І.П. Васильченко
З.М. Васильченко

ФІНАНСОВА математика

КОНДОР

І.П. Васильченко
З.М.Васильченко

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ
КОНДОР
2012

ББК 22.11я73
Ф 19

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист №1.4/18-Г-150 від 23.01.2007 року)

Автори:

Васильченко Іван Петрович, доктор технічних наук, професор (Київський національний університет імені Тараса Шевченка);

Васильченко Зоя Миколаївна, доктор економічних наук, професор (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Рецензенти:

О.І. Черняк, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Ф.Г. Гаращенко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри моделювання складних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

А.Ю. Дорошенко, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділом Інституту програмних систем НАН України

Васильченко І.П., Васильченко З.М.

Ф 19 Фінансова математика: Навч.посібник.Видання друге: доповнене. – К.: Кондор-Видавництво, 2012.— 250 с.

ISBN 978-966-351-350-356-0

Посібник присвячений вивченню основних елементів фінансової математики та деяких питань методології економіко-математичного моделювання, зокрема моделюванню економічної безпеки банку, математичній економіці запасів та імітаційному моделюванню.

Посібник розрахований на студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, осіб, які навчаються за програмами підготовки бакалаврів, спеціалістів, магістрів.

ББК 22.11я73

ISBN 978-966-351-356-0

ЗМІСТ

Частина I

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Розділ I.

Вартість грошей і час

Вступні відомості. Підготовка і проведення будь-якої фінансової операції вимагає фінансових розрахунків в деяких випадках простих, а іноді – досить складних.

Фінансова математика вивчає методи розв'язування задач, що виникають при плануванні і здійсненні фінансових операцій. До таких задач належать: нарахування відсотків, оцінка кінцевих фінансових результатів операції для її учасників, розробка планів ведення операцій, беззбиткова зміна умов угод, аналіз інвестицій, аналіз кредитних операцій і інші.

Фінансова математика є складовою частиною кількісного фінансового аналізу і фінансового менеджменту.

Теоретичною основою фінансової математики є методи нарахування простих і складних відсотків, схема фінансової ренти або ануїтету, принципи часової вартості грошей і принципи фінансової еквівалентності.

Згідно *з принципом часової вартості грошей* сучасні гроші мають більшу ціну, ніж гроші майбутні, тобто *одна грошова одиниця сьогодні має більшу вартість, ніж одна грошова одиниця завтра.*

Основними причинами знецінення грошей є: інфляція, ризик, схильність до ліквідності.

Фактор часу у фінансових розрахунках враховується за допомогою відсоткових (або процентних) ставок, які дозволяють для кожної теперішньої грошової суми знайти їй еквівалентну величину у майбутньому.

Наведемо основні поняття, які будуть використані у подальшому. Відсоткові гроші (відсотки) – це абсолютна величина прибутку (доходу) від позичання грошей. При цьому форми позичання можуть бути різними: купівля облігацій, продаж у кредит, видача позики. Відсотки вимірюються у грошових одиницях.

Відсоткова ставка (відсотки) це відношення відсоткових грошей, отриманих за певний проміжок часу, до суми боргу. Відсоткова ставка вимірюється у коефіцієнтному вигляді або у відсотках (1%=0,01). У фінансових розрахунках відсоткові ставки подаються у коефіцієнтному вигляді.

Інтервали часу, з якими пов'язують відсоткові ставки, називають *періодами нарахування.* Періодами нарахування можуть бути: рік, півріччя, квартал, місяць, день. У цьому випадку говорять про *дискретні відсотки.*

Якщо нарахування відсотків здійснюється за дуже малі проміжки часу, то говорять про *неперервні відсотки.*

На практиці вдалим наближенням до неперервних відсотків є відсотки з щоденним нарахуванням. Відсоткові гроші можуть сплачуватися кредитору при їх нарахуванні в кожному періоді, або *приєднуватися* до основної суми боргу при закінченні угоди. В останньому випадку говорять про *нарощену суму,* яка дорівнює початковій сумі боргу з відсотками, що на неї нараховані. Процес збільшення суми боргу з приєднанням до неї відсотків називається *капіталізацією* суми боргу.

Враховуючи часову вартість грошей, нарощена сума еквівалентна (при даній відсотковій ставці) початковій сумі боргу.

В залежності від того, яку суму боргу беруть за висхідну при нарахуванні відсотків (за базу нарахування), розрізняють *декурсивні* і *антисипативні* відсотки.

Декурсивні відсотки нараховуються на початкову суму боргу (за базу нарахування береться початковий борг). При нарахуванні *антисипативних відсотків* за базу нарахування враховують суму боргу у майбутньому. Антисипативні відсотки використовують у банківському обліку (обліку векселів).

Приклад 1

Клієнт банку отримав 01.01.04 р. суму 9 000 грн. терміном на 1 рік під 10% річних (10% = 0,1).

При нарахуванні на борг рекурсивних відсотків він поверне 01.01.05 р. до банку $9000 + 9000 \cdot 0{,}1 = 9900$ грн. При нарахуванні на борг антисипативних відсотків він поверне 10 000 грн., тому що $10000 = 9000 + 10000 \cdot 0{,}1$. Отже, в останньому випадку позика дорівнювала 10 000 грн. і відсотки за користування позикою — 1000 грн. були нараховані і одразу забрані банком.

Розрізняють також *прості та складні відсотки.*

Якщо сума, до якої застосовується відсоткова ставка одна і та ж (стала база нарахувань), то нарахування здійснюється за *простими відсотками* і відсоткова ставка називається *простою.* Якщо відсотки за попередній період приєднуються до суми боргу і на отриману суму знову нараховуються відсотки, то говорять про *складні* відсотки. Відсоткова ставка в цьому випадку називається *складною.*

У фінансовому аналізі відсоткова ставка також використовується і як показник *доходності* (прибутковості) проведеної операції.

Тому за допомогою відсоткових ставок можна оцінювати ефективність фінансових операцій.

§1. Нарощення за простими відсотковими ставками

Практика нарахування простих відсотків. Нехай P — сума грошей (капітал), що даються в борг. Власник капіталу (кредитор) отримує відсоткові гроші I як доход.

Нехай i – відсоткова ставка віднесена до якогось періоду (рік, півріччя, квартал, місяць, день).

Нехай n – термін угоди, виражений у періодах, зазвичай за період – це рік. В подальшому вважаємо, що *i – річна відсоткова ставка, n – термін угоди в роках.*

Відсотки за рік Pi, за два роки – $2\,Pi$, ..., за n років – $n\,Pi$. Отже

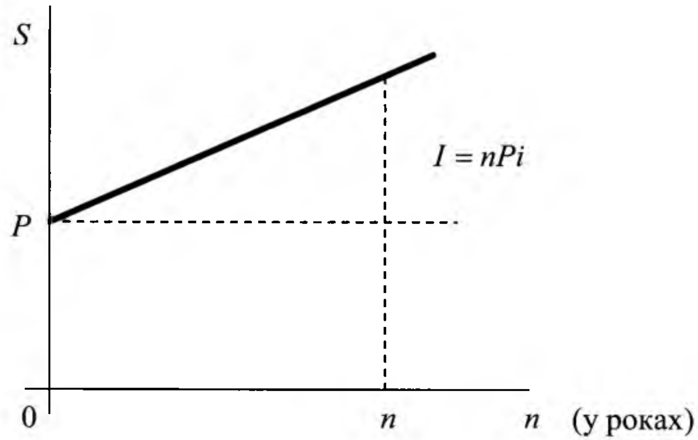
$$I = n\,P\,i. \qquad (1)$$

Тому нарощена сума S (сума боргу на момент закінчення угоди через n років) дорівнює

$$S = P + n\,P\,i = P(1 + n\,i) \qquad (2)$$

Отримали *формулу нарощення за простими відсотками.* Множник ($1+ni$) називають *множником нарощення за простою відсотковою ставкою.* Він показує у скільки разів нарощена сума більше початкової суми боргу.

Графічно залежність (2) дається прямою лінією.



У формулі (2) за базу нарахування береться *початкова сума боргу P.* Відсотки, що нараховані за ставкою i згідно (1), називаються *декурсивними.*

Звичайно прості відсотки використовуються при видачі короткотермінових позик у межах року, тобто $n \leq 1$. В деяких випадках прості відсотки використовують і за межами року (споживчий кредит, форфейтні операції).

Якщо термін угоди n дробове число, то його визначають як

$$n = \frac{t}{K}, \qquad (3)$$

де: t – *кількість днів позики,*

K – взята для розрахунку кількість днів у році.

K – називається *часовою базою року.*

Формула (2) набуває вигляду

$$S = P(1 + \frac{t}{K} i) \qquad (4)$$

Можливі такі варіанти розрахунків в залежності від вибору t і K:

1) K – може приймати значення 360 днів. При цьому вважають, що рік дорівнює 12 місяцям по 30 днів: $360 = 12 \times 30$. У цьому випадку відсотки називають *звичайними, або комерційними.*

2) K – може дорівнювати 365 (або 366) днів і у місяцях враховується точна кількість днів. При підрахунку кількості днів позики t вважають *день видачі і день погашення позики за один день.*

У свою чергу кількість днів позики t теж може бути підрахована точно (за календарем). Тут знадобиться таблиця порядкових номерів днів року (Додаток 1). Для точного підрахунку кількості днів позики потрібно від номера дня закінчення терміну позики відняти номер дня видачі позики.

Кількість днів позики t може підраховуватися наближено, коли t визначається кількістю повних місяців по 30 днів у кожному і точною кількістю днів позики у неповних місяцях.

Розрізняють три методи відсоткових розрахунків, в залежності від часової бази року K і способу підрахунку t:

1) Точна кількість днів у році ($K = 365, 366$) і точна кількість днів позики. Такий метод нарахувань називають *англійським.* Він дає найбільш точний результат.

2) Звичайні відсотки ($K = 360$) і точна кількість днів позики. Цей метод нарахувань називають *французьким.* Він дає більшу суму, ніж попередній.

3) Звичайні відсотки ($K = 360$) і наближена кількість днів позики. Цей метод називають *німецьким.* Його використовують при частковому погашенні позики, коли не потрібно висока точність розрахунків.

Приклад 2

Банк видав 25 лютого позику 30 000 грн. Термін повернення 12 червня. Відсоткова ставка – 30% річних. Рік високосний. Підрахуємо нарощену суму (суму боргу) трьома методами.

За додатком 1 знаходимо:

12.6 = 164

25.2 = 56

Тому точна кількість днів угоди $t = 164 - 56 = 108$ дн.

Наближена кількість днів: $t = 6$ (лютий) + 30 · 3 (березень, квітень, травень) + 12 (червень) = 107 дн.

Маємо:

1) $K = 366$ дн., $t = 108$ дн., $S = 30000\left(1 + \frac{108}{366} \cdot 0{,}3\right) = 32655{,}74$ грн.

2) $K = 360$ дн., $t = 108$ дн., $S = 30000\left(1 + \frac{108}{360} \cdot 0{,}3\right) = 327005$ грн.

3) $K = 360$ дн., $t = 107$ дн., $S = 30000\left(1 + \frac{107}{360} \cdot 0{,}3\right) = 32675$ грн.

Таким чином, отримуємо різні фінансові результати угоди в залежності від вибору часової бази року і методу розрахунку *t*.

Зрозуміло, що можна так підібрати відсоткові ставки при використанні звичайних $i_{зв}$ і точних $i_{точ}$ відсотків, що ***відсотки, нараховані за ними, будуть однаковими***. Такі відсоткові ставки називають ***еквівалентними***.

Маємо:

$$i_{360} = \frac{360}{365} i_{365} = 0{,}986301 \times i_{365},$$

$$i_{365} = \frac{365}{360} i_{360} = 1{,}013889 \times i_{360},$$

$$i_{360} = \frac{360}{366} i_{366} = 0{,}983606 \times i_{366},$$

$$i_{366} = \frac{366}{360} i_{360} = 1{,}016667 \times i_{360}.$$

Контракт, укладений в одних ставках, можна перевести в інші ставки, перейшовши до еквівалентних.

Приклад 3

Ставка 10% річних при нарахуванні звичайних відсотків за базою $K = 360$ дає ті ж результати, що і ставка 10,139% за базою $K = 365$ при нарахуванні точних відсотків.

Приклад 4

Банк надав клієнту позику 500 т. грн. терміном 3 роки за ставкою 40% простих річних. Визначити відсотки і нарощену суму.

Розв'язок

За формулами (1),(2) знаходимо при $n = 3$ р., $P = 500$ т. грн., $i = 0{,}4$:

$$I = 3 \cdot 500 \cdot 0{,}4 = 600 \text{ т.грн.}$$

$$S = 500 + 600 = 1100 \text{ т.грн.}$$

У фінансових угодах відсоткові ставки можуть встановлюватись окремо для різних періодів.

Нехай

i_t – ставка простих відсотків в періоді t;

n_t – тривалість нарахування за ставкою i_t;

m – кількість періодів нарахування.

Тоді нарощену суму S знаходимо за формулою:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t\right) \qquad (6)$$

Приклад 5

Банк пропонує такі умови по терміновим депозитам: перший квартал – 40% річних, кожний наступний квартал ставка зростає на 5%. Відсотки прості. Знайти нарощену за рік суму, якщо початковий вклад 1000 грн.

Розв'язок

$$S = 1000(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}45 + 0{,}25 \cdot 0{,}50 + 0{,}25 \cdot 0{,}55) = 1475 \text{ грн.}$$

По операціях з короткотерміновими депозитами часто використовують повторне інвестування коштів, тобто відбувається багаторазове нарощення відсоткового доходу, яке називається *реінвестуванням*, або *капіталізацією*. У цьому випадку нарощена сума знаходиться за формулою:

$$S = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)\ldots(1 + n_m i_m) = P\prod_{t=1}^{m}(1 + n_t i_t), \quad (7)$$

де: $n_1,\ldots,n_m$ – тривалість періодів нарощення;

$i_1,\ldots,i_m$ – відсоткові ставки.

Якщо періоди нарощення і відсоткові ставки однакові, то:

$$S = P(1+ni)^m \quad (8)$$

Приклад 6

На суму 500 грн. протягом місяця нараховуються прості відсотки за ставкою 20% річних. Операція повторюється протягом першого кварталу. Знайти нарощену суму, К = 365.

Розв'язок

За (7) знаходимо

$$S = 500\left(1 + \frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right)\left(1 + \frac{28}{365}\cdot 0{,}2\right)\left(1 + \frac{31}{365}\cdot 0{,}2\right) = 525{,}06 \text{ грн.}$$

§2. Дисконтування за простими ставками

Дисконтування – це визначення вартості грошової суми на певний момент часу за умови, що в майбутньому вона дорівнює S.

Дисконтування ще називається *зведенням* S до теперішнього часу.

Нехай P – *дисконтована вартість* суми S, або *зведена* величина S, або *теперішня* величина S.

Різницю

$$S - P = D \quad (9)$$

називають *дисконтом* величини S.

Оскільки гроші втрачають вартість з часом, то дисконт завжди додатній.

Крім того, оскільки час у фінансових угодах враховується відсотками, то дисконт дорівнює відсоткам нарахованим на суму P.

$$D = I = S - P \quad (10)$$

Дисконтування або зведення є задачею оберненою до визначення нарощеної суми.

Застосовують два види дисконтування: *математичне дисконтування і банківський облік.*

Математичне дисконтування – це відшукання теперішньої суми боргу P за відомою кінцевою сумою S.

Нехай n – термін позики, i – проста відсоткова ставка. З рівності $S = P(1 + n\,i)$ знаходимо

$$P = \frac{S}{1 + n\,i}; \qquad D = n\,P\,i \quad (11)$$

Отже P – *теперішня величина* суми S.

Множник $\dfrac{1}{1+ni}$ зветься *дисконтним множником* простих відсотків при математичному дисконтуванні. Він показує, яку частину S складає теперішня величина P.

Приклад 7

Банк в першому кварталі випустив депозитний сертифікат з терміном погашення в кінці першого кварталу. Сертифікат викуповується за 50 грн. Оголошена дохідність – 30% простих річних. K=365. Знайти ціну продажу сертифікату і суму дисконта.

Розв'язок

$$S = 50 \text{ грн.}, \quad i = 0{,}3, \quad K = 365,$$

$$t = 31 + 28 + 31 = 90 \text{ дн.}$$

За (11) знаходимо:

$$P = \frac{50}{1 + \frac{90}{365} \cdot 0,3} = 46,56 \text{ грн.}, \qquad D = 50 - 46,56 = 3,44 \text{ грн.}$$

Банківський облік (або облік векселів) – це відшукання теперішньої суми боргу P за відомою величиною S у майбутньому, терміном позики n і *обліковою ставкою* d.

При банківському обліку *відсотки за користування позикою нараховуються на суму* S, яку треба сплатити у майбутньому. Отже, за базу нарахування береться сума боргу у майбутньому, а відповідні відсотки є *антисипативними*.

Нехай

d – *проста облікова ставка;*

P, S – теперішня і майбутня величини боргу,

n – термін угоди в роках.

Тоді

$$d = \frac{S - P}{nS} \tag{12}$$

Зокрема, при $n = 1$ маємо вираз облікової ставки через суми боргу на початку і в кінці року:

$$d = \frac{S - P}{S} \tag{13}$$

Для порівняння наведемо вираз простої відсоткової ставки в тих же умовах:

$$i = \frac{S - P}{P} \tag{14}$$

З формул (13), (14) видно, що i та d відрізняються вибором бази порівняння.

Облікові ставки вимірюються у відсотках і у коефіцієнтах.

За формулою (12) знаходимо

$$P = S - Snd = S(1 - nd) \tag{15}$$

Вираз $(1 - nd)$ називається *дисконтним множником* за простою обліковою ставкою d.

За формулою (12) знаходимо дисконт

$$D = S - P = nSd \tag{16}$$

Звичайно банківський облік за простими ставками використовується в межах року. В цьому випадку n – дробове і покладають

$$n = \frac{t}{K}, \tag{17}$$

де: t – *точна* кількість днів угоди,

K – база року, яка *приймається рівною 360 днів.*

Приклад 8

Кредит 10 000 грн. виданий на рік під облікову ставку $d = 15\%$. Знайти суму отриманих грошей і дисконт узятий банком.

Розв'язок

$$P = 10000\,(1 - 0,15) = 8500 \text{ грн.}$$

$$D = 10000 - 8500 = 1500 \text{ грн.}$$

Приклад 9

Вексель номінальною вартістю 1500 грн. облікований у банку за 30 днів до його терміну погашення по обліковій ставці 20%. Знайти суму, отриману векселетримачем, і дисконт.

Розв'язок

Маємо $S = 1500$ грн., $d = 0,2$, $t = 30$ дн., $K = 360$ дн.

$$P = 1500\left(1 - \frac{30}{360} \cdot 0,2\right) = 1475 \text{ грн.}, \qquad D = 1500 - 1475 = 25 \text{ грн.}$$

При настанні терміну векселя банк отримає по ньому 1500 грн. і, отже, *реалізує* дисконт.

За простими обліковими ставками може вестись і нарощення. З (15) знаходимо

$$S = \frac{P}{1-nd} \tag{18}$$

Вираз $\frac{1}{1-nd}$ називають ***множником нарощення за простою обліковою ставкою*** d.

Нарощення за обліковою ставкою йде швидше, ніж за простою відсотковою ставкою.

§ 3. Визначення інших параметрів фінансових угод із простими ставками

Іноді треба вирішувати обернені задачі знаходження i, n, d за відомими S та P.

За формулами (15), (4), (2) знаходимо:

$$n = \frac{\frac{S}{P}-1}{i}, \qquad n = \frac{1-\frac{P}{S}}{d}, \tag{19}$$

якщо n вимірюється у роках.

Якщо термін угоди шукається у днях, то:

$$t = \frac{\frac{S}{P}-1}{i}\cdot K, \qquad t = \frac{1-\frac{P}{S}}{d}\cdot K \tag{20}$$

$(K = 360, 365, 366) \qquad (K = 360)$

Можливі значення K задані під формулами.

Аналогічно з (2), (4), (15) знаходимо ставки:

$$i = \frac{\frac{S}{P}-1}{n}, \qquad d = \frac{1-\frac{P}{S}}{n} \tag{21}$$

або

$$i = \frac{\frac{S}{P}-1}{t}\cdot K, \qquad d = \frac{1-\frac{P}{S}}{t}\cdot K \tag{22}$$

(K = 360, 365, 366) (K = 360)

Формули (21), (22) використовують при обчисленні *доходності фінансових операцій.*

Приклад 10

Початкова сума боргу 10 000 грн. Через 90 днів передбачається погасити 11 000 грн. Визначити дохідність операції для кредитора у простій відсотковій і простій обліковій ставці. Рік не високосний.

Розв'язок

Згідно (22) знаходимо:

$$i = \frac{11000-10000}{90\cdot 10000}\cdot 365 = 0{,}40555 = 40{,}56\%,$$

$$d = \frac{11000-10000}{90\cdot 11000}\cdot 360 = 0{,}3636 = 36{,}36\%.$$

Приклад 11

Яка тривалість позики у днях, щоб борг 1000 грн. зріс до 1100 грн. при нарахуванні 35% простих річних відсотків? Рік не високосний.

Розв'язок

Згідно (20) знаходимо:

$$t = \frac{\frac{1100}{1000}-1}{0{,}35}\cdot 365 = 104{,}3 \cong 104 \text{ дні}.$$

2-12-173

Зауважимо, що у фінансовому аналізі дохідність операцій завжди вимірюється у *річній відсотковій ставці* (простій або складній). Якщо дохідність знайдена у обліковій ставці, то результат треба перерахувати у річну відсоткову ставку.

§4. Нарахування складних річних відсотків

Складні відсотки використовуються тоді, коли відсотки одразу після нарахування не сплачуються, а приєднуються до суми боргу.

База для нарахування складних відсотків збільшується з кожним кроком у часі.

Нарощення за складними відсотками є послідовне реінвестування коштів, які вкладені на один період під простий відсоток.

Капіталізація відсотків – це приєднання відсотків до суми, яка є базою для нарахування в наступному періоді. При застосуванні складних відсотків відбувається їх капіталізація.

В практичних питаннях застосовують *дискретні* складні відсотки. У теоретичних питаннях фінансового аналізу мають місце і *неперервні* відсотки.

Формула нарощення за складними відсотками має вигляд:

$$S = P(1 + i)^n, \qquad (23)$$

де: n – термін угоди у *роках*;
P – початковий борг;
S – кінцева сума боргу;
i – *річна* ставка складних відсотків.

Вираз $(1+i)^n$ зветься *множником нарощення* за складними відсотками. Для цілих $1 \le n \le 100$ і певних значень i він табулюється. Для інших значень (i,n) його треба обчислювати безпосередньо.

Якщо використовуються змінні з часом ставки, то нарощення відбувається за формулою:

$$S = P(1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \ldots (1+i_m)^{n_m}, \qquad (24)$$

яку корисно порівняти з формулою (6) нарощення за змінною простою ставкою.

Приклад 12

Відсоткова ставка по позичці дорівнює 30% складних річних. В яку суму обернеться борг рівний 10 000 грн. через 3 роки?

Розв'язок

За формулою (23) знаходимо

$$S = 10000\,(1+0{,}3)^3 = 10000 \cdot 2{,}197 = 21970 \text{ грн.}$$

Приклад 13

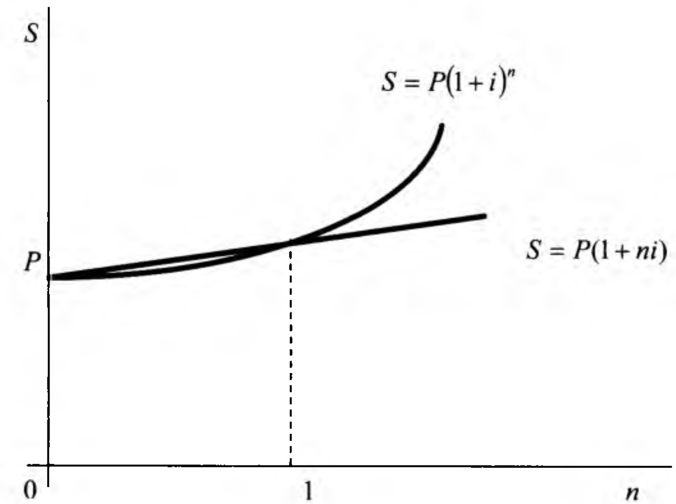
Складний відсоток по позичці дорівнює 46% плюс маржа 4% в перші два роки і 5% в наступний рік. Знайти множник нарощення за 3 роки.

Розв'язок

За (24) знаходимо

$$(1+0{,}46+0{,}04)^2(1+0{,}46+0{,}05) = 3{,}3975\,.$$

Зобразимо графічно швидкість зростання за простими і складними відсотками. Нехай ставка i однакова:



Отже, при $0 < n < 1$, $(1+i)^n < 1+ni$;

при $n > 1$, $(1+i)^n > 1+ni$.

Тобто, в межах року швидше зростають прості відсотки, за межами року – швидше зростають складні відсотки.

Для порівняння темпів зростання знайдемо кількість *років збільшення капіталу P у N разів* при простих і складних відсотках. Із співвідношень

$PN = P(1+i)^n$ та $PN = P(1+ni)$ знаходимо:

$$n=\frac{\ln N}{\ln(1+i)},\qquad n=\frac{N-1}{i}, \qquad (25)$$

де: ln – натуральний логарифм.

В частинному випадку при $N=2$ знаходимо *кількість років подвоєння капіталу:*

$$n=\frac{\ln 2}{\ln(1+i)}\approx\frac{0{,}7}{i},\qquad n=\frac{1}{i} \qquad (26)$$

відповідно для складних і простих відсотків.

Приклад 14

Визначити кількість років необхідних для збільшення капіталу у 8 разів для складної і простої ставки $i=40\%$.

Розв'язок

За формулою (25) маємо:

1) складна ставка $i=40\%$:

$$n=\frac{\ln 8}{\ln 1{,}4}=6{,}18 \text{ р.};$$

2) проста ставка $i=40\%$:

$$n=\frac{7}{0{,}4}=17{,}5 \text{ р.}$$

При дробовому n складні відсотки підраховуються або безпосередньо за формулою (23), або з застосуванням *мішаного методу.* Згідно цього методу за цілу кількість років нараховуються складні відсотки, а за дробову частину – прості.

$$S=P(1+i)^a\cdot(1+bi), \qquad (27)$$

де: $n=a+b$;

a – ціла частина,

b – дробова частина n.

За формулою (27) множник нарощення *більший* ніж за (23).

Приклад 15

Кредит у розмірі 10 000 грн. виданий на два роки і 73 дні під 50%. Метод нарахування – мішаний. $K=365$ днів. Знайти суму боргу на кінець терміну угоди.

Розв'язок

$$S = 10000(1+0{,}5)^2\cdot\left(1+\frac{73}{365}\cdot 0{,}5\right)=24750 \text{ грн.}$$

У фінансових угодах часто передбачається *нарахування відсотків частіше* ніж раз на рік.

У цьому випадку для підрахунку нарощеної суми можна використовувати формулу (23), де n – *кількість періодів* нарахування, i – відсоткова ставка віднесена до періоду.

Але звичайно вказують не піврічну, квартальну, місячну ставки, а річну, яка зветься *номінальною.*

Номінальна ставка j – це річна ставка відсотків, за якою відсотки нараховуються m разів на рік.

Нарощення за номінальною ставкою j здійснюється за формулою:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}, \qquad (28)$$

де: n – тривалість угоди в роках. Зрозуміло, що
$N = mn$ – це кількість періодів нарахувань.

Річний множник нарощення за номінальною ставкою j дорівнює:

$$(1+\frac{j}{m})^{m} \qquad (29)$$

При збільшенні m *зростає* темп нарахувань, тому що капіталізація відбувається частіше.

Розрахунки за формулою (28) можна проводити точним і мішаним методом згідно (27).

У зв'язку з використанням номінальної ставки, вводять поняття *ефективної відсоткової ставки*, що відповідає даній номінальній.

Ефективна ставка відсотків – це відносний дохід, отриманий за рік, тобто – це дохідність операції у річній ставці відсотків.

Нехай j – номінальна, а i_e – відповідна ефективна ставки. Тоді прирівнюючи множники нарощення маємо:

$$1+i_e = (1+\frac{j}{m})^{m}$$

Звідси:

$$i_e = (1+\frac{j}{m})^{m} - 1, \qquad j = m[(1+i_e)^{\frac{1}{m}} - 1]. \qquad (30)$$

З (30) випливає, що $i_e > j$.

Заміна в угоді номінальної ставки на ефективну не змінює відносин сторін, тому що ці ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.

Приклад 16

$j = 20\%$. Щоквартальне нарахування відсотків на протязі 5 років. Знайти множник нарощення.

Розв'язок

Маємо $m = 4$. Отже:

$$\left(1+\frac{0,2}{4}\right)^{4\cdot 5} = 1,05^{20} = 2,6532964.$$

Приклад 17

Банк нараховує відсотки за номінальною ставкою 30% річних. Знайти ефективну річну ставку за умов щомісячної і щоденної капіталізації.

Розв'язок

За формулою (30) знаходимо:

1) щомісячна капіталізація ($m = 12$):

$$i = \left(1+\frac{0,3}{12}\right)^{12} - 1 = 0,3449 = 34,49\%,$$

2) щоденна капіталізація ($m = 365$):

$$i = \left(1+\frac{0,3}{365}\right)^{365} - 1 = 0,3497 = 34,97\%.$$

Задача про неперервне нарахування процентів. На яку величину зросте капітал K_0, через n років при $p\%$ річних, якщо нарахування процентів здійснюють декурсивним методом – процентний платіж нараховується і додається до капіталу в кінці кожного розрахункового періоду. Декурсивне нарахування процента найбільш поширене в світовій практиці.

Очевидно, що при $p\%$ річних розмір вкладу щорічно буде збільшуватися в $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ раз, тобто в кінці n-го року маємо

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}$$

де: $\frac{p}{100}$ — процентна ставка, виражена в десяткових дробах.

$\left(1+\frac{p}{100}\right)$ — складний декурсивний коефіцієнт.

Капітал K_0 при річному нарахуванні складних процентів згідно ставки $p\%$ через n років зросте до величини K_n.

Якщо нараховують проценти не один раз на рік, а m раз, при тому ж щорічному прирості $p\%$, процент нарахування за $\frac{1}{m}$ частину року складе $\frac{p}{m}\%$, а розмір вкладу за n років при mn нарахуваннях складе

$$K_{mn} = K_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}$$

Покладемо, що проценти нараховуються кожні півроку $(m = 2)$, кожний квартал $(m=4)$, щомісячно $(m=12)$, кожний день $(m = 365)$, кожний час $(m=8760)$ і т.д. неперервно $(m \to \infty)$.

Якщо число розрахункових періодів прямує до нескінченності, то можна стверджувати, що період розрахунку прямує до нуля.

Знайдемо границю величини K_{mn} при $m \to \infty$ (n – число років, m – число розрахункових періодів в році).

$$K_{mn} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{100\cdot m}\right)^{mn} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{m}\right]^{n} =$$

$$= K_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right]^{\frac{p}{100}\cdot n} = K_0 e^{\frac{pn}{100}}$$

Отже, ми вивели формулу для кінцевої величини капіталу при неперервному нарахуванні складних процентів. Вона є неперервною функцією і дозволяє обчислить величину капіталу в будь-який період часу.

Приведемо таблицю розмірів вкладів K_{mn} (якщо $K_0 = 1$ гр. од., $p = 5\%$, $n = 20$ років) згідно формули складних процентів і формули неперервного нарахування процентів

	формула складних процентів (1)					формула неперервного нарахування процентів
	$m=1$	$m=2$	$m=4$	$m=12$	$m=365$	
розмір вкладу, гр. од.	2,6335	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Різниця між щорічним нарахуванням ($m=1$) і неперервним нарахуванням незначна (біля 2,5%).

Зауваження. В практичних фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування процентів застосовується рідко. Воно є досить ефективним при аналізі складних фінансових проблем, наприклад, при обґрунтуванні і виборі інвестиційних рішень.

§5. Дисконтування і облік за складними ставками

Математичне дисконтування за складною ставкою, тобто знаходження P за S, відбувається за формулами, які випливають з (23):

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} \tag{31}$$

Вираз

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} \tag{32}$$

називається *дисконтним множником складних відсотків*. Він табулюється при цілих n для певних значень i, а в інших випадках обчислюється безпосередньо.

Приклад 18

Визначити теперішню величину 5 000 грн., які будуть сплачені через два роки при використанні ставки 40% складних річних.

Розв'язок

$$P = \frac{5000}{(1+0{,}4)^2} = 2551 \text{ грн.}$$

Якщо *відсотки нараховуються m разів на рік за номінальною ставкою* j, то з (28) отримуємо

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}, \qquad (33)$$

де: n – кількість років. Отже, в цьому разі дисконтний множник дорівнює:

$$v^{mn} = \frac{1}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}. \qquad (34)$$

За формулами (31), (33) знаходимо *дисконт суми S:*

$$D = S - Sv^n = S[1 - v^n] \qquad (35)$$

або

$$D = S[1 - v^{mn}] \qquad (36)$$

Співвідношення дисконтних множників при простій і складній ставці таке (при $i_n = i_c = i$):

$$\frac{1}{1+ni} \langle \frac{1}{(1+i)^n},\ 0 \langle n \langle 1,$$

$$\frac{1}{1+ni} \rangle \frac{1}{(1+i)^n},\ n \rangle 1. \qquad (37)$$

Приклад 19

Визначити теперішню величину суми 5 000 грн., яка буде сплачена через 2 роки. Складна ставка відсотків – 40% річних. Дисконтування щоквартальне.

Розв'язок

$$P = \frac{5000}{(1+\frac{0{,}4}{4})^{4\times 2}} = \frac{5000}{2{,}1435888} = 2332{,}54 \text{ грн.}$$

Порівняти з прикладом 18.

Банківський облік за складною обліковою ставкою проводять за формулою:

$$P = S(1 - d_c)^n, \qquad (38)$$

де: n – тривалість угоди в роках,
d_c – складна облікова ставка,
S – майбутня сума боргу,
P – теперішня сума боргу,
$(1-d_c)^n$ – *дисконтний множник*.

При цьому дисконт, який отримує банк, дорівнює:

$$D = S - S(1-d_c)^n = S[1-(1-d_c)^n] \qquad (39)$$

Нехай *дисконтування відбувається m разів на рік*. Тоді за n років маємо

$$P = S(1 - \frac{f}{m})^{mn}, \qquad (40)$$

де: f – *номінальна облікова ставка*. Дисконтування за номінальною ставкою вповільнює процес зменшення S і зменшує суму дисконту.

Ефективна облікова ставка d_e – це така річна ставка, застосування якої еквівалентне застосуванню номінальної f. Отже,

$$1-d_e=(1-\frac{f}{m})^m$$

та

$$d_e=1-(1-\frac{f}{m})^m,\quad f=m[1-(1-d_e)^{\frac{1}{m}}] \qquad (41)$$

За формулою (41) бачимо, що завжди $d_e<f$.
За *складною обліковою ставкою* може проводитись і *нарощення*:

$$S=\frac{P}{(1-d_c)^n}. \qquad (42)$$

Потреба в цьому виникає при заповненні векселя при відомій сумі *P*, отриманій векселетримачем. Якщо використовується номінальна ставка, то

$$S=\frac{P}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}. \qquad (43)$$

Приклад 20

Знайти суму дисконту при продажу фінансового інструменту на суму 10 000 грн., якщо термін погашення 1,5 року. Продавець застосував складну річну облікову ставку 36%.

Розв'язок

$$P=10000(1-0{,}36)^{1,5}=5120 \text{ грн.}$$

$$D=10000-5120=4880 \text{ грн.}$$

Приклад 21

В умовах прикладу 20 дисконтування відбувається два рази на рік.

Розв'язок

$$P=10000(1-\frac{0{,}36}{2})^{2\cdot1,5}=5510 \text{ грн.}$$

$$D=10000-5510=4490 \text{ грн.}$$

Приклад 22

В умовах прикладу 21 знайти ефективну облікову ставку.

Розв'язок

$$d_e=1-\left(1-\frac{0{,}36}{2}\right)^2=0{,}3276=32{,}76\%.$$

Приклад 23

Знайти нарощену суму боргу, якщо початкова сума 10 000 грн., термін погашення два роки. Складна річна облікова ставка 25%.

Розв'язок

$$S=\frac{10000}{(1-0{,}25)^2}=17780 \text{ грн.}$$

§6. Визначення інших параметрів угод із складними ставками

При розробці контрактів необхідно вміти розв'язувати обернені задачі і визначати термін позики, кількість періодів нарощення, ставки відсотків, облікові ставки.

Розв'язуючи співвідношення (40), (28), (23), (38) відносно n знаходимо:

$$n=\frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i)};$$

$$n = \frac{\ln \frac{S}{P}}{m \ln (1 + \frac{j}{m})}; \qquad (44)$$

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{\ln (1 - d_c)};$$

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{m \ln (1 - \frac{f}{m})}.$$

Приклад 24

За який термін (у роках) сума 20 000 грн. зросте до 30 000 грн. за умови, що на неї нараховуються відсотки за ставкою 20% річних складних раз на рік і щоквартально.

Розв'язок

1) $$n = \frac{\ln \frac{30000}{20000}}{\ln (1 + 0{,}2)} = 2{,}22\ р. = 2\ р. + 80\ дн.$$

2) $$n = \frac{\ln \frac{30000}{20000}}{4 \ln (1 + \frac{0{,}2}{4})} - 2{,}07\ р. = 2\ р. + 25\ дн.$$

З тих же співвідношень (28), (38), (23), (40) отримуємо

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1, \qquad j = \left[\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right] m, \qquad (45)$$

$$d_c = 1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad f = \left[1 - \left(\frac{P}{S}\right)^{\frac{1}{mn}}\right] m.$$

Формули (45) використовуються при підрахунках доходності проведених операцій. Причому *показником дохідності є річна складна ставка відсотків*. Якщо дохідність підрахована в облікових ставках, то показник треба перевести у складну річну ставку відсотків.

Приклад 25

Сума сертифіката 1 000 грн. При 3- річному терміні зберігання виплачується 1 500 грн., при 5- річному – 2 500 грн. Визначити дохідність у вигляді складної річної ставки відсотків для кредитора вкладання коштів у сертифікат.

Розв'язок

1) $$i = \left(\frac{1500}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}14471 = 14{,}47\,\%$$

2) $$i = \left(\frac{2500}{1000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}20112 = 20{,}11\%$$

Приклад 26

Вексель виписаний на два роки. При його обліку власник бажає отримати 80% суми векселя. Якою повинна бути складна облікова ставка?

Розв'язок

Маємо $\frac{P}{S} = 0{,}8$, $n = 2$. За формулою (45) знаходимо:

$$d_c = 1-(0{,}8)^{\frac{1}{2}} = 0{,}10557 = 10{,}56\% \cdot$$

§7. Еквівалентність відсоткових ставок. Зміна умов контрактів

У фінансових розрахунках використовуються різні відсоткові ставки. Якщо ці ставки у конкретних умовах угоди призводять до одного і того ж фінансового результату, то вони називаються *еквівалентними.*

Для учасників операції не має значення які ставки будуть використані в угоді, якщо ці ставки еквівалентні.

Виведемо кілька співвідношень еквівалентності простих, простих і складних, складних ставок.

Оскільки початкові і кінцеві результати угоди однакові при застосуванні різних ставок, то *повинні бути рівними множники нарощення або множники дисконтування.*

Еквівалентність простих ставок відсотків і облікової. З рівності множників нарощення

$$1+ni_n = \frac{1}{1-nd},$$

де: i_n – проста відсоткова,
d – проста облікова ставки,

Отримуємо (n – у роках):

$$i = \frac{d}{1-nd},$$

$$d = \frac{i}{1+ni}. \qquad (46)$$

Бачимо, що еквівалентність залежить від терміну ***n***.

Якщо позика вимірюється у днях, то в залежності від бази року K маємо співвідношення між еквівалентними ставками:

$$K = 360: \qquad i = \frac{360\,d}{360-td},$$

$$d = \frac{360\,i}{360+ti}. \qquad (47)$$

$$K = 365\,(366): \qquad i = \frac{365\,d}{360-td},$$

$$d = \frac{360\,i}{365+ti}. \qquad (48)$$

Якщо K=366, то замінюємо у (48) 365 на 366.

Приклад 27

Знайти значення відсоткової ставки еквівалентної простій обліковій 25% на рік.

Розв'язок

$$n = 1, \qquad d = 0{,}25.$$

За формулою (46) знаходимо:

$$i = \frac{0{,}25}{1-0{,}25} = 0{,}33 = 33\%.$$

Приклад 28

Яка дохідність векселя у ставці простих відсотків (K=365) обліку векселя за обліковою ставкою 15%. Термін сплати за векселем – 250 днів.

3-12-173

Розв'язок

За формулою (48) знаходимо:

$$i = \frac{365 \cdot 0{,}15}{360 - 250 \cdot 0{,}15} = 0{,}1698 = 16{,}98\%$$

Приклад 29

Операція обліку повинна принести 35% доходу на рік. Термін позики 60 днів, $K = 365$, прості відсотки. Знайти облікову ставку.

Розв'язок

За формулою (48) знаходимо:

$$d = \frac{360 \cdot 0{,}35}{365 + 60 \cdot 0{,}35} = 0{,}3264 = 32{,}64\%.$$

Еквівалентність простої і складної ставок. З рівності множників нарощення

$$1 + i_n \cdot n = (1 + i_c)^n$$

знаходимо співвідношення між простою i_n і їй еквівалентною складною i_c ставкою:

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n},$$

$$i_c = (1 + i_n \cdot n)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{49}$$

Приклад 30

Позика видана під 40% складних річних. Знайти рівень еквівалентної простої ставки при терміні 2 роки. K=365. Те ж саме при терміні 6 місяців.

Розв'язок

Знаходимо за формулою (49):

1) $i_n = \dfrac{(1 + 0{,}4)^2 - 1}{2} = 0{,}48 = 48\%,$

2) $i_n = \dfrac{(1 + 0{,}4)^{\frac{182}{365}} - 1}{182} \cdot 365 = 0{,}3663 = 36{,}63\%.$

Еквівалентність простої i_n і номінальної j ставок. Випишемо лише співвідношення еквівалентності:

$$i_n = \frac{(1 + \frac{j}{m})^{mn} - 1}{n},$$

$$j = m\left[(1 + ni_n)^{\frac{1}{mn}} - 1\right]. \tag{50}$$

Еквівалентність простої облікової d і складної i ставки. З рівності множників нарощення

$$\frac{1}{1 - nd} = (1 + i)^n \tag{*}$$

Знаходимо (n у роках):

$$i = (1 - nd)^{-\frac{1}{n}} - 1;$$

$$d = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{n}. \tag{51}$$

Якщо термін угоди у днях, то виходимо з такої рівності замість (*):

$$\frac{1}{1 - \frac{t}{360}d} = (1 + i)^{\frac{t}{365}}. \tag{**}$$

Звідси знаходимо:

$$i = (1 - \frac{t}{360} d)^{-\frac{365}{t}} - 1;$$

$$d = \frac{360}{t}\left[1 - (1+i)^{-\frac{t}{365}}\right]. \qquad (52)$$

Еквівалентність складної облікової d і відсоткової i ставок. З рівності множників нарощення маємо:

$$\frac{1}{(1-d)^n} = (1+i)^n.$$

Звідси:

$$i = \frac{d}{1-d},$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \qquad (53)$$

Бачимо, що еквівалентність не залежить від терміну n.

Еквівалентність складної облікової d і номінальної j ставок

З рівності множників нарощення маємо:

$$\frac{1}{1-d} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m}.$$

Звідси:

$$d = 1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m},$$

$$j = \left[(1-d)^{\frac{-1}{m}} - 1\right]m. \qquad (54)$$

Нагадаємо, що раніше були виведені формули еквівалентних звичайних і точних відсотків, ефективної і номінальної ставок.

Заміна в умовах контракту однієї ставки іншою є *зміною умов контракту*. Зміною умов контракту є, наприклад, *консолідація платежів, дострокове погашення позики, пролонгація позики і інші.*

При зміні умов контрактів використовується *принцип фінансової еквівалентності.*

Цей принцип передбачає *незмінність фінансових відносин сторін до і після зміни умов.*

При цьому *еквівалентними вважаються платежі, які стають рівними при зведенні за заданою відсотковою ставкою до одного моменту часу.*

Зведення до одного моменту часу здійснюється дисконтуванням або нарощенням.

У загальному випадку при зміні умов контракту складається рівняння фінансової еквівалентності, у якому сума платежів, що заміняються, зведених до одного моменту часу, прирівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, що зведені на той же час.

Звичайно в межах року рівняння еквівалентності складається на основі простих ставок. За межами року – на основі складних ставок.

Розглянемо, як складається рівняння еквівалентності.

Приклад 31

Боржник домовився з банком про консолідацію трьох платежів термінів 15.05, 15.06, 15.08.

Суми платежів 10; 20; 22,8 т. грн. Термін консолідації 01.08. Ставка простих відсотків $i = 36{,}5\%$. K=365 дн. Знайти суму консолідованого платежу.

Розв'язок

Знайдемо терміни від дня консолідації до дати кожного з платежів. За таблицею номерів днів року маємо:

15.05=135; 15.06=166; 15.08=227; 01.08=213.

213-135=78.

Отже, t_2 =213-166=47,

t_3 =227-213=14.

Зведемо усі платежі на дату консолідації. При цьому перший і другий платежі треба наростити, а третій дисконтувати на дату консолідації.

Отримуємо таке рівняння еквівалентності:

$$S_0 = 10\left(1+\frac{78}{365}\cdot 0{,}365\right)+20\left(1+\frac{47}{365}\cdot 0{,}365\right)+\frac{22{,}8}{1+\frac{14}{365}\cdot 0{,}365}.$$

Звідси:

$$S_0 = 54{,}205 \text{ т. грн.}$$

Аналогічно можна консолідувати векселі, що має значення при визначенні вартості пакета векселів.

