З Божою допомогою,

Р.Заторський

ДЕЯКІ МЕТОДИ ТА ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

(Спеціальний курс математики)

Міністерство освіти і науки України

Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ДЕЯКІ МЕТОДИ ТА ЗАДАЧІ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

(Спеціальний курс математики)

Івано-Франківськ
2006

УДК 519.1

Деякі методи та задачі комбінаторного аналізу (Спеціальний курс математики)/ Р.А.Заторський. – Івано-Франківськ.: Лік, 2006. – 136 с.

В книзі вперше викладено загальні теореми комбінаторики мультимножин. Центральне місце в книзі відведено початковим відомостям та поняттям, побудованої автором, теорії парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць та їх застосуванням в теорії чисел, теорії неперервних дробів та до розв'язання деяких класів комбінаторних задач.

Книга буде корисною для спеціалістів у галузі комбінаторного аналізу та алгебри, а також для студентів та аспірантів університетів спеціальності "Математика".

Рецензенти: В.М.Мойсишин, д-р техн. наук, проф.
О.Р.Никифорчин, к. ф.-м. наук, доц.

Затверджено Радою
факультету математики та інформатики
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника 16 лютого 2006 року

Зміст

ПЕРЕДМОВА АВТОРА

Комбінаторний аналіз все більше пронизує дискретну математику. Сьогодні його розвиток стимулюється розвитком багатьох галузей дискретної математики. В останній часто виникають задачі, в яких досліджуються сукупності об'єктів, серед яких зустрічаються і однакові об'єкти. В цих випадках мова канторівської теорії множин викликає певні незручності. В зв'язку з цим з середини минулого століття все більшої ваги починає набувати поняття мультимножини, тобто сукупності елементів, які можуть і повторюватись. Поступово починає формуватись і понятійний аппарат для роботи з мультимножинами (див., наприклад, [1-3]). Тут у першу чергу слід згадати введені Сачковим В.Н. [1] поняття первинної та вторинної специфікації, які виявились дуже зручними для задання і характеризації мультимножин. У 70-і роки до вивчення мультимножин епізодично звертаються різні автори (Стєчкін Б.С., Большаков В.І., Грін К., Клейтман Д.А., Ліпскі М. та ін.), а присвячені мультимножинам розділи займають достойне місце на сторінках класичних монографій М. Айгнера [4] та Р.Стенлі [5]. Систематичні відомості про мультимножини та специфікації Сачкова мультимножин читач знайде в першому розділі книги.

Таким чином, поняття множини стає частинним випадком поняття мультимножини і природно виникає задача узагальнення класичних результатів комбінаторики скінченних множин на мультимножини. Так, Грін і Клейтман в [3], по суті, розглядають задачу про обчислення числа r-підмультимножин скінченної мультимножини. Однак у загальному випадку розв'язано дуже мало задач, автори, як правило, обмежуються розглядом лише деяких частинних, хоча й дуже важливих, прикладів мультимножин. Тому питання про розв'язання відповідних задач у загальному випадку або про побудову ефективних алгоритмів для їх розв'язання актуальне. Загальні комбінаторні теореми про сполучення та перестановки на мультимножинах доведені автором у 1986 році в [6]. Ці теореми являються центральними в другому розділі книги. В другому розділі читач знайде

також ефективні алгоритми для знаходження числа сполучень та перестановок на мультимножинах (див. [7], [50]) .

Дуже важливим не тільки для комбінаторного аналізу, а й для багатьох інших розділів математики є поняття частково впорядкованої множини (ч.в.м). Поняття ч.в.м. вперше розглядалося Ф. Хаусдорфом [33]. Пізніше воно було розвинуте в працях Г.Кантора, Е.Мура, Г.Сміга, С.О. Шатуновського [34-37] та інших. У комбінаторному аналізі поряд із дослідженням структурних властивостей ч.в.м. багато уваги приділяють різноманітним комбінаторним задачам на перелік ч.в.м. із тими чи іншими додатковими властивостями. Типовими задачами, які виникають у зв'язку з числовими характеристиками ч.в.м., є задачі обчислення потужності конкретних ч.в.м., їх висоти і ширини, кількості максимальних ланцюгів, числа елементів одного рівня діаграми Хассе, числа максимальних ланцюгів, які проходять через фіксований елемент, екстремальні задачі на ч.в.м., тощо. Дослідженнями числових характеристик ч.в.м. займалися такі автори як: В.І. Баранов, В.І. Большаков, Б.С. Стечкін, Дж. Гольдман, Дж.-К. Рота, П.Ердьош, Р.К. Гай, Дж.В.Мун та ін. (див. [10-14]). При дослідженні числових характеристик деяких конкретних ч.в.м. (наприклад, ч.в.м. так званих похилих діаграм) з'являються такі важливі і поширені не тільки в комбінаторному аналізі структури як таблиці Юнга та графи Ферре [17]. Поняття стандартної таблиці ввів А. Юнг у серії статтей по кількісному аналізу підстановок [16]. В 1938 році Г. де Б. Робінсон і в 1959-1960 роках К. Шенстед [18,19] незалежно один від одного встановили взаємно однозначну відповідність між перестановками і парами стандартних таблиць Юнга, яка пізніше дістала назву відповідності Робінсона-Шенстеда. Діаграми, таблиці Юнга і пов'язані з ними структури відіграють дуже важливу роль і в алгебрі, особливо в теорії зображень симетричних груп. Однак багато питань, особливо щодо так званих похилих діаграм, залишаються відкритими. Останній пункт другого розділу присвячено знаходженню числа стандартних таблиць Юнга похилих діаграм. Ця задача розв'язана в [3]. В [15] автор подає новий метод доведення цієї теореми, частинним випадком якої є результат Фрейма-Робінсона-Тролла про число стандартних таблиць Юнга діаграм Ферре [17] і показує, що це число може бути знайдене при допомозі деякої матриці Вандермонда.

Задачі балотування та математичної статистики (1951-1954 рр – Б.В.Гнєденко, В.С.Королюк, В.С.Михалєвич, К.Л.Рвачова) та задачі про випадкові блукання на решітках (ці задачі, зокрема, розглядалися такими авторами як Дж. Пойя, Спіцер та ін. [20,21]), породили новий напрям у комбінаторному аналізі, де вивчаються траєкторії на цілочисельних решітках. Так, у монографії Я. Гульдена та Д. Джексона [22], шляхам на цілочисельній решітці присвячено цілий розділ. У зв'язку з цим природно виникають задачі про шляхи на цілочисельних решітках із різними природними обмеженнями. Зокрема, є цілий ряд важливих задач, що стосуються шляхів на графах Ферре та похилих діаграмах. Задачам про шляхи на цілочисельних решітках присвячено п. 2.1. другого розділу та п.4.4. четвертого розділу книги. Ці пункти книги базуються відповідно на результатах автора, викладених відповідно в [6] та [51].

Ефективне розв'язання багатьох класів комбінаторних задач стає можливим завдяки створенню спеціального математичного апарату. Добре відомо, яку роль відігравав і продовжує відігравати в комбінаторному аналізі метод генератрис. Однак завжди лишаються задачі, які не піддаються вже відомим методам. Тому завжди буде лишатись актуальним питання створення нових методів чи ефективного апарату для розв'язання різних класів задач. Таким апаратом є, запропонована автором (див. [24]-[26], [51]-[54]), теорія парадетермінантів та перманентів трикутних матриць. Початки цієї теорії викладено в третьому та четвертому розділах.

Роман Заторський

Лютий 2006 року

РОЗДІЛ 1

НЕОБХІДНІ ВІДОМОСТІ ІЗ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Загальні відомості про мультимножини та специфікації Сачкова

Символами Z, N_0 і N завжди позначатимуться множини цілих, цілих невід'ємних і натуральних чисел відповідно.

Означення 1.1. *Мультимножиною A називають довільний невпорядкований набір елементів деякої множини $[A]$, яку називають базою цієї мультимножини. Кратність k входження елемента a множини $[A]$ в мультимножину A позначають через $a^k \in A$.*

Означення 1.2. *Специфікацією Сачкова мультимножини A називають мультимножину $k(A)$ кратностей її елементів.*

Кожна мультимножина A однозначно задається своєю базою $[A]=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ та специфікацією $k(A)=\{k_1,k_2,\dots,k_n\}$, де $k_i \in N_0$, $i=1,\dots,n$ і може бути записана у *канонічному вигляді*

$$A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}. \tag{1.1}$$

Зауваження. Ідея введення первинної та вторинної специфікацій мультимножини належить В.Н. Сачкову (див.[1], стор. 18). Нижче ці поняття дещо модифікуються, а саме: під первинною та вторинною специфікаціями будемо розуміти показники специфікацій Сачкова. При такому підході специфікації мультимножини несуть ту ж інформацію про мультимножину, причому самі є мультимножинами.

Число всіх елементів мультимножини A називають її *потужністю* і позначають через $|A|$. Потужність мультимножини (1.1) дорівнює

$$|A| = k_1 + \ldots + k_n . \tag{1.2}$$

Позаяк порядок елементів в мультимножині не береться до уваги, то, в залежності від ситуації, вважатимемо, що

$$k_1 \geq \ldots \geq k_n , \tag{1.3}$$

або

$$k_1 \leq \ldots \leq k_n .$$

Важливою характеристикою мультимножини A є специфікація $k(k(A)) = k^2(A)$ її специфікації $k(A)$, тобто *повторна специфікація Сачкова* мультимножини A. Повторну специфікацію мультимножини назвемо також *вторинною специфікацією*, а специфікацію – *первинною специфікацією*.

Нехай

$$r = \max\{k_i\}, i = 1,\ldots,n. \tag{1.5}$$

Для знаходження повторної (вторинної) специфікації мультимножини, її специфікацію спочатку записують у канонічному вигляді, тобто у вигляді

$$k(A) = \{1^{\lambda_1},\ldots,r^{\lambda_r}\}, \tag{1.6}$$

А потім записують мультимножину показників, зберігаючи їх порядок, тобто $k^2(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$. Якщо число i не належить до специфікації (1.6), то вважають, що $\lambda_i = 0$. Зауважимо, що у повторній специфікації нерівності аналогічні нерівностям (1.3), (1.4), взагалі кажучи, не виконуються, проте виконується рівність

$$\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + \ldots + r\cdot\lambda_r = |A|. \tag{1.7}$$

Мультимножину $\overline{A}$ із первинною специфікацією $k(\overline{A}) = \{\overline{k_1},\ldots,\overline{k_r}\}$, де

$$\overline{k_i} = \left|\{k_j : k_j \geq i\}\right| = \left|\{j : k_j \geq i\}\right|,\ i = 1,\ldots,r;\ j = 1,\ldots,n, \tag{1.8}$$

а r задається рівністю (1.5) , називають *спряженою мультимножиною* до мультимножини (1.1). Слід відмітити, що $\overline{k_i}$ має певний комбінаторний зміст, а саме: є максимальним числом груп по i однакових елементів, які можна виділити із мультимножини (1.1).

Твердження 1.1. $\overline{\overline{A}} = A$.

Доведення. Згідно з означенням спряженої мультимножини, $\overline{k_1}$ є потужністю бази мультимножини A. Отже, $\overline{k_2}$ дорівнює потужності бази мультимножини $A_1 = \{a_1^{k_1-1}, a_2^{k_2-1},\ldots,a_n^{k_n-1}\}$ (якщо $k_i - 1 = 0$, то для обчислення $\overline{k_2}$ елемент a_i не береться до уваги). Таким чином, якщо зобразити мультимножину (1.1) у вигляді діаграми (див. рис. 1.1), в якій k_i елементам a_i цієї мультимножини відповідає k_i точок i-того стовпчика діаграми, $i = 1,\ldots,n$, то $\overline{k_i}$ дорівнюватиме кількості точок в i-тому рядку цієї діаграми:

$\overline{k_2}$

Рис. 1.1.

Отже, мультимножині $\overline{A}$, спряженій до мультимножини A, відповідатиме діаграма, в якій i-тим стовпчиком буде i-тий рядок діаграми мультимножини A. Таким чином, діаграми спряжених мультимножин мають спільний прямий кут і симетричні відносно бісектриси цього кута, тому твердження 1.1 істинне.

Якщо виконується рівність $\overline{A} = A$, то мультимножина A називається *мультимножиною із самоспряженою специфікацією*.

Якщо

$$k(A) = \{k_1,\ldots,k_n\},\ k^2(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\},\ k(\overline{A}) = \{\overline{k_1},\ldots,\overline{k_r}\},$$

$$k^2(\overline{A}) = \{\overline{\lambda_1},\ldots,\overline{\lambda_n}\}, \tag{1.9}$$

то між елементами цих специфікацій крім співвідношення (1.8) можна встановити ще 11 співвідношень, які відповідають стрілкам діаграми

$$\begin{tikzcd} k(A) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & k(\overline{A}) \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\ k^2(A) \arrow[r, leftrightarrow] & k^2(\overline{A}) \end{tikzcd}$$

Це співвідношення

$$k_i = \left|\left\{\lambda_j + \ldots + \lambda_r : \lambda_j + \ldots + \lambda_r \geq i\right\}\right| \ , \ i = 1,\ldots,n \ ; \ j = 1,\ldots,r, \qquad (1.10)$$

$$\overline{\lambda_i} = \left|\left\{j : \overline{k_j} = i\right\}\right| \ , \ i = 1,\ldots,n; \ j = 1,\ldots,r, \qquad (1.11)$$

$$\overline{k_i} = \left|\left\{\overline{\lambda_j} + \ldots + \overline{\lambda_r} : \overline{\lambda_j} + \ldots + \overline{\lambda_r} \geq i\right\}\right|, \ i = 1,\ldots,r; \ j = 1,\ldots,n, \qquad (1.12)$$

$$\lambda_i = \left|\left\{j : k_j = i\right\}\right| \ , \ i = 1,\ldots,r; \ j = 1,\ldots,n, \qquad (1.13)$$

$$k_i = \left|\left\{\overline{k_j} : \overline{k_j} \geq i\right\}\right|, \ i = 1,\ldots,n; \ j = 1,\ldots,r, \qquad (1.14)$$

$$\overline{\lambda_i} = \left|\left\{j : \lambda_j + \ldots + \lambda_r = i\right\}\right|, \ i = 1,\ldots,n; \ j = 1,\ldots,r, \qquad (1.15)$$

$$\lambda_i = \left|\left\{j : \overline{\lambda_j} + \ldots + \overline{\lambda_r} = i\right\}\right|, \ i = 1,\ldots,r; \ j = 1,\ldots,n, \qquad (1.16)$$

$$M \cdot \overline{\lambda} = k, \qquad (1.17)$$

$$M^{-1} \cdot k = \overline{\lambda}, \qquad (1.18)$$

$$M \cdot \lambda = \overline{k}, \qquad (1.19)$$

$$M^{-1} \cdot \overline{k} = \lambda, \qquad (1.20)$$

де в рівностях (1.17) і (1.18) k і $\overline{\lambda}$ є n-вимірними векторами-стовпчиками, координати яких відповідно збігаються з елементами специфікацій $k(A)$ і $k^2(\overline{A})$, а M і M^{-1} – квадратні матриці порядку n і вигляду

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У рівностях (1.19) і (1.20) λ і $\overline{k}$ є аналогічними r-вимірними векторами, а M і M^{-1} – аналогічними матрицями порядку r.

Зауваження. Позаяк $k(\overline{\overline{A}}) = k(A)$, то формули (1.8), (1.10), (1.11), (1.15), (1.17), (1.18) аналогічні відповідно формулам (1.14), (1.12), (1.13), (1.16), (1.19), (1.20). Формули (1.17), (1.18), по суті, встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами розв'язків рівняння (1.7) і рівняння $\overline{\lambda_1} + 2\overline{\lambda_2} + \ldots + n\overline{\lambda_n} = |A|$, яке є аналогом рівняння (1.7). Аналогічний висновок можна зробити і для формул (1.19), (1.20).

Розглянемо деякі важливі класи мультимножин та їх специфікації Сачкова.

Специфікацією із додатною цілочисельною функцією g *натурального аргументу* називають специфікацію виду

$$k(A) = \{g(1), g(2), \ldots, g(n)\}, \qquad (1.21)$$

де $g : N \to N$ – деяка неспадна функція, яка для всіх $i \in N$ задовольняє нерівність $g(i) \geq i$.

Специфікацією із неперервною функцією f називають специфікацію виду

$$k(A) = \{[f(1)], [f(2)], \ldots, [f(n)]\}, \qquad (1.22)$$

де f – деяка неперервна зростаюча функція

$$f : D \to E, \ D = [1, n], \ E \supseteq [1, [f(n)]],$$

яка задовольняє нерівність $f(x) \geq x$, а $[\ ]$ – ціла частина числа. Специфікація (1.22) є частинним випадком специфікації (1.21).

Наприклад, для функції $f = e^x$ і $n = 5$ специфікація (1.22) набуває вигляду

$$k(A)=\{2,7,20,54,148\}.$$

Лінійною специфікацією називають специфікацію виду

$$k(A)=\{p+q,p+2q,\ldots,p+nq\}, \tag{1.23}$$

де $p\in N_0$, $q\in Z$ і $1\le p+q$.

Сталою специфікацією називають специфікацію виду

$$k(A)=\{q^n\}=\{\underbrace{q,q,\ldots,q}_{n}\}, \tag{1.24}$$

де $q\ge 1$.

Специфікацією із повтореннями без обмежень називають специфікацію виду

$$k(A)=\{\underbrace{\infty,\infty,\ldots,\infty}_{n}\}. \tag{1.25}$$

Специфікація виду

$$k(A)=\{2^{k_1}-1,2^{k_2}-1,\ldots,2^{k_n}-1\},\ k_1\le k_2\le\ldots\le k_n. \tag{1.26}$$

Якщо мультимножина має специфікацію виду (1.23), або (1.24), то назвемо її відповідно лінійною або сталою мультимножиною. Якщо в специфікації (1.24) сталої мультимножини $q=1$, тобто специфікація множини має вигляд:

$$k(A)=\{1^n\}=\{\underbrace{1,\ldots,1}_{n}\}. \tag{1.27}$$

то мультимножина переходить у звичайну множину.

1.2. Операції над мультимножинами.

На мультимножинах вводять операції, аналогічні до операцій на множинах (див.[4], с. 11-12). При цьому всі позначення, введені для операцій над множинами, зберігають і для аналогічних операцій над мультимножинами. Якщо в мультимножині деякий елемент базової множини відсутній, то вважають, що його

кратність в цій мультимножині дорівнює нулю. Виконання нерівностей (1.3) або (1.4) при операціях над мультимножинами, не вимагається. Позначимо через $k_a(A)$ кратність елемента a в мультимножині A.

Мультимножину B називають *підмультимножиною* мультимножини A, якщо виконується співвідношення $[B]\subseteq[A]$ і для всіх $a\in[B]$ виконується нерівність $k_a(B)\le k_a(A)$. Якщо підмультимножина B мультимножини A має потужність m, то її називають m*-підмультимножиною* мультимножини A.

Об'єднанням $A\cup B$ двох мультимножин A і B називають таку мультимножину C, що $[C]=[A]\bigcup[B]$ і для довільного $a\in[C]$ виконується рівність $k_a(C)=\max(k_a(A),k_a(B))$.

Перетином $A\cap B$ двох мультимножин A і B називають мультимножину C, для якої виконується рівність $[C]=[A]\bigcap[B]$, причому для кожного елемента $a\in[C]$ справедлива рівність $k_a(C)=\min(k_a(A),k_a(B))$.

Сумою $A+B$ двох мультимножин A і B називають таку мультимножину C, що $[C]=[A]\bigcup[B]$ і для кожного $a\in[C]$ виконується рівність $k_a(C)=k_a(A)+k_a(B)$. Ця операція не має аналога для звичайних множин. Якщо мультимножини A і B лінійні, то і їх сума $A+B$ є лінійною мультимножиною.

Якщо для кожного елемента a з перетину $A+B$ двох мультимножин A і B вконується нерівність $k_a(B)\le k_a(A)$, то можна говорити про *різницю* $A-B$ мультимножин A і B. Вона визначається на базі $[A]$ мультимножини A так, що для кожного елемента $a\in[A]\setminus[B]$ виконується рівність $k_a(A-B)=k_a(A)$, а для кожного $a\in[A]\bigcap[B]$ – рівність $k_a(A-B)=k_a(A)-k_a(B)$.

1.3. Діаграми мультимножин.

Ідея зображення розбиттів у вигляді діаграм належить Ферре і Сільвестру [28,29]. Проте розбиття є мультимножинами, елементи яких задовольняють деякі додаткові умови. Нижче ми абстрагуємося від цих додаткових умов і узагальнюємо поняття діаграми розбиття до поняття діаграми мультимножини. Щоб побудувати *діаграму мультимножини* (1.1), потрібно у першому стовпці розмістити k_1 одиничних квадратів, у другому стовпці k_2 одиничних квадратів і т.д., в n-тому стовпці – k_n одиничних квадратів. Діаграму мультимножини A позначатимемо через $Diagr(A)$. Якщо кратності елементів в мультимножині задовольняють нерівності (1.3), то діаграму такої мультимножини позначатимемо через $diagr(A)$ і називатимемо діаграмою Ферре мультимножини A.

На рис. 1.2 зображено діаграми $Diagr\{a_1^3, a_2^5, a_3^1, a_4^2, a_5^1\}$ і $diagr\{a_1^5, a_2^3, a_3^1, a_4^1\}$:

Рис. 1.2.

Шляхи, які на рис.1.2 виділено жирною лінією, назвемо *верхніми східцями діаграм.*

Зауваження. Ми зображуємо діаграми без системи координат, проте всюди вважаємо, що діаграма зображується у першому квадранті, причому так, що перший рядок одиничних квадратів лежить на осі абсцис, а перший стовпець прилягає до осі ординат справа.

Розглянемо деякі операції над діаграмами мультимножин.

Суму $Diagr(A)+Diagr(B)$ *діаграм* $Diagr(A)$ і $Diagr(B)$, $[A],[B]\subseteq\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ мультимножин A і B визначимо рівністю (див.[30], стор. 15-16) :

$$Diagr(A)+Diagr(B)=Diagr(A+B).$$

Якщо специфікації мультимножин $A, B, A+B$ не зростають, то остання рівність матиме вигляд

$$diagr(A)+diagr(B)=diagr(A+B).$$

Наступна операція застосовна тільки для діаграм Ферре.

Під *транспонуванням діаграми* $diagr(A)$ (див.[30], стор. 12) розумітимемо унарну операцію, яка діаграмі $diagr(A)$ ставить у відповідність діаграму $diagr'(A)$, i-тий стовпець якої є i-тим рядком діаграми $diagr(A)$ (нижній рядок діаграми вважається її першим рядком).

Із означення спряженої мультимножини та означення операції транспонування діаграми випливає, що

$$diagr'(A)=diagr(\overline{A}).$$

Отже, транспонована діаграма $diagr'(A)$ симетрична діаграмі $diagr(A)$ відносно бісектриси першого квадранта.

Нехай задано деяку мультимножину A і деяку її підмультимножину B. *Діаграмою пари мультимножин* (A,B), назвемо діаграму $Diagr(A,B)$, яка виникає в результаті витирання тих одиничних квадратів діаграми $Diagr(A)$, що входять до діаграми $Diagr(B)$. Якщо кратності елементів мультимножин A і B задовольняють нерівності (1.3), то діаграму пари мультимножин (A,B) називають *похилою діаграмою.* Позначимо похилу діаграму пари мультимножин (A,B) через $diagr(A,B)$. На рис. 1.3. зображено відповідно діаграми $Diagr(\{3,5,4,1\},\{2,3,1\})$ і $diagr(\{5,3,1,1\},\{3,2,1\})$.

Рис. 1.3.

Шляхи, які на діаграмах із рис. 1.3 виділено жирною лінією, назвемо *нижніми східцями* діаграми.

Похилу діаграму, на відміну від діаграми пари мультимножин, можна транспонувати. При цьому під транспонуванням похилої діаграми також будемо розуміти заміну її стовпців відповідними її рядками.

Тому, що діаграма Ферре і транспонована до неї діаграма симетричні відносно бісектриси першого квадранта, то похила діаграма і транспонована похила діаграма також симетричні відносно бісектриси першого квадранта, причому справедлива рівність $diagr'(A,B) = diagr(\overline{A},\overline{B})$.

Парі $(A,\varnothing)$, очевидно, відповідає діаграма, яка збігається з діаграмою мультимножини A, тобто $Diagr(A,\varnothing) = Diagr(A)$. Тому діаграма мультимножини є частинним випадком діаграми пари мультимножин.

Якщо похилу діаграму вертикальними прямими можна розбити на частини так, щоб кожні дві сусідні частини мали не більше однієї спільної точки, то таку похилу діаграму назвемо *блоковою*, а кожну з цих частин – *блоком діаграми*. На рис. 1.4 зображена похила діаграма з трьох блоків.

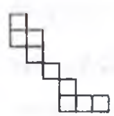


Рис. 1.4.

Якщо виконуються співвідношення $B \subseteq C \subseteq A$, то діаграму $Diagr(C,B)$ називатимемо *піддіаграмою* діаграми $Diagr(A,B)$ і позначатимемо $Diagr(C,B) \prec Diagr(A,B)$. Якщо кратності мультимножин A,B,C не зростають, то похила діаграма $diagr(C,B)$ є піддіаграмою діаграми $diagr(A,B)$. У цьому випадку також використовуватимемо позначення $diagr(C,B) \prec diagr(A,B)$.

Розглянемо поняття *побудови похилої діаграми пари мультимножин* $diagr(A,B)$, яка здійснюється за допомогою наступного алгоритму:

1). Будуємо нижні та верхні східці діаграми $diagr(A,B)$, використовуючи первинні специфікації мультимножин B і A.

2). Ставимо на нижні східці перший квадрат так, щоб він своїми нижньою і бічною лівою сторонами примикав до них і не виходив за межі області, окресленої східцями діаграми.

3). Кожний наступний квадрат кладемо на один із попередніх одиничних квадратів, або на нижні східці так, щоб він вказаними в п. 2) сторонами примикав до них. При цьому слідкуємо, щоб квадрат не виходив за межі вказаної в п. 2) області і продовжуємо процес побудови до тих пір, поки вказана область не буде повністю заповнена одиничними квадратами.

Послідовність викладення одиничних квадратів і називатимемо *побудовою похилої діаграми пари мультимножин* $diagr(A,B)$.

Зауваження. Результатом i-того ($i \in N_0$) кроку процесу побудови діаграми $diagr(A,B)$ є деяка піддіаграма $diagr(A_i,B)$.

Розглянемо деякі поняття, пов'язані зі шляхами на похилій діаграмі. Шлях на діаграмі, очевидно, залежить від напрямків дозволеного руху. Якщо рух на діаграмі, наприклад, дозволено у двох взаємно перпендикулярних напрямках $\uparrow,\leftarrow$, то такий рух позначимо через $mot(\uparrow,\leftarrow)$. Рух $mot(\uparrow,\leftarrow)$ між двома точками на похилій діаграмі відбуватиметься по найкоротших шляхах (за одиницю довжини приймемо довжину сторони одиничного квадрата діаграми). На рис. 1.5 жирною лінією зображено один із найкоротших шляхів на похилій діаграмі $diagr\{5,3,3,1\}$, з рухом $mot(\uparrow,\leftarrow)$, між крайньою південно-східною і крайньою північно-західною точками. Далі під шляхами на діаграмі будемо розуміти саме такі шляхи.

Рис. 1.5.

Далі розглядатимуться також рухи $mot(\uparrow, \leftarrow, \downarrow)$. При цьому будемо вважати, що зміна напрямку руху на похилій діаграмі може відбуватися тільки на 90°.

1.4. Таблиці діаграм.

Дамо основні поняття про таблиці діаграм. *Таблицею* діаграми $diagr(A,B)$ називатимемо діаграму, одиничні квадрати якої занумеровані натуральними числами, що зростають знизу вгору в кожному стовпці діаграми і не спадають зліва направо в кожному її рядку. При цьому похила діаграма називається формою таблиці, а число одиничних квадратів діаграми – її вагою і позначається через $|diagr(A,B)|$.

Стандартною таблицею Юнга діаграми $diagr(A,B)$ називається таблиця цієї діаграми, занумерована натуральними числами від 1 до r, де r – вага діаграми.

Твердження 1.2. *Якщо B – деяка підмультимножина мультимножини A, то між побудовами похилої діаграми $diagr(A,B)$ і стандартними таблицями Юнга цієї діаграми існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення. Розглянемо деяку побудову діаграми $diagr(A,B)$. Кожному одиничному квадрату цієї діаграми поставимо у відповідність номер кроку, на якому при даній побудові цей квадрат ввійшов до діаграми. Із пунктів 2), 3) алгоритму побудови похилої діаграми випливає, що отримана таблиця є стандартною таблицею Юнга діаграми $diagr(A,B)$. Навпаки, для кожної

стандартної таблиці Юнга похилої діаграми $diagr(A,B)$ номери одиничних квадратів зростають знизу вгору і зліва направо, а тому вказують послідовність кроків план деякої побудови похилої діаграми $diagr(A,B)$.

1.5. Деякі важливі мультимножини та множини мультимножин.

Важливими прикладами мультимножин є різноманітні розбиття.

Означення 1.3. Під m-розбиттям елемента ω, що належить множині Ω, на якій визначена асоціативна операція $\oplus$, назвемо мультимножину $(\omega,\oplus)=\{\omega_1,\ldots,\omega_m\}$, $\omega_i\in\Omega$, елементи якої задовольняють рівність

$$\omega_1\oplus\omega_2\oplus\ldots\oplus\omega_m=\omega. \tag{1.28}$$

Якщо мультимножина $(\omega,\oplus)$ впорядкована так, що порядок її елементів збігається з порядком цих елементів у рівності (1.28), то таке m-розбиття називають впорядкованим розбиттям елемента ω.

Позначимо множини всіх m-розбиттів та всіх впорядкованих m-розбиттів об'єкта ω відповідно через $P_m(\omega,\oplus)$ і $\mathrm{P}_m(\omega,\oplus)$.

Наведемо приклади деяких розбиттів.

Приклад 1.1. Якщо $\Omega=N_0$ і $\oplus$ – операція додавання, то $P_m(n,+)$ і $\mathrm{P}_m(n,+)$ – відповідно множини так званих невпорядкованих і впорядкованих m-розбиттів натурального числа n.

Невпорядкованим розбиттям чисел присвячено чимало праць відомих математиків, починаючи із Л.Ейлера (див.[31], стор.234-250). Класичні результати належать Г.Харді та С. Рамануджану [32]. Докладні відомості про розбиття чисел зібрано в монографії Г. Ендрюса [28].

Означення 1.4. *m-розбиття $\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m\}$ деякого числа k, назвемо підрозбиттям m-розбиття $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}$ числа n, $k\le n$, якщо виконуються нерівності $0\le\mu_i\le\lambda_i$, $i=1,\ldots,m$.*

Впорядковані розбиття натуральних чисел іноді називають композиціями (див. [28], стор. 67- 79).

Приклад 1.2. Якщо $\Omega = N$ і $\oplus$ – операція множення, то $P_m(n,\times)$ і $\mathrm{P}_m(n,\times)$ є множинами розкладів натурального числа n на m натуральних множників без врахування чи із врахуванням порядку множників відповідно.

