 0$ ) – аномальною.

Залежність показника заломлення від довжини хвилі в області нормальної дисперсії виражається формулою Коші:

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{C}{\lambda_0^4} + \dots, \quad (8.11)$$

де  $A, B, C, \dots$  – сталі величини, які визначаються для кожної речовини



дослідним шляхом,  $\lambda_0$  – довжина світлової хвилі у вакуумі.

Класична електронна теорія для нормальної дисперсії дає таку залежність показника заломлення від частоти світлових коливань:

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (8.12)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична стала,  $N$  – концентрація електронів,  $e$  і  $m_0$  – відповідно заряд і маса електрона,  $\omega_0$  – власна частота коливань електронів середовища,  $\omega$  – частота коливань випромінювання (світла). При  $\omega \approx \omega_0$  (область поглинання) формула (8.12) є незастосовною.

З врахуванням поглинання світла (область  $\omega \approx \omega_0$ )

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0 (\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}, \quad (8.13)$$

де  $\gamma = \frac{r}{m_0}$  – коефіцієнт згасання,  $r$  – коефіцієнт опору.

У загальному випадку комплексного показника заломлення  $\tilde{n} = n - i\alpha$  матимемо співвідношення:

$$n^2 - \alpha^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \sum_k f_k \frac{\omega_{0k}^2 - \omega^2}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2}, \quad (8.14, a)$$

$$2n\alpha = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \sum_k f_k \frac{\gamma_k \omega}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2}, \quad (8.14, б)$$

де  $\alpha = \alpha' n$  – показник поглинання,  $\alpha'$  – показник згасання,  $\omega_{0k}$  – власні частоти середовища,  $\gamma_k$  – коефіцієнт згасання для осцилятора  $k$ -ого сорту,

$f_k = \left(\frac{q_k}{e}\right)^2 \frac{m_0}{m_k}$  – сила  $k$ -ого осцилятора,  $q_k$  і  $m_k$  – відповідно заряд і маса осциляторів.

Для газів при великих тисках справджується формула Лоренца-Лорентца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m_0 \varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (8.15)$$

або

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = const, \quad (8.16)$$

де  $\rho = Nm$  – густина речовини.

#### 8.2.4. Дисперсія рентгенівських променів:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m_0 \varepsilon_0 \omega^2}. \quad (8.17)$$

8.2.5. Поглинання (абсорбція) світла – це втрата енергії світловою хвилею, яка проходить через речовину, в результаті перетворення енергії хвилі в різні види внутрішньої енергії речовини або в енергію вторинного випромінювання.

Закон поглинання світла (закон Бугера-Ламберта):

$$I = I_0 e^{-\frac{2\omega\alpha}{c}x}, \quad \text{або} \quad I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (8.18)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючого на поглинаюче середовище світла,  $x$  – товщина шару поглинаючого середовища,  $\alpha$  – коефіцієнт поглинання, який дорівнює оберненій величині товщини шару, в якому інтенсивність світла зменшується в  $e$  разів,  $\alpha$  – показник поглинання.

Зв'язок коефіцієнта поглинання  $\alpha$  із показником поглинання  $\alpha'$ :

$$\alpha = \frac{2\omega}{c} \alpha' = \frac{4\pi}{\lambda} \alpha'. \quad (8.19)$$

Закон Бугера-Бєсра:

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 c x}, \quad (8.20)$$

де  $c$  – концентрація розчиненої речовини,  $\alpha_0$  – коефіцієнт поглинання, характерний для молекули розчиненої речовини, який не залежить від концентрації.

**8.3. Контрольні запитання**

**8.3.1.** Які методи визначення світла вам відомі? З'ясуйте суть цих методів.

**8.3.2.** З'ясуйте суть поняття фазової швидкості.

**8.3.3.** Яку величину називають груповою швидкістю?

**8.3.4.** Запишіть співвідношення, яким пов'язані фазова і групова швидкості?

**8.3.5.** Поясніть, чому всі експериментальні методи визначення швидкості світла дають значення групової швидкості?

**8.3.6.** В якому випадку фазова і групова швидкості рівні?

**8.3.7.** Яку величину прийнято називати середньою дисперсією речовини в інтервалі довжин хвиль від  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ ?

**8.3.8.** Яку величину називають дисперсією речовини для даної довжини хвилі?

**8.3.9.** Яка модель середовища розглядається в класичній теорії дисперсії?

**8.3.10.** Поясніть фізичний зміст окремих членів в рівняннях:

$$m_0 \ddot{Z} + m_0 \omega_0^2 Z = -e \bar{E}(t), \quad (8.21)$$

$$\ddot{Z} + \gamma \dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\frac{e}{m_0} \bar{E}(t). \quad (8.22)$$

**8.3.11.** Як змінюється показник заломлення даної речовини при зміні її густини?

**8.3.12.** В яких випадках дисперсію називають нормальною, а в яких – аномальною?

**8.3.13.** Чому аномальна дисперсія спостерігається в області поглинання світла і поблизу неї?

**8.3.14.** Як експериментально виявляються області аномальної дисперсії середовища?

**8.3.15.** Зарисуйте графік залежності показника заломлення  $n$  від довжини хвилі  $\lambda$  [ $n = f(\lambda)$ ] в широкому інтервалі довжини хвиль.

**8.3.16.** Чим пояснюється, що співвідношення  $n = \sqrt{\epsilon}$  так різко порушується для води в оптичній ділянці електромагнітного спектра?

**8.3.17.** Чи може показник заломлення бути меншим за одиницю?

**8.3.18.** Який фізичний зміст має уявна частина комплексного показника заломлення.

**8.3.19.** Що називають поглинанням світла?

**8.3.20.** З'ясуйте відмінність в приведених нижче записах закону поглинання світла:

$$I = I_0 e^{-\frac{2\alpha x}{c}}, \quad (8.23)$$

$$I = I_0 e^{-\alpha x}. \quad (8.24)$$

**8.3.21.** З'ясуйте фізичний зміст коефіцієнта поглинання  $\alpha$  і показника поглинання  $\kappa$ . Як вони пов'язані між собою?

**8.3.22.** Яка залежність коефіцієнта поглинання розчину від його концентрації?

**8.3.23.** З'ясуйте фізичну суть від'ємного поглинання світла.

**8.3.24.** Яке поглинання називають селективним?

**8.3.25.** З'ясуйте механізм поглинання світла діелектриками, одно- і багатоатомними газами та металами. опишіть їх спектри поглинання.

**8.3.26.** Які прилади застосовуються для вимірювань поглинання світла?

**8.3.27.** Назвіть недоліки класичної теорії дисперсії при порівнянні її з дослідами.

**8.4. Методичні вказівки до розв'язування задач**

Задачі даної теми умовно можна розділити на чотири типи: а) задачі, пов'язані із визначенням швидкості поширення світла в різних середовищах за допомогою різних методів. Такі задачі розв'язуються з використанням формул (8.5) - (8.8) та співвідношень:

$$c = v\lambda, \quad v = \frac{c}{n}, \quad (8.25)$$

де  $\nu$  і  $\lambda$  – відповідно частота та довжина електромагнітної хвилі,  $n$  – показник заломлення середовища,  $v$  – швидкість поширення світла у середовищі,  $c$  – швидкість поширення світла у вакуумі; б) задачі, пов'язані з необхідністю знаходження фазової і групової швидкостей. Задачі цього типу розв'язуються з використанням співвідношень (8.2) - (8.4); в) задачі, пов'язані із знаходженням дисперсії світла та величин, пов'язаних з нею. Такі задачі розв'язуються при використанні формул (8.10) - (8.16); г) задачі, пов'язані з необхідністю розрахунків поглинання світла речовинами. Тут, як правило, використовується закон Бугера-Ламберта (8.18) та закон Бугера-Бєєра (8.20).

### 8.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 8.5.1.** Установка для вимірювання швидкості світла складається із лінзи  $L$  (рис. 8.5), дзеркала  $Z_1$ , що обертається навколо перпендикулярної до рисунка осі  $C$ , нерухомого дзеркала  $Z_2$  і джерела світла  $S$ , яке знаходиться в фокальній площині лінзи  $L$ . Яке значення швидкості світла отримали, якщо дзеркало  $Z_1$  оберталось з кутовою швидкістю  $\omega = 1500\pi$  с<sup>-1</sup>, відстань між дзеркалами  $Z_1$  і  $Z_2$  дорівнювала  $L = 4$  м, фокусна відстань лінзи  $f = 1$  м, зміщення зображення джерела світла  $\Delta l = 0,28$  мм.

**Розв'язок:** Оскільки промені світла після заломлення в лінзі і після

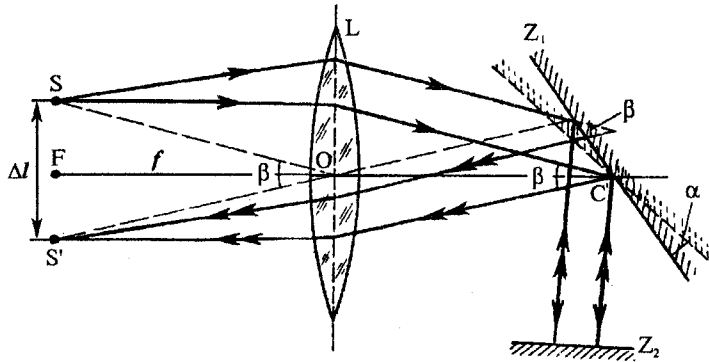


Рис. 8.5

відбиття від обертового дзеркала  $Z_1$  поширюються паралельними пучками, то джерело  $S$  і його зображення  $S'$  знаходяться на перетині фокальної площини лінзи і оптичних осей  $OS$  і  $OS'$ . Значить, кут повороту пучка променів

$$\beta = \frac{\Delta l}{f}, \quad (1)$$

при цьому дзеркало  $Z_1$  повернулося на кут

$$\alpha = \frac{\beta}{2}. \quad (2)$$

Таке повертання відбулося за час

$$t = \frac{\alpha}{\omega}. \quad (3)$$

Отже, за цей час світло пройшло відстань, рівну  $2L$ .

### Швидкість світла

$$c = \frac{2L}{t} = \frac{2L\omega}{\alpha} = \frac{4L\omega}{\beta} = \frac{4Lf\omega}{\Delta l}. \quad (4)$$

Підставивши в (4) числові значення відповідних величин ( $L = 4$  м;  $\omega = 1500\pi$ ;  $f = 1$  м;  $l = 28 \cdot 10^{-5}$  м), отримаємо:

$$c = \frac{4 \cdot 4 \cdot 1500\pi \cdot 1}{28 \cdot 10^{-5}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 269279360 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $c = 269279360$  м/с.

**Задача 8.5.2.** Знайти групову швидкість  $u$  хвиль, фазова швидкість  $v$  яких змінюється наступним чином в залежності від довжини хвилі:

1. Акустичні хвилі в повітрі:  $v = A$ ,  $A$  – константа.
2. Поперечні пружні хвилі в стержні:  $v = A/\lambda$ .
3. Глибоководні хвилі:  $v = \sqrt{\lambda}$ .
4. Капілярні хвилі:  $v = A/\sqrt{\lambda}$ .
5. Іоносферні електромагнітні хвилі:  $v = \sqrt{c^2 - A^2\lambda^2}$  ( $c$  – швидкість світла у вакуумі).

**Розв'язок:** Групова швидкість синусоїдальних хвиль, кожна із яких характеризується кутовою частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $k = 2\pi/\lambda$ , визначається виразом:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{v}\right)} = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (1)$$

1.  $v = A$ . Якщо  $v$  стала величина, середовище не володіє дисперсією,  $dv/d\lambda = 0$ , а  $u = v$ .

$$2. v = \frac{A}{\lambda}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{A}{\lambda^2}; \quad u = \frac{A}{\lambda} + \frac{\lambda A}{\lambda^2} = 2v.$$

\* В (1) враховано, що  $v = \frac{\omega}{k}$ , а  $v = \frac{\omega}{\lambda}$ .

$$3. v = A\sqrt{\lambda}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{A}{2\sqrt{\lambda}}; \quad u = A\sqrt{\lambda} - \frac{\lambda A}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{v}{2}.$$

$$4. v = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = -\frac{A}{2\sqrt{\lambda}^3}; \quad u = \frac{A}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\lambda A}{2\sqrt{\lambda}^3} = \frac{3A\lambda}{2\sqrt{\lambda}^3} = \frac{3}{2}v.$$

$$5. v = \sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{2A^2\lambda}{2\sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}};$$

$$u = \sqrt{c^2 + A^2\lambda^2} - \frac{\lambda 2A^2\lambda}{2\sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + A^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{v};$$

Відповідь: 1.  $u = v$ ; 2.  $u = 2v$ ; 3.  $u = \frac{v}{2}$ ; 4.  $u = \frac{3}{2}v$ ; 5.  $u = \frac{c^2}{v}$ .

**Задача 8.5.3.** Показник заломлення прозорої речовини для невеликого інтервалу довжин хвиль, поодаль від лінії поглинання, пов'язаний з

довжиною хвилі співвідношенням  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ , ( $A, B > 0$ ).

Визначити: а) дисперсію речовини; б) фазову швидкість; в) групову швидкість.

**Розв'язок:** а) Дисперсія речовини

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (1)$$

Диференціюючи  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ , отримуємо:

$$D = -\frac{2B}{\lambda^3}, \quad D < 0 \text{ при } B > 0, \quad (2)$$

отже, дисперсія є **нормальною**.

б) Фазова швидкість світла в речовині

$$v = \frac{c}{n}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) значення  $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ , маємо:

$$v = \frac{c}{A + \frac{B}{\lambda^2}} = \frac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}. \quad (4)$$

в) Групова швидкість

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (5)$$

Диференціюючи (4), отримуємо:

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{2\lambda cB}{(A\lambda^2 + B)^2}. \quad (6)$$

Підставляючи значення  $v$  із (4) і  $\frac{dv}{d\lambda}$  із (6) в (5), маємо:

$$u = \frac{c\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{(A\lambda^2 + B)^2}. \quad (7)$$

**Задача 8.5.4.** Знайти концентрацію вільних електронів іоносфери, якщо для радіохвиль з частотою  $\nu = 100 \text{ МГц}$  її показник заломлення  $n = 0,90$ .

**Розв'язок:** Залежність показника заломлення від частоти електромагнітних коливань в даному випадку можна виразити формулою (8.12):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

де  $N$  – концентрація електронів в середовищі (в даному випадку вільних електронів іоносфери),  $\epsilon_0$  – електрична стала,  $e$  і  $m_0$  – відповідно заряд і маса електрона,  $\omega_0$  – власна частота коливань електронів,  $\omega$  – частота коливань падаючого електромагнітного випромінювання.

Для ділянки радіохвиль з  $\lambda > 1$  см істотна тільки одна власна частота  $\omega_0 = 0$ , якою володіють вільні електрони. В даному випадку

$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{10^8 \text{ с}^{-1}} = 3 \text{ м}$ . Враховуючи відмічене, формулу (1) можна записати так:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_0 v^2}, \quad (2)$$

звідки

$$N = \frac{(1-n^2)4\pi^2 \epsilon_0 m_0 v^2}{e^2}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові значення відповідних величин ( $n = 0,9$ ;  $= 10^8$  Гц;  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $m_0 = 0,911 \cdot 10^{-30}$  кг;  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл), отримаємо:

$$N = \frac{(1-0,9^2) \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \cdot 0,911 \cdot 10^{-30} \cdot (10^8)^2}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2} \text{ м}^{-3} = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

Відповідь:  $N = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$ .

**Задача 8.5.5.** Водень при температурі  $0^\circ \text{C}$  і тиску 760 мм. рт. ст. має густину  $\rho_1 = 8,96 \cdot 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>, його показник заломлення  $n_1 = 1,000138$ . Густина рідкого водню  $\rho_2 = 0,068$  г/см<sup>3</sup>. Вважаючи, що формула Лоренца-Лорентца застосовна до цього випадку, знайти показник заломлення рідкого водню.

Розв'язок: З формули Лоренца-Лорентца (8.16) випливає, що

$$\frac{n_1^2 - 1}{\rho_1(n_1^2 + 2)} = \frac{n_2^2 - 1}{\rho_2(n_2^2 + 2)}. \quad (1)$$

Оскільки показник заломлення  $n_1$  газоподібного водню мало відрізняється від одиниці, то при  $n_1^2 - 1 \approx 2(n_1 - 1)$  і  $n_1^2 + 2 \approx 3$  із (1) отримуємо:

$$\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} (n_1 - 1). \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  і  $n_1$ , маємо:

$$\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} = 0,0698, \quad (3)$$

звідки

$$n_2 = \sqrt{\frac{1,1396}{1-0,0698}} = 1,1068481.$$

Відповідь:  $n_2 = 1,1068481$ .

**Задача 8.5.6.** Знайти наближено число оптичних електронів в одиниці об'єму речовини, якщо для рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 3 \cdot 10^{-10}$  м показник заломлення  $n = 0,999999$ .

Розв'язок: Залежність показника заломлення від частоти для рентгенівського випромінювання визначається формулою (8.17):

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0 \omega^2}, \quad (1)$$

де  $N$  – число електронів в одиниці об'єму речовини,  $\epsilon_0$  – електрична стала,  $e$  і  $m_0$  – відповідно заряд і маса електрона,  $\omega$  – частота падаючого рентгенівського випромінювання.

Із (1) маємо:

$$N = \frac{(1-n^2)m_0 \epsilon_0 \omega^2}{e^2} = \frac{4\pi^2 c^2 m_0 \epsilon_0 (1-n^2)}{e^2 \lambda^2}. \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення відповідних величин ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $m_0 = 0,911 \cdot 10^{-30}$  кг;  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $n = 0,999999$ ;  $\lambda = 3 \cdot 10^{-10}$  м), отримаємо:

$$N = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 0,911 \cdot 10^{-30} \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \cdot (1-0,999999)}{(3 \cdot 10^{-10})^2 (1,602 \cdot 10^{-19})^2} \text{ м}^{-3} = 1,24 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Відповідь:  $N = 1,24 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$ .

**Задача 8.5.7.** Показник заломлення повітря за нормальних умов для жовтої лінії натрію ( $\lambda = 5893 \cdot 10^{-10}$  м)  $n_1 = 1,0002918$ . Визначити показник заломлення  $n_2$  повітря при температурі  $30^\circ \text{C}$  і тиску  $3 \cdot 10^6$  Па.

**Розв'язок:** Ділянки поглинання в спектрах азоту, кисню і натрію не співпадають, тому для розв'язку задачі скористаємось рівнянням (8.12):

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m_0 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1)$$

Вважаючи, що концентрація електронів прямо пропорційна концентрації молекул або масі одиниці об'єму речовини, а маса пропорційна густині, можна записати:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (2)$$

де  $N_1$  і  $N_2$  – концентрації молекул речовини відповідно за нормальних умов і при температурі  $30^\circ\text{C}$  і тиску  $3 \cdot 10^6$  Па,  $\rho_1$  і  $\rho_2$  – густини повітря за нормальних умов і при температурі  $30^\circ\text{C}$  та тиску  $3 \cdot 10^6$  Па відповідно.

Власні частоти електронів в атомі вважаємо незалежними від температури речовини, так що  $\omega_0 = \text{const}$ .

Відношення  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$  визначимо із системи рівнянь Менделєєва-Клапейрона для двох станів ідеального газу:

$$P_1 = \frac{\rho_1}{\mu} RT_1, \quad P_2 = \frac{\rho_2}{\mu} RT_2, \quad (3)$$

звідки

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} \quad (4)$$

Рівняння (1) також використаємо для складання системи рівнянь для двох станів газу:

$$n_1^2 = 1 + \frac{N_1 e^2}{m_0 \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad n_2^2 = 1 + \frac{N_2 e^2}{m_0 \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (5)$$

звідки

$$\frac{n_1^2 - 1}{n_2^2 - 1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} \quad (6)$$

Розв'язуючи рівняння (6) відносно  $n_2$ , отримаємо:

$$n_2 = \sqrt{\frac{(n_1^2 - 1) P_2 T_1}{P_1 T_2} + 1} \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $n_1 = 1,0002918$ ;  $P_1 = 101325$  Па;  $P_2 = 3 \cdot 10^6$  Па;  $T_1 = 273$  К;  $T_2 = 303$  К), маємо:

$$n_2 = \sqrt{\frac{(1,0002918^2 - 1) \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 273}{101325 \cdot 303} + 1} = 1,007754.$$

Відповідь:  $n_2 = 1,007754$ .

**Задача 8.5.8.** Знайти показник заломлення для рентгенівських променів з довжиною хвилі  $\lambda = 1,56 \cdot 10^{-8}$  см, припускаючи, що електрони в алюмінії мають власну частоту, набагато меншу, ніж частота рентгенівських променів.

**Розв'язок:** Скористаємось формулою (8.17):

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2}, \quad (1)$$

де  $N$  – число електронів в одиниці об'єму,  $\epsilon_0$  – електрична стала,  $m_0$  – маса електрона,  $\omega$  – частота рентгенівських променів. Враховуючи, що

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$  формулу (1) можна записати так:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2 \lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_0 c^2}. \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення відповідних величин ( $N = 1,8 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ;  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m_0 = 0,911 \cdot 10^{-30}$  кг;  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $\lambda = 1,56 \cdot 10^{-10}$  м), отримаємо:

\*  $N_{Al}$  знаходимо так. Відносна атомна маса Al рівна  $27 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Густина Al рівна  $2700$  кг/м<sup>3</sup>. Тоді об'єм одного моля буде рівним:  $V = 27 \cdot 10^{-3} / 2700 = 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль. В одному молі знаходиться  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  атомів. Тому концентрація атомів Al складає  $(N_A/V) = 6,02 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup>. В припущенні, що на кожний атом Al припадає 3 вільні електрони, число електронів в 1 м<sup>3</sup> дорівнює  $N \approx 1,8 \cdot 10^{29}$  м<sup>-3</sup>.

$$n^2 = 1 - \frac{1,8 \cdot 10^{29} (1,602 \cdot 10^{-19})^2 (1,56 \cdot 10^{-10})^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0,885 \cdot 10^{-11} \cdot 0,911 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 1 - 3,9 \cdot 10^{-6} = 0,9999961.$$

Відповідь:  $n = 0,99999804$ .

**Задача 8.5.9.** Прозора пластинка пропускає половину падаючого на неї світлового потоку. Визначити коефіцієнт поглинання, якщо товщина пластинки  $l = 4,2$  см. Розсіянням світла знехтувати. Вважати, що 10 % падаючого світлового потоку відбивається від поверхні пластинки.

**Розв'язок:** Поглинання світла твердими речовинами здійснюється відповідно закону Бугера-Ламберта (8.18):

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (1)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючого світла на шар поглинаючої речовини товщиною  $x$  (в нашому випадку  $x = l$ ),  $I$  – інтенсивність світла після виходу його із речовини,  $\alpha$  – коефіцієнт поглинання.

Відповідно умови задачі через пластинку проходить тільки половина світлового потоку, тобто  $I = \frac{I_0}{2}$ . Крім того 10 % світлового потоку відбивається від поверхні пластинки. Тоді формула (1) набуде вигляду:

$$\frac{I_0}{2} = 0,9 I_0 e^{-\alpha l}, \quad (2)$$

або

$$\frac{1}{2} = 0,9 e^{-\alpha l}. \quad (3)$$

Логарифмуючи останній вираз, отримаємо:

$$-\ln 2 = \ln 0,9 - \alpha l,$$

звідки

$$\alpha = \frac{\ln 2 + \ln 0,9}{l} = \frac{0,693 - 0,105}{4,2} = 0,14 \text{ см}^{-1}.$$

Відповідь:  $\alpha = 0,14 \text{ см}^{-1}$ .

**Задача 8.5.10.** Монохроматичний пучок світла проходить через стопу із  $N = 5$  однакових плоскопаралельних скляних пластинок. Коефіцієнт відбиття на кожній поверхні  $R = 0,050$ , товщина кожної пластинки  $l = 0,50$  см.

Відношення інтенсивності світла, що пройшло через цю стопу пластинок, до інтенсивності падаючого світла  $\eta = 0,55$ . Нехтуючи вторинним відбиванням світла, визначити коефіцієнт поглинання світла склом.

**Розв'язок:** Поглинання світла відбувається відповідно закону Бугера-Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\alpha d}. \quad (1)$$

(див. задачу 8.5.9).

Відповідно умови даної задачі

$$\frac{I}{I_0} = \eta \Rightarrow I = \eta I_0. \quad (2)$$

Оскільки на кожній поверхні частина світла відбивається, то після проходження 1-ої поверхні далі поширюватиметься світло інтенсивністю  $I_0(1 - R)$ , після 2-х поверхонь –  $I_0(1 - R)^2$  і т.д. Після  $2N$  поверхонь ( $N$  – кількість пластинок) залишиться світловий потік інтенсивністю  $I_0(1 - R)^{2N}$ . Тоді формула (1) набуде такого вигляду:

$$I_0 \eta = I_0 (1 - R)^{2N} e^{-\alpha l N}, \quad (3)$$

де  $lN$  – товщина стопи пластинок. Отже

$$\eta = (1 - R)^{2N} e^{-\alpha l N}. \quad (4)$$

Логарифмуючи (4), отримаємо:

$$\ln \eta = \ln(1 - R)^{2N} - \alpha l N,$$

звідки

$$\alpha = \frac{\ln(1 - R)^{2N} - \ln \eta}{lN}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $R = 0,05$ ;  $l = 0,50$  см;  $N = 5$ ;  $\eta = 0,55$ ), маємо:

$$\alpha = \frac{\ln \left[ \frac{(1 - 0,05)^{2 \cdot 5}}{0,55} \right]}{0,50 \cdot 5 \text{ см}} = 0,034 \text{ см}^{-1}.$$

Відповідь:  $\alpha = 0,034 \text{ см}^{-1}$ .

**Задача 8.5.11.** Монохроматичний пучок світла падає нормально на поверхню плоскопаралельної пластинки товщиною  $l$ . Коефіцієнт поглинання речовини пластинки лінійно змінюється вздовж нормалі до її поверхні від  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ . Коефіцієнт відбиття від кожної поверхні рівний  $R$ . Нехтуючи вторинними відбиваннями, визначити коефіцієнт пропускання світла такою пластинкою.

**Розв'язок:** Коефіцієнт пропускання

$$\eta = \frac{I}{I_0}, \quad (1)$$

де  $I_0$  – інтенсивність падаючого на пластинку світла,  $I$  – інтенсивність світла, що пройшло через пластинку. Зміна інтенсивності світла при проходженні через пластинку визначається законом Бугера-Ламберта:

$$I = I_0 e^{-\alpha l}. \quad (2)$$

Відповідно умови задачі частина світлової енергії відбивається на поверхнях пластинки. Тому формула (2) набуде вигляду

$$I = (1 - R)^2 I_0 e^{-\alpha l}, \quad (3)$$

де  $(1 - R)^2 I_0$  – величина інтенсивності світлової енергії, що залишається після відбивання на 2-х поверхнях (див. задачу 8.5.10).