Консолідацію можна проводити за складними ставками.

Приклад 32

Платежі $S_1 = 10$ т. грн., $S_2 = 50$ т. грн. за термінами 100 дн., 150 дн., відрахованих від однієї бази, замінюються одним терміном 200 днів. Складна річна ставка 30%. K= 365 днів. Знайти консолідуючий платіж.

Розв'язок

Зведемо платежі на дату консолідації

$$S_0 = 10\cdot 1{,}3^{\frac{100}{365}} + 50\cdot 1{,}3^{\frac{50}{365}} = 62{,}5748 \text{ т. грн.}$$

Перший платіж нарощували 200 – 100 = 100 днів, другий – 200 – 150=50 днів.

Якщо задана сума консолідованого платежу, то треба знаходити дату консолідації (знаходити n).

Приклад 33

Платежі 10, 15, 20 т. грн. сплачуються через 25, 45, 70 днів після якоїсь дати. Їх замінюють одним платежем 47 т. грн. Проста ставка i = 36,5%. Рік невисокосний. Знайти дату консолідації.

Розв'язок

Зведемо всі платежі на початок відліку. Отримаємо таке рівняння еквівалентності:

$$\frac{47}{1+n_0\cdot 0{,}365}=\frac{10}{1+\frac{25}{365}\cdot 0{,}365}+\frac{15}{1+\frac{45}{365}\cdot 0{,}365}+\frac{20}{1+\frac{70}{365}\cdot 0{,}365},$$

або

$$\frac{47}{1+n_0\cdot 0{,}365}=42{,}8018,$$

$$n_0\cdot 0{,}365=\frac{47}{42{,}8018}-1,$$

$$n_0 = 0{,}2687\,p_1 = 98\,дн.$$

де: n_0 – термін консолідованого платежу.

Отже, термін консолідації – 98 днів від дати відліку.

Таким же чином можливо проводити консолідацію за складними ставками і за обліковими ставками, можна розв'язувати і інші задачі зміни умов контрактів.

У тих випадках, коли консолідована сума дорівнює сумі платежів:

$$S_0 = \sum S_t,$$

застосовують наближену формулу терміну консолідованого платежу:

$$n_0 = \frac{\sum S_t n_t}{\sum S_t}, \qquad (55)$$

тобто беруть n_0 як середнє арифметичне зважене з термінів платежів $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Приклад 34

Платежі 10, 15, 20 т. грн. сплачуються через 30, 40, 70 днів після якоїсь дати. Прийнято рішення замінити їх одним платежем 45 т. грн. Знайти термін консолідованого платежу.

Розв'язок

За формулою (55) знаходимо:

$$n_0 = \frac{10 \cdot 30 + 15 \cdot 40 + 20 \cdot 70}{10 + 15 + 20} = 51{,}1 = 51 \text{ день.}$$

Розділ II.

Оцінка доцільності інвестицій

§1. Потоки платежів і фінансові ренти.

Фінансові операції часто передбачають розподілені у часі виплати і надходження.

Наприклад, погашення довгострокового кредиту, інших заборгованостей, грошові показники інвестиційного процесу, доходи по цінних паперах тощо.

У зв'язку з цим вводять поняття потоку платежів.

Потік платежів – це послідовність сплат і надходжень. Члени потоку можуть бути як додатні (надходження) так і від'ємні (сплати).

Фінансова рента (аннуїтет) – це потік платежів, усі члени якого додатні величини, а проміжки часу між двома послідовними сплатами – однакові.

Наприклад, створення грошових фондів, оплата доходу за акціями і облігаціями, сплата споживчого кредиту, показники інвестиційного процесу. Усе це приклади фінансових рент.

Схема ренти – один з методів фінансового аналізу.

Для рент вводять такі параметри:

(R) – *член ренти* – величина окремого платежу;

період ренти – інтервал часу між платежами;

(i) – *відсоткова ставка* – ставка, що використовується при нарощенні, або дисконтуванні;

(n) – *термін ренти* – час від початку ренти до кінця її періоду;

(p) – *кількість платежів на рік;*

(m) – *кількість нарахувань відсотків на рік.*

Ренти класифікують за тривалістю періоду на річні, коли сплата один раз на рік, та p-термінові, коли сплата p разів на рік рівними частинами.

Відсотки по ренті теж можуть нараховуватись один раз і m разів на рік.

Якщо члени однакові, то рента зветься *сталою*. Якщо – різні, то рента *змінна*.

Рента зі скінченою кількістю членів зветься *скінченою*. Рента з нескінченною кількістю членів – *нескінченою*.

Коли сплата відбувається в кінці періодів, то це – *рента постнумерандо*. Коли на початку періодів, то – *рента пренумерандо*.

Рента називається *терміновою*, якщо сплати по ній починаються з початком ренти. Рента – *відкладена*, коли сплата починається пізніше.

Узагальненими характеристиками ренти є *нарощена сума* і *теперішня величина*.

Нарощена сума S – сума усіх членів ренти з нарахованими на них відсотками на кінець терміну ренти.

Теперішня величина A – сума усіх членів ренти дисконтованих на початок ренти.

Розглянемо *річну сталу ренту (звичайну ренту)*.

S – нарощена сума,

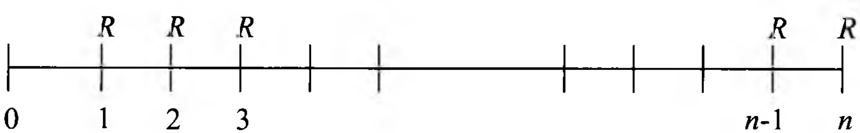
A – теперішня величина,

R – член ренти,

i – відсоткова складна ставка,

n – термін ренти.

Нехай сума R вноситься *в кінці* кожного року в банк під i річних складних відсотків протягом n років. Відсотки нараховуються *в кінці* року. Маємо *сталу річну ренту постнумерандо*.



Підрахуємо нарощену суму S:

Перший член зросте до $R(1+i)^{n-1}$, другий – до $R(1+i)^{n-2}$, ..., останній – рівний R. Отже,

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}.$$

За формулою суми геометричної прогресії знаходимо

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (56)$$

Вираз

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (57)$$

називають *коефіцієнтом нарощення* ренти. Він показує у скільки разів S більше за $R \cdot s_{n,i}$ затабульовані для цілих n і різних i. В інших випадках обчислюються безпосередньо.

За формулами (56), (57) отримуємо нарощену суму ренти у вигляді:

$$S = Rs_{n,i}. \qquad (58)$$

Підрахуємо теперішню вартість ренти A:
це сума усіх платежів по ренті дисконтованих на її початок. Нехай

$$\frac{1}{1-d} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m}. \qquad (59)$$

тоді перший член має вартість Rv на початок ренти, другий член – Rv^2,..., останній – Rv^n.

$$A = Rv + Rv^2 + \ldots + Rv^n.$$

За формулою суми геометричної прогресії

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (60)$$

Вираз

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (61)$$

називають *коефіцієнтом зведення* ренти. Отже, маємо формулу

$$A = Ra_{n,i}\,. \qquad (62)$$

$a_{n,i}$ показує у скільки разів A більше за R. Коефіцієнти $a_{n,i}$ для цілих n та певних i табулюються. Для інших (n, i) обчислюються безпосередньо.

Мають місце властивості:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i};$$

$$\lim_{i\to\infty} a_{n,i} = 0\,. \qquad (63)$$

Із виразів (57), (61), (56), (60) випливає:

$$A = S(1+i)^{-n},$$

$$a_{n,i} = s_{n,i}(1+i)^{-n}, \qquad (64)$$

$$S = A(1+i)^{n},$$

$$s_{n,i} = a_{n,i}(1+i)^{n}.$$

Тобто S можна отримати з теперішньої величини A нарощенням з множником $(1+i)^n$.

Приклад 35

Створюється фонд. Внески робляться раз в кінці року по 100 т. грн. протягом 3-х років. На зібрані кошти нараховується 36% річних в кінці року. Знайти нарощену суму (розмір фонду на кінець утворення).

Розв'язок

За формулою (58) при R = 100 т. грн.., $n = 3$, $i = 36\%$ знаходимо

$$S = 100\cdot\frac{(1+0{,}36)^3 - 1}{0{,}36} = 420{,}96 \text{ т. грн.}$$

Приклад 36

Інвестиції передбачають щорічне виділення коштів по 100 т. грн. протягом 4-х років. Діюча ринкова ставка довгострокових кредитів дорівнює 48% складних річних. Знайти теперішню вартість потоку платежів.

Розв'язок

За формулою (60) знаходимо

$$A = 100\cdot\frac{1-(1+0{,}36)^{-4}}{0{,}36} = 196{,}58 \text{ т. грн.}$$

Загальною рентою називається рента, у якій член ренти сплачується p разів на рік рівними частинами, а нарахування відсотків відбувається m разів на рік. Нарощена сума S і теперішня величина A знаходяться за формулами

$$S = R\,\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]},$$

$$A = R\,\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right]}. \qquad (65)$$

Приклад 37

В умовах прикладу 35 на зібрані кошти нараховуються відсотки щоквартально. Знайти нарощену суму.

Розв'язок

Маємо $m = 4$, $p = 1$. За формулою (65) знаходимо

$$S = 100 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{4\cdot 3} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{4} - 1} = 100 \cdot \frac{1{,}09^{12} - 1}{1{,}09^{4} - 1} = 440{,}41 \text{ т. грн.}$$

Порівнюючи з прикладом 35 бачимо, що більш часте нарахування відсотків збільшує нарощену суму.

Важливим видом ренти є вічна рента.

Вічна рента – це послідовність платежів з необмеженою кількістю членів.

Прикладом вічної ренти є виплати за облігаційними займами, пенсійними і страховими фондами тощо.

Нарощена сума вічної ренти дорівнює нескінченності.

Теперішня величина знаходиться за формулою (60) з врахуванням (63) так:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i} \tag{66}$$

Формула (66) має значення при заміні ренти, або її викупі, при оцінці акцій і облігацій.

За формулою (66) знаходимо

$$R = A_{\infty} i, \tag{67}$$

тобто, член вічної ренти дорівнює відсотку по ренті від її теперішньої (зведеної) величини. Формула (67) використовується при капіталізації постійних доходів.

Приклад 38

Акція приносить сталий прибуток 0,43 грн. щорічно. Яка її теперішня вартість, якщо діюча на ринку ставка по кредитах – 30% річних складних?

Розв'язок

За формулою (66) при $R = 0{,}43$, $i = 0{,}3$ знаходимо

$$A = \frac{0{,}43}{0{,}3} = 1{,}43 \text{ грн.}$$

§2. Знаходження параметрів фінансових рент.

Часто виникає задача, знаючи A або S знайти один з параметрів ренти при відомих інших.

Якщо відомі A або S, термін ренти n та ставка i, то за формулами (58), (62) знаходимо член ренти R:

$$R = \frac{S}{s_{n,i}},$$

$$R = \frac{A}{a_{n,i}} \tag{68}$$

Аналогічно використовуємо формули (65).

Якщо S, A, R i відомі, то термін ренти n знаходимо за формулами (58), (62) як вирази:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{Si}{R}\right)}{\ln(1+i)},$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{Ai}{R}\right)}{\ln(1+i)} \tag{69}$$

причому друга формула (69) має сенс за умови

$$Ai < R \cdot \tag{70}$$

Аналогічно вирази для n можна знайти з формули (65).

Приклад 39

Підприємство вирішило створити фонд 1,5 млн. грн. за 3 роки. Якщо суму 986,2 тис. грн. розмістити під 15% у банку, то на кінець 3-го року мали б:

$$S = 0{,}9862\,(1+0{,}15)^3 = 1{,}5 \text{ млн. грн.}$$

Але одночасне забирання такої суми із господарчого обороту недоцільне. Тому віддається перевага щорічним рентним платежам. Маємо за формулою (68) при $i = 15\%$, $n = 3$:

$$R = \frac{986{,}2}{a_{3;15}} = \frac{986{,}2}{\dfrac{1-(1+0{,}15)^{-3}}{0{,}15}} = \frac{986{,}2}{2{,}2832} = 431{,}9 \text{ тис. грн.}$$

Отже, щорічний внесок 431,9 тис. грн. сформує фонд 1,5 млн. грн. на кінець 3-го року.

Приклад 40

Сума інвестицій 100 тис. грн., віддача 25 тис. грн. щорічно. На борг нараховують 20% річних. За який термін окупляться інвестиції?

Розв'язок

Якщо теперішня величина надходжень більше інвестицій, то маємо їх окупність. Отже за формулою (69) знаходимо:

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{100 \times 0{,}20}{25}\right)}{\ln(1+0{,}20)} = \frac{-\ln 0{,}2}{\ln 1{,}2} = 8{,}83 \text{ р.}$$

Інвестиції окупляться майже за 9 років. Якби взяли $R = 20$ тис. грн., то інвестиції не окупились би.

При визначенні доходності операцій з періодичними сплатами виникає задача знаходження ставки i ренти.

Щоб знайти ставку i треба розв'язати рівняння

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad \text{або} \quad A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{71}$$

відносно i при відомих S, R, n, A.

Нелінійні рівняння (71) розв'язуються ітераційним методом Ньютона, стислий виклад основних теоретичних положень якого зробимо нижче.

Метод Ньютона базується на основному принципі диференціального числення, який, в нестрогих термінах, полягає в тому, що графік будь-якої так званої «пристойної» функції на малому проміжку зміни незалежної змінної мало відрізняється від прямої (дотичної) в одній із точок.

Нехай c – корінь двічі диференційовної функції і x_0 – достатньо прийнятне наближення до кореня.

Тоді має місце наближена рівність

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

для всіх x, достатньо близьких до x_0.

Покладаючи $x = c$, одержимо

$$0 = f(c) = f(x_0) + f'(x_0)(c - x_0),$$

Звідки для c отримаємо наближене значення

$$c \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1.$$

Взагалі кажучи, x_1 повинно бути кращим наближенням до c, ніж вихідне наближення x_0.

4-12-173

За наближенням x_1 ми можемо знайти наближення x_2 за формулою

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

і так далі.

Якщо послідовність $x_1, x_2 \ldots\ldots$ збігається, то вона збігається до кореня полінома f.

Дійсно, нехай $x_k \to \alpha$ якщо $k \to \infty$. Перейшовши до границі в рівності $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$, одержимо $\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, звідки $f(\alpha) = 0$.

Для того щоб з'ясувати, наскільки близько до c повинно наближатися початкове наближення x_0, здійснимо оцінку, враховуючи похибку вихідної наближеної рівності.

Розглянемо формулу Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(\xi)(x - \xi)d\xi,$$

або, після підстановки в інтегралі $\xi = x - t(x - x_0)$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)^2 \int_0^1 f''(x - t(x - x_0))tdt .$$

Вважаючи, $x = c$, одержимо

$$0 = f(c) = f(x_0) + f'(x_0)(c - x_0) + (c - x_0)^2 \int_0^1 f''(c - t(c - x_0))tdt .$$

Поділимо цю рівність на $f'(x_0)$ і перенесемо перші два члена в ліву частину. Одержимо

$$x_0 - c - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{(c - x_0)^2}{f'(x_0)} \int_0^1 f''(c - t(c - x_0))tdt .$$

В лівій частині вираз $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ дорівнює наближено x_1.

Отже,

$$x_1 - c = \frac{(c - x_0)^2}{f'(x_0)} \int_0^1 f''(c - t(c - x_0))tdt .$$

Нехай x_0 вибирається в околі точки c, і в цьому околі модуль $f'(x)$ обмежений знизу числом m і модуль $f''(x)$ обмежений зверху числом М. Тоді,

$$|x_1 - c| \le \frac{|c - x_0|^2}{m} M \int_0^1 tdt = \frac{M}{2m} |x_0 - c|^2 .$$

Помножимо на $\frac{M}{2m}$, одержимо

$$\frac{M}{2m} |x_1 - c| \le \left(\frac{M}{2m} |x_0 - c| \right)^2 .$$

А тому, якщо $\frac{M}{2m} |x_0 - c| \le q < 1$, то $\frac{M}{2m} |x_1 - c| \le q^2$.

Для подальших наближень

$$\frac{M}{2m} |x_2 - c| \le q^4, \ldots, \frac{M}{2m} |x_k - c| \le q^{2^k} .$$

Таким чином в цьому припущенні має місце швидка збіжність наближень в корені c. Такого роду збіжність, коли похибка наближення дорівнює по порядку квадрату похибки попереднього наближення, має назву квадратичної збіжності.

Для поліномів всі проведені вище викладки мають місце не тільки для обчислення дійсних коренів поліномів із дійсними коефіцієнтами, але і для комплексних коренів поліномів із комплексними коефіцієнтами.

Для дійсних функцій існують ситуації, коли немає необхідності вибирати початкове наближення дуже близьке до кореня. Нехай на інтервалі *(a, b)* перша і друга похідні функції *f* не змінюють знак, а значення *f* на кінцях інтервалу мають протилежні знаки. В таких припущеннях функція *f* має на інтервалі єдиний корінь *c*.

Припустимо, для визначення, що f' і f'' додатні на інтервалі *(a,b)*. Це значить, що *f* зростає і випуклість її графіка направлена вниз (рис. 1).

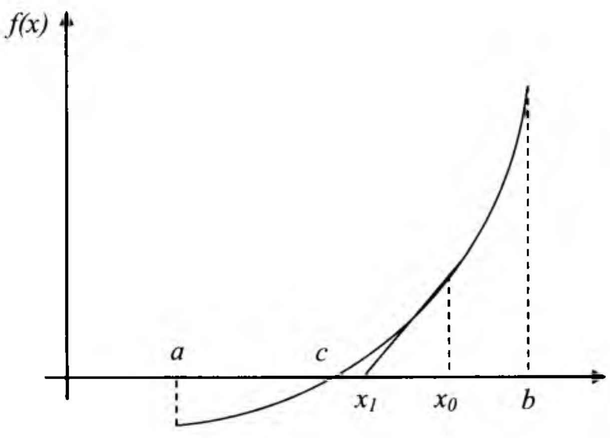


Рис.1

Візьмемо початкове наближення x_0 справа від кореня (наприклад $x_0 = b$). Геометрично очевидно, що наступне наближення x_1 буде ближче до *c* ніж x_0 і залишається справа від *c*, тобто

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

В силу зростання *f* очевидно, що $f(x_0) > 0$, але і $f'(x_0) > 0$ за умовою, отже, $x_1 < x_0$.

Звідси,

$$x_1 - c = \frac{(c - x_0)^2}{f'(x_0)} \int_0^1 f''(c - t(c - x_0))t dt > 0,$$

оскільки, $c \le c - t(c - x_0)$, а f'' додатне на всьому інтервалі *(a, b)*.

Обчислюючи надалі послідовні наближення $x_2, x_3, \ldots\ldots$, ми отримаємо спадну послідовність обмежену знизу числом *c*. Вона збігається і, як ми бачили вище, збігається до кореня *f*, який на проміжку *(a,b)* тільки один, тобто, *c*.

Легко переконатися, що якщо f' і f'' від'ємні на проміжку *(a, b)*, тоді починати наближення теж слід справа від кореня (рис.2). Якщо f' і f'' зберігають на *(a, b)* протилежні знаки, тоді наближення слід починати зліва (рис.3, 4).

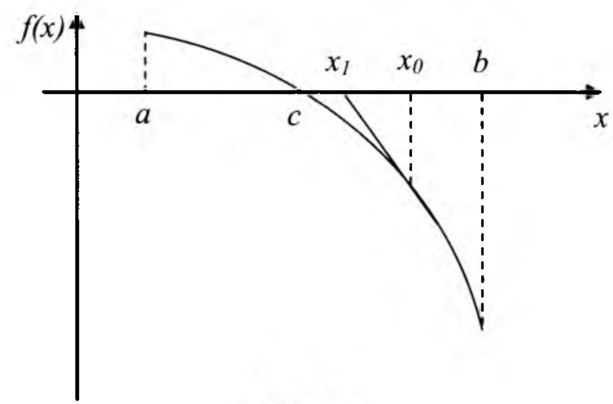


Рис. 2

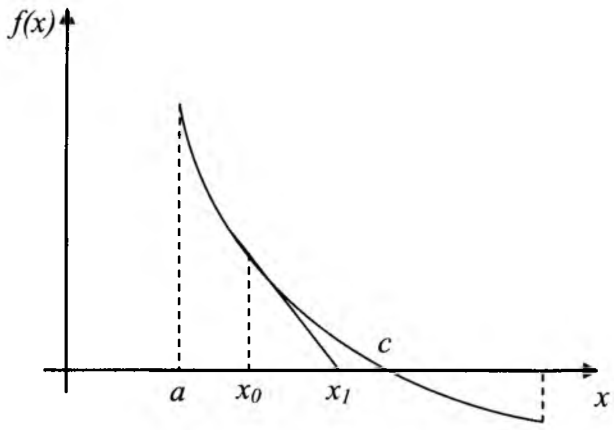


Рис. 3

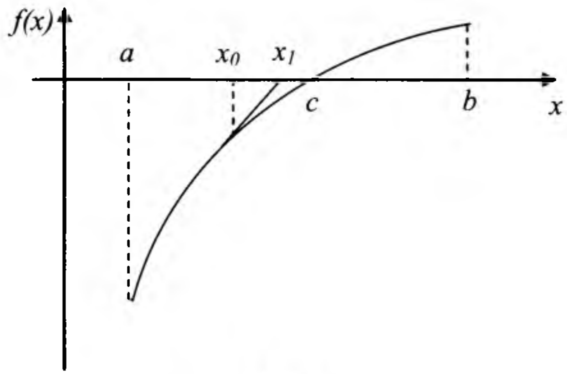


Рис. 4

<u>*Приклад.*</u> Знайти наближення до $\sqrt{2}$, тобто до додатного кореня полінома $f \;\; = x^2 - 2$.

Маємо $f' = 2x$, $f'' = 2$, так що f' і f'' додатні на $(0,+\infty)$. В якості початкового наближення, можливо взяти будь-яке число, більше $\sqrt{2}$. В якості m можна вибрати 2,8, а $M=2$. Звідси,

$$x_k - \sqrt{2} < \frac{(x_{k-1} - \sqrt{2})^2}{2,8}.$$

В якості x_0 візьмемо $\frac{3}{2}$. Похибка x_0 не перевищує *0,1*. Наступне наближення x_1 дорівнює $\frac{17}{12}$. Його похибка не перевищує $\frac{0,01}{2,8} \approx 0,003$. Наступне наближення x_2 дорівнює $\frac{577}{408}$. Його похибка не перевищує $\frac{0,003^2}{2,8} \approx 0,000003$. Розклад в десяткову дріб дає $\frac{577}{408} = 1,414215...$ замість $\sqrt{2} = 1,414213...$

<u>*Приклад.*</u> Уточнити значення кореня полінома $f \;\; = x^3 - x - 1$, знаючи, що $1,3 < x < 1,4$.

Тут $f' = 3x^2 - 1 > 5$, $\quad f'' = 6x < 8,4$, $\quad \frac{M}{2m} \approx 0,84 < 1$.

Починаючи із наближення x_0=1,4 із похибкою менше 0,1 прийдемо до наближення x_1, похибка якого менше 0,01, наступне наближення x_2 буде мати похибку менше 0,0001, наступне x_3 дасть 8 вірних десяткових знаків після коми. Переконаємося, як уточнюється наближення x_0=1,325=$\frac{53}{40}$, похибка якого менше $\frac{1}{3000}$. Для нього x_1=$\frac{180877}{136540}$.

Воно наближає корінь із точністю до $\frac{1}{9000000}$, тобто з точністю до однієї одиниці сьомого знаку після коми. В десяткових дробах x_1= 1,3247180...

Метод Ньютона можливо застосувати і до систем рівнянь.

Приклад. Розв'язати наближено систему.

$$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ y^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Побудуємо графіки, знайдемо наближено координати їх точки перетину при додатних x і y. Отримаємо початкове наближення x_0=1,7, y_0=2. При цьому наближені нев'язка в першому рівнянні дорівнює -0,11, в другому 0,3.

Покладемо x=1,7+k, y=2+k.

Після підстановки одержимо

$$\begin{cases} 3{,}4h + h^2 - k - 0{,}11 = 0 \\ -h \ \ + 4k + k^2 + 0.3 = 0 \end{cases}.$$

Числа h і k малі. Відкинемо їх квадрати, одержимо лінійну систему

$$\begin{cases} 3{,}4h - k - 0{,}11 = 0 \\ -h \ \ + 4k + 0{,}3 = 0 \end{cases}.$$

Звідки знайдемо наближене значення для h і k, які дадуть наступні наближення (x_1, y_1) до (x, y). Дійсно, h=0,015, k= -0,059, так що x_1=1,715, y_1=1,941. Нев'язка цього наближення дорівнює 0,000225 і 0,52481, що значно менше нев'язок для x_0, y_0.

Приклад 41

За 7 років треба створити фонд у розмірі 100 тис. грн. Для цього щорічно виділяють 10 тис. грн. Якою повинна бути ставка, щоб фонд утворився ?

Розв'язок

Для i маємо рівняння

$$100 = 10\frac{(1+i)^7 - 1}{i}.$$

Звідси знаходимо i= 11,709%

Для знаходження наближеного розв'язку рівнянь (71) методом Ньютона, подамо ці рівняння у вигляді

$$(1+i)^n - \frac{S}{R}i - 1 = 0,$$

$$(1+i)^{-n} + \frac{A}{R}i - 1 = 0. \qquad (72)$$

Кожне з рівнянь (72) має вигляд

$$F(i) = 0, \qquad (73)$$

де: $F(i)$ – функція, що задається лівою частиною (72).

Нехай i_0 якесь наближення до розв'язку (73). Тоді його уточнення i_1 за методом Ньютона має вигляд:

$$i_1 = i_0 - \frac{F(i_0)}{F'(i_0)}, \qquad (74)$$

де: $F'(i)$ – похідна функції $F(i)$.

Для рівнянь (72) формули (74) виглядають так:

$$i_1 = i_0 - \frac{(1+i_0)^n - \frac{S}{R}i_0 - 1}{n(1+i_0)^{n-1} - \frac{S}{R}}, \qquad (75)$$

$$i_1 = i_0 - \frac{(1+i_0)^{-n} + \frac{A}{R} i_0 - 1}{-n(1+i_0)^{-n-1} + \frac{A}{R}} \qquad (76)$$

Наближення i_0 знаходять звичайно з практичних міркувань.

Приклад 42

За даними прикладу 41 знайдемо *наближене* значення i, взявши $i_0 = 12\%$. За формулою (75) маємо:

$$i_1 = 0{,}12 - \frac{1{,}12^7 - \frac{100}{10} \cdot 0{,}12 - 1}{7 \cdot 1{,}12^6 - \frac{100}{10}} = 0{,}12 - \frac{0{,}0106812}{3{,}816757} = 0{,}1172015 = 11{,}72\%.$$

Підставивши i_1 у праву частину (75) отримаємо *друге* наближення i_2. Таким чином можна отримати розв'язок рівнянь (72) з будь-якою точністю.

§3. Внутрішня норма дохідності

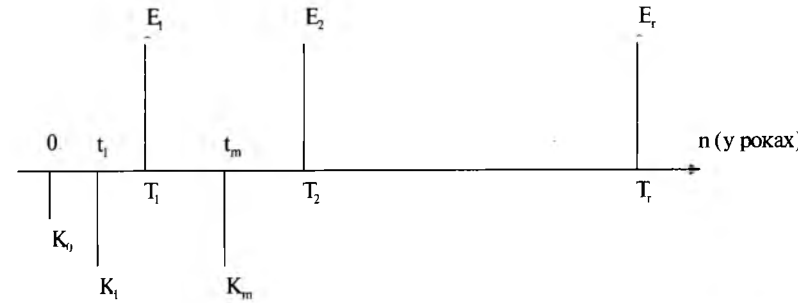
Інвестиційний процес об'єднує два процеси: інвестиції (утворення виробничого об'єкта, купівля цінних паперів, ...) і послідовне отримання доходу.

Будь-який метод оцінки інвестиційних проектів пов'язаний зі зведенням грошових величин до одного моменту часу.

Використовують такі характеристики інвестиційного процесу: чистий зведений дохід, внутрішня норма дохідності, термін окупності, рентабельність.

Зупинимось докладніше на ВНД – ***внутрішній нормі дохідності***, або ***внутрішній швидкості обороту*** (internal rate of return - IRR).

Графічно інвестиційний процес має вигляд:



Інвестиції обсягів K_0, K_1, ... , K_m у моменти $t_0 = 0$, t_1, ..., t_m відкладаємо вниз і вважаємо від'ємним доходом. Доходи E_1, E_2, ..., E_r у моменти T_1, T_2, ..., T_r відкладаємо вгору.

Дисконтуємо усі доходи i інвестиції на початок відліку.

ВНД (IRR) – це відсоткова ставка, при якій зведена величина інвестицій дорівнюватиме зведеній величині доходів.

Тобто при нарахуванні на інвестиції K відсотків за ставкою i = IRR отримуємо розподілений у часі дохід.

Чим вище *IRR*, тим більша ефективність інвестицій.

Виходячи з графічного представлення інвестиційного процесу складемо рівняння для *ВНД* = i:

$$-K_0 - K_1(1+i)^{-t_1} - \ldots - K_m(1+i)^{-t_m} + E_1(1+i)^{-T_1} + E_2(1+i)^{-T_2} + \ldots$$
$$\ldots + E_r(1+i)^{-T_r} = 0 \qquad (77)$$

Рівняння (77) – нелінійне рівняння відносно i.

Розв'язується чисельними методами типу Ньютона з будь-якою точністю.

Якщо в найпростішому випадку інвестиції K – одноразові на початку і щорічний дохід сталий E, то можна використати формулу ренти. *ВНД* = i є розв'язком рівняння

$$K = E\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

де: n – термін проекту.

З нерівності (70) випливає, що умова окупності інвестицій K має вигляд

$$Ki<E, \qquad (78)$$

тобто щорічні доходи повинні бути більші, ніж відсоток від інвестицій.

Приклад 43

Інвестиції на початку – 60 т. грн., доходи протягом п'яти років 12 т. грн., 14 т. грн., 17 т. грн., 19 т. грн., 21 т. грн.(в кінці року). Знайти ВНД інвестиційного проекту.

Розв'язок

Рівняння для $i = ВНД\,(IRR)$ має вигляд:

$$-60+12(1+i)^{-1}+14(1+i)^{-2}+17(1+i)^{-3}+19(1+i)^{-4}+21(1+i)^{-5}=0.$$

Отримуємо результат $i=11\%$.

Якщо інвестиції залучались за відсоток менший ніж 11%, то матимемо прибуток. Якщо відсоток залучення більший 11%, то інвестиції не окуповуються.

Приклад 44

Пропонується продаж облігацій за номіналом $N=100$ грн., з оголошеною дохідністю 25% річних, терміном 3 роки. В кінці терміну облігація викуповується за номіналом. Продавець бере комісійні 1%. Якою буде дохідність для покупця купівлі облігації?

Розв'язок

Якщо продаж відбувається за номіналом без комісійних, то дохідність дорівнюватиме оголошеній дохідності 25%.

Якщо врахувати комісійні, то ставка дохідності i є розв'язком рівняння:

$$N \cdot 1{,}01 = qN \cdot a_{3,i} + N(1+i)^{-3} \qquad (***)$$

Дійсно. Зліва стоїть вартість покупки облігації з комісійними.

Справа – зведена величина відсотків і викупної ціни.

Рівняння (***) набуває вигляду:

$$1{,}01 = 0{,}25\frac{1-(1+i)^{-3}}{i} + (1+i)^{-3},$$

або

$$(1+i)^{-3}(i-0{,}25) - 1{,}01i + 0{,}25 = 0. \qquad (****)$$

Розв'яжемо його наближеним методом за формулою (74). Оскільки ліва частина (****) при $i=0{,}25$ менша за нуль, а при $i=0{,}24$ більша за нуль, то дохідність лежить в межах $0{,}24<i<0{,}25$. Згідно (74) знаходимо для

$$f(i) = (1+i)^{-3}(i-0{,}25) - 1{,}01i + 0{,}25,$$

$$f'(i) = -3(1+i)^{-4}(i-0{,}25) + (1+i)^{-3} - 1{,}01$$

та початкового наближення $i_0 = 0{,}24$

$$i = 0{,}24 - \frac{1{,}24^{-3}(-0{,}01) - 1{,}01 \cdot 0{,}24 + 0{,}25}{-3 \cdot 1{,}24^{-4}(-0{,}01) + 1{,}24^{-3} - 1{,}01} = 0{,}24498 = 24{,}5\%.$$

Отже, дохідність зменшилася на 0,5% у порівнянні з оголошеною по облігації.

§4. Планування погашення заборгованості

При плануванні погашення боргу визначають періодичні виплати, які називають *терміновими виплатами.* Термінова виплата складається з суми погашення основного боргу і відсоткових платежів.

Умови кредитування містять: термін позики, тривалість пільгового періоду, рівень відсоткової ставки, метод погашення відсотків і основної суми.

За методами погашення боргу всі позики ділять на види:

– *Позика без обов'язкового погашення.* Боржник сплачує лише відсотки, не повертаючи позиченої суми.

Прикладами такої позики є випуск акцій, облігацій.

Розрахунок проводиться за формулами вічної ренти.

– *Позика з обов'язковим погашенням в один строк.* Боржник повертає позичену суму у домовлений строк і сплачує відсотки.

– *Позика з обов'язковим погашенням у декілька строків.* Боржник повертає позичену суму частинами і сплачує відсотки.

Для боржника і кредитора на кожний момент виплат по боргу важливо знати залишок по сплаті основного боргу і відсотків по ньому. Для цього треба складати *план погашення боргу.*

Розглянемо планування погашення боргу при погашенні у декілька термінів. При цьому існує *три способи погашення:* рівними сумами основного боргу, рівними терміновими сплатами, змінними терміновими сплатами.

Розглянемо більш докладно.

Погашення боргу рівними терміновими сплатами.

Нехай D – сума боргу, g – ставка складних відсотків по боргу, Y – термінова сплата, n – термін боргу (у роках). Сплачується стала термінова стала Y. Частина йде у погашення боргу, частина – у погашеннях відсотків.

$$Y = D_t g + R_t \tag{79}$$

де: D_t – залишок боргу на початок періоду t,
R_t – сплата основного боргу в періоді t.

Нехай заданий термін позики n.

Тоді $D_1 = D$ і $D = Y \cdot a_{n,g}$ – по формулі ренти (прирівнюємо суму боргу теперішній величині сплат по ньому). Отримуємо

$$Y = \frac{D}{a_{n,g}} \tag{80}$$

і послідовно знаходимо з врахуванням (80)

$$R_1 = Y - Dg = Y - Y \cdot g a_{n,g} = Y v^n, \qquad v = \frac{1}{1+g};$$

$$R_2 = Y v^{n-1},$$
$$R_3 = Y v^{n-2}, \ldots,$$
$$R_t = Y v^{n-t+1}, \tag{81}$$
$$R_n = Y v$$

Приклад 45

$D = 200$ т. грн., $n = 4$р., $g = 10\%$. Погашення рівними терміновими сплатами. Скласти план погашення.

Розв'язок

Згідно (80) маємо

$$Y = \frac{200000}{a_{4;10}} = \frac{200000}{\frac{1-(1+0{,}1)^{-4}}{0{,}1}} = \frac{200000}{3{,}1698654} = 63094{,}16 \text{ грн.}$$

$$R_1 = \frac{63094{,}16}{1{,}1^4} = 43094{,}16 \text{ грн.}$$

$$R_2 = \frac{63094{,}16}{1{,}1^3} = 47403{,}58 \text{ грн.}$$

$$R_3 = \frac{63094{,}16}{1{,}1^2} = 52143{,}93 \text{ грн.}$$

$$R_4 = \frac{63094{,}16}{1{,}1} = 57358{,}33 \text{ грн.}$$

План погашення

Рік	Залишок боргу на початок	Термінові сплати	Сплата відсотків	Погашення основного боргу
1	200000	63094,16	20000	43094,16
2	156905,84	63094,16	15690,58	47403,58
3	109502,26	63094,16	10950,23	52143,93
4	57358,33	63094,16	5735,83	57358,33
				200000

Бачимо, що сплати по відсотках спадають, а по погашенню основного боргу – зростають.

Окремо розглянемо випадок *іпотечної позики*. По цьому виду позики власник нерухомості отримує кредит під заставу майна. У випадку неповернення позики в обумовлений термін майно стає власністю кредитора. Розмір позики не перевищує 70-75% вартості майна, що заставляється.

Традиційна іпотека погашається *рівними щомісячними терміновими сплатами.*

Для розрахунку величини щомісячної сплати використаємо формулу (80), перетворивши її відповідним чином:

$$Y = \frac{D\dfrac{g}{m}\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn}}{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn}-1}, \qquad (82)$$

де: D – сума боргу, Y – термінова сплата, $p = m$ – кількість періодів нарахування відсотків у році і кількість сплат у році, n – кількість років кредиту.

Розрахунок *суми основного боргу, що залишився у t-ому періоді* проводять за формулою:

$$S_t = D\frac{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn} - \left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{t-1}}{\left(1+\dfrac{g}{m}\right)^{mn}-1}. \qquad (83)$$

Приклад 46

За даними прикладу 45 погашення і сплата відсотків відбувається щомісячно. Знайти термінову сплату і величину несплаченого основного боргу на початок 3-го року погашення.

Розв'язок

У формулах (82), (83) беремо $m=12$; $g=0{,}1$; $n=4$; $D=200000$.

$$Y = \frac{200000\cdot\dfrac{0{,}1}{12}\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12\times4}}{\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12\times4}-1} = 5072{,}54,$$

$$t-1 = 12\cdot2-1 = 23;$$

$$m\cdot n = 48;$$

$$S_{24} = \frac{200000\left[\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{48} - \left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{23}\right]}{\left(1+\dfrac{0{,}1}{12}\right)^{48}-1} = 114047{,}82 \text{ грн.}$$

5-12-173

Окрім традиційної іпотеки застосовують *позики зі змінюваною відсотковою ставкою і позики зі сталим збільшенням витрат по обслуговуванню боргу.*

§5. Методи оцінки ефективності інвестицій

Визначення ефективності інвестицій є однією із самих важливих і самих складних проблем, оскільки основні перспективні цілі розвитку підприємства можуть бути здійснені тільки за допомогою процесу інвестування, а обмеженість інвестиційних засобів ставить задачу найбільш ефективного використання цих засобів. Процес прийняття рішень базується на виборі певного варіанту із декількох можливих, який дасть найкращий результат, а це вимагає застосування такої методики, яка б дозволила дійсно вибрати найбільш вигідний варіант. Необхідною умовою успішної оцінки економічного ефекту від інвестування засобів є вибір критерію і методу для оцінки ефективності. Зауважимо, що критерій оцінки ефективності як правило обумовлений характером економічної системи і є вихідною точкою аналізу ефективності інвестицій.

В залежності від попередньо встановленого критерію вибору між двома або декількома варіантами визначається той чи інший метод оцінки ефективності інвестицій. Отже, оцінка ефективності вкладень залежить не стільки від методу оцінки, скільки від якості критерію, який є вихідною точкою вибору.

Методи виміру (оцінки) економічної ефективності потребують попереднього визначення основних понять, які характеризують будь-який інвестиційний процес:

- *інвестиційні засоби* – початкові капітальні вкладення C_0, які необхідно задіяти;
- *інвестиційні затрати* – всі витрати, які виникають в процесі здійснення проекту;
- *доходи від інвестицій* – всі надходження від інвестицій;
- *термін отримання доходів від інвестицій* – час, на протязі якого доходи від інвестицій перевищують інвестиційні витрати, який частіше всього ототожнюється з періодом дисконтування.

В фінансовій теорії і практиці існуючі методи оцінки ефективності на підприємстві можливо розділити на дві групи: традиційні (статичні) і динамічні. Із першої групи методів розглянемо визначення терміну окупності і його оберненої величини, а із другої групи – оцінку чистої теперішньої вартості (*ЧТВ*) і внутрішньої норми дохідності (*ВНД*).

Зауваження. Автори навмисне будуть використовувати різні буквені позначення та понятійні назви, оскільки в сучасній фінансовій теорії має місце їх урізноманітнення.

Статичні методи. Ці методи не враховують фактори часу і дають лише наближену інформацію про якість проекту. Одним із базових показників, які використовуються в статичних методах оцінки ефективності, є термін окупності, який дає оцінку прийнятних інвестицій з точки зору терміну повернення вкладених засобів і вимірюється числом років, необхідних для їх повернення і з очікуваних щорічних грошових потоків. Щорічними чистими потоками є чисті річні доходи після виплати податків.

Розрізняють *середній термін окупності = початковим капітальним затратам / середньо щорічний чистий грошовий потік та дійсний термін окупності*, що визначає час, потрібний для повернення капітальних затрат з врахуванням запланованих надходжень по окремих роках на протязі терміну дії проекту. Переконаємося на прикладі, що таке дійсний і середній термін окупності.

Нехай в проект «*А*» необхідно вкласти 100000 грошових одиниць в основні засоби, а чисті грошові потоки по роках очікуються в таких сумах: 26000, 24000, 22000, 20000, 18000 гр. од.

$$\textit{Середній термін окупності} = \frac{100000}{22000} = 4{,}55$$

Дійсний термін окупності визначається таким числом:

Рік	Річний чистий грошовий потік	Залишилось внести в проект
0	100000	100000
1	26000	74000
2	24000	50000
3	22000	28000
4	20000	8000
5	8000 (0,44 від 18000)	0

Дійсний термін окупності проекту «*А*» складає 4,44 (чотири + 44% від п'ятого року), що коротше середнього терміну окупності, який складає 4,55 року. Дійсний термін окупності вказує на більш точну оцінку, оскільки він приймає до уваги розподіл за часом чистого грошового потоку. Слід зауважити, що термін окупності вказує лише на швидкість повернення капіталовкладень і не відображає рентабельності проекту. Цей метод не враховує часову вартість грошей, а також час «життя» проекту після терміну окупності: не приймає до уваги динаміку поступлень капіталовкладень після закінчення терміну окупності. Вважається що по відношенню до величини отриманих грошей в будь-який рік експлуатації грошові одиниці мають однакову ціну. Цей недолік можна пом'якшити введенням так званого дисконтованого терміну окупності, який враховує часову вартість грошей на рівні інвестиційного проекту, але не дисконтує чисті грошові потоки від експлуатації проекту після закінчення терміну окупності, що є серйозним недоліком цього методу. Отже, термін окупності можливо застосовувати лише для первинного ранжування проектів на очевидно неприйнятні і на ті, які слід аналізувати більш детально.

За певних передумов за показник рентабельності інвестиційного проекту можна прийняти обернену величину терміна окупності або ***коефіцієнт ефективності капітальних вкладень = чистому грошовому потоку / початкові капітальні вкладення.***

Протягом всього терміну дії проекту це обернене значення терміну окупності є сталою величиною. Переконаємось, що у випадку довгострокового проекту величина терміну окупності наближається до внутрішньої норми дохідності (*ВНД*). Згідно з означенням *ВНД* маємо:

$$C_0 = \frac{R_1}{1+i} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R_n}{(1+i)^n},$$

або

$$C_0 = \frac{R\left[(1+i)^n - 1\right]}{i(1+i)^n} = \frac{R}{i} - \frac{R}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

якщо $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$;

де: C_0- початкові вкладення в інвестиційний проект, R- річний чистий грошовий потік від експлуатації проекту, i - внутрішня ставка дохідності даного проекту. Якщо відомі C_0, R, n можливо обчислити *ВНД* проекту

$$i = \frac{R}{C_0} - \frac{R}{C_0} \frac{1}{(1+i)^n},$$

що дозволяє привести чистий грошовий потік від експлуатації проекту до його теперішньої вартості і таким чином він стає зрівняним із початковим капітальним вкладенням. Чим більше продовжується термін дії проекту n, тим більше ставка *ВНД* наближається до оберненої величини терміну окупності, тобто

$$i = \frac{R}{C_0}, \quad \text{якщо } n \to \infty.$$

Отже, встановлення зв'язку між терміном окупності і *ВНД* дозволяє врахувати термін життя проекту після завершення терміну окупності.

Динамічні методи. Згідно концепції вартості грошей з часом, отримана в майбутньому вартість грошей з часом має меншу вартість, ніж її еквівалент, отриманий на даний момент. А тому вкладені при інвестуванні гроші через певний час збільшаться. Оскільки всі капітальні вкладення характеризуються як затратами так і доходами, необхідно порівняти ці величини з врахуванням неспівпадіння їх з часом та з врахуванням вартості грошей з часом. Для цього необхідно привести доходи і витрати до одного терміну, тим самим співставляючи їх у випадку якщо вони не співпадають з часом. Як правило, вибирається початковий термін, тобто термін початку вкладень, а методи, які базуються на даній концепції, називаються динамічними. Серед них виділяють два підходи: метод оцінки чистої теперішньої вартості (*ЧТВ*), метод оцінки внутрішньої норми дохідності (*ВНД*). Перший із них часто застосовується для оцінки ефективності інвестицій, дозволяючи визначити нижню межу доходу і використати її в якості критерію при виборі найбільш ефективного проекту. Другий метод оцінки ефективності капіталовкладень базується на знаходженні процентної ставки дохідності проекту, яка повинна урівнювати теперішню величину чистих доходів від даного проекту з теперішньою величиною капітальних витрат на даний проект.

Нехай критерієм ефективності інвестицій буде середня ціна капіталу підприємства, тобто ставка дисконту, при якій очікуються чисті грошові потоки за весь час життя проекту приведені до його початкової вартості і таким чином стають співставленими з початковими капітальними вкладеннями.