Приклад 1.3. Якщо Ω є скінченною множиною X потужності n і $\oplus$ – операція обєднання множин, то $P_m(X,\bigcup)$ і $\mathrm{P}_m(X,\bigcup)$, де $m \le n$, – це множини так званих невнорядкованих і впорядкованих m-розбиттів множини X.

Наведемо приклад однієї важливої множини впорядкованих мультимножин, яка використовуватиметься у третьому розділі.

Означення 1.5. *$M(n)$- множиною назвемо множину всіх впорядкованих n-мультимножин $\alpha = \{\alpha(1),\dots,\alpha(n)\}$, для яких виконуються умови:*

1) натуральне число $\alpha(j)$ задовольняє нерівності $j \le \alpha(j) \le n$, $j = 1,\dots,n$;

2) для кожного $j = 1,\dots,n$ виконуються рівності $\alpha(j) = \alpha(j+1) = \dots = \alpha(\alpha(j))$

Зауваження. При $j = n$ нерівність із першої умови матиме вигляд: $n \le \alpha(n) \le n$, тому $\alpha(n) = n$.

Твердження 1.3. *Між елементами $M(n)$-множини та елементами множини $\mathrm{P}(n)$ впорядкованих розбиттів натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення. 1). Нехай $\alpha = \{\alpha(1),\dots,\alpha(n)\} \in M(n)$. Подамо n-мультимножину α у канонічному вигляді $\alpha = \{1^{p(1)}, 2^{p(2)},\dots,n^{p(n)}\}$, де $0 \le p(i) \le i$, $i = 1,\dots,n-1$ і $1 \le p(n) \le n$. Позаяк мультимножина $\{p(1),\dots,p(n)\}$ є

первинною специфікацією мультимножини α, то $\sum_{i=1}^{n} p(i) = n$ і ненульові члени останньої мультимножини утворюють впорядковане розбиття числа n. Таким чином, кожній мультимножині з $M(n)$-множини відповідає деяке впорядковане розбиття числа n.

2). Нехай

$$\alpha = \{\alpha(1),\dots,\alpha(n)\} = \{1^{p(1)},\dots,n^{p(n)}\}$$

і

$$\beta = \{\beta(1),\dots,\beta(n)\} = \{1^{q(1)},\dots,n^{q(n)}\}$$

– дві різні впорядковані n-мультимножини із $M(n)$-множини. Виберемо таке i, що $\alpha(i) \ne \beta(i)$. Нехай $i \le \alpha(i) < \beta(i)$. Тоді на основі умови 2) означення 1.3 маємо нерівність $p(\beta(i)) < q(\beta(i))$, тобто первинні специфікації n-мультимножин α і β – різні. Отже, різним n-мультимножинам із $M(n)$-множини відповідають різні впорядковані розбиття із множини $\mathrm{P}(n)$.

3). Нехай $r = \{r(1),\dots,r(s)\} \in \mathrm{P}(n)$. Побудуємо, користуючись наступним алгоритмом, n-мультимножину, що належить $M(n)$-множині і відповідає розбиттю r:

п.1. *поч*

п.2. $i := 1; r := r(i); j := 1$

п.3. $\alpha(j) = \dots = \alpha(r) = r$

п.4. $j := r+1;\ i := i+1;\ r := r + r(i)$

п.5. *якщо* $i \le s$, *то перейти до* п.3

п.6. *кін*

Позаяк $1 \le r(i)$, то після виконання п.4. цього алгоритму виконуватиметься нерівність $j \le r$, яка разом із рівностями п.3 забезпечить виконання обох умов означення 1.5.

Наслідок. $\left|M(n)\right| = 2^{n-1}$.

Твердження 1.4. *Для побудови* $M(n)$*-множини можна користуватися такою рекурсією:* $M(1)=\{\{1\}\}$. *Якщо* $M(k)$*-множина* $(1 \le k < n)$ *. вже побудована, то перші* 2^{k-1} *елементи* $M(k+1)$*-множини отримаємо, дописуючи в кожній* k*-мультимножині з* $M(k)$*-множини на* $(k+1)$*-ше місце число* $k+1$. *Наступні* 2^{k-1} *елементи* $M(k+1)$*-множини отримаємо, замінюючи в кожній* k*-мультимножині з* $M(k)$*-множини всі елементи* k *на елементи* $k+1$ *та дописуючи на* $(k+1)$*-ше місце елемент* $k+1$.

Доведення. Згідно із приміткою до означення 1.4, $(k+1)$-те місце в кожній мультимножині $M(k+1)$-множини займає число $k+1$, тому, дописуючи до елементів k-мультимножини $M(k)$-множини на $(k+1)$-те місце число $k+1$, ми отримаємо 2^{k-1} різних елементів $M(k+1)$-множини. Множину цих елементів позначимо через $M(k;k+1)$. Заміна в k-мультимножині числа k на число $k+1$ разом із дописуванням на $(k+1)$-те місце числа $k+1$ також не порушує умов означення 1.5, бо всі елементи $\alpha(i)$, які менші за k, задовольняють ці умови, а число $k+1$, з'явившись на j-тому місці, заповнює всі наступні місця по $(k+1)$-те включно. Це дає ще 2^{k-1} різних елементів $M(k+1)$-множини. Множину цих елементів позначимо через $M(k+1;k+1)$. Кратність входження елемента $k+1$ до кожної мультимножини із множини $M(k;k+1)$ дорівнює 1, а кратність входження цього елемента до кожної мультимножини із множини $M(k+1;k+1)$ більша за 1. Тому всі елементи цих двох множин різні і належать $M(k+1)$-множині. Позаяк $\left|M(k;k+1)\bigcup M(k+1;k+1)\right| = 2^k$, то, враховуючи наслідок із твердження 1.3, робимо висновок, що виконується рівність $M(k;k+1)\bigcup M(k+1;k+1) = M(k+1)$.

Приклад 1.4. Випишемо всі елементи $M(4)$-множини, користуючись рекурсією із твердження 1.3.

$$\begin{array}{lcl}
\{1;2;3;4\}=\{1^1;2^1;3^1;4^1\} & \leftrightarrow & \{1;1;1;1\} \\
\{2;2;3;4\}=\{2^2;3^1;4^1\} & \leftrightarrow & \{2;1;1\} \\
\{1;3;3;4\}=\{1^1;3^2;4^1\} & \leftrightarrow & \{1;2;1\} \\
\{3;3;3;4\}=\{3^3;4^1\} & \leftrightarrow & \{3;1\} \\
\{1;2;4;4\}=\{1^1;2^1;4^2\} & \leftrightarrow & \{1;1;2\} \\
\{2;2;4;4\}=\{2^2;4^2\} & \leftrightarrow & \{2;2\} \\
\{1;4;4;4\}=\{1^1;4^3\} & \leftrightarrow & \{1;3\} \\
\{4;4;4;4\}=\{4^4\} & \leftrightarrow & \{4\}
\end{array}$$

У цьому списку зліва записано всі 4-мультимножини $M(4)$-множини в звичайній та стандартній формах, а справа – ненульові члени їх первинних специфікацій.

Означення 1.6. *Два елементи* α *і* β *із* $M(n)$*-множини назвемо не зв'язаними між собою, якщо виконується рівність:*

$$[\alpha]\bigcap[\beta]=\{n\},$$

де символом $[\ ]$ *позначено базис мультимножини.*

Множину всіх елементів $M(n)$-множини, не зв'язаних з елементом $\alpha \in M(n)$, позначимо через $M_\alpha(n)$.

Твердження 1.5. *Серед пар* (α,β) *із декартового добутку* $M(n)\times M(n)$ *є рівно* 3^{n-1} *впорядкованих пар не зв'язаних між собою мультимножин, тобто виконуються рівності*

$$\sum_{\alpha\in M(n)} |M_\alpha(n)| = \left|\left\{(\alpha,\beta)\in M(n)\times M(n) : \alpha\cap\beta=\{n^p\}, 1\le p\le n\right\}\right| = 3^{n-1}.$$

Доведення. Нехай $\left|\left\{(\alpha,\beta)\in M(n)\times M(n) : \alpha\cap\beta=\{n^p\}, 1\le p\le n\right\}\right| = x_n$.

Використовуючи позначення із доведення твердження 1.4., запишемо рівність

$$M(n)\times M(n) = M(n-1,n)\times M(n-1,n)\bigcup M(n-1,n)\times M(n,n)\bigcup$$
$$M(n,n)\times M(n-1,n)\bigcup M(n,n)\times M(n,n).$$

1) На $(n-1)$-му місці в кожній впорядкованій мультимножині, що належить множині $M(n-1,n)$, стоїть число $n-1$. Тому якщо

$$(\alpha,\beta)\in M(n-1,n)\times M(n-1,n),$$

то $\alpha\cap\beta=\left\{\dots,n-1^{p},n^{1}\right\}$, де $1\le p$, і

$$\left|\left\{(\alpha,\beta)\in M(n-1,n)\times M(n-1,n)\ :\ \alpha\cap\beta=\left\{n^{p}\right\}\right\}\right|=0.$$

2) Для кожного $\alpha\in M(n)$ позначимо через α' ту мультимножину з $M(n-1)$, з якої α одержується при рекурсії із твердження 1.4. Нехай тепер $\alpha\in M(n-1,n)$ і $\beta\in M(n,n)$. Тоді якщо $\alpha'\cap\beta'=\left\{(n-1)^{p}\right\}$, де $1\le p$, то очевидно, що $\alpha\cap\beta=\{n\}$, тобто мультимножини α і β є не зв'язаними. Якщо ж $\alpha'\cap\beta'=\left\{\dots,\alpha(i),\dots,(n-1)^{p}\right\}$, то $\alpha\cap\beta=\{\dots,\alpha(i),\dots,n\}$, тобто α і β є зв'язаними. Отже, кількість пар не зв'язаних мультимножин із $M(n-1,n)\times M(n,n)$ дорівнює

$$\left|\left\{(\alpha',\beta')\in M(n-1)\times M(n-1):\alpha'\cap\beta'=\left\{(n-1)^{p}\right\},1\le p\right\}\right|=x_{n-1}.$$

Очевидно, що кількість пар не зв'язаних мультимножин із $M(n,n)\times M(n-1,n)$ також дорівнює x_{n-1}.

3) Нехай тепер $\alpha,\beta\in M(n,n)$. Якщо $\alpha'\cap\beta'=\left\{(n-1)^{p}\right\}$, де $1\le p$, то $\alpha\cap\beta=\left\{n^{p+1}\right\}$, тобто мультимножини α і β є не зв'язаними. Якщо ж $\alpha'\cap\beta'\ne\left\{(n-1)^{p}\right\}$, де $1\le p$, то $\alpha\cap\beta\ne\left\{n^{r}\right\}$, де $r\ge 1$, і мультимножини α і β є зв'язаними. Отже, маємо рівність

$$\left|\left\{(\alpha,\beta)\in M(n,n)\times M(n,n)\ :\ \alpha\cap\beta=\left\{n^{p}\right\}\right\}\right|=x_{n-1}.$$

Таким чином, $\left|\left\{(\alpha,\beta)\in M(n)\times M(n)\ :\ \alpha\cap\beta=\left\{n^{p}\right\}\right\}\right|=x_{n}=3\cdot x_{n-1}$. Але очевидно, що $x_{1}=1$, тому $x_{n}=3^{n-1}$.

Приклад 1.5. Нехай $n=3$, тоді $M(3)=\{\{1,2,3\},\{2,2,3\},\{1,3,3\},\{3,3,3\}\}$. Розглянемо таблицю перетинів $\alpha\cap\beta$ мультимножин α і β, де $(\alpha,\beta)\in M(3)\times M(3)$.

Таблиця 1.1

Таблиця перетину мультимножин $\alpha\cap\beta$

	$\{1,2,3\}$	$\{2,2,3\}$	$\{1,3,3\}$	$\{3,3,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$
$\{2,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2^2,3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
$\{1,3,3\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$	$\{1,3^2\}$	$\{3^2\}$
$\{3,3,3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3^2\}$	$\{3^3\}$

Як видно із таблиці 1.1, в $M(3)$-множині є 9 не зв'язаних між собою впорядкованих пар мультимножин.

1.6. Частково впорядковані множини .

Розглянемо деякі пов'язані із ч.в.м. поняття, які знадобляться в розділі 2.

Означення 1.7. *Бінарне відношення $\le$ на множині P називається відношенням часткового порядку (а сама множина P – частково впорядкованою, або, коротко, ч.в.м.), якщо виконуються наступні умови:*

1) $\forall x\in P\ \ x\le x$;

2) $\forall x,\ y\in P$, якщо $x\le y$ і $y\le x$, т $x=y$;

3) $\forall x,\ y,\ z\in P$, якщо $x\le y$ і $y\le z$, то $x\le z$.

Елемент M називається *максимальним* елементом ч.в.м. P, якщо в P відсутній елемент $x\ne M$, для якого б виконувалося співвідношення $M\le x$. Аналогічно визначається *мінімальний* елемент. Елемент M називається *найбільшим*, якщо для всіх $x\in P$ виконується нерівність $x\le M$. Якщо ж для всіх $x \in P$ виконується нерівність $M \le x$, то елемент M називається *найменшим*. Найбільший і найменший елементи, якщо вони існують, інколи позначають відповідно через 1 і 0. Говорять, що елемент a *передує* елементу b ($a \ne b$), якщо виконується співвідношення $a \le b$. Якщо, крім цього, в ч.в.м. не існує такого елемента c, відмінного від елементів a і b, для якого б виконувалися співвідношення $a \le c \le b$, то говорять, що елемент b *покриває* елемент a. Якщо для довільних двох елементів a і b деякої підмножини Q ч.в.м. P виконується одне із співвідношень $a \le b$ або $b \le a$, то таку підмножину називають *ланцюгом* в ч.в.м. P. Під *максимальним ланцюгом* в ч.в.м. розуміють ланцюг, максимальний за включенням.

Діаграмою Хассе ч.в.м. називають орієнтований граф, вершинами якого є елементи цієї множини, а дуга (x, y) присутня в ньому тоді і тільки тоді, коли y покриває x.

Вважають, що мінімальні елементи ч.в.м. мають ранг 1. Ті елементи ч.в.м., які покривають елементи рангу 1, утворюють множину елементів другого рангу, і т.д.

Наведемо приклади деяких ч.в.м., які розглядатимуться в другому і третьому розділах.

Приклад 1.6. Нехай $S(A)$ – множина всіх підмультимножин мультимножини A. Ч.в.м. $(S(A), \subseteq)$, за аналогією до булеану, назвемо мультибулеаном множини A.

Зауваження. З означення рангу елемента випливає, що всі елементи одного рангу мультибулеана мають одну і ту ж потужність, а саме елементи $(m+1)$-го рангу мають потужність m.

Приклад 1.7. Нехай $S(A, B)$ – множина всіх тих мультимножин C, які задовольняють співвідношення

$$B \subseteq C \subseteq A. \tag{1.29}$$

Тоді $(S(A, B), \subseteq)$ є ч.в.м.

Якщо $B = \varnothing$, то ч.в.м. $(S(A, B), \subseteq)$ збігається з мультибулеаном $S(A)$ множини A.

Твердження 1.6. *Між елементами ч.в.м.* $(S(A, B), \subseteq)$ *та шляхами на діаграмі* $Diagr(A, B)$ *із рухом* $mot(\uparrow, \leftarrow, \downarrow)$ *існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення. Кожній мультимножині C, яка задовольняє співвідношення (1.29), відповідає діаграма $Diagr(C, B)$, якій в свою чергу відповідають верхні східці, що є шляхом з рухом $mot(\uparrow, \leftarrow, \downarrow)$ на діаграмі $Diagr(A, B)$. Крім того, різним мультимножинам із $S(A, B)$ відповідають різні діаграми, а тим самим і різні шляхи на діаграмі $Diagr(A, B)$. Навпаки, кожен шлях на діаграмі $Diagr(A, B)$ є верхніми східцями діаграми деякої пари (C, B) мультимножин, для якої виконується співвідношення (1.29), тобто кожному шляху на діаграмі $Diagr(A, B)$ відповідає деякий елемент C із ч.в.м. $(S(A, B), \subseteq)$.

Приклад 1.8. а) Відношення "$\prec$" є частковим порядком на множині Δ всіх піддіаграм діаграми $Diagr(A, B)$.

b) Аналогічно відношення "$\prec$" є частковим порядком на множині δ всіх піддіаграм діаграми $diagr(A, B)$ (точніше, елементами множини δ є діаграми $diagr(C, B)$, де $B \subseteq C \subseteq A$, причому елементи первинної специфікації мультимножини C задовольняють нерівності (1.3)).

Твердження 1.7. *Між побудовами діаграми* $diagr(A, B)$ *і максимальними ланцюгами ч.в.м.* $(\delta, \prec)$ *існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення. За означенням побудови діаграми $diagr(A, B)$ їй природним чином зіставляється послідовність $\{diagr(A_i, B)\}_{i=0}^{|A/B|}$ діаграм, де $diagr(A_i, B)$ – діаграма, побудована на i-му кроці роботи відповідного алгоритму. Очевидно, що для всіх $i = 0, \ldots, |A/B| - 1$ виконується рівність $|A_{i+1} / A_i| = 1$, тобто діаграма $diagr(A_{i+1}, B)$ покриває діаграму $diagr(A_i, B)$, а тому послідовність

$\{diagr(A_i, B)\}_{i=0}^{|A/B|}$ є максимальним ланцюгом в ч.в.м. $(\delta,\prec)$. Очевидно також, що в такий спосіб різним побудовам діаграм відповідатимуть різні максимальні ланцюги. З іншого боку, легко зрозуміти, як за максимальним ланцюгом із ч.в.м. $(\delta,\prec)$ відновити відповідну побудову діаграми $diagr(A,B)$.

Таким чином, враховуючи твердження 1.2 і твердження 1.7, приходимо до висновку, що справедливе наступне твердження.

Твердження 1.8. *Між побудовами похилих діаграм $diagr(A,B)$, максимальними ланцюгами ч.в.м. $(\delta,\prec)$ і стандартними таблицями Юнга діаграми $diagr(A,B)$ існує взаємно однозначна відповідність.*

Твердження 1.9. *Між шляхами на похилій діаграмі $diagr(A,B)$ з рухом $mot(\uparrow,\leftarrow)$ і елементами ч.в.м. $(\delta,\prec)$, існує взаємно однозначна відповідність.*

Доведення твердження 1.9 аналогічне доведенню твердження 1.6.

РОЗДІЛ 2

КОМБІНАТОРИКА МУЛЬТИМНОЖИН ТА ДЕЯКИХ Ч.В.М.

2.1. Шляхи на діаграмі $Diagr(A,B)$ з рухом $mot(\uparrow,\leftarrow,\downarrow)$

Твердження 2.1. Якщо $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ – деяка мультимножина, а $(S(A),\subseteq)$ – відповідний їй мультибулеан, то справедлива рівність

$$\left|(S(A),\subseteq)\right|=\prod_{i=1}^{n}(k_i+1).$$

Доведення. Доводимо за допомогою індукції. Твердження очевидне при $n=1$, бо у випадку $A=\{a_1^{k_1}\}$ маємо всього k_1+1 підмультимножин: $\{\varnothing,\{a_1\},\{a_1^2\},\dots,\{a_1^{k_1}\}\}$.

Припустимо, що твердження справедливе при $n=s$, і доведемо його справедливість при $n=s+1$. Кожна із $\prod_{i=1}^{s}(1+k_i)$ підмультимножин мультимножини $\{a_1^{k_1},a_2^{k_2},\dots,a_s^{k_s}\}$ є також підмультимножиною мультимножини $\{a_1^{k_1},a_2^{k_2},\dots,a_s^{k_s},a_{s+1}^{k_{s+1}}\}$. Тому кожній мультимножині $\{a_{s+1}^{k_{s+1}-j}\}$, $j=0,1,\dots,k_{s+1}$ можна поставити у відповідність $\prod_{i=1}^{s}(1+k_i)$ підмультимножин

$\{a_1^{k_1},a_2^{k_2},\dots,a_s^{k_s},a_{s+1}^{k_{s+1}}\}\cup\{a_{s+1}^{k_{s+1}-j}\}$ мультимножини $\{a_1^{k_1},a_2^{k_2},\dots,a_s^{k_s},a_{s+1}^{k_{s+1}}\}$. Таким чином, мультимножина $\{a_1^{k_1},a_2^{k_2},\dots,a_s^{k_s},a_{s+1}^{k_{s+1}}\}$ має всього $(k_{s+1}+1)\cdot\prod_{i=1}^{s}(1+k_i)=\prod_{i=1}^{s+1}(1+k_i)$ підмультимножин, що і доводить твердження 2.1.

Твердження 2.2. *Для довільних мультимножини* $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ *і її підмультимножини* $B=\{a_1^{l_1},a_2^{l_2},\dots,a_n^{l_n}\}$ *потужність ч.в.м.* $(S(A,B),\subseteq)$ *дорівнює* $\prod_{i=1}^{n}(k_i-l_i+1)$.

Доведення. Для доведення достатньо встановити взаємно однозначну відповідність між елементами ч.в.м. $(S(A,B),\subseteq)$ і $(S(\{a_1^{k_1-l_1},a_2^{k_2-l_2},\dots,a_n^{k_n-l_n}\}),\subseteq)$, а це можна зробити за правилом: $\{a_1^{q_1},a_2^{q_2},\dots,a_n^{q_n}\}\in(S(A,B),\subseteq)\leftrightarrow$

$\leftrightarrow\{a_1^{q_1-l_1},a_2^{q_2-l_2},\dots,a_n^{q_n-l_n}\}\in(S(\{a_1^{k_1-l_1},a_2^{k_2-l_2},\dots,a_n^{k_n-l_n}\}),\subseteq)$.

Теорема 2.1. *Якщо мультимножина* $B=\{a_1^{l_1},a_2^{l_2},\dots,a_n^{l_n}\}$ *є підмультимножиною мультимножини* $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$, *то число шляхів на діаграмі* $Diagr(A,B)$ *з рухом* $mot(\uparrow,\leftarrow,\downarrow)$ *дорівнює*

$$\prod_{i=1}^{n}(k_i-l_i+1).$$

Доведення теореми 2.1. безпосередньо випливає із тверджень 1.6 та 2.2.

Наслідок. *Число шляхів на діаграмі Ферре* $diagr(A)$ *з рухом* $mot(\uparrow,\leftarrow,\downarrow)$, *де* A *– мультимножина* (1.1), *дорівнює*

$$\prod_{i=1}^{n}(k_i+1).$$

2.2. Сполучення на мультимножинах та елементи одного рангу діаграми Хассе мультибулеана.

Означення 2.1. Множину

$$C^m(A)=\{B\subseteq A:|B|=m\} \tag{2.1}$$

всіх m-підмультимножин мультимножини $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ назвемо множиною m-сполучень мультимножини $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$.

Для позначення потужності множини (2.1) будемо користуватися введеним в [3] позначенням

$$|C^m(A)|=\binom{k_1\ k_2\dots k_n}{m}. \tag{2.2}$$

Для деяких специфікацій мультимножини (1.1) потужність множини $C^m(A)$ підраховувалась раніше (див., наприклад, [38], стор. 16-25; [39], стор. 16-18, 40-43). Зокрема, для мультимножини із специфікацією (1.27), тобто для множин, маємо:

$$\binom{\underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{n}}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{2.3}$$

Для мультимножин із специфікаціями із повтореннями без обмежень (1.25) виконується рівність (див.[38]):

$$\binom{\underbrace{\infty\ \infty\ \dots\ \infty}_{n}}{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!}, \tag{2.4}$$

а для мультимножин із сталою специфікацією (1.24) – рівність (див.[39]):

$$\binom{\underbrace{q\ q\ \dots\ q}_{n}}{m}=\sum_k(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\binom{n+m-k(q+1)-1}{m+k(q+1)}. \qquad (2.5)$$

В [39] наведено приклади ще двох типів мультимножин, для яких знайдено число всіх m-сполучень:

$$\binom{\underbrace{1\dots1}_{q},p}{m}=\sum_{i=0}^{p}\binom{q}{m-i},$$

$$\binom{\underbrace{1\dots1}_{n-2r},\underbrace{2\dots2}_{r}}{m}=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\cdot\binom{n-r-i}{m-2i}.$$

Наступна теорема дозволяє обчислювати потужність множини (2.1) в загальному випадку.

Теорема 2.2. *Число всіх m-підмультимножин мультимножини $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ дорівнює*

$$\left|C^m(A)\right|=\sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)}\prod_{j=1}^{s}\binom{\overline{k_j}-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j}, \qquad (2.6)$$

де $\Lambda^m(A)$ – множина тих розв'язків рівняння

$$\sum_{i=1}^{s}i\lambda_i=m, \qquad (2.7)$$

які задовольняють нерівності

$$\sum_{i=j}^{s}\lambda_i\le\overline{k_j};\ j=1,\dots,s, \qquad (2.8)$$

$s=\min(m,r)$, $r=\max\{k_i\}$, $i=1,\dots,n$, $\overline{k_j}$ – *j-тий елемент специфікації* (1.8), *спряженої до первинної специфікації мультимножини A.*

Доведення. Розглянемо множину

$$\Lambda^m(A) \qquad (2.9)$$

вторинних специфікацій елементів множини (2.1). Із означення множини $\Lambda^m(A)$ випливає, що вона задовольняє умови:

1) $\forall B\in C^m(A)\Rightarrow\{\{B\}\}\in\Lambda^m(A)$;

2) $\forall\lambda\in\Lambda^m(A)\Rightarrow\exists\ \ B\in C^m(A):\{\{B\}\}=\lambda$.

Доведемо, що множина $\Lambda^m(A)$ складається з усіх цілих невід'ємних розв'язків рівняння (2.7), які задовольняють нерівності (2.8). Дійсно, нехай B – деяка мультимножина, яка належить множині (2.1) і $\lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}=\{\{B\}\}$. Позаяк $|B|=m$, то очевидно, що елементи цієї специфікації задовольняють рівняння (2.7). Істинність нерівностей (2.8) для розв'язків цього рівняння випливає із нерівності $k_x(B)\le k_x(A)$, $x\in[B]$.

Нехай $\lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$ – деякий розв'язок рівняння (2.7), який задовольняє умови (2.8). Побудуємо мультимножину $B\in C^m(A)$ таку, що $\{\{B\}\}=\lambda$. Почнемо з того, що виділимо із мультимножини A λ_s різних груп по s однакових елементів. Це можна зробити завжди, бо $\lambda_s\le\overline{k_s}$, внаслідок (1.8). Припустимо, що ми вже виділили $\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i$ різних груп елементів, кожна з яких складається не менше ніж із $j+1$ однакових елементів. Позаяк $\overline{k_j}$ – максимальне число різних груп по j однакових елементів, які можна виділити із мультимножини A, то після виділення із цієї мультимножини вказаних вище груп елементів, в ній, крім інших груп, залишиться ще

$$\overline{k_j}-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i$$

груп по j однакових елементів в кожній. Таким чином, виділення із мультимножини A наступних λ_j груп однакових елементів забезпечують виконання нерівностей (2.8).

Якщо тепер кожній вторинній специфікації із множини (2.9) поставити у відповідність не порожню множину

$$C_\lambda^m(A) = \left\{B \in C^m(A) : \left\{\{B\}\right\} = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\right\}\right\} \tag{2.10}$$

мультимножин із множини (2.1) , то множина класів (2.10) при $\lambda \in \Lambda^m(A)$ утворить розбиття множини (2.1). При цьому буде виконуватися рівність

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda \in \Lambda^m(A)} \left|C_\lambda^m(A)\right|. \tag{2.11}$$

Встановимо потужність множини (2.10). Вище вже було встановлено, що після виділення із мультимножини (1.1) всіх груп однакових елементів, які складаються не менше ніж із $j+1$ однакових елементів, в ній залишиться

$$\overline{k_j} - \sum_{i=j+1}^{s} \lambda_i$$

груп по j однакових елементів. Тому існує рівно

$$\binom{\overline{k_j} - \sum_{i=j+1}^{s} \lambda_i}{\lambda_j}$$

різних варіантів вибору цих груп із мультимножини A. Число всіх елементів, які належать множині (2.10), за правилом добутку дорівнює

$$\left|C_\lambda^m(A)\right| = \prod_{j=1}^{s} \binom{\overline{k_j} - \sum_{i=j+1}^{s} \lambda_i}{\lambda_j} \tag{2.12}$$

Тут і далі $\sum_{i>s} \lambda_i = 0$. Зауважимо, що коли виконуються нерівності (1.4), то елементи специфікації $\overline{\{A\}}$, крім співвідношення (1.8), можуть бути обчислені за однією з наступних формул:

$$\overline{k_j} = n - k^{-1}(j) + 1, \tag{2.13}$$

де

$$k^{-1}(j) = \min\left\{i : k_i \geq j\right\} \ , \ j = 1, \dots, k_n \tag{2.14}$$

– мінімальний прообраз тих елементів первинної специфікації $\{A\}$, які не менші за j; або

$$\overline{k_j} = \sum_{i=j}^{k_n} \lambda_i \ , \ j = 1, \dots, k_n \ , \tag{2.15}$$

де $\lambda_i \in \{\{A\}\}$. Формула (2.15) випливає із співвідношення (1.19).

Із (2.11) і (2.12) випливає справедливість формули (2.6).

Приклад 2.1. Обчислимо число 6-підмультимножин мультимножини

$$A = \left\{a_1^5, a_2^5, a_3^5, a_4^3, a_5^3, a_6^3, a_7^3, a_8^2, a_9^2, a_{10}^1, a_{11}^1, a_{12}^1, a_{13}^1\right\}.$$

Тут $n = 13, m = 6,\ r = 5,\ s = \min(5,6) = 5$. Знаходимо елементи специфікації $\overline{\{A\}}$ із співвідношень (1.8). Отримуємо: $\overline{k_1} = 13,\ \ \overline{k_2} = 9,\ \ \overline{k_3} = 7,\ \ \overline{k_4} = 3,\ \ \overline{k_5} = 3$. Для знаходження елементів множини $\Lambda^m(A)$ випишемо всі розв'язки рівняння

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 = 6 \ . \tag{2.16}$$

Їх десять:

$(6,0,0,0,0), (4,1,0,0,0), (3,0,1,0,0), (2,2,0,0,0), (2,0,0,1,0),\ (1,1,1,0,0), (1,0,0,0,1), (0,3,0,0,0),$

$(0,1,0,1,0), (0,0,2,0,0).$

Легко перевіряється, що всі вони задовольняють нерівності

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 \le 13,$$
$$\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 \le 9,$$
$$\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 \le 7,$$
$$\lambda_4+\lambda_5 \le 3,$$
$$\lambda_5 \le 3.$$

Для кожного розв'язку рівняння обчислимо (2.16) добуток (2.12) і знайдемо суму цих добутків :

$$C^6(A)=\binom{13}{6}+\binom{12}{4}\cdot\binom{9}{1}+\binom{13}{2}\cdot\binom{7}{1}+\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{2}+\binom{12}{2}\cdot\binom{3}{1}+\binom{11}{1}\cdot\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}+$$
$$+\binom{12}{1}\cdot\binom{3}{1}+\binom{9}{3}+\binom{8}{1}\cdot\binom{3}{1}+\binom{7}{2}=1716+4455+1540+1980+198+616+36+$$
$$84+24+21=10670.$$

Обчислимо число всіх m- підмультимножин мультимножини, первинною специфікацією якої є додатна цілочисельна функція натурального аргументу (1.21).