Оскільки коефіцієнт поглинання речовини пластинки змінюється лінійно від  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , то

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (4)$$

Тоді

$$I = (1 - R)^2 I_0 e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} l}. \quad (5)$$

Враховуючи (5), маємо:

$$\eta = \frac{I}{I_0} = (1 - R)^2 e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} l}.$$

**Відповідь:**  $\eta = (1 - R)^2 e^{-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} l}$ .

**Задача 8.5.12.** В 4 %-ному розчині речовини в прозорому розчиннику інтенсивність світла на глибині  $l_1 = 2,0$  см послаблюється в  $\eta_1 = 2$  рази. У скільки разів послаблюється інтенсивність світла на глибині  $l_2 = 3,0$  см у 8 %-ному розчині тієї ж речовини?

**Розв'язок:** Поглинання світла розчинами відбувається відповідно закону Бугера-Беєра (8.20):

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 c x}, \quad (1)$$

де  $c$  – концентрація розчиненої речовини,  $\alpha_0$  – коефіцієнт поглинання, характерний для молекули розчиненої речовини.

Для 1-ого розчину, виходячи із (1), запишемо:

$$\eta_1 = \frac{I_0}{I_1} = e^{+\alpha_0 c_1 l_1}, \quad (2)$$

для другого розчину:

$$\eta_2 = \frac{I_0}{I_2} = e^{+\alpha_0 c_2 l_2}. \quad (3)$$

Логарифмуючи (2) і (3), маємо:

$$\begin{cases} \ln \eta_1 = +\alpha_0 c_1 l_1, \\ \ln \eta_2 = +\alpha_0 c_2 l_2, \end{cases} \quad (4)$$

звідки

$$\ln \eta_2 = \ln \eta_1 \frac{c_2 l_2}{c_1 l_1}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $\eta_1 = 2$ ;  $c_1 = 0,04$ ;  $c_2 = 0,08$ ;  $l_1 = 2,0$  см;  $l_2 = 3,0$  см), маємо:

$$\ln \eta_2 = \ln 2 \frac{0,08 \cdot 3,0}{0,04 \cdot 2,0} = 2,079, \quad \eta_2 = 8.$$

**Відповідь:**  $\eta_2 = 8$ .

\* **Задача 8.5.13.** Пучок природного світла інтенсивності  $I_0$  падає на систему із двох схрещених ніколів, між якими знаходиться трубка з деяким



розчином в поздовжньому магнітному полі напруженістю  $H$ . Довжина трубки рівна  $d$ , лінійний коефіцієнт поглинання розчину  $\alpha$  і стала Верде  $V$ . Знайти інтенсивність світла, яке пройде через цю систему.

Розв'язок: Світло після 1-ого ніколя є лінійно поляризованим інтенсивності

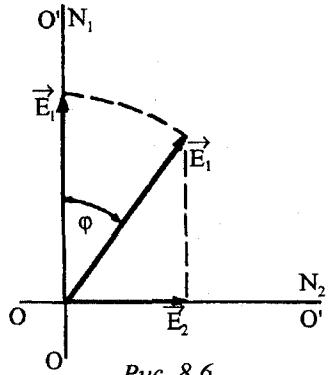


Рис. 8.6

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0. \quad (1)$$

Електричний вектор  $\vec{E}_1$  цього світла коливається в напрямку, перпендикулярному до оптичної осі 2-ого ніколя, і система світла не пропустить. Однак під дією магнітного поля розчин, що міститься в трубці, поверне площину коливань електричного вектора на деякий кут

$$\varphi = VdH, \quad (2)$$

(де  $V$  – стала Верде,  $H$  – напруженість магнітного поля,  $d$  – довжина трубки з розчином), внаслідок чого система просвітиться. Амплітуда коливань світлового вектора після другого ніколя буде рівна (рис. 8.6):

$$E_2 = E_1 \sin \varphi, \quad (3)$$

де  $E_1$  – амплітуда електричного вектора після першого ніколя,  $\varphi$  – кут, на який повернеться площина поляризації.

Враховуючи, що  $I \sim E^2$ , отримаємо:

$$I_2 = I_1 \sin^2 \varphi. \quad (4)$$

Формула (4) отримана без врахування поглинання світла розчином.

При врахуванні поглинання світла розчином інтенсивність світла, що падає на другий ніколь, буде рівна:

$$I'_1 = I_1 e^{-\alpha d} = \frac{1}{2} I_0 e^{-\alpha d}. \quad (5)$$

Беручи до уваги (5), формула (4) переписеться так:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 e^{-\alpha d} \sin^2 \varphi,$$

де  $\varphi = VdH$ .

$$\text{Відповідь: } I_2 = \frac{1}{2} I_0 e^{-\alpha d} \sin^2(VdH).$$

### 8.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми VIII

8.6.1. Визначити групову швидкість для різних законів дисперсії, якщо фазова швидкість: а)  $v_1 = a$ ; б)  $v_2 = b\sqrt{\lambda}$ ; в)  $v_3 = ck^2$ , де  $a, b, c$  – деякі сталі,  $k$  – хвильове число.

$$\text{Відповідь: } u_1 = v_1; u_2 = \frac{v_2}{2}; u_3 = 3v_3 \text{ (аномальна дисперсія).}$$

8.6.2. В деякому середовищі зв'язок між груповою і фазовою швидкостями електромагнітної хвилі має вигляд  $uv = c^2$ , де  $c$  – швидкість світла у вакуумі. Знайти залежність діелектричної проникності цього середовища від частоти хвилі  $\varepsilon(\omega)$ .

$$\text{Відповідь: } \varepsilon = 1 + \frac{A}{\omega^2}, \text{ де } A \text{ – стала величина.}$$

8.6.3. Вимірювання дисперсії для сірководню дає:

$$\text{при } \lambda_1 = 509,0 \text{ нм} \quad n_1 = 1,647;$$

$$\text{при } \lambda_2 = 534,0 \text{ нм} \quad n_2 = 1,64;$$

$$\text{при } \lambda_3 = 589,0 \text{ нм} \quad n_3 = 1,63.$$

Знайти фазову і групову швидкості світла поблизу  $\lambda = 534,0$  нм.

$$\text{Відповідь: } v = \frac{c}{n} = 1,83 \cdot 10^8 \text{ м/с}; u = \left[ 1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right] \frac{c}{n} = 1,70 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

8.6.4. Знайти показник заломлення графіту для рентгенівських променів з довжиною хвилі  $\lambda = 1,56 \cdot 10^{-10}$  м, припускаючи, що власна частота електронів набагато менша частот рентгенівського випромінювання.

$$\text{Відповідь: } n_{zp} \approx 1 - 7,1 \cdot 10^{-10}.$$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad \omega_0 \ll \omega \Rightarrow n^2 \approx 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}$$

$$v = \frac{\lambda}{2\pi} \omega \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} v \Rightarrow v = \frac{2\pi v}{2\pi} \cdot \frac{c}{n}$$

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_0} \approx \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_0}}$$

8.6.5. Маючи на увазі, що для достатньо жорстких рентгенівських променів електрони речовини можна вважати вільними, визначити, на скільки відрізняється від одиниці показник заломлення графіту для рентгенівських променів з довжиною хвилі у вакуумі  $\lambda = 50 \text{ нм}$ .

Відповідь:  $n - 1 = -5,4 \cdot 10^{-7}$ .

8.6.6. Насичені пари бензолу ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ) для світла, довжина хвилі якого  $\lambda = 5893 \cdot 10^{-10} \text{ м}$  (жовта лінія натрію), при температурі  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  і тиску  $7,0 \text{ мм рт. ст.}$  мають показник заломлення  $n_1 = 1,001812$ . Визначити показник заломлення цього газу при температурі  $400 \text{ }^\circ\text{C}$  і тиску  $60,6 \text{ мм рт. ст.}$

Відповідь:  $n = 1,000684$ .

8.6.7. Коефіцієнт заломлення води в інтервалі довжин хвиль від  $546$  до  $589 \text{ нм}$  змінюється від  $1,33447$  до  $1,33300$ . Визначити середню фазову і середню групову швидкості світла для цього інтервалу довжин хвиль.

Відповідь:  $v = 2,25 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $u = 2,21 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

8.6.8. Коефіцієнт поглинання води для випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 0,77 \text{ мм}$  дорівнює  $\alpha = 0,0024 \text{ мм}^{-1}$ . На якій глибині  $l$  монохроматичний пучок променів буде послаблений в  $\eta = 2,7$  рази? На скільки слід збільшити яскравість падаючого пучка, якщо потрібно змінити товщину шару води з  $l_1 = 1$  до  $l_2 = 5 \text{ см}$ , без зменшення яскравості випромінювання, яке виходить із водяного фільтра.

Відповідь:  $l = 42 \text{ см}$ ; на  $10 \%$ .

8.6.9. При проходженні через пластинку інтенсивність світла з довжиною хвилі  $\lambda_1$  зменшується в  $k_1$  разів, а світла з довжиною хвилі  $\lambda_2$  – в  $k_2$  рази. Визначити коефіцієнт поглинання для світла з довжиною хвилі  $\lambda_2$ , якщо коефіцієнт поглинання для  $\lambda_1$  дорівнює  $\alpha_1$ .

Відповідь:  $\alpha_2 = \alpha_1 \frac{\lg k_2}{\lg k_1}$ .

8.6.10. Яка концентрація досліджуваного розчину, якщо однакова освітленість фотометричних полів була отримана у еталонного  $3 \%$ -ного розчину при товщині  $l_1 = 8 \text{ мм}$ , а у досліджуваного – при товщині  $l_2 = 24 \text{ мм}$ ?

Відповідь:  $1 \%$ .

+ 8.6.11. Пластинка товщиною  $l_1 = 3,8 \text{ мм}$  пропускає  $\eta_1 = 0,84$  падаючого на неї світлового потоку. Інша пластинка із тієї ж речовини товщиною  $l_2 = 9,0 \text{ мм}$  пропускає  $\eta_2 = 0,70$  того ж світлового потоку. Знайти коефіцієнт поглинання цієї речовини. Світло падає нормально.

Відповідь:  $\alpha = 0,35 \text{ см}^{-1}$ .

## ТЕМА ІХ

### ЯВИЩЕ ДОПЛЕРА. ОПТИКА РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩ. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

#### 9.1. Програмні питання

Явище Доплера в оптиці. Поперечний ефект Доплера.

Експериментальні основи спеціальної теорії відносності. Постулати принципу відносності Ейнштейна. Формули перетворення координат і часу в теорії відносності і висновки із них. Релятивістські енергія та імпульс, рівняння руху.

#### 9.2. Основні поняття, закони і формули

##### 9.2.1 Явище Доплера в акустиці

а) Джерело  $S$  рухається відносно середовища (рис. 9.1)

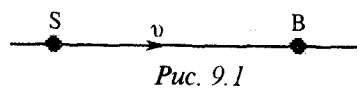


Рис. 9.1

При русі джерела в середовищі швидкість хвилі відносно приймача, який знаходиться в цьому ж середовищі, залишається сталою, а частота і довжина

хвилі, які сприймаються приймачем, змінюються:

$$v = \frac{v_0}{1 \pm \frac{v}{c}},$$

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 \pm \frac{v}{c} \right),$$

(9.1)

де  $v$  і  $\lambda$  – відповідно частота і довжина акустичної хвилі, що сприймається приймачем,  $v_0$  і  $\lambda_0$  – частота і довжина хвилі джерела,  $v$  – швидкість руху джерела відносно середовища,  $c$  – швидкість акустичної хвилі в середовищі. Знак “+” означає, що джерело віддаляється від приймача, знак “-” – наближається до нього.

б) Приймач  $B$  рухається відносно середовища (рис. 9.2)

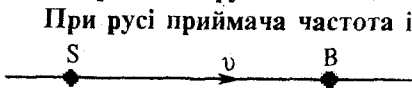


Рис. 9.2

При русі приймача частота і швидкість хвилі відносно приймача змінюються, а довжина хвилі, яка сприймається ним, залишається незмінною:

$$v = v_0 \left( 1 \mp \frac{v}{c} \right),$$

$$\lambda = \lambda_0,$$

$$v' = c \left( 1 \mp \frac{v}{c} \right),$$

(9.2)

де  $v$  і  $\lambda$  – відповідно частота і довжина акустичної хвилі, що сприймаються приймачем,  $v_0$  і  $\lambda_0$  – частота і довжина хвилі джерела,  $v$  – швидкість

приймача відносно середовища,  $c$  – швидкість поширення хвилі відносно середовища,  $v'$  – відносна швидкість хвилі і приймача. Знак “-” означає, що джерело віддаляється від приймача, знак “+” – наближається до нього.

в) Напрямок спостереження складає кут  $\varphi$  з напрямком руху джерела (приймача)

Рухається джерело (рис. 9.3):

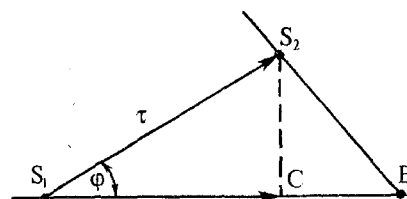


Рис. 9.3

$$v = v_0 \frac{1 \mp \frac{v \cos \varphi}{c}}{1 - \left( \frac{v \cos \varphi}{c} \right)^2}. \quad (9.3)$$

Рухається приймач (рис. 9.4):

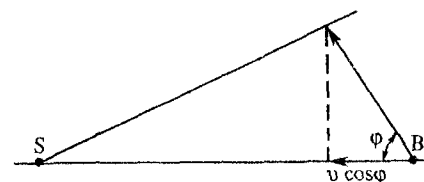


Рис. 9.4

$$v = v_0 \left( 1 \mp \frac{v \cos \varphi}{c} \right). \quad (9.4)$$

Рухається і джерело і приймач:

$$v = \frac{v_0 \left( 1 + \frac{v \cos \varphi_B}{c} \right)}{1 + \frac{u \cos \varphi_S}{c}}, \quad (9.5)$$

де  $\varphi_B$  і  $\varphi_S$  – відповідно кути, під якими рухається джерело і приймач до лінії, напрямленої від джерела до приймача,  $v$  і  $u$  – абсолютні швидкості приймача і джерела відносно середовища.

##### 9.2.2. Явище Доплера в оптиці

Лінійний ефект Доплера:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 \mp \frac{v}{c}}{1 \pm \frac{v}{c}}}, \quad (9.6)$$

де верхні знаки відповідають віддаленню джерела світла від приймача, а нижні знаки – наближенню джерела до приймача.

При  $v \ll c$

$$v = v_0 \left( 1 \mp \frac{v}{c} \right), \quad (9.7)$$

де  $\nu_0$  – частота коливання джерела,  $\nu$  – частота, яка сприймається приймачем,  $v$  – відносна швидкість руху джерела і приймача,  $c$  – швидкість світла у вакуумі, знак “+” в (9.7) означає, що джерело наближається до приймача (фіолетове зміщення), знак “-” означає, що джерело віддаляється від приймача (червоне зміщення)

Якщо швидкість переміщення утворює кут  $\varphi$  з напрямком поширення світла, то *для рухомого джерела: а для рухомих спостерігача  $v = v_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  (9.8)*

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}$$

*період  $T = T_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  (9.8)*

Поперечний ефект Доплера ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ):

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (9.9)$$

### 9.2.3 Постулати принципу відносності Ейнштейна

1. Перший постулат (принцип відносності). Закони природи, які описують різноманітні фізичні процеси і явища, при переході від однієї інерціальної системи до іншої є незмінними або інваріантними.

2. Другий постулат (сталість швидкості світла). Швидкість світла  $c$  у вакуумі однакова у всіх інерціальних системах відліку, не залежить від руху джерел і приймачів і є універсальною сталою.

### 9.2.4. Перетворення Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, y = y', \\ z' &= z, z = z', \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

де  $x, y, z, t$  – координати і час в нерухомій системі відліку  $K$ ,  $x', y', z', t'$  – координати і час в рухомій інерціальній системі відліку  $K'$ ,  $v$  – швидкість руху системи  $K'$  відносно системи  $K$  вздовж осі  $x$ .

### 9.2.5. Наслідки із перетворень Лоренца

Відносність довжини:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (9.11)$$

де  $l_0$  – довжина стержня у власній системі відліку,  $l$  – довжина стержня відносно нерухомої системи координат (довжина рухомого стержня).

Відносність часу:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9.12)$$

де  $\tau_0$  – власний час.

Релятивістське додавання швидкостей (випадок руху вздовж паралельних осей  $x'$  і  $x$ ):

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, & u &= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

де  $v$  – відносна швидкість руху систем відліку  $K'$  і  $K$  вздовж осей  $x'$  і  $x$ .

Релятивістська енергія

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (9.14)$$

де  $v$  – швидкість руху тіла,  $m$  – інваріантна маса частинки (однакова у всіх системах відліку). Маса  $m$  є скалярною характеристикою частинки (подібно до елементарного заряду). Вона визначає енергію тіла у стані спокою ( $v = 0$ ).  $W_0 = mc^2$  – енергія спокою. У зв'язку з цим  $m$  називають також “масою спокою” (це просто маса, яка використовується в ньютонівській механіці).

**Релятивістський імпульс**

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma\vec{v}, \quad (9.15)$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.16)$$

**Кінетична енергія в релятивістській механіці**

$$T = W - W_0 = m(\gamma - 1)c^2. \quad (9.17)$$

**Залежність релятивістської енергії від імпульсу:**

$$W = \sqrt{c^2 p^2 + (mc^2)^2}. \quad (9.18)$$

**Рівняння релятивістської механіки:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (9.19)$$

де  $\vec{p}$  визначається формулою (9.15),  $\vec{F}$  – сила, що діє на тіло. Напрямок сили  $\vec{F}$  не співпадає, взагалі кажучи, з напрямком прискорення  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ .

Введення “релятивістської маси”  $m\gamma$ , залежної від швидкості, не відповідає фізичному змісту поняття інваріантної маси в теорії відносності. Формули (9.14) – (9.17) є справедливими лише для частинок з масою  $m \neq 0$ , що рухаються із швидкістю  $v < c$ . Для випадку  $v \leq c$  релятивістський імпульс

$$\vec{P} = \frac{W}{c^2} \vec{v}, \quad (9.20)$$

який співпадає з (9.15) для  $v < c$ , а для частинок з  $v = c$  (наприклад фотонів, нейтрино)

$$P = \frac{W}{c}, \quad \text{або} \quad W = Pc. \quad (9.21)$$

з (9.21) і (9.18) випливає, що для ультрарелятивістських частинок, що

рухаються лише з швидкістю світла  $c$ , інваріантна маса (маса спокою)  $m = 0$ , а введення так званої “релятивістської маси” фотона

$$m_f = \frac{P}{c} = \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2},$$

може призвести до фізичних непорозумінь і, зокрема, до порушення принципу тотожності фотонів різних частот  $\nu$  ( $h$  – стала Планка). Маса  $m_f$  не є мірою інертності, фотон не можна ні прискорити, ні сповільнити (можна досягнути лише його зникнення). Іноді масу  $m_f \neq 0$  використовують для якісного пояснення відхилення світлового променя в гравітаційному полі (див. задачу 9.5.4). Слід мати на увазі, що у послідовній релятивістській теорії цей ефект можна отримати без введення будь-якої маси фотона.

**9.3. Контрольні запитання**

**9.3.1.** З'ясуйте суть ефекту Доплера в оптиці. Яка його відмінність від ефекту Доплера в акустиці?

**9.3.2.** Виведіть формулу зміни частоти світла в залежності від швидкості джерела відносно приймача.

**9.3.3.** Які причини викликають зміну частоти сигналів, що приймаються при відносному русі джерела й приймача? В чому головна відмінність ефекту Доплера для електромагнітних хвиль у вакуумі і для хвиль у середовищі? З чим пов'язано виникнення поперечного ефекту Доплера?

**9.3.4.** Чи можливо спостерігати явище Доплера, якщо джерело випромінює суцільний спектр?

**9.3.5.** З якою швидкістю повинен рухатися автомобіль, щоб червоне світло світлофора ( $\lambda_0 = 0,7$  мкм) перетворилося в зелене ( $\lambda_1 = 0,55$  мкм)? (Анекдот про Вуда).

**9.3.6.** Перерахуйте основні прояви і застосування ефекту Доплера в астрофізиці і спектроскопії.

**9.3.7.** З'ясуйте суть основних експериментів, які стали експериментальною основою спеціальної теорії відносності.

**9.3.8.** Сформулюйте постулати спеціальної теорії відносності. В якій мірі оптичні досліди з рухомими тілами підтверджують їх справедливість?

**9.3.9.** За допомогою простих уявних дослідів покажіть, що з постулатів спеціальної теорії відносності випливає відносність таких понять, як одночасність подій і проміжок часу між подіями?

**9.3.10.** Чи можна вважати релятивістське скорочення масштабів і сповільнення ходу годинника результатом динамічних процесів у масштабах і годинниках?

**9.3.11.** Як перетворюється густина речовини при переході від однієї інерціальної системи до іншої?

**9.3.12.** Як змінюється швидкість частинки при переході до інерціальної системи відліку?

**9.3.13.** Отримайте формули для перетворення енергії і імпульсу частинки при переході від однієї до іншої системи відліку?

**9.3.14.** Як у теорії відносності пояснюються негативні результати всіх дослідів, в яких робилися спроби виявити рівномірний рух Землі за допомогою оптичних явищ?

**9.3.15.** Наведіть релятивістське пояснення результатів досліду Фізо.

**9.3.16.** Які властивості й характеристики плоскої електромагнітної хвилі у вакуумі змінюються при переході в іншу систему відліку і які залишаються без змін? Дайте обґрунтування інваріантності фаз.

#### 9.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

При розгляді задач даної теми слід насамперед чітко з'ясувати фізичний зміст умови задачі та знайти відповідний теоретичний матеріал, необхідний для кожної конкретної задачі. В задачах, пов'язаних з оптичним ефектом Доплера, використовуються основні формули (9.6) – (9.9). При цьому потрібно уважно врахувати характер відносного руху джерела та приймача, напрямок спостереження ефекту Доплера (кут спостереження).

Задачі з елементів спеціальної (частинної) теорії відносності та релятивістської механіки потребують глибокого розуміння принципу відносності Ейнштейна, наслідків перетворень Лоренца та релятивістських понять енергії та імпульсу. В кожній з цих задач фіксуються цілком певні інерціальні системи відліку. Слід мати на увазі, що не можна зв'язувати системи відліку з об'єктами, що рухаються із швидкостями  $v = c$  (де  $c$  – швидкість світла у вакуумі), а при  $v > c$  перетворення Лоренца стають уявними. При розв'язуванні цих задач використовуються основні фізичні формули (9.11) – (9.21). Більшість таких задач пов'язано з відносністю довжини та часу, законом релятивістського додавання швидкостей, уявленнями релятивістської механіки.

Правильні відповіді на контрольні запитання до розд. 9.3 були б запорукою для успішного розв'язування задач даної теми, яка потребує

глибокого засвоєння нових фундаментальних принципів та понять релятивістської фізики.

#### 9.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 9.5.1.** З якою швидкістю віддаляється від Сонячної системи деяка туманність, якщо лінія водню  $\lambda = 434 \text{ нм}$  в її спектрі зміщена в бік довгих хвиль на  $\Delta\lambda = 13 \text{ нм}$ ?

**Розв'язок:** Зміщення спектральної лінії відбулося внаслідок ефекту Доплера (див. ф-лу (9.6)):

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \quad (1)$$

де  $v$  – швидкість, з якою віддаляється туманність від Сонячної системи.

Враховуючи, що  $v_0 = \frac{c}{\lambda}$ , а  $v = \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}$  формулу (1) перепишемо так:

$$\frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \quad \text{або} \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2 = \frac{c - v}{c + v}. \quad (2)$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно  $v$ , отримуємо:

$$v = c \frac{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2\right]}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові дані відповідних величин ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda = 434 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ;  $\Delta\lambda = 13 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ), маємо:

$$v \approx 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{\left[ 1 - \left( \frac{434 \cdot 10^{-9}}{434 \cdot 10^{-9} + 13 \cdot 10^{-9}} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{434 \cdot 10^{-9}}{434 \cdot 10^{-9} + 13 \cdot 10^{-9}} \right)^2 \right]} = 8851656,9 \text{ м/с.}$$

Відповідь:  $v = 8851656,9 \text{ м/с.}$

**Задача 9.5.2.** При спостереженні спектральної лінії  $\lambda = 0,59 \text{ мкм}$  в напрямках на протилежні краї сонячного диска на його екваторі виявили відмінність в довжинах хвиль на  $\Delta\lambda = 8,0 \text{ нм}$ . Знайти період обертання Сонця навколо осі.

**Розв'язок:** Період обертання Сонця навколо своєї осі рівний

$$T = \frac{2\pi R_S}{v_n}, \quad (1)$$

де  $R_S$  – радіус Сонця,  $v_n$  – лінійна швидкість точок, які лежать на екваторі сонячного диска. Лінійну швидкість  $v_n$  знайдемо, скориставшись формулою (9.7) для зміни частоти випромінювання внаслідок ефекту Доплера:

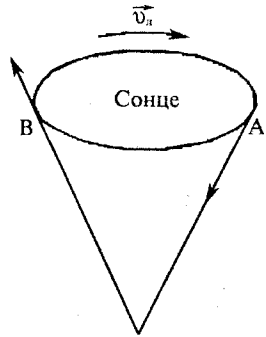


Рис. 9.5

$$v_1 = v_0 \left( 1 - \frac{v_n}{c} \right), \quad (2)$$

$$v_2 = v_0 \left( 1 + \frac{v_n}{c} \right). \quad (3)$$

Формула (2) визначає зміну частоти, коли джерело віддаляється від приймача (точка B), формула (3) визначає зміну частоти, коли джерело

наближається до приймача (точка A). З врахуванням, що  $v_0 = \frac{c}{\lambda}$ ,

$$v_1 = \frac{c}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}}, \quad v_2 = \frac{c}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} \text{ формули (2) і (3) переписуться так:}$$

$$\frac{c}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{c}{\lambda} \left( 1 - \frac{v_n}{c} \right), \quad \text{або} \quad \frac{\lambda}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = 1 - \frac{v_n}{c}, \quad (4)$$

$$\frac{c}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{c}{\lambda} \left( 1 + \frac{v_n}{c} \right), \quad \text{або} \quad \frac{\lambda}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} = 1 + \frac{v_n}{c}. \quad (5)$$

Відніmemo почленно рівняння (4) від рівняння (5). Тоді

$$\frac{\lambda}{\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}} - \frac{\lambda}{\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}} = 1 + \frac{v_n}{c} - 1 + \frac{v_n}{c}. \quad (6)$$

Після елементарних перетворень, отримаємо:

$$\frac{4\lambda\Delta\lambda}{4\lambda^2 - (\Delta\lambda)^2} = \frac{2v_n}{c}. \quad (7)$$

Оскільки  $\Delta\lambda$  величина мала в порівнянні з  $\lambda$  ( $\lambda = 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ ), то величиною  $(\Delta\lambda)^2$  в (7) можна знехтувати. Тоді

$$v_n = \frac{\Delta\lambda c}{2\lambda}. \quad (8)$$

Враховуючи (8), формула (1) набуде такого вигляду:

$$T = \frac{4\pi R_S \lambda}{\Delta\lambda c}. \quad (9)$$

Підставляючи в (9) числові значення відповідних величин ( $R_S = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$ ;  $\lambda = 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $\Delta\lambda = 8 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ), отримаємо:

$$T = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 0,59 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ с} = 2162462,8 \text{ с} = 25 \text{ діб.}$$

Відповідь:  $T = 25 \text{ діб.}$

**Задача 9.5.3.** Одна із спектральних ліній, випромінюваних збудженими іонами  $He^+$ , має довжину хвилі  $\lambda = 410 \text{ нм}$ . Знайти доплерівське зміщення  $\Delta\lambda$  цієї лінії, якщо її спостерігати під кутом  $\varphi = 30^\circ$  до пучка рухомих іонів з кінетичною енергією  $T = 10 \text{ MeV}$ .