Отже,

$$ЧТВ = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t - C_t}{(1+i)^t} - C_0 \qquad (84)$$

де: P_t - річні грошові доходи, C_t - річні витрати, C_0 - початкові капітальні вкладення, t - кількість років життя проекту, i - ставка дисконту.

Якщо $P_t - C_t = q_t$, то рівняння (84) прийме вигляд

$$ЧТВ = \sum_{t=1}^{n} \frac{q_t}{(1+i)^t} - C_0 \qquad (85)$$

Якщо вважати, що різниця річних доходів і витрат буде сталою, то формула для визначення теперішньої вартості прийме вигляд:

$$TB = q\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} \qquad (86)$$

Звідси

$$TB = q\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = q\frac{r^n - 1}{ir^n} \qquad (87)$$

де: $r = 1+i$.

Якщо вважати, що доходи і витрати здійснюються неперервно на протязі n років і якщо $(P_t - C_t)\Delta t$ різниця доходів на інтервалі, тоді

$TB = (P_t - C_t)\Delta t \cdot e^{-it}$, де $i = \dfrac{P}{100}$, e^{-i} - коефіцієнт дисконтування.

Початкова вартість при неперервній капіталізації

$$\lim_{t\to 0}\sum_{t=1}^{n}(P_t - C_t)\Delta t e^{-it} = \int_0^n (P_t - C_t)e^{-it}dt$$

Отже, якщо $i = \dfrac{P}{100}$ - стала, початкова вартість буде дорівнювати

$$TB = \int_0^n (P_t - C_t)e^{-it}dt \qquad (88)$$

Якщо $P_t - C_t = q = const$, тоді

$$TB = q\int_0^n e^{-it}dt = -\frac{q}{i}(e^{-in} - 1)$$

Отже,

$$TB = \frac{q}{i}(1 - e^{-in}) \qquad (89)$$

В загальному випадку інвестиції будуть вигідні, якщо $TB > C_0$, тобто приведена вартість інвестицій більше початкових капітальних вкладень. Із останньої формули випливає, що вона залежить від трьох факторів: різниці річних доходів і витрат (q), терміну життя проекту (n), величини процентної ставки (i). Цю залежність виразимо наступним чином:

$$TB = f(q, n, i)$$

Величину q часто називають квазі-рентою, а i - процентною ставкою, за якою квазі-рента приводиться до початкової вартості. В більшості випадків квазі-ренту розраховують за 10 років, оскільки після цього терміну спостерігається помітне зниження її величини. Наприклад, за процентною ставкою 9% теперішня вартість однієї грошової одиниці квазі-ренти в наступному році буде:

Рік	Теперішня вартість
3	0,7721
5	0,6499
8	0,5018
10	0,4224
15	0,2745
23	0,1374

Із таблиці видно, що невизначеність і віддаленість підсилюється з часом і зменшують приведену вартість. Процентна ставка i є третім фактором, який визначає теперішню вартість, а тому покажемо на прикладі залежність чистої теперішньої вартості інвестиції від процентної ставки.

Приклад 47

Вклад 200 гр. од. приносять дохід 400 гр. од. в кінці року. Обчислити чисту теперішню вартість, якщо процентна ставка а) 0%; б) ; в) 100%.

Маємо:

$$\text{а) } ЧТВ = \frac{P_1}{1+i} - C_0 = \frac{400}{1+0} - 200 = 200 \text{ гр. од.}$$

$$\text{б) } ЧТВ = \frac{P_1}{1+i} - C_0 = \frac{400}{1+\infty} - 200 = -200 \text{ гр. од.}$$

$$\text{в) } ЧТВ = \frac{P_1}{1+i} - C_0 = \frac{400}{1+1} - 200 = 0 \text{ гр. од.}$$

Отже, зі збільшенням дисконтної процентної ставки *ЧТВ* буде зменшуватись і навпаки, крім того *ЧТВ*>0 для всіх дисконтних процентних ставок менших 100%. Наприклад, якщо i=30%, ЧТВ дорівнює:

$$ЧТВ = \frac{400}{1+0.3} - 200 = \frac{400-260}{1,3} = 107,69 \text{ гр. од.}$$

Таким чином, від даного проекту очікується дохід у 400 гр. од., що на 140 гр. од. більше мінімального доходу і *ЧТВ*=107,69 гр. од. Оскільки, дисконтна процентна ставка 30% допускає, якщо підприємство інвестує

в однорічний проект 200 гр. од. і отримує в кінці року дохід, що перевищує 260 гр. од., то проект буде прийнятний.

Для багаторічних інвестиційних проектів *ЧТВ* дорівнює:

$$ЧТВ = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{(1+i)^t} - C_0 \ .$$

Якщо повернутись до формули теперішньої вартості інвестиції розглянувши наступну границю

$$\lim_{n\to\infty} q\frac{r^n - 1}{ir^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{i}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = \frac{q}{i},$$

то можна встановити обернену залежність теперішньої вартості від дисконтної процентної ставки i. Такий самий висновок стосується і чистої теперішньої вартості, яка враховує термін життя проекту, тобто всі прибутки і всі витрати. При цьому більш висока величина прибутків в окремі роки враховується в підсумковій сумі *ЧТВ* з більшою вагою. Недолік методу полягає в тому, що *ЧТВ* визначає лише абсолютну результативність проекту і не прив'язана до об'єму потрібних інвестицій, а тому два проекти з однаковою *ЧТВ* можуть мати зовсім різні інвестиційні потреби. Для розрахунку дисконтну процентну ставку необхідно вибирати. Цей метод часто застосовується при оцінці ефективності інвестицій. Він дозволяє визначити нижню межу доходу і використати її в якості критерію при виборі найбільш ефективного проекту.

При визначенні *ВНД* (процентної ставки, за якою різниця приведених доходів і витрат дорівнює нулю), необхідно знайти таку її величину, при якій чиста теперішня вартість дорівнювала б нулеві ($ЧТВ = 0$). Ця дисконтна процентна ставка і є внутрішньою нормою дохідності.

Нехай, $P_1, P_2, \ldots P_s$ - доходи на момент $t_1, t_2, \ldots t_s$ і $C_1, C_2, \ldots C_l$ - витрати на момент $t_1, t_2, \ldots t_l$.

Згідно визначення *ВНД* випливає, що

$$P_1(1+i)^{-t_1} + P_2(1+i)^{-t_2} + \ldots + P_s(1+i)^{-t_s} =$$
$$= C_1(1+i)^{-t_1} + C_2(1+i)^{-t_2} + \ldots + C_l(1+i)^{-t_l}$$

Введемо до розгляду середні терміни потоку платежів t_p, t_c - це моменти часу, при якому приведена сума усіх платежів дорівнює сумі теперішніх вартостей усіх платежів.

Тоді отримаємо:

$$P_1(1+i)^{-t_1}+P_2(1+i)^{-t_2}+...+P_s(1+i)^{-t_s}=(P_1+P_2+...+P_s)(1+i)^{-t_p}$$

$$C_1(1+i)^{-t_1}+C_2(1+i)^{-t_2}+...+C_l(1+i)^{-t_l}=(C_1+C_2+...+C_l)(1+i)^{-t_c}$$

$$(P_1+P_2+...+P_s)(1+i)^{-t_p}=(C_1+C_2+...+C_l)(1+i)^{-t_c}$$

$$\frac{P_1+P_2+...+P_s}{C_1+C_2+...+C_l}=\frac{(1+i)^{t_p}}{(1+i)^{t_c}},$$

$$\frac{P_1+P_2+...+P_s}{C_1+C_2+...+C_l}=(1+i)^{t_p-t_c}$$

Звідси,

$$1+i=\sqrt[t_p-t_c]{\frac{P_1+P_2+...+P_s}{C_1+C_2+...+C_l}}.$$

Тобто,

$$i=\sqrt[t_p-t_c]{\frac{P_1+P_2+...+P_s}{C_1+C_2+...+C_l}}-1$$

або

$$P=100\cdot\left(\sqrt[t_p-t_c]{\frac{P_1+P_2+...+P_s}{C_1+C_2+...+C_l}}-1\right) \qquad (90)$$

І на кінець визначимо середні терміни t_p, t_c, для цього скористаємось біноміальним розкладом.

Для прикладу:

$$(1+i)^{-t}=1-ti+\frac{-t(-t-1)}{2!}i^2+\frac{-t(-t-1)(-t-2)}{3!}i^3+...$$

Нехтуючи малими величинами всіх членів, починаючи з третього, з врахуванням $i=\frac{P}{100}<1$ попередні рівняння перепишемо

$$P_1(1-t_1i)+P_2(1-t_2i)+...+P_s(1-t_si)=(P_1+P_2+...+P_s)(1-t_pi)$$

$$C_1(1-t_1i)+C_2(1-t_2i)+...+C_l(1-t_li)=(C_1+C_2+...+C_l)(1-t_ci)$$

Розкриваючи дужки і відповідно групуючи, отримаємо:

$$P_1t_1+P_2t_2+...+P_st_s=P_1t_p+P_2t_p+...+P_st_p$$

$$C_1t_1+C_2t_2+...+C_lt_l=C_1t_c+C_2t_c+...+C_lt_c$$

або

$$t_p(P_1+P_2+...+P_s)=P_1t_1+P_2t_2+...+P_st_s$$

$$t_c(C_1+C_2+...+C_l)=C_1t_1+C_2t_2+...+C_lt_l$$

Таким чином, середні терміни платежів дорівнюють:

$$t_p=\frac{P_1t_1+P_2t_2+...+P_st_s}{P_1+P_2+...+P_s} \qquad (91)$$

$$t_c=\frac{C_1t_1+C_2t_2+...+C_lt_l}{C_1+C_2+...+C_l} \qquad (92)$$

Приклад 48

Нехай початкові капітальні вкладення дорівнюють 400 гр. од., а наступні – другий, третій і четвертий рік – по 300 гр. од. Відповідні доходи будуть: 440, 500, 600 і 400 гр. од. Знайти *ВНД*.

Скористаємося формулою (90), але спочатку обчислимо середні терміни платежів t_p, t_c, за формулами (91) і (92).

$$t_p = \frac{440\cdot1+500\cdot2+600\cdot3+400\cdot4}{1940} = \frac{4840}{1940} = 2{,}494845$$

$$t_c = \frac{400\cdot1+300\cdot2+300\cdot3+300\cdot4}{1600} = \frac{3100}{1600} = 1{,}9375$$

ВНД дорівнює:

$$P = 100\left(\sqrt[0.557345]{\frac{1940}{1600}}-1\right) = 100\left(\sqrt[0.557345]{1{,}21}-1\right) = 40{,}8$$

Оскільки %, то $i = \frac{P}{100} = 0{,}408$.

Зауважимо, що проект є прийнятним, якщо *ВНД* дорівнює або перевищує альтернативну вартість капіталу.

Як знайти середню або маргінальну величину *ВНД*?

Нехай, в момент $t=0$ капіталовкладення складають величину a, а щорічні доходи – b, де $b = f(a)$, тобто існує необмежене число інвестиційних можливостей.

Необхідну умову екстремуму для теперішньої величини

запишемо таким чином:

$$\frac{dC}{da} = \frac{1}{i}\frac{db}{da} - 1 = 0$$

Звідси

$$\frac{db}{da} = i, \text{ де } i = ВНД.$$

Граничний *ВНД* = i позначимо $r(a)=i$.

Теперішня вартість C буде максимальною, якщо друга похідна менше нуля, тобто

$$\frac{d^2b}{da^2} = \frac{dr}{da} < 0.$$

Отже, максимальна теперішня вартість проекту забезпечується за допомогою інвестицій, у яких граничний *ВНД* дорівнює розрахунковій процентній ставці.

Приведений метод оцінки ефективності капіталовкладень базується на знаходженні процентної ставки дохідності проекту, яка повинна урівнювати теперішню величину чистих доходів від даного проекту з теперішньою величиною капітальних витрат на даний проект.

§6. Оцінка інвестиційного проекту

Отримання об'єктивної і достовірної оцінки інвестиційного проекту передбачає ретельний фінансово-економічний аналіз вкладення коштів. Одним з варіантів такого аналізу є оцінка чутливості інвестиційного проекту, тобто схильність проекту до різних факторів. Основний підхід до аналізу чутливості полягає в розрахунку прибутковості проекту в умовах найбільш ймовірного прогнозу зміни основних параметрів виробництва. Завдання цього аналізу полягає в тому, щоб, вибравши найбільш суттєві параметри, визначити їх вплив на вартість проекту при зміні величин цих параметрів.

Формальне визначення чутливості:

$$S_{x_i}^{y} = \frac{x_i}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_i}, \tag{93}$$

де: y – початковий параметр проекту (його окремо взятий або інтегральний показник ефективності); x_i $(i=1, 2, \ldots)$ – внутрішні змінні параметри проекту.

Часткова похідна $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ є функцією чутливості або коефіцієнтом впливу параметра x_i на показник проекту. Відношення $\frac{x_i}{y}$ вводиться для нормування і дає змогу здобути величину $S_{x_i}^y$ у відносних одиницях.

Аналізу чутливості передує фінансова оцінка інвестиційного проекту, в ході якої розраховуються такі показники: сума експлуатаційних витрат, виручка від реалізації продукції, прибуток і податки, чиста приведена вартість (*ЧПВ*), внутрішня норма рентабельності, термін окупності. Чутливість проекту можна оцінювати за кожним з цих показників.

Найбільш узагальнюючим показником доцільності реалізації того чи іншого інвестиційного проекту є чиста приведена вартість:

$$ЧПВ = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \qquad (94)$$

де: C_t – чистий грошовий потік наприкінці періоду t; T – життєвий цикл інвестиційного проекту; r – ставка дисконтування.

Чистий грошовий потік визначається як різниця між доходами і витратами від реалізації інвестиційного проекту і включає як доходи – прибуток від виробничої діяльності (P) і амортизаційні відрахування (Am), як витрати – інвестиції в капітальне виробництво, тобто відтворення основних фондів, які вибувають за цей період (I). Отже, чистий грошовий потік визначається за формулою:

$$C_t = P + Am - I. \qquad (95)$$

Чистий прибуток у загальному вигляді визначається так:

$$P = [X \cdot C - (A + b \cdot X) + L] \cdot \left(1 - \frac{N_p}{100\%}\right), \qquad (96)$$

де: X – обсяг виробництва продукції в натуральному вираженні; C – ціна продукції; A – умовно-постійні витрати на випуск продукції; b – умовно-змінні витрати на одиницю продукції; L – ліквідаційна виручка від продажу об'єкта; N_p – діюча ставка оподаткування прибутку підприємств (30%).

Підставимо формулу (96) у формулу (95) і спростимо вираз:

$$C_t = 0{,}7 \cdot X \cdot (C - b) + 0{,}7 \cdot (L - A) + Am - I. \qquad (97)$$

Найбільш суттєвий вплив на величину грошового потоку, а отже і на *ЧПВ*, здійснюють обсяг виробництва продукції в натуральному вираженні і ціна продукції.

Введемо позначення:

$$B = 0{,}7 \cdot (L - A) + Am - I \qquad (98)$$

Тоді

$$ЧПВ = \sum_{t=0}^{T} \frac{0{,}7 \cdot X \cdot (C - b) + B}{(1+r)^t}. \qquad (99)$$

Виходячи з виразу (99), можна визначити чутливість *ЧПВ* проекту до зміни обсягу виробництва продукції в натуральному вираженні, зміни ціни продукції і вибору величини ставки дисконтування. Для цього знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial X} = \sum_{t=1}^{T} \frac{0{,}7(C - b)}{(1+r)^t}, \qquad (100)$$

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial C} = \sum_{t=1}^{T} \frac{0{,}7 \cdot X}{(1+r)^t}, \qquad (101)$$

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial r} = \sum_{t=1}^{T}(-t)\frac{0{,}7 \cdot X \cdot (C-b)+B}{(1+r)^{t+1}}. \qquad (102)$$

Усі параметри можуть змінюватись як кожен окремо, так і одночасно. У першому випадку достатньо використати відповідну похідну для знаходження чутливості відповідно до формули (93). У другому, коли одночасно змінюються всі три параметри, потрібно використати чутливість за трьома змінними, яка відповідає градієнту:

$$grad(ЧПВ) = \left\{\frac{\partial ЧПВ}{\partial X}, \frac{\partial ЧПВ}{\partial C}, \frac{\partial ЧПВ}{\partial r}\right\}. \qquad (103)$$

Тоді відносну зміну *ЧПВ*, зумовлену невеликими і незалежними абсолютними відхиленнями параметрів X, C, r, (ΔX, ΔC, Δr відповідно), можна визначити так:

$$K_{ЧПВ} = \frac{1}{ЧПВ} \cdot \left[\frac{\partial ЧПВ}{\partial X} \cdot \Delta X + \frac{\partial ЧПВ}{\partial C} \cdot \Delta C + \frac{\partial ЧПВ}{\partial r} \cdot \Delta r\right]. \qquad (104)$$

Величина $K_{ЧПВ} = \dfrac{\Delta ЧПВ}{ЧПВ}$ є коефіцієнтом чутливості інвестиційного проекту за критерієм чистої приведеної вартості. Він показує, в якій мірі відхилення вибраних параметрів впливають на зміну *ЧПВ*, що дає змогу вибрати один або кілька проектів з багатьох можливих.

Розглянемо приклад розрахунку чутливості інвестиційних проектів за критерієм *ЧПВ* (табл.1).

Таблиця 1

Показники	Одиниця вимірювання	Проекти		
		А	В	С
Чиста приведена вартість (*ЧПВ*)	тис.грн.	91,3	2439,4	860,1
Термін функціонування виробничих потужностей (T)	роки	3	4	6
Обсяг виробництва (X)	тис.шт.	47	45	15
Умовно-змінні витрати на одиницю продукції (b)	грн/шт.	30	180	90
Ціна продукції (C)	грн/шт.	65	380	90
Ставка дисконтування (r)	%	20	23	25
Можливі зміни параметрів	1%			
X		+	-	+
C		-	+	-
r		-	+	-

Розрахуємо коефіцієнт чутливості за критерієм *ЧПВ* для кожного інвестиційного проекту. Результати розрахунків запишемо в табличній формі (табл.2).

Таблиця 2

Проекти	ΔX, шт.	ΔC, тис.грн.	Δr,%	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial x}$, тис. грн/шт.	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial c}$, шт.	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial r}$, тис.грн.	$K_{ЧПВ}$
A	470	– 0,00065	– 0,01	0,05	69287,4	– 313,90	0,20
B	– 450	0,0038	0,01	0,34	77112,0	– 4610,75	0,04
C	150	– 0,0018	– 0,01	0,18	30985,5	– 2294,60	0,007

Можливі зміни параметрів проекту визначаються на основі експертних оцінок. При цьому завдання експертів зводяться до таких двох напрямків:

1) визначити найбільш суттєві параметри, що впливають на *ЧПВ*;

6-12-173

2) визначити найбільш ймовірні напрямки зміни цих параметрів.

У розрахунках за формулою (104) для зіставлення результатів відносні зміни параметрів мають бути рівні (наприклад, 1%).

Знайдене значення $K_{ЧПВ}$ дає змогу оцінити чутливість ЧПВ до зміни параметрів X, C, r. Очевидно, найбільшу стійкість має той проект, якому відповідає мінімальне значення модуля $K_{ЧПВ}$ (проект С).

Для підвищення точності розрахунків можливе врахування ймовірності при визначенні напрямків зміни параметрів.

Аналогічно можна врахувати вплив й інших параметрів на *ЧПВ* проекту (наприклад, витрат на випуск продукції, банківського проценту, ставки податку на прибуток та ін.).

Вправи

1. Банк видав позику розміром 100 тис. грн. 30.01 до 05.10 включно під 5% річних. Рік високосний. Знайти з точністю до тис. грн. розмір погашувального платежу, обчислюючи точну кількість днів позики.

2. Надана позика 25 тис. грн. В перше півріччя простий відсоток складає 30%. В другому півріччі – 35%. Термін позики – рік. Знайти розмір боргу на кінець угоди.

3. Позика надана на 100 днів під 45% річних простих. В кінці терміну боржник сплатить 15 тис. грн. Рік високосний. Який кредит отримав боржник?

4. В умовах задачі 3 знайти суму дисконту.

5. Кредит 25000 грн. видано на рік під облікову ставку 19%. Знайти суму отриманих грошей.

6. В умовах задачі 5 знайти дисконт.

7. Вексель номіналом 100000 грн. облікований у банку за 100 днів до терміну погашення по обліковій ставці 20%. Знайти суму, отриману векселетримачем.

8. В умовах задачі 7 знайти дисконт, отриманий банком.

9. Вексель, виданий на 15000 грн. зі сплатою 17.11. Власник векселя облікував його у банку 23.09. по обліковій ставці 15%. Знайти отриману суму.

10. 10000 грн. видається на 96 днів під просту облікову ставку 20%. Знайти суму, що треба сплатити боржнику.

11. Борг 10 тис. грн. зріс до 12 тис. грн. На суму боргу нараховувалися прості відсотки – 40%. Рік не високосний. Знайти тривалість позики у днях.

12. Початкова сума боргу 10 тис. грн. За 90 днів передбачається погашення у розмірі 11 тис. грн. Визначити дохідність операції для кредитора у вигляді простої відсоткової ставки.

13. За даними задачі 12 визначити дохідність операції у вигляді простої облікової ставки.

14. Відсоткова складна ставка рівна 35%. Термін позики 4 роки. Початкова сума 1000 грн. Знайти нарощену суму.

15. В умовах задачі 14 термін угоди 3 роки 100 днів. Знайти нарощену суму. Мішаний метод нарахувань. Рік невисокосний.

16. Визначити кількість років збільшення капіталу у 5 разів для складної і простої ставки $i = 25\%$.

17. Номінальна ставка $j = 36\%$. Щомісячне нарахування відсотків протягом 2-х років. Знайти множник нарощення.

18. В умовах задачі 17 нарахування відсотків по півріччям. Знайти множник нарощення.

19. Знайти ефективну ставку за даними прикладу 17.

20. Знайти ефективну ставку за даними прикладу 18.

21. Визначити теперішню величину 1500 грн., які будуть сплачені через 3 роки при ставці дисконтування 25% складних річних.

22. Маємо зобов'язання сплатити $S_1 = 4000$ грн. через 9 місяців і $S_2 = 3500$ грн. через 5 місяців. Знайти теперішні значення цих сум P_1, P_2 при ставці порівняння 25% простих річних.

23. За даними задачі 22 знайти P_1, P_2 при 55% простих річних.

24. За даними задачі 21 дисконтування відбувається щоквартально. Знайти теперішню величину.

25. Знайти суму дисконту при продажу фінансового інструменту на суму 2000 грн. з терміном погашення 2 роки. Складна облікова ставка 22% річних.

26. В умовах задачі 25 дисконтування відбувається щоквартально. Знайти дисконт.

27. В умовах задачі 25 знайти ефективну облікову ставку.

28. Початкова сума боргу 10000 грн., термін погашення 3 роки. Кредитор застосував складну облікову ставку 19%. Знайти нарощену суму.

29. В умовах задачі 28 знайти суму дисконту.

30. За який термін у роках сума 1000 грн. зросте до 1200 грн., якщо на неї нараховуються складні річні відсотки 30% один раз на рік?

31. В умовах задачі 30 нарахування відсотків щоквартальне. Знайти термін зростання.

32. Визначити дохідність купівлі фінансового інструменту вартістю 20000 грн., якщо після 2-х років по ньому отримується 22000 грн.

33. При обліку векселя, виписаного на 3 роки, власник бажає отримати 90% його суми. Яка складна облікова ставка його задовольнить?

34. Знайти просту відсоткову ставку, еквівалентну простій обліковій $d = 20\%$ при терміні сплати по векселю 100 днів. База року $K = 365$ днів.

35. Операція обліку приносить 25% простих відсотків доходу на рік. Термін позики 96 днів, база року 365 днів. Знайти просту облікову ставку.

36. Позика, видана під 30% складних річних. Знайти еквівалентну просту ставку при терміні 3 роки.

37. Векселі з термінами 05.03. – $S_1 = 1200$ грн., 12.05. – $S_2 = 25000$ грн. замінено одним з продовженням до 01.08. Облікова ставка банку 19%. Визначити суму консолідованого векселю.

38. Платежі $S_1 = 25000$ грн., $S_2 = 45000$ грн. з термінами 08.03. і 01.09. об'єднані в один терміном сплати 01.06. за ставкою $i = 35\%$ простих річних. Знайти суму консолідованого платежу. База року $K = 365$ днів.

39. Платежі 25 тис. грн., 30 тис. грн., 45 тис. грн. сплачуються через 20, 45, 60 днів після початку року. Їх замінюють платежем 100 тис. грн. Знайти термін консолідації у днях.

40. Створюється фонд, внески вносяться протягом 10 років один раз наприкінці року по 100 тис. грн. На зібрані гроші нараховуються відсотки за ставкою 10% річних. Знайти розмір фонду наприкінці терміну.

41. В умовах задачі 40 нарахування відсотків щоквартальне. Знайти розмір фонду.

42. В банк щороку вносяться 1500 грн. Річна ставка 4%. Визначити суму вкладів через 20 років. Нарахування відсотків один раз на рік.

43. Яка сума забезпечить періодичні виплати у розмірі 15000 грн. протягом 8-ми років, якщо на ці вклади будуть нараховуватися відсотки за ставкою 12% і виплати проводитимуться наприкінці року?

44. В умовах задачі 43 виплати проводяться щомісячно. Відповісти на питання задачі.

45. Ціна автомобіля \$10000. Річна ставка банку 20%. Нарахування щорічне. Яку суму треба вносити щорічно, щоб через 12 років зібрати гроші для придбання автомобіля?

46. В умовах задачі 45 внески робляться щомісячно. Відповісти на питання задачі.

47. Робітник перераховує у банк 100 грн. щомісячно. На цю суму щомісячно нараховується 12% річних. Яка сума нагромадиться на рахунку робітника за 4 роки?

48. Продається фінансове зобов'язання сплачувати щорічно в кінці року протягом 5-ти років по 2500 грн. Яка теперішня вартість цього зобов'язання, якщо діюча ринкова ставка по довгостроковим кредитам – 30% річних?

49. Акція приносить сталий дохід 3 грн. щорічно. Яка її вартість, якщо ринкова ставка по кредитах – 30% річних?

50. За який термін окупляться інвестиції 10000 грн., якщо планується щорічна віддача по 3500 грн., а діюча ринкова ставка по кредитах – 30%?

51. Інвестор пропонує підприємцю інвестиції 100000 грн. під 35% річних при терміні окупності 5 років. Яким повинен бути сталий щорічний дохід, щоб виконати вимоги інвестора?

52. Дається позика 120000 грн. на 5 років під 20% річних. Погашення рівними терміновими сплатами в кінці року. Скласти план погашення.

Частина II

МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Розділ III.

Класичні моделі оптимізації інвестиційного портфеля

Методологія системного аналізу в останні десятиріччя активно застосовується для прийняття рішень, що стосуються фінансових та виробничих проблем. У фінансовій теорії актуальним на даний час є „стратегічне планування” та „ситуаційний аналіз” інвестиційного процесу. Задачі управління інвестиційним портфелем розглядаються в межах теорії інвестиційного менеджменту, яка є складовою частиною фінансової теорії. Однією з найважливіших проблем сучасної інвестиційної діяльності є визначення та аналіз динаміки формування вартості цінного паперу, обтяженого ризиком, та інвестиційного портфеля загалом, а також факторів, що впливають та зумовлюють варіації їх фінансових характеристик. При розв’язанні задач такого типу в інвестиційному менеджменті особливу увагу приділяють моделям, які враховують вплив макроекономічних та мікроекономічних факторів. Питанням побудови таких моделей присвячені роботи Г.Марковіца, У.Шарпа, Дж. Тобіна та ряду інших відомих зарубіжних учених.

Дослідження в даній області показують, що важливим для інвестора є не тільки аналіз макроекономічних та мікроекономічних показників, можливість прогнозування майбутніх їх значень, а також врахування об’єктивних законів функціонування ринку цінних паперів. До загальновідомих макроекономічних показників, що мають значний вплив на ціноутворення, є індекс ринку та індекс інфляції, можливе врахування й інших показників - величини податків на купівлю цінних паперів, зміни в розмірі експорту, імпорту тощо. Теоретичний аналіз показує, що побудова оцінок та прогнозування даних показників дозволяє ефективно розв’язувати складні задачі макроекономічного моделювання.

§1. Модель Марковіца

Основна ідея моделі Марковіца полягає в тому, щоб статистично розглядати майбутній прибуток, що приноситиме конкретний фінансовий інструмент, як випадкову змінну, тобто доходи за окремими інвестиційними об'єктами випадково змінюються в деяких межах. Тоді, якщо якимось чином випадково визначити за кожним інвестиційним об'єктом цілком певну ймовірність настання, можна отримати розподіл ймовірності одержання доходу за кожним альтернативним вкладенням. Це отримало назву ймовірнісної моделі ринку. Для спрощення в моделі Марковіца вважається, що доходи розподілені нормально.

За моделлю Марковіца визначаються показники, що характеризують обсяг інвестицій і ризик, що дозволяє порівнювати між собою різні альтернативи вкладення капіталу з точки зору поставлених цілей і тим самим створити масштаб для оцінки різних комбінацій.

Як масштаб сподіваного доходу з ряду можливих доходів на практиці використовують найбільш ймовірносне значення, яке в разі нормального розподілу співпадає з математичним сподіванням.

Нехай формується пакет із n цінних паперів.

Математичне сподівання доходу по i-му цінному паперу (m_i) розраховується в такий спосіб:

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} \cdot P_{ij} \qquad (1)$$

де: R_{ij} – можливий дохід по і-му цінному паперу;
P_{ij} – ймовірність одержання доходу;
n – кількість цінних паперів.

Для виміру ризику служать показники розсіювання, а тому чим більший розкид величин можливих доходів, тим більша небезпека, що сподіваний дохід не буде отриманий. Мірою розсіювання є середньоквадратичне відхилення σ_i, і чим більше це значення, тим більше ризик:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(R_{ij} - m_i)^2} \qquad (2)$$

В моделі Марковіца для виміру ризику замість середньоквадратичного відхилення використовується дисперсія, яка дорівнює квадрату σ_i.

Інвестора, який має на меті оптимальне вкладення капіталу, цікавить не стільки порівняння окремих видів цінних паперів між собою, скільки порівняння всіляких портфелів, оскільки це дозволяє використати ефект розсіювання ризику, тобто визначаються сподіване значення доходу та дисперсії портфеля. Сподіване значення доходу m_p портфеля цінних паперів визначається як сума найбільш ймовірних доходів m_i різних цінних паперів n. При цьому доходи зважуються з відносними частками W_i, відповідно вкладенням капіталу в кожний цінний папір.

А тому, будь-який портфель цінних паперів характеризується двома величинами: сподіваною дохідністю

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} W_i \cdot m_i \qquad (3)$$

W_i – частка капіталу, що інвестована в i-ий цінний папір;
m_i – сподівана дохідність i-го цінного паперу;
m_p – сподівана дохідність портфеля;
і мірою ризику – середньоквадратичним відхиленням дохідності від сподіваного значення

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{ij}} \qquad (4)$$

σ_p – міра ризику портфеля;
σ_{ij} – коваріація між дохідностями i-го і j-го цінних паперів;
W_i, W_j – частки капіталів, що інвестовані в i-ий і j-ий цінні папери;
n – кількість цінних паперів в портфелі.

Слід зазначити, що для визначення дисперсії сума (3) застосовується з певними обмеженнями, оскільки зміна курсу акцій на ринку відбувається не ізольовано один від одного, а охоплює увесь ринок в цілому. А тому дисперсія залежить не тільки від міри розсіювання окремих акцій, а також і від того, як всі цінні папери в сукупності одночасно знижуються або підвищуються за курсовою вартістю, тобто від кореляції між змінами курсів окремих цінних паперів. При сильній кореляції між окремими курсами (тобто якщо всі акції одночасно підвищуються або знижуються за курсовою вартістю) ризики за рахунок вкладів в різні цінні папери не можна ні зменшити, ні збільшити. Якщо ж курси акцій абсолютно не корелюють між собою, то в граничному випадку (портфель містить нескінченну кількість цінних паперів) ризик можна було б виключити повністю, оскільки коливання курсів в середньому були б рівні нулю. На практиці число цінних паперів в портфелі завжди скінченне, а тому розподілом інвестицій в різні цінні папери можна лише зменшити ризик, але повністю його виключити неможливо. Отже, при визначенні ризику конкретного портфеля цінних паперів необхідно враховувати кореляцію курсів акцій. В якості показника кореляції Г.Марковіц використовує коваріацію між змінами курсів окремих цінних паперів.

Таким чином, дисперсія всього портфеля розраховується за такою формулою:

$$D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i \cdot W_j \cdot \sigma_{ij}.$$

Коваріація дохідностей цінних паперів (σ_{ij}) дорівнює кореляції між ними, помноженій на добуток їх стандартних відхилень:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

σ_{ij} – коефіцієнт кореляції дохідностей;
σ_i, σ_j – стандартне відхилення дохідностей.

Коефіцієнт кореляції між двома цінними паперами:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{(T-1)\sigma_i\sigma_j}\sum_{t=1}^{T}\left[(r_{it}-r_i)(r_{jt}-r_j)\right] \qquad (5)$$

r_{it}, r_{jt} – дохідність i-го та j-го цінних паперів в період часу t.

Слід зазначити, що використання Г.Марковіцем дисперсії, як міри портфельного ризику, дозволило вивчити сутність та структуру ризику на ринку цінних паперів та надати чітке математичне обґрунтування такому широковживаному підходу в сучасній фінансовій теорії як диверсифікація. Сукупний ризик портфеля можна розкласти на дві складові частини. З одного боку, це так званий систематичний (ринковий) ризик, який не можна виключити і якому підвласні всі цінні папери практично в рівній мірі. З іншого – специфічний (власний) ризик для кожного конкретного цінного паперу, якого можна уникнути за допомогою диверсифікації портфеля цінних паперів. При цьому сума вкладених коштів за всіма інвестиційними об'єктами повинна дорівнювати загальному обсягу інвестиційних вкладень, тобто сума відносних часток в загальному обсязі повинна дорівнювати одиниці.

Загальний висновок полягає в тому, що розподіляючи капітал між цінними паперами різних емітентів, ризик портфеля зменшується, але не до нуля, а до певної асимптоти (рис.1). Асимптота відповідає рівню систематичного (ринкового) ризику – ризику, який не може бути зменшений шляхом диверсифікації. Ринковий ризик породжується причинами, які впливають на ринок цінних паперів загалом – макроекономічна ситуація, інфляція, динаміка економічних спадів та піднесень, політична нестабільність тощо.

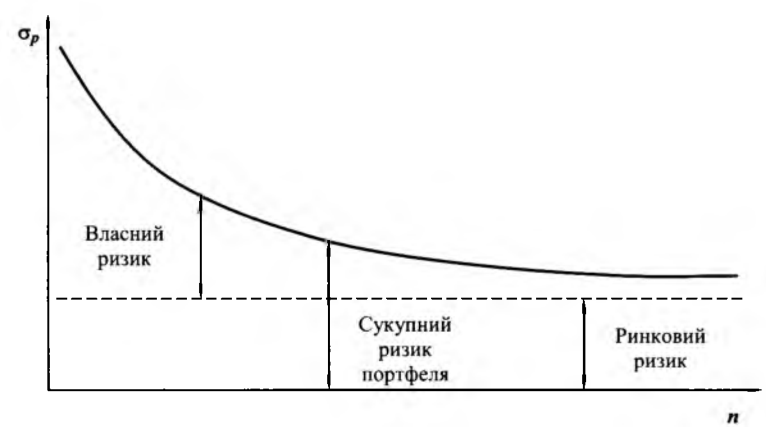


Рис. 1. Ризик портфеля та диверсифікація

Проблема полягає в чисельному визначенні відносних часток акцій і облігацій в портфелі (значень W_i), які найбільш вигідні для власника. Г.Марковіц керується тим, що зі всієї множини «допустимих» портфелів, тобто тих, що задовольняють обмеженням, необхідно виділити лише ті, які ризикованіші, ніж інші. Це портфелі, що мають при однаковому доході більший ризик (дисперсію), в порівнянні з іншими, або портфелі, які приносять менший дохід при однаковому рівні ризику. За допомогою розробленого Г.Марковіцем методу критичних ліній можна виділити неперспективні портфелі, що не задовольняють обмеженням. Тим самим залишаються лише ефективні портфелі, тобто портфелі, які містять мінімальний ризик при заданому доході, або які приносять максимально можливий дохід при заданому максимальному рівні ризику, на який може піти інвестор.

Даний факт має велике значення в сучасній портфельній теорії. Відібрані таким чином портфелі об'єднують в список, який містить дані про процентний склад портфеля із окремих цінних паперів, а також про дохід і ризик портфелів. Вибір конкретного портфеля залежить від максимального ризику, на який готовий піти інвестор.

Пояснення того факту, що інвестор повинен розглядіти лише підмножину можливих портфелів, міститься в наступній теоремі про ефективну множину: *«Інвестор обере свій оптимальний портфель з множини портфелів, кожен з яких забезпечує максимальну сподівану дохідність для певної міри ризику і мінімальний ризик для певного значення сподіваної дохідності»*. Набір портфелів, що задовольняють цим двом умовам, називається ефективною множиною.

Тобто пряма задача набуває вигляду:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} W_k \times r_k \to \max; \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(W_i \times \sigma_i \times W_j \times \sigma_j)} \le \sigma_{req} \\ W_k \ge 0; \\ \sum W_k = 1; \end{cases} \tag{6}$$

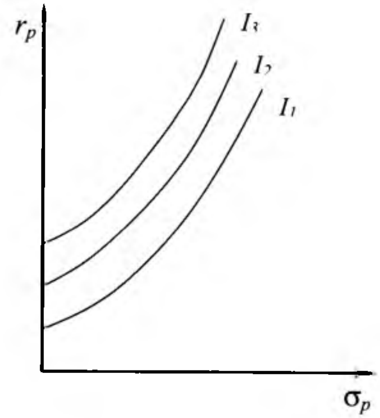
Обернена задача розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} W_k \times r_k \to R_{req}; \\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}(W_i \times \sigma_i \times W_j \times \sigma_j)} \to \min; \\ W_k \ge 0; \\ \sum W_k = 1; \end{cases} \tag{7}$$

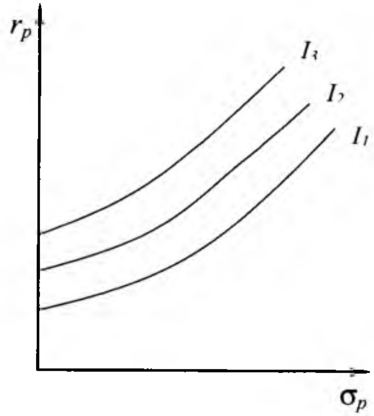
На рисунку 2 представлені недопустимі, допустимі і ефективні портфелі, а також лінія ефективної множини. Портфель ефективний, якщо він задовольняє обмеженням і крім того для заданого доходу (r_p) містить менший ризик (σ_p) у порівнянні з іншими портфелями, які приносять такий же дохід, або при певному ризику приносять більш високий дохід у порівнянні з іншими комбінаціями.

Рис. 2. Допустима та ефективні множини

Для вибору найбільш прийнятного для інвестора портфеля цінних паперів можна використовувати криві байдужості. В даному випадку ці криві відображають перевагу інвестора в графічній формі. Якщо ж розглядати відношення інвестора до ризику і дохідності в графічній формі,



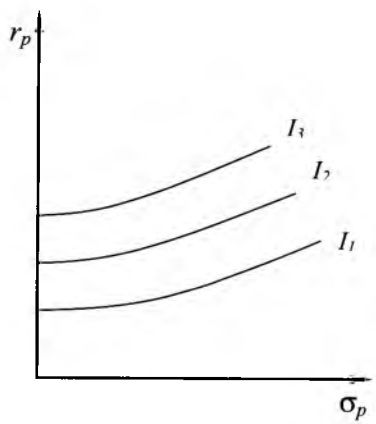
а) Інвестор з високою мірою уникнення ризику



б) Інвестор з середньою мірою уникнення ризику

відкладаючи по горизонтальній осі ризик, мірою якого є середньоквадратичне відхилення (σ_p), а по вертикальній осі – винагорода, мірою якої є сподівана дохідність (r_p), то можна отримати множину кривих байдужості.

Маючи в своєму розпорядженні інформацію про сподівану дохідність і стандартні відхилення прийнятних портфелів цінних паперів, можна побудувати карту кривих байдужості, що відображають переваги інвесторів. Карта кривих байдужості – це спосіб опису переваг інвестора щодо можли-



в) Інвестор з низькою мірою уникнення степенем уникнення ризику

Рис. 3. Карта кривих байдужості інвесторів

вого ризику повністю або частково втратити гроші, що вкладаються в портфель цінних паперів або отримати максимальний дохід.

Різні позиції інвесторів по відношенню до ризику можна представити у вигляді карт кривих байдужості, що відображають корисність вкладень у ті або інші інвестиційні портфелі (рис.3). Кожна з вказаних на рисунку 3 позицій інвестора щодо ризику характерна тим, що будь-яке зменшення ним ризику r_p позначається на скороченні дохідності і стандартному відхиленні кожного з портфелів. І оскільки портфель включає набір різних паперів, то цілком з'ясовною є залежність його від сподіваної дохідності і стандартного відхилення кожного цінного паперу, що входить в портфель.

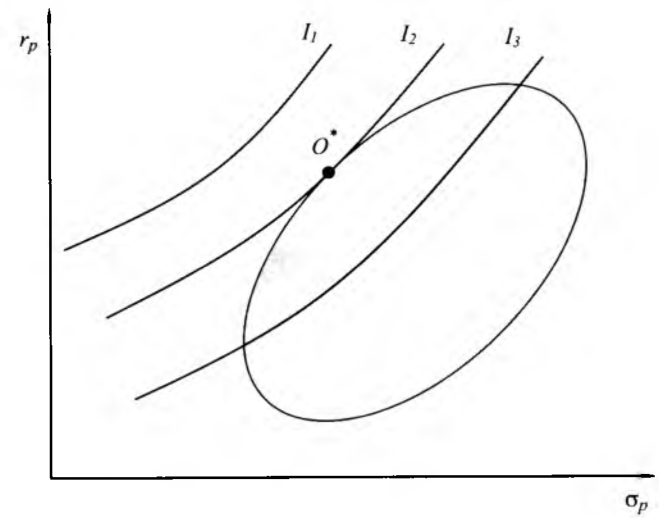


Рис. 4. Вибір оптимального портфеля

Інвестор повинен вибирати портфель, що лежить на кривій байдужості, розташованій вище і лівіше за всі останні криві. Виходячи з цього, оптимальний портфель знаходиться в точці дотику однієї з кривих байдужості до найефективнішої множини. На рисунку 4 оптимальний портфель для деякого інвестора позначено O*.

Визначення кривої байдужості клієнта є нелегким завданням. На практиці її часто отримують в непрямій або наближеній формі шляхом оцінки рівня толерантності ризику, означуваної як найбільший ризик, який інвестор готовий прийняти для даного збільшення сподіваної дохідності.

Тому, з точки зору методології модель Марковіца можна визначити як практично-нормативну, що не означає нав'язування інвесторові певного стилю поведінки на ринку цінних паперів. Завдання моделі полягає в тому, щоб показати, як поставлені цілі можна досягнути на практиці.

§2. Індексна модель Шарпа

На відміну від моделі Г.Марковіца в індексній моделі У.Шарпа розподіл доходів окремих цінних паперів задавати не потрібно. Досить визначити лише величини, що характеризують цей розподіл: математичне сподівання, середньоквадратичне відхилення і коваріацію між дохідностями окремих цінних паперів. На практиці для порівняно невеликого числа цінних паперів провести такі розрахунки для визначення сподіваного доходу і дисперсії можливо. При визначенні коефіцієнта кореляції трудомісткість обчислень вельми велика.

У 1960-х роках Уільям Шарп першим провів регресійний аналіз ринку акцій США. Для уникнення високої трудомісткості Шарп запропонував індексну модель. Причому він не розробив новий метод формування портфеля, а спростив проблему таким чином, що наближене її вирішення може бути знайдене із значно меншими зусиллями. У.Шарп ввів β - фактор, який відіграє особливу роль у сучасній теорії портфеля:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}, \qquad (8)$$

де: σ_{iM} – коваріація між темпами зростання курсу цінного паперу і темпами зростання ринку;

σ^2_M – дисперсія дохідності ринку.

Показник «бета» характеризує міру ризику цінного паперу і показує, у скільки разів зміна ціни паперу перевищує зміну ринку в цілому. Якщо бета більше одиниці, то даний цінний папір можна віднести до

інструментів з підвищеною мірою ризику, оскільки його ціна рухається в середньому швидше за ринок. Якщо бета менше одиниці, то міра ризику цього паперу відносно низька, оскільки протягом періоду глибини розрахунку його ціна змінювалася повільніше, ніж ринок. Якщо бета менше нуля, то в середньому рух ціни цього паперу був протилежним руху ринку під час періоду глибини розрахунку.

У індексній моделі Шарпа використовується тісна (і сама по собі небажана із-за зменшення ефекту розсіювання ризику) кореляція між змінами курсів окремих акцій. Передбачається, що необхідні вхідні дані можна приблизно визначити за допомогою лише одного базисного чинника і відношень, які пов'язують його зі зміною курсів окремих акцій. Припускаючи існування лінійного зв'язку між курсом акції і певним *індексом* (наприклад, індекси РТС, DJIA, S&P500), можна за допомогою прогнозної оцінки значення *індексу* визначити сподіваний курс акції і розрахувати сукупний ризик кожної акції у формі сукупної дисперсії.