Теорема 2.3. *Якщо мультимножина* $A=\left\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\right\}$ *має первинну специфікацію виду* $k(A)=\{g(1),g(2),\dots,g(n)\}$*, причому* $g(i)\ge i,\ i=1,\dots,n$*, то при* $m\le n$ *справедлива рівність*

$$\left|C^m(A)\right|=\sum_{\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m}\prod_{j=1}^{m}\binom{n-g^{-1}(j)-\sum\limits_{i=j+1}^{m}\lambda_i+1}{\lambda_j}, \tag{2.17}$$

де

$$g^{-1}(j)=\min\{i:\ g(i)\ge j\},\ j=1,\dots,m.$$

Доведення. Перш за все відмітимо, що внаслідок нерівностей $g(n)\ge n$, $n\ge m$, справедлива рівність $s=\min(m,g(n))=m$, і тому рівняння (2.7) і нерівності (2.8) матимуть відповідно вигляд

$$\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m; \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=j}^{m}\lambda_i\le\overline{k_j},\ j=1,\ \ldots,\ m. \tag{2.19}$$

Доведемо, що кожен розв'язок рівняння (2.18) задовольняє нерівності (2.19). Позначимо множину розв'язків рівняння (2.18) через Λ. З очевидних нерівностей

$$\sum_{i=j}^{m}\lambda_i\le\max_{\Lambda}\left\{\sum_{i=j}^{m}\lambda_i\right\}\le\left[\frac{m}{j}\right],\ j=1,\dots,m$$

і

$$\min\{i:\ g(i)\ge j\}\le j,\ j=1,\dots,m,$$

випливає що для доведення твердження достатньо довести справедливість нерівностей

$$\left[\frac{m}{j}\right]\le n-j+1,\ j=1,\dots,m, \tag{2.20}$$

які легко доводяться індукцією по n.

Таким чином, враховуючи (2.13) і (2.14), справедливість рівності (2.17) випливає із теореми 2.2.

Якщо первинною специфікацією мультимножини (1.1) є неперервна функція, то для обчислення числа всіх m-підмультимножин цієї мультимножини корисна наступна теорема:

Теорема 2.4. *Нехай первинна специфікація мультимножини* $A=\left\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\right\}$ *має вигляд* $k(A)=\{[f(1)],[f(2)],\dots,[f(n)]\}$*, де*

$$f:D\to E,\ D=[1,n],\ E\supseteq\left[1,[f(n)]\right].$$

– деяка неперервна, зростаюча функція. Тоді при $m\le n$ *справедлива формула*

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m} \prod_{j=1}^{m} \binom{\left[n-\max(f^{-1}(j),1)\right]+1-\sum_{i=j+1}^{m}\lambda_i}{\lambda_j}. \qquad (2.21)$$

Доведення. Позаяк функція f неперервна і зростає на своїй області визначення, то для всіх $j \geq 1$ буде $\min\{i:\ f(i) \geq j\} = f^{-1}(j)$. Звідси дістаємо рівність

$$\min\{i:\ [f(i)] \geq j\} = \begin{cases} \max(1,\ f^{-1}(j)),\ f^{-1}(j) \in Z_D, \\ \max(1,\ \left[f^{-1}(j)\right]+1),\ f^{-1}(j) \notin Z_D. \end{cases} \qquad (2.22)$$

де $Z_D = D \cap N$. Тому справедлива рівність

$$n - \min\{i:\ [f(i)] \geq j\} = \left[n - \max(1, f^{-1}(j))\right],$$

а із нею і рівність

$$\overline{k_j} = n - \min\{i:\ k_i \geq j\} + 1 = \left[n - \max(1; f^{-1}(j))\right] + 1.$$

Позаяк нерівності

$$\max_{\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m} (\lambda_j + \ldots + \lambda_m) \leq \left[\frac{m}{j}\right] \quad \text{і} \quad f^{-1}(j) \leq j$$

виконуються для всіх $j = 1,\ldots,m$, то нерівність (2.19) рівносильна нерівності (2.20). Завершується доведення теореми міркуваннями, аналогічними доведенню теореми 2.3.

Розглянемо випадок мультимножини (1.1) із лінійною специфікацією (1.23).

Теорема 2.5. *Якщо A – лінійна мультимножина із первинною специфікацією $k(A) = \{(pi+q) : i = 1,\ldots,n\}$, де $1 \leq p+q, q \in Z, p \in N_0$, то справедливі рівності*

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)} \prod_{j=1}^{s} \binom{\left[n-\max(1,\frac{j-q}{p})\right]+1-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j}, \quad p \neq 0. \qquad (2.23)$$

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)} \frac{n\,!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_r!(n-\lambda_1-\ldots-\lambda_r)!}, \quad p=0. \qquad (2.24)$$

де $s = \min(m, pn+q)$, $r = \min(m,q)$.

Якщо $m \leq n$, то рівності (2.23) *і* (2.24) *матимуть вигляд*

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m} \prod_{j=1}^{m} \binom{\left[n-\max(1,\frac{j-q}{p})+1-\sum_{i=j+1}^{m}\lambda_i\right]}{\lambda_j}, \quad p \neq 0, \qquad (2.25)$$

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda_1+\ldots+m\lambda_m=m} \frac{n\,!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_s!(n-\lambda_1-\ldots-\lambda_s)!}, \quad p=0, \qquad (2.26)$$

де $s = \min(m,q)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $p \neq 0$. Позаяк лінійна функція $f(i) = pi+q$ задовольняє умови теореми 2.4, то виконується рівність

$$\overline{k_j} = \left[n - \max(1, \frac{j-q}{p})\right] + 1 \qquad (2.27)$$

і тому справедлива формула (2.23). Якщо ж, крім цього, $m \leq n$, то, враховуючи рівність (2.27) і нерівність $px+q \geq x,\ x \in [1,n]$, за теоремою 2.3 із рівності (2.21) випливає рівність (2.25).

У випадку сталої мультимножини, тобто у випадку $p=0$, маємо $s = \min(m,q)$ і $\overline{k_j} = n,\ j = 1,\ldots,s$. Тому

$$\left|C^m(A)\right| = \sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)} \prod_{j=1}^{s} \binom{n-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j} = \sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)} \frac{n\,!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_s!(n-\lambda_1-\ldots-\lambda_s)!}$$

і справедлива рівність (2.24). Якщо $m \leq n$, то нерівність (2.19) виконується для всіх $j = 1,\ldots,s$ і виконуватиметься рівність (2.26).

Розглянемо ще клас мультимножин із первинною специфікацією (1.26), для яких число сполучень обчислюється порівняно просто. Як показано в [38] і [39], генератриса для числа сполучень на таких мультимножинах має вигляд

$$W(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2^{k_i}-1}t^j\right).$$

Але

$$1+t+\ldots+t^{2^k-1}=(1+t)(1+t^2)\cdot\ldots\cdot(1+t^{2^{k-1}}),$$

тому, зробивши позначення

$$t^{2^i}=x_{i+1},\ i=0,\ldots,k-1,$$

матимемо

$$W(t)=(1+x_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(1+x_{k_n})^{m_n}.$$

Очевидно, що число $\left|C^m(A)\right|$ дорівнює сумі коефіцієнтів одночленів $K(\omega_1,\ldots,\omega_{k_n})x_1^{\omega_1}\cdot\ldots\cdot x_{k_n}^{\omega_{k_n}}$ від k_n змінних, показники яких є компонентами розв'язків рівняння

$$\omega_1+2\omega_2+2^2\omega_3+\ldots+2^{k_n-1}\omega_{k_n}=m, \tag{2.28}$$

що задовольняють нерівності

$$\omega_i\le\nu_i,\ i=1,\ldots,k_n \quad , \tag{2.29}$$

де $(\nu_1,\ldots,\nu_{k_n})$ – специфікація (1.8), спряжена до первинної специфікації мультимножини A. Таким чином, $\left|C^m(A)\right|=\sum\limits_{\Lambda}\binom{\omega_1}{\nu_1}\cdot\ldots\cdot\binom{\omega_{k_n}}{\nu_{k_n}}$, де множина Λ є множиною розв'язків рівняння (2.28), що задовольняють нерівності (2.29).

Наведемо ще одну загальну формулу обчислення числа m- сполучень на мультимножині (1.1). Після m - кратного диференціювання генератриси

$$W(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k_i}t^j\right)^{\lambda_i}=\sum_{i=0}^{s}\left|C^i(A)\right|\cdot t^i,\ s=\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i,$$

числа сполучень на мультимножині (див.[39]) одержимо:

$$\left|C^m(A)\right|=\frac{1}{m!}\cdot\frac{d^mW(t)}{dt^m}\Big|_{t=0}.$$

Позаяк

$$\frac{d^mW(t)}{dt^m}=\sum_{r_1+\ldots+r_n=m}\frac{m\ !}{r_1!\ \cdot\ldots\cdot r_n!}\cdot\frac{d^{r_1}f_1}{dt^{r_1}},$$

де $f_i=\left(\sum\limits_{j=0}^{k_i}t^j\right)^{\lambda_i}$, і

$$f^{(r)}=\frac{d^r}{dt^r}\left(\sum_{j=0}^{k}t^j\right)^{\lambda}=\sum_{\Omega}\frac{r!\lambda!}{1\ !^{\omega_1}\omega_1!\cdot\ldots\cdot k!^{\omega_k}\omega_k!(\lambda-\omega_1-\ldots-\omega_k)!}\times$$

$$\times f^{\lambda-\omega_1-\ldots-\omega_k}\left(f^{(1)}\right)^{\omega_1}\cdot\ldots\cdot\left(f^{(k)}\right)^{\omega_k},$$

то враховуючи, що

$$f^{(i)}\big|_{t=0}=\begin{cases}i!\ , & i\le k,\\ 0\ , & i>k;\end{cases}\quad \text{і}\ f\big|_{t=0}=1,$$

матимемо:

$$f^{(r)}\big|_{t=0}=\sum_{\Omega}\frac{r!\lambda!}{\omega_1!\cdot\ldots\cdot\omega_k!(\lambda-\omega_1-\ldots-\omega_k)!}.$$

В останніх двох сумах Ω є множиною тих розв'язків рівняння $\omega_1+\ldots+k\omega_k=r$, які задовольняють нерівності $\omega_1+\ldots+\omega_k\le\lambda$. Таким чином,

$$\left|C^m(A)\right|=\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!\sum_{r_1+\ldots+r_n=m}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{\Omega_i}\frac{1}{\omega_{1,i}!\cdot\ldots\cdot\omega_{k_i,i}!(\lambda_i-\omega_{1,i}-\ldots-\omega_{k_i,i})!}\right), \tag{2.30}$$

де

$$\Omega_i=\left\{(\omega_{1,i},\ldots,\omega_{k_i,i}):(\omega_{1,i}+\ldots+k_i\omega_{k_i,i}=m)\wedge(\omega_{1,i}+\ldots+\omega_{k_i,i}\le\lambda_i)\right\}.$$

Зауважимо, що коли $m\le k_1$, то множина Ω_i матиме вигляд

$$\Omega_i=\left\{(\omega_1,\ldots,\omega_m):(\omega_1+\ldots+m\omega_m=m)\wedge(\omega_1+\ldots+\omega_m\le\lambda_i)\right\},$$

якщо, крім цього, і $m\le\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,n$, то множина Ω_i перепишеться у вигляді $\Omega=\left\{(\omega_1,\ldots,\omega_m):(\omega_1+\ldots+m\omega_m=m)\right\}$. В другому випадку, враховуючи рівність

$$\sum_{\Omega}\frac{r!\lambda!}{\omega_1!\cdot\ldots\cdot\omega_k!(\lambda-\omega_1-\ldots-\omega_k)!}=\binom{\lambda+r-1}{\lambda-1},$$

формула (2.30) перепишеться у вигляді

$$|C^m(A)| = \sum_{r_1+\ldots+r_n=m} \prod_{i=1}^{n} \binom{\lambda_i + r_i - 1}{\lambda_i - 1}. \qquad (2.31)$$

Але у формулі (2.31) $|C^m(A)|$ є числом m-сполучень на мультимножині, первинна специфікація якої є специфікацією із повтореннями без обмежень (1.25). Отже, маємо тотожність

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \sum_{r_1+\ldots+r_n=m} \prod_{i=1}^{n} \binom{\lambda_i + r_i - 1}{\lambda_i - 1}.$$

В багатьох випадках, для обчислення числа сполучень на довільній мультимножині, зручно користуватися наступним алгоритмом.

Нехай задано мультимножину $A = \{x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}\}$. Використовуючи для числа $C^m(A)$ позначення, прийняте в [3] , можна записати

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + t + \ldots + t^{k_i}) = \sum_{i=0}^{r} \binom{k_1, k_2, \ldots, k_n}{i} \ t^i \ , \ r = \sum_{i=1}^{n} k_i \ .$$

Якщо коефіцієнти

$$A(i) = \binom{k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}}{i}, \ i = 0, \ldots, s$$

многочлена

$$\sum_{i=0}^{s} A(i) \ t^i = \prod_{i=1}^{l-1} (1 + t + \ldots + t^{k_i}) \ , \ s = \sum_{i=1}^{l-1} k_i \ ,$$

вже відомі , то коефіцієнт

$$B(j) = \binom{k_1, k_2, \ldots, k_l}{j}, \ j = 0, \ldots, s + k_l$$

многочлена

$$\sum_{j=0}^{s+k_l} B(j) \ t^j = (1 + t + \ldots + t^{k_l}) \cdot \sum_{i=0}^{s} A(i) \ t^i \ ,$$

отримаємо, сумуючи $k_l + 1$ останніх елементів рядка $\underbrace{0 \ldots 0}_{k_l} A(0) A(1) \ldots A(j)$.

Точніше,

$$\binom{k_1, k_2, \ldots, k_l}{j} = \sum_{q=j-k_l}^{j} \binom{k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}}{q}, \ j = 0, \ldots, s + k_l, \qquad (2.32)$$

де

$$\binom{k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}}{q} = 0 \ ,$$

якщо $q < 0$ або $q > s$.

Процес обчислень зручно оформляти у вигляді узагальненого трикутника Паскаля. Якщо перший елемент мультимножини A має кратність k_1, то обчислення починаємо з нульового рядка вигляду $\underbrace{0 \ldots 0}_{k_1} \ 1 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{k_1}$. Перший рядок отримаємо при допомозі нульового, враховуючи (2.32). Він буде мати вигляд $\underbrace{0 \ldots 0}_{k_2} \underbrace{1 \ldots 1}_{k_1+1} \underbrace{0 \ldots 0}_{k_2}$, де k_2 – кратність другого елемента мультимножини A.

Продовжуючи процес обчислень до n – того рядка включно, отримаємо шукані числа $C^i(A)$, $i = 0, \ldots, r+1$, $r = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Нехай, наприклад, мультимножина A має вигляд $\{x_1, x_2^2, x_3^2, x_4^3\}$. Тоді, користуючись цим алгоритмом, отримаємо таку таблицю:

Таблиця 2.1

Узагальнений трикутник Паскаля

				0	1	2	3	4	5	6	7	8
0			0	1	0							
1		0	0	1	1	0	0					
2		0	0	1	2	2	1	0	0			
3	0	0	0	1	3	5	5	3	1	0	0	0
4				1	4	9	14	16	14	9	4	1

Тобто $C^0(A)=1,\ C^1(A)=4,\ C^2(A)=9,\ C^3(A)=14,\ C^4(A)=16$ і т.д. Якщо кратності елементів мультимножини великі, то зручно користуватися співвідношеннями

$$\binom{k_1,k_2,\dots,k_l}{j}=\binom{k_1,k_2,\dots,k_l}{j-1}+\binom{k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}{j}-\binom{k_1,k_2,\dots,k_{l-1}}{j-k_l-1},\ j=0,\dots,\sum_{i=1}^{l}k_i,$$

які випливають із співвідношень (2.32). При цьому вдається значно скоротити кількість операцій додавання.

Зауваження. 1. Обчислюючи число $m-$ підмультимножин мультимножини A, кратності її елементів потрібно розташувати в не спадному порядку. Це дозволяє зменшити об'єм обчислень.

2. Позаяк довільній $k-$підмультимножині B мультимножини A однозначно відповідає $(|A|-k)$- підмультимножина $A-B$ цієї ж мультимножини, то виконуються співвідношення

$$\binom{k_1,k_2,\dots,k_l}{j}=\binom{k_1,k_2,\dots,k_l}{s-j},\ j=0,\dots,s,$$

де $s=\sum_{i=1}^{l}k_i$, тобто, рівновіддалені від кінців кожного рядка таблиці числа рівні між собою. Таким чином, якщо $m>[s/2]$, то замість обчислення $C^m(A)$ зручніше обчислювати $C^{s-m}(A)$.

Наведемо програму на мові Q-BASIC, яка реалізує описаний вище алгоритм.

```
10 REM ' Введення даних про мультимножину A={x1^k1;...;xn^kn}
20 INPUT " Введіть потужність бази мультимножини n=";n
30 DIM k(n): DEFDBL A,B
40 FOR i=1 TO n: PRINT "k("i")=";: INPUT k(i):
s=s+k(i): NEXT i
50 DIM a(S),b(S): a(0)=1: b(0)=1: r=0
```



```
60 REM ' Обчислення шуканих чисел C^i(A)=c(i), i=0,...,s
70 FOR i=1 TO n
80 r=r+k(i)
90 FOR l=r-k(i)+1 TO r: a(l)=0: NEXT l
100 FOR j=1 TO r
110 IF j<k(i)+1 THEN b(j)=b(j-1)+a(j) ELSE
b(j)=b(j-1)+a(j)-a(j-k(i)-1)
120 NEXT j
130 FOR l=1 TO r: a(l)=b(l): NEXT l
140 NEXT i
150 REM 'Виведення результатів обчислень
160 FOR i=0 TO s: PRINT "C("i")="; a(i): NEXT i
170 END
```

Приклад 2.2. Нехай

$$A=\{a_1^{17},a_2^{15},a_3^{15},a_4^{13},a_5^{13},a_6^{13},a_7^{12},a_8^{11},a_9^{10},a_{10}^{10},a_{11}^{9},a_{12}^{5},a_{13}^{4},a_{14}^{2},a_{15}^{1},a_{16}^{1}\}$$

Тоді

$C^0(A)=1, C^1(A)=16, C^2(A)=134, C^3(A)=783, C^4(A)=3589, C^5(A)=13753,\dots,$
$C^{69}(A)$=22609757825146, $C^{70}(A)$=23340334095672, $C^{71}(A)$=23966418603764,
$C^{72}(A)$=24478870056153, $C^{73}(A)$=24870098968147, $C^{74}(A)$=25134247661821,
$C^{75}(A)$= 25267330610568, $C^{76}(A)$= 25267330610568 , ...

Твердження 2.3. *Число елементів* $(m+1)$*-го рангу діаграми Хассе мультибулеана* $(S(A),\subseteq)$ *дорівнює* $|C^m(A)|$

Доведення безпосередньо випливає із зауваження до прикладу 1.6 і теореми 2.2.

2.3. Перестановки на мультимножинах

Означення 2.2. *Множину всіх впорядкованих m - вибірок мультимножини $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ назвемо множиною m - перестановок на цій мультимножині і позначимо через*

$$P^m(A). \tag{2.33}$$

Якщо специфікації мультимножини (1.1) мають вигляд (1.27), (1.25), то потужність множини $P^m(A)$ можна обчислити відповідно за формулами

$$\left|P^m(A)\right|=\frac{n!}{(n-m)!},\qquad \left|P^m(A)\right|=n^m. \tag{2.34}$$

Розглянемо множину (2.10). В цій множині всі мультимножини мають спільну вторинну специфікацію. Тому для кожної такої мультимножини можна побудувати однакову кількість m- перестановок. Відомо [4], що число перестановок мультимножини (1.1) дорівнює

$$\left|P^{|A|}(A)\right|=\frac{|A|!}{k_1!\ \dots\ k_n!}.$$

Тому, число m-перестановок кожної m-мультимножини із множини (2.10) дорівнює

$$\frac{m!}{1!^{\lambda_1}\ \dots\ s!^{\lambda_s}}.$$

Позаяк число всіх m-підмультимножин множини (2.10) можна обчислити за формулою (2.12), то для кожної мультимножини із множини (2.10) можна побудувати всього

$$\frac{m!}{1!^{\lambda_1}\ \dots\ s!^{\lambda_s}}\prod_{j=1}^{s}\binom{\overline{k_j}-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j}$$

m - перестановок. Таким чином ,

$$\left|P^m(A)\right|=\sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)}\frac{m!}{1!^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot s!^{\lambda_s}}\prod_{j=1}^{s}\binom{\overline{k_j}-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j}.$$

Отже, доведена така

Теорема 2.6. *Кількість m-перестановок мультимножини $A=\{a_1^{k_1},\dots,a_n^{k_n}\}$ дорівнює*

$$\left|P^m(A)\right|=\sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)}\frac{m!}{1!^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot s!^{\lambda_s}}\prod_{j=1}^{s}\binom{\overline{k_j}-\sum_{i=j+1}^{s}\lambda_i}{\lambda_j}, \tag{2.35}$$

де $\Lambda^m(A)$ – множина тих розв'язків рівняння

$$\sum_{i=1}^{s}i\lambda_i=m,$$

які задовольняють нерівності

$$\sum_{i=j}^{s}\lambda_j\le\overline{k_j};\ j=1,\dots,s.$$

$s=\min(m,r)$, $r=\max\{k_i\}$, $i=1,\dots,n$, $\overline{k_j}$ – j*-тий елемент специфікації, спряженої до первинної специфікації мультимножини* A.

Число розв'язків рівняння $\sum_{i=1}^{s}i\lambda_i=m$ зростає досить швидко із зростанням m і s. Так, вже при $m=s=20$ воно має 627 розв'язків. Тому формула (2.35) не завжди зручна для практичного використання, бо вимагає великого об'єму обчислень.

Розглянемо алгоритм обчислення числа m-перестановок на мультимножині, який значною мірою усуває ці недоліки.

Позначимо число m - перестановок на мультимножині (1.1), за аналогією до числа m - сполучень, через

$$P^m(A)=\begin{bmatrix}k_1,\dots,k_n\\ m\end{bmatrix}.$$

Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$, то мультимножина (1.1) збігається із своєю базою, тобто є множиною. У цьому випадку

$$\begin{bmatrix} \underbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}_{n} \\ m \end{bmatrix} = \frac{n!}{(n-m)!},\ 0 \le m \le n.$$

Якщо ж, наприклад

$$A = \{\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{k_1}\},$$

то $\begin{bmatrix} k_1 \\ m \end{bmatrix} = 1$, $0 \le m \le k_1$.

Теорема 2.7. *Для довільного* $r = 2,\ldots,n$ *виконується рівність:*

$$\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_r \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\min(i,k_1+\ldots+k_{r-1})} \binom{i}{j} \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}, & \text{якщо } i \le k_r, \\ \sum\limits_{j=i-k_r}^{\min(i,k_1+\ldots+k_{r-1})} \binom{i}{j} \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}, & \text{якщо } k_r < i \le k_1+\ldots+k_r, \end{cases} \tag{2.36}$$

де $0 \le i \le k = |A|$.

Доведення. У [38, с.44] доведено, що експоненційна твірна функція для r-перестановок типу $(\Lambda_1, \ldots \Lambda_n)$ із n елементів має вигляд $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_i}\frac{t^\lambda}{\lambda!}\right)$. В термінології мультимножин ця функція матиме, очевидно, вигляд $\prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k_i}\frac{t^j}{j!}$, тобто

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i}\frac{t^j}{j!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_n}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ i \end{bmatrix}\frac{t^i}{i!}. \tag{2.37}$$

Враховуючи (2.37), матимемо:

$$\left(\sum_{j=0}^{k_1+\ldots+k_{r-1}}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}\frac{t^j}{j!}\right)\sum_{s=0}^{k_r}\frac{t^s}{s!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_r}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_r \\ i \end{bmatrix}\frac{t^i}{i!}.$$

Але позаяк

$$\left(\sum_{j=0}^{k_1+\ldots+k_{r-1}}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}\frac{t^j}{j!}\right)\sum_{s=0}^{k_r}\frac{t^s}{s!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_r}\left(\sum_{j+s=i}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}\frac{t^i}{j!s!}\right),$$

то

$$\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_r \\ i \end{bmatrix} = \sum_{j+s=i}\frac{i!}{j!s!}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix} = \sum_{j+s=i}\binom{i}{j}\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}.$$

Для того, щоб обидва вирази $\binom{i}{j}$ і $\begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}$, що знаходяться під знаком останньої суми, мали зміст, необхідно, щоб виконувалися нерівності $j \le i$ і $j \le k_1+\ldots+k_{r-1}$, тобто щоб виконувалася нерівність $j \le \min(i, k_1+\ldots+k_{r-1})$. Якщо $i \le k_r$, то з нерівності $0 \le s \le k_r$ випливає, що найменшим значенням індекса j за обмеження $j+s=i$ буде $j=0$. Якщо ж $i > k_r$, то найменшим значенням індекса j буде $j = i-k_r$. Таким чином, рівність (2.36) доведена.

Рекурентну рівність (2.36) можна використати для обчислення кількості всіх m-перестановок $m = 0,\ldots,|A|$ мультимножини (1.1). Для цього

1. Записуємо рядок із k_1+1 одиниць, що є числами i-розміщень $\begin{bmatrix} k_1 \\ i \end{bmatrix}$ на мультимножині $A = \{x_1^{k_1}\}$, $i = 0,\ldots,k_1$. Далі будемо називати цей рядок базовим.
2. Під базовим рядком будуємо таблицю, що містить k_1+1 стовпців k_1+k_2+1 рядків. Рядки таблиці нумеруємо згори вниз числами від 0 до k_1+k_2.
3. У k-й рядок таблиці записуємо перші k_1+1 елементів k-го рядка таблиці Паскаля (якщо k-й рядок таблиці Паскаля містить менше, ніж k_1+1 елементів, то дописуємо потрібну кількість нулів).
4. У лівому нижньому куті таблиці заміняємо записані числа нулями так, щоб нулі утворили прямокутний рівнобедрений трикутник із катетом k_1.

5. Обчислюємо суму добутків елементів i-того $(i=0,\ldots,k_1+k_2)$ рядка таблиці на відповідні елементи базового рядка. Отримане число розміщень

$$\begin{bmatrix} k_1, k_2 \\ i \end{bmatrix},\ i=0,\ldots,k_1+k_2$$

дописуємо до i-того рядка справа.

6. Якщо кількість рядків останньої таблиці більша від потужності мультимножини, то обчислення закінчуємо і вважаємо результатом роботи алгоритму стовпчик чисел, дописаний до таблиці справа. Інакше стовпчик чисел, дописаний до таблиці справа, транспонуємо і розглядаємо як базовий рядок нової таблиці і переходимо до п.2. При цьому параметри таблиці збільшуються на величину кратності наступного елемента мультимножини.

Таким чином, що якщо мультимножина (1.1) має базу потужності n, то виконання алгоритму вимагає складання ($n-1$)-ї таблиці.

Приклад 2.3. Розглянемо мультимножину $A=\{x_1^2, x_2^4, x_3^5\}$. Для обчислення числа її m - перестановок $(m=0,\ldots,11)$ будуємо таблицю

	1	1	1	
0	1	0	0	1
1	1	1	0	2
2	1	2	1	4
3	1	3	3	7
4	1	4	6	11
5	0	5	10	15
6	0	0	15	15

	1	2	4	7	11	15	15	
0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	3
2	1	2	1	0	0	0	0	9
3	1	3	3	1	0	0	0	26
4	1	4	6	4	1	0	0	72
5	1	5	10	10	5	1	0	191
6	0	6	15	20	15	6	1	482
7	0	0	21	35	35	21	7	1134
8	0	0	0	56	70	56	28	2422
9	0	0	0	0	126	126	34	4536
10	0	0	0	0	0	252	210	6930
11	0	0	0	0	0	0	462	6930

Таким чином, $P^0(A)=1$, $P^1(A)=3$, $P^2(A)=9$, $P^3(A)=26$, $P^4(A)=72$, $P^5(A)=191$, $P^6(A)=482$, $P^7(A)=1134$, $P^8(A)=2422$, $P^9(A)=4536$. $P^{10}(A)=6930$, $P^{11}(A)=6930$.

Наведений алгоритм ефективний для мультимножин великої потужності, але з невеликою базою. Наприклад, для обчислення числа 20-перестановок на мультимножині $A=\{x_1^3, x_2^9, x_3^{13}\}$ даний алгоритм вимагає складання двох таблиць розмірів 4×13 і 13×26 відповідно, в той час як обчислення за формулою (2.35) вимагає аналізу множини 627 розв'язків рівняння (2.7) та значних обчислень над елементами виділеної із неї підмножини.

Наступна програма на мові Q-BASIC реалізує описаний вище алгоритм.

```
10 REM ' Введення даних про мультимножину A = {x1^k1, ..., xn^kn}
20 INPUT "Введіть розмірність бази мультимножини n = "; n
30 DIM k(n) : DEFDBL A-D , S
40 FOR i = 1 TO n : PRINT "k("; i ;")="; INPUT k(i) : s = s + k(i) : NEXT i
50 DIM a(s), b(s), c(s), d(s)
60 REM ' Обчислення чисел P^i(A) = P(i) , i = 0 , ... , s
70 FOR i = 0 TO k(1) : a(i) = 1 : b(i) = 1 : NEXT i
```

```
80 t = k(1)
90 FOR r = 2 TO n
100 t = t + k(r) : c(0) = 1 : d(0) = 1
110 FOR i = 1 TO t
120 IF i <= t - k(r) THEN min = i ELSE min = t - k(r)
130 FOR j = 1 TO min : c(j) = d(j - 1) + d(j) : NEXT j
140 FOR j = 1 TO min : d(j) = c(j) : NEXT j
150 IF i > k(r) THEN 190
160 sum = 0
170 FOR j = 0 TO min : sum = sum + c(j) * a(j) : NEXT j
180 GOTO 210
190 sum = 0
200 FOR j = i - k(r) TO min : sum = sum + c(j) * a(j) : NEXT j
210 b(i) = sum
220 NEXT i
230 FOR i = 0 TO t : a(i) = b(i) : c(i) = 0 : d(i) = 0 : NEXT i
240 NEXT r
250 REM ' Виведення результатів обчислень
260 FOR i = 0 TO s : PRINT "P(";i;") "; a(i) : NEXT i
270 END
```

Приклад 2.4. Для мультимножини $A=\left\{x_1^1,x_2^1,x_3^1,x_4^2,x_5^2,x_6^2,x_7^2,x_8^3,x_9^3,x_{10}^5\right\}$

P(0)=1, P(1)=10, P(2)=97, P(3)=912, P(4)=8299, P(5)=72946, P(6)=617874, P(7)=5029948, P(8)=39237380, P(9)=292327224, P(10)=2072330400, P(11)=13920355680, P(12)=88179787080, P(13)=523856052720, P(14)=2899520704080, P(15)=14831963546400, P(16)=69386957640000, P(17)=292608485769600, P(18)=1088829613872000, P(19)=3456466684070400,

P(20)=8834757003072000, P(21)=16261584603264000, P(22)= 162615846032640000.