**Розв'язок:** Частота лінії, яка реєструється приймачем під кутом до руху джерела визначається формулою (9.8):

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}, \quad (1)$$

де  $v_0$  – частота джерела,  $v$  – швидкість руху джерела,  $\varphi$  – кут, під яким спостерігається дана лінія.

Виходячи із значення кінетичної енергії рухомих іонів можна припустити, що швидкість іонів така, що величиною  $\frac{v^2}{c^2}$  в (1) можна знехтувати. Тоді

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}. \quad (2)$$

Враховуючи, що  $v = \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda}$ ,  $v_0 = \frac{c}{\lambda}$  формулу (2) перепишемо так:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}, \quad (3)$$

звідки маємо:

$$\Delta\lambda = -\lambda \frac{v}{c} \cos \varphi. \quad (4)$$

Величину швидкості  $v$  іонів  $\text{He}^+$  знайдемо за формулою:

$$T = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad (5)$$

оскільки величиною  $\frac{v^2}{c^2}$  ми знехтували. Тоді, враховуючи (5), маємо:

$$\Delta\lambda = -\lambda \sqrt{\frac{2T}{mc^2}} \cos \varphi. \quad (6)$$

Підставляючи в (6) числові значення відповідних величин ( $\lambda = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;

$$\Delta\lambda = -\lambda \frac{\sqrt{\frac{2T}{m}}}{c} \cos \varphi, \quad 284$$

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $T = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$ ;  $m = 6,64 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ;  $\varphi = 30^\circ$ ), отримаємо:

$$\Delta\lambda = -4,1 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}}{6,64 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}}} \cos 30^\circ = -2,598 \cdot 10^{-8} \text{ м} = -25,98 \text{ нм}.$$

Відповідь:  $\Delta\lambda = -25,98 \text{ нм}$ .

**Задача 9.5.4.** Іноді фотонів формально приписують “гравітаційну

масу”, яка дорівнює  $\frac{\hbar\omega}{c^2}$  (див. з цього приводу зауваження в кінці розділу 9.2.5.). Обчислити, виходячи з цього, величину “червоного зміщення”

(величину  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ ) довжини хвилі кванта світла, що пройшов гравітаційне поле Сонця.

**Розв’язок:** Якщо фотон наділити “масою”  $m$ , то на нього буде діяти сила гравітаційного тяжіння:

$$F = -\gamma \frac{m_f M}{r^2} = -\gamma \frac{\hbar\omega M}{c^2 r^2}, \quad (1)$$

де  $M$  – маса зірки,  $m_f = \frac{\hbar\omega}{c^2}$ ,  $\gamma$  – гравітаційна стала,  $r$  – відстань від фотона до зірки. Робота цієї сили на шляху  $dr$  йде на збільшення енергії кванта  $\hbar\omega$ :

$$\hbar d\omega = \gamma \frac{\hbar\omega M}{c^2 r^2} dr. \quad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2) за умов, що при  $r = \infty$   $\omega = \omega_0$ ; при  $r = R$  ( $R$  – радіус зірки)  $\omega = \omega_1$ , знаходимо:

$$\ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega_1} = -\gamma \frac{M}{c^2} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^R, \quad (3)$$

або

$$\ln \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\gamma \frac{M}{c^2 R}. \quad (4)$$



Оскільки, як буде видно з кінцевого результату,  $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$ , то  $\ln \frac{\omega_1}{\omega_0}$

можна розкласти в ряд:

$$\ln \frac{\omega_1}{\omega_0} = \ln \left( 1 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \right) \approx \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 \lambda_1} \approx \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}. \quad (5)$$

Таким чином, прирівнюючи праві частини (4) і (5), отримаємо шукану величину:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} = -\gamma \frac{M}{c^2 R}. \quad (6)$$

Підставляючи в (6) числові значення відповідних величин ( $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ ;  $M_s = 1,984 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ;  $R_s = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ), знаходимо:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,984 \cdot 10^{30}}{6,98 \cdot 10^8 (3 \cdot 10^8)^2} = -2,11 \cdot 10^{-6}.$$

Відповідь:  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -2,11 \cdot 10^{-6}$ .

**Задача 9.5.5.** Знайти швидкість ракети 2 (рис.9.6) відносно Землі, якщо ракета 2 запущена з ракети 1 із швидкістю  $u' = 0,60 \text{ с}$ . Отриману відповідь порівняти з обчисленнями за класичною механікою.

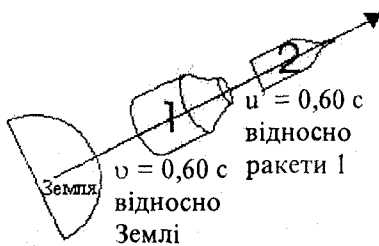


Рис.9.6

**Розв'язок:** Ракета 2 рухається відносно ракети 1 із швидкістю  $u' = 0,60 \text{ с}$ . Ракета 1 летить із швидкістю  $v = 0,60 \text{ с}$  відносно Землі. Обидві швидкості співпадають за напрямком, який ми виберемо за вісь  $x$  ( $i$   $x'$ ). Для знаходження швидкості ракети 2 скористаємось формулою (9.13):

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{0,60\text{с} + 0,60\text{с}}{1 + \frac{0,60\text{с} \cdot 0,60\text{с}}{c^2}} = 0,82\text{с} = 2,647 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Перетворення Галілея дало б :

$$u = u' + v = 0,60\text{с} + 0,60\text{с} = 1,2\text{с},$$

що суперечить другому постулату спеціальної теорії відносності.

**Задача 9.5.6.** Дві частинки рухаються назустріч одна одній з швидкостями  $v_1 = 0,50\text{с}$ ,  $v_2 = 0,75\text{с}$  в лабораторній (нерухомій) системі відліку. Знайти їх відносну швидкість: а) в цій системі відліку; б) в системі відліку, зв'язаній з однією із частинок.

**Розв'язок:** а) Відносна швидкість в лабораторній системі відліку  $u = v_1 + v_2 = 0,50\text{с} + 0,75\text{с} = 1,25\text{с}$ .

б) Для визначення відносної швидкості в системі відліку, пов'язаній з однією із частинок, треба скористатися релятивістською формулою додавання швидкостей:

$$u = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{0,75\text{с} + 0,50\text{с}}{1 + \frac{0,75\text{с} \cdot 0,50\text{с}}{c^2}} = 0,91\text{с}.$$

Відповідь: а)  $u = 1,25\text{с}$ ; б)  $u = 0,91\text{с}$ .

**Задача 9.5.7.** По деякій прямій рухаються в одному напрямку спостерігач (Сп) із швидкістю  $v_1 = \frac{c}{2}$  і попереду нього джерело (Дж) світла

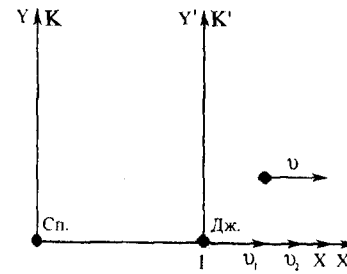


Рис. 9.7

із швидкістю  $v_2 = \frac{3}{4}c$  (рис. 9.7). Власна частота світла рівна  $\nu_0$ . Знайти частоту світла, яку зафіксує спостерігач.

**Розв'язок:** Частота світла, яку зафіксує спостерігач, визначається формулою (9.6) для випадку, коли джерело віддаляється від спостерігача

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v}{c}}. \quad (1)$$

Тут  $v$  – відносна швидкість джерела відносно спостерігача. Для визначення швидкості  $v$  використаємо релятивістську формулу додавання швидкостей (9.13):

$$v = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (2)$$

де  $v_1$  – швидкість руху спостерігача відносно системи  $K$  (спостерігач зв'язаний з рухомою системою координат  $K'$ ),  $v_2$  – швидкість руху джерела відносно системи  $K$ ,  $v$  – швидкість джерела відносно системи  $K$  (відносно спостерігача).

Підставляючи в (2) значення  $v_1 = \frac{c}{2}$  і  $v_2 = \frac{3}{4}c$ , маємо:

$$v = \frac{(3/4)c - (1/2)c}{1 - \frac{(3/8)c^2}{c^2}} = \frac{(1/4)c}{(5/8)} = \frac{2}{5}c.$$

Тоді

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5}}} = v_0 \sqrt{\frac{3}{7}} = 0,65v_0$$

Відповідь:  $v = v_0 \sqrt{\frac{3}{7}} = 0,65v_0$ .

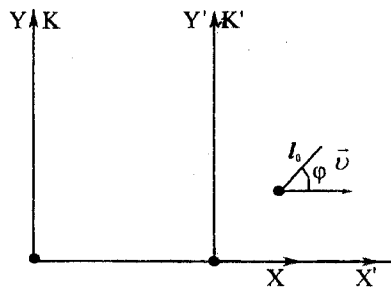


Рис. 9.8

**Задача 9.5.8.** Знайти власну довжину стержня, якщо в лабораторній системі відліку (системі  $K$ ) його швидкість

$$v = \frac{c}{2}, \text{ довжина } l = 1,00 \text{ м і кут між ним і}$$

напрям-ком руху  $\varphi = 45^\circ$ .

**Розв'язок:** В рухомій системі координат маємо:

$$l_{0x'} = x_2' - x_1' = l_0 \cos \varphi; \quad l_{0y'} = y_2' - y_1' = l_0 \sin \varphi, \quad (1)$$

де  $l_{0x'}$  і  $l_{0y'}$  – величини проекцій стержня на напрямки  $x'$  і  $y'$  в рухомій системі координат. В нерухомій системі за перетвореннями Лоренца

$$x_2 - x_1 = (x_2' - x_1') \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad y_2 - y_1 = y_2' - y_1'. \quad (2)$$

Тоді в нерухомій системі маємо:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_0^2 \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + l_0^2 \sin^2 \varphi = l_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi\right). \quad (3)$$

В (3) враховано значення (1). Із (3) отримуємо:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{4c^2} \cos^2 45^\circ}} \text{ м} = 1,07 \text{ м}.$$

Відповідь:  $l_0 = 1,07 \text{ м}$ .

**Задача 9.5.9.** Власний час життя деякої нестабільної частинки  $\tau_0 = 10 \text{ нс}$ . Знайти шлях, який пройде ця частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, де її час життя  $\tau_0 = 20 \text{ нс}$ .

**Розв'язок:** Шлях  $S$ , який пройде частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, дорівнює:

$$S = v\tau, \quad (1)$$

де  $\tau$  – час життя частинки в лабораторній системі відліку,  $v$  – швидкість руху частинки в лабораторній системі відліку, яку знайдемо із співвідношення (9.12):

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2)$$

звідки

$$v = \frac{c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}}{\tau}. \quad (3)$$

Підставляючи значення  $v$  із (3) в (1), маємо:

$$S = c\sqrt{\tau^2 - \tau_0^2} \quad (4)$$

Тоді

$$S = 3 \cdot 10^8 \sqrt{(20 \cdot 10^{-9})^2 - (10 \cdot 10^{-9})^2} \text{ м} = 5,2 \text{ м}.$$

Відповідь :  $S = 5,2 \text{ м}$ .

**Задача 9.5.10.** Дві частинки, що рухаються в лабораторній системі відліку по одній прямій з однаковою швидкістю  $v = \frac{3}{4}c$ , попали в нерухому мішень з інтервалом часу  $\tau = 50 \text{ нс}$ . Знайти власну відстань між частинками до попадання в мішень.

**Розв'язок:** Відстань між частинками в лабораторній системі відліку

$$l = v\tau \quad (1)$$

Крім того,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

Прирівнюючи (1) і (2), маємо :

$$l_0 = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові дані відповідних величин ( $v = 3/4 c$ ;  $\tau = 50 \text{ нс} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ ), отримаємо:

$$l_0 = \frac{(3/4)c \cdot 5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - \frac{(3/4)^2 c^2}{c^2}}} \text{ м} = 5,669 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-8} \text{ с} = 17 \text{ м}.$$

Відповідь :  $l_0 = 17 \text{ м}$ .

**Задача 9.5.11.** Припустимо, що ви вирішили відправитися в космічний політ до зірки, віддаленої від Землі на відстань  $L_0 = 65$  світлових років ( $1 \text{ c.p.} = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ м}$ ). З якою швидкістю необхідно летіти, щоб ця відстань скоротилась на 20 світлових років?

**Розв'язок:** Внаслідок релятивістського скорочення відстань до зірки буде  $L = 45$  світлових років. Справжня відстань  $L_0$  до зірки і релятивістська відстань  $L$  пов'язані співвідношенням:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$

звідки

$$v = c \sqrt{1 - \frac{L^2}{L_0^2}} \quad (2)$$

Підставляючи в (2) числові значення відповідних величин ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $L = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ м} \cdot 45 = 4,257225 \cdot 10^{17} \text{ м}$ ;  $L_0 = 9,4605 \cdot 10^{15} \cdot 65 = 6,149325 \cdot 10^{17} \text{ м}$ ), отримаємо:

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - \frac{(4,257225 \cdot 10^{17})^2}{(6,149325 \cdot 10^{17})^2}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 2,165 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь:  $v = 2,165 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

**Задача 9.5.12.** Піон  $\pi^0$  ( $m = 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ кг}$ ) рухається із швидкістю  $v = 0,8c = 2,4 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Якою є його кінетична енергія? Отриману відповідь порівняти з обчисленнями за класичною механікою.

**Розв'язок:** Кінетичну енергію піона знаходимо за формулою (9.17):

$$T = m(\gamma - 1)c^2 = m \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) c^2 = (4 \cdot 10^{-28} - 2,4 \cdot 10^{-28}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 1,44 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 90 \text{ MeV}.$$

Згідно уявлень класичної механіки мали б:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 10^{-28} (2,4 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 6,9 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} = 43,13 \text{ MeV}.$$

Результат, отриманий за не релятивістською механікою, є невірним.

**Задача 9.5.13.** Скільки енергії виділяється при розпаді піона  $\pi^0$  ( $m = 2,4 \cdot 10^{-28}$  кг), який рухається із швидкістю  $v = 0,8c = 2,4 \cdot 10^8$  м/с, при його перетворенні в електромагнітне випромінювання.

**Розв'язок:** Енергія спокою піона  $\pi^0$

$$W_0 = mc^2 = 2,4 \cdot 10^{-28} (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 2,16 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 135 \text{ MeV}.$$

Така енергія виділилась би, якщо б піон  $\pi^0$  розпався в стані спокою.

Оскільки піон  $\pi^0$  володіє ще і кінетичною енергією

$$T = m(\gamma - 1)c^2 = 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 87,5 \text{ MeV}.$$

(див. задачу 9.5.12), повна енергія, яка виділиться при розпаді піона  $\pi^0$ , буде рівна

$$W = W_0 + T = (2,16 \cdot 10^{-11} + 1,4 \cdot 10^{-11}) \text{ Дж} = 3,56 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 222,5 \text{ MeV}.$$

**Задача 9.5.14.** Знайти швидкість, при якій кінетична енергія частинки рівна її енергії спокою.

**Розв'язок:** Кінетична енергія частинки

$$T = m(\gamma - 1)c^2, \quad (1)$$

де  $m\gamma c^2$  – повна енергія частинки,  $mc^2$  – енергія спокою частинки. Оскільки

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2)$$

то рівняння (1) перепишеться так:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (3)$$

Відповідно умови задачі  $T = mc^2$ . Тоді

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2, \quad (4)$$

звідки

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

**Відповідь:**  $v = 2,6 \cdot 10^8$  м/с.

**Задача 9.5.15.** Космічний корабель пролітає біля Землі з швидкістю  $v = 0,80c$ . Описати, як буде змінюватися довжина метрового стержня, який поволі повертається із вертикального положення в горизонтальне членом екіпажу космічного корабля, з точки зору: а) іншого члена екіпажу космічного корабля; б) спостерігача на Землі.

**Розв'язок:** а) Стержень має довжину  $l_0 = 1,0$  м при всіх орієнтаціях, оскільки відносно спостерігача на борту космічного корабля стержень знаходиться в стані спокою.

б) Довжина метрового стержня змінюється від  $l_0 = 1,0$  м у вертикальному

положенні до  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1,0 \sqrt{1 - (0,80)^2}$  м = 0,60 м в горизонтальному положенні, яке співпадає з напрямком руху корабля.

**Задача 9.5.16.** Чому дорівнює, відповідно лабораторним вимірюванням, середній час життя мюона, що рухається з швидкістю  $v = 0,60c = 1,8 \cdot 10^8$  м/с в лабораторній системі відліку? Середній час життя мюона в стані спокою рівний  $t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с.

**Розв'язок:** Якщо б спостерігач рухався разом з мюоном (мюон знаходився б в стані спокою відносно спостерігача), то середній час життя мюона складав би  $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  с. Для спостерігача в лабораторії мюон живе довше через сповільнення часу. Користуючись формулою (9.12), маємо:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{\sqrt{1 - 0,36}} = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $\tau = 2,75 \cdot 10^{-6}$  с.

**Задача 9.5.17.** Густина енергії тіла, яке знаходиться в стані спокою дорівнює  $w_0$ . Знайти швидкість системи відліку відносно даного тіла, в якій його густина енергії буде на  $\eta = 10\%$  більша за  $w_0$ .

**Розв'язок:** Густина енергії тіла в стані спокою рівна:

$$w_0 = \frac{W_0}{V_0} = \frac{mc^2}{l_0 S}, \quad (1)$$

де  $m$  – маса тіла,  $V_0 = l_0 S$  – об'єм тіла,  $l_0$  – довжина тіла,  $S$  – його поперечний переріз. Нехай тіло рухається в напрямку, паралельному його довжині. Тоді

$$w_0 + \eta w_0 = \frac{W}{V} = \frac{m\gamma c^2}{l S}, \quad (2)$$

де  $l$  – довжина рухомого тіла. Враховуючи, що

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3)$$

отримаємо:

$$w_0 + \eta w_0 = \frac{W}{V} = \frac{m\gamma^2 c^2}{l_0 S} \quad (4)$$

Розділимо почленно вираз (1) на вираз (4):

$$\frac{1}{1 + \eta} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \quad (5)$$

Із (5) маємо:

$$v = c \sqrt{\frac{\eta}{1 + \eta}} = c \sqrt{\frac{0,1}{0,1 + 1}} = 0,3c = 9 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Відповідь:**  $v = 0,3c = 9 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

### 9.6 Задачі для самостійного розв'язування до теми IX

3.2.2f **9.6.1.** Космонавт хоче визначити швидкість, з якою його корабель наближається до Місяця. Він посилає радіосигнал з частотою  $\nu_0 = 5000 \text{ МГц}$  і, порівнюючи його частоту із частотою відбитого сигналу, отримує

різницю в  $\Delta\nu = 86 \text{ кГц}$ . Розрахувати швидкість космічного корабля відносно Місяця (для багатьох цілей можна вважати достатньо точним нерелятивістське рівняння Доплера).

**Відповідь:**  $v = 2,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ .

3.2.2g **9.6.2.** Спектральна лінія, яка в лабораторії має довжину хвилі  $\lambda_0 = 5000 \text{ \AA}$ , спостерігається в спектрі світла від віддаленої галактики на довжині хвилі  $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ : а) яка швидкість віддалення цієї галактики? б) яка відстань до цієї галактики?

**Відповідь:**  $v = 1,2 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ ;  $L = 4 \cdot 10^{24} \text{ м}$ .

**9.6.3.** При відбиванні синусоїдальної хвилі, падаючої перпендикулярно на рухому металічну стінку, її частота змінюється на  $\Delta\nu$ . Початкова частота хвилі  $\nu_0$ . Визначити швидкість стінки.

**Відповідь:**  $v = \frac{\Delta\nu}{2\nu_0 + \Delta\nu}$ .

**9.6.4.** При якій швидкості куб стане паралелепіпедом з товщиною в напрямку руху, вдвічі меншої ширини?

**Відповідь:**  $v \approx 2,56 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

**9.6.5.** Для спостерігача на Землі імпульс світла, надісланий із Землі, досягає Місяця за  $t_0 = 1,21 \text{ с}$ . За який час імпульс досягне Місяця з точки зору спостерігача, який рухається в тому ж напрямку з такими швидкостями: а)  $0,1 c$ ; б)  $0,5 c$ ; в)  $0,9 c$ ?

**Відповідь:**  $t_1 = 1,2 c$ ;  $t_2 = 1,047c$ ;  $t_3 = 0,527c$ ;

3.2.2g **9.6.6.** Атоми, які летять з швидкістю  $v$ , випромінюють в напрямку руху фотони з частотою  $\nu$ . З якою частотою випромінюються фотони в напрямку: а) протилежному руху атомів? б) перпендикулярному руху атомів? Імпульс фотона набагато менший за імпульс атома.

**Відповідь:** а)  $\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}$ ; б)  $\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ .

9.6.7. Світло, що випромінюється з поверхні зірки, має тим меншу частоту, чим масивніша зірка і менший її радіус. Чим пояснюється цей ефект? Чому його називають червоним зміщенням?

3.2.30. 9.6.8. Визначити червоне зміщення для зірки маси  $M$  і радіуса  $R$ , якщо частота на поверхні зірки дорівнює  $\nu$ ; оцінити червоне зміщення для Сонця у видимій ділянці. Які ефекти заважають виявити червоне зміщення у випромінюванні Сонця?

Відповідь:  $\Delta\nu = \frac{\nu M}{Rc^2}$ .

3.2.31. 9.6.9. При якому радіусі зірка маси  $M$  перетвориться в "чорну діру", тобто перестане випромінювати світло? Оцінити цей радіус для Сонця?

Відповідь:  $R < \frac{\gamma M}{c^2}$ ;  $R_S \approx 1,5 \text{ км}$ .

9.6.10. Пучок елементарних частинок рухається із швидкістю  $v = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Середній час життя частинок при цій швидкості рівний  $\tau = 2,50 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Чому дорівнює час життя цих частинок в стані спокою.

Відповідь:  $\tau_0 = 7,81 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ .

9.6.11. З якою швидкістю повинен летіти піон, щоб пролетіти до розпаду  $l = 20 \text{ м}$ ? Середній час життя піона в спокої  $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

Відповідь:  $v = 2,48 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ .

9.6.12. Обчислити кінетичну енергію та імпульс протона ( $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ), який летить із швидкістю  $v = 8,3 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ . Якою буде похибка, якщо скористатися класичними формулами?

Відповідь:  $T = 6,10 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}$ ;  $p = 1,44 \cdot 10^{-19} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ ;

$$\frac{\Delta T}{T} = 5,8\%; \quad \frac{\Delta p}{p} = 3,9\%.$$

## ТЕМА X - на завтра. ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

### 10.1. Програмні питання

Рівноважне випромінювання. Випромінювальна і поглинальна здатності тіл. Абсолютно чорне тіло. Закон Кірхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон зміщення Віна. Розподіл енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла. Формули Віна і Релея-Джінса. Формула Планка та її зв'язок з формулами Віна, Стефана-Больцмана, Релея-Джінса.

### 10.2. Основні поняття, закони і формули

#### Закон Стефана-Больцмана

Енергетична світність абсолютно чорного тіла (енергія, що випромінюється за 1 с одиницею поверхні абсолютно чорного тіла), визначається законом Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4, \quad (10.1)$$

де  $T$  – абсолютна температура,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{К}^4)$  – стала Стефана-Больцмана, яка дорівнює кількості енергії, що випромінюється за одиницю часу (1 с) одним квадратним метром поверхні абсолютно чорного тіла при температурі 1 К.

Якщо випромінююче тіло не є абсолютно чорним (такі тіла називають сірими), то

$$R_e = k_g \sigma T^4, \quad (10.2)$$

де  $k_g$  – коефіцієнт сірості тіла, який показує, яку частину складає енергетична світність даного тіла від енергетичної світності абсолютно чорного тіла, взятого при тій же температурі. Він залежить від природи тіла і його температури. Для деяких тіл значення  $k_g$  дається в довідниках. Коефіцієнт  $k_g$  завжди менший за одиницю ( $k_g < 1$ ). Енергетична світність  $R_e$  зв'язана з випромінювальною здатністю (спектральною густиною енергетичної світності) абсолютно чорного тіла  $r_\lambda$  співвідношенням:

$$R_e = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda. \quad (10.3)$$

Оскільки  $r_\lambda d\lambda = r_\nu d\nu$ , то:

$$R_\nu = \int_0^\infty r_\nu d\nu. \quad (10.4)$$

При цьому  $r_\lambda$  і  $r_\nu$  зв'язані між собою так:

$$r_\lambda = r_\nu \frac{c}{\lambda}, \quad \text{або} \quad r_\nu = r_\lambda \frac{c}{\nu}. \quad (10.5)$$

### Закони Віна

Довжина хвилі, яка відповідає максимальному значенню випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, обернено пропорційна його абсолютній температурі:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (10.6)$$

де  $b = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – стала величина. Вираз (10.6) називають законом зміщення Віна.

І закон Стефана-Больцмана (10.1) і закон зміщення Віна (10.6) можна використати для знаходження температури поверхні Сонця.

Інший закон Віна вказує, що максимальна випромінювальна здатність  $r_{\lambda_{\max}}$  абсолютно чорного тіла пропорційна п'ятому степеню абсолютної температури:

$$r_{\lambda_{\max}} = aT^5, \quad (10.7)$$

де  $a = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^5)$  – стала величина.

Розподіл енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла  
Формула Віна:

$$r_{\lambda,T} = a_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{b_1}{\lambda T}}, \quad (10.8)$$

де  $a_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$  і  $b_1 = 1,439 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$  – сталі величини.

Формула Релея-Джінса:

$$r_{\lambda,T} = 2\pi c k T \lambda^{-4}, \quad (10.9)$$

де  $k$  – стала Больцмана,  $c$  – швидкість світла.

### Формула Планка:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (10.10)$$

або

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (10.11)^*$$

де  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – стала Планка,  $\lambda$  – довжина хвилі,  $\nu$  – її частота,  $c$  – швидкість світла,  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура.

### 10.3. Контрольні запитання

**10.3.1.** В чому основна відмінність теплового випромінювання від інших видів випромінювання: фотолюмінесценції, хемілюмінесценції, електролюмінесценції тощо.

**10.3.2.** За яких умов теплове випромінювання є термодинамічно рівноважним? З'ясуйте основні властивості рівноважного випромінювання.

**10.3.3.** Які тіла називають абсолютно чорними? Чи можна Сонце вважати абсолютно чорним тілом? Якщо можна, то чому?

**10.3.4.** Сформулюйте закон Кірхгофа та з'ясуйте фізичний зміст універсальної функції Кірхгофа.

**10.3.5.** Як випромінювальна здатність тіла зв'язана з його енергетичною світністю?

**10.3.6.** Як енергетична світність абсолютно чорного тіла залежить від температури?

**10.3.7.** Як змінюється положення максимумів на кривих спектральної густини енергетичної світності  $r_\nu = f(\nu)$  або  $r_\lambda = f(\lambda)$  із зміною температури абсолютно чорного тіла?