Припустимо, що дохідність звичайної акції за даний період часу (наприклад, місяць) зв'язана з дохідністю за даний період акції на ринковий індекс, такий, приміром, як широковідомий S&P500 або Dow Jones. В такому випадку зі зростанням ринкового індексу, ймовірно, буде зростати і ціна акції, а з падінням ринкового індексу, відповідно, буде падати і ціна акції. Один із шляхів відображення даного взаємозв'язку носить назву ***ринкова модель (Market model)***:

$$r_i = \alpha_{iI} + \beta_{iI} \cdot r_I + \varepsilon_{iI}, \qquad (9)$$

де: r_i – дохідність цінного паперу i за даний період;

r_I – дохідність обраного в моделі ринкового індексу I за цей же період;

α_{iI} – коефіцієнт зміщення (чиста сподівана дохідність цінного паперу i);

β_{iI} – коефіцієнт нахилу (чутливість дохідності цінного паперу i до змін у дохідності індексу I);

ε_{iI} – випадкова похибка (складова, яка характеризує залишковий або специфічний ризик цінного паперу i).

Припускаючи, що коефіцієнт нахилу додатній, із рівняння (9) мож-

7-12-173

на зауважити наступне: чим вища дохідність на ринковий індекс, тим вища буде дохідність цінного паперу (зауважимо, що середнє значення випадкової похибки дорівнює нулю).

Розглянемо акції A, для яких α_{iI}=2% і β_{iI}=1,2. Це означає, що для акції A ринкова модель буде виглядати наступним чином:

$$r_A = 2\% + 1{,}2\, r_I + \varepsilon_{AI}\ .$$

Таким чином, якщо ринковий індекс має дохідність у 10%, то сподівана дохідність цінного паперу складає 14% $(2\% + 1{,}2 \times 10\%)$. Якщо ж дохідність ринкового індексу дорівнює (– 5%), то дохідність цінного паперу A очікується рівною: -4% $(2\% + 1{,}2 \times (-5\%))$. Член рівняння ε_{AI} відомий як випадкова похибка (random error term), просто показує, що ринкова модель не дуже точно пояснює дохідність цінних паперів. Іншими словами, коли ринковий індекс зростає на 10% або зменшується на 5%, то дохідність цінного паперу A не обов'язково дорівнює 14% або - 4% відповідно. Різниця між дійсним і сподіваним значеннями дохідності при відомій дохідності ринкового індексу приписується випадковій похибці. Таким чином, якщо дохідність цінного паперу склала 9% замість 14%, то різниця в 5% є випадковою похибкою (тобто, ε_{AI}= -5%; цей факт буде проілюстрований на рис.5). Аналогічно, якщо дохідність цінного паперу виявилась рівною -2% замість -4%, то різниця у 2% буде випадковою похибкою (тобто ε_{AI} = +2%).

Випадкову похибку можна розглядати як випадкову змінну, яка має розподіл ймовірностей з нульовим математичним сподіванням і певним стандартним відхиленням.

Пряма лінія у випадку а) на рисунку 5 представляє собою графік ринкової моделі для цінного паперу A. Ця лінія зв'язана з другим рівнянням, але без врахування випадкової похибки. Відповідно рівняння прямої, побудованої для цінного паперу A виглядає наступним чином:

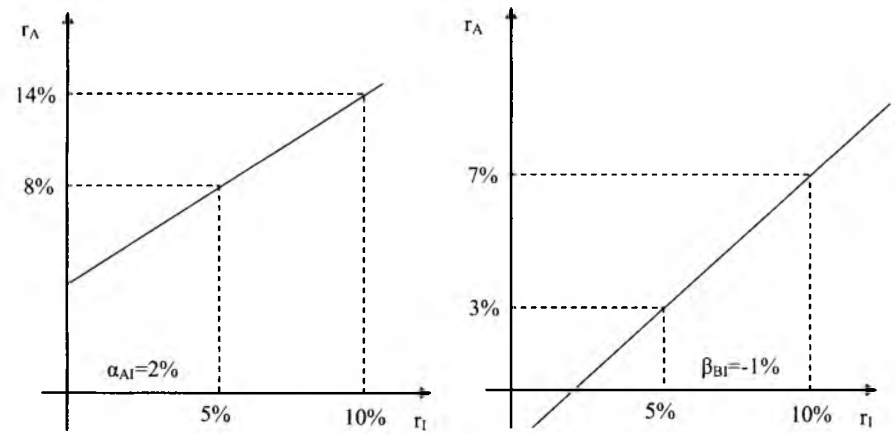
$$r_A = 2\% + 1{,}2\, r_I\,.$$

Тут по вертикальній осі відкладено дохідність цінного паперу (r_A), а по горизонтальній осі – дохідність на ринковий індекс (r_I). Лінія проходить через точку на вертикальній осі, що відповідає значенню (α_{AI}), яке в даному випадку складає 2%. Лінія має нахил, рівний (β_{AI}), або 1,2.

Випадок б) рисунку 5 представляє собою графік ринкової моделі цінного паперу B. Рівняння даної прямої має наступний вигляд:

$$r_A = -1\% + 0{,}8\, r_I\,.$$

Ця лінія виходить із точки на вертикальній осі, зв'язаної зі значенням (α_{BI}), яке в даному випадку дорівнює -1%. Відмітимо, що нахил даної кривої дорівнює (β_{BI}) або 0,8.



а) б)

Рис. 5.

Зазначимо, що нахил у ринковій моделі цінного паперу вимірює чутливість її дохідності до дохідності на ринковий індекс. Обидві лінії на рисунку 5 мають додатній нахил, який показує, що чим вища дохідність на ринковий індекс, тим вища дохідність цих цінних паперів. Проте, прямі мають різний нахил. Це означає, що цінні папери мають різну чутливість до дохідності на індекс ринку, точніше, A має більший нахил, ніж B, який показує, що дохідність A більш чутлива до дохідності на ринковий індекс, ніж дохідність B. Припустимо, що сподівана дохідність на ринковий індекс складає 5%. Тоді якщо фактична дохідність на ринковий індекс складе 10%, то вона перевищить на 5% сподівану дохідність. Випадок *а)* на рисунку 5 показує, що дохідність цінного паперу A повинна перевищити початково сподівану дохідність на 6% (14% - 8%). Аналогічно випадок *б)* показує, що дохідність цінного паперу ***B*** повинна перевищити початково сподівану дохідність на 4% (7% - 3%). Різниця в 2% (6% - 4%) полягає в тому, що цінний папір *A* має більший нахил, ніж цінний папір ***B***, тобто *A* більш чутлива до дохідності на ринковий індекс, ніж ***B***.

Ще раз зазначимо, що коефіцієнт нахилу ринкової моделі, названий вище як коефіцієнт «бета», розраховується за формулою (8). Як випливає з рівняння (9) саме величину «бета» цінного паперу можна інтерпретувати як нахил лінії. Якщо цей коефіцієнт був сталим від періоду до періоду, то «історичну бету» цінного паперу можна оцінити шляхом зіставлення минулих даних про співвідношення дохідності даного паперу і дохідності ринку (індексу). Статистична процедура для набуття таких значень коефіцієнтом «бета» є простою лінійною регресією або методом найменших квадратів [1].

Рівняння (9), записане без випадкової похибки, є рівнянням лінійної регресії. А тому параметр «бета» є коефіцієнтом регресії і може бути визначений за формулою:

$$\beta = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (10)$$

де: x_i – дохідність ринку в *i*-й період часу;
y_i – дохідність цінного паперу в *i*-й період часу;
n – кількість періодів.

Згідно моделі У.Шарпа показник «альфа» (його також називають зміщенням) визначає складову дохідності паперу, який не залежить від руху ринку:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \frac{\beta \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (11)$$

[1] *Детальніше див.: Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник.- 3-є вид., випр. – К.: Знання, 2007. – 454 с.; Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: Кондор, 2007. – 352 с.*

В портфельній теорії існує інтерпретація показника «альфа» як свого роду мірою недо- або переоцінки ринком даного цінного паперу. Позитивна «альфа» свідчить про переоцінку, а негативна «альфа» – про недооцінку ринком даного цінного паперу.

Як уже зазначалося раніше, випадкова похибка показує, що індексна модель Шарпа не дуже точно пояснює дохідність цінного паперу. Різниця між дійсним і сподіваним значеннями при відомій дохідності ринкового індексу приписується випадковій похибці.

Випадкову похибку можна розглядати як випадкову змінну, яка має розподіл ймовірності з нульовим математичним сподіванням і стандартним відхиленням, що обчислюється за формулою:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}}. \qquad (12)$$

Дійсне значення коефіцієнта «бета» цінного паперу неможливо встановити, а можна лише його оцінити. Отже, навіть якщо б дійсне значення «бета» залишалося сталим завжди, його оцінка, отримана за методом найменших квадратів, все одно б змінювалася б у часі із-за похибок при оцінці власне помилок вибірки. Стандартна похибка «бети» є спробою оцінити величину таких похибок:

$$\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}}. \qquad (13)$$

Аналогічно стандартна похибка для коефіцієнта «альфа» дає оцінку величини відхилення прогнозованого значення від «істинного»:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}}. \qquad (14)$$

Для характеристики конкретного цінного паперу використовуються й інші параметри. Приміром, R-squared (R2) або коефіцієнт детермінації, що дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції ціни паперу і ринку. R-squared змінюється від нуля до одиниці і визначає міру узгодженості руху ринку і ціни паперу.

$$R^2 = \left(\frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right)\left(n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right)}} \right)^2. \qquad (15)$$

Коефіцієнт детермінації є пропорцією, в якій зміна дохідності цінного паперу пов'язана зі зміною дохідності ринкового індексу. Іншими словами, він показує, в якій мірі коливання дохідності цінного паперу можна віднести за рахунок коливань дохідності ринкового індексу. Якщо цей коефіцієнт дорівнює одиниці, то папір повністю корелює з ринком, якщо дорівнює нулю, то рух ринку і ціни паперу абсолютно незалежні.

Похибки показників «бета» і «альфа» визначаються безпосередньо похибкою регресійної моделі. Природно, передусім, вони залежать від глибини розрахунку.

На різних стадіях ринку (зростаючий, падаючий) для досягнення кращого ефекту можна користуватися наступними комбінаціями коефіцієнтів:

Таблиця 1.

Комбінації коефіцієнтів регресійного аналізу

	На покупку	*На продаж*
Падаючий ринок	$\beta < 0, \beta < 1, \alpha < 0, R^2 \to 0$	$\beta > 0, \alpha > 0, R^2 \to 0$
Зростаючий ринок	$\beta > 0, \beta > 1, \alpha < 0, R^2 \to 0$	$\beta < 0, \alpha > 0, R^2 \to 0$

На ринках розвинутих країн значення α, β, R^2 регулярно розраховуються для всіх цінних паперів і публікуються разом з індексами. Користуючись

цією інформацією, інвестор може сформувати власний портфель цінних паперів. На українському ринку цінних паперів аналітики поступово теж починають використовувати α, β, R^2 аналіз.

§3. Модель Тобіна з безризиковим активом

На відміну від моделі Г.Марковіца, яка пов'язана з вибором класу допустимих портфелів, модель Дж.Тобіна більшою мірою відноситься до структури ринку, ніж до структури допустимих портфелів. У цій моделі передбачається існування безризикового активу, дохідність якого не залежить від достатку ринку і завжди має одне і те ж значення. Оскільки невизначеність кінцевої вартості безризикового активу відсутня, то стандартне відхилення для цього активу дорівнює нулю. Це означає, що кореляція між ставкою дохідності за безризиковим активом і ставкою дохідності за будь-яким ризиковим активом дорівнює нулю.

Дж. Тобін показав, що якщо $\Theta = (p_i, ..., p_n)$ – деякий портфель (p_i – частка i-го активу в портфелі), а f – безризиковый актив, то всі портфелі виду лежать на прямій, що проходить через точки $(0, r_f)$ і (σ_p, r_p), где r_f и r_p –

$$Y = (1-\Theta)f + \Theta_p \qquad (16)$$

безризикова і ризикова дохідності відповідно. Серед всіх таких прямих потрібно вибрати найкрутішу (крутіша дає велику дохідність при заданому ризику), тобто ту, яка проходить через точку $(0, r_f)$ і точку дотику T до ефективного кордону (рис. 6).

Множина досяжності істотно змінюється в результаті розгляду безризикового кредитування. Два кордони є прямими лініями, що виходять з точки, що відповідає безризиковому активу. Нижня лінія сполучає дві точки, які відповідають безризиковому активу і портфелю з найбільшим ризиком і дохідністю. Тому вона представляє портфелі, що є комбінаціями цього портфеля і безризикового активу.

Інша пряма лінія, що виходить з точки, відповідної безризиковому активу, представляє комбінації безризикового активу і певного ризикованого портфеля з ефективної множини моделі Марковіца. Ця лінія є дотичною до даної ефективної множини (у точці з позначенням T).

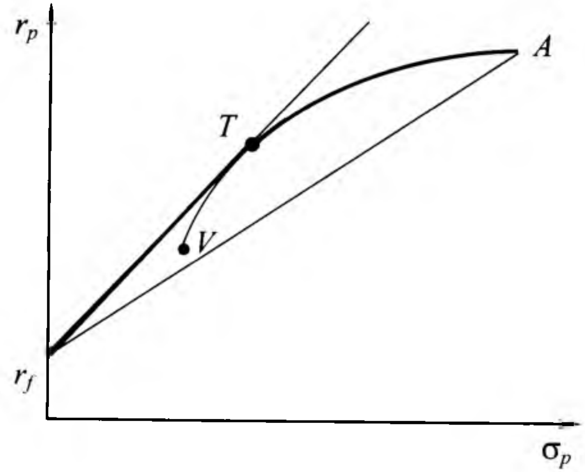


Рис.6. Досяжна і ефективна множина при нагоді безризикового кредитування

Хоча й інші ризиковані ефективні портфелі з моделі Марковіца теж можуть бути скомбіновані з безризиковим активом, портфель T заслуговує на особливу увагу. Оскільки, не існує портфеля, що складається з ризикованих цінних паперів, який, будучи сполучений прямою лінією з точками, що відповідають безризиковому активу, лежав би лівіше і вище за нього. Іншими словами, зі всіх ліній, які можуть бути проведені з точки, що відповідає безризиковому активу, і сполучають цю точку з ризикованим активом або ризикованим портфелем, жодна не має більшого нахилу, ніж лінія, що йде в точку T.

Це важливо тому, що частина ефективної множини моделі Марковіца відсікається цією лінією. Зокрема, портфелі, які належали ефективній множині в моделі Марковіца і розташовувалися між мінімально ризикованим портфелем, позначеним через V, і портфелем T, з введенням можливості інвестування в безризикові активи не є ефективними. Тепер ефективна множина складається з прямого і викривленого відрізку. Прямий відрізок йде від безризикового активу в точку T і тому представляє портфелі, складені з різних комбінацій безризикового активу і портфеля T. Викривлений відрізок розташований вище і правіше за точку T представляє портфелі з ефективної множини моделі Марковіца.

Аналіз може бути розширений за рахунок введення можливості запозичення. Це означає, що тепер інвестор не обмежений своїм початковим капіталом при ухваленні рішення про те, скільки грошей інвестувати в ризиковані активи. Проте якщо інвестор позичає гроші, то він повинен платити відсоток за позикою. Якщо процентна ставка відома і невизначеність з виплатою позики відсутня, то це часто називається безризиковим запозиченням.

Передбачається, що процентна ставка по позиці дорівнює ставці, яка може бути зароблена інвестуванням в безризикові активи.

Рисунок 7 відображає, як змінюється допустима множина, якщо існує можливість як надання, так і набуття позики за однією і тією ж безризиковою процентною ставкою. Множина досяжності представлена областю, розташованою між двома променями, що виходять з точки відповідної безризикової ставки, і проходять через точки, відповідні найбільш прибутковому портфелю і портфелю, позначеному через T. Ці два променя прямують до нескінченності за умови, що немає обмежень на величину отримуваної позики.

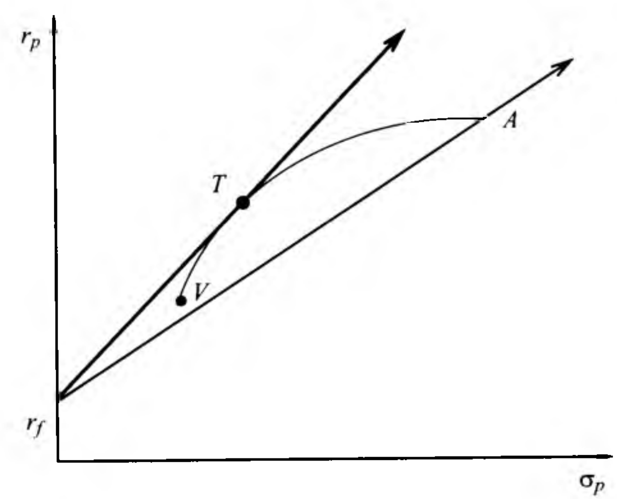


Рис.7. Досяжна і ефективна множина у разі можливості безризикового запозичення

Промінь, що йде через портфель T, є особливо важливим, оскільки він представляє ефективну множину. Як і раніше, лінія, що йде через T, є дотичною до ефективної множини моделі Марковіца. Окрім портфеля T жоден з портфелів, які знаходилися в ефективній множині моделі Марковіца, не є ефективним після введення можливості надання і набуття безризикових позик.

У моделі оцінки фінансових активів новий ефективний кордон, отриманий з врахуванням безризикового активу, називають ринковою лінією (Capital Market Line, CML), а портфель T – ринковим портфелем.

ЗАДАЧІ

Задача 1.

Банк, має намір здійснити інвестиції у одну із двох торгівельних компаній *A* та *B*. Визначте рівень ризику інвестування та сподівану дохідність за умов трьох ймовірних станів економіки. Зробіть висновки щодо доцільності інвестування.

Стан економіки	Ймовірність такого стану	Рівень дохідності цінних паперів типу *A*	Рівень дохідності цінних паперів типу *B*
Спад	0,1	-0,2	0,3
Нормальний	0,6	0,1	0,2
Підйом	0,3	0,7	0,5

Розв'язок

Згідно (1) сподівані дохідності розраховуються як добуток можливих дохідностей на їх ймовірності:

$$m_A = 0,1 \times (-0,2)+0,6 \times (0,1)+0,3 \times (0,7) = 0,25 = 25\%$$
$$m_B = 0,1 \times (0,3)+0,6 \times (0,2)+0,3 \times (0,5) = 0,30 = 30\%$$

За формулою (2) дисперсія розраховується як сума добутків квадратів відхиленнь сподіваних дохідностей на їх ймовірності:

$$\sigma_A^2 = 0,1\times(-0,2-0,25)^2 + 0,6\times(0,1-0,25)^2 + 0,3\times(0,7-0,25)^2 =$$
$$= 0,1\times(-0,45)^2 + 0,6\times(-0,15)^2 + 0,3\times(0,45)^2 = 0,1\times0,2025 + 0,6\times$$
$$\times 0,0225 + 0,3\times 0,2025 = 0,0945$$
$$\sigma_B^2 = 0,1\times(0,3-0,3)^2 + 0,6\times(0,2-0,3)^2 + 0,3\times(0,5-0,3)^2 =$$
$$= 0,1\times(0,0)^2 + 0,6\times(-0,1)^2 + 0,3\times(0,2)^2 = 0,1\times0,0 + 0,6\times0,01 +$$
$$+ 0,3\times0,04 = 0,0180$$

Стандартні відхилення дорівнюють:

$$\sigma_A = \sqrt{0,0945} = 0,3074 = 30,74\%$$
$$\sigma_B = \sqrt{0,0180} = 0,1342 = 13,42\%$$

Задача 2.

Банк має намір інвестувати $20000 в акції компаній *A* та *B*. Якщо банк вкладе $ 6000 в акції компанії *A*, а інші в акції компанії *B*, то якими будуть сподівана дохідність і стандартне відхилення даного портфеля? Зробіть висновки щодо доцільності такого інвестування.

Стан економіки	Ймовірність такого стану	Рівень дохідності цінних паперів типу *A*	Рівень дохідності цінних паперів типу *B*
Спад	0,1	-0,2	0,3
Нормальний	0,6	0,1	0,2
Підйом	0,3	0,7	0,5

Розв'язок

Вага кожного типу акції в портфелі складатиме: $6000/20000 = 0,3 та $14000/20000 = 0,7. Згідно (3) знаходимо сподівану дохідність портфеля:

$$m_P = 0,3\times m_A + 0,7\times m_B = 0,3\times0,25 + 0,7\times0,3 = 0,2850 = 28,50\%.$$

Також можна розрахувати дохідність портфеля і для кожного стану економіки:

Стан економіки	Ймовірність такого стану	Дохідність портфеля
Спад	0,1	0,3×(-0,2)+0,7×(0,3)=0,15
Нормальний	0,6	0,3×(0,1)+0,7×(0,2)=0,17
Підйом	0,3	0,3×(0,7)+0,7×(0,5)=0,56

Тоді дохідність портфеля складатиме:

$$m_P = 0{,}1\times(0{,}15) + 0{,}6\times(0{,}17) + 0{,}3\times(0{,}56) = 0{,}2850 = 28{,}50\%.$$

Такий самий результат ми отримали раніше.

Розрахуємо дисперсію портфелю:

$$\sigma_p^2 = 0{,}1\times(0{,}15-0{,}285)^2 + 0{,}6\times(0{,}17-0{,}285)^2 + 0{,}3\times(0{,}56-0{,}285)^2 = 0{,}03245$$

Тоді стандартне відхилення буде коренем квадратним з 0,03245 і рівне 0,1801 або 18,01%.

Задача 3.

Департамент банківського інвестування розглядає наступну ситуацію:

Цінні папери	Бета	Сподівана дохідність
Cooley, Inc.	1,6	19%
Moyer Co.	1,2	16%

Визначте, чи правильно оцінені дані цінні папери, якщо безризикова ставка складає 8%? Обгрунтуйте, якою повинна бути ставка вільна від ризику, якщо цінні папери оцінити правильно?

Розв'язок:

Якщо ми розрахуємо кефіцієнт винагороди за ризик для цінних паперів кожної компанії, то отримаємо: (19%-8%)/1,6=6,875 для Cooley і 6,67 для Moyer. У порівнянні Cooley сподівана дохідність цінних паперів Moyer надто низька, через те їх вартість надто висока.

Якщо цінні папери обох компаній оцінені правильно, то вони повинні пропонувати однаковий коефіцієнт винагороди за ризик. Таким чином, ми можемо скласти рівняння:

$$(19\%-r_f)/1{,}6 = (16\%-r_f)/1{,}2$$

$$(19\%-r_f) = (16\%-r_f)(1{,}6/1{,}2)$$

$$19\% - 16\%\times(4/3) = r_f - r_f\times(4/3)$$

$$r_f = 7\%.$$

Задача 4.

Інвестиційний департамент банку розглядає молжливість івестування в цінні папери компанії у якої β=0,6. Визначте сподівану дохідність даного активу, якщо безризикова ставка становить 8%, а сподівана дохідність на ринку цінних паперів становить 14%? Яким мав би бути β-коефіцієнт, якщо сподівана дохідність даного цінного паперу складала б 20 %?

Розв'язок:

Оскільки ринкова сподівана дохідність складає 14%, то ринкова премія за ризик відповідно складе: (14% - 8%) = 6% (ставка вільна від ризику дорівнює 8%). Перший вид цінних паперів має β =0,6, значить сподівана дохідність складатиме 8%+0,66%= 11,6%.

Для другого випадку премія за ризик складатиме: 20% - 8% = 12%. Оскільки це в два рази перевищує ринкову премію за ризик, то і β-коефіцієнт повинен бути точно рівний 2. Ми можемо перевірити це, використовуючи теорію САМР з відповідними її позначеннями (розділ IV, §3):

$$E(R_j) = R_f + \lfloor E(R_m) - R_f \rfloor \times \beta_i,$$

де: R_f – безризикова процентна ставка;

$E(R_m)$ - прогнозована рентабельність аналогічних інвестицій на ринку;

$[E(R_m) - R_f]$ - премія за ризик;

β_i – ринковий ризик в економіці.

Отже,

Задача 5

Інвестиційний департамент банку розглядає наступні варіанти інвестування:

Цінні папери	Кількість інвестованих грошей, $	Сподівана дохідність, %	Бета
Тип *A*	1000	8	0,80
Тип *B*	2000	12	0,95
Тип *C*	3000	15	1,10
Тип *D*	4000	18	1,40

Визначити сподівану дохідність такого портфеля та рівень бета. Зробіть висновок, чи має такий портфель великий чи малий ступінь ризику в порівнянні з середнім активом?

Розв'язок

Для того щоб відповісти на ці питання, потрібно спочатку розрахувати вагу кожного активу в портфелі. Слід замітити, що загальна кількість інвестованих грошей складає $10000. Тоді $1000/10000=10% вкладено в цінні папери типу *A*, 20% в *B*, 30% в *C*, і 40% в *D* (всі розрахунки проведено подібно до типу *A*). Таким чином сподівана дохідність згідно (3) складатиме:

$$m_P = 0{,}10 \times m_A + 0{,}20 \times m_B + 0{,}30 \times m_C + 0{,}40 \times m_D =$$
$$= 0{,}10 \times 8\% + 0{,}20 \times 12\% + 0{,}30 \times 15\% + 0{,}40 \times 18\% = 14{,}9\%$$

Подібним чином розраховуємо

$$\beta_P = 0{,}10 \times \beta_A + 0{,}20 \times \beta_B + 0{,}30 \times \beta_C + 0{,}40 \times \beta_D =$$
$$0{,}10 \times 0{,}80 + 0{,}20 \times 0{,}95 + 0{,}30 \times 1{,}10 + 0{,}40 \times 1{,}40 = 1{,}16$$

Таким чином, наш портфель має сподівану дохідність 14,9% і β=1,16. Так як бета більше одиниці, то такий портфель має великий систематичний ризик в порівнянні з середнім активом.

Задача 6

Банк має три варіанти формування портфеля цінних паперів (Q1,Q2,Q3). Для кожного портфеля розраховано дохідність та ризик, виміряний за допомогою стандартного відхилення і β-коефіцієнта, безризикова ставка становить 16%. Необхідно оцінити ефективність управління портфелями.

Портфелі (Q)	r_p, %	σ,%	β
Q1	22,6	22,58	0,9
Q2	25,2	23,46	1,2
Q3	26,1	25,19	1,4

Розв'язання:

Для оцінки ефективності управління портфелями необхідно розрахувати коефіцієнти Шарпа і Трейнора[2] і на їхній основі зробити відповідні висновки.

Розрахуємо коефіцієнт Шарпа для кожного портфеля за наступною формулою:

$$kS = \frac{r_p - r_0}{\sigma_p},$$

де: r_p- дохідність портфеля інвестора за період, що аналізується;

r_o- середня безризикова ставка за той самий період;

σ_p- стандартне відхилення дохідності портфеля банку.

$$\mathbf{kS}_{Q1} = \frac{22{,}6 - 16}{22{,}58} = 0{,}29;$$

$$\mathbf{kS}_{Q2} = \frac{25{,}2 - 16}{23{,}46} = 0{,}39;$$

$$\mathbf{kS}_{Q3} = \frac{26{,}1 - 16}{25{,}19} = 0{,}40.$$

Розрахуємо коефіцієнт Трейнора за наступною формулою:

$$\mathbf{kT} = \frac{\mathbf{d_p} - \mathbf{d_0}}{\beta_p},$$

де: β_p - системний ризик портфелю.

[2] *Детальніше див.: Шарк У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: пер. с анг.–М.: ИНФРА-М. 1997.– XII+1024 с.*

$$kT_{Q1} = \frac{22,6-16}{0,9} = 7,3;$$

$$kT_{Q2} = \frac{25,2-16}{1,2} = 7,7;$$

$$kT_{Q3} = \frac{26,1-16}{1,4} = 7,1.$$

З вищенаведеного розрахунку можна зробити висновки, що якщо перед банком постає завдання вибору оптимального портфеля з позиції співвідношення "дохідність-ризик", а аналіз здійснено за допомогою коефіцієнта Шарпа, то з погляду ефективності управління другий і третій портфелі виявилися майже однаковими і на одиницю ризику банк матиме 0,4 одиниці винагороди. Якщо ефективність проаналізовано за коефіцієнтом Трейнора, то перевагу слід віддати другому портфелю.

ВПРАВИ

1. Департамент банківського інвестування розглядає наступну ситуацію:

Цінні папери	Бета	Сподівана дохідність
A	1,6	20%
B	1,2	17%

Визначте чи правильно оцінені дані цінні папери, якщо безризикова ставка складає 9%? Обгрунтуйте, якою повинна бути ставка вільна від ризику якщо цінні папери оцінити правильно?

2. Банк, має намір здійснити інвестиції у одну із двох торгівельних компаній *A* та *B*. Визначте рівень ризику інвестування та сподівану дохідність за умов трьох ймовірних станів економіки.

Зробіть висновки щодо доцільності інвестування.

Стан економіки	Ймовірність такого стану	Рівень дохідності цінних паперів типу *A*	Рівень дохідності цінних паперів типу *B*
Спад	0,1	-0,2	0,3
Нормальний	0,6	0,1	0,2
Підйом	0,3	0,5	0,7

3. Інвестиційний департамент банку розглядає молжливість івестування в цінні папери компанії у якої β=0,5. Визначте сподівану дохідність даного активу, якщо безризикова ставка становить 9%, а сподівана дохідність на ринку цінних паперів становить 13%? Яким мав би бути коефіцієнт, якщо сподівана дохідність даного цінного паперу складала б 17 %?

4. Визначте дюрацію облігації номіналом 1000 грн з періодом обігу три роки і купоном 28%, який виплачується щорічно. Поточна ринкова ціна облігації становить 950 грн, ставка дисконтування – 25%. Якому напряму інвестування коштів має віддати перевагу банк, якщо термін окупності альтернативного варіанта становить три роки? Також необхідно оцінити зміну ціни даної облігації, якщо прогноз свідчить про підвищення відсоткових ставок на ринку протягом поточного року з 25 до 32%.

8-12-173

Розділ IV.

Методологія економіко-математичного моделювання

§1. Теоретична концепція оцінки економічної безпеки банку

Гарантування економічної безпеки є важливою передумовою розвитку будь-яких економічних систем. Несвоєчасне усунення проблем у функціонуванні однієї з ланок банківської системи здатне спричинити негативні наслідки у масштабах усієї економіки країни. Варто виділити наступні важливі якості, що характеризують економічну безпеку системи: незалежність, стійкість, здатність до саморозвитку і прогресу. Більш того, мову слід вести про чітку ієрархічну залежність між різними рівнями економічної безпеки, оскільки банк є підсистемою систем вищих порядків: банківської, кредитної, фінансової і, насамкінець, економічної, то й категорію власне кажучи самої безпеки слід розглядати у такому логічному порядку.

Спеціальна література трактує *економічну безпеку* як стан економіки та інститутів влади, за якого забезпечується гарантований захист національних інтересів, соціальної спрямованості політики, достатній оборонний потенціал навіть за несприятливих умов розвитку внутрішніх і зовнішніх процесів. У концепції економічної безпеки України, розробленій Інститутом економічного прогнозування при Національній академії наук України, під *фінансовою безпекою* розуміється захищеність фінансових інтересів суб'єктів господарювання на всіх рівнях фінансових відносин. Врешті, нині з'явилися лише перші наукові праці, які загалом присвячено дослідженню факторів, які можуть спричинити погіршення економічної безпеки банківської системи та окремо взятого банку та змісту превентивних чи першочергових заходів, які слід уживати для обмеження їх негативного впливу.

З огляду на те, що економічна безпека банківської системи є складовою фінансової безпеки країни, доцільно розширити зміст аналізо-

ваного поняття, розуміючи під ним *такий стан, за якого фінансова стабільність і ділова репутація банківських установ не можуть бути втрачені через цілеспрямовані дії певної групи осіб чи організацій як усередині, так і за межами держави, а також – через негативні макроекономічні та політичні чинники.*

Природно стверджувати, що банк є складною, ієрархічною, динамічною, керованою, цілеспрямованою системою, здатною до саморозвитку. За способом взаємодії із зовнішнім середовищем він представляє собою відкриту систему, яка функціонує в умовах невизначеності (відсутності детермінованості). А тому економічна безпека банку визначається рівнем економічної безпеки всіх підсистем, які входять до його складу. Це не суперечить методології системного аналізу, яка дозволяє виражати параметри розглядуваної системи через параметри її складових, з метою одержання комплексної логічної моделі. Однак, слід урахувати, що при цьому система буде володіти низкою додаткових властивостей, які не притаманні ні одній із складових даної системи.

Загалом подальша логіка наших досліджень визначатиметься схемою, зображеною на рисунку 1, а вихідним і визначальним моментом у процесі дослідження економічної безпеки банку буде оцінка її рівня шляхом обґрунтування концепції єдиного інтегрального показника E. Він має містити як параметри основні показники, які найбільш точно характеризують результати діяльності банку, передусім це показники достатності капіталу, темпів росту капіталу, оцінки ліквідності і дохідності активів.

Припустимося думкою, що знаючи динаміку інтегрального показника E, який відображає і підсумовує інформацію про дохідність операцій, ліквідність банку, достатність капіталу і темпи його росту, керівництво банку, по-перше, реалістично уявляє фінансовий стан банку, по-друге, зможе завчасно, до виникнення внутрішньобанківської кризи, поліпшити становище банку на фінансовому ринку, по-третє, зможе захистити банк від негативного впливу зовнішніх чинників у разі констатації кризи на рівні банківської системи країни загалом.

Інтегральний показник E з такими властивостями відіграє ніби то роль умовного експерта, оскільки він за незмінними правилами та в єдиний спосіб дає зведену оцінку діяльності банку за основними показниками: дохідності, ліквідності, достатності капіталу і темпів росту капіталу. Для поглибленого дослідження запропонованої категорії економічної безпеки надалі передбачається використання показників саме вказаного змісту. З метою інтеграції (зведення) багатьох властивостей реальних об'єктів в один інтегральний показник звернемося до теорії надійності. З погляду цієї теорії інтегральний показник, що розглядається, є *функцією надійності.*

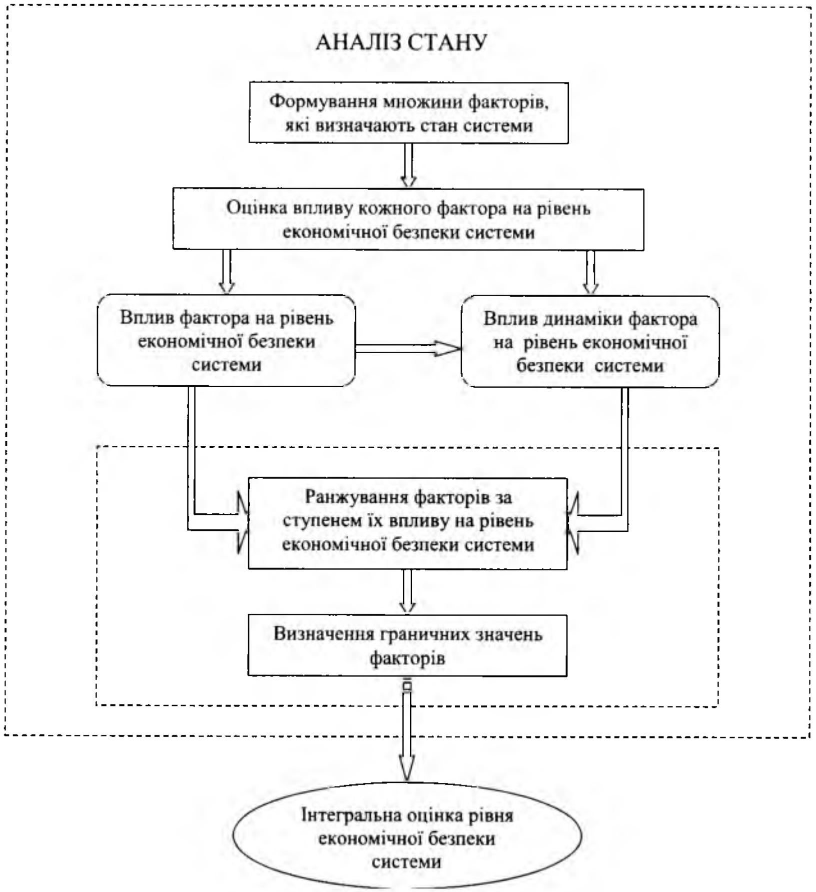


Рис.1. Схема визначення стану економічної безпеки системи

Функція надійності будується для одержання кількісної оцінки стійкості об'єктів, явищ, процесів природи, економіки, політики та інших сфер людської діяльності. Вихідними даними для її побудови є переваги експертів: тобто їх суб'єктивні думки про стабільність об'єктів, що вивчаються, які висловлюються ними відносно або різних об'єктів, або одних і тих же об'єктів, але за різних обставин. Подібні міркування можна проілюструвати на прикладі побудови функції надійності банку від двох параметрів: ліквідності і дохідності. Побудувати функцію надійності банку, з нашого погляду, означає запропонувати конкретну залежність від двох аргументів – показників ліквідності і дохідності. Постає питання: чи існує теоретично функція надійності, що відображає індивідуальні особливості некількісної оцінки людиною (експертом) стійкості досліджуваних об'єктів, явищ і процесів? Скільки і якого змісту питань потрібно задати менеджеру банку з приводу виявлення певних співвідношень між ліквідністю і дохідністю банку? Гадаємо, що серед них мають бути питання на кшталт: що для Вас важливіше: зниження показника ліквідності, приміром, на 5 % і підвищення на 5 % показника дохідності (ситуація А) або підвищення на 5 % відсотків показника ліквідності і зниження на 5% показника дохідності (ситуація Б); чи Вам складно відповісти на це питання, чи для Вас обидві ситуації рівнозначні (рівноцінні)? Ці та інші можливі питання є інструментарієм теорії надійності. До неї також відноситься й вивчення способів розміщення порівнюваних об'єктів, явищ, процесів в послідовності за спаданням чи зростанням їх стійкості. У такому випадку необов'язково знати кількісну оцінку абсолютної стійкості порівнюваних об'єктів. Вочевидь, прикладом такого розміщення може бути ранжування банків за „розміром" (за обсягом їх чистих активів). За діючою класифікацією НБУ всі банки поділяються на чотири групи залежно від розміру чистих активів: I група – більше 1, 8 млрд грн – „найбільші"; II група – 0, 7 – 1, 8 млрд грн – „великі"; III група – 0,2 – 0,7 млрд грн – "середні"; IV група – до 0,2 млрд грн – "малі".

Системі індивідуальних властивостей конкретного досліджуваного об'єкта (банку) в кожному окремому випадку може бути притаманний ряд особливостей, які не виключають і не доповнюють одна одну. Такі особливості індивідуальних переваг природно приводять до їх поділу на *компенсаційні, некомпенсаційні* та *частково компенсаційні* переваги. Подальші дослідження провадитимуться з використанням абстрактних показників f_i цінності різних характеристик досліджуваних об'єктів. Кожен із m показників f_i оцінює якусь із сторін економічної безпеки банку.

Компенсаційна – це така перевага на множині можливих значень часткових показників $f_1, f_2, \ldots, f_m$ оцінки діяльності банку, за якої погіршення (зменшення) будь-якого з показників, причому на довільну величину Δf_i, може бути компенсовано покращенням (збільшенням) якихось інших показників. Це означає наступне: якщо на якийсь момент часу фінансовий стан банку описувався набором значень $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, а через деякий час можливий стан $(f_i - \Delta f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_m)$, в якому перший показник зменшиться на Δf_i то завжди можна підібрати таку надбавку Δf_j деякого показника з номером j що стан $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ буде рівноцінним становищу $(f_i - \Delta f_i, \ldots, f_j + \Delta f_j, \ldots, f_m)$. Іншими словами, надбавка Δf_j компенсує погіршення (зменшення) показника f_i. Якщо така компенсація можлива при погіршенні будь-яких із m показників, то перевага – компенсаційна. Зрозуміло, кількість показників, що погіршуються, має бути менше їх загального числа – m.

Некомпенсаційна – це така перевага, у якої погіршення будь-якого із показників на довільну величину не може бути компенсовано навіть необмеженим покращенням всіх останніх показників. Це означає, що стійкість фінансового стану банку, який описується набором $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ завжди вище, ніж стійкість стану з набором $(f_1 - \Delta f_1, f_2 + \Delta f_2, \ldots, f_j + \Delta f_j, \ldots, f_m + \Delta f_m)$, незалежно від величини Δf_1 $(\Delta f_1 > 0)$ і Δf_j $(\Delta f_j > 0)$. Навіть якщо для всіх $j \neq 1$ $\Delta f_j \to \infty$, ці надбавки до значень $f_1, f_2, \ldots, f_m$ не компенсують погіршення значення показника f_1. Аналогічні твердження вірні, коли відбувається погіршення будь-якого із показників f_i по відношенню до стану $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Якщо експерт схильний до некомпенсаційної переваги, то для нього покращення фінансового стану банку $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ передбачається тоді і тільки тоді, коли всі компоненти f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ збільшуються на будь-які додатні числа.

Частково-компенсаційна – це перевага на множині всіх можливих значень часткових показників $f_1, f_2, \ldots, f_m$, які не є ні компенсаційними, ні некомпенсаційними. Це може бути за таких умов:

а) серед часткових показників оцінки діяльності банку є підмножина показників, для якої можлива компенсація погіршення одних показників за рахунок покращення інших, але є і такі підмножини, погіршення показників в котрих не компенсується покращенням інших, надалі це будемо називати вибірковою компенсацією;

б) для деяких або всіх показників існують „критичні зони" значень, при попаданні в які стає неможливим заміщення стійкості (компенсація показника) за рахунок покращення інших показників, причому розміри і „положення" критичних зон не залежать від величини інших часткових показників; поза критичними зонами часткових показників має місце правило заміщення стабільності показників іншими;

в) має місце випадок „б", але розміри і „положення" критичних зон у показників залежать від значень решти часткових показників (надалі – взаємозалежна часткова компенсаційна перевага);

г) має місце комбінація ситуацій „б" і „в".

Для компенсаційних переваг можна побудувати функцію надійності, більше того, для деяких видів цих переваг розроблені коректні в математичному розумінні алгоритми побудови функцій надійності. Проілюструємо власну логіку в такий спосіб.

Нехай розглядаються лише два узагальнених показники оцінки фінансового стану банку: ліквідності та дохідності. Для того, щоб переваги були б незалежними за цими показниками, необхідно і достатньо, щоб мало місце наступне:

а) чим вища ліквідність банку, тим краще це для банку, незалежно від того, яка при цьому у нього дохідність; б) чим вища дохідність банку, тим краще це для банку, незалежно від того, яка при цьому у нього ліквідність.

Якщо вірне твердження „а” і невірне твердження „б”, то кажуть, що перевага за ліквідністю незалежна від дохідності. Якщо вірне твердження „б” і невірне твердження „а”, то кажуть, що ця перевага за дохідністю незалежна від ліквідності банку. Якщо вірні обидва твердження, то кажуть, що перевага в цілому взаємозалежна за двома частковими показниками, в даному випадку за ліквідністю і дохідністю.

Здійснений огляд наукових джерел із досліджуваної проблематики дозволяє нам стверджувати, що поки не існує об'єктивних методів, які дозволяють дати однозначну кількісну оцінку економічної безпеки банку. У той же час єдиним критерієм об'єктивності залишається практика, накопичення досвіду застосування функції надійності в конкретній предметній сфері діяльності. Навіть у тих випадках, коли теоретично можна побудувати функцію надійності, теорія не гарантує єдиність цієї функції. Така функція може бути багатозначна. Не випадково численні банківські кризи слугують підтвердженням того, що таких кількісних законів функціонування банків не існує.

Однак, попри існування такого підходу повернемося до аналізу умов незалежності переваг банкіра при оцінці фінансового стану банку за показниками ліквідності і дохідності. Природно, що знайдуться керівники банку, які вважатимуть вірним або твердження „а”, або твердження „б”, або і те, і друге. Напевно знайдуться ті, хто буде не згодний з будь-яким із цих тверджень. Зрозуміло, що прихильники відповідних тверджень знайдуть багато вагомих аргументів, вагомих у їх власних очах, але спірних з погляду інших спеціалістів. У протилежному випадку відповідні твердження трансформувалися б в істину, чи то дві сторони були б абсолютно неправі. Тут і надалі термін „абсолютний” тлумачиться як „об'єктивно реальний”. Якщо твердження абсолютно невірне, то це означає, що воно невірне для всіх випадків життя.

Серед фахівців з банківської справи превалюють прихильники наступних правил: 1) ліквідність банку зростає разом зі зростанням дохідності, а при падінні дохідності нижче певного рівня ліквідність має дещо знизитися, якщо це вмотивовано потребою збільшення прибутковості операцій; 2) з досягненням певних рівнів власне саме зростання ліквідності і прибутковості має знизитися, якщо необхідно збільшити власний капітал банку. Викладені міркування свідчать про

невиконання умов взаємної незалежності переваг за показниками ліквідності, дохідності, темпами росту капіталу, достатності капіталу.

З огляду на такий підхід можна стверджувати, що компенсаційна перевага при оцінці економічної безпеки банку – недоцільна. Іншими словами, її використання в силу особливостей ведення банківського бізнесу виключається зі складу інших можливих оцінок розвитку банків, що побудовані на принципах компенсації часткових показників ліквідності, дохідності, темпів росту капіталу і достатності капіталу. Більше того, Національний банк України, встановлюючи нормативи достатності капіталу і ліквідності, обов'язкові до виконання всіма банками, тим самим відкидає можливість застосування компенсаційної переваги. Разом з тим, використання принципу компенсації може бути допустимим при одержанні зведеної оцінки однієї із узагальнюючих характеристик фінансового стану банку. Приміром, для оцінки ліквідності банку можна було б використати середньозважену величину від декількох показників ліквідності, обраних із числа тих, що використовуються на практиці. Окрім того, застосування принципу компенсації цілком доцільно для одержання інтегральної оцінки економічної безпеки банку поза „критичними зонами” для показників ліквідності, дохідності, темпів росту капіталу, достатності капіталу, тобто у випадках „б” і „в” частково компенсаційної переваги.