2.4. Стандартні таблиці Юнга похилих діаграм

Зіставимо кожній похилій діаграмі $diagr(A,B)$, в якій елементи первинної специфікації мультимножин $A=\left\{a_1^{\lambda_1},a_2^{\lambda_2},\ldots,a_n^{\lambda_n}\right\}$, $B=\left\{a_1^{\mu_1},a_2^{\mu_2},\ldots,a_n^{\mu_n}\right\}$, $i=1,2,\ldots,n$, задовольняють нерівності (1.3), деяку цілочисельну верхню трикутну матрицю виду

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.38)$$

де $\alpha_{ij}\geq 0$, $1\leq i\leq j\leq n$.

Для цього кожному елементу α_{ij} матриці (2.38) поставимо у відповідність кількість одиничних квадратів j- того ($j=1,2,\ldots,n$), рахуючи зліва направо, стовпця похилої діаграми, що лежать між паралельними лініями, які проходять через нижні основи нижніх квадратів i- того та $(i-1)$- го ($i=1,2,\ldots,n$) стовпців цієї діаграми.

Наприклад, похилій діаграмі, зображеній на рис 2.1,

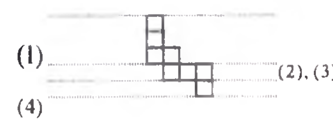


Рис 2.1.

відповідатиме трикутна матриця

$$\begin{pmatrix} 3100 \\ 111 \\ 00 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задамо на множині $i \in \{1,\dots,n\}$ функцію $j(i)$ співвідношенням

$$j(0)=1,\ j(i)=\begin{cases}\max\limits_{j}\{j:\alpha_{ij}\neq 0\}\ ,\ \text{якщо}\ \ \{j:\alpha_{ij}\neq 0\}\neq\varnothing\ ,\\ j(i-1)\ ,\ \text{якщо}\ \ \{j:\alpha_{ij}\neq 0\}=\varnothing\ .\end{cases} \tag{2.39}$$

Із означення матриці похилої діаграми і не зростання первинних специфікацій мультимножин A і B випливає, що елементи матриці (2.38) задовольнятимуть співвідношення

$$\alpha_{ii}=\ldots=\alpha_{i,j(i-1)}\geq\alpha_{i,j(i-1)+1}\geq\ldots\geq\alpha_{i,j(i)}\geq\alpha_{i,j(i)+1}=\ldots=\alpha_{in}=0,\ i=1,\dots,n\,. \tag{2.40}$$

Очевидно, що кожній матриці, елементи якої задовольняють співвідношення (2.40), відповідає деяка єдина похила діаграма. Таким чином, між похилими діаграмами $diagr(A,B)$, в яких елементи первинних специфікацій мультимножин $A=\{a_1^{\lambda_1},a_2^{\lambda_2},\dots,a_n^{\lambda_n}\}$, $B=\{a_1^{\mu_1},a_2^{\mu_2},\dots,a_n^{\mu_n}\}$, $i=1,2,\dots,n$, задовольняють нерівності (1.3), і трикутними матрицями (2.38), елементи яких задовольняють співвідношення (2.40), існує взаємно однозначна відповідність.

Матриця блокової похилої діаграми є блочно-діагональною, блоками якої є матриці відповідних блоків діаграми. Наприклад матриця діаграми, зображеної на рис.2.2,

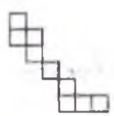


Рис. 2.2.

має вигляд

$$\begin{pmatrix}G_1 & 0 & 0\\ & G_2 & 0\\ & & G_3\end{pmatrix},$$

де

$$G_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ & 1\end{pmatrix},G_2=(1),G_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}.$$

Позначимо число стандартних таблиць Юнга похилої діаграми $diagr(A,B)$ через

$$\mathrm{C}(A,B)=C\begin{pmatrix}\alpha_{11}\ldots\alpha_{1n}\\ \ldots\ldots\\ \alpha_{nn}\end{pmatrix}=C(\alpha_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}\ .$$

Твердження 2.4. *Число стандартних таблиць Юнга похилої діаграми $diagr(A,B)$ дорівнює*

$$C(\alpha_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}=\sum_{r=1}^{n}C(\alpha_{ij}^{(r)})_{1\leq i\leq j\leq n}\,, \tag{2.41}$$

де

$$\alpha_{ij}{}^{(r)}=\begin{cases}\alpha_{ij}-\delta_{ir}^{(2)}\ ,j=i,\dots,j(i-\delta_{i,r+1}^{(1)})\ ,\\ \alpha_{ij}\ ,j=j(i-\delta_{i,r+1}^{(1)})+1\ ,\dots,n\ ,\end{cases} \tag{2.42}$$

$$\delta_{ir}^{(s)}=\begin{cases}(-1)^{i-r},\ i-r=0,\dots,s-1\ ,\\ 0\ \ ,\ i-r\neq 0,\dots,s-1.\end{cases} \tag{2.43}$$

Доведення . Порівняємо матрицю, задану рівностями (2.42), з матрицею (2.38). З означення функції $j(i)$ та співвідношень (2.42) і (2.43) випливає, що елементи r-того та $(r+1)$-го рядків першої матриці мають вигляд

$$\alpha_{rj}^{(r)}=\begin{cases}\alpha_{rj}-1\ ,\ j=r,\dots,j(r)\ ,\\ \alpha_{rj}\ \ ,\ j=j(r)+1,\dots,n\ ;\end{cases}$$

$$\alpha_{r+1,j}^{(r)}=\begin{cases}\alpha_{r+1,j}+1,\ j=r+1,\dots,j(r)\ ,\\ \alpha_{r+1,j}\ \ ,\ j=j(r)+1,\dots,n\ ,\end{cases}$$

а елементи інших рядків в обох матрицях збігаються, тобто $\alpha_{lj}^{(r)}=\alpha_{lj}$ для $l\neq r,r+1$.

Розглянемо частину похилої діаграми $diagr(A,B)$, зображеної на рис.2.3. В зображення цієї частини діаграми ввійшли частини r-того і $(r+1)$-го стовпців з їхніми нижніми квадратами a і b. За правилами побудови похилої діаграми її побудова може починатися тільки деякими нижніми одиничними квадратами її стовпців.

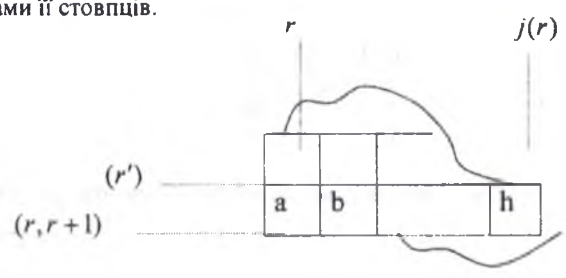


Рис.2.3.

Очевидно, що число побудов похилої діаграми $diagr(A,B)$, які починаються з квадрата a, дорівнює числу побудов похилої діаграми, отриманої з даної відкиданням цього квадрата. Покажемо, що елементи матриці цієї нової похилої діаграми мають вигляд (2.42). Дійсно, в ній число квадратів, що лежать між паралельними прямими (r') і $(r-1)$ в кожному із стовпців від r-того до $j(r)$ включно, зменшиться на одиницю в порівнянні з відповідними числами матриці (2.38), бо від останніх будуть відраховані одиниці, що відповідають квадратам $a,b,\ldots,h$. Але ці ж квадрати будуть зараховані до квадратів, які лежать між прямими (r') і $(r+1)$, і , отже, елементи від $(r+1)$-го рядка до $j(r)$ включно матриці (2.38) збільшаться на одиницю. Елементи решти рядків матриці (2.38), очевидно, не зміняться. Таким чином, число побудов похилої діаграми $diagr(A,B)$, які починаються нижнім квадратом її r-того стовпця, дорівнює $C\left(\alpha_{ij}^{(r)}\right)_{1\le i\le j\le n}$. Таким чином, для завершення доведення достатньо відзначити той очевидний факт, що побудови похилої діаграми, які починаються різними одиничними квадратами, різні.

Зауваження. Застосування рекурентної формули (2.41) може привести до порушення співвідношень (2.40), а саме, може привести до матриць з i-тим нульовим стовпцем або до матриць з від'ємними елементами. У першому випадку ми викреслюємо i-тий стовпець та i-тий рядок цієї матриці і переходимо до матриці порядку на 1 меншого, а в другому випадку будемо вважати, що число стандартних таблиць Юнга похилих діаграм, що відповідають таким матрицям, дорівнює нулю. Відмітимо також, що коли $s=1$, то символ (2.43) стає символом Кронекера.

Зауважимо, що однократне застосування рекурентної формули (2.41) до похилої діаграми ваги $|diagr(A,B)|$ зводиться до підрахунку числа стандартних таблиць Юнга похилих діаграм ваги $|diagr(A,B)|-1$. Отже, багатократне застосування цієї формули до матриці (2.38) зводить задачу підрахунку числа $C(A,B)$ до підрахунку числа побудов похилої діаграми, яка складається із одного одиничного квадрата, тобто до обчислення числа $C(\{a\},\varnothing)$. Але очевидно, що $C(\{a\},\varnothing)=1$. Хоча для підрахунку вручну числа стандартних таблиць Юнга похилих діаграм великої ваги рекурентна формула (2.41) мало придатна, вона може використовуватись в алгоритмах, розрахованих на використання ЕОМ.

Теорема 2.8. *Число стандартних таблиць Юнга похилої діаграми* $diagr(A,B)$, *яка зображується трикутною матрицею (2.38), що задовольняє співвідношення (2.40), дорівнює*

$$C\left(\alpha_{ij}\right)_{1\le i\le j\le n}=\left(\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij}\right)!\ \det\left\|\varepsilon_{ij}\right\|, \tag{2.44}$$

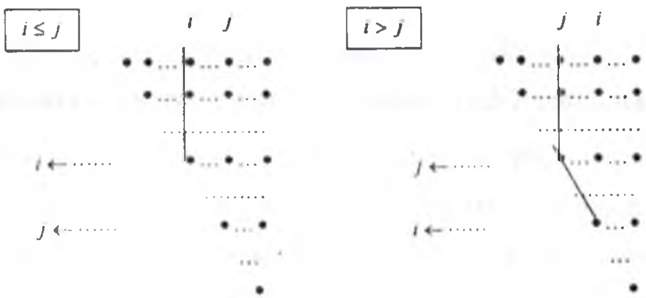
де

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1/\gamma_{ij}!\ ,\ \gamma_{ij}\ge 0\ ,\\ 0\ ,\ \gamma_{ij}<0\ ,\ i,j=1,\ldots,n\end{cases} \tag{2.45}$$

$$\gamma_{ij}=\beta_{ij}+i-j\ ,\ i,j=1,\ldots,n\ , \tag{2.46}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \alpha_{kj} + \sum_{k=j+1}^{i} \alpha_{kk}, \ i, j = 1, \ldots, n \ . \qquad (2.47)$$

Зауваження. Складність обчислення елементів матриці $\|\varepsilon_{ij}\|$ за заданою матрицею (2.38) викликана складністю обчислення величин β_{ij}. Тому подамо схеми (2.48), які спрощують обчислення величин β_{ij}:



(2.48)

В цих схемах точками позначені елементи матриці (2.38), а елемент β_{ij} є сумою тих елементів матриці (2.38), які на схемі сполучені лінією.

Для доведення теореми 2.8 будуть потрібні наступні леми.

Лема 2.1. *Нехай функція $j(i)$ задається рівністю (2.39), а F - множина всіх тих перестановок на множині $\{1,\ldots,n\}$, які задовольняють нерівності $f(i) \le j(i)$. Тоді для довільного $f \in F$ виконується рівність*

$$\sum_{r=1}^{n} \beta_{r,f(r)} = \sum_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij}, \qquad (2.49)$$

де числа β_{ij} визначаються рівностями (2.47).

Доведення. Із схем (2.48) і рівності (2.39) випливає, що $\beta_{ij} \ne 0$, якщо $j = i, \ldots, j(i)$, і $\beta_{ij} = 0$, якщо $j = j(i)+1, \ldots, n$. Таким чином, таблиця значень виразу (2.47) має вигляд

$$\begin{array}{l}
\beta_{1,1} \ \cdots \ \beta_{1,j(1)} \ 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{i-1,1} \ \cdots \ \beta_{i-1,j(1)} \ \cdots \ \beta_{i-1,j(i-1)} \ 0 \ \cdots\cdots\cdots \ 0 \\
\beta_{i,1} \ \cdots \ \beta_{i,j(1)} \ \cdots \ \beta_{i,j(i-1)} \ \cdots \ \beta_{i,j(i)} \ 0 \ \cdots \ 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{n,1} \ \cdots \ \beta_{n,j(1)} \ \cdots \ \beta_{n,j(i-1)} \ \cdots \ \beta_{n,j(i)} \ \cdots \ \beta_{n,n}
\end{array} \qquad (2.50)$$

Позаяк $f \in F$, то зі схем (2.48) випливає, що елементи α_{ij}, $i = 1,\ldots,n$, $j = j(i-1)+1,\ldots, j(i)$ матриці (2.38) ввійдуть в суму $\sum_{r=1}^{n} \beta_{r,f(r)}$ доданками по одному разу. Кратність входження елемента α_{ii} матриці (2.38) в суму, яка стоїть в правій частині рівності (2.49), внаслідок співвідношень (2.40), очевидно, дорівнює $j(i-1) - i + 1$. Із схем (2.48) видно, що елемент β_{ij} таблиці (2.50) (як сума елементів матриці (2.38)) містить серед своїх доданків елемент α_{ii} тоді і тільки тоді, коли α_{ii} належить виділеному в таблиці (2.50) прямокутнику. Але сума $\sum_{r=1}^{n} \beta_{r,f(r)}$ повинна містити по одному ненульовому елементу з кожного із перших $(i-1)$ рядків таблиці (2.50), причому всі вони повинні належати різним стовпцям. Тому у виділеному прямокутнику залишиться $j(i-1)-(i-1)$ стовпців, із яких, згідно з перестановкою f, можна вибрати решту $j(i-1)-i+1$ ненульових доданків вказаної суми. Отже, кратності входження елементів матриці (2.38) в суми, що стоять в правій і лівій частинах рівності (2.49) однакові, що і доводить лему.

Лема 2.2. *Нехай перестановка f задовольняє умови леми 2.1, а числа γ_{ij} задаються рівностями (2.49). Тоді виконується рівність $\sum_{r=1}^{n} \gamma_{r,f(r)} = \sum_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij}$*

Доведення. Справедливість цієї леми випливає із леми 2.1 і рівності $\sum_{i=1}^{n} (i - f(i)) = 0$.

Лема 2.3. *Істинна рівність*

$$\left(\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij}\right)\cdot\det\left\|\varepsilon_{ij}\right\| = \sum_{r=1}^{n}\det\left\|\varepsilon_{ij}^{(r)}\right\|, \tag{2.51}$$

де

$$\varepsilon_{ij}^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_{ij}^{(r)}!}, & \gamma_{ij}^{(r)} \ge 0, \\ 0, & \gamma_{ij}^{(r)} < 0; \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\gamma_{ij}^{(r)} = \beta_{ij}^{(r)} + i - j, \tag{2.53}$$

$$\beta_{ij}^{(r)} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)}\alpha_{kj}^{(r)} + \sum_{k=j+1}^{i}\alpha_{kk}^{(r)}, \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{2.54}$$

а $\alpha_{ij}^{(r)}$ *задаються рівностями* (2.42).

Доведення. Застосовуючи для обчислення елементів $\beta_{ij}^{(r)}$ схеми (2.48) і порівнюючи вирази (2.47) і (2.54), бачимо, що вони однакові для всіх індексів $i,j = 1,\ldots,n$, крім $i = r, j = r,\ldots,j(r)$, а для цих останніх індексів виконується рівність $\beta_{rj}^{(r)} = \beta_{rj} - 1$. Отже, враховуючи (2.46) і (2.53), легко встановити, що $\gamma_{rj}^{(r)} = \gamma_{rj} - 1$ для $j = r,\ldots,j(r)$, а для решти індексів $\gamma_{ij}^{(r)} = \gamma_{ij}$. Але в такому разі із (2.45) і (2.52) випливає, що для $j = r,\ldots,j(r)$ виконується рівність

$$\varepsilon_{rj}^{(r)} = \gamma_{rj}\cdot\varepsilon_{rj}. \tag{2.55}$$

В решті випадків виконується рівність

$$\varepsilon_{ij}^{(r)} = \varepsilon_{ij}. \tag{2.56}$$

Нехай множина F така ж, як і в лемі 2.1. Використовуючи явну формулу для визначника, рівність (2.51) можна переписати у вигляді

$$\left(\sum_{1\le i<j\le n}\alpha_{ij}\right)\sum_{f\in F}\varepsilon(f)\prod_{i=1,\ldots,n;\,j=f(i)}\varepsilon_{ij} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{f\in F}\varepsilon(f)\prod_{i=1,\ldots,n;\,j=f(i)}\varepsilon_{ij}^{(r)}, \tag{2.57}$$

де $\varepsilon(f)$ – знак перестановки f.

Внаслідок (2.55) і (2.56) праву частину рівності (2.57) можна звести до вигляду

$$\sum_{r=1}^{n}\gamma_{r,f(r)}\sum_{f\in F}\varepsilon(f)\prod_{i=1,\ldots,n,\,j=f(i)}\varepsilon_{ij},$$

після чого твердження леми легко випливає з леми 2.2.

Доведення теореми 2.8. Доведемо, що числа $C(\alpha_{ij})_{1\le i\le j\le n}$ задовольняють рекурентне співвідношення (2.41) із твердження 2.4. Якщо $|A| = 1$ і $B = \varnothing$, то рівність (2.44) набуває вигляду $C(A,\varnothing) = 1$, отже, є правильною. Підставляючи замість $C(\alpha_{ij}^{(r)})_{1\le i\le j\le n}$ у правій частині рівності (2.41) їх значення, обчислені за формулою (2.44),отримаємо рівність

$$C(\alpha_{ij})_{1\le i\le j\le n} = \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij}^{(r)}\right)!\det\left\|\varepsilon_{ij}^{(r)}\right\|,$$

яка внаслідок рівності

$$\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij}^{(r)} = \sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{ij} - 1$$

і леми 2.3. прийме вигляд тотожності. Теорема доведена.

Із теореми 2.8 легко виводиться наступне відоме твердження, пряме доведення якого є досить складним.

Наслідок 1. [40,41] *Число стандартних таблиць Юнга похилої діаграми* $diagr(A,B)$, *де* $A = \{a_1^{\lambda_1},\ldots,a_n^{\lambda_n}\}$, $B = \{a_1^{\mu_1},\ldots,a_n^{\mu_n}\}$, $\mu_i \le \lambda_i, i = 1,\ldots,n$ *дорівнює*

$$C(A,B) = N!\cdot\det\left\|(\lambda_j - \mu_i + i - j)!^{-1}\right\|, \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{2.58}$$

де $N = |diagr(A,B)|$.

Доведення. Якщо $i \le j$, то з (2.47) випливає, що

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{i}\alpha_{kj}.$$

Використовуючи схеми (2.48) і зв'язок елементів матриці (2.38) з відповідною похилою діаграмою, матимемо :

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \lambda_j - \mu_i \ , \ \lambda_j \ge \mu_i \ , \\ 0 \ , \lambda_j < \mu_i . \end{cases}$$

Якщо, крім цього, врахувати, що в співвідношеннях (2.45) $\varepsilon_{ij} = 0$ для $\gamma_{ij} < 0$, то, беручи до уваги рівність

$$N = \sum_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij} ,$$

отримаємо співвідношення (2.58). Якщо ж $i > j$, то співвідношення (2.47) набуває вигляду

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} + \sum_{k=j+1}^{i} \alpha_{kk} .$$

Але

$$\sum_{k=1}^{j} \alpha_{kj} = \lambda_j - \mu_j \ ,$$

а

$$\sum_{k=j+1}^{i} \alpha_{kk} = (\mu_j - \mu_{j+1}) + \ldots + (\mu_{i-1} - \mu_i) = \mu_j - \mu_i .$$

Тому $\beta_{ij} = \lambda_j - \mu_j + \mu_j - \mu_i = \lambda_j - \mu_i$, тобто і в цьому випадку виконується співвідношення (2.58).

Наслідок 2. *Якщо* $diagr\left(A, B\right)$ *– блокова похила діаграма з матрицею*

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \ldots 0 \\ & G_2 \ldots 0 \\ & \ldots \\ & G_r \end{pmatrix} , \qquad (2.59)$$

де G_i , $i = 1,\ldots,r$ *– матриці блоків, то*

$$C\left(A, B\right) = \left|diagr(A, B)\right|! \prod_{i=1}^{r} \frac{C\left(G_i\right)}{\left|G_i\right|!} . \qquad (2.60)$$

Доведення. Позаяк матриця блокової похилої діаграми має діагональний вигляд, то, використовуючи схеми (2.48), бачимо, що матриця $\left\|\varepsilon_{ij}\right\|$ у правій частині рівності (2.44) також має блоково-діагональний вигляд. При цьому

діагональні блоки Γ_{ii} є матрицями, елементи яких пов'язані з елементами відповідних блоків G_i матриці (2.59) співвідношеннями (2.45)-(2.47). Позаяк

$$\det_{i,j=1,\ldots,n} \left\|\varepsilon_{ij}\right\| = \prod_{j=1}^{r} \det \left\|\Gamma_{jj}\right\|$$

і

$$\det \left\|\Gamma_{jj}\right\| = \frac{C(G_j)}{\left|G_j\right|!} , \ j = 1,\ldots,r \ ,$$

то підставляючи одержане значення для $\det\limits_{i,j=1,\ldots,n} \left\|\varepsilon_{ij}\right\|$ у рівність (2.44) і враховуючи рівності

$$\sum_{1 \le i \le j \le n} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \left|G_i\right| = \left|diagr(A, B)\right| ,$$

одержуємо рівність (2.60).

Твердження 2.5. *Якщо* x_i , $i = 1,\ldots,n$ *- деяке ціле число, причому* $x_i \ge n$, *то справедлива тотожність:*

$$\det_{i,j=1,\ldots,n} \left\|x_i^{j-1}\right\| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det_{i,j=1,\ldots,n} \left\|\frac{\left(x_j + n\right)!}{\left(x_j + i\right)!}\right\| . \qquad (2.61)$$

Доведення. Нехай

$$\Delta_n = \det_{i,j=1,\ldots,n} \left\|\frac{\left(x_j + n\right)!}{\left(x_j + i\right)!}\right\| .$$

Віднімемо у визначнику Δ_n від кожного елемента i-го рядка $(i = 1,\ldots,n-1)$ $(i+1)$-й рядок помножений на $(x_1 + i + 1)$, а елементи n-го рядка залишимо без змін. Позаяк

$$\frac{\left(x_j + n\right)!}{\left(x_j + i\right)!} - \frac{\left(x_j + n\right)!}{\left(x_j + i + 1\right)!} \cdot \left(x_1 + i + 1\right) = \frac{\left(x_j + n\right)!}{\left(x_j + i + 1\right)!} \cdot \left(x_j - x_1\right), \ j = 1,\ldots,n \ ,$$

то всі елементи першого стовпця, крім елемента із n-го рядка, дорівнюють нулю. Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} \det_{\substack{i=1,\dots,n-1\\ j=2,\dots,n}} \left\| \frac{(x_j+n)!}{(x_j+i+1!)} \cdot (x_j - x_1) \right\| = \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \cdot \det_{\substack{i=1,\dots,n-1\\ j=2,\dots,n}} \left\| \frac{(x_j+n)!}{(x_j+i+1)!} \right\|.$$

Покладемо в останньому визначнику $j = j' + 1$, тоді отримаємо рівність:

$$\Delta_n = (-1)^{n-1} \cdot \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \cdot \det_{i,j'=1,\dots,n-1} \left\| \frac{(x_{j'+1}+n)!}{(x_{j'+1}+i+1)!} \right\| = (-1)^{n-1} \cdot \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \cdot \Delta_{n-1}.$$

Продовжуючи процес аналогічних обчислень, дістанемо рівність

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| x_i^{j-1} \right\|,$$

яка доводить твердження.

Таким чином, визначник Вандермонда, крім традиційної форми запису, може бути виражений також через факторіали.

Наслідок 3. *Нехай* $A = \{a_1^{\lambda_1}, \dots, a_n^{\lambda_n}\}$ *– деяка мультимножина, тоді число стандартних таблиць діаграми Ферре* $diagr(A, \varnothing)$ *можна обчислити за формулою:*

$$C(A,\varnothing) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + n - i)!} \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| (\lambda_i - i)^{j-1} \right\|, \qquad (2.62)$$

де $N = |diagr(A, \varnothing)|$.

Доведення.

$$C(A,\varnothing) \overset{(2.58)}{=} N! \cdot \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| (\lambda_j + i - j)!^{-1} \right\| = N! \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_j + n - j)!}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + n - i)!} \cdot \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| \frac{1}{(\lambda_j + i - j)!} \right\| =$$

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + n - i)!} \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| \frac{(\lambda_j - j + n)!}{(\lambda_j - j + i)!} \right\| \overset{(2.61)}{=} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + n - i)!} \det_{i,j=1,\dots,n} \left\| (\lambda_i - i)^{j-1} \right\|$$

Зауваження. Отже, правило гаків Фрейма-Робінсона-Тролла обчислення числа стандартних таблиць Юнга діаграм Ферре може бути виражене при допомозі визначника Вандермонда.

РОЗДІЛ 3

ПАРАВИЗНАЧНИКИ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТИ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

3.1. Паравизначники та параперманенти трикутних матриць

Означення 3.1 *Трикутну таблицю чисел*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \qquad (3.1)$$

назвемо трикутною матрицею, а число n – її порядком.

Зауваження. Звернемо увагу на те, що трикутна матриця в нашому розумінні не є матрицею у звичайному розумінні цього терміну, оскільки вона є *трикутною*, а не прямокутною таблицею чисел (певним виправданням такого вживання терміну "*трикутна матриця*" може слугувати те, що ми можемо розширити нашу трикутну таблицю до квадратної за допомогою зірочок або якого-небудь іншого службового символу).

Означення 3.2. *Матрицю виду*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

де M_i, $i = 1,\ldots,s$ – деякі трикутні матриці, а в лівій нижній частині стоять нулі, назвемо блочно-діагональною.

Кожному елементу a_{ij} матриці (3.1) поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k = j,\ldots,i$, які назвемо *похідними елементами* матриці, що породжені *ключовим елементом* a_{ij}. Добуток всіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij}, позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}. \qquad (3.3)$$

Елементи матриці (3.1) будемо схематично зображувати кружечками, ключові елементи – замальованими кружечками, а похідні – зірочками. На рис.3.1 схематично зображена трикутна матриця 5-го порядку, в якій a_{42} – ключовий елемент, а елементи a_{42}, a_{43}, a_{44} – похідні, ним породжені.

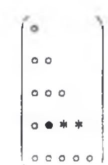


Рис.3.1.

Означення 3.3. *Набір ключових елементів трикутної матриці назвемо нормальним набором цієї матриці, якщо множина породжених ними похідних* *елементів має потужність n, причому жодні два з цих елементів не лежать в одному стовпці.*

Наприклад, в трикутній матриці порядку 5 нормальний набір утворюють елементи a_{11}, a_{42} і a_{55}.

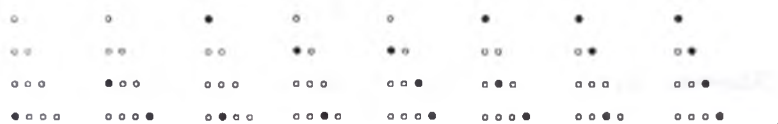
Позначимо через $\mathrm{P}(n)$ множину всіх впорядкованих розбиттів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ натурального числа n. Як відомо [4],

$$|\mathrm{P}(n)| = 2^{n-1}. \tag{3.4}$$

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$– деяке впорядковане r-розбиття із множини $\mathrm{P}(n)$. Кожній компоненті α_s, $s = 1, \ldots, r$, цього розбиття поставимо у відповідність ключовий елемент $a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\, \alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1}$ матриці (3.1).

Легко бачити, що утворений таким чином набір ключових елементів буде нормальним.

Приклад 3.1. На рис.3.2 вказано всі впорядковані розбиття числа 4 і відповідні їм нормальні набори ключових елементів



(4) (3,1) (1,3) (2,2) (2,1,1) (1,2,1) (1,1,2) (1,1,1,1)

Рис.3.2.

Кожному нормальному набору a ключових елементів припишемо знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ – сума всіх індексів ключових елементів цього набору. Наприклад, нормальному набору ключових елементів $a = (a_{11}, a_{22}, a_{43}, a_{65})$ трикутної матриці порядку 6 приписуємо знак "+", бо сума всіх індексів цього набору дорівнює $\varepsilon(a) = 24$.

Означення 3.4. *Паравизначником трикутної матриці (3.1) назвемо число*

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in \mathrm{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\, \alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}, \tag{3.5}$$

де $\varepsilon(a)$– знак відповідного розбиттю $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ нормального набору a ключових елементів.

Приклад 3.2. Як випливає з прикладу 3.1,

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \right\rangle = -a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{21}a_{22}a_{43}a_{44} -$$

$$-a_{21}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{32}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

Означення 3.5. *Параперманентом трикутної матриці (3.1) назвемо число*

$$\operatorname{pper}(A) = \left[\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right] = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in \mathrm{P}(n)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\, \alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}. \tag{3.6}$$

Слід відмітити, що внаслідок (3.4) паравизначник (3.5) і параперманент (3.6) складаються із 2^{n-1} доданків.

Кожному елементу a_{ij} матриці (3.1) поставимо у відповідність трикутну таблицю елементів цієї матриці із цим елементом в лівому нижньому куті, яку назвемо *рогом матриці* і позначимо через R_{ij}. Очевидно, що ріг R_{ij} є матрицею $i-j+1$ - го порядку. В ріг R_{ij} входять тільки ті елементи a_{rs} матриці (3.1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \le s \le r \le i$. Вважатимемо, що

$$\operatorname{ddet}(R_{01}) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}) = \operatorname{pper}(R_{01}) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}) = 1. \qquad (3.7)$$

Приклад 3.3. Для трикутної матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix},$$

порядку 5 ріг R_{42} має вигляд

$$R_{42} = \begin{pmatrix} a_{22} & & \\ a_{32} & a_{33} & \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Якщо в розі R_{ij} елементи з j-го стовпця початкової трикутної матриці замінити відповідними елементами її k-го стовпця $(k < j)$, то утворений таким чином ріг позначатимемо через $R_{i j/k}$. Аналогічно якщо в розі R_{ij} елементи з i-го рядка початкової трикутної матриці замінити відповідними елементами її k-го рядка $(i < k)$, то утворений таким чином ріг позначатимемо через $R_{i/k, j}$. Вважатимемо, що $\operatorname{ddet}(R_{n\, n+1/n}) = \operatorname{pper}(R_{n\, n+1/n}) = 0$.

Наприклад, для рогу з прикладу 3.3

$$R_{4 2/1} = \begin{pmatrix} a_{21} & & \\ a_{31} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Означення 3.6. *Прямокутну таблицю елементів трикутної матриці (3.1) назвемо вписаною в цю матрицю, якщо одна її вершина збігається з елементом a_{n1}, а протилежна до неї вершина – з діагональним елементом a_{ii}. Таку таблицю позначатимемо через $T(i)$.*

Зауваження. Якщо в означенні 3.6 $i = 1$ або $i = n$, то *прямокутна таблиця вироджується* відповідно у 1-й стовпець чи n-ий рядок.