**10.3.8.** Два однакові тіла мають одну і ту ж температуру, але одне із них знаходиться в оточенні більш холодних тіл, ніж друге. Чи будуть за цих умов рівними потужності випромінювання цих тіл?

\* Для переходу від (10.10) до (10.11) необхідно замінити в (10.10) довжину хвилі  $\lambda$  через  $c/\nu$  і вираз, який отримується, помножити на  $c/\nu^3$ .

**10.3.9.** Якщо всі тіла випромінюють енергію, то чому ми не бачимо в темряві?

**10.3.10.** Яке припущення дозволило Планку отримати правильний вигляд універсальної функції спектрального розподілу густини енергії електромагнітного випромінювання?

**10.3.11.** В якому випадку квантовий характер обміну енергією між тілами переходить в класичний?

**10.3.12.** Чи випромінює нитка лампи розжарювання при температурі 2500 K таке ж біле світло, як і Сонце при температурі 6000 K? Пояснити.

**10.3.13.** Яку роль в сучасній фізиці відіграє стала Планка?

**10.3.14.** Як змінюється колір нагрітого тіла в міру підвищення його температури?

**10.3.15.** Чи може радіаційна температура бути більшою за істинну?

#### 10.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

При розв'язуванні задач слід мати на увазі, що енергетична світність  $R_e$  тіла вимірюється енергетичним потоком  $\Phi_e$ , який випромінюється одиницею площі світної поверхні, тобто

$$R_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{1}{S} \frac{dW_e}{dt}, \quad (10.12)$$

де  $dW_e$  – енергія, яка випромінюється поверхнею  $S$  за час  $dt$ .

Спектральна густина енергетичної світності (випромінювальної здатності)  $r_{\nu,T}$ , яка характеризує розподіл енергії в спектрі випромінювання тіла за частотами, визначається співвідношеннями:

$$r_{\nu,T} = \frac{dR_e}{d\nu}, \quad R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu. \quad (10.13)$$

Тут  $dR_e$  – енергетична світність, що припадає на інтервал частот від  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ . Для визначення спектральної густини енергетичної світності користуються формулою Планка (10.10) і (10.11).

Крім формул (10.12) і (10.13) при розв'язуванні задач користуються формулами (10.1), (10.6) і (10.7). Перша визначає енергетичну світність  $R_e$ , другі дві визначають довжину хвилі  $\lambda_{\max}$ , що припадає на максимум випромінювання, та максимальну випромінювальну здатність  $r_{\max}$ .

Тут слід відмітити, що наведені формули справедливі лише для абсолютно чорного тіла. Для нечорних тіл, замість (10.1), використовують формулу (10.2).

Зауважимо, що у фізичній літературі не існує єдиної термінології щодо величин, які характеризують теплове випромінювання. Так, енергетичну світність  $R_{e,T}$  ще часто називають інтегральною світністю, інтегральною випромінювальною здатністю або сумарною потужністю випромінювання. Спектральну густина енергетичної світності часто називають випромінювальною здатністю.

#### 10.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 10.5.1.** Максимум спектральної густини енергетичної світності Сонця відповідає довжині хвилі  $\lambda_{\max} = 5000 \text{ \AA}$ . Приймаючи Сонце за абсолютно чорне тіло, визначити: а) енергетичну світність Сонця; б) потік енергії, що випромінюється Сонцем; в) масу електромагнітних хвиль (всіх довжин), випромінюваних Сонцем за 1 с; г) оцінити час, протягом якого маса Сонця зменшиться на 1 %.

**Розв'язок:** а) Енергетична світність  $R_e$  абсолютно чорного тіла виражається законом Стефана-Больцмана (10.1):

$$R_e = \sigma T^4, \quad (1)$$

де  $\sigma$  – стала Стефана-Больцмана,  $T$  – абсолютна температура випромінюючої поверхні.

Температура може бути визначена із закону зміщення Віна (10.6):

$$T\lambda_{\max} = b, \quad (2)$$

де  $\lambda_{\max}$  – довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла,  $b$  – стала Віна.

Виразивши із закону Віна (2) температуру  $T$  і підставивши її в (1), отримуємо:

$$R_e = \sigma \left( \frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^4. \quad (3)$$

Підставивши в (3) числові значення відповідних величин ( $b = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}$ ;  $\lambda_{\max} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$ ) і зробивши обрахунки, отримуємо:

$$R_e = 6,4 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2 = 64 \text{ МВт/м}^2.$$



б) Потік енергії  $\Phi_e$ , який випромінюється Сонцем, дорівнює добутку енергетичної світності Сонця  $R_e$  на площу  $S$  його поверхні:

$$\Phi_e = R_e S = 4\pi r_s^2 R_e, \quad (4)$$

де  $r_s$  – радіус Сонця.

Зробивши підстановку числових значень відповідних величин ( $r_s = 696000$  км і  $R_e = 64$  МВт/м<sup>2</sup>) у формулу (4), знайдемо, що

$$\Phi_e = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

в) Маса електромагнітних хвиль (всіх довжин), випромінюваних Сонцем за 1 с, визначимо, використавши закон пропорційності маси і енергії:

$$W = mc^2. \quad (5)$$

Енергія електромагнітних хвиль, випромінених за час  $t$ , дорівнює добутку потоку енергії (потужності випромінювання)  $\Phi_e$  на час  $t$ :

$$W = \Phi_e t. \quad (6)$$

Тоді із (5) і (6) маємо:

$$m = \frac{\Phi_e t}{c^2}, \quad (7)$$

звідки:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \frac{\Phi_e}{c^2}}. \quad (8)$$

Підставляючи в (8) числові значення відповідних величин, отримаємо:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3,9 \cdot 10^{26} \text{ кДж}}{(3 \cdot 10^8)^2 \text{ с}} = 4 \cdot 10^9 \text{ кг/с.}$$

г) Для того, щоб оцінити час, протягом якого маса Сонця зменшиться на 1 %, треба спочатку знайти масу  $M_1$ , що складає 1 % від маси  $M_s$  Сонця ( $M_s = 2 \cdot 10^{30}$  кг):

$$M_1 = \frac{M_s}{100} = \frac{2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{100} = 2 \cdot 10^{28} \text{ кг.}$$

Щоб знайти час  $t$ , на протязі якого Сонце втратить 1 % своєї маси, необхідно масу  $M_1$  розділити на масу, яку втрачає Сонце за 1 с, тобто на  $dm/dt$ :

$$t = \frac{M_1}{\frac{dm}{dt}} = \frac{2 \cdot 10^{28} \text{ кг} \cdot \text{с}}{4 \cdot 10^9 \text{ кг}} = 0,5 \cdot 10^{19} \text{ с.}$$

Перетворивши час в роки, отримаємо, що  $t = 1,6 \cdot 10^{11}$  років.

Відповідь:  $R_e = 64$  МВт/м<sup>2</sup>;  $\Phi_e = 3,9 \cdot 10^{26}$  Вт,  $\frac{dm}{dt} = 4 \cdot 10^9$  кг/с;  
 $t = 1,6 \cdot 10^{11}$  років.

**Задача 10.5.2.** Радіус Сонця  $r_s = 6,96 \cdot 10^5$  км, радіус орбіти Меркурія  $R_{\text{Мс}} = 5,79 \cdot 10^7$  км і Марса –  $R_{\text{Мс}} = 2,28 \cdot 10^8$  км. Температура поверхні Сонця дорівнює приблизно  $T_s = 6000$  К. Використовуючи закони теплового випромінювання, оцінити середні температури Меркурія і Марса.

**Розв'язок:** Можна вважати, що промені Сонця падають на планету паралельно (рис. 10.1), оскільки радіуси орбіт планет значно більші за радіус Сонця. Обчислимо інтенсивність сонячного випромінювання на орбіті планети. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом, повний потік енергії  $\Phi_e$  за одиницю часу з усієї поверхні Сонця дорівнює:

$$\Phi_e = \sigma T_s^4 S_s = \sigma T_s^4 4\pi r_s^2, \quad (1)$$

де  $T_s$  – температура поверхні Сонця,  $S_s$  – площа поверхні Сонця,  $r_s$  – радіус Сонця.

Вся випромінена Сонцем енергія проходить через сферу радіуса  $R$ , де  $R$  – радіус орбіти планети. Оскільки сонячне випромінювання падає на цю сферу нормально і розподіляється по ній рівномірно, то

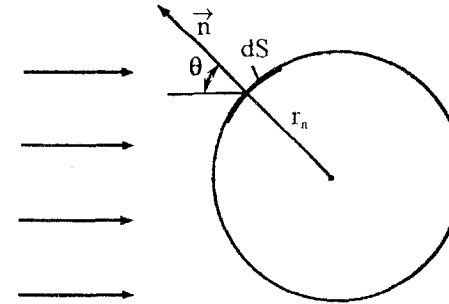


Рис. 10.1

$$\left[ \frac{dm}{dt} \right] = \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{с}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Дж/с}}{\text{м}^2 \text{с}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{м/с}}{\text{м}^2 \text{с}^2} \right] = \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{\text{м}^2 \text{с}^2} \right] = \left[ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \right].$$

$$\Phi_e = \sigma T_S^4 4\pi r_S^2 = I_0 4\pi R^2, \quad (2)$$

де  $I_0$  – інтенсивність сонячного випромінювання на орбіті планети. Із (2) знаходимо:

$$I_0 = \sigma T_S^4 \left( \frac{r_S}{R} \right)^2. \quad (3)$$

Енергія, яку поглинає планета за одиницю часу

$$R' = \alpha I_0 \int \cos \theta ds = \alpha I_0 \pi r_p^2, \quad (4)$$

де  $\alpha$  – поглинальна здатність речовини планети,  $r_p$  – радіус планети,  $\pi r_p^2$  – видима площа планети.

Далі, відповідно закону Стефана-Больцмана (10.2), випромінювана планетою енергія  $R''$  дорівнює

$$R'' = \alpha \sigma T_p^4 4\pi r_p^2, \quad (5)$$

де  $T_p$  – температура планети. Якщо знехтувати всіма іншими джерелами теплової енергії, вважаючи, що наступила теплова рівновага, то  $R' = R''$ . Тоді

$$I_0 = \sigma T_p^4. \quad (6)$$

Прирівнюючи праві частини (3) і (6) та розв'язуючи їх відносно  $T_p$ , знаходимо:

$$T_p = T_S \sqrt{\frac{r_S}{R}}. \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові дані відповідних величин, маємо, що:  $T_{Mc} = 657 \text{ K}$ ,  $T_{Ms} = 331 \text{ K}$ .

Відповідь:  $T_{Mc} = 657 \text{ K}$ ,  $T_{Ms} = 331 \text{ K}$ .

**Задача 10.5.3.** Визначити довжину хвилі, яка відповідає максимуму енергії випромінювання лампи розжарювання. Нитка розжарювання лампи має довжину  $l = 15 \text{ см}$  і діаметр  $d = 0,03 \text{ мм}$ . Потужність, яку споживає лампа  $P = 10 \text{ Вт}$ . Нитка лампи випромінює як сіре тіло з коефіцієнтом випромінювання  $k_g = 0,7$ . 20 % енергії, яка споживається, передається іншим тілам внаслідок теплопровідності і конвекції.

Розв'язок: За законом Віна (10.6)

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}. \quad (1)$$

Температуру нитки знайдемо, скориставшись законом Стефана-Больцмана (10.2):

$$R_e = k_g \sigma T^4, \quad (2)$$

Потік енергії, що випромінюється ниткою лампи, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S, \quad (3)$$

де  $S = \pi dl$  – площа нитки.

При врахуванні (2) формула (3) набуде вигляду:

$$\Phi_e = \pi dl k_g \sigma T^4. \quad (4)$$

З другого боку, потік енергії, що випромінюється ниткою, дорівнює

$$\Phi_e = 0,8P, \quad (5)$$

де  $P$  – потужність, яку споживає лампа.

Прирівнюючи праві частини (4) і (5), маємо:

$$T = \sqrt[4]{\frac{0,8P}{\pi dl k_g \sigma}}. \quad (6)$$

Враховуючи (6), формула (1) переписеться так:

$$\lambda_{\max} = b \sqrt[4]{\frac{\pi dl k_g \sigma}{0,8P}}. \quad (7)$$

Підставивши числові дані відповідних величин ( $d = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ;  $l = 0,15 \text{ м}$ ;  $k_g = 0,7$ ;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $P = 10 \text{ Вт}$ ) у (7), маємо:

$$\lambda_{\max} = 2,898 \cdot 10^{-3} \sqrt[4]{\frac{3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,15 \cdot 0,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}{0,8 \cdot 10}} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Відповідь:  $\lambda_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

**Задача 10.5.4.** Мідну кульку діаметром  $d = 12 \text{ см}$  помістили у відкачану посудину, температура стінок якої підтримується близькою до абсолютного нуля. Початкова температура кульки  $T_0 = 300 \text{ К}$ . Вважаючи поверхню кульки абсолютно чорною, знайти через який час її температура зменшиться в  $\eta = 2$  рази.

**Розв'язок:** Зміна внутрішньої енергії кульки при охолодженні

$$dW = -Cm dT, \quad (1)$$

де  $C$  – питома теплоємність речовини кульки,  $m$  – її маса,  $dT$  – зміна температури.

Зміну внутрішньої енергії кульки можна виразити і через енергетичну світність  $R_e$ :

$$dW = R_e S dt, \quad (2)$$

де  $S$  – площа поверхні кульки,  $dt$  – час.

Якщо врахувати, що

$$S = \pi d^2, \quad (3)$$

а

$$R_e = \sigma T^4, \quad (4)$$

то формула (2) набуде вигляду:

$$dW = \pi \sigma T^4 d^2 dt. \quad (5)$$

Прирівнявши праві частини (1) і (5), маємо:

$$-Cm dT = \pi \sigma T^4 d^2 dt. \quad (6)$$

Розділимо змінні:

$$-\frac{dT}{T^4} = \frac{\pi \sigma d^2 dt}{Cm}. \quad (7)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{1}{3T^3} = \frac{\pi \sigma d^2}{Cm} t + A, \quad (8)$$

де  $A$  – стала інтегрування.

З початкових умов ( $t = 0$ ,  $T = T_0$ ) знаходимо сталу інтегрування:

$$A = \frac{1}{3T_0^3}. \quad (9)$$

Тоді

$$\frac{1}{3T^3} = \frac{\pi \sigma d^2}{Cm} t + \frac{1}{3T_0^3}. \quad (10)$$

Із (10) знаходимо  $t$ :

$$t = \frac{\left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) Cm}{3\pi \sigma d^2}. \quad (11)$$

Враховуючи, що

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{8}\rho, \quad \text{а} \quad \frac{T_0}{T} = \eta,$$

остаточно отримаємо:

$$t = \frac{(\eta^3 - 1)C\rho d}{18\sigma T_0^3}. \quad (12)$$

Підставляючи в (11) числові значення відповідних величин ( $\eta = 2$ ;  $T_0 = 300 \text{ K}$ ;  $C = 0,39 \cdot 10^3 \text{ Дж/л(кг}\cdot\text{K)}$ ;  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $d = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{K}^2)$ ) і зробивши обчислення, отримаємо  $t = 3$  год.

**Відповідь:**  $t = 3$  год.

**Задача 10.5.5.** Є дві порожнини (рис. 10.2) з малими отворами однакових діаметрів  $d = 1,0 \text{ см}$  і абсолютно відбиваючими зовнішніми поверхнями. Відстань між отворами  $l = 10 \text{ см}$ . В порожнині 1 підтримується стала температура  $T_1 = 1700 \text{ K}$ . Знайти температуру, яка встановиться в порожнині 2.

**Розв'язок:** Обидві порожнини можна вважати абсолютно чорними тілами. В середину другої порожнини через отвір площею  $S$  буде попадати випромінювання доти, поки не встановиться температурна рівновага. В подальшому скільки енергії друга порожнина поглине в першій, стільки

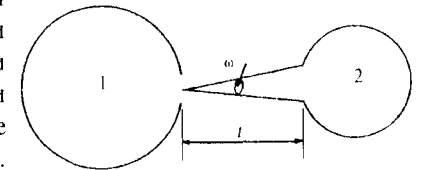


Рис. 10.2

вона і випромінить. Величина енергетичного потоку  $\Phi_e$ , що падає на отвір другої порожнини, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S, \quad (1)$$

де  $R_e$  – енергетична світність другої порожнини,  $S$  – площа отвору. За визначенням, енергетична сила світла

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\omega}, \quad (2)$$

звідки

$$\Phi_e = I_e \omega, \quad (3)$$

де  $\omega$  – тілесний кут (див. рис.10.2).

Враховуючи, що

$$\omega = \frac{S}{r^2}, \quad \text{а} \quad R_e = \sigma T_2^4, \quad (4)$$

і прирівнюючи праві частини рівностей (1) і (3), отримуємо:

$$\frac{S}{r^2} I_e = \sigma T_2^4 S, \quad (5)$$

або

$$\frac{I_e}{\sigma r^2} = T_2^4, \quad (6)$$

де  $I_e$  – енергетична сила випромінювання першої порожнини.

Енергетичну світність першої порожнини можна виразити через її енергетичну яскравість:

$$R_{e1} = \pi B_e = \pi \frac{I_e}{S} = \frac{\pi I_e}{\pi r^2} = \frac{I_e}{r^2}, \quad (7)$$

де  $B_e = \frac{I_e}{S}$  – енергетична яскравість,  $r$  – радіус отвору.

З другого боку

$$R_{e1} = \sigma T_1^4. \quad (8)$$

Прирівнюючи праві частини (7) і (8), маємо:

$$I_e = \sigma T_1^4 r^2 = \sigma T_1^4 \frac{d^2}{4}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) рівність (6) набуде вигляду:

$$T_2^4 = T_1^4 \frac{d^2}{4l^2}, \quad (10)$$

і остаточно

$$T_2 = T_1^4 \sqrt{\frac{d^2}{4l^2}} = 1700^4 \sqrt{\frac{10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}}} K = 380 K. \quad (10, a)$$

Відповідь:  $T_2 = 380 K$ .

**Задача 10.5.6.** Скільки фотонів за 1 с буде випромінювати 1 см<sup>2</sup> поверхні абсолютно чорного тіла, нагрітого до температури  $T = 2400 K$ , якщо середня енергія кванта випромінювання рівна  $2,75kT$ , де  $k$  – стала Больцмана.

**Розв'язок:** Кількість фотонів, що випромінюються 1 см<sup>2</sup> поверхні абсолютно чорного тіла за 1 с знайдемо, поділивши енергію, що випромінюється даною поверхнею

$$W_e = R_e S = \sigma T^4 S, \quad (1)$$

( $R_e = \sigma T^4$  – енергетична світність поверхні,  $S$  – площа поверхні) на енергію фотона, яка згідно умови задачі дорівнює

$$\varepsilon_f = 0,75kT. \quad (2)$$

Тоді

$$n = \frac{W_e}{\varepsilon_f} = \frac{\sigma T^4 S}{0,75kT} = \frac{\sigma T^3 S}{0,75k}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові значення відповідних величин ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $T = 2400 K$ ;  $S = 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}/\text{К}$ ) і зробивши обчислення, маємо:

$$n = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 2400^3 \cdot 10^{-4}}{0,75 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ м}^2 \cdot \text{с}} = 7,6 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} = 7,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Відповідь:  $n = 7,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .

**Задача 10.5.7.** 1) Обчислити число квантів  $n(\lambda)$  в одиниці об'єму на інтервал довжин хвиль  $d\lambda$  при  $T = 5800 K$  і довжинах хвиль  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ ,  $\lambda = 5\lambda_{\text{max}}$ ,  $\lambda = 0,2\lambda_{\text{max}}$ , де  $\lambda_{\text{max}}$  відповідає максимальному значенню густини енергії  $r(\lambda)$ .

2) Обчислити повне число квантів в одиниці об'єму при температурах  $T_1 = 6000 K$  і  $T_2 = 600 K$ .

**Розв'язок:** 1) Число квантів  $n(\lambda)$  в інтервалі  $d\lambda$  знайдемо, якщо поділимо об'ємну густину енергії випромінювання, що припадає на цей інтервал довжин хвиль

$$\rho(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{k\lambda T} - 1}, \quad (1)$$

на енергію кванта

$$\varepsilon_f = \frac{hc}{\lambda} \quad (2)$$

Тоді матимемо:

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \quad (3)$$

Для зручності обчислень введемо в формулу (3) довжину хвилі  $\lambda_{\max}$ , яка задовільняє закону зміщення Віна:

$$\beta = \frac{hc}{kT\lambda_{\max}} = 4,965, \quad \text{або} \quad \lambda_{\max}T = b = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}.$$

Тоді

$$n(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda_{\max}^4} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda}\right)^4 \frac{1}{e^{\frac{\beta\lambda_{\max}}{\lambda}} - 1} = 8\pi \left(\frac{T}{b}\right)^4 \frac{1}{e^{\frac{\beta\lambda_{\max}}{\lambda}} - 1} \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda}\right)^4 \quad (4)$$

Підставляючи в (4) значення  $b = 2,896 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ;  $\beta = 4,965$ ;  $T = 5800 \text{ К}$  і задані довжини хвиль (див. умову задачі), знаходимо:

$$n(\lambda_{\max}) = 2,83 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-4}; \quad n(5\lambda_{\max}) = 3,79 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-4}; \quad n(0,2\lambda_{\max}) = 4,16 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-4}.$$

2) Для обчислення повного числа квантів використаємо формулу (3), записавши її через колову (циклічну) частоту  $\omega$ , маючи на увазі, що

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega \quad (\text{див. [2], формули (1.4) і (1.5)}):$$

$$n(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \quad (5)$$

звідки повне число квантів дорівнює

$$n(T) = \int_0^\infty n(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \quad (6)$$

В (6) зроблено заміну:  $\frac{\hbar\omega}{kT} = x$ ;  $\omega = \frac{xkT}{\hbar}$ ;  $d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$ .

Інтеграл в (6) дорівнює (див. [20]):

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2 \cdot 1,202.$$

Отже

$$n(T) = \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ ;  $T = 5800 \text{ К}$ ;  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ), знаходимо:  $n(T) = 4,38 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ;  $n(T_2) = 4,38 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$ .

### 10.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми X

**10.6.1.** Обчисліть інтегральну випромінювальну здатність  $R_e$  абсолютно чорного тіла, скориставшись формулою Планка для спектральної випромінювальної здатності  $r_{\nu,T}$ .

Відповідь:  $R_e = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$ .

**10.6.2.** Скориставшись результатом попередньої задачі, обчисліть сталу в законі Стефана-Больцмана.

**10.6.3.** На рис. 10.3 подано графік розподілу енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла (закон Планка). а) Що показує абсциса, яка відповідає максимуму графіка? б) Чому дорівнює загальна площа, обмежена графіком і віссю абсцис? в) Чому дорівнює площа заштрихованої на рисунку (з точністю до нескінченно малих вищого порядку) фігури?

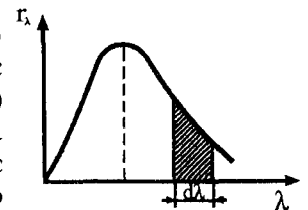


Рис.

**3.1.32. 10.6.4.** а) Визначити інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла у видимій частині спектра, тобто для інтервалу довжин хвиль між  $\lambda_1 = 4000 \text{ \AA}$  і  $\lambda_2 = 8000 \text{ \AA}$  при температурі  $T = 2000 \text{ К}$ . б) Яку частину загальної інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла при заданій температурі становить випромінювання цієї частини

спектра?

Відповідь: а)  $I_{\lambda} \Delta \lambda = 1,98 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/м}^2 \cdot \text{с}$ ; б)  $\eta = 2 \%$ .

10.6.5. Вивести закон зміщення Віна із формули Планка

$$r_{\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda T} - 1}$$

3.2.33 10.6.6. Точкове джерело потужністю  $P = 100 \text{ Вт}$  випромінює у виглядісвітла з середньою довжиною хвилі  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  10 % підведеної потужності. Обчислити кількість фотонів, які випромінює це джерело за  $t = 1 \text{ с}$ .Відповідь:  $N = \frac{Pk\lambda t}{hc} = 3 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ , де  $k = 10 \%$ .10.6.7. Користуючись формулою Планка, визначити сталі в законах Стефана-Больцмана і Віна:  $R_e = \sigma T^4$ ;  $\lambda_{\max} T = b$ , тобто виразити їх через сталі  $h$ ,  $k$  і  $c$ .10.6.8. Визначити середнє число  $n$  фотонів в одиниці об'єму порожнини, заповненої рівноважним тепловим випромінюванням при температурі  $T$ .Відповідь:  $n = 20,5 \cdot T^3$ .  

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot S} = \frac{W}{t \cdot S}; \quad R_e = \delta \cdot \pi^4 \Rightarrow \delta \cdot \pi^4 = \frac{W}{t \cdot S} \Rightarrow \pi^4 = \frac{W}{\delta t S}$$
3.2.34 10.6.9. Яка температура печі, якщо відомо, що із отвору в ній площею  $S = 4 \text{ см}^2$  випромінюється за  $t = 1 \text{ с}$  енергія  $W = 22,7 \text{ Дж}$ ? Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.Відповідь:  $T \approx 1000 \text{ К}$ .3.2.35 10.6.10. Знайти потужність випромінювання абсолютно чорної кулі, яка знаходиться в кімнаті при температурі  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Радіус кулі  $r = 10 \text{ см}$ .Відповідь:  $P = 52,5 \text{ Вт}$ .3.2.36 10.6.11. Є два абсолютно чорні джерела теплового випромінювання. Температура одного із них  $T_1 = 2500 \text{ К}$ . Знайти температуру другого джерела, якщо довжина хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності, на  $\Delta \lambda = 0,50 \text{ мкм}$  більша за довжину хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності першого джерела.Відповідь:  $T_2 = \frac{bT_1}{b + T_1 \Delta \lambda} = 1750 \text{ К}$ .3.2.37 10.6.12. Енергетична світність абсолютно чорного тіла рівна  $R_e = 3,0 \text{ Вт/см}^2$ . Визначити довжину хвилі, яка відповідає максимуму випромінювальної здатності цього тіла.Відповідь:  $\lambda_{\max} = 3,4 \text{ мкм}$ .3.2.38 10.6.13. Порожнина об'ємом  $V = 1,0 \text{ л}$  заповнена тепловим випромінюванням при температурі  $T = 1000 \text{ К}$ . Знайти: а) теплоємність  $C_V$ ; б) ентропію  $S$  цього випромінювання.Відповідь:  $C_V = \frac{16\sigma T^3 V}{c} = 3,10^9 \text{ Дж/К}$ ;  $S = \frac{16\sigma T^3 V}{3c}$ , де  $c$  – швидкість

світла.