У загальному випадку для некомпенсаційної переваги не існує функції надійності, яка відображає всі особливості даної переваги. Це означає, що якщо задана деяка функція показників ліквідності, дохідності, темпів росту капіталу, достатності капіталу, то стану економічної безпеки банку, що характеризується самим великим значенням функції надійності, має віддаватися перевага. Однак, при порівнянні цього рішення з рішенням, одержаним неформальним шляхом, воно може виявитися гіршим. І навпаки, варіанти стану економічної безпеки банку, яким віддана перевага за неформальними оцінками, можуть мати значення функції надійності менші, ніж у варіантів, яким не віддавалася перевага за оцінкою експертів. Отже, теоретично функція надійності з потрібними властивостями відсутня. Між тим некомпенсаційна перевага у вживаному формулюванні вбачається більш прийнятною для інтегральної оцінки економічної безпеки, ніж компенсаційна. Відсутність функції надійності для загального випадку в банківській практиці ускладнює можливість застосування цієї переваги на практиці.

Ми виходимо з того, що можливо побудувати функцію надійності, яка зберігатиме властивості некомпенсаційної переваги для таких випадків:

1) значення всіх часткових показників, що враховуються при розрахунку оцінок економічної безпеки, мають бути кінцевими величинами, відомими ще до розрахунків інтегрального показника, окрім цього мають бути відомі стратегічні цілі розвитку банку як сукупність ідеальних значень всіх врахованих показників;

2) оцінка кожного часткового показника здійснюється з деякою заданою точністю, що визначається числом врахованих розрядів після коми чи розрядів до коми. Зберігаючи узагальненість міркувань, припустимо, що умова „а" виконана так, що відомі стратегічні цілі розвитку банку, які беруться як ідеальні значення $f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+$ часткових показників стану економічної безпеки. Якщо банк досягне значень $f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+$ одночасно за показниками, які враховано, то його стратегічні цілі розвитку буде досягнуто на 100 %.

Нехай на поточний момент часу значення показників, які враховано, становлять $f_1, f_2, \dots, f_m$. Поділимо їх на ідеальні значення і одержимо безрозмірні величини $\varphi_i = \dfrac{f_i}{f_i^+}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$ Кожне з них знаходиться в діапазоні від 0 до 1. Таким чином, вони співвимірні та мають однаковий масштаб.

Пропонуємо будувати інтегральну оцінку економічної безпеки банку (E) в такий спосіб: 1) знайдемо найменше з чисел φ_i. Нехай воно відповідає показнику з номером i_1; 2) одержане число φ_{i_1} помножимо на 100 %. Округлимо результати до цілої частини числа E; 3) виключивши з розгляду значення φ_{i_1} знаходимо серед решти чисел найменше. Нехай це буде φ_{i_2}. Округлимо це число з точністю до заданого числа розрядів: якщо оцінку часткових показників допускається проводити з точністю до одного розряду, то округлення φ_{i_2} здійснюється з точністю до першого розряду після коми і т. д. Округлене число приєднуємо після коми до раніше одержаного числа E. В результаті цього маємо число з цілою частиною (меншою або рівною 100 %) і дробовою частиною; 4) повторюємо пошук найменших з решти невикористаних чисел φ_i, округлюємо їх з точністю до заданих розрядів після коми, приєднуємо одержані числа справа до раніше одержаного числа E до тих пір, поки не будуть оброблені і використані всі числа; 5) якщо при пошуку найменшого із невикористаних чисел φ_i знайдеться не одне число, то на цьому кроці використовується значення показника з найменшим умовним порядковим номером. Якщо хоча б одне з чисел φ_i дорівнює 1, то попередній розряд збільшується на 1.

Розглянутий алгоритм у сукупності своїх кроків призводить до запланованого результату – формування величини E, *що відображає в процентах ступінь досягнення стратегічних цілей підвищення економічної безпеки банку.* Слід зауважити, що показник E не відображає абсолютної цінності стійкого фінансового стану банку. Він має зміст лише за умови, коли є переконання в цінності для банку визначення *„ідеального"* стану економічної безпеки – $\left(f_1^+, f_2^+, \dots, f_m^+\right)$. Проілюструємо використання запропонованого алгоритму на гіпотетичному прикладі.

Нехай після вибору ідеальних значень f_i^+ і одержання гіпотетичних значень розраховано наступні значення: $\varphi_1 = 0{,}55$, $\varphi_2 = 0{,}68$, $\varphi_3 = 0{,}46$, $\varphi_4 = 0{,}81$.

Прийнятними можуть бути оцінки φ_i з точністю до одного розряду після коми: φ_1 – значення показника ліквідності, φ_2 – показника дохідності, φ_3 – показника темпів росту капіталу, φ_4 – показника достатності капіталу. У відповідності з правилами розрахунку інтегрального показника E після першої ітерації (кроку) алгоритму маємо: $E = 50\%$. (Тут найменшим є число 0, 46. Після округлення до першої значущої цифри після коми одержимо число 50 %).

На другому кроці найменшим числом з решти чисел, після виключення із розряду числа $\varphi_3 = 0{,}46$ є число $\varphi_1 = 0{,}55$. Після округлення до 0,6 і приєднання до раніше одержаного числа E одержимо величину $E = 50,6\%$ і т.д. Після четвертої ітерації алгоритму маємо: $E = 50,678\%$.

Розрахована величина E має цінність не лише як інтегральна кількісна оцінка економічної безпеки банку, але й головним чином, як вказівник черговості постановки і вирішення управлінських завдань у банку. Проаналізуємо одержане число $E = 50,678\%$. Воно показує, що у відповідності з концепцією економічної безпеки некомпенсаційних співвідношень між частковими показниками першочерговим завданням керівництва є підвищення темпів росту капіталу (φ_3) як мінімум до рівня значення показника ліквідності (φ_1). Без цього заходи по підвищенню ліквідності (φ_1) дохідності (φ_2) і достатності капіталу (φ_4) не приведуть до помітного підвищення економічної безпеки банку. У кращому випадку, якщо φ_1 досягне значення 1 і $\varphi_2 = 1$, і $\varphi_4 = 1$, то ціла частина E збільшиться всього на 1 (тобто стане рівною всього 51). А ось зростання найменшої з величин φ_3 до 0,55 збільшує цілу частину числа E на 6 % (якщо не робити округлення). Якщо б показники φ_i були б незалежні, то самим оптимальним варіантом у цій ситуації було б пряме збільшення φ_3 до рівня 0,55. Отже, найближче завдання банку – збільшення темпів росту капіталу до значення 0,55. Інша річ, як це зробити і на скільки при цьому змінюються інші показники. Головне, щоб при зростанні φ_3 до 0,55 інші показники не падали нижче 0,55. Наступним завданням банку має бути підвищення темпів росту капіталу зі значення 0,55 і ліквідності банку зі значення 0,55 до рівня 0,68 кожен, за умови, що φ_4 не знизиться нижче 0,68. Третім завданням банку має стати одночасне підвищення до 0,81 показників ліквідності, дохідності і темпів росту капіталу при збереженні достатності капіталу на рівні $\varphi_4 = 0,81$. Четвертим завданням банку має бути одночасне підвищення до 1 всіх чотирьох показників. Так має виглядати політика розвитку банку по вирішенню чотирьох стратегічних задач. Її результатом повинні стати значення $f_1 = f_1^+$, $f_2 = f_2^+$, $f_3 = f_3^+$, $f_4 = f_4^+$. Терміни ж вирішення чотирьох стратегічних задач банку повинні визначатися з інших додаткових міркувань.

Розуміння суті такого підходу до визначення інтегральної числової оцінки економічної безпеки банку слід покладати на теорію надійності, що виділяє окремі класи (види) некомпенсаційної переваги, серед них:

а) лексикографічне упорядкування критеріїв; б) егалітарно - монотонна перевага; в) центрально - егалітарна перевага. Запропонований вище алгоритм спирається на логіку егалітарно - монотонної переваги. Це некомпенсаційна перевага, у якої цінність певного набору значень часткових показників визначається найменшим зі значень, а при наявності нормованих оцінок $\varphi_i = \dfrac{f_i}{f_i^+}$ найменшим із чисел φ_i.

З нашої точки зору, діючі вимоги НБУ щодо виконання нормативів достатності капіталу, ліквідності та інших показників цілком вписуються в схему егалітарно - монотонної некомпенсаційної переваги. Для цього достатньо покласти відповідний показник рівним нулю, коли не виконується обов'язковий норматив, встановлений НБУ. Тоді інтегральна оцінка буде дорівнювати нулю з деякою дробовою частиною. Це буде індикатором кризової ситуації в банку, по-суті, втратою ним характеристики економічної безпечності. Два останні різновиди некомпенсаційної переваги не можуть коректно проілюструвати вимоги НБУ, а тому не будуть предметом наших подальших досліджень.

За таких обставин егалітарно - монотонне упорядкування частинних показників є найбільш наближеним до реальної банківської практики, ніж інші методи. У свою чергу, для банківської практики є надзвичайно важливим саме реалістичне встановлення співвідношень між частинним і інтегральним показником, властивих частково - компенсаційній перевазі. Серед різновидів останньої, з огляду на вимоги НБУ по виконанню ряду нормативів, найбільш коректними щодо використання в банківській практиці будуть групи співвідношень, проаналізовані нами вище при визначенні частково - компенсаційної переваги як варіанти „б", „в" і „г": співвідношення в кожній з цих груп передбачають наявність як мінімум однієї критичної зони за частинними показниками, що враховуються. Невиконання вимог НБУ по достатності капіталу, ліквідності та ін. еквівалентне попаданню відповідних показників в критичні зони, що у свою чергу логічно робить економічну безпеку рівною нулеві. Викладенні міркування дозволяють стверджувати, що основна увага має бути приділена питанням застосування в банківській практиці частково - компенсаційного співвідношення між інтегральним показником економічної безпеки і узагальненими показниками достатності капіталу, ліквідності, дохідності, темпів росту капіталу.

Якщо узагальнити і систематизувати викладені положення, то можна дійти висновку, що розробка і оцінка стратегічних рішень по управлінню економічною безпекою банку має ґрунтуватися на трьохрівневій системі показників. На верхньому рівні системи знаходиться інтегральний показник – рівень економічної безпеки банку, а також його аргументи, що будуть надалі називатися спеціальними узагальненими показниками. Інтегральний показник може бути числовою функцією або якісним параметром з декількома градаціями рівня конкурентоспроможності (економічної безпеки). В останньому випадку число можливих градацій і суть кожної з них встановлюється керівництвом банку. Природнім вважається число градацій, що не перевищує 10, тоді простіше розрізнити суть двох сусідніх градацій.

У зв'язку з цим у теорії вимірів якісних категорій рекомендується вводити порядкові шкали не більше ніж з 10 градаціями. Приміром, градацію порядкової шкали економічної безпеки банку за шістьма градаціями можна представити в такий спосіб: "абсолютно ненадійний банк", "ненадійний банк", "банк середньої безпеки", "банк хорошої безпеки", "банк високої безпеки", "абсолютно безпечний банк". При кількісно визначеній економічній безпеці остання повинна бути функцією узагальнених показників достатності капіталу, ліквідності, дохідності, темпів росту капіталу та інших спеціальних узагальнених показників, до ряду яких ми ще повернемося.

Клас і параметри функції пропонуємо визначати за результатами тестування переваг керівництва банку. При якісному (з низьким рівнем формалізації) визначенні рівня економічної безпеки кожній її градації потрібно поставити у відповідність або комбінацію інтервалів числових значень спеціальних узагальнених показників, або набір якісно визначених рівнів достатності капіталу, ліквідності тощо. Наголосимо, що безпосереднім користувачем показника економічної безпеки має бути лише голова правління (президент) банку і його найближчі заступники.

На другому рівні системи оцінки стратегічних рішень з управління економічною безпекою банку необхідно застосувати традиційні показники достатності капіталу, ліквідності, дохідності і темпів росту капіталу. Вони повинні використовуватися банківськими працівниками у відповідності з тими технологіями, які прийняті в банку. Одержувані з їх допомогою оцінки – це вихідні дані для розрахунку значень спеціальних узагальнених показників – аргументів інтегрального показника.

Третій рівень системи показників оцінки стратегічних рішень утворюють первісні показники, які фігурують у фінансовій звітності банку. За своєю суттю вони підходять лише для оцінки фактичного стану банку і його ретроспективних станів, тобто лише для оцінки ходу виконання стратегічних рішень. Прогнозування можливих варіантів фінансового стану банку за такої деталізації навряд чи приведе до коректних результатів: розсіювання даних цього виду буде і теоретично, і практично дуже великим. Однак, первісні показники слід використовувати як вихідні дані для розрахунків значень спеціальних узагальнених показників.

Отже, підбиваючи підсумок, можна стверджувати, що поєднання трьох рівнів агрегації даних про фактичну і можливу діяльність банку дозволяє керівництву гнучко управляти банком та швидко адаптуватися до нових умов ринкової кон'юнктури, не втрачаючи контроль над станом власної економічної безпеки.

§2. Моделювання інтегрального показника економічної безпеки банку.

Підтримка економічної безпеки на необхідному рівні має бути основою стратегічного менеджменту в банку. Головними завданнями при цьому визнано: узагальнення оцінок фінансового стану банку, що виконуються його різними підрозділами, виявлення суперечностей, координація роботи підрозділів по підвищенню конкурентоспроможності банку як єдиного цілого. Узагальнення оцінок фінансового стану банку запропоновано здійснювати шляхом моделювання інтегрального показника E економічної безпеки банку. Розроблений методологічний підхід до побудови інтегрального показника економічної безпеки банку потребує поглибленого обгрунтування економічного змісту його аргументів. Такими аргументами вважатимемо спеціальні узагальнені показники оцінки рішень з управління економічною безпекою банку за наступним формалізованим представленням:

$$E = f(K_1, K_2(H2, H3, H4, H5, H6), K_3, K_4, K_5).$$

Йдеться передусім про формування сукупності таких спеціальних узагальнених показників, які найбільшою мірою консолідують інформацію щодо управлінських процесів у банку, є зрозумілими та однозначними за своїм внутрішнім змістом.

З нашої точки зору до цієї сукупності показників доцільно ввести: рентабельність активів (K_1); еволюційну надійність (K_2) – оцінку можливості виконання банком зобов'язань перед власниками банку, його клієнтами і вкладниками; темпи росту власного капіталу (K_3); частку банківського ринку, що належить банку (K_4); коефіцієнт самодостатності банку (K_5).

Показник рентабельності активів представимо у вигляді: $K_1 = \dfrac{ЧП}{ЗА}$,

де: *ЧП* – чистий прибуток (нетто) за звітний період, *ЗА* – загальні активи банку.

Зауважимо, що чистий прибуток (нетто) – це характеристика поточної діяльності банку, що базується на детальному обліку результатів активних і пасивних операцій. Величини *ЧП* і *ЗА* є результатом відповідного об'єднання рахунків другого порядку, які входять до щоденного, щомісячного і щоквартального балансу банку.

Еволюційна надійність K_2 – показник, який є результатом комплексної оцінки можливості виконання банком зобов'язань перед власниками банку, його клієнтами і вкладниками без невиправданого ризику. Формування показника базується на наступних припущеннях і аксіомі 1.

Припущення 1. Зобов'язання перед власниками банку будуть виконані, якщо одночасно буде дотримано таких умов: а) в структурі активів будуть знаходитися позики на певні суми конкретним позичальникам на певних умовах повернення; б) ризик здійснення відповідних операцій з надання позик не перевищує нормативи, що встановлюються НБУ по достатності капіталу для ведення ризикованих операцій; в) прибуток від активних операцій має бути максимально можливим.

Припущення 2. Зобов'язання клієнтів банку – одержувачів позик зверх того, що враховує побажання власників банку, включають, як правило, перелік позик, наданих на умовах, більш ризикованих. У свою чергу ці позики передбачають вищі рівні дохідності для банку, ніж зумовлені побажаннями власників банку.

Припущення 3. Вимоги власників банку будуть виконуватися, якщо не порушуються умови повернення вкладених ними коштів і виплати процентних доходів в обумовлені терміни.

Аксіома 1. Значення показника K_2 тим більше, чим менша ступінь ризику активних операцій, виконуваних у відповідності з вимогами припущень 1-3 і чим більш стабільна загальна економічна кон'юнктура в країні і на світовому фінансовому ринку.

Із наведеної аксіоми випливає, що мінімальні значення показника повинні досягатися у тих випадках, коли показники достатності регулятивного та основного капіталу банку для ведення ризикованих операцій, а також показники ліквідності в точності дорівнюють відповідним нормативам, що встановлюються НБУ. У процесі нашого подальшого дослідження будемо використовувати нормативи, встановлені Інструкцією про порядок регулювання діяльності банків в Україні, яка затверджена постановою Правління НБУ № 368 від 28.08.2001 р. Значення показників *Н2*, *Н3*, *Н4*, *Н5*, *Н6* пропонуємо обчислювати за формулами, наведеними у таблиці 1.

Н2 – норматив адекватності регулятивного капіталу, числове значення якого для діючих банків не може бути меншим ніж 10 % (з 01.04.2004 р.). Норматив *Н2* встановлюється для запобігання надмірному перекладанню банком кредитного ризику та ризику неповернення банківських активів на кредиторів/вкладників банку.

Н3 – норматив адекватності основного капіталу, числове значення якого має бути не меншим ніж 4 %. Норматив *Н3* встановлюється з метою визначення спроможності банку захистити кредиторів і вкладників від непередбачуваних збитків, яких може зазнати банк у процесі своєї діяльності залежно від розміру різноманітних ризиків.

Н4 – норматив миттєвої ліквідності, числове значення якого має бути не менше ніж 20 %. Норматив *Н4* встановлюється для контролю за здатністю банку забезпечити своєчасне виконання своїх грошових зобов'язань за рахунок високоліквідних активів (коштів у касі та на кореспондентських рахунках).

Н5 – норматив поточної ліквідності, числове значення якого має бути не менше ніж 40 %. Норматив *Н5* встановлюється для визначення збалансованості строків і сум ліквідних активів і зобов'язань банку.

Н6 – норматив короткострокової ліквідності, числове значення якого має бути не менше 20 %. Норматив *Н6* встановлюється для контролю за здатністю банку виконувати прийняті ним короткострокові зобов'язання за рахунок ліквідних активів.

Таблиця 1.

Економічні нормативи регулювання діяльності комерційних банків України*

Групи показників	Назва нормативу	Порядок розрахунку	Нормативне значення
1. Нормативи капіталу	1. Норматив мінімального розміру регулятивного капіталу (Н1)	Сума основного, додаткового і субординованого капіталу за мінусом відвернень з урахуванням основних засобів Група 500 в балансі банку	Для місцевих кооперативних банків: не менше 1 млн. євро; для регіональних: 3 млн. євро; для міжрегіональних: 5 млн. євро.
	2. Норматив адекватності регулятивного капіталу (Н2)	Н2 = К/(Ар - РФ) х 100%, де К – капітал банку, Ар – сумарні активи, зважені щодо коефіцієнтів ризику; РФ – створені резерви за активними операціями	Не менше 10%
	3. Норматив адекватності основного капіталу(Н3)	Н3 = ОК1/ЗА х 100%, де ОК – основний капітал банку, зменшений на суму недосформованого резерву на можливі втрати за кредитними операціями, ЗА – загальні активи, зменшені на суму створених відповідних резервів	Не менше 4%

Продовження таблиці 1.

2. Нормативи ліквідності	1. Норматив миттєвої ліквідності (Н4)	Н4 = (Ккр + Ка)/Пр х 100%, де Ккр – сума коштів на кореспондентському рахунку, Ка – кошти в касі, Пр – поточні рахунки	Не менше 20%
	2. Норматив поточної ліквідності (Н5)	Н5 = (АІ + АІІ)/З х 100%, де АІ – активи первинної ліквідності, АІІ – активи вторинної ліквідності; З – зобов'язання банку з відповідними строками виконання	Не менше 35%
	3. Норматив коротко-строкової ліквідності (Н6)	Н6 = Ал/Зк х 100%, де Ал – ліквідні активи, Зк – короткострокові зобов'язання (до 1 року)	Не менше 20%

Джерело: Інструкція "Про порядок регулювання діяльності комерційних банків", затверджена Постановою Правління НБУ № 368 від 28.08.2001 р.

Зменшення чисельників при фіксованих значеннях знаменників або збільшення знаменників при фіксованих значеннях чисельників у наведених формулах, або одночасна зміна чисельників і знаменників, що призводить до зменшення числових значень індивідуальних показників банку по відношенню до встановлених нормативів, супроводжується штрафними санкціями або відкликанням ліцензії на здійснення банківських операцій. Отже, незалежно від того, що саме контролюється: достатність капіталу банку для ведення ризикованих операцій чи ліквідність банку, комерційний банк, який допустив порушення хоча б одного із п'яти вказаних показників, стає банкрутом. Керувати банком, спираючись лише на дві можливі оцінки його стану: банкрут – не банкрут, досить незручно. У зв'язку з цим пропонуємо провести оцінку надійності банку за допомогою функції K_2.

Звідси випливає, що K_2 має бути функцією, яка відображає або некомпенсаційні, або частково - компенсаційні відношення між K_2 і показниками $H2$, $H3$, $H4$, $H5$ і $H6$. В останньому випадку кожен із п'яти показників повинен мати критичні зони, відповідно: $H2 < 0,1$; $H3 < 0,04$; $H4 < 0,2$; $H5 < 0,4$; $H6 < 0,2$.

При попаданні будь-якого з них у критичну зону K_2 набуває свого найменшого значення, якщо K_2 – функція, або знаходиться в найгіршій градації, коли K_2 показник, що якісно оцінюється (показник з порядковою шкалою).

Якщо $\dfrac{PK}{A_P} > 0{,}1$ і PK наближається до значення A_p при фіксованому A_p (тобто при незмінній структурі і величині активів в кожній запровадженій НБУ групі ризику), то надійність банку при фіксованих значеннях показників ліквідності буде зростати. Однак, подію $PK = A_p$ слід розглядати як малоймовірну, оскільки це означало б, що формування власних коштів банку відбувається незадовільно. Отже, при фіксованих значеннях загальних активів банку ($ЗА$) активів, зважених за ступенем ризику (A_p) і показників ліквідності показник K_2 має досягати свого максимального значення при $PK = A_p$ або при досить близьких значеннях, а коли $PK > A_p$, тоді або залишатися незмінним, або зростати на дуже малу величину. Крім того, корисність показника $\dfrac{PK}{A_P}$ полягає в тому, що він відображає несхильність до ризику деякого ідеального суб'єкта банківської системи – самого Національного банку України.

Логічно доходимо висновку, що описаним вимогам задовольняють положення теорії надійності. Дійсно, нехай об'єкт (елемент) розпочинає роботу в момент часу $t_0 = 0$, а через певний проміжок часу t опиняється в кризовій ситуації. Позначимо за T неперервну випадкову величину – тривалість часу стабільної роботи об'єкта. Якщо об'єкт функціонував стабільно (до виникнення кризи) упродовж періоду часу, менше t тоді саме за час тривалістю t, й виникає криза.

Тривалість часу стабільної роботи об'єкта може бути виражена показниковим розподілом:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & якщо \quad t < 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & якщо \quad t \geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$

для якого функція розподілу показникового закону є:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda \int_{0}^{t} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Отже,

$$F(t) = \begin{cases} 0, & якщо \quad t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & якщо \quad t \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Графіки щільності розподілу $f(t)$ і функції розподілу $F(t)$ відповідно зображені на рисунках 1 та 2.

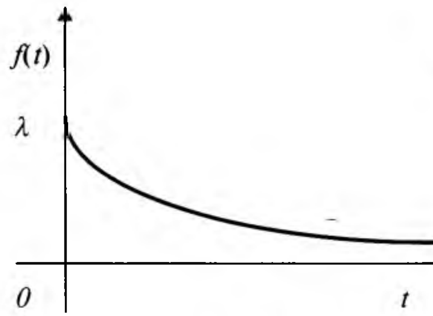


Рис.1.

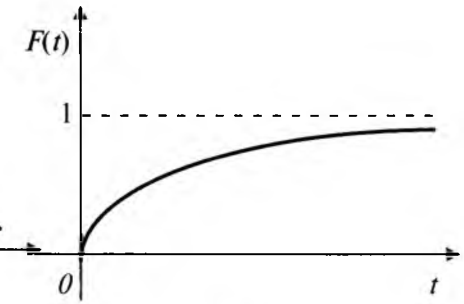


Рис.2.

Функція розподілу $F(t) = P(T < t)$ визначає ймовірність настання кризи за час тривалістю t. Таким чином, ймовірність стабільної роботи за цей самий час тривалістю t, тобто ймовірність протилежної події $T > t$, визначається за формулою:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t). \qquad (3)$$

Звідси:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}, \qquad (4)$$

де: $\lambda > 0$, тобто стала додатна величина (інтенсивність настання кризи або середнє число криз за одиницю часу).

Формула (4) дозволяє знайти ймовірність стабільної роботи об'єкта на інтервалі часу тривалістю t, якщо час стабільної роботи має показниковий розподіл. Слід зазначити, що показниковий розподіл визначається одним параметром λ. Ця особливість показникового розподілу вказує на його переваги у порівнянні з розподілами, залежними від більшого числа параметрів. Звичайно параметри невідомі і доводиться визначатися з їх оцінками (наближеними значеннями). Звісно, простіше оцінити один параметр, ніж два або три і т.д. Важливо зазначити, чому показниковий закон надійності вбачається доцільним щодо використання в площині здійснюваних нами досліджень. Поясненням цьому є наявність виокремленої нами важливої властивості, яку має цей закон: *ймовірність стабільної роботи об'єкта на інтервалі часу тривалістю t не залежить від часу, який передував роботі до початку розглядуваного інтервалу, а залежить лише від тривалості часу t (при заданій інтенсивності збоїв чи криз λ).*

Дійсно, нехай подія A – визнання стабільної роботи об'єкта на інтервалі $(0, t_0)$ тривалістю t_0; подія B – визнання його стабільної роботи на інтервалі $(t_0, t_0+\Delta t)$ тривалістю t. Тоді подія AB – визнання стабільної роботи на інтервалі $(0, t_0+\Delta t)$, тривалістю t_0+t. Ймовірність цих подій з урахуванням (3) дорівнює:

$$P(A)=e^{-\lambda t_0}, \quad P(B)=e^{-\lambda t},$$

$$P(AB)=e^{-\lambda(t_0+t)}=e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}.$$

Ймовірність того, що об'єкт буде працювати стабільно на інтервалі $(t_0, t_0+\Delta t)$ за умови, що він вже пропрацював стабільно на попередньому інтервалі $(0, t_0)$ обчислюється так:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda t_0}\cdot e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

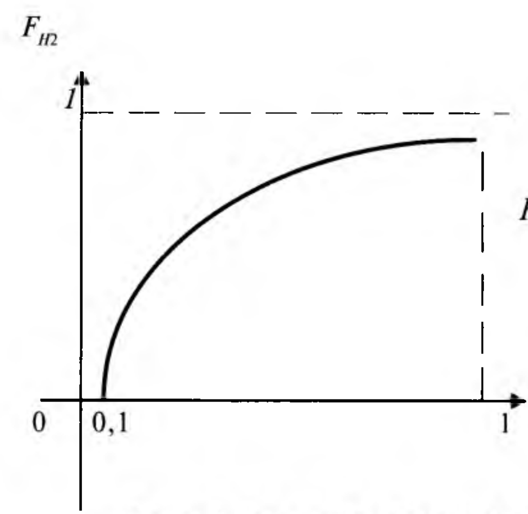
Отримана формула (5) не містить t_0, а містить лише t. Це й означає, що час роботи на попередньому інтервалі не впливає на величину

ймовірності стабільної роботи на наступному інтервалі, а залежить лише від довжини наступного інтервалу.

Отже, у випадку показникового закону надійності стабільна робота банку „*у минулому*" не впливає на величину ймовірності його стабільної роботи „ *у найближчому майбутньому*". Поряд з цим, слід зауважити, що розглядувану властивість має лише показниковий розподіл. Отже, якщо випадкова величина має таку властивість, то вона розподілена за показниковим законом.

Приведені міркування щодо комплексної оцінки можливості виконання банком своїх зобов'язань та запобігання перекладанню ним надмірного ризику на власних кредиторів і вкладників дозволяють характеризувати надійність роботи банку функцією виду $1-e^{-\lambda t}$, яку в подальшому будемо називати функцією надійності за показниками $H2$, $H3$, $H4$, $H5$ і $H6$.

Функція надійності за показником Н2 – адекватності регулятивного капіталу має вигляд (рис.3):



$$F_{H2}=1-e^{-\lambda_1(H2-0,1)} \tag{6}$$

Рис.3. Вид функції надійності за показником достатності регулятивного капіталу

При фіксованій структурі активів за групами ризику, значеннях $H3$, $H4$, $H5$ і $H6$, функція має вид, представлений на рис.3, тобто F_{H2} має додатне значення при $H2 > 0,1$. За умови перегляду з боку НБУ нормативу $H2$ функція F_{H2} має бути відповідним чином скоригована. У формулі (6) параметр λ_1, визначений раніше як інтенсивність збоїв чи криз у роботі банку, має бути підібраний в такий спосіб, щоб при $PK = A_p$ (див. формулу для визначення $H2$ у таблиці 1) значення функції F_{H2} було б 0,97–0,98; $\lambda_1 > 1$. Якщо PK перевищує A_p більш ніж у два – три рази, то значення F_{H2} буде дуже близьким до одиниці, тобто буде оптимальним. Звернемо увагу на одну особливість функції F_{H2}: чим більша величина λ_1, тим крутіше графік, тим далі від осі ординат він проходить і тим ближче до рівня $F_{H2} = 1$ буде крива при значеннях $PK = A_p$.

Певний вклад в еволюційну надійність банку (показник K_2) вносить показник Н3. Функція надійності за показником адекватності основного капіталу має вигляд:

$$F_{H3} = 1 - e^{-\lambda_2 (H3 - 0,04)} \qquad (7)$$

При $H2 = const$, $H4 = const$, $H5 = const$, $H6 = const$ крива, що зображена на рис.4, відображає несхильність банку до надмірного ризику.

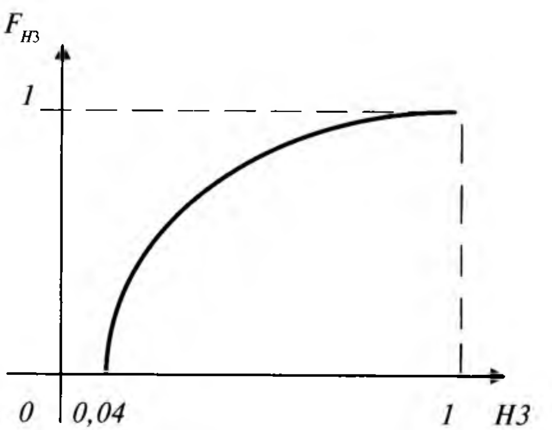


Рис.4. Вид функції надійності за показником адекватності основного капіталу

У формулі (7) параметр $\lambda_2 > 1$. Усе, сказане про параметр λ_1, має відношення до λ_2. Повторюючи міркування, проведені щодо обгрунтування часткового вкладу в еволюційну надійність банку кожного з показників ліквідності Н4, Н5, Н6, одержимо відповідно функції:

$$F_{H4} = 1 - e^{-\lambda_3 (H4 - 0,2)}, \qquad (8)$$

$$F_{H5} = 1 - e^{-\lambda_4 (H5 - 0,4)}, \qquad (9)$$

$$F_{H6} = 1 - e^{-\lambda_5 (H6 - 0,2)}. \qquad (10)$$

Вкотре наголосимо, що числові значення Н4, Н5, Н6 обраховуються у відповідності з вимогами НБУ (див. таблицю 1).

Вид функції надійності за показником миттєвої, поточної і короткострокової ліквідності представлений відповідно на рис. 5, 6 і 7.

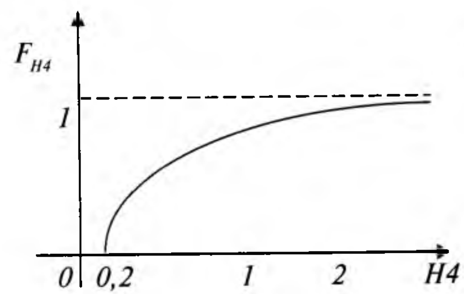


Рис.5 . Вид функції надійності за показником миттєвої ліквідності

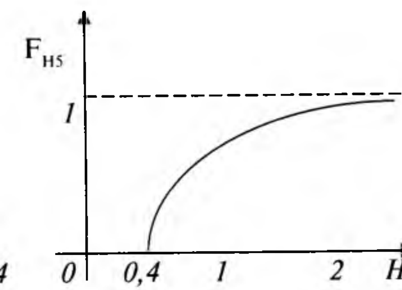


Рис.6. Вид функції надійності за показником поточної ліквідності

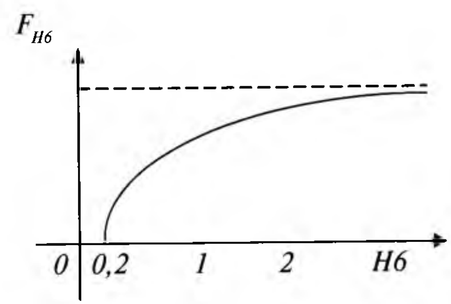


Рис.7. Вид функції надійності за показником коротко-строкової ліквідності

У рівняннях (8), (9), (10) λ_3, λ_4, λ_5 – параметри, що підбираються керівництвом банку так, щоб регулювати крутизну кривих в колі значень $H4$, $H5$, $H6$. Графіки функцій F_{H4}, F_{H5}, F_{H6} – це експоненти, що набувають додатних значень в точках $H4>0{,}2$, $H5>0{,}4$, $H6>0{,}2$ і мають асимптоти $F_{H4}=1$, $F_{H5}=1$, $F_{H6}=1$. Величина відхилення від асимптот визначається параметрами λ_3, λ_4 і λ_5 відповідно.

Таким чином, до переліку аргументів узагальненого показника еволюційної надійності комерційного банку K_2 було внесено п'ять величин, втім цей перелік може бути доповнений за необхідності й іншими величинами.

Отже, визначено п'ять часткових функцій надійності, а саме: F_{H2}, F_{H3}, F_{H4}, F_{H5} і F_{H6} для формування показника еволюційної надійності K_2. Кожна з них представляє собою значення при фіксованих значеннях останніх чотирьох показників. Приміром, якщо значення $H3 = const$, $H4 = const$, $H5 = const$, $H6 = const$, то одержимо $K_2 = F_{H2}$. Якщо $H2 = const$, $H4 = const$, $H5 = const$, $H6 = const$, то одержимо $K_2 = F_{H3}$ і т.д.

Враховуючи характер кожної з функцій F_{H2}, F_{H3} F_{H4} F_{H5}, F_{H6}, можна стверджувати, що залежною від них є функція K_2 що відображає некомпенсаційне співвідношення між F_{H2}, F_{H3}, F_{H4}, F_{H5} і F_{H6}. Розрахунок значень K_2 пропонується проводити за алгоритмом, зміст якого було викладено раніше для величини φ_i. У відповідності з ним підсумком розрахунків буде число, ціла частина якого в процентах дорівнює найменшому з чисел F_{H2}, F_{H3}, F_{H4}, F_{H5} і F_{H6}, а дробова частина складена із значень решти чисел.

Наступним спеціальним показником, що аналізується і є аргументом інтегрального показника економічної безпеки банку, має бути K_3 – темп росту капіталу, який пропонується обчислювати за формулою:

$$K_3 = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=0}^{T} \frac{BK(t) - BK(t-1)}{BK(t_0)}, \tag{11}$$

де: $BK(t)$ власний капітал банку в t-й квартал поточного року, рахуючи від початку базового періоду t_0; $BK(t-1)$ – цей же капітал у попередній квартал; $BK(t_0)$ – він же на початок базового періоду; T – число кварталів, рахуючи від базового періоду; K_3 – середній темп росту власного капіталу за відрізок від t_0 до t (на момент контролю темпів росту власного капіталу).

Відповідно, наступним показником, який має аналізуватися і входить до запропонованої раніше сукупності аргументів інтегрального показника економічної безпеки банку, буде показник K_4 – частка банківського ринку, що належить банку, який пропонуємо обчислити за формулою:

$$K_4 = \frac{A_Д}{\sum_{i=1}^{N} A_{Д_i}}, \tag{12}$$

де: $A_Д$ – величина активів (чи зобов'язань), що належить досліджуваному банку; $A_{Д_i}$ – частка активів (чи зобов'язань), що контролюються на ринку i-им банком; N – загальна кількість банків на даному ринку.

Останнім у сформованій нами сукупності показників є показник самодостатності банку. Його можна обчислити за формулою:

$$K_5 = \frac{BK}{ЗА}, \tag{13}$$

де: BK – власний капітал; $ЗА$ – загальні активи банку.

Згідно запропонованого раніше алгоритму розраховуємо інтегральний показник економічної безпеки банку E. Він відображає в процентах ступінь досягнення запланованих стратегічних цілей розвитку банку та коригує їх на перспективу. Слід зазначити, що він має цінність не лише як інтегральна кількісна оцінка економічної безпеки банку, але й головним чином як вказівник черговості постановки і вирішення управлінських завдань у банку.

Здійснимо оцінку інтегрального показника економічної безпеки банку E на прикладі даних АКБ “Х”. Показники фінансової звітності АКБ “Х” містяться у таблиці 2. Побудуємо за ними матрицю даних для обчислення аргументів інтегрального показника економічної безпеки банку K_1, K_2, K_3, K_4 і K_5 (табл.3). Результати обчислення значень аргументів показника E наведено в таблиці 4.

Таблиця 2

Баланс ВАТ КБ “Х”, тис.грн.

Актив	1-й рік	2-й рік	3-й рік
Валюта, монети, банківські метали	14 763	25 124	41 754
Коррахунок в НБУ	49 015	40 104	17 315
Коррахунки в інших банках	50 827	120 905	221 345
Депозити і кредити в інших банках	58 158	103 283	140 967
Цінні папери в портфелі банку	50 781	58 574	34 606
Кредити і фінансовий лізинг, надані клієнтам	364 321	635 726	996 594
Інвестиції капіталу	1 414	1 332	1 522
Нематеріальні витрати	1 050	1 082	1 503
Матеріальні активи	14 368	29 070	59 558
Інші активи	31 150	37 372	32 607
Кредити закладам банку	172 365	502 392	1 030 383
Всього активів	**808 212**	**1 554 964**	**2 578 153**
Пасив	**1-й рік**	**2-й рік**	**3-й рік**
Коррахунки банків	14 930	29 625	20 643
Депозити і кредити банків	28 001	223 415	237 141
Кошти до запитання клієнтів	28 367	105 772	193 759
Термінові депозити клієнтів	194 634	369 180	522 144
Цінні папери власного боргу	86 688	514 12	221 581
Кредити, отримані від міжнародних фінансових організацій	63 239	97 793	104 853
Депозити від закладів банку	172 365	502 392	1 030 383
Інші зобов’язання	105 998	53 606	26 508
Статутний капітал	33 700	33 700	54 940
Фонди і резерви	39 958	56 404	128 254
Субординована заборгованість, прирівняна до капіталу	25 968	25 343	25 496
Чистий прибуток поточного року	14 363	6 323	12 450
Сукупні зобов’язання та капітал	808 212	1 554 964	2 578 153

Таблиця 3

Матриця даних для обчислення аргументів інтегрального показника економічної безпеки банку (K_1, K_2, K_3, K_4, K_5)*

Показники / Роки	(тис. грн.)		(%)					(тис. грн.)					
	ЧП	ЗА	Н2	Н3	Н4	Н5	Н6	ВК(t_0)	ВК(t-1)	ВК(t)	$А_Д$	$А_{ДІ}$	ВК
1-рік	14363	8082112	22,19	11,62	110,2	62,75	53,82	1080026	1111293	1139989	6942223	276547111	1139989
2-й рік	6323	15549964	13,8	9,03	96,78	53,52	44,12	1140017	1189904	1217770	14331194	392948888	1217770
3-й рік	12450	25781153	15,86	12,52	74,9	83,75	31,47	1422539	1812246	2211140	23557012	539122619	2211140

Таблиця 4

Результати обчислення аргументів інтегрального показника економічної безпеки банку

Показники / Роки	Рентабельність активів (K_1)	Показник еволюційної надійності					Темп росту капіталу (K_3)	Частка банківського ринку (K_4)	Коефіцієнт самодостатності (K_5)
		$K_2=F_{Н2}$	$K_2=F_{Н3}$	$K_2=F_{Н4}$	$K_2=F_{Н5}$	$K_2=F_{Н6}$			
1-й рік	0,018	0,180	0,284	0,635	0,228	0,312	0,353	0,034	0,155
2-й рік	0,004	0,381	0,352	0,573	0,446	0,437	0,360	0,042	0,082
3-й рік	0,005	0,564	0,491	0,652	0,410	0,628	0,526	0,047	0,099

Стратегічні цілі розвитку банку передбачають, що оптимальними значеннями часткових показників стану економічної безпеки банку K_1, K_2, K_3, K_4 і K_5 є числові значення K_i^+, що встановлюються експертним шляхом (табл. 5).

Таблиця 5

Оптимальні значення аргументів інтегрального показника економічної безпеки банку (K_i^+)

Показники / Роки	K_1^+	K_2^+	K_3^+	K_4^+	K_5^+
1-й рік	0,027	0,286	0,515	0,041	0,199
2-й рік	0,007	0,603	0,474	0,065	0,121
3-й рік	0,007	0,622	0,721	0,061	0,116

З урахуванням зазначених моментів визначимо інтегральний показник економічної безпеки банку E за запропонованим вище алгоритмом. Одержані результати свідчать про те, що банк володіє значним запасом надійності (табл.6).

Таблиця 6

Результати визначення інтегрального показника економічної безпеки банку (E)

Показники / Роки	Нормована оцінка ($\varphi_i = K_i / K_i^+$)					**E** (%)
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	
1-й рік	0,67	0,63	0,69	0,83	0,78	63,7788
2-й рік	0,57	0,58	0,76	0,65	0,68	57,6778
3-й рік	0,71	0,66	0,73	0,77	0,85	66,7789

Першочерговим завданням керівництва банку у 2-му році мало бути: підвищення нормованої оцінки еволюційної надійності (φ_2) до значення нормованої оцінки рентабельності активів (φ_1) – 0,71. Головне, щоб при зростанні φ_2 до 0,71 інші відповідні показники не

падали нижче 0,71. Наступним завданням менеджменту банку мало бути підвищення нормованої оцінки еволюційної надійності і рентабельності активів зі значення 0,71 до рівня 0,73 кожна, за умови, що φ_3 не знизиться нижче 0,73. Третім завданням мало стати одночасне підвищення до 0,77 значень нормованих оцінок φ_1, φ_2, φ_3 при збереженні значення φ_4 на рівні 0,77. Четверте завдання керівництва банку полягало в одночасному підвищенні нормованих оцінок φ_1, φ_2, φ_3 і φ_4 до рівня значення φ_5 – 0,85. І, нарешті, кінцевою метою стратегічного менеджменту банку мало бути одночасне підвищення до 1 всіх п'яти показників φ_i.

Результатом реалізації кінцевої мети стане досягнення рівності між фактичними та оптимальними значеннями часткових показників економічної безпеки банку: $K_1 = K_1^+ = 0{,}007$; $K_2 = K_2^+ = 0{,}622$; $K_3 = K_3^+ = 0{,}721$; $K_4 = K_4^+ = 0{,}061$; $K_5 = K_5^+ = 0{,}116$.

З урахуванням того, що $E_{2\text{-му році}} > E_{1\text{-му році}}$ можна стверджувати, що керівництву банку вдалося досягнути запланованих стратегічних цілей розвитку.

§3. Моделювання обсягу активів у банківському менеджменті

Сучасний комерційний банк – це установа, менеджмент якої зобов'язаний забезпечити найбільш оптимальне поєднання інтересів власників (максимальна віддача капіталу), клієнтів (якісне та недороге обслуговування) і держави (стійкість банківської системи й ефективність проведення грошово-кредитної політики). При цьому фінансовим менеджерам потрібно приймати рішення трьох видів:

1) рішення про інвестування. Вони визначають розмір та структуру активів;

2) рішення про фінансування. Це рішення про те, як залучити необхідні для інвестування кошти;

3) рішення про дивіденди, які стосуються норми виплати дивідендів.

Головним сучасним принципом банківського менеджменту є поєднання управління активами з управлінням пасивами. Тільки врахування складу та структури, а також змін у ресурсах комерційного банку є передумовою ефективного розподілу коштів. Управління активами і пасивами відбувається в умовах невизначеності потоків грошових коштів, а також процентних ставок, що піддані ринковим коливанням. При досягненні достатнього рівня прибутку виникає можливість формування в необхідному обсязі капіталу банку. У той же час ризик, ліквідність і платоспроможність впливають на прибуток банку по-різному. Чим більша ліквідність банку, тим менша прибутковість. Чим більша прибутковість, тим вищий рівень ризику. Природно вважати, що стабільне зростання активів банку позитивно впливає на рівень прибутковості його роботи, але знижує ліквідність.