Приклад 3.4. На рис. 3.3 прямокутником виділено елементи вписаної таблиці $T(3)$ для трикутної матриці порядку 4:

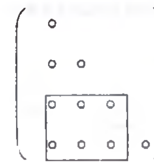


Рис.3.3.

Означення 3.7. *Алгебраїчними доповненнями D_{ij}, P_{ij} до факторіального добутку ключового елемента a_{ij} паравизначника (3.5) і парапермaнента (3.6) відповідно назвемо числа*

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{ddet}(R_{j-1,1}) \operatorname{ddet}(R_{n,i+1}), \qquad (3.8)$$

$$P_{ij} = \operatorname{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+1}), \qquad (3.9)$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ – відповідні роги.

Із означення $M(n)$-множини випливає, що для кожної мультимножини $\alpha \in M(n)$ множина пар індексів (i, i_α), де i_α є номером першого місця, на якому в мультимножині α зустрічається число i, визначає нормальний набір ключових елементів матриці (3.1).

Твердження 3.1. *Добуток $a_{\alpha(1),1} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha(n),n}$, в якому перший індекс пробігає деяку n-мультимножину α із $M(n)$-множини, є добутком факторіальних добутків ключових елементів, що належать до деякого нормального набору ключових елементів матриці (3.1), тобто цей добуток, з точністю до знаку, є одним із доданків паравизначника (або одним із доданків парапермaнента цієї матриці).*

Доведення випливає з попереднього зауваження і означення факторіального добутку ключового елемента.

Твердження 3.2. *Для довільної трикутної матриці A порядку n*

$$\mathrm{ddet}(A)=\sum_{\alpha\in M(n)}(-1)^{\varepsilon(\alpha)}\cdot a_{\alpha(1),1}a_{\alpha(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha(n),n},$$

де $\varepsilon(\alpha)$ – сума всіх індексів ключових елементів нормального набору α, що визначається мультимножиною α;

$$\mathrm{pper}(A)=\sum_{\alpha\in M(n)}a_{\alpha(1),1}a_{\alpha(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\alpha(n),n}.$$

Доведення. Це випливає з очевидної взаємно однозначної відповідності між множиною $M(n)$ і множиною всіх нормальних наборів ключових елементів матриці порядку n та твердження 3.1.

Твердження 3.2 можна розглядати як ще одне означення паравизначника і параперманента.

3.2. Властивості паравизначників та параперманентів

Твердження 3.3. *(Розклад паравизначника та параперманента за елементами вписаної прямокутної таблиці). Нехай A – трикутна матриця порядку n, а $T(i)$ – вписана в неї прямокутна таблиця елементів. Тоді виконуються рівності:*

$$\mathrm{ddet}(A)=\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}, \tag{3.10}$$

$$\mathrm{pper}(A)=\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}P_{rs}, \tag{3.11}$$

де D_{rs} і P_{rs} – відповідні алгебраїчні доповнення до факторіального добутку ключового елемента a_{rs}, що належить таблиці $T(i)$.

Доведення. Для довільного елемента a_{rs} роги $R_{s-1,1}$, $R_{n,r+1}$ мають відповідно порядки $(s-1)-1+1=s-1$ і $n-(r+1)+1=n-r$ і не мають спільних

елементів (бо $s\le r$). Паравизначники та параперманенти цих рогів є сумою відповідно 2^{s-2} і 2^{n-r-1} різних доданків. Тому вирази $\{a_{rs}\}D_{rs}$, $\{a_{rs}\}P_{rs}$ для $n=1,2,\ldots$ складаються із $2^{s-2}\cdot 2^{n-r-1}$ різних доданків.

Із означення нормального набору випливає, що ключовий елемент a_{rs} матриці (3.1) може входити в нормальний набір ключових елементів матриці тільки в комбінації із нормальними наборами ключових елементів її рогів $R_{s-1,1}$ і $R_{n,r+1}$. Зауважимо також, що кожен доданок, який входить до правої частини рівностей (3.10) або (3.11), складається із добутку n різних елементів матриці, бо

$$(s-1)+(r-s+1)+(n-r)=n,$$

де $s-1$ і $n-r$ – порядки рогів $R_{s-1,1}$ і $R_{n,r+1}$, а добуток $\{a_{rs}\}$ складається із $r-s+1$ співмножників (див. Рис. 3.4).

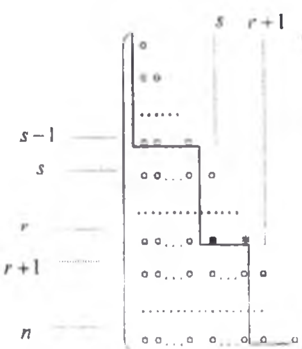


Рис.3.4.

Вирази в правих частинах рівностей (3.10) і (3.11) містять по 2^{n-1} доданків, бо

$$\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n} 2^{s-2}\cdot 2^{n-r-1} = (1+2^0+\ldots+2^{i-2})(2^{n-i-1}+2^{n-i-2}+\ldots+2^0+1) = 2^{i-1}2^{n-i} = 2^{n-1}$$

Позаяк всі ці доданки різні, то теорема доведена.

Наслідок 1. *Якщо $i=1$, то рівності (3.10), (3.11) набувають відповідно вигляду*

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}D_{r1} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\{a_{r1}\}\cdot\operatorname{ddet}(R_{n,r+1}), \tag{3.12}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}P_{r1} = \sum_{r=1}^{n}\{a_{r1}\}\cdot\operatorname{pper}(R_{n,r+1}), \tag{3.13}$$

а у випадку $i=n$ – вигляду

$$\operatorname{ddet}(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}D_{ns} = \sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\{a_{ns}\}\cdot\operatorname{ddet}(R_{s-1,1}), \tag{3.14}$$

$$\operatorname{pper}(A) = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}P_{ns} = \sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\cdot\operatorname{pper}(R_{s-1,1}). \tag{3.15}$$

Приклад 3.5. Використовуючи (3.16), легко довести рівність

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = \left\langle\begin{matrix} x \\ 0\ \ x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{0\ \ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ 0}_{n-1}\ \ x \\ -\dfrac{a_0}{a_1}\ \ -\dfrac{a_1}{a_2}\ \ \ldots\ \ -\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\ \ -a_{n-1}\ \ 1 \end{matrix}\right\rangle,$$

Наслідок 2. *Якщо у матриці A всі елементи якогось стовпця дорівнюють 0, то* $\operatorname{ddet}(A) = \operatorname{pper}(A) = 0$.

Доведення випливає з того, що якщо всі елементи i-того стовпця дорівнюють нулю, то всі факторіальні добутки елементів вписаної таблиці $T(i)$ дорівнюють нулю.

Приклад 3.6. Обчислимо наступний паравизначник, розкладаючи його за елементами вписаної таблиці $T(3)$:

$$\left\langle\begin{matrix} 2 \\ 1\ \ 3 \\ -1\ \ 4\ \ 0 \\ 3\ \ 1\ \ 5\ \ -2 \end{matrix}\right\rangle = -5\cdot(-2)\cdot\left\langle\begin{matrix} 2 \\ 1\ \ 3\end{matrix}\right\rangle + 1\cdot 5\cdot(-2)\cdot\langle 2\rangle - 3\cdot 1\cdot 5\cdot(-2) = 40.$$

Твердження 3.4. *(Розклад за елементами j-того стовпця). Для довільного $j, 1\le j\le n$, виконуються рівності*

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}D_{rj} = \operatorname{ddet}(R_{j-1,1})\operatorname{ddet}(R_{nj}), \tag{3.16}$$

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}P_{rj} = \operatorname{pper}(R_{j-1,1})\operatorname{pper}(R_{nj}). \tag{3.17}$$

Доведення.

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}\ \ D_{rj} = \sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}\cdot(-1)^{r+j}\operatorname{ddet}(R_{j-1,1})\operatorname{ddet}(R_{n,r+1}) =$$

$$= \operatorname{ddet}(R_{j-1,1})\cdot\sum_{r=j}^{n}(-1)^{r+j}\{a_{rj}\}\operatorname{ddet}(R_{n,r+1}).$$

Остання сума є розкладом паравизначника $\operatorname{ddet}(R_{nj})$ за елементами його першого стовпця, тому рівність (3.16) істинна.

Аналогічно доводиться рівність (3.17).

Твердження 3.5. *Якщо $a_{ri} = b_{ri} + c_{ri}$ для всіх r, $i\le r\le n$, тобто i-тий стовпець матриці розпадається в суму двох стовпців, то справедлива рівність*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}\ a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ldots b_{ii}+c_{ii} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots b_{ni}+c_{ni}\ldots a_{nn}\end{matrix}\right\rangle = \left\langle\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}\ a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ldots b_{ii} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots b_{ni}\ldots a_{nn}\end{matrix}\right\rangle + \left\langle\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}\ a_{22} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ldots c_{ii} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots c_{ni}\ldots a_{nn}\end{matrix}\right\rangle \tag{3.18}$$

Для параперманентів справедлива аналогічна рівність.

Доведення. За означенням паравизначника кожен доданок у правій частині рівності (3.5) є добутком n елементів матриці (3.1), причому кожен такий добуток містить один і тільки один елемент із i-того стовпця. Тому в кожному із 2^{n-1} доданків паравизначника з лівої частини рівності (3.18) буде присутній співмножник $(b_{ri}+c_{ri})$, $r=i,\ldots,n$. Розкриваючи дужки в кожному доданку і групуючи відповідно утворені доданки, отримаємо праву частину рівності (3.18).

Твердження 3.6. *Якщо всі елементи деякого стовпця паравизначника (параперманента) мають спільний дільник, то його можна винести за знак паравизначника (параперманента).*

Доведення очевидне.

Твердження 3.7. *Якщо всі елементи першого стовпця трикутної матриці порядку $n>1$ дорівнюють числу a, то її паравизначник дорівнює нулю, а параперманент дорівнює подвоєному добутку числа a на параперманент матриці, яка утворюється з початкової матриці викреслюванням її першого стовпця.*

Доведення. Зіставимо кожному впорядкованому розбиттю $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ числа n розбиття α' за правилом: $\alpha'=(\alpha_2+1,\alpha_3,\ldots,\alpha_r)$, якщо $\alpha_1=1$, і $\alpha'=(1,\alpha_1-1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$, якщо $\alpha_1>1$. Очевидно, що $\alpha''=\alpha$. Тому множина всіх впорядкованих розбиттів числа n розбивається на пари (α,α'), причому $\alpha\neq\alpha'$. Позаяк всі елементи першого стовпця матриці (3.1) рівні, то розбиттям α і α' відповідають нормальні набори ключових елементів, добутки факторіальних добутків яких співпадають.

Нехай (α,α') – деяка пара розбиттів. Без обмеження загальності можна вважати, що $\alpha=(1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r)$, $\alpha'=(\alpha_2+1,\alpha_3,\ldots,\alpha_r)$. Порівняємо на парність суму індексів ключових елементів, які відповідають першим двом компонентам розбиття α, з сумою індексів ключового елемента, який відповідає першій

компоненті розбиття α'. Компоненті 1 розбиття α відповідає ключовий елемент a_{11}, а компоненті α_2 – ключовий елемент $a_{\alpha_2+1,2}$. Першій компоненті α_2+1 розбиття α' відповідає ключовий елемент $a_{\alpha_2+1,1}$. Позаяк суми $1+1+(\alpha_2+1)+2$ і $(\alpha_2+1)+1$ мають різну парність, то в паравизначнику розбиттям α і α' відповідають два доданки, рівні за їх абсолютною величиною, але протилежні за знаком. Тому паравизначник дорівнюватиме нулю.

При обчисленні параперманента сума всіх доданків, які відповідають розбиттям вигляду $\alpha=(1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_r)$, дорівнює $a\cdot\operatorname{pper}(R_{n2})$, тому параперманент буде дорівнювати $2\cdot a\cdot\operatorname{pper}(R_{n2})$.

Твердження 3.8. *Якщо в деякій вписаній таблиці, що містить більше одного рядка, у кожному стовпчику всі елементи рівні, то паравизначник дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай

$$a_{sr}=b_r\ ,\ s=i,\ldots,n\ ,\ r=1,\ldots,i,\quad i\neq n\quad . \tag{3.19}$$

За твердженням 3.3 $\operatorname{ddet}(A)=\sum\limits_{s=1}^{i}\sum\limits_{r=i}^{n}\{a_{rs}\}D_{rs}$. Враховуючи (3.19) і наслідок 1 із твердження 3.3, матимемо:

$$\sum_{s=i}^{n}\{a_{sr}\}D_{sr}=(-1)^{r-i}b_rb_{r+1}\cdot\ldots\cdot b_{i-1}\operatorname{ddet}(R_{r-1,1})\sum_{s=i}^{n}(-1)^{s+i}\{a_{si}\}\operatorname{ddet}(R_{n,s+1})=$$

$$=(-1)^{r-i}b_rb_{r+1}\cdot\ldots\cdot b_{i-1}\cdot\operatorname{ddet}(R_{r-1,1})\cdot\operatorname{ddet}(R_{ni}).$$

Але за твердженням 3.6. $\operatorname{ddet}(R_{ni})=0$. Тому $\operatorname{ddet}(A)=\sum\limits_{s=1}^{i}0=0$.

Твердження 3.9. *Якщо всі елементи j-того стовпця $(1<j<n)$ трикутної матриці A дорівнюють a, то*

$$\operatorname{ddet}(A)=(-a)\cdot\operatorname{ddet}(B), \tag{3.20}$$

$$\left\langle\begin{matrix} x & & & & \\ x_1 & x & & & \\ x_1 & x_2 & x & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x & \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_n & 1 \end{matrix}\right\rangle = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n). \qquad (3.24)$$

Аналогічно доводиться, що

$$\begin{bmatrix} z_1 & & & \\ x_1 & z_2 & & \\ \ldots & \ldots & & \\ x_1 & x_2 \ldots & z_n & \\ x_1 & x_2 \ldots & x_n & 1 \end{bmatrix}_{n+1} = (z_1+x_1)(z_2+x_2)\cdot\ldots\cdot(z_n+x_n). \qquad (3.25)$$

Твердження 3.10. *Для блочно-діагональної матриці (3.2) справедливі рівності*

$$\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{ddet}(M_1)\cdot\ldots\cdot\operatorname{ddet}(M_s), \qquad (3.26)$$

$$\operatorname{pper}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{pper}(M_1)\cdot\ldots\cdot\operatorname{pper}(M_s). \qquad (3.27)$$

Доведення. Доведемо рівність (3.26) (рівність (3.27) доводиться аналогічно). Нехай матриця M_1 має порядок k. Розкладемо паравизначник матриці (3.2) за елементами таблиці $T(k+1)$. Позаяк всі елементи цієї таблиці дорівнюють нулю, крім елементів $(k+1)$-го стовпця, то на основі твердження 3.4 (рівність 3.16) маємо рівність

$$\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix} = \operatorname{ddet}(M_1)\cdot\operatorname{ddet}\begin{pmatrix} M_2 & & & \\ 0 & M_3 & & \\ \ldots & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix}.$$

Міркуючи аналогічно далі, отримаємо рівність (3.26).

Твердження 3.11. *Нехай елементи матриці (3.1) є диференційовними функціями від змінної t. Тоді*

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{ddet}(A)) =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a'_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle + \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a'_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle + \ldots + \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{matrix}\right\rangle \qquad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt}(pper(A)) =$$

$$= \begin{bmatrix} a'_{11} & & & \\ a'_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a'_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a'_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a'_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a'_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

Доведення випливає з того, що паравизначник (параперманент) є сумою 2^{n-1} доданків вигляду $(-1)^{\varepsilon(a)} a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}$ ($a_{i_1 1} a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}$), і правила диференціювання добутку.

Лема 3.1. *Знак відповідного розбиттю $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ числа n нормального набору a ключових елементів трикутної матриці порядку n дорівнює $(-1)^{n-r}$.*

Доведення. Нагадаємо, що коли $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ – впорядковане розбиття числа n, то кожній компоненті α_s ставиться у відповідність ключовий елемент $a_{\alpha_1+\dots+\alpha_s,\,\alpha_1+\dots+\alpha_{s-1}+1}$. Твердження леми тепер випливає з наступних конгруенцій:

$$\sum_{s=1}^{r}((\alpha_1+\ldots+\alpha_s)+(\alpha_1+\ldots+\alpha_{s-1}+1)) \equiv (\alpha_1+\ldots+\alpha_s+r) \equiv (n+r) \equiv$$
$$\equiv n-r \pmod 2.$$

Твердження 3.12. *(про зв'язок паравизначника і параперманента). Для довільної трикутної матриці A порядку n виконується рівність*

$$\operatorname{ddet}\left((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij}\right)_{1\le j\le i\le n} = \operatorname{pper}\left(a_{ij}\right), \tag{3.30}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Доведення. Розглянемо доданок паравизначника який відповідає впорядкованому розбиттю $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$. Легко бачити, що при переході від матриці $\left(a_{ij}\right)_{1\le j\le i\le n}$ до матриці $\left((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij}\right)_{1\le j\le i\le n}$ змінять знак на протилежний рівно $n-r$ множників. Тепер твердження випливає з леми 3.1.

Твердження 3.13. *Для матриці (3.1) виконуються рівності:*

$$\operatorname{ddet}(A) = a_{nn}(\operatorname{ddet}(R_{n-1,1}) - \operatorname{ddet}(R_{n-1/_{n},1})), \tag{3.31}$$

$$\operatorname{pper}(A) = a_{nn}(\operatorname{pper}(R_{n-1,1}) + \operatorname{pper}(R_{n-1/_{n},1})). \tag{3.32}$$

Доведення. Розіб'ємо всі доданки паравизначника $\operatorname{ddet}(A)$ на дві групи: до першої групи віднесемо ті доданки, серед множників яких зустрічається член $a_{n,n-1}$, а до другої – решту доданків. Легко бачити, що сума доданків другої групи дорівнює $a_{nn}\operatorname{ddet}(R_{n-1,1})$. Оскільки доданки першої групи серед множників містять $a_{n,n-1}$, то вони не можуть містити множники, що належать $(n-1)$-му рядку. Якщо в доданку з першої групи кожен множник вигляду $a_{n,k}$, де $k<n$, замінити множником $a_{n-1,k}$, то цей доданок перейде в доданок із $a_{nn}\operatorname{ddet}(R_{n-1/_{n},1})$, але при цьому змінить знак, бо замість ключового елемента з n-го рядка одержимо ключовий елемент з $(n-1)$-го рядка і сума індексів ключових елементів

зменшиться на 1. Таким чином, сума доданків першої групи дорівнює $-a_{nn}\operatorname{ddet}(R_{n-1/_{n},1})$. Це завершує доведення рівності (3.31).

Рівність (3.32) доводиться аналогічно.

Твердження 3.14. *Нехай A – трикутна матриця порядку n. Позначимо* $\operatorname{ddet}(R_{i,1})=\Diamond_i$, $\operatorname{pper}(R_{i,1})=\Box_i$, $i=0,\dots,n$ *Тоді виконуються рівності:*

$$\Diamond_n = \sum_{i=0}^{n-2} k_i \cdot \Diamond_i, \tag{3.33}$$

$$\Box_n = \sum_{i=0}^{n-2} l_i \cdot \Box_i, \tag{3.34}$$

де

$$k_i = (-1)^{n-i}(a_{n-1,i+1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n-1} - a_{n,i+1}\cdot\ldots\cdot a_{n,n-1})\cdot a_{n,n},$$
$$l_i = (a_{n-1,i+1}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n-1} + a_{n,i+1}\cdot\ldots\cdot a_{n,n-1})\cdot a_{n,n}.$$

Доведення. Якщо розкладемо паравизначники і параперманенти правих частинах рівностей (3.35) і (3.36) за елементами останнього рядка і винесемо за дужки спільний множник, то отримаємо відповідно рівності (3.37) і (3.38).

3.3. F-паравизначники та F-параперманенти трикутних матриць

Розглянемо деякі модифікації паравизначників та параперманентів.

Нехай задана матриця (3.1). Кожному елементу a_{ij}, $1\le j\le i\le n$ цієї матриці поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів w_{ik}, $k=j,\dots,i$, які назвемо *віртуальними елементами* цієї матриці, породженими ключовим елементом a_{ij}. Ключовий елемент одночасно є і його віртуальним елементом. Віртуальні елементи відіграватимуть роль допоміжних елементів і призначені полегшити доведення деяких тверджень. Якщо віртуальні елементи задаються при допомозі однієї із рівностей $w_{ik} = a_{ij} + k - j$ або $w_{ik} = a_{ij} - k + j$, $k = j,...,i$, то відповідно наступні два вирази

$$\{a_{ij}\}^{\circ} = \frac{a_{ij}^{\overline{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}+1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}+i-j)}{(i-j+1)!}, \tag{3.35}$$

$$\{a_{ij}\}_{\circ} = \frac{a_{ij}^{\underline{i-j+1}}}{(i-j+1)!} = \frac{a_{ij}(a_{ij}-1)\cdot\ldots\cdot(a_{ij}-i+j)}{(i-j+1)!}, \tag{3.36}$$

назвемо *верхнім і нижнім факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}. В рівностях (3.35) і (3.36) ми користуємося позначеннями зростаючих і спадних факторіальних степенів (див. [42], с.67):

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),\quad x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1),$$

Таким чином, похідні елементи ключового елемента замінюються відповідними віртуальними елементами, а набір ключових елементів вважається нормальним, якщо він породжує множину віртуальних елементів потужності n, кожні два з яких не належать одночасно до одного стовпця цієї матриці.

Означення 3.8. *Верхнім (нижнім)* F*-паравизначником матриці* (3.1) *назвемо відповідно числа:*

$$\mathrm{d\,det}^{\circ}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}^{\circ},$$

$$\mathrm{d\,det}_{\circ}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)} (-1)^{\varepsilon(\alpha)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}_{\circ},$$

де $(-1)^{\varepsilon(\alpha)}$ *– множник, який визначає знак нормального набору* α *ключових елементів.*

Аналогічно до означення F-паравизначника введемо поняття верхнього і нижнього F-параперманента.

Означення 3.9. *Верхнім (нижнім)* F*-параперманентом матриці* (3.1) *назвемо відповідно числа:*

$$\mathrm{pper}^{\circ}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}^{\circ},$$

$$\mathrm{pper}_{\circ}(A) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in P(n)} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{\alpha_1+\cdots+\alpha_s,\alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}+1} \right\}_{\circ},$$

Означення 3.10. *Алгебраїчними доповненнями* D_{ij}°, $D_{ij\circ}$, P_{ij}°, $P_{ij\circ}$ *до верхнього і нижнього факторіального добутку ключового елемента* a_{ij} *назвемо відповідно числа*

$$D_{ij}^{\circ} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n,i+1})$$

$$D_{ij\circ} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{ddet}_{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{ddet}_{\circ}(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij}^{\circ} = \mathrm{pper}^{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{pper}^{\circ}(R_{n,i+1}),$$

$$P_{ij\circ} = \mathrm{pper}_{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{pper}_{\circ}(R_{n,i+1}).$$

Для F-паравизначників справедливі твердження і наслідки аналогічні відповідним твердженням і наслідкам паравизначників. Наведемо деякі з них без доведення.

Твердження 3.15. *(Розкладання за елементами вписаної таблиці). Нехай* A *– матриця* (3.1), *а* $T(i)$ *– деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів, тоді виконуються наступні рівності:*

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\}^{\circ} D_{rs}^{\circ}, \tag{3.37}$$

$$\mathrm{ddet}_{\circ}(A) = \sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\}_{\circ} D_{rs\circ}, \tag{3.38}$$

Наслідок. *(Розкладання* F*-паравизначника за елементами першого стовпця). Якщо* $i = 1$, *то рівності* (3.37), (3.38) *матимуть відповідно вигляд:*

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\}^{\circ} D_{r1}^{\circ} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \{a_{r1}\}^{\circ}\cdot \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n,r+1}), \tag{3.39}$$

$$\mathrm{ddet}_{\circ}(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\}_{\circ} D_{r1\circ} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \{a_{r1}\}_{\circ}\cdot \mathrm{ddet}_{\circ}(R_{n,r+1}),$$

Справедливе також аналогічне розкладання за елементами останнього рядка.

Твердження 3.16. *(Розкладання за елементами j-того стовпця). Для матриці* (3.1) *виконуються рівності:*

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}^{\circ} D_{rj}^{\circ} = \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{nj}), \qquad (3.40)$$

$$\sum_{r=j}^{n}\{a_{rj}\}_{\circ} D_{rj_{\circ}} = \mathrm{ddet}_{\circ}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{ddet}_{\circ}(R_{nj}).$$

Твердження 3.17. *F-паравизначник блочно-діагональної матриці, дорівнює добутку F-паравизначників її блоків.*

Наведемо кілька співвідношень із зростаючими і спадними факторіальними степенями:

$$\frac{i^{\overline{r}}}{r!} = \frac{(i+r-1)^{\underline{r}}}{r!},\ i\in N,\ r\in N_0 \qquad (3.41)$$

$$\binom{i}{r} = \frac{i^{\underline{r}}}{r!} = \frac{(i-r+1)^{\overline{r}}}{r!},\ r\le i,\ r\in N_0,\ i\in N_0, \qquad (3.42)$$

Твердження 3.18. *Справедливі тотожності:*

$$\frac{(r+1)^{\overline{i}}}{i!} = \frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!},\ i,r\in N_0, \qquad (3.43)$$

$$\frac{r^{\underline{i}}}{i!} = \frac{r^{\underline{r-i}}}{(r-i)!},\qquad i\le r,\ i\in N_0, \qquad (3.44)$$

$$\frac{i^{\overline{r}}}{r!} = \sum_{j=1}^{i}\frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!},\ r,i\in N, \qquad (3.45)$$

$$\frac{i^{\underline{r}}}{r!} = \sum_{j=r-1}^{i-1}\frac{j^{\underline{r-1}}}{(r-1)!},\ r\in N,\ r\le i. \qquad (3.46)$$

Доведення. Доведемо тотожність (3.43). При $r=1$ маємо $\frac{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot i\cdot(i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(i-1)\cdot i} = \frac{(i+1)^{\overline{1}}}{1!}$. Нехай тотожність (3.43) виконується при $r=s$. Доведемо її істинність при $r=s+1$:

$$\frac{(r+1)^{\overline{s+1}}}{(s+1)!} = \frac{(r+1)^{\overline{s}}\cdot(r+s+1)}{s!\cdot(s+1)} = \frac{(s+1)^{\overline{r}}}{r!}\cdot\frac{r+s+1}{s+1} = \frac{(s+2)^{\overline{r}}}{r!}.$$

Доведемо справедливість тотожності (3.44):

$$\frac{r^{\underline{i}}}{i!} \overset{(3.42)}{=} \frac{(r-i+1)^{\overline{i}}}{i!} \overset{(3.43)}{=} \frac{(i+1)^{\overline{r-i}}}{(r-i)!} \overset{(3.41)}{=} \frac{r^{\underline{r-i}}}{(r-i)!}.$$

Доведемо тотожність (3.45). Перш за все, доведемо, що генератрисою послідовності $\frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!}$ є функція $f(x)=(1-x)^{-(r+1)}$. Для цього знайдемо коефіцієнт при x^i в її розкладі в ряд Маклорена. $\frac{f^{(i)}(0)}{i!} = \frac{(r+1)^{\overline{i}}}{i!} \overset{(3.43)}{=} \frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!}$, Таким чином,

$$(1-x)^{-(r+1)} = \frac{1^{\overline{r}}}{r!} + \frac{2^{\overline{r}}}{r!}x + \ldots + \frac{(i+1)^{\overline{r}}}{r!}x^i + \ldots,$$

тому коефіцієнт при x^{i-1} в добутку $(1-x)^{-1}\cdot(1-x)^{-r}$ очевидно дорівнює

$$\frac{1^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \frac{2^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} + \ldots + \frac{i^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} = \sum_{j=1}^{i}\frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}.$$

Доведемо тотожність (3.46).

$$\frac{i^{\underline{r}}}{r!} \overset{(3.42)}{=} \frac{(i-r+1)^{\overline{r}}}{r!} \overset{(3.45)}{=} \sum_{j=1}^{i-r+1}\frac{j^{\overline{r-1}}}{(r-1)!} \overset{(3.41)}{=} \sum_{j=1}^{i-r+1}\frac{(j+r-2)^{\underline{r-1}}}{(r-1)!}.$$

Поклавши в останній сумі $k=j+r-2$, отримаємо праву частину тотожності (3.46).

Доведемо декілька тверджень, властивих тільки F-паравизначникам.

Позначимо через $A\binom{j}{k}$ матрицю (3.1), в якій до кожного елемента j-того стовпця додане деяке ціле число k, а решта елементів цієї матриці незмінні.

Твердження 3.19. *Для F-паравизначників виконуються співвідношення:*

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\left(\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) - \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n^{j+1}\!/_j}\right)\right),$$

(3.47)

$$\mathrm{ddet}_\circ(A) = \mathrm{ddet}_\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}_\circ(R_{j-1,1})\left(\mathrm{ddet}_\circ(R_{n,j+1}) - \mathrm{ddet}_\circ\left(R_{n^{j+1}\!/_j}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Доведення. Доведемо рівність (3.47) при $j=1$, тобто доведемо справедливість рівності

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}) - \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n^2\!/_1}\right) \quad (3.48)$$

З цією метою розкладемо верхній F-паравизначник $\mathrm{ddet}^\circ(A)$ за елементами першого стовпця, використовуючи співвідношення (3.39).

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{\overline{r}}}{r!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\left(\frac{(a_{r1}-1)^{\overline{r}}}{r!} + \frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{(a_{r1}-1)^{\overline{r}}}{r!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) +$$

$$+\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) = \mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{a_{11}^{\overline{0}}}{0!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n2}) + \sum_{r=2}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}).$$

Нехай в останній сумі $s = r-1$, тоді

$$\sum_{r=2}^{n}(-1)^{r+1}\frac{a_{r1}^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,r+1}) = -\sum_{s=1}^{n-1}(-1)^{s+1}\frac{a_{s+1,1}^{\overline{s}}}{s!}\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,s+2}) =$$

$$= \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n^2\!/_1}\right).$$

Отже, рівність (3.48) істинна.

Розкладемо верхній F-паравизначник $\mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix}$ за елементами вписаної таблиці $T(j)$.

$$\mathrm{ddet}^\circ A\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{r=j}^{n}\sum_{s=1}^{j-1}\frac{a_{rs}^{\overline{r-s+1}}}{(r-s+1)!}D_{rs}^\circ + \sum_{s=j}^{n}\frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!}D_{sj}^\circ. \quad (3.49)$$

Друга сума рівності (3.49) відповідає розкладу цього F-паравизначника за елементами j-го стовпця. Позначимо першу суму через φ. Тепер розкладемо верхній F-паравизначник $\mathrm{ddet}^\circ(A)$ за елементами таблиці $T(j)$:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \varphi + \sum_{s=j}^{n}\frac{a_{sj}^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!}D_{sj}^\circ \overset{(3.40)}{=} \varphi + \mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\cdot\mathrm{ddet}^\circ(R_{nj}).$$

Подамо елементи першого стовпця рога R_{nj} у вигляді $a_{sj} = (a_{sj}-1)+1$, $s = j,\dots,n$ і використаємо рівність (3.48), тоді отримаємо:

$$\mathrm{ddet}^\circ(A) = \varphi + \mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\cdot\Big(\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) -$$

$$-\,\mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n^{j+1}\!/_j}\right)\Big) = \varphi + \mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\cdot\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+\,\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\cdot\left(\mathrm{ddet}^\circ(R_{n,j+1}) - \mathrm{ddet}^\circ\left(R_{n^{j+1}\!/_j}\right)\right)$$

Позаяк за твердженням 3.15

$$\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})\cdot\mathrm{ddet}^\circ R_{nj}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{s=j}^{n}\frac{(a_{sj}-1)^{\overline{s-j+1}}}{(s-j+1)!}D_{sj}^\circ,$$

то, враховуючи (3.49) отримаємо рівність (3.47).