3.2.39 10.6.14. У випромінюванні абсолютно чорного тіла максимум випромінювальної здатності припадає на довжину хвилі  $\lambda_{\max} = 680 \text{ нм}$ . Яку енергію випромінює це тіло площею  $S = 1 \text{ см}^2$  за  $t = 1 \text{ с}$  і яка втрата його маси за  $t = 1 \text{ с}$  внаслідок випромінювання?Відповідь:  $W = \frac{\sigma b^4 S t}{\lambda_{\max}^4} = 1870 \text{ Дж}$ ;  $\Delta m = \frac{\sigma b^4 S t}{c^2 \lambda_{\max}^4} = 20,8 \text{ пг}$ .10.6.15. Із отвору в печі площею  $S = 10,0 \text{ см}^2$  випромінюється  $W = 250 \text{ кДж}$  енергії за  $t = 1 \text{ хв}$ . В якій ділянці спектра лежить довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювальної здатності?Відповідь:  $\lambda_{\max} = b \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma S t}} = 1 \text{ мкм}$  – інфрачервона ділянка.3.2.40 10.6.16. Залізна куля діаметром  $d = 10 \text{ см}$  нагріта до температури  $T_1 = 1500 \text{ К}$  охолоджується на відкритому повітрі. Через який час її температура знизиться до  $T_2 = 100 \text{ К}$ ? Коефіцієнт сірості заліза прийняти рівним  $k_g = 0,5$ . Теплопровідність повітря знехтувати.Відповідь:  $t = \frac{C \rho d}{4 k_g \sigma} \left( \frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right) = 1503 \text{ с} = 25 \text{ хв } 3 \text{ с}$ , де  $C$  – питома теплоємність заліза.

10.6.17. В електричній лампі вольфрамова нитка діаметром  $d = 0,05 \text{ мм}$  розжарюється при роботі лампи до температури  $T_1 = 2700 \text{ К}$ . Через який час після вимкнення струму температура нитки впаде до  $T_2 = 600 \text{ К}$ ? Коефіцієнт сірості вольфраму  $k_g = 0,3$ ; енергія передається тільки випромінюванням.

$$\text{Відповідь: } t = \frac{\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right) \rho d C}{12 k_g \sigma} = 0,02 \text{ с.}$$

10.6.18. В чорну тонкостінну металічну посудину, яка має форму куба, налита вода масою  $1 \text{ кг}$  при температурі  $t_1 = 50^\circ \text{C}$ , яка повністю заповнює посудину. Визначити час охолодження посудини до температури  $t_2 = 10^\circ \text{C}$ , якщо посудина поміщена в чорну порожнину, температура стінок якої близька до абсолютного нуля.

$$\text{Відповідь: } t = 6,2 \cdot 10^4 \text{ с.}$$

10.6.19. Абсолютно чорна пластинка, яка знаходиться поблизу Землі за межами її атмосфери, освітлюється променями, які падають на неї перпендикулярно. Яка встановиться температура пластинки, якщо сонячна стала  $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$ ?

$$\text{Відповідь: } T = \sqrt[4]{\frac{C}{\sigma}} = 396 \text{ К.}$$

10.6.20. Знаючи сонячну сталу  $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$  і вважаючи, що Сонце випромінює як абсолютно чорне тіло, визначити температуру його випромінюючої поверхні.

$$\text{Відповідь: } T^4 = \sqrt[4]{\frac{CR^2}{\sigma^2}} = 5800 \text{ К, де } R - \text{ середня відстань від Землі до}$$

Сонця,  $r$  – радіус Сонця.

3. д. ч. 10.6.21. Стальна болванка, температура якої  $t = 727^\circ \text{C}$ , випромінює за  $1 \text{ с}$   $W = 4 \text{ Дж}$  енергії з поверхні  $S = 1 \text{ см}^2$ . Визначити відношення енергетичних світностей стальної болванки  $R_1$  і абсолютно чорного тіла  $R_2$  при даній температурі, вважаючи, що воно однакове для всіх хвиль.

$$\text{Відповідь: } \frac{R_1}{R_2} = 0,7.$$

## ТЕМА XI ФОТОЕЛЕКТРИЧНИЙ ЕФЕКТ

### 11.1. Програмні питання

Закони фотоелектричного ефекту. Фотоелектричний ефект в металах, напівпровідниках і діелектриках. Гіпотеза світлових квантів. Внутрішній фотоелектричний ефект. Селективний фотоелектричний ефект. Залежність величини фотоструму від поляризації. Фотоелементи і фотопомножувачі.

### 11.2. Основні поняття, закони і формули

Явище виривання під дією світла з речовини електронів або переведення їх із валентної зони в зону провідності називають фотоелектричним ефектом.

Закони фотоелектричного ефекту:

1) При незмінному спектральному складі світла фотострум насичення є прямо пропорційним освітленості катода (світловому потоку, що падає на катод). Іншими словами, число фотоелектронів, які вириваються з катода за  $1 \text{ с}$ , прямо пропорційне потужності (інтенсивності) падаючого випромінювання.

2) Максимальна кінетична енергія вирваних світлом електронів лінійно залежить від частоти світла і не залежить від його інтенсивності.

3) Для кожної речовини існує максимальна довжина хвилі  $\lambda_{\text{max}}$  світла (мінімальна частота  $\nu_{\text{min}}$ ), при якій ще існує фотоелектричний ефект.

Рівняння Ейнштейна для фотоелектричного ефекту:

$$\frac{m v_{\text{max}}^2}{2} = h\nu - A, \quad (11.1)$$

де  $\frac{m v_{\text{max}}^2}{2}$  – максимальна кінетична енергія вирваних фотоелектронів,

$A$  – робота виходу,  $h\nu$  – енергія фотона,  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – стала Планка.

Червона межа фотоелектричного ефекту

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{ch}{A}, \quad \text{або} \quad \nu_{\text{min}} = \frac{A}{h}. \quad (11.2)$$

Формула для експериментального визначення сталої Планка:

$$h = \frac{eU_3}{\nu - \nu_{\text{min}}}, \quad (11.3)$$

де  $eU_3 = \frac{mv_{\max}^2}{2}$  – максимальна кінетична енергія вирваних фотоелектронів,  $U_3$  – затримуюча різниця потенціалів,  $e$  – заряд електрона,  $\nu$  – частота падаючого фотона,  $\nu_{\min}$  – гранична частота.

#### Квантовий вихід зовнішнього фотоелектру

$$\eta = \frac{n_e}{n_f}, \quad (2.4)$$

де  $n_e$  – кількість вирваних фотоелектронів,  $n_f$  – кількість квантів світла, які спричиняють фотоелектр.

### 11.3. Контрольні запитання

11.3.1. Яке явище називають фотоелектром? Який струм називають фотострумом?

11.3.2. Сформулюйте закони фотоелектру та поясніть їх на основі квантових уявлень про природу світла.

11.3.3. Наведіть схему експериментальної установки для вивчення явища фотоелектру. З'ясуйте суть хоча б одного із методів визначення максимальної швидкості фотоелектронів.

11.3.4. Хто, коли і як вперше виміряв відношення заряду до маси  $e/m$  частинок, що звільняються при опроміненні речовини світлом? Чому дорівнює це відношення?

11.3.5. За допомогою яких експериментів можна продемонструвати, що під дією світла із речовини вириваються електрони? Опишіть їх. Які для цього необхідні прилади і матеріали?

11.3.6. Як із дослідів фотоелектру визначити сталу Планка? Які для цього потрібно зробити вимірювання?

11.3.7. Чим пояснюється наявність фотоструму насичення фотоелементів із зовнішнім фотоелектром? Від чого залежить величина фотоструму насичення?

11.3.8. Що називають роботою виходу і від чого вона залежить?

11.3.9. Сформулюйте основні ідеї А.Ейнштейна, які лягли в основу теорії фотоелектру?

11.3.10. Запишіть рівняння Ейнштейна для фотоелектру і поясніть його.

11.3.11. Поясніть, чому фотоелектр вказує на квантову природу світла.

11.3.12. Що називають червоною межею фотоелектру? Як її визначити?

11.3.9. Сформулюйте основні ідеї А.Ейнштейна, які лягли в основу теорії фотоелектру?

11.3.10. Запишіть рівняння Ейнштейна для фотоелектру і поясніть його.

11.3.11. Поясніть, чому фотоелектр вказує на квантову природу світла.

11.3.12. Що називають червоною межею фотоелектру? Як її визначити? Поясніть походження назви.

11.3.13. Чому існування червоної межі фотоелектру свідчить в більшій мірі на користь корпускулярної, ніж хвильової теорії світла?

11.3.14. Фотоелектр практично безінерційний. Як узгоджується цей факт з класичною моделлю взаємодії речовини і поля?

11.3.15. Відповідно класичним уявленням при зовнішньому фотоелектрі вириваються електрони провідності (вільні електрони). Як узгоджується це із законом збереження енергії та імпульсу?

11.3.16. Що таке селективний (вибірковий) фотоелектр?

11.3.17. З'ясуйте, як величина фотоструму селективного фотоелектру залежить від кута падіння і напрямку коливання електричного вектора у випадку лінійно поляризованого світла?

11.3.18. Чому катоди в фотоелементах із зовнішнім фотоелектром покриваються оксидами лужних металів?

11.3.19. Яке явище називають внутрішнім фотоелектром? Для яких речовин притаманний внутрішній фотоелектр?

11.3.20. Що називають явищем фотопровідності?

11.3.21. З'ясуйте механізм виникнення струму фотопровідності під дією світла.

11.3.22. Що називають “червоною межею” у випадку внутрішнього фотоелектру?

11.3.23. Яку енергію називають енергією активації провідності?

11.3.24. Який фотоелектр називають аномальним (від’ємним)?

11.3.25. Який фотоелектр називають вентиляним?

11.3.26. Які фізичні пристрої називають фотоелементами? Назвіть їх основні види.

11.3.27. Що таке вольтамперна і світлова характеристики фотоелементів?

11.3.28. В яких фотоелементах спостерігається струм насичення?

11.3.29. Чому у вакуумних фотоелементах настає фотострум насичення, а в газонаповнених фотоелементах фотоструму насичення не спостерігається?

11.3.30. Що називається інтегральною і спектральною чутливістю фотоелементів?



11.3.31. Нарисуйте схему установки, яка використовується для отримання вольтамперної і світлової характеристик фотоелементів.

11.3.32. Що називають коефіцієнтом підсилення?

11.3.33. Що таке фотоопір?

11.3.34. Що таке вольтамперна і світлова характеристики фотоопору?

11.3.35. Який фізичний прилад називають фотореле?

11.3.36. З'ясуйте принцип дії фотоелектронного помножувача сонячних батарей.

#### 11.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

Основним співвідношенням, яким користуються при розв'язуванні задач, пов'язаних з фотоелектричним ефектом, є формула Ейнштейна для фотоелектру (11.1):

$$h\nu = A + T,$$

де  $h\nu$  – енергія поглинутого фотона, який падає на поверхню металу,  $A$  – робота виходу електронів,  $T$  – максимальна кінетична енергія вирваного із металу фотоелектрона.

Якщо енергія фотона менша ~~5 еВ~~<sup>4 еВ</sup>, то кінетична енергія електрона може бути визначена за класичною нерелятивістською формулою:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (11.5)$$

У цьому випадку похибка результату не перевищує 1%.

Якщо енергія фотона більша ~~5 еВ~~<sup>4 еВ</sup>, то для розрахунку кінетичної енергії  $T$  слід скористатися релятивістською формулою:

$$T = (m - m_0)c^2, \quad (11.6)$$

де  $m$  – релятивістська маса рухомого електрона,  $m_0$  – маса спокою електрона,  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

Відповідно (9.16) і (11.6)

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right), \quad (11.7)$$

де  $v$  – швидкість руху електрона,  $m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Робота виходу, як правило, не перевищує кілька еВ. Тому, якщо енергія фотона  $h\nu$  більша ~~0,5 еВ~~<sup>4 еВ</sup>, то роботою виходу в (11.1) можна знехтувати.

Похибка результату в цьому випадку не перевищує 1%.

Червону межу фотоелектру знаходять за формулами (11.2)

#### 11.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 11.5.1.** Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, що вириваються з поверхні срібла: 1) ультрафіолетовими променями з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 1550 \text{ \AA}$ ; 2)  $\gamma$ -променями з довжиною хвилі  $\lambda_2 = 0,0247 \text{ \AA}$ .

**Розв'язок:** Максимальну швидкість фотоелектронів можна визначити із рівняння Ейнштейна для фотоелектру:

$$\varepsilon_f = A + T, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_f$  – енергія фотона,  $A$  – робота виходу для даного металу,  $T$  – максимальна кінетична енергія фотоелектронів.

Енергія фотона визначається за формулою:

$$\varepsilon_f = \frac{ch}{\lambda}. \quad (2)$$

Робота виходу дана в таблицях і для срібла вона дорівнює  $A = 4,7 \text{ eV}$ .

Кінетичну енергію фотоелектрона можна знайти або за допомогою класичної формули (11.5), або за допомогою релятивістської формули (11.6) в залежності від того, якої величини швидкості набуває електрон.

Швидкість фотоелектрона залежить від енергії фотона, який викликає фотоелектр. Якщо енергія фотона  $\varepsilon_f = h\nu$  набагато менша від енергії спокою електрона  $E_0 = m_0 c^2$ , то може бути застосована формула (11.5),

якщо ж  $\varepsilon_f = h\nu$  співмірна з величиною  $E_0 = m_0 c^2$  (або більша), то розрахунки за формулою (11.5) призводять до грубої похибки, і тому кінетичну енергію фотоелектрона слід визначати за формулою (11.7).

1) Вирахуємо енергію фотона ультрафіолетових променів за формулою (2):

$$\varepsilon_f = \frac{ch}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж},$$

або

$$\varepsilon_f = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} eB = 8 eB.$$

Отримана енергія фотона ( $8 eB$ ) набагато менша від енергії спокою електрона ( $0,51 MeB$ ). Значить, для даного випадку максимальна кінетична енергія електрона  $T$  в (1) може бути виражена нерелятивістською формулою (11.5):

$$\varepsilon_f = A + \frac{m_0 v_1^2}{2},$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_f - A)}{m_0}}. \quad (3)$$

Підставивши числові значення відповідних величин ( $\varepsilon_f = 1,28 \cdot 10^{-18} Дж$ ;  $A = 4,7 eB = 0,75 \cdot 10^{-18} Дж$ ;  $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} кг$ ) у формулу (3), знайдемо, що

$$v_1 = 1,08 \cdot 10^6 м/с.$$

2) Виразуємо енергію фотона  $\gamma$ -променів:

$$\varepsilon_f = \frac{ch}{\lambda_2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,47 \cdot 10^{-12}} Дж = 8 \cdot 10^{-14} Дж,$$

або

$$\varepsilon_f = \frac{8 \cdot 10^{-14} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}} eB = 5 \cdot 10^5 eB = 0,5 MeB.$$

Оскільки робота виходу електрона ( $A = 4,7 eB$ ) дуже мала порівняно з енергією фотона ( $\varepsilon_f = 5 \cdot 10^5 eB$ ), то можна прийняти, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії фотона:

$$T = \varepsilon_f = 0,5 MeB$$

У даному випадку кінетична енергія електрона співмірна з його енергією спокою, і, значить, для розрахунку швидкості електрона слід скористатись релятивістською формулою (11.7):

$$T = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

де  $\beta = \frac{v}{c}$ . Зробивши прості перетворення, знаходимо, що:

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T} \quad (5)$$

Підставивши в (5) числові значення відповідних величин ( $E_0 = 0,51 MeB$ ;  $T = 0,5 MeB$ ), отримаємо:

$$\beta = \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 0,5) \cdot 0,5}}{0,51 + 0,5} = 0,867,$$

звідки

$$v_2 = c\beta = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,867 м/с = 2,6 \cdot 10^8 м/с.$$

**Відповідь:**  $v_1 = 1,08 \cdot 10^6 м/с$ ;  $v_2 = 2,6 \cdot 10^8 м/с$ .

**Задача 11.5.2.** Світловий потік із  $n = 5 \cdot 10^4$  фотонів, які мають енергію, що відповідає довжині хвилі  $\lambda = 3000 \text{ \AA}$ , падає на fotocутливий шар з чутливістю  $k = 4,5 \text{ мА/Вт}$ . Знайти кількість фотоелектронів, які звільняються таким імпульсом світла.

**Розв'язок:** Чутливістю фотоелемента прийнято називати величину фотоструму, викликаного світловим потоком одиничної потужності:

$$k = \frac{i_\phi}{P}. \quad (1)$$

Час опромінення фотокатода світлом і час протікання фотоструму один і той же (процес безінерційний).

Енергія імпульсу, який містить  $n$  фотонів (квантів), дорівнює:

$$W = nh\nu = nh \frac{c}{\lambda}. \quad (2)$$

Потужність, яка передана цим імпульсом фотокатоду:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{nhc}{\lambda t}, \quad (3)$$

де  $t$  – час опромінення.

Заряд  $q$ , що переноситься  $N$  електронами, вирваними імпульсом світла із катода, дорівнює:

$$q = Ne. \quad (4)$$

Цей заряд створює фотострум величиною

$$i_{\phi} = \frac{Ne}{t}, \quad (5)$$

де  $t$  – час опромінення,  $e$  – заряд електрона.

З урахуванням (3) і (5) чутливість (1) фотоелемента виразиться так:

$$k = \frac{Ne\lambda t}{nhct} = \frac{Ne\lambda}{nhc}, \quad (6)$$

звідки

$$N = \frac{knhc}{e\lambda}. \quad (7)$$

Підставляючи в (7) числові значення відповідних величин ( $k = 4,5 \text{ мА/Вт}$ ;  $n = 5 \cdot 10^4$ ;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;  $\lambda = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ), отримаємо:

$$N = \frac{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,0 \cdot 10^{-7}} = 931.$$

**Відповідь:**  $N = 931$ .

**Задача 11.5.3.** При освітлюванні деякого металу випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda = 279 \text{ нм}$  затримуючий потенціал дорівнює  $U_{13} = 0,66 \text{ В}$ , при довжині хвилі  $\lambda = 245 \text{ нм}$  затримуючий потенціал стає рівним  $U_{23} = 1,26 \text{ В}$ . Визначити сталу Планка і роботу виходу електрона із даного металу.

**Розв'язок:** а) Запишемо для першого і другого випадків рівняння Ейнштейна:

$$eU_{13} = \frac{hc}{\lambda_1} - A, \quad (1)$$

$$eU_{23} = \frac{hc}{\lambda_2} - A, \quad (2)$$

Віднімемо почленно із рівняння (2) рівняння (1). Після елементарних перетворень, отримаємо:

$$h = \frac{e(U_{23} - U_{13})\lambda_1\lambda_2}{c(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (3)$$

За заданих умовами задачі числових значень величин ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $U_{13} = 0,66 \text{ В}$ ;  $U_{23} = 1,26 \text{ В}$ ;  $\lambda_1 = 2,79 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $\lambda_2 = 2,45 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , маємо:

$$h = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} (1,26 - 0,66) \cdot 2,79 \cdot 10^{-7} \cdot 2,45 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 (2,79 \cdot 10^{-7} - 2,45 \cdot 10^{-7})} \text{ Дж}\cdot\text{с} = 6,43 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

б) Роботу виходу електрона знайдемо із (1):

$$A = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_{13}. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) значення відповідних величин і провівши обчислення, отримаємо:

$$A = \left( \frac{6,43 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,79 \cdot 10^{-7}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,66 \right) \text{ Дж} = 5,86 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 3,66 \text{ еВ}.$$

**Відповідь:**  $h = 6,43 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ;  $A = 3,66 \text{ еВ}$ .

**Задача 11.5.4.** До якого максимального потенціалу зарядиться ізольована від інших тіл мідна кулька при опроміненні її електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda = 0,14 \text{ мкм}$ ?

**Розв'язок:** При опромінуванні мідної кульки електромагнітним монохроматичним випромінюванням із кульки будуть звільнятися (вилітати) електрони (має місце зовнішній фотоефект), кінетична енергія  $T$  яких визначається рівнянням Ейнштейна (11.1):

$$T = hv - A, \quad (1)$$

де  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$  – стала Планка,  $\nu$  – частота падаючого електромагнітного випромінювання,  $A$  – робота виходу.

За рахунок електронів, які вибиваються фотонами і залишають кульку, відбувається поступове накопичення позитивного електричного заряду  $Q$  і виникнення біля кульки електричного поля, яке затримує вилітаючі електрони.

Виліт електронів із кульки припиняється тоді, коли потенціал  $\phi$  на ній буде такий, що кінетична енергія  $T$  фотоелектронів повністю витратиться на роботу в електричному полі, яке створюється позитивним електричним зарядом  $Q$  на кульці:

$$e\phi_{\text{max}} = hv - A, \quad (2)$$

звідки

$$\varphi_{\max} = \frac{h\nu - A}{e} = \frac{hc - A\lambda}{e\lambda}, \quad (3)$$

де  $c$  – швидкість світла.

Підставляючи в (3) числові значення відповідних величин ( $\lambda = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $A = 4,47 \text{ еВ} = 7,15 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ), отримаємо:

$$\varphi_{\max} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 - 7,15 \cdot 10^{-19} \cdot 1,4 \cdot 10^{-7}}{1,4 \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ В} = 4,4 \text{ В}.$$

Відповідь:  $\varphi_{\max} = 4,4 \text{ В}$ .

**Задача 11.5.5.** Ізольована металічна кулька радіуса  $R = 1,0 \text{ см}$  освітлюється ультрафіолетовим випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 0,180 \text{ нм}$ . Потім його освітлюють випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda_2 = 0,162 \text{ нм}$ . Скільки електронів втрачає кулька?

**Розв'язок:** Під дією світла з поверхні кульки вибиваються фотоелектрони з кінетичною енергією  $T$  у відповідності з рівнянням Ейнштейна для фотоелекту:

$$T = \frac{hc}{\lambda} - A, \quad (1)$$

де  $h$  – стала Планка,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $A$  – робота виходу електрона із матеріалу кульки.

За рахунок електронів, вирваних фотонами із кульки, відбувається поступове накопичення позитивного заряду  $Q$  і виникнення електричного поля навколо кульки, яке затримує електрони, що вилітають з кульки. При деякому потенціалі  $\varphi$ , кінетична енергія повністю витрачається на роботу  $A = q\varphi$ , ( $q$  – заряд фотоелектрона) і збільшення потенціальної енергії електрона в електричному полі зарядженої кульки, тобто

$$T = q\varphi, \quad (2)$$

В результаті зміна заряду  $Q$  кульки припиниться, при цьому

$$k \frac{qQ_1}{R} = T_1 = \frac{hc}{\lambda_1} - A, \quad (3)$$

( $k$  – стала величина).

При освітленні кульки більш короткохвильовим випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda_2$  буде відбуватися додаткове вибивання  $N$  електронів доти, поки заряд  $Q_2$  кульки не досягне такої величини, що кінетична енергія  $T_2$  фотоелектронів, що вибиваються з кульки випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda_2 < \lambda_1$ , витрачатиметься на роботу  $A_2$  в полі заряду  $Q_2 = Q_1 + Nq$ , тобто

$$k \frac{qQ_2}{R} = T_2 = \frac{hc}{\lambda_2} - A. \quad (4)$$

Віднімаючи почленно із рівняння (4) рівняння (3), отримуємо:

$$\frac{hc}{\lambda_2} - \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{kq}{R} Nq = \frac{kNq^2}{R}, \quad (5)$$

звідки шукане число  $N$  електронів визначиться формулою:

$$N = \frac{hc\Delta\lambda R}{\lambda_1\lambda_2 q^2 k}, \quad (6)$$

де  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ .

Після підстановки в (5) числових значень відповідних величин ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\Delta\lambda = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ ;  $R = 10^{-2} \text{ м}$ ;  $\lambda_1 = 0,18 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ;  $\lambda_2 = 0,162 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ;  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К}$ ;  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{Кл}^2$ ) знайдемо, що

$$N = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,8 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-2}}{0,18 \cdot 10^{-9} \cdot 0,162 \cdot 10^{-9} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 5,3 \cdot 10^9.$$

Відповідь:  $N = 5,3 \cdot 10^9$ .

**Задача 11.5.6.** Знайти максимальну кінетичну енергію  $T_{\max}$  фотоелектронів, які вириваються з поверхні літію електромагнітним випромінюванням, напруженість електричної складової якого змінюється з часом за законом  $E = a(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t$ , де  $a$  – деяка стала,  $\omega = 6,0 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3,6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

**Розв'язок:** Кінетична енергія фотоелектронів визначається рівнянням Ейнштейна (2.1):

$$T_{\max} = h\nu - A. \quad (1)$$

Оскільки  $A$  і  $h$  – сталі величини, то  $T_{\max}$  визначається тільки частотою  $\nu$  падаючого на речовину випромінювання. Із наведеного закону видно,

що випромінювання, яке падає на поверхню літію, є складним, немонахроматичним. Тому, перш за все, потрібно знайти частоти, якими характеризується дане випромінювання. Для цього зробимо такі нескладні перетворення:

$$\begin{aligned} E &= a(1 + \cos \omega t) \cos \omega_0 t = a \cos \omega_0 t + \cos \omega t \cos \omega_0 t = \\ &= a \cos \omega_0 t + \frac{a}{2} \cos(\omega_0 + \omega)t + \frac{a}{2} \cos(\omega_0 - \omega)t. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким чином із (2) видно, що випромінювання, яке падає на поверхню літію, характеризується частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \omega$ ,  $\omega_0 - \omega$ . Максимальною частотою є частота  $\omega_0 + \omega$ . Саме під дією випромінювання з цією частотою будуть вириватися із літію електрони з максимальною кінетичною енергією  $T_{\max}$ . Оскільки,  $\nu = \omega / 2\pi$ , то рівність (1) запишеться так:

$$T_{\max} = \hbar \omega' - A, \quad (3)$$

де  $\hbar = h / 2\pi$ ,  $\omega' = \omega + \omega_0$ . Тоді:

$$T_{\max} = \hbar(\omega + \omega_0) - A. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Джс;  $\omega_0 = 3,6 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup>;  $\omega = 6,0 \cdot 10^{14}$  с<sup>-1</sup>;  $A = 2,39$  еВ =  $3,82 \cdot 10^{-19}$  Дж), отримаємо:

$$T_{\max} = 1,054 \cdot 10^{-34} (6,0 \cdot 10^{14} + 3,6 \cdot 10^{15}) - 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 6,27 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,39 \text{ еВ}.$$

**Відповідь:**  $T_{\max} = 0,39$  еВ.

**Задача 11.5.7.** Плоску цинкову пластинку освітлюють випромінюванням із суцільним спектром, короткохвильова межа якого відповідає довжині хвилі  $\lambda = 30$  нм. Вирахувати, на яку максимальну відстань від поверхні пластинки може віддалитися фотоелектрон, якщо поза пластинкою існує затримуюче однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 10$  В/см?

**Розв'язок:** Під дією випромінювання з поверхні цинкової пластинки вибиваються електрони, максимальну швидкість яких можна визначити з рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$\frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A, \quad (1)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі короткохвильового випромінювання. Саме

електрони з максимальною енергією віддаляються на максимальну відстань від поверхні пластинки.