Базовим коефіцієнтом, що вимірює прибутковість банку, є показник ROE — рентабельності капіталу банку. Він має перебувати в полі зору власників банку (акціонерів). Рентабельність капіталу банку визначається поділом чистого прибутку (прибутку після виплати податків, але до виплати дивідендів) на величину основного капіталу банку. Цей показник дозволяє акціонерам банку оцінити ефективність роботи менеджерів, які взяли на себе відповідальність за управління банком. Бажання акціонерів зосередити свою увагу на цьому коефіцієнті пояснюється тим, що у разі банкрутства банку вкладені кошти (компенсацію) вони одержать останніми. Це означає, що власники банку як інвестори зацікавлені якомога раніше одержати віддачу від вкладених ними грошей і тим самим знизити можливі втрати.

Величина показника ROE заснована на показниках ринку, а тому його значення постійно змінюється. За нормальних умов рівень цього показника коливається в межах 6-8%. В основі його лежить ставка LIBOR[1] плюс премія за ризик, яку згодний заплатити інвестор. Для вітчизняної практики цей показник має виключно розрахункове значення і не заснований на показниках ринку. Ринок банківських акцій в Україні не розвинутий, акції не обертаються вільно на біржі. У міжнародній практиці ROE прогнозується керуючими й інвесторами банку.

[1] *Libor – London Interbank Offered Rate – Лондонська ставка міжбанківських кредитів – важливий індикатор вартості на міжнародному ринку кредитів*

Оскільки в ринковій економіці капітал вільно переливається з однієї галузі в іншу, очікування акціонерів по рентабельності акцій грунтуються на зіставленні з аналогічними інвестиціями й адекватним рівнем ризику. Очікувана акціонером рентабельність ROE вкладень у банк розраховується за формулою:

$$ROE = R_f + [E\,(R_m) - R_f] \times \beta, \tag{14}$$

де: R_f - безризикова процентна ставка;

$E(R_m)$ - прогнозована рентабельність аналогічних інвестицій на ринку;

$[E(R_m) - R_f]$ - премія за ризик;

β - ринковий ризик в економіці.

Показник ROA – прибутковості банку – свідчить безпосередньо про ефективність управління його активами. Він розраховується як відношення чистого прибутку до середнього розміру активів банку. Чим вище значення показника ROA, тим вища прибутковість банку. Однак відомо, що чим більший прибуток, тим вищий ризик. Оскільки банк залучає гроші від широких верств населення, менеджери, орієнтуючись на високий фінансовий результат, повинні прагнути одержувати прибуток при виправданому ступені ризику. В Україні не визначені жорсткі критерії оцінки прибутковості банку, у даному разі для показника ROA. Це означає, що при проведенні такої оцінки доцільно:

- аналізувати зміну коефіцієнта в динаміці;
- проводити факторний аналіз показника ROA;
- використовувати метод порівняльної оцінки.

Очевидно, що чим більший розмір активів банку, тобто більший банк, тим нижчий показник ROA. Більш того, розмір активів балансу банку може коливатися дуже істотно протягом року і досягати свого найвищого значення наприкінці його. Це означає, що знаменник формули ROA є середньою величиною за період.

При проведенні факторного аналізу доцільніше коефіцієнт ROA представляти у вигляді двох коефіцієнтів:

$$ROA = \frac{\text{Балансовий прибуток} - \text{Податки}}{\text{Середній розмір активів за період}};$$

10-12-173

$$ROA = \frac{\textit{Валовий дохід за період}}{\textit{Середній розмір активів за період}} \times \frac{\textit{Чистий прибуток}}{\textit{Валовий дохід за період}}.$$

У даній формулі більш докладно розкривається залежність прибутку від інших складових. Показник прибутковості банку (ROA) тим вищий, чим вища прибутковість активів, а цей показник зав'язаний на структуру активу балансу банку і характеризує ефективність прийнятих управлінських рішень. Показник ROA тим вищий, чим більша частка чистого прибутку у валовому доході банку. Це в свою чергу означає, що підвищується ризик діяльності банку. Однак показник чистого прибутку є різницею між доходами, витратами банку і розміром сплачених податкових платежів. Тому при поглибленій оцінці показника маржі прибутку доцільно враховувати вплив трьох вищезгаданих факторів. Маржа банку може збільшитися при підвищенні рівня доходів чи зниженні рівня витрат. Останній фактор позитивно впливає на показник маржі прибутку, а отже, і на показник ROA. Іншим показником оцінки діяльності банку з точки зору прибутку є ROE, що свідчить про рентабельність капіталу банку.

Як зазначалося вище, менеджери банку зацікавлені у зростанні показника ROA, що характеризує його ефективність. Оскільки по показнику ROE так само, як і ROA, немає встановлених критеріїв для вітчизняних банків, рентабельність капіталу аналізують за допомогою додаткових коефіцієнтів:

$$ROE = \frac{\textit{Чистий прибуток}}{\textit{Акціонерний капітал}};$$

$$ROE = \frac{\textit{Чистий прибуток}}{\textit{Середній розмір активів}} \times \frac{\textit{Середній розмір активів}}{\textit{Акціонерний капітал}};$$

Або

$$ROE = ROA \times L_f, \tag{15}$$

де: L_f - мультиплікатор капіталу або фінансовий важіль (леверидж).

З даного рівняння випливає, що рентабельність капіталу тим вища, чим вищий показник прибутковості банку (ROA). Рентабельність капіталу банку тим вища, чим більший фінансовий важіль, а це означає, що стійкість банку нижча. Збільшення показника фінансового важеля вказує на зниження частки капіталу банку в пасиві балансу і, отже, негативно впливає на надійність банку. У підсумку зазначимо, що аналіз прибутковості і рентабельності банку не може замикатися на обмежене коло коефіцієнтів і показників, незважаючи на те що ROA і ROE належать до ключових.

У банку, що розвивається, зростання активів – звичайне явище. Очевидно, що зростання валюти в балансі банку впливає на рівень прибутковості банку, підвищуючи її, але одночасно негативно позначається на рівні ліквідності банку, знижуючи її. Оскільки зростання банку неможливе без нарощування ресурсної бази, значення фінансового важеля неухильно зростає. Для банківського бізнесу властивий високий фінансовий важіль, розмір якого частіше дорівнює 20 чи 25 одиницям.

Чим вище співвідношення L_f, тим вищий ризик, оскільки банку достатньо втратити 6–8% своїх активів і він може бути визнаний банкрутом. У той же час зниження частки капіталу в пасиві балансу банку позитивно впливає на показник ROE, в якому, як уже зазначалося, зацікавлене керівництво банку.

Таким чином, між показниками ROA і ROE існує певна суперечність: менеджери прагнуть досягти більшого прибутку при виправданому рівні ризику, а власники націлені на підвищення рентабельності капіталу за всяку ціну. Однак варто зазначити, що низьке значення L_f не свідчить про низький рівень ризику. Якщо L_f нижче 20, то це не означає, що в даного банку є незначна частка ресурсів на ринку, що відповідно супроводжується невисоким рівнем витрат банку, зокрема процентного характеру по залученню ресурсів, це може бути наслідком активного нарощування обсягу власного капіталу за рахунок нерозподіленого прибутку.

Стабільне зростання активів банку засноване також не лише на здатності банку генерувати кошти, а й на дивідендній політиці і фінансовому ризику. Усі вищезгадані фактори росту взаємозалежні і можуть бути описані математично.

Здійснити оцінку рівня ризику банку пропонуємо за формулою стабільного росту активів:

$$G = ROE \times (1 - DPR), \tag{16}$$

чи

$$G = ROA \times L_F \times (1 - DPR), \tag{17}$$

де: G - рівень зростання активів;

DPR - коефіцієнт виплати дивідендів.

Стабільність активів заснована на показнику прибутковості банку, мультиплікаторі капіталу, чи фінансовому важелі, і рівні капіталізації прибутку. Чим вищий рівень капіталізації, тим більш виправданим є зростання активів банку. Наприклад, ROA = 1%, $L_F = 20$, DPR = 20%, тобто з чистого прибутку виплачується 20% у вигляді дивідендів, а 80% капіталізується. Це означає, що $G = 0{,}01 \times 20 \times 0{,}8 = 0{,}16$, чи 16%. Збільшення активу балансу банку виправдане на 16%, тому що в цих межах не призводить до концентрації фінансових ризиків, оскільки банк розвивається за рахунок внутрішньої капіталізації.

Наші подальші дослідження спрямуємо у площину моделювання зростання активів банку окремо у коротко- і довгостроковому періодах.

Визначення стабільного зростання активів банку у короткостроковому періоді можна здійснити за наведеною вище формулою (16).

Для моделювання в довгостроковій перспективі пропонуємо використовувати формулу:

$$G = \frac{ROE \cdot (1 - DPR)}{1 - ROE \cdot (1 - DPR)} \tag{18}$$

Короткострокове планування зростання активів банку. При короткостроковому плануванні будемо керуватися тим, що єдиним джерелом збільшення активів банку є нерозподілений прибуток (умова 1). Другою умовою є те, що структура зобов'язань банку не змінюється. Отже, зростання активів комерційного банку в цьому разі залежить від внутрішніх чинників.

Приріст активів можна дослідити за допомогою такого рівняння:

$$\Delta A = \Delta K + \Delta З \tag{19}$$

де: ΔA - приріст активів;

ΔK - приріст капіталу;

$\Delta З$ - приріст зобов'язань.

Умови (1) та (2) знаходять відображення у формулах (20) та (21):

$$\Delta K = ЧП \times ЧНП \tag{20}$$

де: *ЧП* - обсяг чистого прибутку; *ЧНП* - частка нерозподіленого прибутку.

$$\Delta З = ЧП \times ЧНП \times \frac{З}{K}, \tag{21}$$

де: $\frac{З}{K}$ - співвідношення зобов'язань та капіталу.

Отже, формула (19) буде мати вигляд:

$$\Delta A = ЧП \times ЧНП + ЧП \times ЧНП \times \frac{З}{K},$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП \times ЧНП}{A} + \frac{ЧП \times ЧНП}{A} \times \frac{З}{K},$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП \times ЧНП}{A} + \left(1 + \frac{З}{K}\right),$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП}{A} \times \left(\frac{K + З}{K}\right) \times ЧП,$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП}{A} \times \frac{A}{K} \times ЧНП = \frac{ЧП}{K} \times ЧНП. \tag{22}$$

Якщо вважати, що чистий прибуток банку використовується тільки на виплату дивідендів, тобто $ВП = Д$, то одержимо таку формулу:

$$ЧНП = \frac{ЧП - ВП}{ЧП} = \frac{ЧП - Д}{ЧП} = 1 - \frac{Д}{ЧП}, \tag{23}$$

де: *ВП*- використання прибутку, *Д* - сума дивідендів.

Таким чином, за умови $ВП = Д$ формула (22) відповідає формулі (16):

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП}{K} \times \left(1 - \frac{Д}{ЧП}\right) = ROE \times (1 - DPR)$$

На підставі формули (24) можна визначити обсяг чистого прибутку, який забезпечує бажаний рівень приросту активів:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП}{K} \times \left(1 - \frac{Д}{ЧП}\right) = \frac{ЧП - Д}{K} \tag{24}$$

Наприклад, якщо $K = 20$ млн грн, $Д = 4$ млн грн, формула (24) буде мати вигляд:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{ЧП - 4}{20} = 0{,}05 \times ЧП - 2.$$

Побудуємо графік прямої на відрізку $\frac{\Delta A}{A} \in [0;1]$, тобто розглянемо випадок зміни обсягу активів банку від 0 до 100% (рис. 8).

За даними рис.8 можна зробити такі висновки:

1. Якщо обсяг чистого прибутку дорівнює 4 млн грн, обсяг активів банку не змінюється.
2. Якщо обсяг чистого прибутку дорівнює 24 млн грн, обсяг активів банку подвоюється.
3. Зростання активів банку на 50% можливе за умови, що обсяг чистого прибутку дорівнює 14 млн грн.

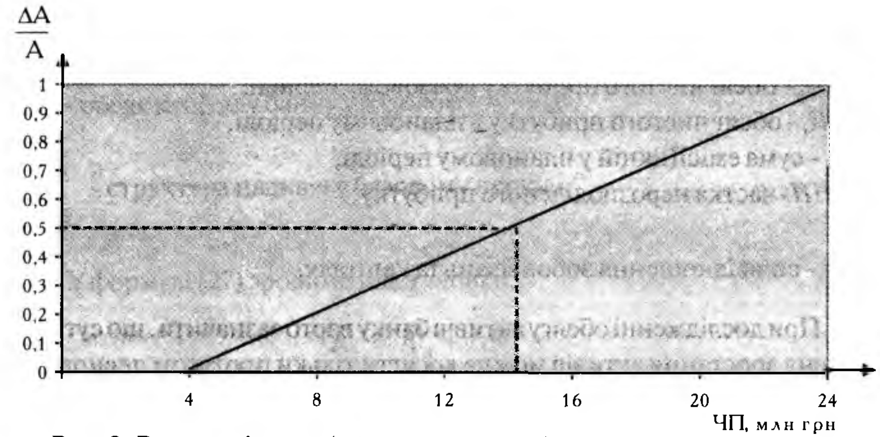


Рис. 8. Взаємозв'язок обсягу чистого прибутку та рівня зростання активів

Довгострокове планування зростання активів банку. При довгостроковому плануванні будемо керуватися тим, що зростання активів банку можливе за рахунок: збільшення нерозподіленого прибутку, емісії акцій, зміни структури пасивів банку. Отже, приріст активів комерційного банку у цьому разі залежить як від внутрішніх, так і від зовнішніх чинників. Розглянемо два підходи до довгострокового планування зростання активів[1]. Вихідною умовою для першого з них є:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{A_0 + \Delta A}{A_0} = 1 + \frac{\Delta A}{A_0}, \tag{25}$$

де: A_1 - обсяг активів банку у плановому періоді,
A_0- обсяг активів банку у базовому періоді,
ΔA - приріст активів.

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} - 1 = K_1 \times \frac{A_1}{K_1} \times \frac{ЧП_0}{A_0} \times \frac{1}{ЧП_0} - 1, \tag{26}$$

де: ΔA - приріст активів,

[1] *Детальніше див.: Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник.- 3-є вид., випр. – К.: Знання, 2007. – 454 с.; Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: Кондор, 2007. – 352 с.*

A_0 - обсяг активів банку у базовому періоді,
K_0 - обсяг капіталу в базовому періоді,
$ЧП_0$ - обсяг чистого прибутку в базовому періоді,
$ЧП_1$ - обсяг чистого прибутку в плановому періоді,
E_1 - сума емісії акцій у плановому періоді,
$ЧНП$ - частка нерозподіленого прибутку,

$\frac{З}{K}$ - співвідношення зобов'язань та капіталу.

При дослідженні обсягу активів банку варто зазначити, що суттєвого рівня зростання активів можна досягти тільки протягом певного короткого проміжку часу (як правило, 1 рік). Після цього, якщо всі умови для зростання залишаться на тому самому рівні, значення темпу приросту активів знизиться.

Нехай $K_0 = 20$ млн грн, $\frac{З}{K} = 9$, $A_0 = 200$ млн грн, $\Delta K = 5$ млн грн.

Визначаємо за формулою (26) рівень приросту активів протягом трьох років за умови щорічного зростання капіталу на 5 млн грн:

$$\text{1-й рік: } \frac{\Delta A_1}{A_0} = 25 \cdot 10 \cdot \frac{1}{200} - 1 = 0.25 \text{ або } 25\%$$

$$\text{2-й рік: } \frac{\Delta A_2}{A_0} = 30 \cdot 10 \cdot \frac{1}{250} - 1 = 0.20 \text{ або } 20\%$$

$$\text{3-й рік: } \frac{\Delta A_3}{A_0} = 35 \cdot 10 \cdot \frac{1}{300} - 1 = 0.17 \text{ або } 17\%$$

В основу другого підходу щодо довгострокового планування обсягу активів банку покладемо умову:

$$\Delta A = A_1 - A_0 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{З_1}{K_1}\right) - K_0 \cdot \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right), \qquad (27)$$

де: K_1 - обсяг капіталу банку в плановому періоді,

$\frac{З_1}{K_1}$ - структура пасивів у плановому періоді,

K_0 - обсяг капіталу банку у базовому періоді,

$\frac{З_0}{K_0}$ - структура пасивів у базовому періоді.

У формулі (27) зробимо підстановки:

$$K_1 = K_0 + \Delta K \qquad (28)$$

$$\frac{З_1}{K_1} = \frac{З_0 + \Delta З}{K_1} = \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0}{K_1} = \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0 \cdot K_0}{K_0 \cdot K_1} = \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0}{K_0} \cdot \left(\frac{K_1 - \Delta K}{K_1}\right) =$$

$$= \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0}{K_0} \cdot \left(1 - \frac{\Delta K}{K_1}\right) = \frac{З_0}{K_0} + \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1} \qquad (29)$$

Звідси:

$$\Delta A = (K_0 + \Delta K) \cdot \left(1 + \frac{З_0}{K_0} + \frac{\Delta З}{K_1} + \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1}\right) - K_0 - З_0 = K_0 + З_0 +$$

$$+ \frac{\Delta З \cdot K_0}{K_1} - \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_1} + \Delta K + \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0} + \frac{\Delta З \cdot \Delta K}{K_1} - \frac{З_0 \cdot \Delta K \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1} - K_0 - З_0 =$$

$$= \left(\frac{\Delta З}{K_1} - \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1}\right) \cdot K_0 + \left(\frac{\Delta З}{K_1} - \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1}\right) \cdot \Delta K + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K$$

Згідно формули (29):

$$\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0} = \frac{\Delta З}{K_1} - \frac{З_0 \cdot \Delta K}{K_0 \cdot K_1}$$

рівняння приросту активів комерційного банку має вигляд:

$$\Delta A = \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot K_0 + \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K \qquad (30)$$

Н е х а й , $K_0 = 20$ млн. грн., $\Delta K = 5$ млн. грн., $\frac{З_0}{K_0} = 9$, $\frac{З_1}{K_1} = 10$,

звідси приріст активів:

Слід зазначити, що формула (30) має два окремих випадки, коли приріст активів може відбуватися за рахунок:

- збільшення капіталу без зміни структури пасивів (випадок 1);
- зміни структури пасивів без зміни обсягу капіталу (випадок 2).

Перший випадок передбачає виконання такої умови:

$\left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) = 0$, при цьому рівняння приросту активів буде мати вигляд:

$$\Delta A = \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot K_0 + \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K =$$

$$= 0 \cdot K_0 + 0 \cdot \Delta K + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K = \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K \qquad (31)$$

Нехай $K_0 = 20$ млн. грн., $\Delta K = 5$ млн. грн., $\frac{З_0}{K_0} = 9$, $\frac{З_1}{K_1} = 9$,

тоді: $\Delta A = (1 + 9) \cdot 5 = 50$ млн. грн.

Другий випадок пов'язаний з виконанням умови , при цьому рівняння приросту активів буде мати такий вигляд:

$$\Delta A = \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot K_0 + \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot \Delta K =$$

$$= \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot K_0 + \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot 0 + \left(1 + \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot 0 = \left(\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}\right) \cdot K_0 \qquad (32)$$

Нехай $K_0 = 20$ млн. грн., $\Delta K = 0$, $\frac{З_0}{K_0} = 9$, $\frac{З_1}{K_1} = 10$, отже:

$$\Delta A = (10 - 9) \cdot 20 = 20 \text{ млн. грн.}$$

На підставі формули (30) можна визначити чотири варіанти зростання активів комерційного банку (табл.7).

Таблиця 7.

Можливі варіанти зростання активів банку

Назва	$\frac{З_1}{K_1} - \frac{З_0}{K_0}$	ΔK	ΔA	Додаткові умови
1 варіант	>0	>0	>0	Немає
2 варіант	>0	<0	>0	В окремих випадках
3 варіант	= 0	>0	>0	Немає
4 варіант	<0	>0	>0	В окремих випадках

У підсумку слід зазначити, що більшість банкірів вважають зростання активів однією із своїх пріоритетних цілей. За даними дослідження Competitiveness Survey, яке ABA (American Bankers Association) провела в 2007 році, 91% банківських менеджерів переконані, що нарощування обсягів активів дає шанс досягнути економії на масштабах, а 68% вважають, що збільшення розмірів гарантує конкурентні переваги [1]. Як стверджував ще в 70-х роках Майкл Портер, професор з менеджменту Гарвардського університету, "ставати більшим – це не стратегія" [2]. Зростання банківських активів має передбачати чіткі стратегічні цілі – розвиток нового прибуткового напряму бізнесу, освоєння принципово нового продуктового ряду, експансію на перспективний ринок тощо. Результатом має бути одержання реального виграшу – підвищення прибутковості, ефективності роботи банку, набуття конкурентних переваг в банківському секторі загалом.

§4. Управління портфелем банківських активів

Одне з найважливіших і складних завдань, що постає у сфері фінансової діяльності перед менеджментом банку, полягає в балансуванні між прибутковістю та ризиком, пошук їх оптимального співвідношення. Вирішення цього завдання залежить від ефективності управління портфелем банківських активів. Передусім для банку важливо сформувати стабільну ресурсну базу, що дасть змогу приймати оптимальні управлінські рішення щодо розподілу коштів за певними групами активів. Ці рішення мають базуватися на аналізі показників прибутковості і ризикованості окремих видів активних операцій банку як в його межах, так і по відповідній групі банків (див. детальніше §3). З урахуванням вимог чинного законодавства банки зобов'язані класифікувати активи з урахуванням ступеня ризикованості та сформувати в повному обсязі резерви для покриття можливих збитків за ними [3]. Тобто, частина капіталу, що його

[1] *В.Шимкович. Стратегия на выбор //Банковская практика за рубежом, №2, 2007. – С.13.*

[2] *Портер М. Международная конкуренция: Пер. с англ. / Под ред. В.Д.Щетинина. –М.: Международные отношения, 1993. – С.14.*

[3] *Положення про порядок формування і використання резерву для відшкодування можливих втрат за кредитними операціями банків. Постанова Правління НБУ №279 від 06.07.2000.; Положення про порядок формування обов'язкових резервів для банків України. Постанова Правління НБУ №91 від 16.03.2006.; Положення про порядок розрахунку резерву на відшкодування можливих збитків банків від операцій з цінними паперами. Постанова Правління НБУ №629 від 30.12.2005.; Положення про порядок формування і використання резервів для відшкодування можливих втрат від дебіторської заборгованості комерційних банків. Постанова Правління НБУ №157 від 31.03.2001.*

має у своєму розпорядженні банк, буде «непрацюючою» і не приноситиме прибуток, натомість буде забезпечувати платоспроможність банку на випадок нестабільної ситуації.

Отже, завдання управління активами банку в такому розумінні означатиме оптимізацію портфеля активів таким чином, щоб забезпечити:

- максимальну прибутковість банку;
- мінімальну суму резервів;
- максимальний розподіл капіталу в активах банку.

Для кращого розуміння сутності сформульованого завдання і зручності подальшої роботи введемо позначення (таблиця 8).

Таблиця 8

Приклад розподілу активів банку за групами з урахуванням очікуваної прибутковості та фактичного резервування

Капітал К=10000

Група активів	Сума, *S*	Прибутковість (дохідність), *p*	Коефіцієнт ризику, *t*	Сума резервів, *R*
1	0	0,05	0	0
2	36	0,1	0,1	3,6
3	650	0,13	0,2	130
4	6120	0,19	0,5	3060
5	0	0,21	1	0
Сума	6806	Сума	резерву	3193,6
Залишок	0,4			
Прибутковість		1250,9		

Частину вкладених коштів у i-й актив позначимо як α_i, тоді величина S реальних активів банку фактично дорівнює:

$$S = \sum_{i=1}^{5} K \cdot \alpha_i$$

з урахуванням умови:

$$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i \neq 1.$$

Це пов'язано з ефектом резервування, що вимагає певну частину капіталу банку K виділяти під суму резерву. Відповідно сума резерву R буде дорівнювати:

$$R = \sum_{i=1}^{5} S_i \cdot t_i = \sum_{i=1}^{5} K \cdot \alpha_i \cdot t_i$$

Як бачимо, між величинами S та R є певна залежність, виявлення якої також є досить складним завданням. Ця залежність виражається саме через коефіцієнт α. З економічних міркувань випливає, що сума, вкладена в актив, буде прямо пропорційна ставці прибутковості та обернено пропорційна коефіцієнту резервування. Математично цю залежність можна записати так:

$$\alpha = \frac{f(p)}{g(t)},$$

де відношення функцій $f(p)$ та $g(t)$ відображають нелінійну взаємозалежність ставки прибутковості та коефіцієнта резервування.

Запишемо вже сформульовану нами задачу за допомогою введених позначень у такому вигляді:

- $\sum_{i=1}^{5} S_i \cdot p_i \to \max$, тобто максимізація прибутковості;
- $\sum_{i=1}^{5} R_i \to \min$, тобто мінімізація суми резерву;
- щодо залишку невикористаного банком капіталу, то доцільно буде позначити його через ψ і припустити, що увесь капітал розподіляється без залишку, або він настільки малий, що ним можна знехтувати. Тобто в найзагальнішому випадку слід враховувати ще й таку умову: $\psi \to \min$.

Сформулюємо математично загальну задачу управління активами банку з урахуванням норм резервування:

(33)

Якщо знехтувати залишком невикористаного банківського капіталу, тоді:

$$\max_{S} \min_{R} \left[\sum_{i=1}^{5} (S_i + S_i \cdot p_i + R_i) \right], \qquad (34)$$

де: S_i - сума коштів, вкладена в i-й актив;

$\sum_{i=1}^{5} S_i \cdot p_i$ - прибуток банку від активних операцій;

R_i - сума коштів, вкладена в i-й резерв по i-му активу.

Будуть мати місце також і обмеження, які можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{5} (S_i + R_i) + \psi = K. \qquad (35)$$

$$S_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$$

Якщо знехтувати залишком невикористаного капіталу, тоді:

$$\sum_{i=1}^{5} (S_i + R_i) \leq K. \qquad (36)$$

$$S_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$$

Для простоти міркування будемо вважати, що всі ресурси банку розподіляються без залишку і надалі розглядатимемо замість задачі (33) з обмеженнями (35) задачу (34) з обмеженнями (36).

Отже, ми отримали загальну задачу управління активами банку у вигляді задачі (34) з обмеженнями (36), нелінійну по α.

Очевидно, що задачу (34) можна дещо спростити шляхом зміни функціонала. При цьому основний її зміст не зміниться. Отже, маємо:

$$\max_{S} \left[\sum_{i=1}^{5} (S_i + S_i \cdot p_i - R_i) \right]. \qquad (37)$$

Тобто, ми замінили нашу *максимінну* задачу на *задачу максимізації* різниці між сумою коштів, які вкладено (працюючих активів), з урахуванням тих доходів, що ми отримаємо від їх розміщення на кінець звітного періоду та сумою сформованого резерву. Для задачі (37) дійсні ті самі обмеження, що й (36).

Задачу (37) можна записати ще й так:

$$\max_S\left[\sum_{i=1}^{5}(S_i + S_i\cdot p_i - R_i)\right] = \max_S\left[\sum_{i=1}^{5}(S_i + S_i\cdot p_i - S_i\cdot t_i)\right] =$$
$$= \max\left[\sum_{i=1}^{5} S_i(1+p_i-t_i)\right] \qquad (38)$$

Обмеження (36) залишаються без зміни:

$$\sum_{i=1}^{5}(S_i + R_i)\le K \ ,$$

$$S_i \ge 0\,,\ i=\overline{1,5}\,.$$

Отже, сформульовано задачу оптимізації розподілу капіталу банку за групами активів з урахуванням коефіцієнтів прибутковості та норм резервування кожної з груп у вигляді задачі лінійного програмування (38) з обмеженнями (36) у вигляді нерівності та невід'ємності змінних.

Спробуємо розв'язати поставлену задачу і отримати оптимальний розподіл активів банку. Для задачі (38) з обмеженнями (36) доцільно використовувати методи типу *симплекс-метод* [1]. Зауважимо, що більш загальна постановка задачі є нелінійною, а тому для розв'язання задачі (33) з обмеженнями (35) доцільно використовувати два досить потужних методи нелінійного програмування – метод множників Лагранжа та метод оптимальності Белмана.

[1] *Детальніше див.: Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник.- 3-є вид., випр. – К.: Знання, 2007. – 454 с.; Васильченко І.П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи). – К.: Кондор, 2007. – 352 с.*

Таблиця 9

Гіпотетичний приклад розподілу активів банку

Капітал K=10000

Група активів	Сума, *S*	Прибутковість (дохідність), *p*	Коефіцієнт ризику, *t*	Сума резервів? *R*
1	0	0,05	0	0
2	0	0,1	0,1	0
3	0	0,13	0,2	0
4	0	0,19	0,5	0
5	0	0,21	1	0
Сума	0	Сума	резерву	0
Залишок	10000			
Прибутковість		0		

На основі таблиці 9 для сформульованої задачі (38) з обмеженнями (36) побудовано програмний комплекс, що підтверджує правильність обраного напрямку дослідження та отримані теоретичні результати. Реалізацію здійснено у середовищі MS Excel 2000, оскільки для лінійної задачі в цьому середовищі вбудовані методи її розв'язання.

Нижче приведені приклади результатів роботи програмного комплексу (рис.9-11).

11-12-173

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Alpha	0	0	0	0	0		Pribyl	0	
3	**Капітал**	**10000**						Rezerv	0	
4								Oststok	10000	
5			**s**	**p**	**t**	**R**				
6		**Група активів**	**Сума**	**Прибутковість**	**Коефіцієнт ризику**	**Сума резерве**				
7		1	0	0,05	0	0		500	0	
8		2	0	0,12	0,1	0		200	0	
9		3	0	0,15	0,2	0		-500	0	
10		4	0	0,19	0,5	0		-3100	0	
11		5	0	0,21	1	0		-7900	0	
12	Ogranich	0	0	0						
13	RezultMAX	0								
14	rrr	-10000								
15		0								
16										
17		**RezMax**		**Ostatok**		**Reserv**		**Pribyl**		
18										
19										

Рис.9. Приклад роботи програмного комплексу (1-й етап)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Alpha	0,155317	0,155914	0,156511	0,158303	0,123955		Pribyl	1060,603	
3	**Капітал**	**10000**						Rezerv	2500	
4								Oststok	0	
5			**s**	**p**	**t**	**R**				
6		**Група активів**	**Сума**	**Прибутковість**	**Коефіцієнт ризику**	**Сума резерве**				
7		1	1553,166	0,05	0	0		500	1630,824	
8		2	1559,14	0,12	0,1	155,914		200	1590,323	
9		3	1565,114	0,15	0,2	313,0227		-500	1486,858	
10		4	1583,035	0,19	0,5	791,5173		-3100	1092,294	
11		5	1239,546	0,21	1	1239,546		-7900	260,3047	
12	Ogranich	10000	4677,419	2792,712						
13	RezultMAX	6060,603								
14	rrr	1060,603								
15		11060,6								
16										
17		**RezMax**		**Ostatok**		**Reserv**		**Pribyl**		
18										

Рис.10. Приклад роботи програмного комплексу (2-й етап)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Alpha	0,01	0,02	0,506667	0,133333	0,08		Pribyl	1210,333	
3	**Капітал**	**10000**						Rezerv	2500	
4								Oststok	0	
5			**s**	**p**	**t**	**R**				
6		**Група активів**	**Сума**	**Прибутковість**	**Коефіцієнт ризику**	**Сума резерве**				
7		1	100	0,05	0	0		500	105	
8		2	200	0,12	0,1	20		200	204	
9		3	5066,667	0,15	0,2	1013,333		-500	4813,333	
10		4	1333,333	0,19	0,5	666,6667		-3100	920	
11		5	800	0,21	1	800		-7900	168	
12	Ogranich	10000	5366,667	900						
13	RezultMAX	6210,333								
14	rrr	1210,333								
15		11210,33								
16										
17		**RezMax**		**Ostatok**		**Reserv**		**Pribyl**		
18										

Рис.11. Приклад роботи програмного комплексу (3-й етап)

Отриманий розподіл активів банку за групами показує, що напрямок теоретичних досліджень обраний правильно. Побудований функціонал дає змогу одночасно розв'язувати декілька схожих між собою задач. Інтерфейс побудовано в інтерактивному режимі, що дає можливість користувачеві змінювати умови та обмеження для різних задач, розширюючи тим самим їх варіативність. Програмний комплекс сприяє прийняттю оптимального рішення щодо отримання бажаного для банку прибутку за умови формування резервів в необхідному обсязі.

Розділ V.

Математична економіка запасів

§1. Моделі управління запасами

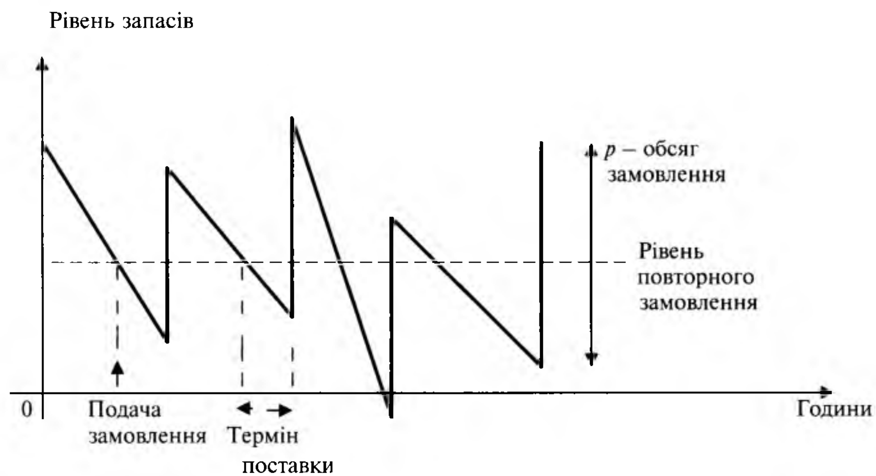


Рис. 1

Задачі управління запасами (ЗУЗ) складають один з найбільш поширених класів економічних задач. Правильне і своєчасне визначення оптимальної стратегії управління запасами, а також нормативного рівня запасів, дозволяє звільнити значні зворотні засоби, заморожені у вигляді запасів, що в кінцевому підсумку підвищує ефективність ресурсів, які використовуються.

Основні характеристики моделей управління запасами. Елементами задачі управління запасами є:

1) системи постачання;
2) попит на предмети постачання;
3) можливість наповнення запасів;
4) функції витрат;
5) обмеження;
6) прийнятна стратегія управління запасами.

Охарактеризуємо детальніше кожний із елементів.

Системи постачання бувають: централізовані і децентралізовані.

Попит на предмети постачання може бути: стаціонарний або нестаціонарний; детермінований або випадковий.

Розрізняють *способи наповнення запасів:* миттєва поставка; затримка поставок на фіксований інтервал часу; затримка поставок на випадковий інтервал часу.

Функції витрат складають у сукупності критерій ефективності прийнятої стратегії управління запасами і враховують витрати на збереження, вартість поставок, витрати, пов'язані із замовленням кожної нової партії, витрати на штрафи.

Наведемо можливі варіанти складових функції витрат.

Витрати на збереження бувають: пропорціональними середньому рівню позитивного запасу за період часу існування позитивного запасу; пропорціональними залишку на кінець періоду.

Вартість поставки буває: пропорціональною обсягу поставок; сталою; пропорціональною числу номенклатур; пропорціональною необхідному приросту інтенсивності виробництва.

Штрафи бувають таких видів: пропорціональні середній позитивній недостачі за період; пропорційні позитивній недостачі на кінець періоду; сталі; нелінійні функції від середньої недостачі та тривалості її існування.

Обмеження в ЗУЗ накладаються: на максимальний обсяг запасів; максимальну вагу; максимальну вартість; середню вартість; число поставок у заданому інтервалі часу; обсяг поставок; ймовірність недостачі.

Розглянемо для початку проблеми управління запасами, пов'язані або із замовленням на партію деталей зовнішньому постачальнику, або з випуском партії деталей. Політика організації виробництва або подачі замовлень у цій ситуації повинна бути такою, щоб загальні витрати були мінімальними.

У будь-якій ситемі управління запасами рівень останніх змінюється у відповідності з циклічною моделлю. Процес зниження рівня запасів визначається відповідною моделлю попиту. У деякій точці для наповнення запасу буде зроблено нове замовлення. Через певний час, який називається *терміном поставки,* замовлення буде отримано, і рівень запасів зросте. Після цього починається новий цикл запасів (рис. 1).

Система передумов моделі управління запасами. Для спрощення процесу моделювання в моделі вводиться ряд передумов:

1. Попит на продукцію є сталим або наближено сталим. Якщо коефіцієнт використання запасів є сталим, то рівень запасів також буде зменшуватися зі сталим коефіцієнтом.

2. Припустимо, що термін поставки відомий і є сталою величиною. Це означає, що замовлення можна здійснювати в точці з певним значенням часового параметра і обсяг запасу (рівень повторного замовлення), які забезпечують отримання замовлення в той момент, коли рівень запасів дорівнює нулю.

3. Відсутність запасів є недопустимою.

4. Протягом кожного циклу запасів здійснюється замовлення на стале число продукції (p)

Кінцевий вид моделі управління запасами є таким:

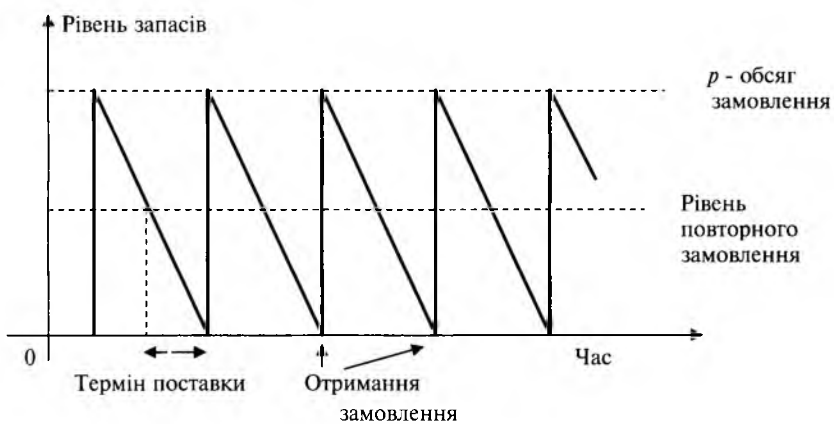


Рис 2.

Усі цикли запасів є однаковими. Максимальна кількість продукції, яка знаходиться в запасі, співпадає з обсягом замовлення p.

Витрати на збереження запасів. Якщо у зовнішнього постачальника замовляється партія продукції, процеси замовлення і виконання замовлення потягнуть за собою певні витрати. Необхідно створити відповідні умови для збереження та управління запасами. А тому в цій частині також виникають певні витрати. В окремих випадках може виникнути необхідність і в інших витратах, таких, наприклад, як витрати внаслідок нестачі запасів або збереження резервного запасу. Ці поняття будуть введені нами по ходу викладення матеріалу. Тут ми розглянемо тільки поняття вартості здійснення замовлення, витрат на збереження або складування запасів, а також вартості покупки продукції.

Якщо говорити про випуск продукції у формі виробничих партій, а не про покупку продукції ззовні, виникають аналогічні витрати. У даному випадку вартість здійснення замовлення еквівалентна вартості організації технологічного процесу по випуску партії продукції, а вартість закупки – витратам виробництва продукції. А тому схема аналізу залишається незмінною. Кожний вид вартості або витрат включає в себе змінну і сталу компоненти. Проведемо аналіз моделі управління запасами, розглядаючи лише змінну її частину. При цьому введемо в модель нові передумови: змінні витрати здійснення замовлення або організації процесу випуску партії продукції відомі, є сталими і не залежать від обсягу замовлення.

Рівняння загальної вартості. Побудуємо модель, яка описує витрати, пов'язані з наявністю запасів за весь період їх збереження. Виберемо період, рівний одному року, хоча тривалість цього періоду значення не має: це може бути один день, місяць, рік і т.д. Введемо таку систему позначень:

K – щорічний попит на запас продукції;

L_0 – змінна вартість здійснення одного замовлення, гр. од./одне замовлення;

L_h – змінна вартість збереження одиниці продукції в запасі, гр. од. на одиницю продукції в рік.

L – ціна купівлі одиниці продукції в запасі, гр. од. на рік;
p – обсяг замовлення, од. продукції /замовлення.

Загальна вартість запасів на рік =
= загальна вартість здійснення замовлення на рік +
+ загальна вартість збереження запасів на рік

Кожну складову даного рівняння розглянемо окремо.

1. Якщо потреба в продукції складає K одиниць на рік, а кожне замовлення подається на партію в p одиниць, тоді щорічна кількість замовлень є $\frac{K}{p}$. А тому

щорічна вартість здійснення замовлень =
= вартості подачі одного замовлення ×
× число замовлень, які подаються щорічно =

$$= L_0 \cdot \frac{K}{p} \text{ (гр. од. на рік).}$$

2. Розрахунок щорічної вартості збереження запасів, як правило, проводять, виходячі із середньої кількості продукції, яка складає запас протягом одного циклу. У нашому випадку (найпростіша ситуація) рівень запасів змінюється лінійно і належить проміжку від p до нуля, а тому середній рівень запасів дорівнює $\frac{p}{2}$. Зауважимо, що в більш складних ситуаціях для розрахунку середнього рівня запасів слід використовувати більш складні математичні залежності.

Вартість збереження одиниці продукції L_h визначається або як фіксована величина на весь рік, або як процент від загальної вартості одиниці продукції за рік. У різних фірмах застосовуються самі різноманітні методи розрахунку витрат у цій сфері, але в цілому L_h характеризує величину процентів з грошових позик, заморожених у формі запасів, вартість пошкоджень або збереження запасів, а також певну частину загальної вартості системи збереження запасів.

Щорічна вартість збереження запасів =
= вартість збереження одиниці продукції на рік ×
середній розмір запасу =

$$= L_h \cdot \frac{p}{2} \text{ (гр. од. на рік)}$$

Отже, загальна вартість запасу на рік визначається наступним чином

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2} \text{ (гр. од. на рік)}$$

Таке рівняння називають *рівнянням загальної вартості* основної моделі управління запасами. Визначимо значення p, при якому значення загальної вартості найменше.

Оптимальний обсяг замовлення p_0.

Для визначення оптимального значення p, скористаємося загальною теорією дослідження функції на екстремум з використанням похідної.

Функція

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2}$$

приймає мінімальне значення, якщо

$$\frac{dВЗ}{dp} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2ВЗ}{dp^2} > 0.$$

Випишемо першу похідну функції ВЗ і прирівняємо її до нуля.

$$\frac{dB3}{dp} = -L_0 \cdot \frac{K}{p^2} + L_h \frac{1}{2};$$

$$-L_0 \cdot \frac{K}{p^2} + L_h \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Отже,

$$L_0 \cdot \frac{K}{p^2} = \frac{1}{2} \cdot L_h; \qquad p^2 = \frac{2L_0 \cdot K}{L_h}; \qquad p_0 = \pm\sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}}.$$

Згідно другої похідної

$$\frac{d^2B3}{dp^2} = 2L_0 \cdot \frac{K}{p^3} + 0 > 0,$$

якщо $p > 0$.

А тому, ВЗ приймає мінімальне значення, якщо $p_0 = +\sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}}$.

Отриманий обсяг замовлення називають *економічним обсягом замовлення (Е.О.З.)*. Вартість збереження буде мінімальною, якщо протягом року з рівними інтервалами замовляють дану кількість продукції. Корисно скористатися графічним представленням рівняння загальної вартості та його компонентів. Витрати на збереження пропорційні обсягу замовлення, отже їх графік представляє собою пряму, яка проходить через початок координат. Вартість подачі замовлення обернено пропорційна величині p. Графічне зображення вартості подачі замовлення, витрат на збереження та загальної вартості запасів показано на рис. 3.

Легко переконатися, що якщо обсяг замовлення невеликий, то вартість подачі замовлення є домінуючою – в цьому випадку замовлення подаються часто, але на невелику кількість продукції. Якщо обсяг замовлення є достатньо великим, основною компонентою є вартість збереження – здійснюється невелика кількість замовлень, обсяг яких достатньо великий. Екстремальна точка на графіку рівняння загальної вартості відповідає ситуації, коли обидва види витрат рівні одне одному. Цей факт може бути корисним при розрахунку ЕОЗ. Слід відмітити, що в критичній точці крива загальної вартості помітно вирівнюється, що означає, що в даній області загальна вартість не є досить чутливою по відношенню до змін у обсязі замовлення. Після того, як одержимо значення ЕОЗ, залишається ще, як правило, декілька значень, а тому можна вибрати необхідний обсяг замовлення, який не приводить до значного збільшення загальної його вартості.

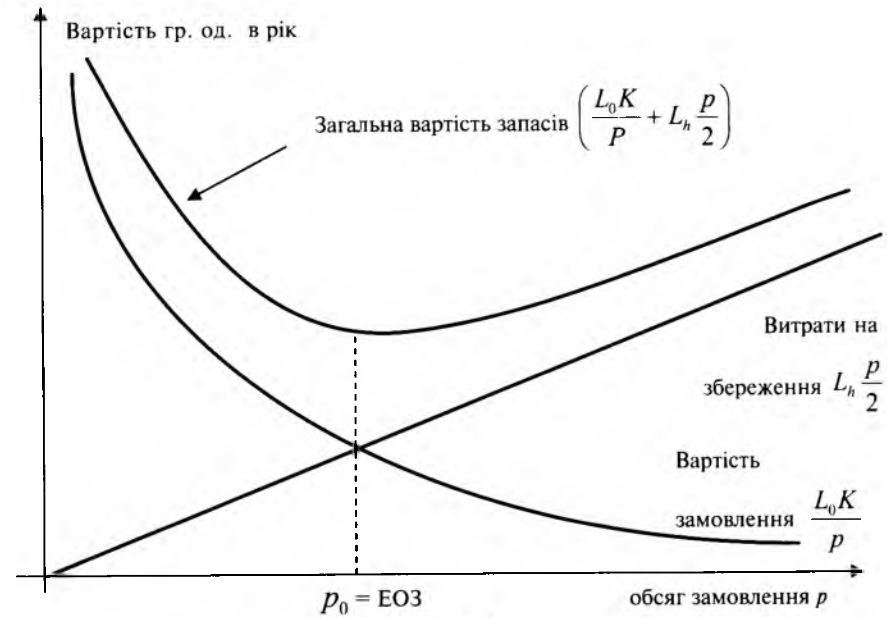


Рис. 3

Рівень і інтервал повторного замовлення. Після з'ясування обсягу замовлення ще не відомо, з якою періодичністю його слід реалізувати.