Розглянемо паравизначники матриць деякого спеціального вигляду. Нехай матриця (3.1) задана рівністю

$$a_{ij} = a_i - (i-j) + k, \quad 1 \le j \le i \le n. \quad (3.50)$$

Позначимо верхній і нижній F-паравизначники матриці (3.50), відповідно через $\Diamond 1_n^\circ, \Diamond 1_{n\circ}$.

Твердження 3.20. *Для верхнього F-паравизначника $\Diamond 1_n^\circ$, виконується рівність:*

$$\Diamond 1_n^\circ = \sum_{j=0}^{n}\frac{(j+1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!}\mathrm{ddet}^\circ R_{j1}\begin{pmatrix} 1 & \dots & j \\ -k & \dots & -k \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

де $\mathrm{ddet}^\circ(R_{01}) = 1$, *а* $\mathrm{ddet}^\circ(R_{n1}) = \Diamond 1_n^\circ$.

Доведення. Доведемо рівність (3.51) при $k=1$. Запишемо рівність (3.48) у вигляді:

$$\operatorname{ddet}^{\circ}(A)-\operatorname{ddet}^{\circ}A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n2})-\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n2/1}) \qquad (3.52)$$

До правої частини рівності (3.52) застосовна рівність аналогічна до рівності (3.52), тому, продовжуючи процес обчислень, отримаємо рівності:

$$\operatorname{ddet}^{\circ}(A)-\operatorname{ddet}^{\circ}A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n2})-\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n2/1})=$$

$$\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n3})-\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n3/2})=\ldots=\operatorname{ddet}^{\circ}(a_n+k)-\operatorname{ddet}^{\circ}(a_n+k-1)=1.$$

Ці рівності разом із рівністю (3.47) дадуть рівність

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\operatorname{ddet}^{\circ}(A)=\operatorname{ddet}^{\circ}A\begin{pmatrix}j\\-1\end{pmatrix}+\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1}). \qquad (3.53)$$

При $j=n$ рівність (3.53) має вигляд

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\operatorname{ddet}^{\circ}(A)=\operatorname{ddet}^{\circ}A\begin{pmatrix}n\\-1\end{pmatrix}+\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n-1,1}).$$

Застосовуючи до верхнього F-паравизначника $\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n-1,1})$ рівність (3.53) при $j=n-1$, отримаємо рівність

$$\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n-1,1})=\operatorname{ddet}^{\circ}R_{n-1,1}\begin{pmatrix}n-1\\-1\end{pmatrix}+\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n-2,1}),$$

яка разом із рівністю (3.53) дасть рівність

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\operatorname{ddet}^{\circ}R_{n1}\begin{pmatrix}n\\-1\end{pmatrix}+\operatorname{ddet}^{\circ}R_{n-1,1}\begin{pmatrix}n-1\\-1\end{pmatrix}+\operatorname{ddet}^{\circ}(R_{n-2,1}).$$

Продовжуючи процес аналогічних обчислень, отримаємо рівність

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\sum_{i=0}^{n}\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}, \qquad (3.54)$$

в якій $\operatorname{ddet}^{\circ}R_{01}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=1$.

Позаяк у верхньому F-паравизначнику $\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$ відповідні елементи i-того і $(i-1)$-го стовпців однакові, то, застосовуючи до нього рівність (3.47) при $j=i-1$, отримаємо рівність

$$\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}=\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}i-1 & i\\-1 & -1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, ми приходимо до аналогічної ситуації, бо у F-паравизначнику, який лежить у правій частині останньої рівності, відповідні елементи $(i-1)$-го і $(i-2)$-го стовпців рівні. Продовжуючи процес аналогічних обчислень, ми прийдемо до рівності

$$\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}=\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}1\ldots i\\-1\ldots -1\end{pmatrix},$$

яка разом із рівністю (3.54) дає рівність

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\sum_{j=0}^{n}\operatorname{ddet}^{\circ}R_{j1}\begin{pmatrix}1 & \ldots & j\\-1 & \ldots & -1\end{pmatrix}, \qquad (3.55)$$

тобто рівність (3.51) для $k=1$. Позначимо $\dfrac{(n-j+1)^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}$, через $k_j(r)$, а $\operatorname{ddet}^{\circ}R_{j1}\begin{pmatrix}1 & \ldots & j\\-r & \ldots & -r\end{pmatrix}$ – через $R_j(r)$, тоді рівність (3.51) перепишеться у вигляді

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\sum_{j=0}^{n}k_j(k)R_j(k). \qquad (3.56)$$

Нехай рівність (3.56) виконується при $k=r$. Доведемо її справедливість при $k=r+1$.

Позаяк F-паравизначники $\operatorname{ddet}^{\circ}R_{j1}\begin{pmatrix}1 & \ldots & j\\-r & \ldots & -r\end{pmatrix}$, $j=0,\ldots,n$ є F-паравизначниками типу $\Diamond 1^{\circ}_n$, то до кожного з них застосовна рівність (3.55). При цьому отримаємо рівність

$$\operatorname{ddet}^{\circ}R_{j1}\begin{pmatrix}1 & \ldots & j\\-r & \ldots & -r\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{j}\operatorname{ddet}^{\circ}R_{i1}\begin{pmatrix}1 & \ldots & i\\-(r+1) & \ldots & -(r+1)\end{pmatrix},$$

або рівність

$$\operatorname{ddet}^{\circ}R_j(r)=\sum_{i=0}^{j}\operatorname{ddet}^{\circ}R_i(r+1). \qquad (3.57)$$

Покладемо (3.57) в (3.56), отримаємо

$$\Diamond 1^{\circ}_n=\sum_{j=0}^{n}k_j(r)\sum_{i=0}^{j}\operatorname{ddet}^{\circ}(R_i(r+1))=\sum_{i=0}^{n}\operatorname{ddet}^{\circ}(R_i(r+1))\cdot\sum_{j=0}^{i}k_j(r),$$

тобто

$$k_i(r+1)=\sum_{j=1}^{i}k_j(r). \tag{3.58}$$

Отже, для того щоб довести справедливість рівності (3.51) при $k=r+1$, необхідно довести, що коефіцієнти $k_j(r)=\dfrac{(n-j+1)^{\overline{r-1}}}{(r-1)!}$ задовольняють рівність (3.58), яка очевидно співпадає із рівністю (3.45) із твердження 3.17. Твердження 3.19 доведене.

Розглянемо деякі найпростіші приклади трикутних матриць і їх F-паравизначники, при допомозі яких можна отримати двоїсті комбінаторні тотожності.

Якщо, наприклад, елементи матриці (3.1) мають вигляд

$$a_{ij}=a,$$

то легко довести рівності:

$$\Diamond^{\circ}=\left\langle\begin{matrix} a & & \\ a & a & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \ldots a\end{matrix}\right\rangle_{n}^{\circ}=\frac{a^{\underline{n}}}{n!}, \tag{3.59}$$

$$\Diamond_{\circ}=\left\langle\begin{matrix} a & & \\ a & a & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \ldots a\end{matrix}\right\rangle_{\circ n}=\frac{a^{\overline{n}}}{n!}. \tag{3.60}$$

Після розкладу F-паравизначників (3.59), (3.60) за елементами n-того рядка, отримаємо відповідно рівності:

$$\Diamond_n^{\circ}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+n}\frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}\Diamond_{s-1}^{\circ},$$

$$\Diamond_{n\circ}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+n}\frac{a^{\underline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}\Diamond_{s-1\circ},$$

які із врахуванням (3.59) і (3.60) дадуть відповідно тотожності:

$$\frac{a^{\underline{n}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+n}\frac{a^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}\cdot\frac{a^{\underline{s-1}}}{(s-1)!}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i+1}\frac{a^{\overline{n-i}}}{(n-i)!}\cdot\frac{a^{\underline{i}}}{i!}, \tag{3.61}$$

$$\frac{a^{\overline{n}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+n}\frac{a^{\underline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}\cdot\frac{a^{\overline{s-1}}}{(s-1)!}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+i+1}\frac{a^{\underline{n-i}}}{(n-i)!}\cdot\frac{a^{\overline{i}}}{i!}. \tag{3.62}$$

Якщо у тотожностях (3.61) і (3.62) покласти відповідно $a=0,1,\ldots,n-1$ і $a=0,-1,\ldots,-(n-1)$, то вони отримають вигляд:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i+1}\frac{a^{\overline{n-i}}\cdot a^{\underline{i}}}{(n-i)!\cdot i!}=0,$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i+1}\frac{a^{\underline{n-i}}\cdot a^{\overline{i}}}{(n-i)!i!}=0.$$

Слід відмітити, що кожному F-паравизначнику, значення якого відоме, відповідають деякі комбінаторні тотожності, які можна отримати, розкладаючи ці паравизначники за елементами першого стовпця, або за елементами останнього рядка. При цьому верхні і нижні F-паравизначники генерують двоїсті тотожності.

Наведемо ще одну пару двоїстих комбінаторних тотожностей із зростаючими і спадними факторіальними степенями.

$$\left\langle\begin{matrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & \ldots n\end{matrix}\right\rangle_{n}^{\circ}=(-1)^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{n^{\underline{i}}}{i!},$$

$$\left\langle\begin{matrix} 1 & & \\ 2 & 2 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & \ldots n\end{matrix}\right\rangle_{n\circ}=1=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{n^{\overline{i}}}{i!}.$$

Нехай задано верхній F-паравизначник

$$\Diamond_n^{\circ}=\left\langle\begin{matrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \ldots 1 & 2 & \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 & 2\end{matrix}\right\rangle_{n}^{\circ}. \tag{3.63}$$

Розкладемо його за елементами останнього рядка, отримаємо рекурентну формулу.

$$\Diamond^{\circ}_{n} = 2\cdot\Diamond^{\circ}_{n-1} - \Diamond^{\circ}_{n-2}, \tag{3.64}$$

із початковими умовами $\Diamond^{\circ}_{1} = 2$, $\Diamond^{\circ}_{2} = 3$.

При допомозі формули (3.64) легко знайти значення верхнього F-паравизначника (3.63) і, отримати тотожність:

$$\Diamond^{\circ}_{n} = \sum_{i=0}^{[n/2]}(-1)^{i}\frac{(i+1)^{\overline{n-2i}}}{(n-2i)!}\cdot 2^{n-2i} = n+1. \tag{3.65}$$

РОЗДІЛ 4

ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАВИЗНАЧНИКІВ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТІВ У КОМБІНАТОРНОМУ АНАЛІЗІ

4.1. Застосування параперманентів до розв'язання лінійних рекурентних співвідношень із сталими коефіцієнтами

Нехай задано лінійне рекурентне рівняння k-го порядку

$$u_n = a_1\cdot u_{n-1} + \ldots + a_k\cdot u_{n-k},\, a_i \neq 0,\, i = 1,\ldots,k,\, (1 \le k \le n,\, n = k+1,\, k+2,\ldots), \tag{4.1}$$

із початковими умовами

$$u_i = a_i^{(0)},\, (i = 1,\ldots,k,\; a_i^{(0)} \in R). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Параперманент виду*

$$u_1 = x_1,\; u_n = \left[\begin{array}{llllll}
a_1 x_1 x_2 & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1}x_1 & a_1 x_3 & & & & \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}x_1 & \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}\ldots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 x_k & & \\
\frac{a_k}{a_{k-1}}x_1 & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\ldots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\
0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots\cdots & & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \\
\cdots\cdots & & & & & \\
\underbrace{0\ldots0}_{n-k-1} & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots\cdots & & \frac{a_2}{a_1} & a_1
\end{array}\right]_{n-1} \tag{4.3}$$

де поправки x_i визначаються із рівностей

$$x_1 = a_1^{(0)},\ x_i = \frac{a_i^{(0)}}{a_1 a_{i-1}^{(0)} + a_2 a_{i-2}^{(0)} + \ldots + a_{i-1} a_1^{(0)}},\ (i = 2, \ldots, k), \quad (4.4)$$

є розв'язком рівняння (4.1) із початковими умовами (4.2).

Доведення. Розкладаючи даний параперманент за елементами останнього рядка, отримаємо рівність

$$u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k},\ 1 \le k \le n,$$

яка з точністю до позначень збігається з рівнянням (1.1).

Знайдемо значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$ так, щоб виконувались початкові умови (4.2). Для цього із системи рівнянь

$$u_i = a_i^{(0)},\ i = 1, \ldots, k,$$

знайдемо $x_i, i = 1, \ldots, k$. Після розкладу кожного із параперманентів u_i, $i = 1, \ldots, k$ за елементами останнього рядка ця система набуде вигляду

$$\begin{array}{l} x_1 = a_1^{(0)}, \\ a_1 a_1^{(0)} x_2 = a_2^{(0)}, \\ a_1 x_3 a_2^{(0)} + a_2 x_3 a_1^{(0)} = a_3^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 x_k a_{k-1}^{(0)} + a_2 x_k a_{k-2}^{(0)} + \ldots + a_{k-2} x_k a_2^{(0)} + a_{k-1} x_k a_1^{(0)} = a_k^{(0)}. \end{array}$$

Отже,

$$x_1 = a_1^{(0)},\ x_i = \frac{a_i^{(0)}}{a_1 a_{i-1}^{(0)} + a_2 a_{i-2}^{(0)} + \ldots + a_{i-2} a_2^{(0)} + a_{i-1} a_1^{(0)}},\ i = 2, \ldots, k.$$

Таким чином, розв'язком лінійного рекурентного рівняння (4.1) k-го порядку із сталими коефіцієнтами і початковими умовами (4.2) є параперманент (4.3), де x_i, $i = 1, \ldots, k$, задаються рівностями (4.4).

Зауваження. При $k = 1$ рекурентне рівняння (4.1) і початкові умови (4.2) матимуть відповідно вигляд:

$$u_n = a_1 u_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots,$$

$$u_1 = a_1^{(0)},$$

а його розв'язок згідно (4.3) запишеться у вигляді параперманента

$$u_1 = x_1,\ u_n = \left[\begin{array}{l} a_1 x_1 \\ 0 \quad a_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-2}\ a_1 \end{array}\right]_{n-1},$$

де $x_1 = a_1^{(0)}$.

Наслідок. *Паравизначник виду*

$$u_1 = x_1, u_n = \left\langle \begin{array}{llllll} a_1 x_1 x_2 & & & & & \\ -\frac{a_2}{a_1} x_1 & a_1 x_3 & & & & \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & \\ -\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} x_1 & -\frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \ldots & -\frac{a_2}{a_1} & a_1 x_k & \\ -\frac{a_k}{a_{k-1}} x_1 & -\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \ldots & -\frac{a_3}{a_2} & -\frac{a_2}{a_1} & a_1 \\ 0 & -\frac{a_k}{a_{k-1}} & \ldots\ldots & & -\frac{a_2}{a_1} & a_1 \\ \ldots\ldots\ldots & & & & & \\ \underbrace{0 \ldots 0}_{n-k-1} & -\frac{a_k}{a_{k-1}} & \ldots\ldots & & -\frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array} \right\rangle_{n-1},$$

де поправки x_i визначаються із рівностей (4.4) є розв'язком рівняння (4.1) із початковими умовами (4.2).

Доведення очевидне (див. твердження 3.12 про взаємозв'язок між параперманентом і паравизначником).

Для рекурентного рівняння (4.1) початкові умови виду

$$u_1 = 1\ ,\ u_i = \left[\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots} \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \dots & a_1 \end{array}\right]_{i-1}\ ,\ (\ i = 2,\dots,k) \qquad (4.5)$$

назвемо *нормальними початковими умовами.*

Теорема 4.2. *Лінійне рекурентне рівняння k-го порядку (4.1) зі сталими коефіцієнтами і нормальними початковими умовами (4.5) має розв'язок виду*

$$u_1 = 1,\ u_n = \left[\begin{array}{llllll} a_1 & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots} \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \dots \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} \dots \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\dots0}_{n-k-1} & \frac{a_k}{a_{k-1}} \dots \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \end{array}\right]_{n-1}, \qquad (4.6)$$

Доведення. Доведемо, що при нормальних початкових умовах всі поправки x_i, $i = 1,\dots,k$ у паравизначнику (4.3) будуть дорівнювати 1.Справді, розкладаючи паравизначники (4.5) за елементами останнього рядка, для $i = 2,\dots,k$ отримаємо рівності

$$a_i^{(0)} = u_i = a_1 u_{i-1} + a_2 u_{i-2} + \ \dots\ a_{i-2} u_2 + a_{i-1} = a_1 a_{i-1}^{(0)} + a_2 a_{i-2}^{(0)} + \dots + a_{i-2} a_2^{(0)} + a_{i-1},$$

тобто у рівностях (4.4) чисельник дорівнює знаменнику. Теорема доведена.

Приклад 4.1. Розглянемо рекурентне співвідношення

$$u_n = 3u_{n-1} - 3u_{n-2} + u_{n-3}\ ,\ n = 4,5,\dots$$

із початковими умовами

$$u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 9\,.$$

Знайдемо значення поправок x_1, x_2, x_3 із рівностей (4.4), враховуючи що $a_1 = 3, a_2 = -3, a_3 = 1; a_1^{(0)} = 1, a_2^{(0)} = 4, a_3^{(0)} = 9$: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = 1$. Підставляючи отримані значення у параперманент (4.3), отримуємо розв'язок

$$u_1 = 1,\ \ u_n = \left[\begin{array}{lllll} 4 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ -\frac{1}{3} & -1 & 3 & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & 3 & \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\dots0}_{n-4} & -\frac{1}{3} & -1 & 3 & \end{array}\right]_{n-1},\ n = 2,3,\dots\ .$$

4.2. Деякі теоретико-числові властивості послідовностей, породжених лінійними рекурентними рівняннями із сталими коефіцієнтами

Означення 4.1. *Два рекурентні рівняння із деякими початковими умовами назвемо еквівалентними, якщо вони генерують одну і ту ж числову послідовність.*

Виділимо із рекурентних рівностей (4.1) із нормальними початковими умовами (4.5) один важливий клас рекурентних рівностей.

Теорема 4.3. *Рекурентне рівняння (4.1) порядку $k > 1$ із нормальними початковими умовами (4.5), коефіцієнти якого задовольняють рівність*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1, \qquad (4.7)$$

еквівалентне рекурентному рівнянню виду

$$v_n = (a_1 - 1)v_{n-1} + (a_1 + a_2 - 1)v_{n-2} + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} - 1)v_{n-k+1} + 1, \qquad n \geq 2$$

(4.8)

із початковими умовами

$$v_1 = 1, \ v_0 = v_{-1} = \cdots = v_{2-k} = 0. \qquad (4.9)$$

Доведення. Доведемо по індукції, що при всіх натуральних i виконується рівність

$$v_i = u_i. \qquad (4.10)$$

За умовою теореми рівність (4.10) виконується при $i = 1$. Нехай рівність (4.10) виконується для $i = 1, \ldots, s$. Доведемо, що вона виконується також для $i = s + 1$.

$$v_{s+1} = (a_1 - 1) \cdot v_s + (a_1 + a_2 - 1) \cdot v_{s-1} + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{k-1} - 1) \cdot v_{s-k+2} + 1 =$$

$$= (a_1 v_s + a_2 v_{s-1} + \ldots + a_{k-1} v_{s-k+2} + a_k v_{s-k+1}) +$$

$$+(-v_s + (a_1 - 1) \cdot v_{s-1} + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{k-2} - 1) \cdot v_{s-k+2}) \ \ +1 - a_k v_{s-k+1}.$$

Позаяк за припущенням $v_i = u_i, \ i = s - k + 1, \ldots, s$, то вираз у перших дужках є розкладом параперманента u_{s+1} за елементами останнього рядка. Отже, враховуючи рівність (4.7) остання рівність може бути записана у вигляді

$$v_{s+1} = u_{s+1} + (-v_s + (a_1 - 1) \cdot v_{s-1} + \ldots + (a_1 + \ldots + a_{k-1} - 1) \cdot v_{s-k+1} + 1).$$

Вираз у других дужках останньої рівності, внаслідок (4.8) дорівнює нулю що і доводить теорему.

Зауваження: 1. Для рекурентного рівняння $u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2}$ порядку 2 нормальні початкові умови набувають вигляду $u_1 = 1, \ u_2 = a_1$. Зокрема, рекурентне рівняння $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ при нормальних початкових умовах породжує послідовність натуральних чисел. Це ж рівняння при початкових умовах $u_1 = s, \quad u_2 = r + s$ породжує арифметичну прогресію $u_n = r \cdot (n-1) + s$, $n = 1, 2, \ldots$ Можна довести, що для кожного $s \geq 1$ послідовність s-х степенів натуральних чисел породжується деяким рекурентним рівнянням (4.1) при нормальних початкових умовах і додатковою умовою (4.7) на його коефіцієнти.

2. Якщо $a_1 + a_2 = 1$, то рекурентне рівняння

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n$$

із нормальними початковими умовами генерує послідовність

$$u_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_2)^i, \ \ n = 1, 2, \ldots .$$

Якщо, крім цього, $a_1 \cdot a_2 > 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \dfrac{1}{a_2 + 1}$.

Теорема 4.4. *Якщо послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють рекурентне рівняння (4.1) k-го порядку із початковими умовами (4.2) і (4.5) відповідно, причому $r > k$, то для членів цих послідовностей виконується співвідношення*

$$u_{r+s}^* = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j^* u_{r+s-i-j+1} \right). \qquad (4.11)$$

Доведення. За теоремою 4.1 параперманент (4.3) є розв'язком рівняння (4.1) із початковими умовами (4.2). Розкладемо цей параперманент при $n + k = r + s$ за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(r)$. При цьому, якщо b_{ij} – деякий елемент вписаної таблиці $T(r)$, то перший ріг $R_{j-1,1}$ його алгебраїчного доповнення $P_{ij} = \mathrm{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \mathrm{pper}(R_{r+s-1,i+1})$, крім коефіцієнтів рівняння (4.1) міститиме поправки x_t, $t = 1, \ldots, k$, що задаються рівностями (4.4). Тому параперманент рогу $R_{j-1,1}$ буде j-тим членом послідовності $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$. У другому розі ці поправки дорівнюватимуть одиниці, тому його параперманент буде $(r + s - i)$-тим членом послідовності $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Легко бачити, що $b_{ij} = 0$, якщо $i - j > k - 1$ і $b_{ij} = a_{i-j+1}$, якщо $0 \leq i - j \leq k$. Якщо $i - j = k - 1$, то $b_{ij} = a_k$, $i = j + k - 1$ і j змінюється від $r - k + 1$ до r, тому всі доданки, які входять в розклад параперманента u_{r+s} за елементами таблиці $T(r)$, що містять коефіцієнт a_k рівняння (4.1), ввійдуть до суми

$$a_k \cdot \sum_{j=r-k+1}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+1} \,.$$

Якщо $i-j=k-2$, то $b_{ij}=a_{k-1}$, $i=j+k-2$, j змінюватиметься від $r-k+2$ до r і аналогічна сума матиме вигляд:

$$a_{k-1} \cdot \sum_{j=r-k+2}^{r} u_j^* u_{r+s-j-k+2} \,.$$

Продовжуючи процес обчислення таких сум, за $k-1$ кроків ми прийдемо до випадку, коли $i-j=0$, тобто до суми

$$a_1 \sum_{j=r}^{r} u_j^* u_{r+s-j} \,.$$

Таким чином, індекс i коефіцієнта a_i змінюватиметься від 1 до k і розклад параперманента u_{r+s}^* за елементами таблиці $T(r)$ матиме вигляд (4.11).

Наслідок. *Якщо послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє рекурентне рівняння (4.1) із нормальними початковими умовами (4.5), то для її членів виконуються співвідношення*

$$u_{r+s} = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\sum_{j=r-i+1}^{r} u_j u_{r+s-i-j+1} \right). \tag{4.12}$$

Справедливість цього наслідку безпосередньо випливає із теореми 4.4.

Теорема 4.5. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє лінійне рекурентне рівняння другого порядку*

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n \tag{4.13}$$

з цілими ненульовими коефіцієнтами і нормальними початковими умовами

$$u_1 = 1 \,,\; u_2 = [a_1] \,. \tag{4.14}$$

Тоді

1) виконуються рівності:

$$u_{r+s} = u_{r+1} u_s + a_2 u_r u_{s-1} \,, (r = 1,2,\ldots;\; s = 2,3,\ldots), \tag{4.15}$$

$$u_{sr} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, u_r) \quad, s,\; r = 1,2,\ldots; \tag{4.16}$$

2) *якщо у рівнянні (4.13) коефіцієнти взаємно прості, тобто $(a_1, a_2) = 1$, то*

$$НСД(u_s, u_r) = u_{НСД(s,r)}\,; \tag{4.17}$$

Доведення. 1). Доведемо справедливість рівності (4.15). До рівняння (4.13) із початковими умовами (4.14) можна застосувати наслідок із теореми 4.4. При $k=2$ рівність (4.12) матиме вигляд:

$$u_{r+s} = a_2 u_{r-1} u_s + a_1 u_r u_s + a_2 u_r u_{s-1} \,. \tag{4.18}$$

Враховуючи рівність (4.13), маємо:

$$u_{r+s} = u_s (a_1 u_r + a_2 u_{r-1}) + a_2 u_r u_{s-1} = u_{r+1} u_s + a_2 u_r u_{s-1} \,.$$

Доведемо справедливість рівності (4.16). При $s=r$ рівність (4.15) матиме вигляд

$$u_{2r} = u_r (u_{r+1} + a_2 u_{r-1}) \,,$$

тобто рівність (4.16) виконується при $s=1$ і при $s=2$.

Нехай рівність (4.16) виконується для $s = 1,2,\ldots,m-1$. Доведемо її справедливість для $s=m$:

$$u_{mr} = u_{(m-1)r+r} = u_{(m-1)r+1} u_r + a_2 u_{(m-1)r} u_{r-1} \,,$$

але, позаяк $u_{(m-1)r} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, u_r)$, то рівність (4.16) виконується для $s=m$.

2). Доведемо справедливість рівності (4.17). Спочатку покажемо, що виконуються рівності:

$$(u_n, u_{n+1}) = 1 \,, (n = 1,2,\ldots), \tag{4.19}$$

$$(a_2, u_n) = 1 \,, (n = 1,2,\ldots). \tag{4.20}$$

При $n=1$ рівність (4.19) очевидно виконується. Нехай рівність (4.19) виконується при $n=k$. Доведемо, що вона виконується і при $n=k+1$. Припустимо протилежне: $(u_{k+1}, u_{k+2}) = d > 1$. Тоді з рівності $u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k$ випливає, що або u_k кратне d, або a_2 кратне d. У першому випадку приходимо до суперечності із припущенням, що рівність (4.19) виконується при $n=k$, а у другому з рівності $u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1}$ випливає, що a_1 кратне d, всупереч припущенню про взаємну простоту коефіцієнтів рівняння (4.13) . Отже, рівність (4.19) виконується для довільного натурального числа n. Справедливість рівності (4.20) випливає із того, що припущення протилежного твердження разом із рівністю $u_{s+1} = a_1 u_s + a_2 u_{s-1}$ приводить до суперечності із встановленою рівністю (4.19).

Нехай тепер $r > s$. Тоді внаслідок рівності (4.15) маємо :

$$НСД(u_r, u_s) = НСД(u_{r-s+s}, u_r) =$$

$$= НСД(u_{r-s+1}u_s + a_2 u_{r-s} u_{s-1}, u_s) = НСД(a_2 u_{r-s} u_{s-1}, u_s).$$

Із (4.19) і (4.20) випливає, що $(a_2 u_{s-1}, u_s) = 1$. Враховуючи це, одержуємо рівність

$$НСД(u_r, u_s) = НСД(u_{r-s}, u_s),$$

з якої безпосередньо випливає рівність (4.17).

Наслідок 1. *Якщо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 4.5, причому $u_k \neq 1$, $k \geq 2$ тоді член u_s цієї послідовності буде простим числом тільки тоді, коли простим буде індекс s.*

Доведення. Це безпосередньо випливає з рівності (4.16).

Наслідок 2. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 4.5 і p – просте число. Тоді u_p не ділиться на жоден простий дільник кожного із попередніх членів $u_2, u_3, \ldots, u_{p-1}$.*

Доведення. Це випливає з рівності (4.17).

Наслідок 3. *Нехай послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 4.5. Якщо $a_2 = b^2$, де b – ціле число, то кожен член $u_{2m+1}, m > 1$, цієї послідовності можна подати у вигляді суми квадратів двох цілих невід'ємних чисел.*

Доведення. Із рівності (4.15) випливає, що

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 + (bu_m)^2.$$

Наслідок 4. *Для довільного $m \geq 1$ виконується тотожність*

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{2m-i}{i} \cdot a^{2(m-i)} b^{2i} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{[m/2]} (-1)^i \binom{m-i}{i} \cdot a^{m-2i} b^{2i} - \sum_{i=0}^{[m-1/2]} (-1)^i \binom{m-i-1}{i} \cdot a^{m-2i-1} b^{2i+1} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=0}^{[m/2]} (-1)^i \binom{m-i}{i} \cdot a^{m-2i} b^{2i} + \sum_{i=0}^{[m-1/2]} (-1)^i \binom{m-i-1}{i} \cdot a^{m-2i-1} b^{2i+1} \right). \qquad (4.21)$$

Доведення. Розглянемо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, яка задовольняє умови теореми 4.5 і для якої $a_1 = a$ і $a_2 = -b^2$, де b – ціле число. Доведемо спочатку, що для довільного $n \geq 2$

$$u_n = \begin{bmatrix} a & & & & \\ -\frac{b^2}{a} & a & & & \\ 0 & -\frac{b^2}{a} & a & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \underbrace{0 \; \ldots \; 0}_{n-3} & & -\frac{b^2}{a} & a & \end{bmatrix}_{n-1} = \sum_{i=0}^{[n-1/2]} (-1)^i \binom{n-i-1}{i} \cdot a^{n-2i-1} b^{2i}. \qquad (4.22)$$

Ліва рівність в (4.22) випливає з теореми 4.2, а ліву рівність доведемо за допомогою індукції. При $n = 2$ маємо:

$$u_2 = [a] = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{1-i}{i} \cdot a^{1-2i} b^{2i} = a.$$

Нехай рівність (4.22) справедлива для всіх $2 \leq n < k$. Візьмемо тепер $n = k$ і розкладемо параперманент з рівності (4.22) за елементами останнього рядка. Враховуючи припущення індукції, матимемо:

$$u_k = a u_{k-1} - b^2 u_{k-2} =$$

$$= a\cdot\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}(-1)^i\binom{k-i-2}{i}\cdot a^{k-2i-2}b^{2i} - b^2\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-3}{2}\right]}(-1)^i\binom{k-i-3}{i}\cdot a^{k-2i-3}b^{2i}.$$

Зробимо у другій сумі заміну $j = i+1$ і врахуємо, що $\left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k-2}{2}\right]$ при парному k і $\left[\frac{k-1}{2}\right] = \left[\frac{k-2}{2}\right] + 1$ при непарному k. Одержимо:

$$u_k = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}(-1)^i\binom{k-i-2}{i}\cdot a^{k-2i-1}b^{2i} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^j\binom{k-j-1}{j-1}\cdot a^{k-2j-1}b^{2j} = a^{k-1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^i\left(\binom{k-i-2}{i}+\binom{k-i-1}{i-1}\right)\cdot a^{k-2i-1}b^{2i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^i\binom{k-i-1}{i}\cdot a^{k-2i-1}b^{2i}.$$

Тепер для доведення наслідку 4 залишилося підставити одержаний вираз для u_n в очевидну тотожність:

$$u_{2m+1} = u_{m+1}^2 - b^2u_m^2 = (u_{m+1} - b\cdot u_m)\cdot(u_{m+1} + b\cdot u_m).$$

Приклад 4.2. При $m=7$ і $m=11$ тотожність (4.21) набуває, відповідно, вигляду:

$$a^6 - 5a^4b^2 + 6a^2b^4 - b^6 = (a^3 - 2ab^2 - a^2b + b^3)(a^3 - 2ab^2 + a^2b - b^3),$$
$$a^{10} - 9a^8b^2 + 28a^6b^4 - 35a^4b^6 + 15a^2b^8 - b^{10} =$$
$$(a^5 - a^4b - 4a^3b^2 + 3a^2b^3 + 3ab^4 - b^5)\cdot(a^5 + a^4b - 4a^3b^2 - 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5).$$

Приклад 4.3. Рекурентне рівняння

$u_{n+2} = (k+1)\cdot u_{n+1} - k\cdot u_n$

з нормальними початковими умовами $u_1 = 1$, $u_2 = k+1$, $k \geq 1$ генерує послідовність чисел $\left\{\frac{k^n-1}{k-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Згідно з наслідком 1 з теореми 4.5 (умова $k \geq 1$ забезпечує виконання умови $u_s \neq 1$, $s \geq 2$ наслідку 1) число $\frac{k^n-1}{k-1}$ може бути простим тільки тоді, коли n – просте число. При $k=2$ дістаємо відомий факт, що

прості числа Мерсенна слід шукати тільки серед чисел виду $2^p - 1$, де p – деяке

просте число. При $k=10$ отримаємо відоме твердження, що репюніти (прості числа, які в десятковій системі числення зображаються у вигляді $\underbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}_{n}$) також

слід шукати при $n = p$, де p – просте число.