Оскільки на фотоелектрон діє затримуюче поле, то його кінетична енергія перетворюється в потенціальну енергію електрона, яка в момент зупинки електрона дорівнюватиме:

$$W_n = \frac{m v_{\max}^2}{2} = e E d_{\max}, \quad (2)$$

де  $e$  – заряд електрона,  $E$  – напруженість затримуючого поля,  $d_{\max}$  – максимальна відстань, на яку віддалиться електрон від поверхні пластинки. Прирівнюючи праві частини рівнянь (1) і (2), отримаємо:

$$\frac{hc}{\lambda} - A = e E d_{\max}, \quad (3)$$

звідки

$$d_{\max} = \frac{hc - \lambda A}{e E \lambda}. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) числові значення відповідних величин ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Джс;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $\lambda = 0,3 \cdot 10^{-7}$  м;  $A = 3,74$  еВ =  $5,98 \cdot 10^{-19}$  Дж;

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $E = 10^2 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ ), знайдемо:

$$d_{\max} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 - 0,3 \cdot 10^{-7} \cdot 5,98 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-7}} \text{ м} = 0,377 \text{ м} = 37,7 \text{ см}. \quad (5)$$

**Відповідь:**  $d_{\max} = 37,6$  см.

**Задача 11.5.8.** Поверхня металу освітлюється світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 350$  нм. При деякому затримуючому потенціалі фотострум стає рівним нулю. При зміні довжини хвилі на  $\Delta\lambda = 50$  нм затримуючу різницю потенціалів прийшлося збільшити на  $\Delta U = 0,59$  В. Вважаючи сталу Планка і швидкість світла відомими, визначити заряд електрона.

**Розв'язок:** Фотоефект описується рівнянням Ейнштейна:

$$\frac{m v_{\max}^2}{2} = h \frac{c}{\lambda} - A, \quad (1)$$

де  $\frac{m v_{\max}^2}{2}$  – максимальна кінетична енергія фотоелектронів,  $\frac{hc}{\lambda}$  – енергія

фотона,  $A$  – робота виходу електрона для даного металу.

Рівняння (1) можна записати інакше, замінивши в ньому кінетичну енергію електрона  $\frac{mv_{\max}^2}{2}$  виразом  $eU_s$  ( $\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_s$ ), де  $U_s$  – різниця потенціалів між катодом і анодом, яка повністю затримує фотострум,  $e$  – заряд електрона. Тоді:

$$eU_s = \frac{hc}{\lambda} - A. \quad (2)$$

Якщо при зміні довжини хвилі світла, яка викликає фотострум, прийшлося збільшити затримуючий потенціал, значить, довжина хвилі зменшилась. Тому для другого випадку рівняння (2) запишеться так:

$$e(U_s + \Delta U) = \frac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} - A. \quad (3)$$

Віднімаючи почленно від рівняння (3) рівняння (2), отримаємо:

$$e\Delta U = hc \left( \frac{1}{\lambda - \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (4)$$

звідки

$$e = \frac{hc\Delta\lambda}{(\lambda - \Delta\lambda)\lambda\Delta U}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $\lambda = 3,5 \cdot 10^{-7}$  м;  $\Delta U = 0,59$  В;  $\Delta\lambda = 0,5 \cdot 10^{-7}$  м;) і провівши обрахунки, маємо:

$$e = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8}{(3,5 \cdot 10^{-7} - 0,5 \cdot 10^{-7}) \cdot 3,5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,59} = 1,604 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Відповідь:  $e = 1,604 \cdot 10^{-19}$  Кл.

## 11.6. Задачі для самостійного розв'язування до теми XI

11.6.1. Ізольована від зовнішніх тіл куля радіуса  $R = 1$  см з берилію опромінюється світлом з довжиною хвилі  $\lambda = 0,25$  мкм. Знайти заряд кулі, коли: а) всі електрони починають повертатись назад; б) всі електрони віддаляються від поверхні кулі не більше, як на 2 см.

Відповідь: а)  $Q_1 = 1,166 \cdot 10^{-12}$  Кл; б)  $Q_2 = 2,33 \cdot 10^{-12}$  Кл.

11.6.2. Квант світла з довжиною хвилі  $\lambda = 2,32$  нм звільняє з поверхні платинового електрода фотоелектрон. Визначити імпульс, якого набуває при цьому електрод, якщо відомо, що фотоелектрон вилітає назустріч падаючому фотону.

Відповідь:  $p = 1,38 \cdot 10^{-25}$  кг·м/с.

11.6.3. Катод вакуумного фотоелемента освітлюють монохроматичним світлом. При довжині хвилі  $\lambda = 628$  нм струм фотоелектронів припиняється при включенні затримуючої напруги  $U_s$  не меншої певної величини. При збільшенні довжини хвилі світла на 25 % затримуючу напругу зменшили на 0,4 В. Визначити сталу Планка.

Відповідь:  $h \approx 6,7 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

11.6.4. Металева кулька радіуса  $R$ , ізольована від навколишніх впливів, освітлюється світлом з довжиною хвилі  $\lambda_1 = 250$  нм. Потім її освітлюють додатково монохроматичним світлом з більш короткою довжиною хвилі  $\lambda_2$ . Знайти довжину хвилі  $\lambda_2$ , якщо куля втратила  $N = 3,4 \cdot 10^6$  частинок при цьому.

Відповідь:  $\lambda_2 = 200$  нм.

11.6.5. На мідну незаряджену пластинку, приєднану до електрометра, направили пучок рентгенівських променів. Коли пластинка зарядилася до потенціалу  $U = 124$  В, випромінювання електронів припинилося. Визначити довжину хвилі рентгенівських променів.

Відповідь:  $\lambda = 9,66 \cdot 10^{-9}$  м.

11.6.6. Червона межа фотоефекту для платини лежить біля  $\lambda_1 = 198$  нм. Якщо платину прожарити при високій температурі, то червона межа фотоефекту стане рівною  $\lambda_2 = 220$  нм. На скільки електрон-вольт прожарювання зменшує роботу виходу електронів?

Відповідь:  $\Delta A = 0,6$  еВ.

11.6.7. Визначити червону межу фотоефекту для цинку і максимальну швидкість фотоелектронів, які вириваються з його поверхні електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі  $\lambda = 250$  нм.

Відповідь:  $\lambda_0 = 332$  нм,  $v_{\max} = 6,6 \cdot 10^5$  м/с.

11.6.8. При почерговому освітленні поверхні деякого металу світлом з

довжинами хвиль  $\lambda_1 = 0,35 \text{ мкм}$  і  $\lambda_2 = 0,54 \text{ мкм}$  виявили, що відповідні максимальні швидкості фотоелектронів відрізняються одна від одної в  $\eta = 2,0$  рази. Знайти роботу виходу з поверхні цього металу.

**Відповідь:**  $A = \frac{hc}{\lambda_2(\eta^2 - 1)} \left( \eta^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = 1,9 \text{ (eV)}$ .

**11.6.9.** Електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 0,30 \text{ мкм}$  падає на фотоелемент, який знаходиться в режимі насичення. Відповідна спектральна чутливість фотоелемента  $k = 4,8 \text{ мА/Вт}$ . Знайти квантовий вихід фотоелемента.

**Відповідь:**  $j = \frac{n}{N} = \frac{2\pi c h k}{e \lambda} = 9,0 \cdot 10^{-2}$ , де  $N$  – кількість фотонів, що падають за одиницю часу на фотоелемент,  $n$  – кількість електронів, що вибиваються за одиницю часу із катода фотоелемента.

**11.6.10.** Показати за допомогою законів збереження, що вільний електрон не може повністю поглинути фотон.

**11.6.11.** Між фотокатодом і анодом прикладена така затримуюча різниця потенціалів, що фотоелектрони з максимальною швидкістю можуть пролетіти тільки половину відстані між катодом і анодом. Чи зможуть вони долетіти до анода, якщо відстань між електродами зменшити вдвічі при тій же різниці потенціалів?

**Відповідь:** ні.

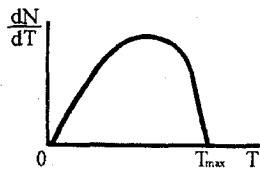


Рис. 11.1

**11.6.12.** Функція розподілу фотоелектронів за кінетичними енергіями  $T$  має вигляд, зображений на рис. 11.1. Чим визначається максимальна енергія фотоелектронів?

**11.6.13.** В досліді Лукірського і Прилежаєва залежність максимальної кінетичної енергії фотоелектронів, як функції частоти світла, яке опромінює метал, зображується похилими прямими (рис. 11.2). Як за нахилом прямих визначити сталу Планка? Чим відрізняються одна від одної умови, за яких отримані різні прямі?

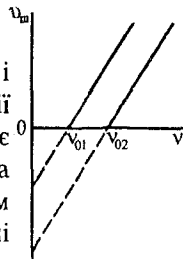


Рис. 11.2

**Відповідь:**  $h = \frac{d(eU_3)}{dv}$ .

**11.6.14.** Два електроди, які знаходяться у вакуумі на деякій відстані один від одного, сполучені через активний опір. Один із електродів освітлюється джерелом, в спектрі якого є випромінювання з довжиною

хвилі, яка задовільняє умові  $\left( \frac{hc}{\lambda} \right) > A$ , де  $A$  – робота виходу електронів з металу освітлюваного електрода. Чи пройде при цьому в колі струм?

**Відповідь:** Так,  $I = \frac{\varepsilon}{R + r_{\text{вак}}} = \frac{hv - A}{R + r_{\text{вак}}}$ .

**11.6.15.** Фотокатод може освітлюватися одним із двох джерел. Джерела розміщені на однакових відстанях від фотокатода. Залежність фотоструму від напруги між катодом і анодом при одному джерелі зображуються кривою 1, а при іншому – кривою 2 (рис. 11.3). Чим відрізняються джерела один від одного?

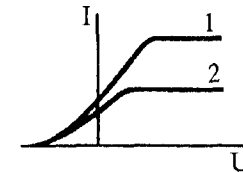


Рис. 11.3

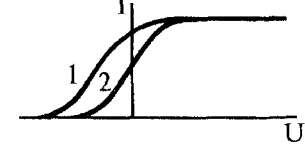


Рис. 11.4

**11.6.16.** Два фотокатода освітлюються одним і тим же джерелом світла, при цьому залежність фотоструму від напруги між катодом і анодом для одного катода зображується кривою 1, а для іншого – кривою 2 (рис. 11.4). У якого фотокатода робота виходу більша?

**11.6.17.** Між лазером і фотодетектором поставили товсту скляну пластинку. Покази фотодетектора зменшилися. Коли замість лазера поставили лампу розжарювання, то покази фотодетектора збільшилися. Поясніть ці ефекти.

**ТЕМА XII**  
**КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ СВІТЛА**

**12.1. Програмні питання**

Фотони. Маса, імпульс та момент імпульсу фотона. Корпускулярно-хвильовий дуалізм світла. Квантова теорія і поляризація світла.

Тиск світла. Елементарна теорія світлового тиску з точки зору теорії фотонів. Досліди П.М. Лебедева і тиск світла.

Ефект Комптона. Основні закономірності. Теорія ефекту Комптона. Ефект Допплера і гіпотеза світлових квантів.

**12.2. Основні поняття, закони і формули**

**12.2.1. Основні характеристики фотона**

**Енергія фотона**

$$\varepsilon_f = h\nu = \hbar\omega, \quad (12.1)$$

де  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала

Дірака,  $\nu$  – лінійна частота світла,  $\omega = 2\pi\nu$  – колова (циклічна) частота світла,  $c$  – швидкість світла у вакуумі,  $\lambda$  – довжина хвилі.

Таблиця 12.1

**Значення енергії фотонів різних частот (довжин хвиль) видимої ділянки спектра**

$\lambda \cdot 10^{-7}$ м	$\nu \cdot 10^{14}$ Гц	Колір променів	$\varepsilon_f$	
			$\times 10^{-8}$ Дж	еВ
7,60	3,95	Темно-червоний	0,26	1,6
6,20	4,85	Червоний	0,32	2,0
5,90	5,08	Оранжевий	0,34	2,1
5,60	5,36	Жовтий	0,36	2,2
5,00	6,00	Зелений	0,40	2,5
4,80	6,25	Голубий	0,41	2,6
4,50	6,66	Синій	0,44	2,7
3,80	7,89	Фіолетовий	0,52	3,3

**Маса фотона**

$$m = 0 \text{ ("маса спокою")}$$

**Енергія фотона в одиницях маси (так звана "релятивістська маса")**

$$m_f = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2}. \quad (12.2)$$

Таблиця 12.2

**Енергія фотонів різних частот (довжин хвиль) електромагнітного випромінювання в одиницях маси**

	$\nu \cdot 10^{14}$ Гц	$m_f$	
		$\times 10^{-36}$ кг	в електронних масах
Червоне світло	7,83	3,5	$3,9 \cdot 10^{-6}$
Зелене світло	6,00	4,41	$4,8 \cdot 10^{-6}$
Фіолетове світло	7,89	5,79	$6,3 \cdot 10^{-6}$
Ультрафіолетове випромінювання	$10^3$	730	$8,0 \cdot 10^{-4}$
Рентгенівське випромінювання	$3 \cdot 10^4$	220000	0,24
$\gamma$ -випромінювання	$3 \cdot 10^6$	2200000	2,4

**Імпульс фотона**

$$p_f = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad (12.3)$$

або у векторній формі

$$\vec{p}_f = \frac{h\nu}{c} \vec{n} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n}, \quad (12.4)$$

де  $\vec{n}$  – одиничний вектор, який визначає напрямок руху фотона.

Формулу (12.3) можна переписати у вигляді:

$$\vec{p}_f = \hbar \vec{k}, \quad (12.5)$$

де  $\vec{k}$  – хвильовий вектор, модуль якого дорівнює хвильовому числу

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$



## Абсолютне значення моменту імпульсу фотона

$$|\vec{j}_f| = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad (12.6)$$

де  $j = 1, 2, 3, \dots$

**Спін фотона** – це найменший момент імпульсу фотона. Абсолютне значення спіну фотона

$$|\vec{s}_f| = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \hbar \sqrt{2}, \quad (12.7)$$

де  $s$  – спінове квантове число фотона, яке рівне 1 ( $s = j_{\min} = 1$ ).

**Спіральність фотона** (проекція спіну (в одиницях  $\hbar$ ) на напрямок імпульсу) приймає значення  $\pm 1$ , що пов'язано з поперечністю електромагнітного поля і масою спокою фотона  $m = 0$ .

Таблиця 12.3

## Основні характеристики фотона

Маса	$m = 0$
Імпульс	$\vec{p}_f = \frac{h\nu}{c} \vec{n} = \frac{h}{\lambda} \vec{n}$
Енергія	$E_f = h\nu, \quad m_f = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h\lambda}{c}$
Спін	$ \vec{s}_f  = \frac{h}{2\pi} \sqrt{2} = \hbar \sqrt{2}$
Спіральність	$\pm 1$
Магнітний момент	$M_f = 0$
Час життя	$\tau_f = \infty$
Швидкість у вакуумі	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

**12.2.2. Тиск світла**, що падає нормально на поверхню речовини з коефіцієнтом відбиття  $R$

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + R), \quad (12.9)$$

де  $E_e$  – енергетична освітленість поверхні, яка вимірюється світловою енергією, що падає на одиницю поверхні за одиницю часу.

У випадку похилого падіння світла на поверхню

$$P = \frac{E_e}{c} (1 + R) \cos^2 r, \quad (12.10)$$

де  $r$  – кут між променем і нормаллю до поверхні.

## 12.2.3. Комптонівське розсіяння

**1.** В розсіяному рентгенівському або  $\gamma$ -випромінюванні завжди присутні дві довжини хвилі: первинна  $\lambda$  і додаткова  $\lambda'$ , які близькі за значенням.

**2.** Довжина хвилі  $\lambda'$  завжди більша за  $\lambda$  ( $\lambda' > \lambda$ ). Різниця  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  не залежить від  $\lambda$  і від природи розсіюючої речовини.

**3.** Значення  $\lambda'$  залежить від кута розсіяння  $\theta$ .

**4.** Зміна довжини хвилі рентгенівського або  $\gamma$ -випромінювання

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (12.11)$$

де  $\theta$  – кут розсіяння,  $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$  – стала величина, яка рівна  $0,0242 \text{ \AA}$ ,  $m_0$  – маса електрона.

Формула (2.11) є наслідком законів збереження енергії та імпульсу падаючого та розсіяного фотонів та електрона.

Стала  $\lambda_c$  визначає величину зміни довжини хвилі при розсіянні рентгенівських і  $\gamma$ -променів під прямим кутом ( $\theta = \pi/2$ ) і називається комптонівською довжиною хвилі.

## 12.3. Контрольні запитання

**12.3.1.** Запишіть вирази для основних характеристик ( $m_f, p_f, \epsilon_f, M_f$ ) фотона.

**12.3.2.** В яких дослідах виявляються хвильові властивості світла, а в яких – корпускулярні?

**12.3.3.** Які явища свідчать про те, що фотон має імпульс? Як пов'язані між собою імпульс фотона і хвильовий вектор?

**12.3.4.** Наведіть приклади явищ, які допускають як хвильове так і корпускулярне пояснення.

**12.3.5.** Поясніть, в чому причина походження протиріч, які виникають при спробах скласти загальне уявлення про світло, яке проявляє то хвильові, то корпускулярні властивості? Як ці логічні труднощі долаються квантовою теорією?

**12.3.6.** Виведіть формулу для моменту імпульсу та обертового моменту фотона.

**12.3.7.** Чому обертовий момент викликає тільки світло поляризоване по колу?

**12.3.8.** Як пояснюється зміна довжини хвилі при розсіянні рентгенівських променів вільними електронами?

**12.3.9.** Чому ефект Комптона не спостерігається при розсіянні видимого світла?

**12.3.10.** Виведіть формулу  $\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , де  $\theta$  – кут розсіяння.

**12.3.11.** З'ясуйте характер залежності інтенсивності розсіяної компоненти від кута розсіяння.

**12.3.12.** З'ясуйте характер залежності інтенсивностей первинної і розсіяної компонент від атомного номера розсіюючої речовини.

**12.3.13.** Чим пояснюється зменшення інтенсивності розсіяної компоненти із зростанням атомного номера розсіюючої речовини?

**12.3.14.** З'ясуйте причини невдач експериментального виявлення тиску світла, що передували експериментам П.М.Лебедева.

**12.3.15.** Опишіть установку, за допомогою якої П.М.Лебедев виміряв тиск світла на тверді тіла.

**12.3.16.** Що розуміють під радіометричним та газокінетичним ефектами?

**12.3.17.** Як пояснюється необхідність виникнення світлового тиску з точки зору корпускулярної теорії світла? З точки зору електромагнітної теорії?

**12.3.18.** Яку роль відіграють електричне і магнітне поля світлової хвилі у виникненні тиску світла?

**12.3.19.** Як сила світлового тиску на заряд, що здійснює вимушений рух, залежить від потужності, переданої заряду?

**12.3.20.** Як імпульс електромагнітного поля світлової хвилі виражається через її енергію?

**12.3.21.** Виведіть формулу для тиску світла  $P = \frac{I}{c}(1+R)$  і поясніть, за яких умов вона справедлива.

**12.3.22.** Виведіть формулу для тиску світла  $P = \frac{I}{c}(1+R)\cos^2 r$  і поясніть коли вона має місце.

## 12.4. Методичні вказівки до розв'язування задач

В даному розділі розглянуті задачі на взаємодію фотонів з речовиною (тиск світла) або з окремими електронами (ефект Комптона), які ґрунтуються на використанні законів збереження енергії та імпульсу. Так, закон збереження імпульсу, застосований до взаємодії фотонів з речовиною, призводить до формули (12.9) для світлового тиску; сумісне застосування законів збереження енергії і імпульсу до взаємодії фотона з атомним електроном дає формулу Комптона (12.11).

Формула тиску світла (12.9) справедлива лише для випадку нормального падіння світла на поверхню.

Часто в формулі (12.9), замість величини  $E_c$ , використовують інтенсивність світла  $I$  (густину потоку випромінювання), тобто,

$$P = \frac{I}{c}(1+R), \quad \text{або} \quad P = \frac{h\nu}{c}N(1+R), \quad (12.12)$$

де  $\frac{h\nu}{c}$  – імпульс фотона,  $N$  – число фотонів, які падають на одиничну площадку за одиницю часу.

При розрахунку тиску світла у випадку падіння похилих променів користуються формулою (12.10)

## 12.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 12.5.1.** Визначити енергію фотона в одиницях маси: а) інфрачервоного ( $\lambda = 300 \text{ мкм}$ ); б) фіолетового ( $\lambda = 0,4 \text{ мкм}$ ) випромінювання.

Розв'язок: Користуючись формулою (12.2) і враховуючи, що  $c = \lambda\nu$ , маємо:  $m_f = \frac{h}{c\lambda}$ . Підставляючи числові значення відповідних величин, отримаємо:

$$\text{а) } m_f = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \text{ кг} = 7,37 \cdot 10^{-39} \text{ кг},$$

$$\text{б) } m_f = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}} \text{ кг} = 5,5 \cdot 10^{-36} \text{ кг}.$$

Відповідь: а)  $m_f = 7,37 \cdot 10^{-39} \text{ кг}$ , б)  $m_f = 5,5 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$ .

**Задача 12.5.2.** Визначити імпульс фотона рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі  $\lambda = 10^{-10}$  м.

**Розв'язок:** Імпульс фотона знаходимо за формулою (12.3):

$$p_f = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{10^{-10}} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = 6,626 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Відповідь:**  $p = 6,626 \cdot 10^{-24}$  кг·м/с.

**Задача 12.5.3.** Електрична лампа потужністю  $P = 100$  Вт випромінює 3% спожитої енергії у вигляді видимого світла ( $\lambda_{\text{ср}} = 5,5 \cdot 10^{-7}$  м) рівномірно у всіх напрямках. Скільки фотонів видимого світла потрапляє за 1 с в зіницю ока спостерігача (діаметр зіниці 4 мм), якщо спостерігач знаходиться на відстані  $R = 10$  км від лампи.

**Розв'язок:** На випромінювання енергії у вигляді видимого світла витрачається 3% від загальної потужності лампи, тобто

$$P' = 0,03P. \quad (1)$$

Кількість фотонів, що випромінюються у вигляді видимого світла, рівна:

$$N = \frac{0,03P}{\varepsilon_f} = \frac{0,03P}{hc/\lambda}, \quad (2)$$

де  $\varepsilon_f = hc/\lambda$  – енергія одного фотона. Оскільки, згідно умови задачі, світло випромінюється рівномірно у всіх напрямках, то на одиницю площі поверхні сфери радіуса  $R = 10$  км  $= 10^4$  м припадає  $N'$  фотонів:

$$N' = \frac{N}{S_{\text{сф}}} = \frac{N}{4\pi R^2}, \quad (3)$$

Враховуючи (2), отримаємо:

$$N' = \frac{0,03P\lambda}{4\pi R^2 hc}. \quad (4)$$

Тоді кількість фотонів  $N''$ , які попадуть в зіницю ока спостерігача, буде рівна:

$$N'' = N' S_3 t = \frac{0,03P\lambda r_3^2 t}{4R^2 hc}, \quad (4)$$

де  $S_3 = \pi r_3^2$  – площа зіниці ока,  $r_3$  – радіус зіниці,  $t = 1$  с.

Підставляючи в (4) числові дані відповідних величин ( $P = 100$  Дж/с;  $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$  м;  $r_3 = 2 \cdot 10^{-3}$  м;  $t = 1$  с;  $R = 10^4$  м;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с), отримаємо:

$$N'' = \frac{0,03 \cdot 100 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} (2 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot (10^4)^2} = 83 \cdot 10^{15}.$$

**Відповідь:**  $N'' = 83 \cdot 10^{15}$ .

**Задача 12.5.4.** Визначити кількість фотонів, випромінюваних за одиницю часу джерелом потужністю  $P = 1$  Вт, якщо довжина хвилі випромінювання дорівнює  $\lambda_1 = 100$  м,  $\lambda_2 = 0,5$  мкм,  $\lambda_3 = 0,05$  Å.

**Розв'язок:** Кількість випромінюваних за одиницю часу квантів, очевидно, дорівнює:

$$N = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{P\lambda}{2\pi\hbar c}, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_f = \hbar\omega = 2\pi\hbar\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$  – енергія фотона (кванта),  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Дірака.

Підставляючи в (1) числові значення відповідних величин, знаходимо:  $N_1 = 5,03 \cdot 10^{26}$  с<sup>-1</sup>,  $N_2 = 2,52 \cdot 10^{18}$  с<sup>-1</sup>,  $N_3 = 2,52 \cdot 10^{13}$  с<sup>-1</sup>.

**Відповідь:**  $N_1 = 5,03 \cdot 10^{26}$  с<sup>-1</sup>;  $N_2 = 2,52 \cdot 10^{18}$  с<sup>-1</sup>;  $N_3 = 2,52 \cdot 10^{13}$  с<sup>-1</sup>.

**Задача 12.5.5.** Іноді фотону приписують “гравітаційну масу”, яка дорівнює  $\hbar\omega/c^2$ . Обчислити, виходячи з цього, величину “червоного зміщення” (величину  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ ) довжини хвилі кванта світла, що пройшов гравітаційне поле Сонця.

**Розв'язок:** Сила гравітаційного тяжіння, що діє на фотон, дорівнює:

$$F = -\gamma \frac{m_f M_S}{r^2} = -\gamma \frac{\hbar\omega M_S}{c^2 r^2}, \quad (1)$$

де  $M_S$  – маса Сонця,  $m_f = \hbar\omega/c^2$ ,  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  – гравітаційна стала,  $r$  – відстань фотона до Сонця.

Робота сили на шляху  $dr$  йде на збільшення енергії кванта  $\hbar\omega$ :

$$\hbar d\omega = \gamma \frac{\hbar \omega M_S}{c^2 r^2} dr \quad (2)$$

Рівняння (2) інтегруємо за таких умов: при  $r = \infty$ ,  $\omega = \omega_0$ ; при  $r = R_S$  ( $R_S$  – радіус Сонця)  $\omega = \omega_1$ . Тоді знаходимо:

$$\ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\omega_1} = -\gamma \frac{M_S}{c^2} \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^{R_S}, \quad \text{або} \quad \ln \frac{\omega_1}{\omega_0} = -\gamma \frac{M_S}{c^2 R_S} \quad (3)$$

Оскільки, як буде видно з кінцевого результату,  $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$ , то  $\ln \frac{\omega_1}{\omega_0}$  можна розкласти в ряд:

$$\ln \frac{\omega_1}{\omega_0} = \ln \left( 1 + \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \right) \approx \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \quad (4)$$

Таким чином,

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -\gamma \frac{M_S}{c^2 R_S} \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ ;  $M_S = 1,984 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ;  $R_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ км}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ), знаходимо:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{1,984 \cdot 10^{30}}{6,96 \cdot 10^8 (3 \cdot 10^8)^2} = -2,11 \cdot 10^{-6}$$

**Відповідь:**  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = -2,11 \cdot 10^{-6}$  (оскільки отриманий результат є від'ємною величиною, то це означає збільшення довжини хвилі  $\lambda_1 > \lambda_0$ ).

**Задача 12.5.6.** Визначити тиск променів Сонця: а) на поверхню чорного тіла, розміщеного на такій же відстані від Сонця, як і Земля; б) на поверхню тіла, яке відбиває всі промені; в) на поверхню скляної пластинки, яка відбиває 4 % енергії сонячних променів і поглинає 6 % цієї енергії. Кут падіння променів у всіх випадках дорівнює нулю, інтенсивність сонячного випромінювання  $I_0 = 1,35 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$

**Розв'язок:** Світловий тиск на поверхню тіла з коефіцієнтом відбивання  $R$  при нормальному падінні розраховують за формулою (12.9):

$$P = \frac{I}{c} (1 + R), \quad (1)$$

де  $I$  – інтенсивність світлового потоку,  $c$  – швидкість світла.