Нехай термін виконання (час) реалізації замовлення постачальником складає N тижнів, тоді впродовж періоду постачання буде використано $N \cdot \frac{K}{52}$ одиниць продукції, які складають запас згідно з припущення, що рік має 52 тижні. Оскільки величина попиту стала, кількість продукції, яка використовується протягом терміну виконання замовлення, є одночасно і рівнем повторного замовлення. Таким чином, нове замовлення слід подавати, коли рівень запасів знижується до величини $N \cdot \frac{K}{52}$. У цьому випадку нове замовлення буде одержано в той момент, коли рівень запасів стане рівним нулю. На рис. 4 показано рівень та інтервал повторного замовлення.

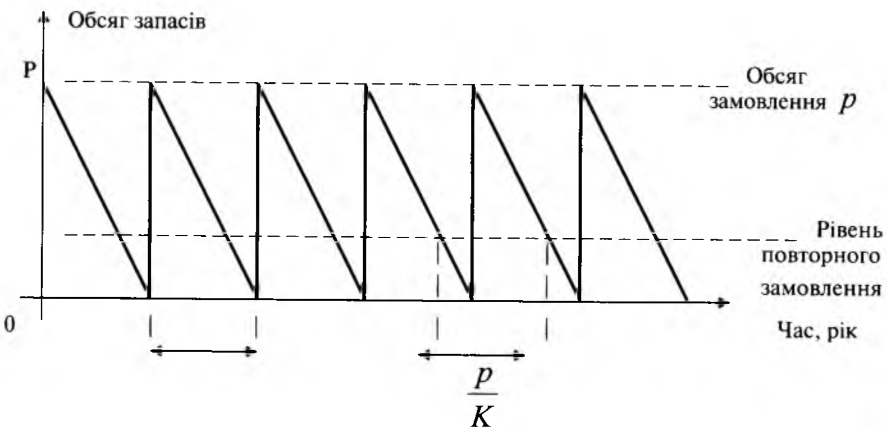


Рис. 4

Протягом року потрібні $\frac{K}{p}$ замовлень з рівними інтервалами, а тому новий цикл завжди починається в точці

$$1 \text{ рік}: \frac{K}{p} \text{ замовлень} = \frac{p}{K} \text{ років}.$$

Інтервал повторного замовлення також буде рівний $\frac{p}{K}$, оскільки всі цикли замовлень однакові.

Приклад 1. Магазин продає біля 600 упаковок пакетного цукру в рік. Протягом року величина попиту розподіляється рівномірно. Одна упаковка цукру коштує 3 гр. од. Власник магазину повинен заплатити за одне замовлення 15 гр. од. Замовлення від постачальника доставляється за 10 робочих днів (робочий тиждень – 6 днів). Витрати на збереження складають 25% середньорічної вартості запасів. Скільки упаковок повинен замовляти власник кожний раз, якщо його ціль полягає в мінімізації загальної вартості запасів? Визначити, з якою частотою слід здійснювати подачу замовлень і рівень повторного замовлення, якщо вважати, що магазин працює 300 днів на рік.

Порахуємо економічний обсяг замовлення згідно формули

$$p_0 = \sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}},$$

де: $K = 600$ упаковок на рік,

$L_0 = 15$ гр. од. за одне замовлення,

$L_h = 25\%$ на рік від вартості запасів розміром в одну упаковку, або $0{,}25 \cdot 3$ гр. од. на рік за одну упаковку.

Отже,

$$p_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 600}{0{,}25 \cdot 3}} = \sqrt{24000} = 154,9.$$

Виберемо значення, рівне $p_0 = 155$ упаковкам, оскільки кількість упаковок повинна бути цілим числом.

Мінімальне значення загальної вартості замовлення на рік визначається за формулою

$$B3 = \frac{L_0 \cdot K}{p_0} + \frac{L_h \cdot p_0}{2}.$$

Отже,

$$B3 = \frac{15 \cdot 600}{155} + \frac{0,25 \cdot 3 \cdot 155}{2} = 58,06 + 58,13 = 116,19 \text{ гр.од. на рік.}$$

Загальна вартість куплених власником магазина 600 упаковок пакетного цукру дорівнює сумі вартості запасів і вартості покупки, тобто

$$116,2 \text{ гр. од.} + 3 \text{ гр. од.} \times 600 = 1916,2 \text{ гр. од. на рік.}$$

Звідси, вартість запасів складає $\approx 6,1\%$ загальної вартості покупки на рік. Якби власник подавав замовлення на партії в 170 упаковок, то загальна вартість запасів за рік дорівнювала б:

$$B3_{170} = \frac{15 \cdot 600}{170} + \frac{0,25 \cdot 3 \cdot 170}{2} = 52,94 + 63,75 = 116,69 \text{ гр. од. на рік.}$$

Збільшення вартості є невеликим (0, 50 гр. од. на рік) у порівнянні з вартістю, що відповідає знайденому значенню ЕОЗ. Кожний раз по закінченню періоду, рівного $\frac{155}{600}$ років, власник магазину повинен здійснювати нове замовлення. Оскільки в році 300 робочих днів, то інтервал повторного замовлення буде дорівнювати

$$\frac{155}{600} \cdot 300 = 77,5 \approx 78 \text{ робочих днів.}$$

За 10 днів поставка замовлення пакетного цукру складе:

$$\frac{\text{попит}}{\text{к} - \text{ть днів}} \cdot \text{час поставки} = \frac{600}{300} \cdot 10 = 20 \text{ упаковок}.$$

Отже, рівень повторного замовлення дорівнює 20 упаковкам. Коли рівень запасів дорівнює 20 упаковкам, тоді здійснюють нове замовлення.

Модель економічного обсягу партії. Фірми, які спеціалізуються на випуску різних видів товарів, можуть організувати технологічний процес не на неперервній основі, а на основі виробництва партії продукції. Наприклад, на конфетній фабриці можуть прийняти рішення про виробництво партій цукерок з різною начинкою. Якщо на фабриці використовується виробництво продукції порціями, то доводиться розв'язувати питання про розмір партії продукції, яка виробляється на протязі одного виробничого циклу, і про те, з якою частотою слід виробляти партію певної продукції. Указані труднощі аналогічні проблемам, пов'язаним з визначенням економічного обсягу замовлення. Замість замовлення певної кількості продукції в зовнішнього постачальника, розглядається обсяг виробництва певної продукції. Отже, вартість замовлення, яка фігурувала у приведеній вище моделі, відповідає вартості організації процесу виробництва партії продукції. На рис. 5 наведена модель економічного обсягу партії.

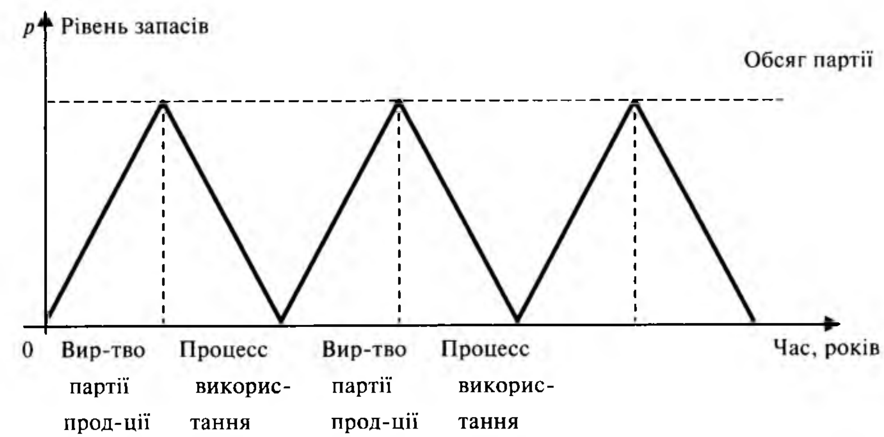


Рис. 5

Загальна щорічна вартість виробництва =
= щорічна вартість організації технологічного процесу +
+ річна сума витрат на збереження

Тобто,

$$ВЗ = L_s \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2} \text{ (гр. од. на рік)}$$

де: L_s – вартість організації кожного виробничого циклу,
p – обсяг партії продукції.

Легко переконатися, що ВЗ приймає своє мінімальне значення, якщо

$$p_0 = \sqrt{\frac{2L_s \cdot K}{L_h}}.$$

Вказана оптимальна кількість продукції в партії називається *економічним обсягом партії (ЕОП)*.

Приклад 2. Фірма, яка виробляє вироби з кераміки, випускає декілька видів чайників. Кожен тиждень випускається партія чайників загальним обсягом 600 штук.

Найбільш популярна модель, яку позначимо через X, має попит 2600 виробів у рік і рівномірно розподіляється протягом року. Вартість виробничого процесу складає 300 гр. од. незалежно від того, в який момент часу виникає необхідність у виробництві партії чайників моделі X. Спеціалісти фірми вважають, що вартість збереження чайників складає 2 гр. од. за одиницю. Яка повинна бути партія чайників, щоб витрати на виробництво та збереження були мінімальними? Наскільки часто слід здійснювати виробничий цикл, яка його тривалість?

Будемо вважати, що в році 50 робочих тижнів.

K_s – 2600 чайників на рік;

L_s — 300 гр. од. на один виробничий цикл;

L_h – 2 гр. од. за один чайник на рік.

Економічний обсяг партії дорівнює:

$$p_0 = \sqrt{\frac{2L_s \cdot K}{L_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 300 \cdot 2600}{2}} = 883,2$$

Оскільки крива загальної вартості не досить чутлива по відношенню до невеликих змін значення p, а тому ймовірно, що якщо вибрати за ЕОП значення, рівне 885, то це не призведе до значного збільшення загальної вартості.

Таке твердження легко перевірити.

Так для $p = 883{,}2$ одиниці, маємо:

$$ВЗ = \frac{300 \cdot 2600}{883,2} + 2 \cdot \frac{883,2}{2} = 883,15 + 883,2 = 1766,35 \text{ (гр. од. в рік)}$$

Якщо $p = 885$ одиниць, то

$$ВЗ = \frac{300 \cdot 2600}{885} + 2 \cdot \frac{885,2}{2} = 881,36 + 885,2 = 1766,56 \text{ (гр. од. в рік)}$$

Якщо $p = 900$ одиниць, то

$$ВЗ = \frac{300 \cdot 2600}{900} + 2 \cdot \frac{900}{2} = 866,67 + 900 = 1766,67 \text{ (гр. од. в рік)}$$

Найбільш прийнятний обсяг партії, рівний 900 чайникам, у порівнянні з оптимальним розміром призводить до збільшення загальної вартості виробництва та збереження чайників на 0,32 гр. од.

Візьмемо за ЕОП значення, рівне 900 чайникам. Кількість виробничих циклів у рік дорівнює $\frac{2600}{900} = 2,89$ (тобто 25 циклів за

12-12-173

кожні 8 років), отже інтервал між двома будь - якими виробничими циклами дорівнює $\dfrac{900 \cdot 50}{2600} = 17$ тижнів.

Якщо обсяг виробництва в тиждень дорівнює 600 чайників, процес виробництва однієї партії дорівнює $\dfrac{900}{600} = 1,5$ тижня.

Знижка на кількість. Ціна, яка назначається на той чи інший товар при подачі замовлення зовнішньому постачальнику, залежить від обсягу закупки. Замовлення великого обсягу, як правило, мають знижки. З'ясуємо, як ці знижки вплинуть на загальну вартість. Очевидно, що замовлення на досить великі партії продукції потягнуть за собою збільшення вартості запасів (вартість замовлення плюс витрати збереження), але зниження закупівельної ціни може до деякої міри компенсувати таке збільшення. З урахуванням вартості закупки продукції рівняння загальної вартості прийме вигляд

$$\frac{L_0 \cdot K}{p} + \frac{L_h \cdot p}{2} + L \cdot K \text{ (гр. од. на рік)},$$

де: L – закупівельна ціна одиниці продукції.

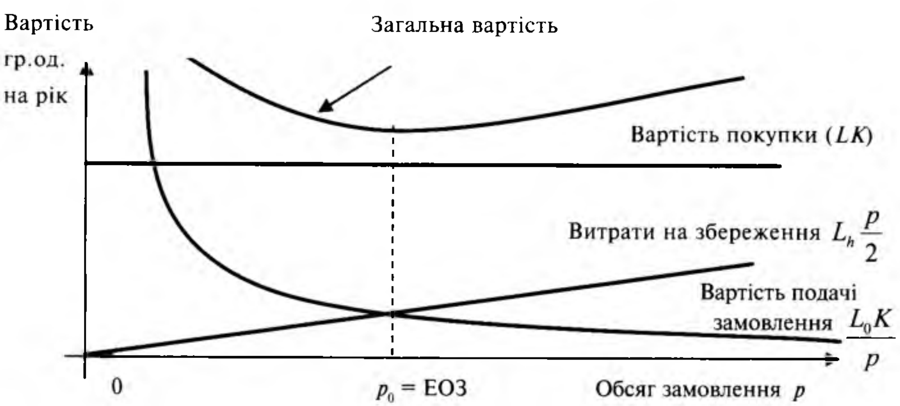


Рис. 6

Якщо ціна закупки стала і не залежить від p, то включення її в рівняння загальної вартості приводить лише до зміщення паралельно осі p графіка цього рівняння, не змінюючи при цьому його форми. На рис. 6 представлена щорічна вартість закупки і запасів продукції. Як правило, вартість закупки значно перевищує за величиною загальну вартість запасів.

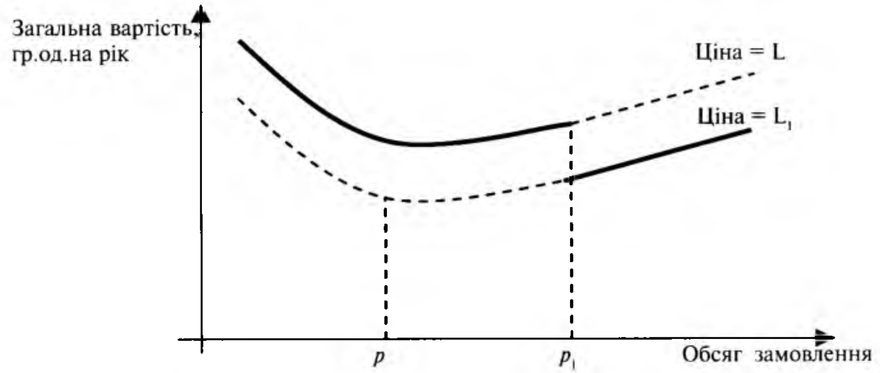


Рис. 7

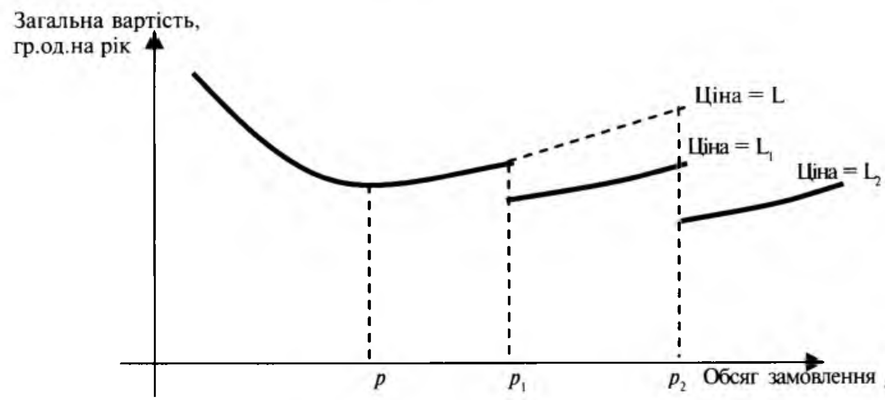


Рис. 8

Нехай, як правило, товар реалізується за ціною L за одиницю, але, якщо обсяг замовлення перевищує деяку величину p_1 тоді надається знижка, згідно якої ціна за одиницю продукції знижується до величини L_1, а зміна загальної вартості буде відбуватися за схемою, зображеною на рис. 7. У випадку, якщо обсяг замовлення перевищує величину p_2, існує додаткова знижка, яка дозволяє знизити ціну за одиницю продукції до величини L_2. На рис. 8 представлено вплив на щорічну вартість замовлення і запасів продукції двох знижок на кількість. Там зображені три криві, які відповідають певній ціні закупки одиниці продукції – L, L_1 і L_2 (гр. од.), але використовуватися можуть лише певні частини даних кривих. Очевидно, що лише для певного інтервалу обсягу замовлення вигідно надавати знижку. ***Рівнем, який порушує ціну,*** називають рівень замовлення, починаючи з якого встановлюється знижка. Якщо значення p в екстремальній точці кривої не включається в інтервал надання знижки, тоді дана екстремальна точка вже не відповідає оптимальному обсягу замовлення. А тому для кожного рівня цін знайдемо обсяг замовлення, якому відповідає мінімальне значення вартості, не приймаючи до уваги встановленні обмеження на величину p. Якщо одержане значення p попадає в інтервал надання знижки, то воно є оптимальним обсягом замовлення. Якщо ж значення p в екстремальній точці менше нижньої межі інтервалу надання знижки, то перераховують загальну вартість для найменш можливого значення p, яке належить інтервалу надання знижки на ціну закупки.

Приклад 3. Повернемося до прикладу 1, в якому розглядалася закупка власником магазину пакетного цукру. Закупка проводиться партіями по 155 упаковок по 3 гр. од. за одиницю. Нехай постачальник надає знижки на закупівельні ціни. У таблиці 1 представлені знижки за кількість, які надаються постачальником.

Таблиця 1

Обсяг замовлення	Знижка, %	Ціна за упаковку, гр. од.
0 - 199	0	3, 00
200 – 599	3	2, 95
600 і більше	5	2, 90

Чи слід власнику скористатися однією із знижок?

Обсяг запасів збільшиться, якщо власник магазину захоче одержати одну із знижок, оскільки він повинен замовити не менше 200 упаковок

цукру, тоді, як на даний момент, рівень запасів дорівнює 155 упаковок. Чи можна буде компенсувати збільшення витрат на збереження зниженням закупівельних цін і вартості подачі замовлення? Оскільки обсяг замовлення зростає, зміна загальної вартості визначається співставленням відповідних частин трьох кривих, які визначають ціну за одиницю продукції, рівну 3; 2, 95 і 2, 90 гр. од. На рис. 9 показаний вплив знижок на щорічну вартість запасів пакетного цукру.

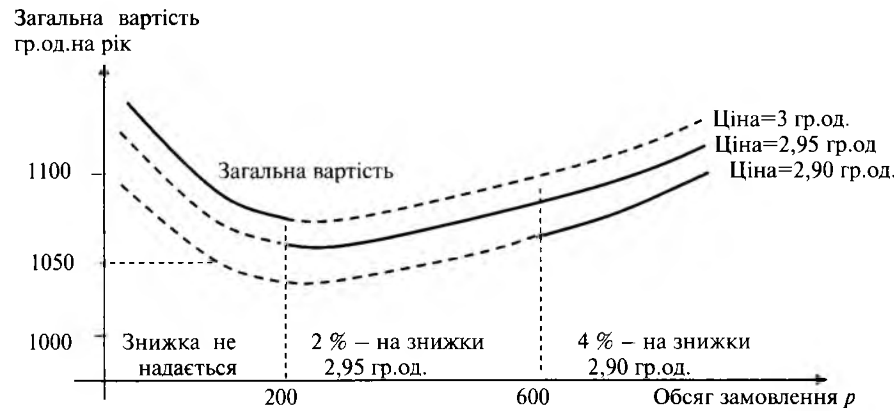


Рис. 9

Відомо (приклад 1), що при закупівельній ціні в 3 гр. од. за упаковку, розмір замовлення в екстремальній точці кривої загальної вартості дорівнює 155 упаковкам, а відповідне мінімальне значення загальної вартості покупки 600 пакетів складає 1916, 2 гр. од.

Якщо закупівельна ціна дорівнює 2, 95 гр. од. за упаковку, то витрати збереження складають:

$L_h = 25\,\%$ від 2, 95 гр. од. = 0, 738 гр. од. за упаковку щорічно.

Оптимальний обсяг замовлення складає:

$$EOЗ = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 600}{0,738}} = 156,17$$

Отримане значення менше ніж нижня межа інтервалу першої знижки, 200 – 599, отже, абсциса екстремальної точки кривої, яка відповідає закупівельній ціні в 2, 95 гр. од. не є допустимим обсягом замовлення. Мінімальна загальна вартість буде отримана, якщо $p = 200$ упаковкам. Мінімальна загальна вартість за рік (за закупівельною ціною в 2, 95 гр. од. за упаковку) дорівнює

$$\frac{15 \cdot 600}{200} + 0,738 \cdot \frac{200}{2} + 2,95 + 600 = 45 + 73,8 + 1770 = 1888,8$$

Витрати збереження за ціною, рівною 2, 90 гр. од. за упаковку є $L_h = 25\,\%$ від 2, 90 гр. од. = 0, 725 гр. од. за упаковку щорічно.

Оптимальний обсяг замовленняє:

$$EO3 = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 600}{0{,}725}} = 157,57$$

Отримане значення менше, ніж нижня межа інтервалу надання другої знижки, 600 і більше, отже, абсциса екстремальної точки кривої, яка відповідає закупівельній ціні в 2, 90 гр. од., не є допустимим обсягом замовлення.

Мінімальна можлива вартість буде отримана, якщо $p = 600$ упаковкам, тобто

$$\frac{15 \cdot 600}{600} + 0,725 \cdot \frac{600}{2} + 2,90 \cdot 600 = 15 + 217,5 + 1740 = 1972,5$$

У таблиці 2 приведено порівняння мінімальних значень загальної вартості, які відповідають трьом рівням закупівельних цін.

Таблиця 2

Вартість однієї упаковки, гр. од.	Обсяг замовлення	Мінімальна загальна вартість, гр. од.
3, 00	155	1916, 2
2, 95	200	1888, 8
2, 90	600	1972, 5

Отже, вигідною є лише перша з наданих знижок, для отримання якої слід подати замовлення на 200 упаковок цукру, що приведе до зниження загальної вартості на 27, 4 гр. од на рік.

§2. Модифікація основної моделі управління запасами

Моделювання процесу закупки продукції у зовнішнього постачальника можна модифікувати і застосовувати в інших ситуаціях, як це вже було зроблено при дослідженні проблеми виробництва партії продукції, де вважалось, що вся продукція, яка вироблялась у партії, утворює запас, а максимальний рівень запасу співпадав із обсягом партії продукції.

Проте, для багатьох технологічних процесів виробництва партій продукції виникають ситуації, коли продукція, яка утворює запас, використовується протягом всього часу даного технологічного процесу, а тому максимальний рівень запасу стає меншим, ніж обсяг партії продукції, яка виробляється.

Крім того, вважалось, що відсутність запасу недопустима. Однак, відомо, що в багатьох випадках набагато дешевше допустити відсутність запасу, ніж підтримувати його рівень, необхідний для того, щоб уникнути відсутності продукції в запасі.

З урахуванням сказаного, розглянемо шляхи адаптування основної моделі до різноманітних змін вихідних умов, у тому числі, і викладених вище.

Модель виробництва партії продукції. Нехай на деякому ткацькому верстаті виробляється партія виробів, частина яких одразу використовується на іншому верстаті, який має більш низьку продуктивність. У запасі залишається частина виробів, що зосталася, до тих пір, доки ці вироби не знадобляться для другого верстата.

У цьому випадку не відбувається одночасного наповнення всього запасу і його рівень не змінюється скачкообразно від 0 до p а навпаки, запас рівномірно зростає протягом роботи першого верстата, а потім, по мірі використання запасів для роботи другого верстата, починає спадати. Вважатимемо, що продуктивність другого верстата дорівнює Q, а темп використання запасів дорівнює K, причому $Q \geq K$. На рис. 10 наведемо зміну рівня запасів у моделі виробництва партії продукції, який змінюється з часом.

Яке оптимальне значення обсягу партії продукції p для першого верстата? З якою частотою слід випускати партії продукції?

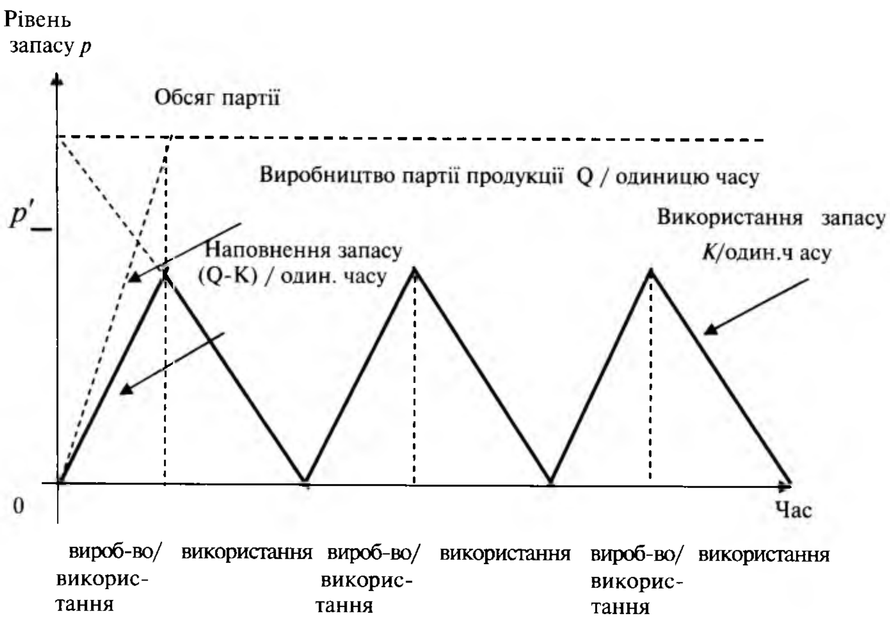


Рис. 10

Загальна змінна вартість партії продукції за рік ВЗ включає в себе вартість виробничого циклу і витрати на збереження. Отже,

$$ВЗ = L_s \times \textit{число партій продукції в рік} + L_h \times \textit{середній рівень запасу}$$

$$\textit{Число партій продукції на рік} = \frac{\textit{Щорічний запас}}{\textit{розмір партії}} = \frac{K}{p}.$$

Розглянемо більш детально один цикл запасу з тим, щоб знайти середній рівень запасу (рис.11). Обсяг партії деталей дорівнює p але, оскільки вироби використовуються по мірі їх виготовлення, максимальний рівень запасів p' менше, ніж p.

Рис. 11

Нехай виготовлення виробів здійснюється з щорічною продуктивністю Q, а споживання – з щорічним темпом K ($Q \geq K$) тоді темп наповнення запасів дорівнює $(Q - K)$. Аналогічно моделі ЕОЗ, середній рівень запасу складає половину його максимального рівня.

Загальний обсяг продукції, яка виготовляється на протязі виробничого циклу довжиною t_1 років, визначається за формулою:

$$p = Q \cdot t_1, \qquad (1)$$

звідси

$$t_1 = \frac{p}{Q} \text{ років.} \qquad (2)$$

Максимальний рівень запасів дорівнює $(Q - K) \cdot t_1$ виробів або, з урахуванням (2), маємо:

$$(Q-K)\cdot\frac{P}{Q} \text{ виробів.}$$

Отже, середній рівень запасів дорівнює:

$$\frac{(Q-K)\cdot p}{2\cdot Q} \text{ виробів,}$$

а рівняння загальної змінної вартості:

$$B3 = L_s\frac{K}{p} + L_h\frac{(Q-K)\cdot p}{2\cdot Q} \text{ (гр. од. на рік).}$$

Мінімальне значення ВЗ досягається для значень, при яких перша похідна дорівнює нулеві, а друга похідна додатна, тобто

$$\frac{dB3}{dp} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2B3}{dp^2} > 0.$$

Звідси

$$\frac{dB3}{dp} = -\frac{L_s\cdot K}{p^2} + \frac{L_h\cdot(Q-K)}{2\cdot Q},$$

$$\frac{d^2B3}{dp^2} = 2\cdot\frac{L_s\cdot K}{p^3} > 0,$$

якщо $p > 0$.

Прирівняємо до нуля першу похідну

$$\frac{L_s\cdot K}{p^2} = \frac{L_h\cdot(Q-K)}{2\cdot Q},$$

отже,

$$p^2 = \frac{2\cdot L_s\cdot K\cdot Q}{L_h\cdot(Q-K)} \qquad (3)$$

Економічний обсяг партії, який мінімізує загальну змінну вартість виробництва, є

$$p = \sqrt{\frac{2\cdot L_s\cdot K}{L_h}\cdot\frac{Q}{Q-K}} = EOП\cdot\sqrt{\frac{Q}{Q-K}}.$$

Приклад 4. На деякому верстаті виробляються деталі в кількості 3000 одиниць на місяць. Ці деталі використовуються для виробництва продукції на другому верстаті продуктивністю 700 одиниць на місяць; решта деталей утворюють запас. За оцінками витрати на збереження складають 25 % середньої вартості запасів на рік. Вартість виробництва однієї деталі дорівнює 3 гр. од.

а) Яким повинен бути обсяг партії деталей, які виробляються на першому верстаті, і з якою частотою слід організовувати цикли для виробництва цих деталей?

б) Якби можливо було знизити витрати виробництва до 1125 гр. од., якою була б відповідь на питання а)?

в) Як змінилася б відповідь на питання а), якби відбулося подальше зниження вартості виробництва до 300 гр. од.?

а) $L_s = 2250$ гр. од. за виробництво однієї партії деталей;
$K = 700$ деталей на місяць або 8400 деталей на рік;
$Q = 3000$ деталей на місяць або 36000 деталей на рік;
$L_h = 0{,}25 \cdot 3$ гр.од. $= 0{,}75$ гр.од. за одиницю деталі на рік.

Економічний обсяг партії деталей визначається за формулою

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_s \cdot K}{L_h} \cdot \frac{Q}{Q-K}},$$

отже,

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 2250 \cdot 8400}{0,75} \cdot \frac{36000}{36000-8400}} = 8107,97.$$

Оптимальний обсяг партії складає 8108 деталей. Як правило, в практичних цілях отримане значення можна і надалі округляти. Кількість партій деталей, які необхідно виготовити протягом року,

$$\frac{K}{p} = \frac{8400}{8108} = 1,036.$$

Отже, частота виробництва партій деталей дорівнює $\frac{p}{K}$ років:

$$\frac{p}{K} = \frac{8108}{8400} = 0,97 \text{ років або } 11{,}58 \text{ місяців.}$$

Загальна змінна вартість виробництва є

$$B3 = \frac{L_s \cdot K}{p} + L_h \cdot (Q-K) \cdot \frac{p}{2 \cdot Q} = \frac{2250 \cdot 8400}{8108} + 0,75 \cdot 27600 \cdot \frac{8108}{2 \cdot 36000} =$$

$$= 2331,03 + 2331,05 = 4662,1 \text{ гр. од. на рік.}$$

Якщо протягом одного року вироблялася лише одна партія деталей обсягом 8400 деталей на рік, тоді загальна змінна вартість складала б:

$$B3 = \frac{2250 \cdot 8400}{8400} + 0,75 \cdot \frac{27600 \cdot 8400}{2 \cdot 36000} = 2250 + 2415 = 4665 \text{ гр. од.}$$

на рік.

Очевидно, що вигідним є варіант виробництва, в якому передбачається випуск протягом кожного року лише однієї партії деталей обсягом в 8400 одиниць.

б) Якщо вартість організації виробничого циклу знижується до 1125 гр. од., то економічний обсяг партії визначається таким чином:

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_s \cdot K}{L_h} \cdot \frac{Q}{Q-K}},$$

отже,

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 1125 \cdot 8400}{0,75} \cdot \frac{36000}{36000-8400}} = 5733,2.$$

Оптимальний обсяг партії дорівнює 5733 деталей. Кількість партій деталей, необхідна протягом року, складає $\frac{K}{p} = \frac{8400}{5733,2} = 1,47$. Отже, частота випуску партій деталей дорівнює $\frac{p}{K}$ років:

$$\frac{5733,2}{8400} = 0,68 \text{ року або } 8{,}2 \text{ місяця.}$$

Загальна змінна вартість виробництва визначається за формулою:

$$B3 = \frac{L_s \cdot K}{p} + L_h \cdot \frac{(Q-K)\cdot p}{2\cdot Q} = \frac{1125\cdot 8400}{5733,2} + 0,75\cdot\frac{27600\cdot 5733,2}{2\cdot 36000} =$$

$$= 1648,29 + 1648,29 = 3296,59.$$

Якщо можливо знизити вартість виробництва наполовину, тоді економія загальної змінної вартості є $1368,41$ гр. од. на рік.

У цьому випадку виробництво деталей буде здійснюватися партіями по 5733 штук кожні $8,2$ місяця.

в) Якщо вартість організації виробничого циклу знижується до $562,5$ гр. од., то

$$p = \sqrt{\frac{2\cdot L_s \cdot K}{L_h}\cdot\frac{Q}{Q-K}}.$$

Отже,

$$p = \sqrt{\frac{2\cdot 562,5\cdot 8400}{0,75}\cdot\frac{36000}{36000-8400}} = 4053,98.$$

Оптимальний обсяг партії дорівнює 4054 деталей. Кількість партій деталей, необхідних протягом року, є $\frac{K}{p} = \frac{8400}{4054} = 2,07$. Отже, частота випуску партії деталей є $\frac{p}{K}$ років.

$$\frac{p}{K} = \frac{4054}{8400} = 0,48 \text{ року або } 5{,}79 \text{ місяців.}$$

Загальна змінна вартість виробництва визначається за формулою:

$$B3 = \frac{L_s \cdot K}{p} + L_h \cdot (Q-K)\cdot\frac{p}{2\cdot Q} = 562,5\cdot\frac{8400}{4054} + 0,75\cdot 27600\cdot\frac{4054}{2\cdot 36000} =$$

$$= 1165,52 + 1165,53 = 2331,05 \text{ гр. од. на рік.}$$

Якби в даному випадку можна було скоротити вартість виробничого циклу наполовину, то можливо було б одержати додаткову економію загальної змінної вартості в $956,54$ гр. од. на рік.

Модель планування дефіциту. У багатьох випадках витрати на збереження продукції є набагато більш значними, ніж будь-які витрати, пов'язані з відсутністю запасу протягом незначного проміжку часу. Можливо побудувати модель управління запасами, в якій передбачаються регулярні періоди, протягом яких запас відсутній. Повернімося знову до закупок продукції у зовнішнього постачальника.

Можливі два випадки. У першому з них попит на продукцію, який виникає в період відсутності запасу, залишається незадоволеним. Наприклад, можна прийняти рішення про зниження рівня запасів крупногабаритної продукції, яка зберігається на складах супермаркету, таких як хлібні сніданки або всілякі пакетні супи. Це призведе до того, що в кожному циклі протягом декількох днів не буде запасів вказаної продукції. Звичайно, з'являться певні витрати, пов'язані зі зниженням обсягів продаж і в деякому сенсі – втрати довіри клієнтів. Керівництво супермаркету вимушено буде співставити ці витрати і величину економії, отриманої внаслідок відсутності запасів продукції.

Розглянемо ще один приклад. Нехай в універмазі керівництвом приймається рішення про скорочення запасів певного виду телевізорів, оскільки в цих запасах заморожується велика кількість капіталу. Проте в даному випадку, якщо запасів не буде, а покупцю знадобиться цей телевізор, то власник магазина ймовірніше всього проявить готовність прийняти замовлення у покупця і забезпечити його необхідним товаром зразу ж після отримання наступної партії телевізорів. Очевидно, власник магазина понесе деякі витрати, пов'язані з підтриманням системи замовлень, але і в данному випадку їх слід співставити з величиною економії вартості збереження запасів.

Різниця між двома описаними випадками полягає в тому, що в першому з них після отримання нових поставок замовлення покупців не виконуються, а тому максимальний рівень запасів співпадає з розміром отриманого замовлення. В другому – частина продукції з нової поставки іде на задоволення замовлень клієнтів, а тому максимальний рівень запасів являє собою різницю між розміром замовлення і максимальним попитом, який виникає за відсутності запасів. На рис. 12, 13 показано планування дефіциту, якщо після отримання нових поставок замовлення покупців не виконуються та виконуються відповідно.

Спочатку розглянемо другий випадок, який передбачає виконання замовлень покупців.

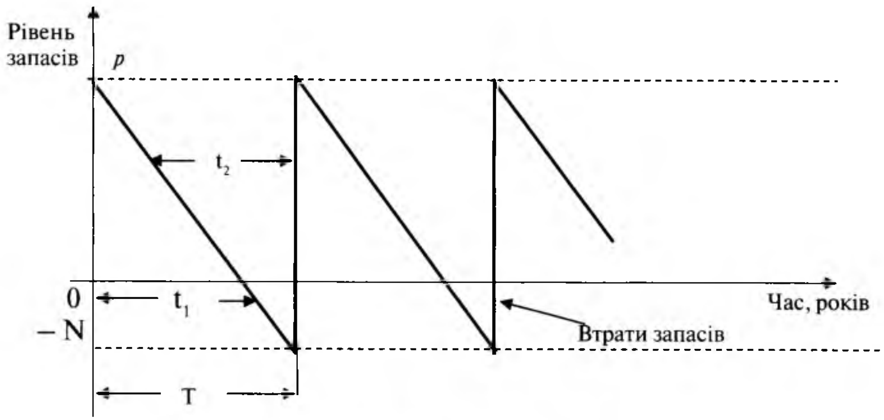


Рис. 12

Максимальний рівень запасу являє собою обсяг замовлення p мінус максимальне значення попиту протягом періоду відсутності замовлення N. Отже, максимальний рівень запасу дорівнює $(p - N)$.

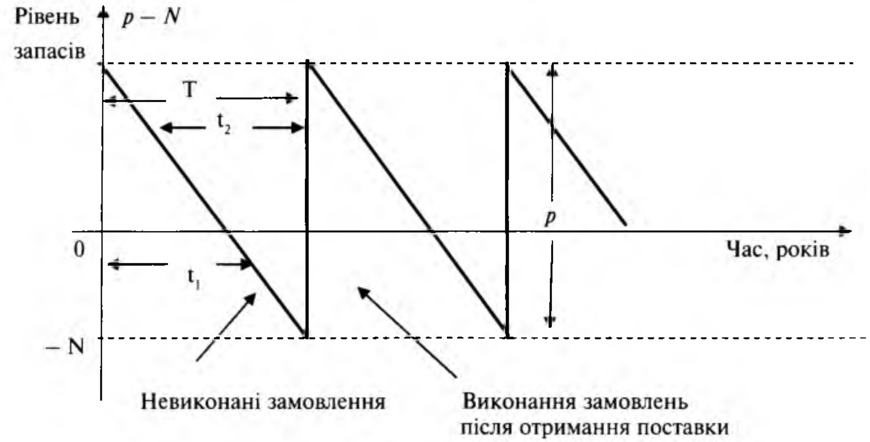


Рис. 13

Загальна змінна вартість запасів за рік ВЗ включає такі три компоненти:

1. *Річна вартість подачі замовлення =*
= вартості подачі одного замовлення × число замовлень на рік;

2. *Річні витрати на збереження =*
= вартості збереження одиниці продукції × середній рівень запасів;

3. *Річні витрати відсутності запасів =*
вартості відсутності запасу одиниці продукції ×
× середній розмір дефіциту.

Отже,

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \times \text{середній розмір запасу} +$$

$$+ L_b \times \text{середній розмір дефіциту} \qquad \text{(гр. од. на рік)}$$

13-12-173

де: L_0 – вартість подачі одного замовлення (гр. од. за одне замовлення);

L_h – витрати на збереження одиниці продукції протягом одного року (гр. од. на рік);

K – річний попит;

L_b – вартість відсутності запасу одиниці продукції протягом одного року (гр. од. на рік);

p — обсяг замовлення.

Для розрахунку середнього обсягу запасів розглянемо один цикл запасу тривалістю T років. Нехай наявний запас споживається протягом t_1 років, а протягом t_2 років запас відсутній: $t_1 + t_2 = T$. За період існування запасу t_1 середній рівень запасу дорівнює $\frac{(p-N)}{2}$. Отже, на складах протягом періоду в середньому зберігається $\frac{p-N}{2}$ одиниць продукції. А тому отримаємо $\frac{(p-N)}{2} \cdot t_1$ одиниць продукції. Для залишкової частини циклу, тобто для часу t_2 на складах зберігається нуль одиниць продукції. Отже, середнє число одиниць продукції, яка зберігається в запасі протягом всього циклу запасу T, складає:

$$\frac{\frac{p-N}{2} \cdot t_1 + 0 \cdot t_2}{T} = \frac{(p-N) \cdot t_1}{2 \cdot T}. \tag{1}$$

Темп використання запасів K (одиниць продукції в рік) виразимо наступним чином:

$$K = \frac{p-N}{t_1} \quad \text{або} \quad K = \frac{p}{T},$$

звідси

$$t_1 = \frac{p-N}{K} \quad \text{і} \quad T = \frac{p}{K}.$$

Підставимо t_1 і T в (1), отримаємо формулу середнього рівня запасів протягом одного циклу:

$$\frac{(p-N) \cdot \frac{p-N}{K}}{2 \cdot \frac{p}{K}} = \frac{(p-N)^2}{2 \cdot p}. \tag{2}$$

Для розрахунку середнього рівня дефіциту, можна використати алгоритм, описаний вище. Протягом періоду t_2 середній обсяг дефіциту складе $\frac{N}{2}$ одиниць продукції, а за період t_1 його значення буде рівне нулеві. Звідси, середнє число одиниць продукції, яких не вистачає протягом всього циклу, визначимо як

$$\frac{N \cdot \frac{t_2}{2} + 0 \cdot t_1}{T} = \frac{N \cdot t_2}{2 \cdot T}, \quad \text{де} \quad K = \frac{N}{t_2} \quad \text{і} \quad t_2 = \frac{N}{K}.$$

Отже, середній рівень дефіциту дорівнює

$$\frac{N}{2p/K} \cdot \frac{N}{K} = \frac{N^2}{2 \cdot p}. \tag{3}$$

Рівняння загальної вартості визначається як

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{(p-N)^2}{2 \cdot p} + L_b \cdot \frac{N^2}{2 \cdot p} \text{ гр. од. на рік.}$$

На відміну від отриманих раніше рівнянь, воно містить дві незалежні змінні p і N. Мінімальне значення ВЗ можливо знайти, досліджуючи функцію на екстремум. Слід знайти частинні похідні функції ВЗ за змінними p і N та прирівняти їх до нуля.

$$\frac{dB3}{dp} = 0, \qquad \frac{dB3}{dN} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{dB3}{dp} = -L_0 \cdot \frac{K}{p^2} + L_h \cdot \frac{2 \cdot (p-N) \cdot 2 \cdot p - 2 \cdot (p-N)^2}{4 \cdot p^2} - L_b \cdot \frac{N^2}{2 \cdot p^2};$$

$$\frac{dB3}{dN} = -L_h \cdot \frac{p-N}{p} + L_b \cdot \frac{N}{p}.$$

Відповідні частинні похідні прирівняємо до нуля.

$$\begin{cases} (L_h + L_b) \cdot N^2 + 2 \cdot L_0 \cdot K - L_h \cdot p^2 = 0, \\ (L_h + L_b) \cdot N - L_h \cdot p = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння знайдемо відповідно p, а потім N і підставимо отримані вирази в перше рівняння. Отже,

$$\begin{cases} L_b \cdot (L_h + L_b) \cdot N^2 - 2 \cdot L_0 \cdot L_h \cdot K = 0, \\ L_h \cdot L_b \cdot p^2 - 2 \cdot L_0 \cdot K \cdot (L_h + L_b) = 0. \end{cases}$$

Звідси, оптимальний обсяг замовлення дорівнює

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h} \cdot \frac{L_h + L_b}{L_b}} = EO3 \cdot \sqrt{\frac{L_h + L_b}{L_b}},$$

а максимальний дефіцит є

$$N = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_b} \cdot \frac{L_h}{L_h + L_b}}.$$

Якщо розглянути перший випадок, де замовлення клієнтів не виконуються, то легко переконатися, що процедура аналізу буде аналогічна попередній, за виключенням того, що максимальний обсяг запасів стане рівним p. А тому, якщо провести заміну $(p - N)$ на p, а p – на $(p + N)$ та підставити вказані значення у формули для розрахунку середнього рівня запасів і середнього рівня дефіциту, то рівняння загальної змінної вартості має вигляд

$$B3 = \frac{L_0 \cdot K}{p+N} + L_h \cdot \frac{p^2}{2 \cdot (p+N)} + L_b \cdot \frac{N^2}{2 \cdot (p+N)} \text{ гр. од. на рік.}$$

Як і в попередньому випадку, провівши аналогічні викладки, можна показати, що оптимальний обсяг замовлення визначається за наступною формулою

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h} \cdot \frac{L_b}{L_h + L_b}} = EO3 \cdot \sqrt{\frac{L_h}{L_h + L_b}},$$

а максимальний обсяг дефіциту дорівнює:

$$N = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_b} \cdot \frac{L_h}{L_h + L_b}}.$$

Приклад 5. У великому універмазі одним з найпопулярніших товарів є мобільні телефони. Попит на цю продукцію, рівний 2500 одиниць, рівномірно розподіляється на протязі року. Закупка продукції у безпосереднього виробника обходиться універмагу в 60 гр. од. за одиницю. Вартість подачі замовлення складає 60 гр. од., а витрати на збереження – 10 % середньорічної вартості запасів.