Зауваження. Позаяк рекурентне рівняння $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ із нормальними початковими умовами $u_1 = u_2 = 1$ генерує послідовність чисел Фібоначчі, то теорему 4.5 можна розглядати як узагальнення деяких співвідношень для чисел Фібоначчі (див. [27], [40], стор. 325-327).

Теорема 4.6. *Якщо послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє умови теореми 4.5, то справедливі рівності:*

$$u_{sn-1} = a_2^{s-1}u_{n-1}^s + \sum_{i=0}^{s-2}\binom{s}{i}\cdot a_2^iu_{s-i-1}u_n^{s-i}u_{n-1}^i, \ (s=1,2,\ldots;\ n=2,3,\ldots), \tag{4.23}$$

$$u_{sn} = \sum_{i=0}^{s-1}\binom{s}{i}\cdot a_2^iu_{s-i}u_n^{s-i}u_{n-1}^i, \ (s=1,2,\ldots;\ n=2,3,\ldots), \tag{4.24}$$

$$u_{sn+r} = \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}\cdot a_2^iu_{s-i+r}u_n^{s-i}u_{n-1}^i, \ (0<r<s,\ s=0,1,\ldots;\ n=2,3,\ldots). \tag{4.25}$$

Доведення. Доведемо рівності (4.23), (4.24) індукцією по s. Справедливість цих рівностей при $s=1$ очевидна. Нехай вони справедливі при $s=k$. Тоді для $s=k+1$ маємо:

$$u_{(k+1)n-1} = u_{(kn-1)+n} = u_{kn}u_n + a_2u_{kn-1}u_{n-1} = u_n\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\cdot a_2^iu_{k-i}u_n^{k-i}u_{n-1}^i +$$

$$+a_2u_{n-1}\cdot\left(a_2^{k-1}u_{n-1}^k + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^iu_{k-i-1}u_n^{k-i}u_{n-1}^i\right) = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\cdot a_2^iu_{k-i}u_n^{k+1-i}u_{n-1}^i + a_2^ku_{n-1}^{k+1} +$$

$$+\sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^{i+1}u_{k-i-1}u_n^{k-i}u_{n-1}^{i+1}.$$

Якщо в останній сумі зробити заміну $j = i+1$, то вона набуде вигляду

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j-1}\cdot a_2^j u_{k-j} u_n^{k-j+1} u_{n-1}^j,$$

тому

$$u_{(k+1)n-1} = a_2^k u_{n-1}^{k+1} + u_k u_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}\right)\cdot a_2^i u_{k-i} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i =$$

$$= a_2^k u_{n-1}^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}\cdot a_2^i u_{k-i} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i .$$

Розглянемо тепер $u_{(k+1)n}$:

$$u_{(k+1)n} = a_2 u_{kn-1} u_n + a_1 u_{kn} u_n + a_2 u_{kn} u_{n-1} = (a_2^k u_n u_{n-1}^k + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^i a_2 u_{k-i-1} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i) +$$

$$+\left(\binom{k}{k-1}\cdot a_1 a_2^{k-1} u_n^2 u_{n-1}^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^i a_1 u_{k-i} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i\right) + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\cdot a_2^{i+1} u_{k-i} u_n^{k-i} u_{n-1}^{i+1} =$$

$$= a_2^k u_n u_{n-1}^k + k a_1 a_2^{k-1} u_n^2 u_{n-1}^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}\binom{k}{i}\cdot a_2^i (a_1 u_{k-i} + a_2 u_{k-i-1})\cdot u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i +$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}\cdot a_2^j u_{k-j+1} u_n^{k-j+1} u_{n-1}^j = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot a_2^i u_{k-i+1} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}\cdot a_2^i u_{k-i+1} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i = u_{k+1} u_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot a_2^i u_{k-i+1} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\cdot a_2^i u_{k-i+1} u_n^{k-i+1} u_{n-1}^i .$$

Рівність (4.25) будемо доводити індукцією по r. При $r = 1$ маємо:

$$u_{sn+1} = a_1 u_{sn} + a_2 u_{sn-1} = a_1 \sum_{i=0}^{s-1}\binom{s}{i} a_2^i u_{s-i} u_n^{s-i} u_{n-1}^i + a_2 (a_2^{s-1} u_{n-1}^s + \sum_{i=0}^{s-2}\binom{s}{i} a_2^i u_{s-i-1} u_n^{s-i} u_{n-1}^i) =$$

$$= \binom{s}{s-1} a_1 a_2^{s-1} u_n u_{n-1}^{s-1} + a_2^s u_{n-1}^s + \sum_{i=0}^{s-2}\binom{s}{i} a_2^i (a_1 u_{s-i} + a_2 u_{s-i-1}) u_n^{s-i} u_{n-1}^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i} a_2^i u_{s-i+1} u_n^{s-i} u_{n-1}^i .$$

Доведемо тепер справедливість рівності (4.25) при $r = k+1$ при умові, що вона виконується при $r = k$. Поклавши в рівності (4.15) $r = sn$ і $s = k+1$, дістанемо рівність

$$u_{sn+(k+1)} = u_{sn+1} u_{k+1} + a_2 u_{sn} u_k ,$$

яка з врахуванням (4.25) при $r = 1$ і (4.24) набуває вигляду

$$u_{sn+(k+1)} = u_{k+1}\cdot \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}\cdot a_2^i u_{s-i+1} u_n^{s-i} u_{n-1}^i + a_2 u_k \cdot \sum_{i=0}^{s-1}\binom{s}{i}\cdot a_2^i u_{s-i} u_n^{s-i} u_{n-1}^i = a_2^s u_{k+1} u_{n-1}^s +$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1}\binom{s}{i}\cdot a_2^i (u_{k+1} u_{s-i+1} + a_2 u_k u_{s-i})\cdot u_n^{s-i} u_{n-1}^i = \sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i} a_2^i u_{s-i+k+1} u_n^{s-i} u_{n-1}^i ,$$

що й треба було довести.

Як було зауважено після теореми 4.3, рекурентне рівняння $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ при нормальних початкових умовах породжує послідовність натуральних чисел. Розглядаючи для цього рівняння рівності (4.23) – (4.25) з теореми 4.6, одержуємо такий

Наслідок. *Для довільних натуральних чисел s та n*

$$sn - 1 = (-1)^{s-1}(n-1)^s + \sum_{i=0}^{s-2}(-1)^i\binom{s}{i}\cdot(s-i-1)n^{s-i}(n-1)^i ,$$

$$sn = \sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\binom{s}{i}\cdot(s-i)n^{s-i}(n-1)^i ,$$

$$sn + r = \sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{s}{i}\cdot(s-i+r)n^{s-i}(n-1)^i .$$

Зауважимо, що друга з цих тотожностей є частковим випадком третьої (для $r = 0$).

Приклад 4.4. Нехай у рівності (4.25) $u_n = x$, $u_{n-1} = y$, тоді для $s = 8$ і $r = 1,3,5,7$ відповідно отримаємо такі многочлени:

$$u_{8n+1} = 511x^8 - 4080x^7y + 14224x^6y^2 - 28224x^5y^3 + 34720x^4y^4 - 26880x^3y^5 + 12544x^2y^6 -$$

$$-3072xy^7 + 256y^8,$$

$$u_{8n+3} = 2047x^8 - 16368x^7y + 57232x^6y^2 - 114240x^5y^3 + 142240x^4y^4 - 112896x^3y^5 +$$

$$55552x^2y^6 - 15360xy^7 + 1792y^8,$$

$$u_{8n+5} = 8191x^8 - 65520x^7y + 229264x^6y^2 - 458304x^5y^3 + 572320x^4y^4 - 456960x^3y^5 +$$

$$+227584x^2y^6 - 64512xy^7 + 7936y^8,$$

$$u_{8n+7} = 32767x^8 - 262128x^7y + 917392x^6y^2 - 1834560x^5y^3 + 2292640x^4y^4 - 1833216x^3y^5 +$$

$$+915712x^2y^6 - 261120xy^7 + 32512y^8.$$

Між членами числових послідовностей, які задовольняють одне і те ж лінійне рекурентне рівняння, але різні початкові умови, виконуються певні співвідношення, і часто, дослідивши властивості членів однієї з цих послідовностей, можна зробити деякі висновки про властивості членів іншої Зокрема, справедлива така теорема.

Теорема 4.7. *Нехай послідовності* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *і* $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняють лінійне рекурентне рівняння другого порядку*

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n$$

і початкові умови

$$u_1 = 1\ ,\ u_2 = a_1 \quad і \quad u_1^* = k\ ,\ u_2^* = a_1 \tag{4.26}$$

відповідно. Тоді

1) для кожного $n \geq 3$ *виконується співвідношення*

$$u_n^* = u_n + (k-1)a_2 u_{n-2}\ ; \tag{4.27}$$

2) якщо виконуються рівності

$$k = a_2 = s^2 + 1, \tag{4.28}$$

і $a_1 > 0$, *то для кожного* $n \geq 3$ *число* u_{2n-1}^* *можна подати у вигляді суми трьох квадратів:*

$$u_{2n-1}^* = (u_n)^2 + ((s^2+1)\cdot u_{n-1})^2 + ((s^3+s)\cdot u_{n-2})^2; \tag{4.29}$$

3) якщо виконуються рівності

$$k = s^2 + 1\ ,\ a_2 = b^2, \tag{4.30}$$

то для кожного $n \geq 2$ *число* u_{2n+1}^* *можна подати у вигляді суми чотирьох квадратів:*

$$u_{2n+1}^* = u_{n+1}^2 + (bu_n)^2 + (sbu_n)^2 + (sb^2u_{n-1})^2\ . \tag{4.31}$$

Доведення. За теоремою 4.1 розв'язок рекурентного рівняння $u_{n+2}^* = a_1 u_{n+1}^* + a_2 u_n^*$ із початковими умовами $u_1^* = k$, $u_2^* = a_1$ має вигляд

$$u_1^* = k,\ u_{n+2}^* = \left[\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1}k & a_1 & & \\ 0 & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underbrace{0\ldots0}_{n-1} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \end{array}\right]_{n+1},\ n = 0, 1, \ldots\ . \tag{4.32}$$

Рівність (4.27) доведемо за допомогою індукції. В її істинності при $n = 3$ легко переконатись безпосереднім обчисленням. Нехай тепер рівність (4.27) виконується для всіх таких n, що $3 < n < s$. Розкладаючи параперманент (4.32) при $n + 2 = s$ за елементами останнього рядка, отримаємо рівність

$$u_s^* = a_1 u_{s-1}^* + a_2 u_{s-2}^*,$$

яку, враховуючи припущення, можна переписати у вигляді:

$$u_s^* = a_1(u_{s-1} + (k-1)a_2u_{s-3}) + a_2(u_{s-2} + (k-1)a_2u_{s-4}) =$$

$$= (a_1u_{s-1} + a_2u_{s-2}) + (k-1)a_2(a_1u_{s-3} + a_2u_{s-4}) = u_s + (k-1)a_2u_{s-2}.$$

Доведемо рівність (4.29). Рівність (4.11) із теореми 4.4 при $k = 2$ має вигляд

$$u_{r+s}^* = a_1u_r^*u_s + a_2(u_{r-1}^*u_s + u_r^*u_{s-1}) = u_{r+1}^*u_s + a_2u_r^*u_{s-1}.$$

Покладемо в останній рівності $r = n-1$, $s = n$. Тоді, враховуючи вже доведену рівність (4.27), будемо мати:

$$u^*_{2n-1} = (a_1u^*_{n-1} + a_2u^*_{n-2})\cdot u_n + a_2u^*_{n-1}u_{n-1} = u^*_nu_n + a_2u^*_{n-1}u_{n-1} = (u_n + (k-1)a_2u_{n-2})\cdot u_n +$$
$$+a_2(u_{n-1} + (k-1)a_2u_{n-3})\cdot u_{n-1} = u_n^2 + (k-1)a_2u_{n-2}u_n + a_2u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2u_{n-3}u_{n-1} =$$
$$= u_n^2 + (k-1)a_2u_{n-2}(a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2}) + a_2u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2u_{n-3}u_{n-1} =$$
$$= u_n^2 + a_2u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2u_{n-2}^2 + (k-1)a_2u_{n-1}^2 = u_n^2 + ka_2u_{n-1}^2 + (k-1)a_2^2u_{n-2}^2.$$

Підставляючи в праву частину k і a_2 з (4.28), отримаємо (4.29).

Для доведення рівності (4.31) запишемо рівність (4.27) для $n = 2m+1$:

$$u^*_{2m+1} = u_{2m+1} + (k-1)a_2u_{2m-1}.$$

Звідси, використовуючи рівність (4.15) із теореми 4.5 для $r = m$ і $s = m+1$ і умови (4.30), після нескладних перетворень одержуємо рівність(4.31).

Приклад 4.5. Покладемо в теоремі 4.7 в пункті 2) $a_1 = 4$ і $s = 2$. Тоді

$$u_1 = a_2 = k = 5,$$

$$u^*_n = \frac{1}{2}(3\cdot 5^{n-1} + 7\cdot(-1)^{n-1}),\ u_n = \frac{1}{6}(5^n + (-1)^{n-1})$$

і рівність (4.29) набуває вигляду

$$\frac{1}{2}(3\cdot 5^{2n-2} + 7) = \left(\frac{1}{6}(5^n + (-1)^{n-1})\right)^2 + \left(\frac{5}{6}(5^{n-1} + (-1)^{n-2})\right)^2 + \left(\frac{5}{3}(5^{n-2} + (-1)^{n-3})\right)^2.$$

Зокрема, для $n = 13$ це дає розклад простого числа 89406967163085941 на суму квадратів трьох різних натуральних чисел, два з яких є послідовними:

$89406967163085941 = 203450521^2 + 203450520^2 + 81380210^2$.

Приклад 4.6. Якщо в пункті 3) теореми 4.7 покласти $s = 1$, $a_2 = b = 2$, $a_1 = 3$, то $u^*_n = 4^{n-1} + (-1)^{n-1}$, $u_n = \frac{1}{5}\cdot(4^n + (-1)^{n-1})$ і рівність (4.31) набуває вигляду

$$2^{4m} + 1 = \left(\frac{4^{m+1} + (-1)^m}{5}\right)^2 + \left(\frac{2^{2m+1} + (-1)^{m-1}\cdot 2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2^{2m+1} + (-1)^{m-1}\cdot 2}{5}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{2^{2m} + (-1)^{m-2}\cdot 4}{5}\right)^2.$$

Позаяк всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$ при $n \geq 2$ можна подати у вигляді $2^{4m} + 1$, то звідси випливає, що всі вони при $n \geq 3$ розкладаються в суму чотирьох квадратів натуральних чисел.

4.3. Неперервні дроби, K-многочлени і параперманенти

Нехай задано деякий скінченний неперервний дріб

$$\delta_n = a_0 + \frac{b_1}{a_1} \mathbin{\genfrac{}{}{0pt}{}{}{+}} \frac{b_2}{a_2} \mathbin{\genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+}} \frac{b_n}{a_n} = a_0 + \mathop{K}_{i=1}^{n}\left(b_i/a_i\right) \tag{4.33}$$

(ми користуємося компактним позначенням неперервних дробів, введеним Роджерсом [44], і позначенням $a_0 + \mathop{K}\limits_{i=1}^{n}\left(b_i/a_i\right)$, яке зустрічається в [45]). Як відомо, чисельники P_k і знаменники Q_k підхідних дробів $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ неперервного дробу (4.33) задаються лінійними рекурентними співвідношеннями другого порядку із змінними коефіцієнтами виду

$$P_k = a_kP_{k-1} + b_kP_{k-2},\quad P_{-2} = 0,\ P_{-1} = 1; \tag{4.34}$$

$$Q_k = a_kQ_{k-1} + b_kQ_{k-2},\ Q_{-2} = 1,\ Q_{-1} = 0,\ b_0 = 1. \tag{4.35}$$

Використовуючи рекурентні рівності (4.34), (4.35), аналогічно доведенню теореми 4.1 можна показати, що

$$P_n = \left[\begin{array}{lllll} a_0 & & & & \\ \frac{b_1}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \multicolumn{3}{l}{\underbrace{0\ \ \ldots\ \ 0}_{n-1}} & \frac{b_n}{a_n} & a_n \end{array}\right],\ n = 0,1,\ldots;\quad Q_n = \left[\begin{array}{lllll} a_1 & & & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & & \\ 0 & \frac{b_3}{a_3} & a_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \multicolumn{3}{l}{\underbrace{0\ \ \ldots\ \ 0}_{n-2}} & \frac{b_n}{a_n} & a_n \end{array}\right],\ n = 1,2,\ldots \tag{4.36}$$

Якщо $a_0 = 0$, то, розкладаючи перший з параперманентів із (4.36) за елементами першого стовпця, матимемо:

$$P_n = b_1 \left[\begin{array}{llll} a_2 & & & \\ \frac{b_3}{a_3} & a_3 & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{n-3} & \frac{b_n}{a_n} & a_n & \end{array}\right]_{n-1}$$

Якщо другий із параперманентів в (4.36) розгорнути за його означенням, то отримаємо многочлен $K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n)$. Цей многочлен можна задати рекурентно так:

$$K_0(\mid) = 1, \quad K_1(a_1 \mid) = a_1,$$

$$K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n) = a_n K_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1} \mid b_2,\ldots,b_{n-1}) + b_n K_{n-2}(a_1,\ldots,a_{n-2} \mid b_2,\ldots,b_{n-2}) \quad (4.37)$$

Рекурсивні співвідношення (4.37) можна отримати, розкладаючи другий із параперманентів в (4.36) за елементами останнього рядка. Зауважимо, що многочлени $K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n)$ є узагальненням K-многочленів (континуантів) $K_n(a_1,\ldots,a_n)$, які утворюються із многочленів $K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n)$ при $b_2 = \ldots = b_n = 1$. Властивості континуантів вивчав ще Л.Ейлер [46].

Розглянемо приклади застосування параперманентів для доведення деяких, вже відомих, властивостей континуантів.

Твердження 4.1. Справедлива рівність

$$K_n(a_1,\ldots,a_{m-1},a_m + c,a_{m+1},\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n) = K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n) +$$
$$+ c \cdot K_{m-1}(a_1,\ldots,a_{m-1} \mid b_2,\ldots b_{m-1}) \cdot K_{n-m}(a_{m+1},\ldots,a_n \mid b_{m+2},\ldots,b_n). \quad (4.38)$$

Доведення. Достатньо розкласти відповідний многочлену $K_n(a_1,\ldots,a_{m-1},a_m + c,a_{m+1},\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n)$ параперманент за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(m)$ і відповідним чином згрупувати утворені доданки.

Зауваження. Якщо у рівності (4.38) покласти $b_2 = \ldots = b_n = 1$, то вона перейде у рівність із п.6.30 на стор. 595 книги [42].

Твердження 4.2. Справедлива рівність

$$K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_{m-1},b_m + c,b_{m+1},\ldots,b_n) = K_n(a_1,\ldots,a_n \mid b_2,\ldots,b_n) +$$
$$+ c \cdot K_{m-2}(a_1,\ldots,a_{m-2} \mid b_2,\ldots,b_{m-2}) \cdot K_{n-m}(a_{m+1},\ldots,a_n \mid b_{m+2},\ldots,b_n). \quad (4.39)$$

Доведення аналогічне доведенню рівності (4.38).

Доведемо ще одну рівність, за допомогою якої можна понизити порядок континуанта і тим самим полегшити обчислення зображення скінченних неперервних дробів у вигляді звичайних дробів. Для цього розкладемо параперманент

$$\left[\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{m-2} & \frac{b_m}{a_m} & a_m & \\ \underbrace{0 \ \ldots\ldots \ 0}_{m-1} & \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} & a_{m+1} & \\ \underbrace{0 \ \ldots\ldots\ldots \ 0}_{m} & \frac{b_{m+2}}{a_{m+2}} & a_{m+2} & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ \underbrace{0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ 0}_{m+n-2} & \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}} & a_{m+n} & \end{array}\right] = K_{m+n}(a_1,\ldots,a_{m+n} \mid b_2,\ldots,b_{m+n})$$

за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(m+1)$. Якщо відповідним чином згрупувати одержані доданки, то отримаємо рівність

$$K_{m+n}(a_1,\dots,a_{m+n} \mid b_2,\dots,b_{m+n}) = b_{m+1} K_{m-1}(a_1,\dots,a_{m-1} \mid b_2,\dots,b_{m-1}) \times$$
$$\times K_{n-1}(a_{m+2}, \ \dots \ , \ a_{m+n} \mid b_{m+3}, \ \dots \ , \ b_{m+n}) +$$
$$+ K_m(a_1,\dots,a_m \mid b_2,\dots,b_m) \cdot K_n(a_{m+1},\dots,a_{m+n} \mid b_{m+2},\dots,b_{m+n}). \qquad (4.40)$$

Якщо у рівності (4.40) покласти $b_2 = \dots = b_{m+n} = 1$, то вона перейде в рівність (6.133) із [42].

Таким чином, за допомогою параперманентів можна узагальнити відомі властивості континуантів, причому доведення цих властивостей стають простішими.

Якщо в континуанті $K_n(a_1,\dots,a_n)$ покласти $a_1 = \dots = a_n = z$, то на основі рівності (6.129) із [42, стор. 335] отримаємо поліноми Фібоначчі:

$$\left[\begin{array}{lllll} z & & & & \\ \frac{1}{z} & z & & & \\ 0 & \frac{1}{z} & z & & \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{n-2} & & & \frac{1}{z} & z \end{array}\right]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \cdot z^{n-2k},$$

Якщо в одержаній рівності додатково покласти $z = 1$, то одержимо:

$$\left[\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{n-2} & & 1 & 1 \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

(див. [42], стор. 335).

Континуанти $K_n(a_1,\dots,a_n)$ мають тісний зв'язок із так званими деревами Штерна-Броко (див. [47,48]). Якщо, наприклад, деякий вузол цього дерева задається L, R-послідовністю вигляду $R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots \ R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}}$, де $a_0 \ge 0$, $a_i \ge 1$, $i = 1, \dots, n-2$, $a_{n-1} \ge 0$, n – парне, то цьому вузлу відповідає дріб ("Теорема Халфена" [49])

$$f(\, R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots \ R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} \,) = \frac{K_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1)}{K_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 1)}.$$

Теорема 4.8. *Неперервний періодичний дріб*

$$\delta_r = a_0 + \mathop{K}_{i=1}^{rk} \left(b_i \big/ a_i \right), \qquad (4.41)$$

з періодом $k \ge 2$, тобто неперервний дріб, в якому виконуються співвідношення

$$a_{sk+m} = a_m, \ b_{sk+m} = b_m, \ m = 1, \dots, k; \ s = 0, 1, \dots r-1, \qquad (4.42)$$

дорівнює значенню виразу

$$a_0 + b_1 \cdot \frac{B_{r-1}}{A_r},$$

в якому A_r і B_{r-1} визначаються із рекурентних рівностей

$$A_r = b_1 \cdot \alpha \cdot B_{r-2} + \beta \cdot A_{r-1}, \qquad (4.43)$$

$$B_{r-1} = b_1 \cdot \gamma \cdot B_{r-2} + \lambda \cdot A_{r-1}, \qquad (4.44)$$

де

$$\alpha=\left[\begin{array}{llll}a_1 & & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-3} & & \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} & a_{k-1}\end{array}\right]_{k-1},\quad \beta=A_1=\left[\begin{array}{llll}a_1 & & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-2} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k\end{array}\right]_{k}. \tag{4.45}$$

$$\gamma=\left[\begin{array}{llll}a_2 & & & \\ \frac{b_3}{a_3} & a_3 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-4} & & \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} & a_{k-1}\end{array}\right]_{k-2},\quad \lambda=B_0=\left[\begin{array}{llll}a_2 & & & \\ \frac{b_3}{a_3} & a_3 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-3} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k\end{array}\right]_{k-1} \tag{4.46}$$

(якщо $k=2$, то вважаємо, що $\gamma=1$).

Доведення. При $n=rk$ рівності (4.36) для дробу (4.41) із умовою (4.42) матимуть вигляд

$$P_{rk}=\left[\begin{array}{llll}a_0 & & & \\ \frac{b_1}{a_1} & a_1 & & \\ 0 & \frac{b_2}{a_2} & a_2 & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-1} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k \\ \underbrace{0\ \dots\dots\ 0}_{k} & & \frac{b_1}{a_1} & a_1 \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\dots\dots\ 0}_{rk-1} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k\end{array}\right]_{rk+1},\quad Q_{rk}=\left[\begin{array}{llll}a_1 & & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & & \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{k-2} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k \\ \underbrace{0\ \dots\dots\ 0}_{k-1} & & \frac{b_1}{a_1} & a_1 \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \underbrace{0\ \dots\dots\dots\ 0}_{rk-2} & & \frac{b_k}{a_k} & a_k\end{array}\right]_{rk} \tag{4.47}$$

Позначимо параперманент, який утворюється із першого параперманента (4.47) в результаті викреслювання першого стовпця, через A_r, а параперманент, який утворюється в результаті викреслювання перших двох стовпців, – через B_{r-1} (в обох випадках індекс показує, скільки повних періодів дробу містить параперманент). Тоді, розкладаючи перший параперманент (4.47) за елементами першого стовпця, отримаємо рівність:

$$P_{rk}=a_0\cdot A_r+b_1\cdot B_{r-1}\,. \tag{4.48}$$

Розкладемо параперманент A_r за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(k+1)$, тоді отримаємо рекурсію (4.43). Аналогічно поступимо із паравизначником B_{r-1}, розкладаючи його за елементами таблиці $T(k)$, отримаємо рекурсію (4.44).

Позаяк $Q_{rk}=A_r$, то враховуючи (4.48), робимо висновок, що заданий періодичний неперервний дріб є зображенням дробу

$$\frac{P_{rk}}{Q_{rk}}=\frac{a_0\cdot A_r+b_1\cdot B_{r-1}}{A_r}=a_0+b_1\cdot\frac{B_{r-1}}{A_r}\,.$$

Теорема 4.9. *Якщо для нескінченного неперервного періодичного дробу*

$$\delta=a_0+\mathop{K}_{i=1}^{\infty}\left(b_i/a_i\right),\ (a_{sk+m}=a_m,\ b_{sk+m}=b_m,\ m=1,\dots,k,\ s=0,1,\dots) \tag{4.49}$$

члени всіх ланок якого невід'ємні дійсні числа, виконується нерівність

$$\omega=\frac{b_1}{\beta^2}\cdot|\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\lambda|<1, \tag{4.50}$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$ визначаються із рівностей (4.45), (4.46), *то послідовність*

$$\delta_r=a_0+\mathop{K}_{i=1}^{rk}\left(b_i/a_i\right),\ (r=1,2\dots) \tag{4.51}$$

збігається до δ, причому справедлива оцінка похибки

$$|\delta-\delta_r|<\sigma\cdot\frac{\omega^r}{1-\omega}, \tag{4.52}$$

де

$$\sigma = \frac{b_1 \lambda \beta}{b_1 \lambda \alpha + \beta^2}. \qquad (4.53)$$

Доведення. Знайдемо верхню оцінку модуля різниці $|\delta_s - \delta_r|$. На основі теореми 4.8 маємо

$$|\delta_s - \delta_r| = b_1 \left| \frac{B_{s-1}}{A_s} - \frac{B_{r-1}}{A_r} \right| \overset{(4.43),\,(4.44)}{=} b_1 \left| \frac{b_1\gamma \frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \lambda}{b_1\alpha \frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \beta} - \frac{b_1\gamma \frac{B_{r-2}}{A_{r-1}} + \lambda}{b_1\alpha \frac{B_{r-2}}{A_{r-1}} + \beta} \right| =$$

$$= b_1 \left| \frac{\gamma\delta_{s-1} + \lambda - a_0\gamma}{\alpha\delta_{s-1} + \beta - a_0\alpha} - \frac{\gamma\delta_{r-1} + \lambda - a_0\gamma}{\alpha\delta_{r-1} + \beta - a_0\alpha} \right| = b_1 \left| \frac{(\gamma\beta - \alpha\lambda)\cdot(\delta_{s-1} - \delta_{r-1})}{\left(b_1\alpha \frac{B_{s-2}}{A_{s-1}} + \beta\right)\cdot\left(b_1\alpha \frac{B_{r-2}}{A_{r-2}} + \beta\right)} \right| \le$$

$$\le \frac{b_1}{\beta^2} |\gamma\beta - \alpha\lambda| \cdot |\delta_{s-1} - \delta_{r-1}| = \omega \cdot |\delta_{s-1} - \delta_{r-1}|.$$

Таким чином,

$$|\delta_s - \delta_r| \le \omega^{r-1} |\delta_{s-r+1} - \delta_1| < \frac{\omega^{r-1}}{1-\omega} \cdot |\delta_2 - \delta_1|.$$

Але легко встановити, що

$$|\delta_2 - \delta_1| = \omega \cdot \frac{b_1 \lambda \beta}{b_1 \lambda \alpha + \beta^2},$$

тому, переходячи до границі при $s \to \infty$ і, враховуючи (4.50), отримаємо оцінку (4.52). Отже, послідовність (4.51) збігається до δ із оцінкою похибки (4.52).