а) При  $R = 0$  з (1) випливає:

$$P_a = \frac{I}{c} = \frac{I_0}{c} = \frac{1,35 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3 \cdot 10^8 \text{ м}^2} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$$

б) При  $R = 1$  маємо:

$$P_b = \frac{2I_0}{c} = \frac{2 \cdot 1,35 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3 \cdot 10^8 \text{ м}^2} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$$

в) Тиск на скляну пластинку виникає в результаті відбивання і поглинання світла; світло, яке проходить через пластинку, тиску не створює.

Отже,

$$P_g = P_1 + P_2, \quad (2)$$

де  $P_1$  – тиск, який чинить відбите світло,  $P_2$  – тиск, що виникає при поглинанні світла.

Тиск при відбиванні світла ( $R = 1$ ) буде рівний:

$$P_1 = \frac{2I_1}{c}, \quad \text{або} \quad P_1 = \frac{2 \cdot 0,04 I_0}{c}, \quad (3)$$

де  $I_1 = 0,04 I_0$  – інтенсивність сонячного випромінювання, що відбивається від пластинки.

Аналогічно знаходимо тиск, який виникає при поглинанні ( $R = 0$ ) світла:

$$P_2 = \frac{I_2}{c}, \quad \text{або} \quad P_2 = \frac{0,06 I_0}{c}, \quad (4)$$

де  $I_2 = 0,06 I_0$  – інтенсивність сонячного випромінювання, що поглинається пластинкою.

Враховуючи (3) і (4), з формули (2) отримаємо:

$$P_g = \frac{I_0}{c} (2 \cdot 0,04 + 0,06) = \frac{1,35 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3 \cdot 10^8 \text{ м}^2} (2 \cdot 0,04 + 0,06) = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$$

**Відповідь:**  $P_a = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ ;  $P_b = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ ;  $P_c = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$ .

**Задача 12.5.7.** Паралельний пучок світла з інтенсивністю  $I = 0,2 \text{ Вт/см}^2$  падає під кутом  $\varphi = 60^\circ$  на плоске дзеркало з коефіцієнтом відбиття  $R = 0,9$ . Визначити тиск світла на дзеркало.

**Розв'язок:** Якщо б світло падало на дзеркало нормально ( $\varphi = 0$ ), то світловий тиск  $P_0$  виразився б формулою (12.9):

$$P_0 = \frac{I}{c}(1 + R).$$

З'ясуємо залежність світлового тиску  $P$  від кута падіння  $\varphi$ . Із визначення тиску і другого закону механіки Ньютона, застосованого до дзеркала, маємо, що шуканий тиск

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n \Delta t}{S \Delta t} = \frac{\Delta(mv_n)}{S \Delta t},$$

де  $\Delta(mv_n)$  – проекція імпульсу  $\Delta(m\vec{v})$ , наданого фотонами за час  $\Delta t$  дзеркалу в напрямку нормалі до нього,  $S$  – освітлена поверхня дзеркала з масою  $m$ . Відповідно до закону збереження імпульсу величина  $\Delta(mv_n)$  дорівнює сумарній зміні імпульсу  $\Delta\vec{p}$  всіх фотонів при їх взаємодії з дзеркалом за час  $\Delta t$ . Значить,

$$P = \frac{(\Delta p)_n}{S \Delta t}. \quad (2)$$

Величини  $S$  і  $(\Delta p)_n$  залежать від кута падіння  $\varphi$ . Справді, як видно із рис.12.1,

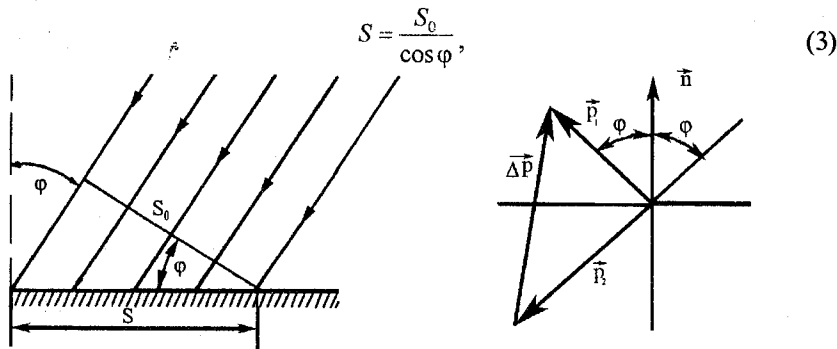


Рис. 12.1

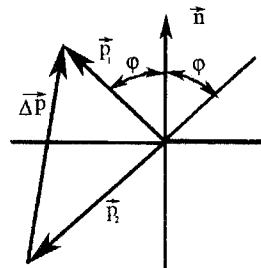


Рис. 12.2

де  $S_0$  – площа поперечного перерізу світлового пучка. На рис.12.2 зображені сумарні вектори імпульсів фотонів, падаючих на дзеркало  $\vec{p}_2$  і відбитих від нього  $\vec{p}_1$  за час  $\Delta t$ . Зміна імпульсів  $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ .

Переходячи до проекцій на напрямок нормалі  $\vec{n}$  до дзеркала, і враховуючи, що знаки проекцій  $(p_1)_n$  і  $(p_2)_n$  протилежні, будемо мати:

$$(\Delta p)_n = p_1 \cos \varphi - (-p_2 \cos \varphi) = (p_1 + p_2) \cos \varphi. \quad (4)$$

Із (2), (3) і (4) знаходимо:

$$P = \frac{p_1 + p_2}{S_0 \Delta t} \cos^2 \varphi. \quad (5)$$

Оскільки  $P = P_0$  при  $\varphi = 0$ , де тиск  $P_0$  визначається формулою (12.9), то в кінцевому результаті

$$P = \frac{I}{c}(1 + R) \cos^2 \varphi. \quad (6)$$

Підставляючи в (6) числові значення відповідних величин ( $I = 2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $R = 0,9$ ;  $\cos \varphi = 0,5$ ), отримаємо:  $P = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ .

**Відповідь:**  $P = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$ .

**Задача 12.5.8.** Знайти радіус кулястої порошокинки, для якої сила тиску світла дорівнює силі притягання. Порошинку вважати абсолютно чорним тілом, що має густину  $\rho = 3 \text{ г/см}^3$ .

**Розв'язок:** Сила тиску світла (сила відштовхування  $F_{\text{відшт}}$ ) дорівнює:

$$F_{\text{відшт}} = P \pi r^2, \quad (1)$$

де  $P$  – світловий тиск на поверхні Землі,  $\pi r^2$  – площа освітленої поверхні порошокинки,  $r$  – її радіус.

Сила сонячного притягання пилінки

$$F_{\text{прит}} = \gamma \frac{m M_S}{R^2} = \gamma \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{M_S}{R^2}, \quad (2)$$

де  $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$  – маса порошокинки,  $M_S$  – маса Сонця,  $R$  – відстань від Сонця до порошокинки, яку покладемо рівною радіусу земної орбіти. Прирівнюючи (1) і (2), відповідно умови задачі, маємо:

$$r = \frac{3 PR^2}{4 \gamma \rho M_S} \quad (3)$$

Підставляючи в (3) числові значення відповідних величин ( $P = 4,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ ;

$R = 149,6 \cdot 10^9 \text{ м}$ ;  $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ;  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ ), отримаємо:

$$r = \frac{3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6} (149,6 \cdot 10^9)^2}{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{30}} \text{ м} = 1,89 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$$

**Відповідь:**  $r = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$ .

**Задача 12.5.9.** Фотон рентгенівського випромінювання з енергією  $\varepsilon_f = 0,15 \text{ МеВ}$  розсіявся на вільному електроні, що знаходився в стані спокою, в результаті чого його довжина хвилі збільшилася на  $\Delta\lambda = 0,0015 \text{ \AA}$ . Знайти кут  $\varphi$ , під яким вилетів комптонівський електрон віддачі.

**Розв'язок:** Збільшення довжини хвилі рентгенівських променів, розсіяних речовиною, пояснюється пружним зіткненням фотонів з електронами. При пружному ударі фотон у відповідності із законами збереження передає вільному електрону частину імпульсу і енергії.

Зменшення енергії фотона означає за формулою  $\varepsilon_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  зменшення

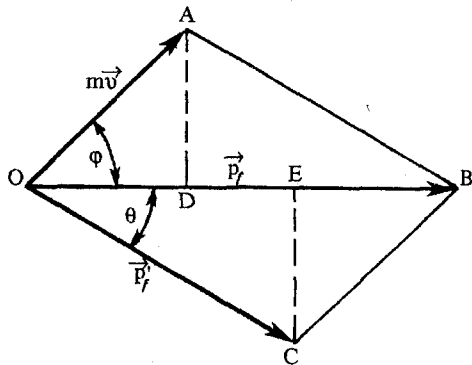


Рис. 12.3

частоти і збільшення довжини хвилі рентгенівського випромінювання.

За законом збереження імпульсу падаючого фотона дорівнює векторній сумі імпульсу  $\vec{p}'_f$  розсіяного фотона і імпульсу  $m\vec{v}$  вільного електрона, якого він набув в результаті співудару з фотоном (рис.12.3). Зауважимо, що кут розсіяння  $\theta$  можна визначити,

скориставшись формулою(12.11):

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \lambda_c(1 - \cos\theta), \quad (1)$$

де  $\theta$  – кут розсіяння,  $m$  – маса електрона,  $\lambda_c = \frac{h}{mc}$  – комптонівська довжина

хвилі частинки з масою  $m$ . Для електрона  $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ . Кут  $\varphi$  знайдемо із рис.12.3:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD}{OD} = \frac{CE}{BE} = \frac{p'_f \sin\theta}{p_f - p'_f \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{p_f}{p'_f} - \cos\theta}, \quad (2)$$

де відповідно (1)  $CE = p'_f \sin\theta$   
 $BE = p_f - p'_f \cos\theta$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c}, \quad (3)$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{\frac{\Delta\lambda(2\lambda_c - \Delta\lambda)}{\lambda_c^2}}. \quad (4)$$

Імпульси  $\vec{p}_f$  і  $\vec{p}'_f$  падаючого і розсіяного фотонів пов'язані з їх енергіями  $\varepsilon_f$  і  $\varepsilon'_f$  співвідношеннями:

$$p_f = \frac{\varepsilon_f}{c}, \quad \text{і} \quad p'_f = \frac{\varepsilon'_f}{c}. \quad (5)$$

Попередньо знайдемо енергію розсіяного фотона:

$$\varepsilon'_f = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda_c + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\frac{hc}{\varepsilon_f} + \Delta\lambda} = \frac{\varepsilon_f hc}{hc + \varepsilon_f \Delta\lambda}.$$

Отже, друга рівність (5) набуде вигляду:

$$p'_f = \frac{\varepsilon_f h}{hc + \varepsilon_f \Delta\lambda}. \quad (6)$$

Підставивши в (2) замість величин  $\cos\theta$ ,  $\sin\theta$ ,  $p_f$  і  $p'_f$  їх значення за формулами (3) – (6), після перетворень, отримаємо:

\* Значення світлового тиску на поверхні Землі взято із задачі 12.5.6

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{(2\lambda_c / \Delta\lambda) - 1}}{1 + \frac{\varepsilon_f \lambda_c}{ch}} = \frac{\sqrt{(2\lambda_c / \Delta\lambda) - 1}}{1 + \frac{\varepsilon_f}{mc^2}}} \quad (7)$$

Після підстановки числових значень відповідних величин ( $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ ;  $\Delta\lambda = 0,0015 \text{ \AA}$ ;  $\varepsilon_f = 0,15 \text{ MeV}$ ;  $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$ ), знайдемо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2 \frac{0,0242}{0,0015} - 1}}{1 + \frac{0,15}{0,511}} = 4,32; \quad \varphi = 76,97^\circ.$$

**Відповідь:**  $\varphi = 76,97^\circ$ .

**Задача 12.5.10.** Довжина хвилі рентгенівського випромінювання, яке падає на речовину з вільними електронами, дорівнює  $\lambda = 0,003 \text{ нм}$ . Яку енергію набуде комптонівський електрон віддачі при розсіянні фотона під кутом  $\theta = 60^\circ$ ?

**Розв'язок:** Внаслідок розсіяння фотона на електроні енергія фотона зменшиться на деяку величину. Відповідно до закону збереження енергії (системи електрон + фотон), енергія електрона збільшиться на таку ж саму величину, тобто:

$$\Delta\varepsilon_e = \varepsilon_f - \varepsilon'_f, \quad (1)$$

де  $\Delta\varepsilon_e$  – енергія, якої набуде електрон внаслідок розсіяння на ньому фотона,  $\varepsilon_f$  – енергія фотона до розсіяння,  $\varepsilon'_f$  – енергія фотона після розсіяння.

Враховуючи, що  $\varepsilon_f = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$ , а  $\varepsilon'_f = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda}$  формулу (1) можна переписати так:

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda} = 2\pi\hbar c \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}. \quad (2)$$

З урахуванням формули (12.11) отримаємо вираз для  $\Delta\varepsilon_e$ :

$$\boxed{\Delta\varepsilon_e = \frac{4\pi\hbar c \lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda \left( \lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}} \quad (3)$$

Після підстановки в (3) числових значень відповідних величин ( $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ;  $\lambda_c = 0,0242 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ;  $\lambda = 0,003 \text{ нм} = 0,003 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ;  $\theta = 60^\circ$ ) і відповідних обрахунків, отримаємо:

$$\Delta\varepsilon_e = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 1,054 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,42 \cdot 10^{-12} \sin^2 30^\circ}{3 \cdot 10^{-12} (3 \cdot 10^{-12} + 2,42 \cdot 10^{-12} \sin^2 30^\circ \cdot 2)} \text{ Дж} = 1,9 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 118,8 \text{ кеВ}.$$

**Відповідь:**  $\Delta\varepsilon_e = 118,8 \text{ кеВ}$ .

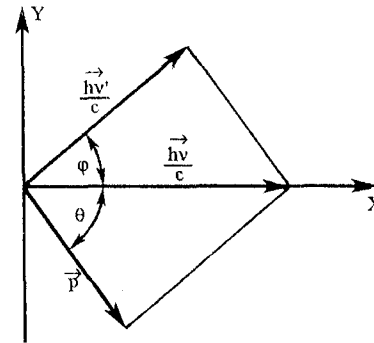


Рис. 12.4

**Задача 12.5.11.**  $\gamma$ -квант з енергією 2 Мев розсіюється на вільному електроні, який після зіткнення рухається під кутом  $\theta = 45^\circ$  до напрямку руху кванта до зіткнення (рис.12.4). Обчислити кут розсіяння фотона і комптонівське зміщення його довжини хвилі.

**Розв'язок:** Необхідно знайти зв'язок між кутами розсіяння  $\gamma$ -кванта і електрона віддачі. Для цього скористаємось законом збереження імпульсу системи:

$$\hbar\vec{k} = \vec{p} + \hbar\vec{k}', \quad (1)$$

де  $\vec{p}$  – імпульс електрона віддачі,  $|\vec{k}| = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$ ,  $|\vec{k}'| = \frac{2\pi\nu'}{c} = \frac{\omega'}{c}$ . Проектуючи рівняння (1) на осі координат, дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h\nu'}{c} \sin \varphi &= p \sin \theta \\ -\frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + \frac{h\nu}{c} &= p \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Із рівнянь (2) знаходимо:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{h\nu'}{c} \sin \varphi}{\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\nu - \nu' \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} + 1 - \cos \varphi}. \quad (3)$$

Підставляючи в (3)  $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ , матимемо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\sin \varphi}{\frac{2\lambda_c \sin^2(\varphi/2)}{\lambda} + 1 - \cos \varphi} = \frac{\lambda \sin \varphi}{\lambda_c(1 - \cos \varphi) + \lambda(1 - \cos \varphi)} = \\ &= \frac{\lambda \sin \varphi}{(\lambda_c + \lambda)(1 - \cos \varphi)} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{\lambda_c \varepsilon_f}{hc}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Далі із (4) маємо:

$$\boxed{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \theta \left(1 + \frac{\lambda_c \varepsilon_f}{hc}\right)}. \quad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення відповідних величин ( $\theta = 45^\circ$ ;  $\lambda_c = 0,0242 \cdot 10^{-10}$  м;  $\varepsilon_f = 3,2 \cdot 10^{-13}$  Джс;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Джс·с;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с), знайдемо:  $\frac{\varphi}{2} \approx 11,5^\circ$ . Комптонівське зміщення знаходимо за формулою Комптона (12.11):

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \cdot 0,0242 \sin^2 11,5^\circ \approx 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}.$$

**Відповідь:**  $\frac{\varphi}{2} \approx 11,5^\circ$ ;  $\Delta\lambda = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$ .

**Задача 12.5.12.** Комптонівське зміщення довжини хвилі рентгенівського кванта з  $\lambda = 0,05 \text{ \AA}$  дорівнює комптонівській довжині хвилі  $\lambda_c$  електрона. Знайти кут розсіяння фотона і кінетичну енергію електрона віддачі.

**Розв'язок:** Комптонівське зміщення  $\Delta\lambda$  визначається формулою:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1)$$

Відповідно умови задачі  $\Delta\lambda = \lambda_c$ . Тоді

$$\lambda_c = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

звідки

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}; \quad \theta = 90^\circ.$$

Кінетичну енергію віддачі знайдемо із рівняння збереження енергії:

$$h\nu + E = h\nu' + E', \quad (3)$$

де  $h\nu$  і  $h\nu'$  – відповідно енергія фотона до і після взаємодії,  $E$  – енергія спокою електрона,  $E'$  – енергія електрона віддачі. Із (3) маємо:

$$E_k = E - E' = h\nu - h\nu' = h\Delta\nu = \frac{hc}{\Delta\lambda}, \quad (4)$$

де  $\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Тоді

$$E_k = \frac{hc}{2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 0,0242 \cdot 10^{-10} \cdot \sin^2 \frac{90^\circ}{2}} = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 513 \text{ кеВ}.$$

**Відповідь:**  $\theta = 90^\circ$ ;  $E_k = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} \approx 513 \text{ кеВ}$ .

## 12.6 Задачі для самостійного розв'язування задач до теми XII

**12.6.1.** Знайти енергію фотона з довжиною хвилі: а) 400 нм; б) 700 нм; в) фотонів, генеруючих радіостанцією з частотною модуляцією на частоті 100 МГц?

**Відповідь:** а) 3,10 еВ; б) 1,77 еВ; в)  $4,14 \cdot 10^{-7}$  еВ.

**12.6.2.** Знайти енергію фотона в одиницях маси: 1) червоних променів світла ( $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$  см); 2) рентгенівських променів ( $\lambda = 0,25 \text{ \AA}$ ); 3) гамма-променів ( $\lambda = 1,24 \cdot 10^{-2}$  см).

**Відповідь:** 1)  $3,2 \cdot 10^{-36}$  кг; 2)  $8,8 \cdot 10^{-32}$  кг; 3)  $1,8 \cdot 10^{-30}$  кг.



**12.6.3.** Ртутна дуга має потужність  $P = 125 \text{ Вт}$ . Скільки квантів світла випускається щосекунди у випромінюванні з довжинами хвиль: 1)  $6123 \text{ \AA}$ ; 2)  $5791 \text{ \AA}$ ; 3)  $5464 \text{ \AA}$ ; 4)  $4047 \text{ \AA}$ ; 5)  $3655 \text{ \AA}$ ; 6)  $2537 \text{ \AA}$ . Інтенсивність цих ліній дорівнює відповідно: 1) 2%; 2) 4%; 3) 4%; 4) 2,9%; 5) 2,5%; 6) 4%; від інтенсивності ртутної дуги. Вважати, що 80 % потужності йде на випромінювання.

**Відповідь:** 1)  $6,2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $1,2 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ ; 3)  $1,1 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ ; 4)  $5,9 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ; 5)  $4,6 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ ; 6)  $5,1 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ .

**12.6.4.** З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його кінетична енергія була рівна енергії фотона з довжиною хвилі  $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ ?

**Відповідь:**  $v = 9,2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ .

**12.6.5.** З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі  $\lambda = 5200 \text{ \AA}$ ?

**Відповідь:**  $v = 1400 \text{ м/с}$ .

**12.6.6.** Монохроматичне світло, довжина хвилі якого  $\lambda = 555 \text{ нм}$ , падаючи на деяку поверхню, створює освітленість  $E = 100 \text{ лк}$ . Скільки фотонів потрапляє на площадку  $S = 1 \text{ см}^2$  за секунду? Механічний еквівалент світла  $A = 0,0016 \text{ Вт/лм}$ .

**Відповідь:**  $4,5 \cdot 10^{13} \text{ фотон/(см}^2 \cdot \text{с)}$

**12.6.7** Лампочка кишенькового ліхтаря споживає потужність  $P \approx 1 \text{ Вт}$ . Приймаючи, що потужність розсіюється у вигляді випромінювання і що довжина хвилі, яка відповідає середній частоті, дорівнює  $\lambda = 1 \text{ мкм}$ , визначити число фотонів, що падають на площадку величиною  $S = 1 \text{ см}^2$ , розміщеної нормально до променів на відстані  $l = 10 \text{ км}$  на протязі 1 с.

**Відповідь:**  $N = 4 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$

**3.2.51 12.6.8** Точкове джерело потужністю  $P = 100 \text{ Вт}$  випромінює у вигляді світла з середньою довжиною хвилі  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$  10 % підведеної потужності. Обчислити кількість фотонів, що випромінює це джерело за 1 с.

**Відповідь:**  $N = 3 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ .

**12.6.9.** Монохроматичний пучок паралельних світлових променів падає нормально на щілину і створює на екрані дифракційну картину. Знайти енергію та імпульс фотонів світлового потоку, якщо ширина щілини  $l = 5 \text{ мм}$ , а перший мінімум виникає в напрямку кута  $\varphi = 6^\circ$ .

**Відповідь:**  $\varepsilon_f = 2,35 \cdot 10^{-3} \text{ еВ}$ ;  $p_f = 1,27 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

**12.6.10.** На дифракційну решітку зі сталою  $d = 3 \cdot 10^{-13} \text{ м}$  падає нормально плоский монохроматичний світловий потік. Кути дифракції, які відповідають двом сусіднім максимумам на екрані, відповідно рівні  $\varphi_k = 23^\circ 35'$  і  $\varphi_{k+1} = 36^\circ 21'$ . Обчислити енергію фотонів даного світлового потоку.

**Відповідь:**  $\varepsilon_f = \frac{hc}{d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}$ .

**12.6.11.** Світловий потік потужністю  $P = 9 \text{ Вт}$  нормально падає на поверхню площею  $S = 10 \text{ см}^2$ , коефіцієнт відбиття якої  $R = 0,8$ . Якого тиску зазнає при цьому дана поверхня?

**Відповідь:**  $P = 54 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ .

**12.6.12.** Визначити діаметр кулеподібного супутника, який рухається навколо Землі, якщо сила тиску сонячного світла на супутник дорівнює  $11,2 \text{ мН}$ , коефіцієнт відбивання світла від поверхні супутника  $R = 1$ , сонячна стала  $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2 \cdot \text{с}$ . Поглинанням світла атмосферою знехтувати.

**Відповідь:**  $d = 38 \text{ м}$ .

**12.6.14.** Інтенсивність потоку паралельного монохроматичного світла  $I = 30 \text{ Дж/см}^2 \cdot \text{с}$ . Визначити імпульс, який переноситься даним потоком через площадку  $S = 100 \text{ см}^2$  за час  $\tau = 5 \text{ с}$ .

**Відповідь:**  $p = 5 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ .

**12.6.15.** Лазер випромінює в імпульсі тривалістю  $\tau = 0,13 \text{ мс}$  пучок світла з енергією  $E = 10 \text{ Дж}$ . Знайти середній тиск такого світлового імпульса, якщо його сфокусувати в пляму діаметром  $d = 10 \text{ мкм}$  на поверхню, перпендикулярну до пучка, з коефіцієнтом відбиття  $R = 0,5$ .

**Відповідь:**  $\langle P \rangle = \frac{4(1+R)E}{\pi d^2 \tau} \approx 5,0 \text{ МПа}$ .

3.2.52. 12.6.16. Короткочасний імпульс світла з енергією  $E = 7,5 \text{ Дж}$  у вигляді вузького майже паралельного пучка падає на дзеркальну пластинку з коефіцієнтом відбиття  $R = 0,6$ . Кут падіння  $\theta = 30^\circ$ . Визначити за допомогою корпускулярних уявлень імпульс, переданий пластинці.

$$\text{Відповідь: } p = \left(\frac{E}{c}\right) \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos 2\theta} = 35 \text{ нН} \cdot \text{с}.$$

12.6.17. Плоска світлова хвиля інтенсивністю  $I = 0,20 \text{ Вт/см}^2$  падає на плоску дзеркальну поверхню з коефіцієнтом відбиття  $R = 0,8$ . Кут падіння  $\theta = 45^\circ$ . Визначити за допомогою корпускулярних уявлень значення нормального тиску, який створює світло на цю поверхню.

$$\text{Відповідь: } P = \frac{I}{c}(1 + R) \cos^2 \theta = 0,6 \text{ нН/см}^2.$$

3.2.54 12.6.18. Плоска світлова хвиля інтенсивністю  $I = 0,7 \text{ Вт/см}^2$  освітлює сферу з абсолютно дзеркальною поверхнею. Радіус сфери  $r = 5 \text{ см}$ . Знайти силу світлового тиску на сферу.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{\pi r^2 I}{c} = 0,18 \text{ мкН}.$$

12.6.19. На осі круглої абсолютно дзеркальної пластинки знаходиться точкове ізотропне джерело, світлова потужність якого  $P$ . Відстань між джерелом і пластинкою в  $\eta$  раз більша за її радіус. Знайти силу світлового тиску на пластинку.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{P}{2c(1 + \eta^2)}.$$

12.6.20. Колба електричної лампи являє собою сферу радіуса  $r = 4 \text{ см}$ . Частина стінки в середині посріблена. Лампа споживає потужність  $N = 50 \text{ Вт}$ , 90 % якої витрачається на випромінювання. Що більше: тиск газу в колбі ( $P_r = 10^{-8}$ ) або світловий тиск на посріблену поверхню.

$$\text{Відповідь: } \frac{P_{\text{св}}}{P_r} = 11, \text{ де } P_{\text{св}} - \text{світловий тиск}.$$

3.2.55 12.6.21. Невеличке ідеально відбиваюче дзеркальце масою  $m = 10 \text{ мг}$  підвішене на невагомій нитці довжиною  $l = 10 \text{ см}$ . Знайти кут, на який відхиляється нитка, якщо по нормалі до дзеркальця в горизонтальному напрямку зробити "постріл" коротким імпульсом лазерного випромінювання

з енергією  $E = 13 \text{ Дж}$ . За рахунок чого дзеркальце набуде кінетичної енергії?

$$\text{Відповідь: } \sin(\theta/2) \approx \frac{Emc}{\sqrt{gl}}; \theta = 0,5^\circ.$$

12.6.22. Середній тиск плоскої синусоїдальної хвилі, падаючої під кутом  $\alpha$  на металічну поверхню, дорівнює  $P$ . Визначити амплітуду напруженості електричного поля цієї хвилі.

$$\text{Відповідь: } E = \sqrt{\frac{P}{\epsilon_0 \cos^2 \alpha}}.$$

12.6.23. Оцінити максимальний розмір алюмінієвих порошинок, які в космічному просторі під тиском світла віддалялись би від Сонця.

$$\text{Відповідь: } d \approx 10^{-4} \text{ м}.$$

12.6.24. На металічну стінку, яка рухається із швидкістю  $v$ , падає перпендикулярно плоска електромагнітна хвиля. Напруженість електричного поля хвилі дорівнює  $E$ . Який тиск чинить хвиля на стінку?

$$\text{Відповідь: } P = \frac{1}{2\pi} E_0^2 \frac{c+v}{c-v}.$$

12.6.25. Фотон з довжиною хвилі  $\lambda = 700 \text{ нм}$  (видима частина спектра) розсіюється під кутом  $\theta = \pi/2$  на вільному електроні, що знаходиться в стані спокою. Визначити:

- яку частину початкової енергії втрачає при цьому фотон?
- якої швидкості  $v$  набуває електрон?