Приклад 4.6. Обчислимо наближені значення величини $\sqrt{n}$ при допомозі скінченних періодичних неперервних дробів із періодом 3. В цьому випадку маємо рівняння

$$x = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + x}}},$$

з якого знаходимо, що

$$x_{1,2} = \frac{-(a_1a_2a_3 + a_1b_3 + a_3b_2 - a_2b_1) \pm \sqrt{(a_1a_2a_3 + a_1b_3 + a_3b_2 + a_2b_1)^2 + 4b_1b_2b_3}}{2(a_1a_2 + b_2)}.$$

Нехай $a_i > 0$ і $b_i > 0$, $i = 1,2,3$ і додатній корінь цього рівняння дорівнює $\sqrt{n}$, тоді знайдемо a_i і b_i, $i = 1,2,3$ із умов:

$$\left.\begin{aligned} &a_1a_2a_3 + a_1b_3 + a_3b_2 - a_2b_1 = 0, \\ &(a_1a_2a_3 + a_1b_3 + a_3b_2 + a_2b_1)^2 + 4\cdot b_1b_2b_3 = n\cdot k^2, \\ &2(a_1a_2 + b_2) = k. \end{aligned}\right\} \qquad (4.54)$$

Обчислимо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ із рівностей (4.44), (4.45):

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 + b_2,\ \beta = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ \frac{b_2}{a_2} & a_2 & \\ 0 & \frac{b_3}{a_3} & a_3 \end{bmatrix} = a_1a_2a_3 + a_3b_2 + a_1b_3,\ \gamma = a_2,$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} a_2 & \\ \frac{b_3}{a_3} & a_3 \end{bmatrix} = a_2a_3 + b_3.$$

Отже, рекурсії (4.42), (4.43) матимуть відповідно вигляд:

$$B_{r-1} = b_1a_2B_{r-2} + (a_2a_3 + b_3)A_{r-1},$$

$$A_r = b_1(a_1a_2 + b_2)B_{r-2} + (a_1a_2a_3 + a_3b_2 + a_1b_3)A_{r-1},$$

і послідовність $\delta_r = b_1 \frac{B_{r-1}}{A_r}$ збігатиметься до $\sqrt{n}$. При цьому, чим менше значення константи $\omega = \frac{b_1}{\beta^2}\cdot|\beta\gamma - \alpha\lambda|$ тим скоріше послідовність $\{\delta_i\}$, $i = 1,2,\ldots$ збігатиметься до $\sqrt{n}$.

Нехай $n=2$. Розглянемо кілька періодичних дробів із періодом 3, члени ланок якого задовольняють умови (4.54).

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	$B_{r-1}=b_1\cdot\gamma\cdot B_{r-2}+\delta\cdot A_{r-1}$ $A_r=b_1\cdot\alpha\cdot B_{r-2}+\beta\cdot A_{r-1}$	B_0 A_0	ω	x_1	x_2	x_3	x_4
1)	1	2	1	2	1	1	$B_{r-1}=4\cdot B_{r-2}+3\cdot A_{r-1}$ $A_r=6\cdot B_{r-2}+4\cdot A_{r-1}$	3 4	0.125	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{816}{577}$
2)	1	3	1	4	7	2	$B_{r-1}=12\cdot B_{r-2}+5\cdot A_{r-1}$ $A_r=40\cdot B_{r-2}+12\cdot A_{r-1}$	5 12	0.3(8)	$\frac{5}{3}$	$\frac{60}{43}$	$\frac{395}{279}$	$\frac{5160}{3649}$
3)	2	7	1	3	1	3	$B_{r-1}=21\cdot B_{r-2}+10\cdot A_{r-1}$ $A_r=45\cdot B_{r-2}+21\cdot A_{r-1}$	10 21	0.0204	$\frac{10}{7}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{1970}{1393}$	$\frac{27720}{19601}$
4)	2	2	1	4	2	1	$B_{r-1}=8\cdot B_{r-2}+3\cdot A_{r-1}$ $A_r=24\cdot B_{r-2}+8\cdot A_{r-1}$	3 8	0.125	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{816}{577}$

Отже, послідовність $\{x_i\}$, $i=1,2,\ldots$ в наведених вище прикладах найшвидше збігається у третьому випадку. Так, вже при четвертій ітерації отримуємо наближення, в якому вісім вірних знаків після коми, а значення похибки (4.51) дорівнює $1.444718E-07$.

Проведемо аналогічний аналіз для мішаних періодичних неперервних дробів.

Теорема 4.10. *Значення мішаного періодичного дробу*

$$\delta_r^* = a_0 + \frac{b_1^*}{a_1^*} + \cdots + \frac{b_s^*}{a_s^*} + \underbrace{\frac{b_1}{a_1} + \cdots + \frac{b_k}{a_k}}_{r\ \text{разів}}, \tag{4.55}$$

дорівнює значенню виразу

$$a_0 + b_1^* \frac{B}{A},$$

в якому

$$A = \varphi \cdot A_r + \varepsilon \cdot b_1 B_{r-1}, \tag{4.56}$$

$$B = \psi \cdot A_r + \tau \cdot b_1 B_{r-1}, \tag{4.57}$$

де

$$\varphi = \left[\begin{array}{llll} a_1^* & & & \\ \frac{b_2^*}{a_2^*} & a_2^* & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{s-2} & \frac{b_s^*}{a_s^*} & a_s^* & \end{array}\right]_s, \quad \varepsilon = \left[\begin{array}{llll} a_1^* & & & \\ \frac{b_2^*}{a_2^*} & a_2^* & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{s-3} & \frac{b_{s-1}^*}{a_{s-1}^*} & a_{s-1}^* & \end{array}\right]_{s-1}, \tag{4.58}$$

$$\psi = \left[\begin{array}{llll} a_2^* & & & \\ \frac{b_3^*}{a_3^*} & a_3^* & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{s-3} & \frac{b_s^*}{a_s^*} & a_s^* & \end{array}\right]_{s-1}, \quad \tau = \left[\begin{array}{llll} a_2^* & & & \\ \frac{b_3^*}{a_3^*} & a_3^* & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \underbrace{0 \;\ldots\; 0}_{s-4} & \frac{b_{s-1}^*}{a_{s-1}^*} & a_{s-1}^* & \end{array}\right]_{s-2}, \tag{4.59}$$

а A_r і B_{r-1} визначаються із рекурсій (4.43), (4.44) *із врахуванням* (4.45), (4.46). *Якщо $s=2$, то вважатимемо, що $\tau=1$.*

Доведення. Для дробу (4.55) параперманенти P_{rk}^* і Q_{rk}^*, аналогічні до параперманентів P_{rk} і Q_{rk}, що задаються рівностями (4.47), матимуть вигляд

$$P_{rk}^{*}=\left[\begin{array}{l} a_0 \\ \frac{b_1^*}{a_1^*}\ a_1^* \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots0}_{s-1}\ \frac{b_s^*}{a_s^*}\ a_s^* \\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{s}\ \frac{b_1}{a_1}\ a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{k+s-1}\ \frac{b_k}{a_k}\ a_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{rk+s-1}\ \frac{b_k}{a_k}\ a_k \end{array}\right]_{rk+s+1} \qquad Q_{rk}^{*}=\left[\begin{array}{l} a_1^* \\ \frac{b_2^*}{a_2^*}\ a_2^* \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots0}_{s-2}\ \frac{b_s^*}{a_s^*}\ a_s^* \\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{s-1}\ \frac{b_1}{a_1}\ a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{k+s-2}\ \frac{b_k}{a_k}\ a_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{rk+s-2}\ \frac{b_k}{a_k}\ a_k \end{array}\right]_{rk+s} \tag{4.60}$$

Позначимо параперманент, який утворюється із першого параперманента (4.60) в результаті викреслювання першого стовпця через A, а параперманент, який утворюється із другого параперманента (4.60) в результаті викреслювання першого стовпця – через B. Тоді, розкладаючи перший параперманент за елементами першого стовпця, отримаємо рівність $P_{rk}^{*}=a_0\cdot A+b_1^*\cdot B$, яка із врахуванням рівності $Q_{rk}^{*}=A$ приведе до рівності

$$\delta_r^*=a_0+b_1^*\frac{B}{A}.$$

Позначимо параперманент, який утворюється із першого параперманента (4.60) в результаті викреслювання перших $(s+1)$ стовпців, через A_r (він вміщає r періодів дробу), а параперманент, який утворюється із параперманента A_r в результаті викреслювання першого стовпця, через B_{r-1}. Розкладемо параперманент A за елементами вписаної прямокутної таблиці $T(s+1)$, враховуючи (4.58) і використовуючи теорему про неповний розклад паравизначника за елементами $(s+1)$-го стовпця, тоді матимемо рівність (4.56). Із паравизначником B зробимо аналогічні перетворення, розкладаючи його за елементами таблиці $T(s)$, враховуючи (4.59), при цьому отримаємо рівність (4.57)

Позаяк параперманенти A_r і B_{r-1} співпадають із відповідними параперманентами теореми 4.8, то для обчислення їх значень можна користуватися рекурсіями (4.43) і (4.44).

Теорема 4.11. *Якщо для нескінченного неперервного мішаного періодичного дробу*

$$\delta^*=a_0+\frac{b_1^*}{a_1^*}+\cdots+\frac{b_s^*}{a_s^*}+\underbrace{\frac{b_1}{a_1}+\cdots+\frac{b_k}{a_k}}_{r\ раз}+\cdots, \tag{4.61}$$

члени всіх ланок якого невід'ємні дійсні числа, виконується нерівність (4.50), *в якій* $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$ *визначаються із рівностей* (4.45), (4.46), *то послідовність*

$$\delta_r^*=a_0+b_1^*\frac{B}{A} \tag{4.62}$$

в якій A *і* B *визначаються із рівностей* (4.56), (4.57) *збігається до*

$$\delta^*=a_0+b_1^*\frac{\psi+\tau(\delta-a_0)}{\varphi+\varepsilon(\delta-a_0)}, \tag{4.63}$$

де δ *– значення нескінченного періодичного дробу* (4.49), *причому справедлива оцінка похибки*

$$\left|\delta^*-\delta_r^*\right|<\sigma\cdot\omega^*\cdot\frac{\omega^r}{1-\omega}, \tag{4.64}$$

де

$$\omega^*=\frac{b_1^*}{\varphi^2}\cdot\left|\varphi\tau-\psi\varepsilon\right|,$$

а ω *і* σ *задаються відповідно виразами* (4.50) *і* (4.53).

Доведення. Доведемо, що послідовність (4.62) при умові (4.50) збігається до δ^*, що задається рівностями (4.61), (4.63). За теоремою 4.10 маємо:

$$\delta_r^*=a_0+b_1^*\frac{B}{A}=a_0+b_1^*\frac{\psi A_r+\tau b_1B_{r-1}}{\varphi A_r+\varepsilon b_1B_{r-1}},$$

тому

$$\delta_r^* = a_0 + b_1^* \frac{\psi + \tau b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}}{\varphi + \varepsilon b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}} = a_0 + b_1^* \frac{\psi + \tau(a_0 + b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}) - \tau a_0}{\varphi + \varepsilon(a_0 + b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}) - \varepsilon a_0},$$

але за теоремою 4.9 послідовність $\delta_r = a_0 + b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}$ при умові (4.50), при $r \to \infty$ збігається до δ, тому

$$\delta^* = \lim_{r\to\infty} \delta_r^* = a_0 + b_1^* \frac{\psi + \tau(\delta - a_0)}{\varphi + \varepsilon(\delta - a_0)},$$

тобто виконується рівність (4.63).

Доведемо справедливість оцінки похибки (4.64). Для цього, використовуючи теорему 4.10, оцінимо зверху модуль різниці $\delta_p^* - \delta_r^*$:

$$\left|\delta_p^* - \delta_r^*\right| = b_1^* \left| \frac{\psi A_p + \tau b_1 B_{p-1}}{\varphi A_p + \varepsilon b_1 B_{p-1}} - \frac{\psi A_r - \tau b_1 B_{r-1}}{\varphi A_r - \varepsilon b_1 B_{r-1}} \right| =$$

$$= b_1^* \left|\varphi\tau - \psi\varepsilon\right| \cdot \left| \frac{b_1 A_p B_{r-1} - b_1 A_r B_{p-1}}{(\varphi A_p + \varepsilon b_1 B_{p-1})(\varphi A_r + \varepsilon b_1 B_{r-1})} \right| =$$

$$= b_1^* \left|\varphi\tau - \psi\varepsilon\right| \left| \frac{b_1 \dfrac{B_{p-1}}{A_p} - b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r}}{(\varphi + \varepsilon b_1 \dfrac{B_{p-1}}{A_p})(\varphi + \varepsilon b_1 \dfrac{B_{r-1}}{A_r})} \right| \le \frac{b_1^* \left|\varphi\tau - \psi\varepsilon\right|}{\varphi^2} \left| b_1 \frac{B_{p-1}}{A_p} - b_1 \frac{B_{r-1}}{A_r} \right| =$$

$$= \omega^* \left|\delta_p - \delta_r\right|.$$

Перейдемо в нерівності

$$\left|\delta_p^* - \delta_r^*\right| \le \omega^* \cdot \left|\delta_p - \delta_r\right|$$

до границі при $p \to \infty$, тоді за теоремою 4.9, матимемо нерівності

$$\left|\delta^* - \delta_r^*\right| \le \omega^* \cdot \left|\delta - \delta_r\right| < \sigma\omega^* \cdot \frac{\omega^r}{1-\omega},$$

що і потрібно було довести.

4.4. Застосування F-паравизначників до задачі про шляхи на похилій діаграмі з рухом $mot(\uparrow, \leftarrow)$

Теорема 4.12. *Число найкоротших шляхів між крайньою північно-західною і крайньою південно-східною точками на похилій діаграмі* $diagr(A,B)$, *де* $A = \left\{a_1^{\lambda_1}, \dots, a_n^{\lambda_n}\right\}$, $B = \left\{a_1^{\mu_1}, \dots, a_n^{\mu_n}\right\}$, *причому* $\mu_i \le \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, *дорівнює*

$$L(A,B) = L\begin{pmatrix} \lambda_1 \dots \lambda_n \\ \mu_1 \dots \mu_n \end{pmatrix} = \mathrm{ddet}^+ \left(a_{ij}\right)_{1 \le j \le i \le n}, \tag{4.65}$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i - \mu_j + j - i + 1, \text{ если } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 \ge 0, \\ 0, \text{ если } \lambda_i - \mu_j + j - i + 1 < 0. \end{cases} \tag{4.66}$$

Доведення. Очевидно, що число найкоротших шляхів на діаграмі рис.4.1 дорівнює $k+1$, де k – число клітинок цієї діаграми.

Рис.4.1.

Діаграма з рис. 4.1. в термінах мультимножин може бути записана у вигляді $diagr(\{1^k\}, \varnothing)$,

тому

$$L\begin{pmatrix} \underbrace{1,\dots,1}_{k} \\ \underbrace{0,\dots,0}_{k} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{matrix} 2 & & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{matrix} \right\rangle_k \overset{(3.65)}{=} k+1,$$

Розглянемо загальну похилу діаграму $diagr(A,B)$.

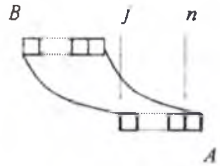


Рис. 4.2.

На рис.4.2 зображено $n-j+1$ клітинок нижнього ряду цієї діаграми і k клітинок верхнього її ряду. Очевидно, що число всіх найкоротших шляхів від крайньої північно-західної точки до крайньої південно-східної точки, на цій діаграмі, дорівнює сумі $n-j+2$ чисел $L(j-1),\ldots,L(n)$, які відповідно дорівнюють числам найкоротших шляхів, що проходять через ліву вертикальну сторону j-тої клітинки і кожну праву вертикальну сторону i-тої $(i=j,\ldots,n)$ клітинки нижнього ряду діаграми. На рис.4.2 ці сторони виділено жирними лініями. Але число $L(i)$, $i=j-1,\ldots,n$ дорівнює аналогічному числу найкоротших шляхів діаграми, яка утворюється із діаграми $diagr(A,B)$ в результаті відкидання всіх клітинок нижнього ряду і всіх клітинок цієї діаграми,

які лежать правіше i-того стовпця. Отже, виконується рекурсія:

$$L\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_{j-1} & \lambda_j & \lambda_{j+1} & \ldots & \lambda_n \\ \mu_1 & \ldots & \mu_{j-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} \lambda_1-1\ldots & \lambda_{j-1}-1 \\ \mu_1-1\ldots & \mu_{j-1}-1 \end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{i=j}^{n} L\begin{pmatrix} \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1 & \ldots & \lambda_i-1 \\ \mu_1-1 & \ldots & \mu_{j-1}-1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.67)$$

де $i=j,\ldots,n$,

$$L(i)=L\begin{pmatrix} \lambda_1-1\ldots\lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1\ldots\lambda_i-1 \\ \mu_1-1\ldots\mu_{j-1}-1 & 0\ \ldots\ 0 \end{pmatrix},\ L(j-1)=L\begin{pmatrix} \lambda_1-1\ldots\lambda_{j-1}-1 \\ \mu_1-1\ldots\mu_{j-1}-1 \end{pmatrix},$$

Таким чином, при допомозі рекурсії (4.67), знаходження числа найкоротших шляхів, після скінченного числа кроків, приводить до обчислення числа найкоротших шляхів на діаграмах, що зображені на рис. 4.1.

Доведемо, що верхній F-паравизначник (4.65), при умові (4.66), задовольняє рекурсію (4.67). З цією метою для чисел

$$L\begin{pmatrix} \lambda_1-1\ldots\lambda_{j-1}-1 \\ \mu_1-1\ldots\mu_{j-1}-1 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} \lambda_1-1\ldots\lambda_{j-1}-1 & \lambda_j-1\ldots\lambda_i-1 \\ \mu_1-1\ldots\mu_{j-1}-1 & 0\ \ldots\ 0 \end{pmatrix}$$

із рівності (4.67) побудуємо, при допомозі (4.66), відповідно трикутні матриці:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1-\mu_1+1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{j-1}-\mu_1-j+3\ldots\lambda_{j-1}-\mu_{j-1}+1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l|l} \lambda_1-\mu_1+1 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_{j-1}-\mu_1-j+3\ldots\lambda_{j-1}-\mu_{j-1}+1 & \\ \lambda_j-\mu_1-j+2\ \ldots\lambda_j-\mu_{j-1} & \quad \lambda_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i-\mu_1-i+2\ \ \ldots\lambda_i-\mu_{j-1}-i+ & j\ \ \lambda_i-i+j\ldots\lambda_i \end{array}\right)$$

Цим матрицям відповідають відповідно верхні F-паравизначники виду $\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})$ і $\mathrm{ddet}^\circ(R_{i1}\begin{pmatrix} j\ldots & i \\ -1\ldots-1 \end{pmatrix})$, $j\le i\le n$. Отже, нам необхідно довести, що верхній F-паравизначник із теореми 4.12 задовольняє рівність

$$\mathrm{ddet}^\circ(a_{ij})_{1\le j\le i\le n}=\mathrm{ddet}^\circ(R_{j-1,1})+\sum_{i=j}^{n}\mathrm{ddet}^\circ(R_{i1}\begin{pmatrix} j\ \ldots & i \\ -1\ldots-1 \end{pmatrix}). \qquad (4.68)$$

Перш за все відмітимо, що F-паравизначник, який лежить в лівій частині рівності (4.68), матрицю якого позначимо через M, є F-паравизначником змішаного типу, тобто його частина з j-того по n-тий стовпець має вигляд верхнього F-

паравизначника $\Diamond 1^{\circ}_{n-j+1}$. Для кращої очності відділимо його вертикальною лінією. Таким чином, згідно із твердженням 3.19 маємо рівність (3.47) з якої вчаслідок того, що $\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n,s+1}) - \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n^{s+1}/_{s}}) = 1$, $s = j,\ldots,n-1$ випливає рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(M) = \mathrm{ddet}^{\circ} M\begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{s-1,1}), \qquad (4.69)$$

аналогічна до рівності (3.53). Рівності (4.69) для $\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{s-1,1})$ при $s = j+1,\ldots,n$ мають відповідно вигляд:

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j1}) = \mathrm{ddet}^{\circ} R_{j1}\begin{pmatrix} j \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1}),$$

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j+1,1}) = \mathrm{ddet}^{\circ} R_{j+1,1}\begin{pmatrix} j+1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j,1}),$$

....

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n1}) = \mathrm{ddet}^{\circ} R_{n1}\begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n-1,1}).$$

Додаючи їх, отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ}(A) = \sum_{i=j}^{n} \mathrm{ddet}^{\circ} R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j-1,1}). \qquad (4.70)$$

Але, позаяк

$$\mathrm{ddet}^{\circ} R_{n,s+1}\begin{pmatrix} s+1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mathrm{ddet}^{\circ}(R_{n,s+1/_{s}}) = 0$$

при $s = j,\ldots,n$, то внаслідок рівності (3.47) отримаємо рівність

$$\mathrm{ddet}^{\circ} R_{i1}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{ddet}^{\circ} R_{i1}\begin{pmatrix} j \ldots i \\ -1 \ldots -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, рівність (4.70) дістане вигляд рівності (4.68).

Позаяк відкидання клітинок нижнього ряду похилої діаграми змінює тільки елементи матриці, які лежать по праву сторону від вертикальної лінії, яка

розділює матрицю змішаного вигляду, причому елементи рогу R_{nj}, внаслідок нерівностей $\lambda_i > 0$, $1 \le j \le i \le n$ і рівності (4.66), додатні, то від'ємні елементи в матриці (4.65) можна замінити нулями.

Зауваження: 1. При симетрії діаграми відносно бісектриси першого квадранта, тобто при переході до спряженої діаграми, число найкоротших шляхів не змінюється. Тому замість діаграми, зображеної на рис. 4.1 можна розглядати діаграму, яка складається із k клітинок в одному стовпці.
При цьому маємо $\lambda_1 = k$; $\mu_1 = 0$, і відповідний їй F-паравизначник буде мати вигляд $\langle k+1 \rangle_1^{\circ}$. Отже, порядок F-паравизначника типу $\Diamond 1$ іноді можна зменшити, переходячи до спряженої діаграми.

2. При $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$ матриця змішаного типу переходить в матрицю типу $\Diamond 1^{\circ}_{n}$, а похила діаграма переходить в діаграму Ферре, (рис. 4.3).

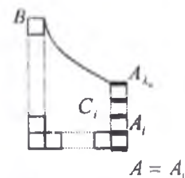


Рис. 4.3.

3. При допомозі діаграм Ферре (рис.4.3) можна отримати нові цікаві рекурсії для верхніх F-паравизначників типу $\Diamond 1^{\circ}_{n}$, а при допомозі останніх, – нові комбінаторні тотожності. Наприклад, очевидно, що число всіх найкоротших шляхів на діаграмі Ферре між точками A і B, дорівнює сумі всіх найкоротших шляхів, які проходять через виділені на рис. 4.3 відрізки A_iC_i , $i = 0,\ldots,\lambda_n$. Отже, виконується рекурсія

$$L\begin{pmatrix}\lambda_1\ldots\lambda_n\\ 0\ldots 0\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{\lambda_n}L\begin{pmatrix}\lambda_1-i\ldots\lambda_{n-1}-i\\ 0\ \ldots\ 0\end{pmatrix},$$

яка в термінах верхнього F-паравизначника матиме вигляд

$$\Diamond 1_n^{\circ}=\sum_{i=0}^{\lambda_n}\mathrm{ddet}^{\circ}R_{n-1,1}\begin{pmatrix}1\ldots n-1\\ -i\ldots -i\end{pmatrix}.$$

Нехай, наприклад, діаграма Ферре має вигляд прямокутника, тобто $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=k$, тоді верхній F-паравизначник, який дорівнює числу найкоротших шляхів на цій діаграмі є F-паравизначником типу $\Diamond 1$ і має вигляд

$$\Diamond 1_n^{\circ}=\left\langle\begin{matrix}k+1 & & \\ k & k+1 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ k-n+2 & k-n+3 & \ldots k+1\end{matrix}\right\rangle_n^{\circ}. \qquad (4.71)$$

Застосовуючи до F-паравизначника (4.71) твердження 3.20 і, враховуючи, що $\mathrm{ddet}^{\circ}(R_{j1}\begin{pmatrix}1\ \ldots\ j\\ -k\ldots -k\end{pmatrix})=1$ при $j=0,\ldots,n$, отримаємо рівність

$$\Diamond 1_n^{\circ}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(j+1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!}\overset{(3.45)}{=}\frac{[n+1]^{\overline{k}}}{k!}=\frac{(n+k)!}{n!\ k!}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики.– М.: Наука, 1977.–319 с.
2. Стечкин Б.С. Наборы и их использование в комбинаторных схемах (об одной комбинаторной формализации) // Сб. " Комбин. и асимпт. анализ", Изд-во Крас. ГУ, 1977., с. 44-54.
3. Green C., Kleitman D.I. Proof. Techniques in the theory of finite sets. // In Studies in combinatorics, edited by G.-C. Rota, MAA Studies in Math., 17, Math. Assoc. of Amer., Washington, D.C., 1978, pp. 22-79.
4. Айгнер М. Комбинаторная теория: Пер. с англ.– М.: Мир, 1982. –558 с.
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: Пер.с англ.– М.: Мир, 1990.–440 с.
6. Заторский Р.А. Подсчет m–подмультимножеств через их вторичные спецификации // Комбинаторный анализ. Вып.7 / Под ред. К.А.Рыбникова.-М.: МГУ, 1986, с. 136 – 145.
7. Заторський Р.А. Про число сполучень на мультимножинах // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. – 2000.- Вип.3.– с. 42-47.
8. Заторський Р.А. Про деякі комбінаторні задачі на мультимножинах // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука.– К: НТУУ (КПІ). – 2002. – с. 426.
9. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.– М.: Наука, 1982.–382 с.
10. Goldman J., Rota G.-C.– In: Comb. Th. And its Appl. Collog. Math. Soc. J. Bolyai, 1970, 2, p. 477-509.
11. Erdus P., Guy R.K., Moon J.W. On refining partitions. // J. London Math. Soc., 1975, **9** (2), №4, p. 565-570.
12. Баранов В.И. Одна экстремальная задача о разбиениях. // Матем. Заметки, 1981, **29**, №2, с. 303-307.
13. Стечкин Б.С. Экстремальные свойства разбиений. – добавление к кн. Эндрюс Г. Теория разбиений: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982.– 256 с.
14. Большаков В.И. Об обобщенных взвешенных композициях // Комбинаторный анализ. Вып.4 / Под ред. К.А.Рыбникова.-М.: МГУ, 1976, с. 96–104.
15. Заторський Р.А. Про число стандартних таблиць Юнга похилих діаграм. // Вісник КНУ, Серія: фіз.-мат. науки. –2000.-Вип. 4.-С.24-33.
16. Young A. Quantitative Substitution Analysis I-IX. // Proc. London Math. Soc. – 1901, 33, 97-146; 1902, **34,** 361-397; 1928, **28,** 255-292; 1930, **31,** 253-272; 1934, **37,** 441-495; 1952, **54,** 219-253;
17. Frame J.S., Robinson G. de B., Thrall R.M. The hook graphs of Sn. // Canad. J. Math. 6, 1954, p. 316-324.
18. Robinson G. de B., On the representations of the symmetric group // Amer. J. Math. 60, 1938, p. 745-760.

19. Schensted G., Longest increasing and decreasing sequences // Canad. J. Math. 13, 1961, p. 179-192.
20. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания: Пер. с англ.– М.: Мир, 1969. –472 с.
21. Polya G., Ьber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz // Mathematische Annalen, 84 (1921), s.149-160.
22. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика : Пер. с англ. / Под ред. В.Е.Тараканова.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.–504 с.
23. Риордан Дж. Комбинаторные тождества: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982.– 255 с.
24. Заторський Р.А. Паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. – Львівський національний університет ім. І. Франка. Т.17. 2002. Вип. 1. С.45-54.
25. Заторський Р.А. Паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Доповіді НАН України. – 2002.– N8.– С.44-49.
26. Заторський Р.А. Параперманенти та лінійні рекурентні співвідношення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої сторіччю від початку роботи Д.О. Граве (1863-1939) в Київському університеті, Київ 17-22 червня 2002 р., 138 с.
27. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1969.– 112 с.
28. Эндрюс Г. Теория разбиений: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 256 с.
29. Sylvester J.J. A constructive theory of partitions? Arranged in three acts, an interact and an exodion. // Amer. J. Math. 5, 1882-1884, p. 251-330; 334-336.
30. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.- 224 с., ил.
31. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных т. 1 изд. 2, М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 315 с.
32. Hardy G. H., Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatory analysis // Proc. London Math. Soc, (2), 17, 1918, p. 75-115.
33. Hausdorff F., Grundzuge der Mengenlehre. – Leipzig., 1914. – 216 s.
34. Cantor G., "Math. Ann.", 1883, Bd 21, p. 545-586.
35. Moore E. H., Smith H.L., A general theory of limits // Amer. J. Math. , 1922, v. 44, p. 102-121.
36. Шатуновский С.О., «Записки Новороссийского об-ва естествоиспытателей», 1904, в. 26, с. 21-25.
37. Шатуновский С.О., «Тр. I Всероссийского съезда преподавателей математики», 1913, т.1, с. 276-281.
38. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ / 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.–308 с.
39. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: ИЛ, 1963.
40. Watanabe T., Mohanty S.G. On an inclusion-exclusion formula based on the reflection principle. // Discrete Math. 64 (1987) North-Holland, pp. 281-288.

41. Franzblau D.S., Zeilberger D. A bijective proof of the hook-length formula // J. Algorithms 3, 1982, 317-343.
42. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.-703 с., ил.
43. Трост Э. Простые числа. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959.
44. Rogers L.J., On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions // Proc. London Math. Soc. (2), 4 (1907), p. 72-89.
45. Джоунс У., Трон В., Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер.с англ. –М.: Мир, 1985. – 414 с.
46. Eulero L. Specimen algorithmi singularis // Novi commentarii academiж scientiarum imperialis Petropolitanж 9 (1762), 53-69.
47. Stern M.A. Uber eine zhalentheoretische Funktion // Journal fur die reine und angewandte Mathematik 55 (1858), 193-220.
48. Brocot A. Calcul des rouages par approximation, nouvelle methode // Revue Chronometrique 6 (1860), 186-194.
49. Halphen G.H. Sur des suites de fractions analogues a la suite de Farey // Bulletin de la Societe mathematique de France 5 (1876), 170-175.
50. Заторский Р.А. Про один алгоритм підрахунку числа m-перестановок на довільних мультимножинах // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №2. С. 215-219.
51. Заторский Р.А. Определители треугольных матриц и траектории на диаграммах Ферре. // Матем. заметки. Т.72. Вып. 6. стр. 834-852.
52. Заторський Р.А. Неперервні дроби, k-многочлени і параперманенти // Мат. Методи та фіз.-мех. поля. – 2002.–44, №4.–С.12-21.
53. R. Zatorsky Paradeterminants and formal operations on series // 4[th] International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, 2003., 242.
54. Заторський Р.А. Про многочлени розбиттів і їх паравизначники та параперманенти // Матеріали X Міжнар. наук. конф. ім. академіка М. Кравчука.– К: НТУУ (КПІ). – 2004. – с. 383.