Відповідь: а)  $\Delta E/E = \lambda_c / (\lambda + \lambda_c) = 0,35 \cdot 10^{-5}$ ,  $\lambda_c$  – комптонівська довжина хвилі; б)  $v = 1,5 \text{ км/с}$ .

12.6.26. а) Визначити кінетичну енергію  $E_k$ , якої набуває вільна частинка масою  $m_0$ , що знаходилась в стані спокою, при розсіянні на ній під кутом  $\theta$  фотона з енергією  $\epsilon_f$ ;

- спростити отриману формулу для випадку, коли  $\epsilon_f \ll mc^2$ .

**Відповідь:** а)  $E_k = \frac{\varepsilon_f \alpha \sin^2(\theta/2)}{1 + \alpha \sin^2(\theta/2)}$ , де  $\alpha = \frac{2\varepsilon_f}{mc^2}$ ; б)  $E_k = \frac{\varepsilon_f^2}{mc^2} (1 - \cos\theta)$ .

**12.6.27.** Фотон з довжиною хвилі  $\lambda = 6$  нм розсіявся під прямим кутом на вільному електроні, що знаходився в стані спокою. Знайти:

- а) частоту розсіяного фотона;  
б) кінетичну енергію електрона віддачі.

**Відповідь:** а)  $\omega' = \frac{2\pi^2 m}{m c \lambda + 2\pi \hbar} = 2,2 \cdot 10^{20} \text{ c}^{-1}$ ; б)  $T = \frac{4\pi^2 c \hbar^2}{(2\pi \hbar + \lambda m c) \lambda} = 60 \text{ кеВ}$ .

**12.6.28.** Фотон з імпульсом  $p = 1,02 \text{ МеВ/с}$ , де  $c$  – швидкість світла, розсіявся на вільному електроні, що знаходився в стані спокою, в результаті чого імпульс фотона став  $p' = 0,255 \text{ МеВ/с}$ . Під яким кутом розсіявся фотон?

**Відповідь:**  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{m c (p - p')}{2 p' p}}$ ,  $\theta = 120^\circ$ .

**12.6.29.** Фотон розсіявся під кутом  $\theta = 120^\circ$  на вільному електроні, що знаходився в стані спокою, в результаті чого електрон отримав кінетичну енергію  $T = 0,45 \text{ МеВ}$ . Знайти енергію фотона до розсіяння.

**Відповідь:**  $\hbar\omega = \left[1 + \sqrt{\frac{1 + 2m c^2}{T \sin(\theta/2)}}\right] \frac{T}{2} = 0,68 \text{ МеВ}$ .

**12.6.30.** Фотон з енергією  $\hbar\omega = 0,15 \text{ МеВ}$  розсіявся на вільному електроні, що знаходився в стані спокою, в результаті чого його довжина хвилі змінилася на  $\Delta\lambda = 3$  нм. Знайти кут, під яким вилетів комптонівський електрон.

**Відповідь:**  $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{(4\pi \hbar / m c \Delta\lambda)} - 1}{1 + (\hbar\omega / m c^2)}\right)$ ,  $\varphi = 31^\circ$ .

**12.6.31.** Вузкий пучок монохроматичного рентгенівського випромінювання падає на розсіюючу речовину. При цьому довжини

зміщених хвиль, які складають випромінювання, розсіяного під кутами  $\theta_1 = 60^\circ$  і  $\theta_2 = 120^\circ$ , відрізняються одна від одної в  $\eta = 2$  рази. Вважаючи, що розсіяння відбувається на електронах, знайти довжину хвилі падаючого випромінювання.

**Відповідь:**  $\lambda = 2\lambda_c \frac{\sin(\theta_2/2) - \eta \sin(\theta_1/2)}{\eta - 1} = 1,2 \text{ нм}$ .

**12.6.32.** Фотон з енергією  $\hbar\omega = 1 \text{ МеВ}$  розсіявся на вільному електроні, що знаходився в стані спокою. Знайти кінетичну енергію електрона віддачі, якщо в результаті розсіяння довжина хвилі фотона змінилась на  $\eta = 25\%$ .

**Відповідь:**  $T = \frac{\hbar\omega\eta}{1 + \eta} = 0,2 \text{ МеВ}$ .

**12.6.33.** Фотон з енергією  $\hbar\omega = 250 \text{ кеВ}$  розсіявся під кутом  $\theta = 120^\circ$  на вільному електроні, що знаходився в стані спокою. Визначити енергію розсіяного фотона.

**Відповідь:**  $\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1 + 2(\hbar\omega/mc^2)\sin(\theta/2)} = 0,144 \text{ МеВ}$ .

**12.6.34.** а)  $\gamma$ -квант з частотою  $\nu$  розсіявся на нерухомій частинці під кутом  $\theta$  до початкового напрямку руху. При цьому частота зменшилася на  $\Delta\nu \ll \nu$ . Визначити масу цієї частинки.

б) фотон з частотою  $\nu$  розсіюється на електроні. Визначити зміну частоти фотона, розсіяного під кутом  $\theta$  ( $h\nu \ll mc^2$ ).

**Відповідь:** а)  $m = \frac{h\nu^2}{c^2 \Delta\nu} (1 - \cos\theta)$ ; б)  $\Delta\nu = \frac{h\nu^2}{m c^2} (1 - \cos\theta)$ .

## Найважливіші оптичні одиниці СІ

Таблиця 1

Найменування величини	Найменування одиниці	Позначення	
		українське	міжнародне
Енергія випромінювання	джоуль	Дж	J
Об'ємна густина енергії випромінювання	джоуль на кубічний метр	Дж/м <sup>3</sup>	J/m <sup>3</sup>
Потік випромінювання, потужність випромін.	ват	Вт	W
Поверхнева густина потоку випромінювання	ват на квадратний метр	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>
Енергетична світність (випромінюваність)	ват на квадратний метр	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>
Енергетична освітленість (опромінюваність)	ват на квадратний метр	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>
Енергетична експозиція (промениста експозиція)	джоуль на квадратний метр	Дж/м <sup>2</sup>	J/m <sup>2</sup>
Енергетична сила світла (сила випромінювання)	ват на стерадіан	Вт/ср	W/sr
Енергетична яскравість (променистість)	ват на стерадіан-квадратний метр	Вт/(ср·м <sup>2</sup> )	W/(sr·m <sup>2</sup> )
Спектральна густина енергетичної світності за довжиною хвилі	ват на метр в кубі	Вт/м <sup>3</sup>	W/m <sup>3</sup>
Спектральна густина енергетичної сили світла за довжиною хвилі	ват на метр-стерадіан	Вт/(м·ср)	W/(m·sr)
Спектральна густина енергетичної яскравості за довжиною хвилі	ват на стерадіан-метр в кубі	Вт/(ср·м <sup>3</sup> )	W/(sr·m <sup>3</sup> )
Лінійний показник поглинання	метр в мінус першому степені	м <sup>-1</sup>	m <sup>-1</sup>

Найменування величини	Найменування одиниці	Позначення	
		українське	міжнародне
Сила світла	кандела	кд	kd
Світловий потік	люмен	лм	lm
Спектральна світлова ефективність (спектральний світловий еквівалент потоку випромінювання; видність випромінювання)	люмен на ват	лм/Вт	lm/W
Освітленість	люкс	лк	lx
Світність	люмен на квадратний метр	лм/м <sup>2</sup>	lm/m <sup>2</sup>
Яскравість	кандела на квадратний метр	кд/м <sup>2</sup>	kd/m <sup>2</sup>
Світлова експозиція	люкс-секунда	лк·с	lx·s
Світлова віддача джерела	люмен на ват	лм/Вт	lm/W
Стала обертання площини поляризації	радіан на метр	рад/м	rad/m
Питома стала обертання площини поляризації	радіан-метр в квадраті на кілограм	рад·м <sup>2</sup> /кг	rad·m <sup>2</sup> /kg

Таблиця 2

Окремі фундаментальні фізичні константи

Константа	Позначення	Числове значення *
Швидкість світла у вакуумі	c	299792458 м·с <sup>-1</sup>
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	12,566370614 · 10 <sup>-7</sup> Гн·м <sup>-1</sup>
Електрична стала	$\epsilon_0$	8,854187817 · 10 <sup>-12</sup> Ф·м <sup>-1</sup>
Гравітаційна стала	G	6,673 · 10 <sup>-11</sup> Н·м <sup>2</sup> ·кг <sup>-2</sup>
Стала Планка	h	6,62606876 · 10 <sup>-34</sup> Дж·с
Стала Дірака	$\hbar = h/2\pi$	1,054571596 · 10 <sup>-34</sup> Дж·с
Заряд електрона	e	1,602176462 · 10 <sup>-19</sup> Кл
Атомна одиниця маси	а.о.м.	1,66053873 · 10 <sup>-27</sup> кг
Маса спокою електрона	m <sub>e</sub>	9,10938188 · 10 <sup>-31</sup> кг
Маса спокою протона	m <sub>p</sub>	1,67262158 · 10 <sup>-27</sup> кг
Маса спокою нейтрона	m <sub>n</sub>	1,67492716 · 10 <sup>-27</sup> кг
Об'єм 1 моля	V <sub>0</sub>	22,413996 · 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup>
Число Авогадро	N <sub>A</sub>	6,02214199 · 10 <sup>-23</sup> моль <sup>-1</sup>
Стала Больцмана	k = R/N <sub>A</sub>	1,3806503 · 10 <sup>-23</sup> Дж·К <sup>-1</sup>
Стала Лошмідта	N <sub>L</sub>	2,6867775 · 10 <sup>25</sup> м <sup>-3</sup>
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_c$	2,426310215 · 10 <sup>-12</sup> м
Стала Стефана-Больцмана	$\sigma = 2\pi^5 R^4/15c^2 h^3$	5,670400 · 10 <sup>-8</sup> Вт·м <sup>-2</sup> ·К <sup>-4</sup>
Перша стала випромінювання	$a_1 = 2\pi\hbar c^2$	3,74177107 · 10 <sup>-16</sup> Вт·м <sup>2</sup>
Друга стала випромінювання	$b_1 = hc/k$	0,014387752 м·К
Стала в законі зміщення Віна	$b = hc/(4,965114231k)$	2,8977686 · 10 <sup>-3</sup> м·К

\* Дані запозичені із Buyers' Guide 2001 Supplement to the August 2001 Issue of Physics Today

Таблиця 3

Окремі астрономічні дані

Назва величини	Позначення	Числове значення
Сонце :		
маса	M <sub>S</sub>	2 · 10 <sup>30</sup> кг
радіус	R <sub>S</sub>	696 · 10 <sup>6</sup> м
густина (середня)	$\rho_S$	1400 кг/м <sup>3</sup>
Земля :		
маса	M <sub>E</sub>	6 · 10 <sup>24</sup> кг
радіус	R <sub>E</sub>	6,371 · 10 <sup>6</sup> м
густина	$\rho_E$	5518 кг/м <sup>3</sup>
Місяць:		
маса	M <sub>M</sub>	7,3 · 10 <sup>22</sup> кг
радіус	R <sub>M</sub>	1,738 · 10 <sup>6</sup> м
густина	$\rho_M$	3350 кг/м <sup>3</sup>
Відстань від Землі до Сонця (середня)	L	1,5 · 10 <sup>11</sup> м
Відстань від Землі до Місяця (середня)	l	3,84 · 10 <sup>8</sup> м
Середня швидкість Землі по орбіті	v	~30 км/год

Таблиця 4

Множники і префікси для утворення десяткових кратних одиниць та їх найменування

Множник	Префікс	Позначення префікса	
		українське	міжнародне
10 <sup>18</sup>	екса	Е	Е
10 <sup>15</sup>	пета	П	Р
10 <sup>12</sup>	тера	Т	Н
10 <sup>9</sup>	гіга	Г	Г
10 <sup>6</sup>	мега	М	М
10 <sup>3</sup>	кіло	к	к
10 <sup>2</sup>	гекто	г	h
10 <sup>1</sup>	дека	да	da
10 <sup>-1</sup>	деци	д	d
10 <sup>-2</sup>	санти	с	с
10 <sup>-3</sup>	мілі	м	m
10 <sup>-6</sup>	мікро	мк	μ
10 <sup>-9</sup>	нано	н	n
10 <sup>-12</sup>	піко	п	p
10 <sup>-15</sup>	фемто	ф	f
10 <sup>-18</sup>	атто	а	a

Таблиця 5

Абсолютні показники заломлення  $n$  дистильованої води при 293 К для різних довжин хвиль

$\lambda$ , м	$n$	$\lambda$ , м	$n$
$4,311 \cdot 10^{-7}$	1,3403	$5,893 \cdot 10^{-7}$	1,3330
$4,861 \cdot 10^{-7}$	1,3371	$6,562 \cdot 10^{-7}$	1,3311
$0,546 \cdot 10^{-7}$	1,3345	$7,682 \cdot 10^{-7}$	1,3289

Таблиця 6

Показник заломлення  $n$  води для різної температури  $t$

$t$ , °С	$n$	$t$ , °С	$n$	$t$ , °С	$n$
0	1,3339	40	1,3306	80	1,3229
10	1,3337	50	1,3289	90	1,3215
20	1,3330	60	1,3272	100	1,3178
30	1,3319	70	1,3251		

Таблиця 7

Сила світла деяких джерел (середні значення)

Джерело світла	Сила світла, кд
Сонце	$3 \cdot 10^{27}$
Військовий прожектор	$8 \cdot 10^8 \div 1,2 \cdot 10^9$
Електрична дуга	$10^3 \div 10^5$
Лампа розжарювання (потужність 60 Вт)	51
Стеаринова свічка	$0,5 \div 2$

Таблиця 8

Сила світла електричних ламп розжарювання

Потужність лампи, Вт	15	25	40	60	100	150	300	500	1000
Сила світла, кд	10	18	30	51	103	175	388	695	1530

Таблиця 9

Норми освітленості в приміщеннях

	Норма освітленості, лк	Поверхня, до якої відноситься норма освітленості
Навчальні аудиторії, лабораторії, кабінети	150	На рівні 0,8 м від підлоги
Читальні зали, бібліотеки	100	На рівні 0,8 м від підлоги
Аудиторні дошки	150	Вертикальна площина
Житлові кімнати	50	На рівні 0,8 м від підлоги

Таблиця 10

Інтервали довжин хвиль та частот і кольори, які їм відповідають у видимій ділянці спектра

Колір спектру	Довжина хвилі, $10^{-7}$ , м	Частота, ТГц	Число довжин хвиль, які вкладаються на довжині 1 мм
Червоний	7,6 - 6,2	395 - 485	1316 - 1610
Оранжевий	6,2 - 5,9	485 - 508	1610 - 1695
Жовтий	5,9 - 5,6	508 - 536	1695 - 1785
Зелений	5,6 - 5,0	536 - 600	1785 - 2000
Голубий	5,0 - 4,8	600 - 625	2000 - 2083
Синій	4,8 - 4,5	625 - 667	2083 - 2222
Фіолетовий	4,5 - 3,8	667 - 789	2222 - 2632

Таблиця 11

Червона межа фотоэффекту для деяких речовин

Речовина	Довжина хвилі, $10^{-7}$ , м	Речовина	Довжина хвилі, $10^{-7}$ , м
Барій	4,84	Срібло	2,60
Вольфрам	2,72	Сурма	3,10
Калій	5,50	Сурмяноцезієвий катод	6,70
Мідь	2,70	Цезій	6,20
Ртуть	2,60	Цинк	2,20
Рубідій	5,73		

Таблиця 12

Енергія одного кванта (фотона) видимого випромінювання різної довжини хвилі (частоти)

$\lambda, \cdot 10^{-7}, \text{ м}$	$\nu, \text{ ТГц}$	Колір променів	Енергія одного кванта	
			$\cdot 10^{-18} \text{ Дж}$	еВ
7,60	385	Темно-червоний	0,26	1,6
6,20	395	Червоний	0,32	2,0
5,90	508	Оранжевий	0,34	2,1
5,60	536	Жовтий	0,26	2,2
5,00	600	Зелений	0,40	2,5
4,80	625	Голубий	0,41	2,6
4,50	666	Синій	0,44	2,7
3,80	789	Фіолетовий	0,52	3,3

Таблиця 13

Робота виходу електрона з різних речовин

Речовина	Робота виходу електрона	
	$\cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	еВ
Барій	3,8	2,4
Барій на вольфрамі	1,8	1,1
Вольфрам	7,2	4,5
Германій	7,7	4,8
Закис міді	8,3	5,2
Золото	6,9	4,3
Кальцій	4,5	2,8
Молібден	6,9	4,3
Нікель	7,2	4,5
Оксид барію	1,6	1,0
Платина	8,5	5,3
Рубідій	3,5	2,2
Срібло	6,9	4,3
Торій	5,4	3,4
Торій на вольфрамі	4,2	2,6
Цезій	2,9	1,8
Цезій на вольфрамі	2,2	1,4
Цезій на платині	2,1	1,3

## Додаток В

Окремі математичні формули

## 1. Корені квадратного рівняння

а) Якщо  $ax^2 + bx + c = 0$ ,

то

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

б) Якщо  $x^2 + px + q = 0$ ,

то

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 2. Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути, протилежні сторонам  $a, b, c$  відповідно.

## 3. Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

## 4. Площі і об'єми

Фігура або тіло	Площа або площа поверхні	Об'єм
Круг радіуса $r$	$\pi r^2$	–
Сфера радіуса $r$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3} \pi r^3$
Кульовий сегмент висотою $H$	$2\pi r H$	$\frac{1}{3} \pi H^2 (3r - H)$

5. Зв'язок між тригонометричними функціями одного аргументу

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
$\sin \alpha$	-	$= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$= \frac{tg \alpha}{\pm \sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + ctg^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	-	$= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$= \frac{ctg \alpha}{\pm \sqrt{1 + ctg^2 \alpha}}$
$tg \alpha$	$= \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$= \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	-	$= \frac{1}{ctg \alpha}$
$ctg \alpha$	$= \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$= \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{tg \alpha}$	-

6. Тригонометричні функції суми і різниці двох кутів

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg \alpha \pm tg \beta}{1 \mp tg \alpha tg \beta};$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg \alpha ctg \beta \mp 1}{ctg \beta \pm ctg \alpha};$$

7. Тригонометричні функції подвійних і половинних кутів

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}; \quad ctg 2\alpha = \frac{ctg^2 \alpha - 1}{2ctg \alpha};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$ctg \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

8. Перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій в добуток

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha);$$

$$tg \alpha \pm tg \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad ctg \alpha \pm ctg \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 \pm tg \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$1 - tg^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - ctg^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$$



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \\ \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \\ \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

### 9. Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]; \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta)] + \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

### Додаток С

#### Похідні та інтеграли

##### 1. Похідні: загальні правила

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

$$\frac{d}{dx} [af(x)] = a \frac{df}{dx} \quad (a = \text{const}),$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) + \varphi(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} [f(x)\varphi(x)] = \frac{df}{dx} \varphi + f \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{d}{dx} [f(y)] = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (\text{диференціювання складної функції}),$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{якщо } \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

##### 2. Похідні різних функцій

$$\frac{da}{dx} = 0 \quad (a = \text{const}),$$

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax,$$

$$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax,$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} ax = a \operatorname{sec}^2 ax,$$

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax}.$$

## 3. Невизначені інтеграли: загальні правила

$$\int dx = x,$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad (a = \text{const}),$$

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx,$$

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (\text{інтегрування по частинам}).$$

## 4. Невизначені інтеграли від різних функцій

(До правої частини рівності може бути додана довільна стала)

$$\int adx = ax \quad (a = \text{const}),$$

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} \quad (m \neq -1),$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax,$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax,$$

$$\int \operatorname{tg} ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sec ax|,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| & \text{при } x^2 > a^2, \\ -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| & \text{при } x^2 < a^2. \end{cases}$$

## Додаток D

## 1. Окремі перевідні множники

## Довжина

$$1 \text{ мікрон (мк)} = 10^{-6} \text{ м}$$

$$1 \text{ нанометр (нм)} = 10^{-9} \text{ м}$$

$$1 \text{ ангстрем (А)} = 10^{-10} \text{ м}$$

$$1 \text{ ікс-одиниця (X)} = 10^{-13} \text{ м}$$

$$1 \text{ фермі} = 10^{-15} \text{ м}$$

$$1 \text{ світловий рік} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ м}$$

## Маса

$$1 \text{ атомна одиниця}$$

$$\text{маси (а.о.м.)} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

## Енергія

$$1 \text{ еВ} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$1 \text{ кВт-год} = 3,8 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

## Тиск

$$1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 760 \text{ мм. рт. ст.}$$

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

## 2. Грецький алфавіт

Альфа А α

Бета В β

Гамма Г γ

Дельта Δ δ

Епсілон Ε ε

Дзета Ζ ζ

Ета Η η

Тета Θ θ

Йота Ι ι

Каппа Κ κ

Лямбда Λ λ

Мю Μ μ

## Час

$$1 \text{ доба} = 1,44 \cdot 10^3 \text{ хв} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ с}$$

$$1 \text{ рік} = 5,26 \cdot 10^5 \text{ хв} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ с}$$

## Площа

$$1 \text{ мм}^2 = 10^{-2} \text{ см}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$1 \text{ барн (δ)} = 10^{-28} \text{ м}^2$$

## Потужність

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$$

## Кут

$$1 \text{ радіан (рад)} = 57,3' = 57,18''$$

$$1' = 0,01745 \text{ рад}$$

$$1'' \text{ (кутова хв.)} = 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ рад}$$

$$1'' \text{ (кутова сек.)} = 4,85 \cdot 10^{-6} \text{ рад}$$

$$1 \frac{\text{об}}{\text{хв}} = 0,1047 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Ню Ν ν

Ксі Ξ ξ

Омікрон Ο ο

Пі Π π

Ро Ρ ρ

Сіґма Σ σ

Тау Τ τ

Іпсілон Υ υ

Фі Φ φ φ

Хі Χ χ

Псі Ψ ψ

Омега Ω ω

## ЛІТЕРАТУРА

1. Остафійчук Б.К., Рувінський М.А., Фреїк Д.М., Яцура М.М. Курс загальної фізики. Хвильова оптика. – Івано-Франківськ : Плай, 1998.
2. Остафійчук Б.К., Рувінський М.А., Яцура М.М. Курс загальної фізики. Оптика: кванти, промені, хвилі. – Івано-Франківськ : Плай, 2000.
3. Рувінський М.А., Остафійчук Б.К., Галуцук М.О., Фреїк Д.М., Яцура М.М. Курс загальної фізики. Квантова фізика атомів, молекул і конденсованих середовищ. – Київ-Івано-Франківськ: Плай, 1998.
4. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976.
5. Матвеев А. Н. Оптика. – М.: Высшая школа, 1985.
6. Фриш С.Э., Тиморева А.В. Курс общей физики. т. 3. Оптика. Атомная физика. – М.: ГИТТЛ, 1964.
7. Остроухов А.А., Стрижевський В.Л., Цвєлих М.Г., Цяценко Ю.П. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. – К.: Радянська школа, 1966.
8. Гинзбург В.Л., Левин Л.М., Сивухин Д.В., Четверикова Е.С., Яковлев И.А. Сборник задач по общему курсу физики. Оптика. – М.: Наука, 1997.
9. Горбунова О.И., Зайцева В.М., Красников С.Н. Задачник-практикум по общей физике. Оптика. Атомная физика. – М.: Наука, 1977.
10. Иродов И.Е., Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике. – М.: Наука, 1975.
11. Загуста Г.А., Макеева Г.П., Микулч А.С., Савицкая И.Ф., Цедрик М.С. Сборник задач по курсу общей физики. – М.: Просвещение, 1989.
12. Мурзов В.И., Коненко А.Ф., Филиппова Л.Г. Общая физика в задачах и решениях. – Минск : Высшая школа.
13. Руссо М., Матье Ж.П. Задачи по оптике. – М.: Мир, 1976.
14. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978.
15. Сена Л.А. Сборник вопросов и задач по физике. – М.: Высшая школа, 1986.
16. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1977.
17. Остафійчук Б.К., Рувінський М.А., Яцура М.М. Фізичний лабораторний практикум. Оптика. – Івано-Франківськ.: Плай, 2000.
18. Кухлинг Х.Я. Справочник по физике. – М.: Мир, 1982.
19. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1966.
20. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973.

## ЗМІСТ

Передмова	3
Тема I. Основні властивості світла	5
Тема II. Світлові вимірювання (фотометрія)	19
Тема III. Інтерференція світла	47
Тема IV. Дифракція світла	88
Тема V. Геометрична оптика	133
Тема VI. Поляризація світла	192
Тема VII. Взаємодія електромагнітної хвилі з речовиною	231
Тема VIII. Швидкість світла. Дисперсія і поглинання світла	251
Тема IX. Явище Допплера. Оптика рухомих середовищ.	
Релятивістська механіка	274
Тема X. Теплове випромінювання	297
Тема XI. Фотоелектричний ефект	315
Тема XII. Квантові властивості світла	332
Додаток А. Найважливіші оптичні одиниці СІ. Основні фундаментальні фізичні і оптичні константи	356
Додаток В. Окремі математичні формули	363
Додаток С. Похідні та інтеграли	367
Додаток D. Окремі перевідні множники	369
Література	371

Богдан Костянтинович Остафійчук  
Марк Аунович Рувінський  
Михайло Михайлович Яцура

Практикум  
розв'язування задач з курсу  
загальної фізики.  
Оптика.

*За редакцією д-ра фіз.-мат. наук,  
проф. Б.К.Остафійчука*

Старший редактор *О.П.Бойчук*  
Літературний редактор *Л.С.Кайкан*  
Набір і комп'ютерна верстка *Л.С.Яблонь*

Здано до набору 11.06.2001р.  
Підписано до друку 24.12.2001р.  
Формат 60x84/16. Папір офсетн.  
Літ. гарн. Умовн. друк. арк. 23,75  
Тираж 1000 прим. (Попередній 300 прим.)

НБ ПНУС



758585

Видавництво Прикарпатського університету "Плай",  
Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57,  
тел. 2-33-79