Керівництво універмагу розглядає питання про скорочення запасів даної продукції, що дозволило б покращити рух потоків готівки. За його оцінками система замовлень, яка передбачає відсутність запасів, включає витрати, пов'язані зі зниженням обсягів продажу і втратою довіри клієнтів, складає 4 гр. од. на рік за один телефон.

Необхідно:

1. Визначити мінімальне значення загальної змінної вартості запасів даної продукції за умови, що відсутність запасів є недопустимим. Який оптимальний обсяг замовлення?

2. Знайти величину економії, яка досягається при введені системи планування відсутності запасів. Приймається передумова про покриття розміру дефіциту з нових поставок. Який оптимальний обсяг замовлення?

1. $L_0 = 60$ гр. од. за замовлення;
   $K = 2500$ телефонів на рік;
   $L = 60$ гр. од. за один телефон;
   $L_h = 0,10 \cdot 60$ гр. од. $= 6$ гр. од. за одиницю продукції на рік.

Економічний обсяг замовлення є:

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 2500}{6}} = 223,6.$$

Отже, протягом кожного циклу магазин повинен подавати замовлення на 224 телефони.

Річна загальна змінна вартість запасів визначається відповідно до формули

$$B3 = \frac{L_0 \cdot K}{p} + \frac{L_h \cdot p}{2} \text{ (гр. од. на рік)}$$

$$B3 = \frac{60 \cdot 2500}{224} + 6 \cdot \frac{224}{2} = 669,64 + 672 = 1341,64 \text{ (гр. од. на рік)}$$

Плановий дефіцит є $L_b = 4$ гр. од. за телефон на рік. Обчислимо оптимальний обсяг замовлення:

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h} \cdot \frac{L_h + L_b}{L_b}},$$

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 2500}{6} \cdot \frac{6+4}{4}} = 353,55.$$

У цій ситуації універмаг повинен подавати замовлення на партії телефонів у 354 одиниці. Максимальний обсяг дефіциту є

$$N = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_b} \cdot \frac{L_h}{L_h + L_b}},$$

$$N = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 2500 \cdot 6}{4 \cdot (6+4)}} = 212,1.$$

Отже, максимальний дефіцит складає 212 телефонів. Загальна змінна вартість за рік визначається наступним чином:

$$B3 = \frac{L_0 \cdot K}{p} + L_h \cdot \frac{(p-N)^2}{2 \cdot p} + \frac{L_b \cdot N^2}{2 \cdot p},$$

$$B3 = \frac{60 \cdot 2500}{354} + 6 \cdot \frac{(354-212)^2}{2 \cdot 354} + \frac{5 \cdot 212^2}{2 \cdot 354} =$$

$$= 423,7 + 170,88 + 317,4 = 911,98 \quad \text{гр. од. на рік.}$$

У порівнянні з основною моделлю, величина економії дорівнює

1341,64 – 911,98 = 429,66 гр. од. на рік.

Отже, з використанням моделі планування дефіциту універмаг зможе досягти економії загальної змінної вартості запасів, що дорівнює 430 гр. од. на рік.

§3. Невизначеність і модель управління запасами

Розглянуті попередні моделі базувалися на передумові, що попит і термін виконання замовлення є сталими. Але на практиці значна кількість систем управління запасами містить елемент невизначеності як по відношенню попиту, так і по відношенню до терміну виконання замовлення. Неважко переконатися, що часто попит з часом змінюється, тобто середні значення попиту коливаються протягом року. Маємо справу з невизначеністю терміну виконання замовлення і зміною значень попиту з часом, а тому навряд чи можливо застосувати математичні моделі, які використовувалися раніше. Бажано залучення інших методів, у тому числі і імітаційного моделювання, яке буде викладене в наступному розділі. Але можливо побудувати математичну модель, яка достатньо вірно відображає викладену ситуацію, якщо обмежити зростання складності моделі, спричинену невизначеністю значень терміну виконання замовлення або попиту. Незважаючи на сказане, слід все ж таки зробити деякі припущення, які стосуються поведінки системи. У випадку, якщо значення попиту не визначено, вважається, що він змінюється у відповідності з характеристиками, які можна отримати на основі емпіричних даних, які містять фактичні значення попиту. Можливо, наприклад, припустити, що попит змінюється за стандартними статистичними моделями, у тому числі розподілом Пуассона або нормальним розподілом. Якщо значення терміну виконання і попиту змінюються, може виникнути ситуація, коли запас буде відсутній. Крім того, якщо ж рівень повторного замовлення визначається тільки, виходячи із задоволення середнього попиту протягом середнього терміну виконання замовлення, відсутність запасу може з'явитись у багатьох циклах запасу, які функціонують протягом року.

Нехай ймовірність відсутності запасу для будь-якого циклу запасу дорівнює 0,3. Якщо продукція, яка цікавить клієнта, замовляється

лише один раз на рік, то можливість нестачі запасів для кожного року невелика. Математичне сподівання числа нестачі запасів протягом року буде таким:

$$S \text{ } \textit{(число нестачі запасів на рік)} = \textit{Число циклів запасів на рік} \times$$
$$\times \textit{ ймовірність відсутності запасу в кожному циклі} = 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}3.$$

Проте якщо протягом року подача замовлення відбувається 60 разів, то $S = 60 \cdot 0{,}3 = 18$. Однакове значення ймовірності нестачі запасів для одного циклу може відповідати всім циклам однієї системи, але механічно переносить його на інші системи не можна. Слід визначити, коли така ймовірність нестачі запасів прийнятна, а коли – ні. Щоб це з'ясувати, необхідно визначитись, якого *рівня обслуговування* ми повинні досягти. Якщо ймовірність нестачі запасів для одного циклу дорівнює 0,3, тобто 30 %, то рівень обслуговування дорівнює 70 %. Якщо це не так, то слід знизити значення ймовірності нестачі запасів. Це можна зробити, якщо змінити *рівень повторного замовлення*, який, наприклад, можливо збільшити, якщо додати до середнього попиту протягом середнього терміну виконання обсяг *буферного* або *резервного запасу.*

Рівень повторного замовлення =

= середній попит протягом виконання замовлення +

+ резервний запас.

Чим вище обсяг резервного запасу, тим нижче ймовірність нестачі запасів, але вищі витрати на їх збереження. Зниження вартості нестачі запасів повинно бути компенсовано збільшенням вартості на їх збереження. Вибір відповідного обсягу резервного запасу залежить від конкретної цілі, яку необхідно досягти. Вона може полягати в досягненні мінімального рівня обслуговування незалежно від величини, пов'язаної з цими додатковими витратами. З іншого боку, нестача запасів може призвести до порушення випуску товарів першої необхідності і потягти за собою додаткові витрати виробництва, закупку продукції в іншого постачальника за більш високими цінам, збільшення вартості нових замовлень, менше задоволення споживача і, як наслідок, більш низький попит. Вартість нестачі запасів можна визначити, а потім, у відповідності з критерієм мінімізації загальної змінної вартості запасів, можливо вибрати необхідну кількість резервного запасу. Як правило, виділяються два типи моделей, які враховують невизначеність:

1. Багаторівнева модель повторного замовлення – замовляється фіксована кількість продукції зі змінним інтервалом часу, тобто в ті моменти часу, коли рівень запасу зменшується до раніше заданого значення.

2. Циклічна модель повторного замовлення – у фіксовані інтервали часу замовляється різна кількість продукції.

Зауважимо, що модель (§1) поєднує в собі обидві ці особливості – фіксована кількість продукції замовляється в ній з фіксованим інтервалом часу. Вибір тієї чи іншої системи визначається лише зміною значень попиту і терміну виконання замовлення. Розглянемо детальніше застосування кожного типу моделей.

Багаторівнева система повторного замовлення

Модель І. *Досягнення мінімального рівня обслуговування.*

Необхідно прийняти рішення по двох наступних питаннях:

1. Яке значення фіксованого обсягу замовлення p?
2. При якому рівні запасів слід зробити нове замовлення?

Ця величина називається рівнем повторного замовлення R.

Ідея алгоритму полягає в тому, щоб за допомогою моделі ЕОЗ зафіксувати обсяг повторного замовлення, а потім на цій основі вибрати відповідне значення рівня повторного замовлення. Даний алгоритм не завжди приводить до отримання найкращого розв'язку, але він дозволяє знайти достатньо прийнятний розв'язок. Щоб зафіксувати рівень повторного замовлення, необхідно знати, як змінюється величина попиту протягом терміну виконання замовлення і очікуваного значення рівня обслуговування.

Приклад 6. Промислова фірма в одному з технологічних процесів використовує продукт X, який купує у зовнішнього постачальника. Попит фірми на вироби X періодично змінюється, але наближено його можна описати за допомогою нормального розподілу із середнім значенням, рівним 90 виробів на день. Стандартне відхилення попиту дорівнює 15 виробам на день. Вартість кожного виробу дорівнює 0,80 гр. од. За кожне замовлення постачальник стягує оплату 30 гр. од. Термін виконання замовлення постачальником фіксований і дорівнює 7 днів. За оцінками спеціалістів фірми витрати на збереження складають 15 % середньорічної вартості запасів. Фірма працює 6 днів на тиждень протягом 50 тижнів на рік.

Яку кількість виробів повинна замовляти фірма кожен раз і яким повинен бути рівень повторного замовлення, якщо нестача запасів в середньому більш ніж у 10 циклах небажана? Який обсяг резервного запасу, що відповідає даному рівню повторного замовлення?

Для визначення необхідного обсягу резервного запасу припустимо, що попит є сталим і зафіксованим на рівні середнього значення.

$L_0 = 30$ гр. од. за одне замовлення;

$K = 90 \cdot 6 \cdot 50 = 27000$ виробів на рік (в середньому);

$L_h = 15\ \%$ від $0{,}80$ гр. од. $=$ $0{,}12$ гр. од. за 1 в. на рік.

Якщо вважати, що попит сталий, то економічний обсяг замовлення визначається за наступною формулою:

$$p_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 27000}{0{,}12}} = 3674{,}2.$$

За обсяг замовлення приймемо значення, рівне 3674 виробам. Максимально допустимий рівень нестачі запасів, як було задано апріорно, дорівнює 1 із 10 циклів, тобто в середньому тільки в 10 % циклів допускається нестача запасів. Отже, рівень обслуговування дорівнює 90%. Оскільки попит за день апроксимується нормальним розподілом, попит протягом терміну поставки також розподілений за нормальним законом при умові, що припускається незалежність попиту в будь-який день від його величини в інші дні. Середнє значення попиту протягом 7 днів терміну виконання замовлення дорівнює $90 \cdot 7 = 630$ виробів. ***Дисперсія попиту протягом терміну виконання замовлення дорівнює дисперсії попиту за день,*** тобто $7 \cdot 15^2$, отже, стандартне відхилення попиту на протязі поставки складе: $\sqrt{7 \cdot 15^2} = 39{,}7$ виробів. Розподіл попиту протягом поставки зображено на рис. 14.

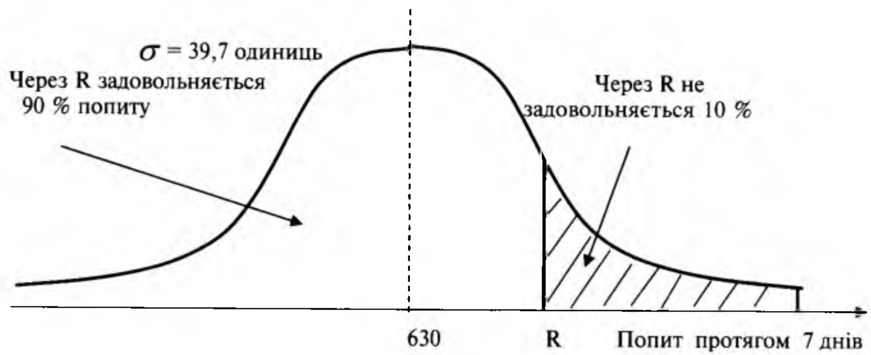


Рис. 14

Рівень повторного замовлення R вибирається з тієї умови, щоб ймовірність того, що величина попиту протягом терміну виконання стане менше рівня повторного замовлення, була не менше 0,90, тобто p (величина попиту протягом поставки $< \mathrm{R}) > 0{,}90$. R являє собою z стандартних відхилень від середнього, де

$$z = \frac{R - 630}{39{,}7}.$$

Згідно таблиць стандартного нормального розподілу (див. Додаток 2) знаходимо, що якщо

$$P\left(z > \frac{R - 630}{39{,}7}\right) = 0{,}1, \qquad \text{то} \qquad z = 1{,}2816.$$

Отже,

$$1{,}282 = \frac{R - 630}{39{,}7} \quad \text{і} \quad \mathrm{R} = 684{,}36$$

Зафіксуємо рівень повторного замовлення на рівні 684 виробів. Отже, резервний запас дорівнює 684 – 630 = 54 виробів. Такий запас необхідний для забезпечення мінливості попиту і необхідного рівня обслуговування.

Припускається, що 54 вироби знаходяться в запасі протягом всього періоду, таким чином, в даному випадку середньорічний рівень запасу дорівнює $\left(\frac{p}{2} + 54\right)$ виробам.

Якщо не враховувати величину вартості нестачі запасів, то загальна річна змінна вартість визначається як:

$$B3 = L_0 \cdot \frac{K}{P} + L_h \cdot \left(\frac{p}{2} + \textit{резервний запас}\right) =$$

$$= 30 \cdot \frac{27000}{3674} + 0{,}12 \cdot \left(\frac{3674}{2} + 54\right) =$$

$$= 220{,}47 + 226{,}92 = 447{,}39 \ \textit{гр. од. на рік}$$

Вартість резервного запасу є: $(0{,}12 \cdot 54) = 6{,}48$ *гр.од.на рік*.

Модель II. *Досягнення мінімальної вартості.*

Дослідимо проблему, поставлену в прикладі 6, з точки зору мінімізації загальної змінної вартості на рік. Необхідно прийняти рішення по тих же питаннях, які були сформульовані для моделі І, з використанням того самого алгоритму.

Приклад 7. Повернемося до прикладу 6. Якщо виникає нестача запасів, то процес виробництва призупиняється, а тому при наближенні кризи фірма відправляє до місцевого постачальника вантажний фургон для закупки додаткової партії виробів. За оцінками експертів додаткова вартість цієї операції складає 1,5 гр. од. за одну одиницю виробу.

Яку кількість виробів повинна замовляти фірма одночасно, і яким повинен бути рівень повторного замовлення, якщо її метою є мінімізація загальної змінної вартості за рік? Який обсяг резервного запасу відповідає даному рівню повторного замовлення?

Загальна змінна вартість за рік =

= річна вартість виконання замовлення +

+ річні витрати на збереження стандартного запасу +

+ річні витрати на збереження резервного запасу +

+ річна вартість нестачі запасів.

Фіксований обсяг запасу є таким же як і в попередньому прикладі – 3674 виробів в одному замовленні, а тому

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2} + L_h \times (\textit{резервний запас}) +$$

$$+ L_B \times (\textit{математичне сподівання кількості одиниць продукції,}$$

$$\textit{які складають нестачу запасів на рік}) =$$

$$= \frac{30 \cdot 27000}{3674} + 0{,}12 \cdot \frac{3674}{2} + 0{,}12 \cdot (\textit{резервний запас}) +$$

$$+ 1 \times (\textit{математичне сподівання кількості одиниць продукції,}$$

$$\textit{які складають нестачу запасів на рік})$$

Нам слід вибрати значення резервного запасу, яке мінімізує сумарне значення останніх двох компонент загальної вартості.

За наявності збільшення резервного запасу витрати на збереження також зростають, а математичне сподівання кількості одиниць продукції, які складають нестачу запасу, знижується, а тому знижується і вартість відсутності запасів, і навпаки. Потрібно визначить обсяг резервного запасу, який забезпечує найвигідніше співвідношення цих двох величин. Для цього використаємо метод, який базується на теорії „спроб і помилок”. У цьому прикладі попит протягом поставки замовлення апроксимується неперервним розподілом, тим самим, слід знайти особливу точку даного розподілу, для якої потрібно розрахувати і співставити вартість нестачі запасів і витрат на збереження резервного запасу. Перевірку вказаних значень будемо здійснювати з інтервалом в 10 виробів. Цей інтервал вибирається для зручності розрахунків, крім того, оскільки вироби є відносно недорогими, інтервал в 10 деталей є достатньо надійним і обґрунтованим. Розрахунок ймовірності різних значень попиту протягом поставки з використанням нормального розподілу з $\mu = 630$ і $\sigma = 42{,}4$ одиниці за 7 днів приведений в таблиці 3.

Таблиця 3

Наближене значення попиту протягом поставки	Ймовірність появи цього значення*	Резервний запас, який вимагається для задоволення цього попиту
630	0,096	0
640	0,089	10
650	0,085	20
660	0,075	30
670	0,058	40
680	0,047	50
690	0,035	60
700	0,025	70
710	0,002	80

*При оцінці ймовірності значення попиту в 630 виробів представляє проміжок від 625 до 635 деталей. Ймовірність P (625 < *попит* < 635) знаходиться за допомогою таблиць стандартного нормального розподілу. Інші значення розраховуються аналогічно.

Якщо попит протягом поставки не перевищує свого середнього значення, нестачі запасів не з'явиться. Проблеми виникають тільки в тому випадку, якщо значення попиту протягом поставки вище середнього. Для кожного з вибраних значень резервного запасу обчислюється математичне сподівання кількості нестачі запасів протягом циклу. Потім дане значення помножується на число циклів запасу на рік, що визначає математичне сподівання кількості нестачі запасу протягом року. Враховуючи витрати на збереження додаткового запасу (0,12 гр. од. за одиницю) і очікувану вартість нестачі запасів (гр. од. за одиницю), можна отримати очікувану величину загальної річної вартості, яка відповідає даному рівню резервного запасу. Як правило, ці дві вартості рівномірно зменшуються, доки не досягнуть мінімального значення, а потім знову починають зростати. Як тільки значення вартості починають зростати, необхідність у подальших розрахунках відпадає. Кількість циклів запасу в рік складе: 27000 : 3674 = 7,35. Зауважимо, що в наведених вище розрахунках вважається, що ймовірність того, що попит за час поставки перевищить 710 виробів, дорівнює нулеві. У таблиці 4 приведені витрати, які відповідають різним рівням резервного запасу.

Таблиця 4

Резервний запас	Задоволений попит	Математичне сподівання кількості нестачі запасів		Вартість, гр. од. на рік		
		протягом циклу	протягом року	нестача запасів	резервного запасу	загальна
80	710	0	0	0	80×0,12=9,6	9,60
70	700	10×0,002=0,02	0,02×7,35=0,147	0,147×1=0,147	70×0,12=8,4	8,55
60	690	20×0,002+ +10×0,025 = 0,29	0,29×7,35=2,13	2,13×1=2,13	60×0,12=7,2	9,33
50	680	30×0,002+ +20×0,025+ +10×0,035=0,46	0,46×7,35=3,38	3,38×1=3,38	50×0,12=6,0	9,38

Оскільки загальна очікувана вартість за рік зростає, можна припустити, що своє мінімальне значення вона набуває, коли резервний запас дорівнює 70 виробам.

Загальна змінна вартість за рік дорівнює:

$$ВЗ = \frac{30 \cdot 27000}{3674} + 0{,}12 \cdot \frac{3674}{2} + 0{,}12 \times \textit{резервний запас} +$$

$$1 \times (\textit{математичне сподівання кількості нестачі запасів на рік}) =$$

$$5 + 220{,}5 + 0{,}12 \cdot 70 + 1 \cdot 0{,}147 = 441 + 8{,}4 + 0{,}147 = 449{,}547 \ \textit{гр.од. на рік.}$$

Це значення отримано з достатнім ступенем наближення, але, ймовірніше за все, воно є найкращим значенням, яке можна отримати досить просто. У даному випадку змінна вартість запасів достатньо мала в порівнянні із вартістю закупки продукції $(0{,}80 \times 27000 = 21600$ гр. од. на рік).

Приклад 8. Крупний оптовий магазин проводить закупку телевізорів найбільш популярної марки у безпосереднього виробника за ціною 300 гр. од. Середній обсяг продажу за 300 днів року складає 500 телевізорів. Здійснення кожного замовлення обходиться магазину в 50 гр. од. Оцінкою встановлено, що витрати на збереження складають 20% середньорічної вартості запасів. Тривалість виконання замовлення – 2 доби. За даними про останні 60 циклів замовлень були отримані такі розподіли частот для попиту (таблиця 5).

Таблиця 5

Попит на телевізори протягом поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Число циклів запасу	1	3	8	9	12	9	9	6	3

Як тільки запас товарів вичерпується, кожного разу адміністрація оптового магазина здійснює термінове замовлення. Додаткова вартість цього замовлення, включаючи витрати на виконання замовлення покупців, оцінюється приблизно в 15 гр. од. за телевізор.

Яку кількість телевізорів магазин повинен замовляти одночасно і яким повинен бути рівень повторного замовлення в умовах, коли мета адміністрації магазина полягає в мінімізації витрат? На скільки

14-12-173

великий обсяг резервного запасу, який відповідає даному рівню повторного замовлення?

Розв'язок.

Загальна змінна вартість за рік =

= річна вартість подачі замовлення +

+ річні витрати на збереження стандартного запасу +

+ річні витрати на збереження резервного запасу +

+ річні витрати на відсутність запасів

L_0 = 50 гр. од. за одне замовлення;

K = 500 телевізорів в середньому за рік;

$L_h = 0{,}20 \cdot 300 = 60$ гр. од. за телевізор на рік;

L = 300 гр. од. за телевізор;

L_B = 15 гр. од. за телевізор.

Використовуючи середнє значення попиту та зафіксувавши обсяг замовлення на рівні ЕОЗ, отримаємо:

$$p = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 500}{60}} = 28{,}87.$$

За фіксований обсяг замовлення виберемо значення, рівне 29 телевізорам.

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2} + L_h \times (\text{резервний запас}) +$$

$$+ L_B \times (\text{математичне сподівання числа виробів, які складають нестачу запасів за рік}) =$$

$$= \frac{50 \cdot 500}{29} + 60 \cdot \frac{29}{2} + 60 \cdot (\text{резервний запас}) +$$

$$+ 15 \times (\text{математичне сподівання розміру нестачі запасів на рік}) =$$

$$= 1732{,}1 + 60 \times (\text{резервний запас}) +$$

$$+ 15 \times (\text{математичне сподівання розмір нестачі запасів на рік}) \text{ (гр.од. на рік)}.$$

Потрібно визначити такий обсяг резервного запасу, за яким досягається мінімум двох останніх видів витрат. Якщо попит протягом терміну виконання замовлення не перевищує середнього значення, нестача запасів відсутня. Проблема виникає лише в тому випадку, коли попит протягом поставки перевищує його середній рівень.

Середній попит за день складає: $\frac{500}{300} = 1{,}67$ телевізорів. Отже, середній попит протягом терміну виконання замовлення визначається як 1,67×2=3,34. Припустимо певну похибку в заокругленні, вважаючи, що попит дорівнює 4 телевізорам. Розподіл ймовірності значень попиту за період поставки можна знайти із відповідного розподілу частот (таблиця 6). Обсяг резервного запасу, необхідний для відповідних значень попиту за період поставки, вказаний в таблиці 7.

Таблиця 6

Попит на телевізори за період поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Число циклів запасу	1	3	8	9	12	9	9	6	3
Ймовірність	0,02	0,05	0,13	0,15	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05

Таблиця 7

Попит протягом поставки	Ймовірність появи такого попиту	Резервний запас, необхідний для задоволення цього попиту
4	0,2	0
6	0,15	2
7	0,1	3
8	0,05	4

Обчислимо математичне сподівання обсягу нестачі запасів протягом одного циклу для кожного із вказаних значень резервного запасу. Математичне сподівання обсягу нестачі запасів протягом року отримаємо множенням здобутого значення на кількість циклів протягом року. Очікуване значення загальної вартості, що відповідає даному обсягу резервного запасу можна здобути, якщо прийняти до уваги витрати на збереження додаткового запасу (60 гр. од. за одиницю продукції) і витрати, пов'язані з нестачею запасів (15 гр. од. за одиницю продукції).

Кількість циклів запасу за рік дорівнюватиме: $\frac{500}{29} = 17{,}24$. Значення вартості, які відповідають різному обсягу резервного запасу, приведені в таблиці 8.

Таблиця 8

Резервний запас	Задоволений попит	Математичне сподівання кількості нестачі запасів		Вартість, гр. од. на рік		
		протягом циклу	протягом року	нестачі запасів	резервного запасу	загальна
4	8	0	0	0	$4 \cdot 60 = 240$	240
3	7	$1 \cdot 0{,}05 = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 17{,}24 = 0{,}862$	$0{,}862 \cdot 15 = 12{,}93$	$3 \cdot 60 = 180$	192,93
2	6	$2 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$	$0{,}2 \cdot 17{,}24 = 3{,}45$	$3{,}45 \cdot 15 = 51{,}72$	$2 \cdot 60 = 120$	171,72
1	5	$3 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}5$	$0{,}5 \cdot 17{,}24 = 8{,}62$	$8{,}62 \cdot 15 = 129{,}3$	$1 \cdot 60 = 60$	189,3

Очікуване значення загальної вартості зростає, отже можна припустити, що її мінімум досягається у випадку, коли резервний запас складається з 2 телевізорів. Якщо припустити, що середнє значення попиту протягом періоду поставки дорівнює 4, рівень повторного замовлення складе: 2+4=6 телевізорів. У такому випадку загальна змінна вартість за рік буде дорівнювати:

$$ВЗ = 1732{,}1 + 60 \times (\textit{резервний запас}) +$$
$$15 \times (\textit{математичне сподівання обсягу нестачі запасів на рік}) =$$
$$= 1732{,}1 + 120 + 15 \cdot 3{,}45 = 1903{,}85$$

Щоб мінімізувати річний показник загальної змінної вартості запасів, слід періодично замовляти партії телевізорів обсягом 29 штук, якщо рівень запасів знижується до 6 одиниць.

Циклічна система повторного замовлення. Базова циклічна модель повторного замовлення призначена для прийняття рішення по наступних двох питаннях:

1. Яка межа фіксованого інтервалу, в якому слід здійснювати подачу замовлення?
2. Яку кількість продукції необхідно замовляти?

Розглянемо дану задачу в два етапи, що дозволить нам здійснити достатньо непоганий, але необов'язково оптимальний, розв'язок. Зафіксуємо тривалість циклу T, не приймаючи до уваги мінливість значень попиту і терміну здійснення замовлення. Слід округлити значення T до відповідної величини. Система управління запасами повинна бути побудована таким чином, щоб нею можна було легко управляти, а тому зовсім небажано, щоб особі, яка здійснює управління запасами, доводилось проводити перевірку запасів з незручними для нього інтервалами часу. Критерієм вибору обсягу замовлення є мета створення системи управління запасами. Дослідимо дану проблему з точки зору мінімального рівня обслуговування і мінімальної вартості.

Модель I. *Досягнення мінімального рівня обслуговування.*

Визначимо фіксований інтервал повторного замовлення, не враховуючи яких-небудь змін значень попиту або терміну поставки, в якому досягається мінімальне значення загальної змінної вартості подачі замовлення та збереження запасів:

Загальна змінна вартість за рік =
= річна вартість здійснення замовлення +
+ річні витрати на збереження

Число поданих за рік замовлень дорівнює $\frac{1}{T}$, де T – інтервал повторного замовлення. Обсяг кожного замовлення дорівнює p, де $K = \frac{p}{T}$, отже, $p = K \cdot T$. Середній рівень запасу складе $\frac{p}{2} = \frac{K \cdot T}{2}$, без врахування резервного запасу.

Отже, загальна змінна вартість за рік визначається за формулою:

$$B3 = L_0 \cdot \frac{1}{T} + L_h \cdot \frac{K \cdot T}{2} \text{ (гр. од. в рік)}$$

Мінімум $B3$ досягається за умов:

$$\frac{dB3}{dT} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2B3}{dT^2} > 0.$$

Знайдемо відповідні похідні:

$$\frac{dB3}{dT} = -L_0 \cdot \frac{1}{T^2} + L_h \cdot \frac{K}{2};$$

$$\frac{d^2B3}{dT^2} = 2 \cdot L_0 \cdot \frac{1}{T^3}.$$

Звідси

$$\frac{d^2B3}{dT^2} > 0 \quad \text{за умови} \quad T > 0.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля, отримаємо

$$-L_0 \cdot \frac{1}{T^2} + L_h \cdot \frac{K}{2} = 0$$

або

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0}{L_h \cdot K}}.$$

Отриманий раніше економічний обсяг замовлення (ЕОЗ) дорівнює

$$EO3 = \sqrt{\frac{2 \cdot L_0 \cdot K}{L_h}}.$$

Після знаходження T проводиться його корекція у відповідності з найбільш зручним інтервалом перевірки наявності запасів. Якщо, наприклад, розрахункові значення дорівнюють $T = 4{,}3$ дня, знайдене значення було б скоректовано на інтервал перевірки запасів, рівний одному тижню.

Після цього слід знайти рівень запасів, який буде визначати обсяг замовлення, що подається. Наприклад, можна прийняти рішення, що обсяг замовлення на момент його подачі повинен бути вибраний таким чином, щоб рівень запасів збільшився до 200 одиниць продукції за умови, що поставки замовлення здійснюються терміново. Отже, якщо рівень запасів дорівнює 85, обсяг замовлення буде дорівнювати 115, якщо ж рівень запасів дорівнює 97, обсяг замовлення складе 103 одиниці продукції.

Приклад 9. Нехай для деякого виду продукції рівень обслуговування співпадає з обсягом однієї нестачі продукції за умови, що цикл повторного замовлення дорівнює п'ять робочих тижнів. Припустимо також, що рік складається із 50 робочих тижнів. Зафіксуємо термін виконання замовлення на рівні трьох тижнів. Попит на дану продукцію в тиждень апроксимується нормальним розподілом, середнє значення якого дорівнює 400 одиниць продукції на тиждень, а стандартне відхилення – 40 одиниць продукції на тиждень.

Протягом року число циклів запасу дорівнює $\dfrac{50}{5} = 10.$

Ймовірність нестачі запасу протягом циклу визначається як $\dfrac{1}{10} = 0{,}1.$

Отже, рівень обслуговування, який слід досягти, дорівнює 0,9.

Змінний попит, який слід враховувати, – це попит, який висувають з моменту прийняття рішення про здійснення замовлення до моменту отримання нової партії повторного замовлення, тобто попит, який виникає протягом всього циклу повторного замовлення, а також попит протягом поставки, як було в багаторівневій моделі повторного замовлення.

Припустимо, що розподіл попиту протягом 8 тижнів (тривалість циклу – 5 тижнів плюс час поставки замовлення – 3 тижні) є нормальним і має середнє значення $8 \times 400 = 3200$ одиниць продукції і стандартне відхилення $\sqrt{8 \cdot 50^2} = 141{,}42$ одиниці продукції. Відповідний графік розподілу зміни попиту протягом повторного замовлення і часу поставки показано на рис. 15.

Рис. 15

Обсяг замовлення вибирається таким чином, щоб рівень запасу виріс до величини Q, у свою чергу Q вибирається так, щоб ймовірність задоволення попиту у продовженні циклу запасу дорівнювала 90%. Q представляє собою z стандартних відхилень від середнього, де

$$z = \frac{Q - 3200}{141{,}4}.$$

Отже, за таблицею для стандартного нормального розподілу знаходимо, що при $P\left(z > \dfrac{Q-3200}{141{,}4}\right) = 0{,}1 \quad z = 1{,}2816.$

Таким чином,

$$1{,}2826 = \frac{Q - 3200}{141{,}4}.$$

Звідси

$$Q = 3200 + 1{,}2816 \cdot 141{,}4 = 3381{,}2.$$

Отже, під час кожної перевірки наявності запасів, які проводяться один раз за 5 тижнів, буде зроблено нове замовлення, обсяг якого дозволить збільшити рівень запасів до 3381 одиниць продукції, за умови термінового одержання замовлення. Така політика дозволить забезпечити рівень обслуговування, рівний 90 % або в середньому одну нестачу запасів в рік.

Модель II. *Досягнення мінімальної вартості.*

Розглянутий алгоритм моделі I можливо використовувати також і для визначення найбільш прийнятної тривалості циклу повторного замовлення.

Рівень запасів Q, за яким досягається мінімум загальної змінної вартості за рік, можливо визначити за аналогією з методом, розглянутим у попередньому пункті, де визначався обсяг необхідного резервного запасу. Для цього використаємо дані прикладу 8 та визначимо фіксований інтервал повторного замовлення:

$L_0 = 50$ гр. од. за одне замовлення;

$K = 500$ телевізорів за рік (в середньому);

$L_h = 0{,}20 \times 300 = 60$ гр. од. за телевізор на рік;

$L = 300$ гр. од. за телевізор;

$L_B = 15$ гр. од. за телевізор.

$N = 3$ дні.

Тривалість робочого року = 300 днів.

Оптимальний інтервал повторного замовлення визначимо таким чином:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot L_0}{L_h \cdot K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50}{60 \cdot 500}} = 0{,}06 \text{ року.}$$

Оптимальний обсяг повторного замовлення дорівнює $0{,}06 \times 300 = 18$ робочих днів. Припустимо, що робочий рік тривалістю 300 днів складається із 6-денних робочих тижнів, тоді найбільш прийнятним для подачі повторних замовлень буде інтервал, рівний 4 тижням. Кожний раз в момент подачі замовлення визначається його обсяг, який повинен бути таким, щоб рівень запасів зріс до величини Q за умови термінового отримання замовлення, де Q мінімізує витрати на збереження резервного запасу і вартість нестачі запасів за рік. Обсяг резервного запасу визначається як різниця між Q та середнім значенням попиту протягом поставки та циклу повторного замовлення. Цикл повторного замовлення дорівнює 3×6 робочих днів, а час поставки – 3 робочі дні. Слід врахувати попит, який виникає протягом 18 робочих днів. Оскільки річний попит дорівнює 500 телевізорам за 300 робочих днів, тому середнє значення попиту за 18 днів складе: $\frac{500}{300} \cdot 18 = 30$ телевізорів. Резервний запас дорівнює $Q - 30$, а витрати на його збереження за рік – $(Q - 30) \cdot 60$ гр. од. на рік. Очікувані витрати, які пов'язані з відсутністю запасу протягом року, залежать від коливання попиту протягом досліджуваних 18 днів. Але ми не зможемо провести розрахунки внаслідок відсутності інформації, яка є в нашому розпорядженні. На практиці слід було б задатися відповідним розподілом і перевірити його надійність, збираючи додаткові данні. Після завершення цього етапу можна приступити до розрахунків, в яких використовують ті ж методи, що і в попередніх прикладах, але часу для цього потрібно було б набагато більше.

Розділ VI.

Імітаційне моделювання

Вступні відомості. Для формалізації ситуації, пов'язаної зі збереженням і управлінням запасами, у попередньому розділі використовувалися математичні моделі, але розглянуті проблеми були достатньо прості і задовольняли всім основним передумовам моделі. Проте, інколи постають більш складні завдання, розв'язок яких за допомогою приведених математичних моделей не відповідає суті поставленої проблеми. А тому доцільно запропонувати методи, які можна використовувати в ситуаціях, що виходять за рамки системи передумов, на яких базуються прості моделі.

Одним з методів, який використовується у випадках, якщо застосування математичних моделей неадекватно або досить складне, є імітаційне моделювання. Незважаючи на відсутність в ньому певної елегантності, ці методи досить гнучкі і могутні при застосуваннях, відтворюючи процес функціонування системи крок за кроком. Така система може містити ряд стохастичних змінних, а в системі управління запасами, наприклад, невизначеностями можуть бути як щорічний попит, так і термін реалізації замовлення. Використовуючи вибіркові дані, можна моделювати поведінку системи. Якщо імітаційне моделювання застосовується протягом достатньо тривалого терміну, з'являється можливість створювати моделі з періодичним циклом або обчислювати математичні сподівання для певних параметрів. Імітаційне моделювання може допомогти при складанні прогнозів відносно можливої поведінки системи в майбутньому.

Більш детально розглянемо один з методів, який в літературі відомий як Метод Монте-Карло. Навіть якщо в дійсності змінні є неперервними, в даному методі їм присвоюються дискретні значення. В залежності від системи, яка моделюється, змінна часу, наприклад, може ділитися на інтервали у хвилинах, годинах або днях. Потім обчислюються ймовірності кожного значення, а у відборі значень змінних із розподілу ймовірності використовуються випадкові числа. За допомогою такої процедури генеруються ряди значень змінних, які є основою для побудови імітаційної моделі.

Імітаційне моделювання, як і більшість методів дослідження операцій, для побудови моделей і з наступним їх аналізом особливо потребує комп'ютерного забезпечення, оскільки значущу і обґрунтовану інформацію можна здобути лише після проведення розрахунків для різних випадкових чисел. Для знаходження стаціонарного стану моделі необхідно зробити розрахунок за тривалий період змінної часу і таким чином здобути середні значення відповідних статистичних характеристик. Якщо період, що моделюється, досить малий, тоді на середні значення змінних можуть впливати початкові (стартові) коливання.

Зауважимо, що ми не ставимо за мету проаналізувати спектр застосування імітаційних моделей і методів, враховуючи, що принципи, які лежать в їх основі, однакові.

§1. Дискретні імітаційні моделі та принципи їх побудови.

В основу досліджень виборчого моніторингу покладена передумова про те, що соціолог намагається виробити оцінку громадської думки згідно питання, що його цікавить. Він хоче знати, яка тривалість певної роботи та її ціна. Перший етап полягає в організації вибіркового обстеження і розробки анкети. Другим етапом є збір вихідних даних. Нехай підготовлена відповідна анкета та вироблений план проведення вибіркового обстеження. Нехай прийнято рішення, що збір інформації буде проводитися шляхом опитування (інтерв'ю) перехожих на вулицях міста. Тривалість проведення обстеження та відповідні витрати залежать від того, скільки часу знадобиться соціологу для збору вихідних даних. Яким чином організація, що відповідає за проведення обстеження, може оцінити, скільки часу знадобиться для його проведення?

Проводячи аналіз ситуації, слід врахувати, що соціологу доведеться зупиняти перехожих, запитувати про їх бажання або небажання дати інтерв'ю і у випадку, якщо вони згодні, поставити їм відповідні запитання. Змінними в такій ситуації є наступні величини:

1. Соціологу доведеться чекати перехожого, якого можна зупинити. Отже, необхідно знати величину інтервалу між послідовними моментами появи перехожих.

2. Бажання перехожого дати інтерв'ю.

3. Тривалість самого опитування.

Можливо побудувати імітаційну модель даної проблеми і оцінити час, потрібний для того, щоб набрати необхідне число інтерв'ю у випадку, якщо вдасться отримати інформацію, яка відображає процес зупинки перехожого та його можливе опитування. Причому дані повинні відображати стандартні характеристики змінних, які були вказані вище. Кожна із цих змінних є стохастичною, тобто схильною до невизначеності, а тому найбільш простим способом є збір певних даних шляхом проведення досліджень. Якщо, наприклад, вибрати потік із 100 перехожих, то можливо зафіксувати часові інтервали між їх послідовними появами, бажанням або небажанням бути опитуваними і, якщо вони згодні, тривалість інтерв'ю. Лише специфіка проблеми впливає на ступінь точності цих даних. В даному випадку зовсім неважливо, щоб час був зафіксований з високою точністю. До речі, саме на цій стадії приймається рішення про те, які дискретні значення часу слід використовувати. Будемо вважати, що між послідовними появами перехожих приблизно 1 хв., а кожне опитування займає приблизно 2 хв.

Зібравши дані з потоку із 100 перехожих, для кожної змінної можна побудувати розподіл частот і розрахувати відповідні значення ймовірності.

Вважатимемо, що за результатами досліджень були зафіксовані наступні дані:

Таблиця 1

Інтервал між моментами появи перехожих, хв.	0	1	2	3	4	5
Число появ	30	35	15	10	7	3
Ймовірність	0,30	0,35	0,15	0,10	0,07	0,03

Із загального числа опитаних 80 осіб виразили бажання дати інтерв'ю, отже, ймовірність того, що будь-який перехожий погодиться на інтерв'ю, можна оцінити як 0,80.

Таблиця 2

Тривалість інтерв'ю	2	4	6
Кількість інтерв'ю	45	50	5
Ймовірність	0,45	0,50	0,05

Одним із методів використання одержаних даних для дослідження процесу появи перехожих є використання таблиці випадкових чисел (див. Додаток 3). Вона містить в собі цифри від 0 до 9, вибрані випадковим чином. Групування в таблицях застосовуються переважно для зручності читання (користування). При користуванні таблицею за точку відліку може бути вибрана будь-яка позиція. Цифри можна вибирати по одній, по дві або по три, рухаючись по таблиці вправо або вниз, в залежності від вимог задачі. Випадкові числа використовуються для того, щоб множині значень змінної поставити у відповідність множину випадкових чисел (наприклад, 0-9, 00-99). Пропорційно значенням ймовірності випадкові числа ставляться у відповідність значенням змінної.

Отже, із вказаних таблиць вибирається випадкове число і змінній надається відповідне значення. Ми будемо користуватися випадковими числами, які містять дві цифри, оскільки в даній задачі значення ймовірності вказані з точністю до двох десяткових знаків. Розподіл інтервалу випадкових чисел 00-99 для інтервалів між моментами появи перехожих показано в таблиці 3.

Якщо вибирається випадкове число 04, то воно належить проміжку (00-29) і характеризує інтервал між появою перехожих в нуль хвилин. Випадкове число 49 належить проміжку (30-64) і відповідає одній хвилині. Використовуючи послідовні випадкові числа і рухаючись вздовж рядка або вниз по стовпцю таблиці та за допомогою приведених вище даних можна поставити у відповідність кожній особі інтервал його появи біля опитувача. Накопичуючи одержані значення інтервалу між моментами появи перехожих, починаючи з нуля, можливо знайти час появи кожного перехожого.

Таблиця 3

Інтервал між появою, хв.	Ймовірності	Кумулятивні ймовірності	Випадкові числа
0	0,30	0,30	00-29
1	0,35	0,65	30-64
2	0,15	0,80	65-79
3	0,10	0,90	80-89
4	0,07	0,97	90-96
5	0,03	1,00	97-99

Розподіл інтервалів випадкових чисел для бажаючих дати інтерв'ю показано в таблиці 4.

Таблиця 4

Бажання перехожого дати інтерв'ю	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
ТАК	0,80	0,80	00-79
НІ	0,20	1,00	80-99

Щоб з'ясувати, чи погодиться перехожий дати інтерв'ю, вибираємо випадкове число з другого стовпця або рядка таблиці. Нехай вибрано число 37. Воно знаходиться на проміжку (00-79). Цей перехожий згоден дати інтерв'ю. Якщо наступне число дорівнює 68, то, оскільки воно належить тому ж проміжку, наступний перехожий також дасть згоду на інтерв'ю.

Тривалість інтерв'ю встановлюється аналогічно, але з використанням відмінного від двох попередніх множин випадкових чисел. Розподіл інтервалів випадкових чисел для тривалості інтерв'ю показаний а таблиці 5.

Таблиця 5

Тривалість інтерв'ю, хв.	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
2	0,45	0,45	00-44
4	0,50	0,95	45-94
6	0,05	1,00	95-99

Тепер можливо починати процес моделювання, продовжуючи його до тих пір, поки не буде одержано 10 інтерв'ю. Для кожної змінної вибираються випадкові числа, а потім генеруються значення змінних, необхідних для продовження процесу моделювання (час появи перехожого), а також змінних, необхідних для описання поведінки системи (згода дати інтерв'ю та його тривалість).

Приведемо дані з таблиць випадкових чисел, які допоможуть прослідкувати хід процесу моделювання (Додаток 3).

04 49 45 75 88 99 76 26 69 66 18 78 65 31 68 14 58 87 99 28 57 61 58
37 68 18 24 81 96 41 86 44 19 55 33 65 03 65 80 61 35 23 14 36 31 59

Для інтервалів появи перехожого виберемо випадкові числа з початку списку і будемо переміщатися вздовж рядка. Даний ряд починається з чисел: 04, 49, 45. Для згоди дати інтерв'ю виберемо випадкові числа другого рядка, який починається з чисел: 37, 68, 18. Для тривалості інтерв'ю також виберемо числа другого рядка, але почнемо з кінця і будемо рухатися з правої сторони на ліву: 59, 31, 36.

Нехай лічильник часу починається з нульового моменту, а тоді перший перехожий з'явиться в момент часу, рівний (0 + перший інтервал появи перехожого). Вважатимемо також, що кожне наступне інтерв'ю може початися зразу ж після закінчення попереднього. Моделювання процесу проведення 10 інтерв'ю одним опитувачем приведено в таблиці 6.

15-12-173

Таблиця 6

Номер перехожого	Модель появи: Випадкове число	Модель появи: Інтервал між появою перехожих, хв.	Модель появи: Час появи, хв.	Згода дати інтерв'ю: Випадкове число	Згода дати інтерв'ю: ТАК / НІ	Модель інтерв'ю: Випадкове число	Модель інтерв'ю: Тривалість, хв.	Модель інтерв'ю: Час: Початок	Модель інтерв'ю: Час: Закінчення
1	04	0	0	37	так	59	4	0	4
2	49	1	1	опитувач зайнятий					
3	45	1	2	опитувач зайнятий					
4	75	2	4	68	так	31	2	4	6
5	88	3	7	18	так	36	2	7	9
6	99	5	12	24	так	14	2	12	14
7	76	2	14	81	ні		відмова		
8	26	0	14	96	ні		відмова		
9	69	2	16	41	так	23	2	16	18
10	66	2	18	86	ні		відмова		
11	18	0	18	44	так	35	2	18	20
12	78	2	20	19	так	61	4	20	24
13	65	2	22	опитувач зайнятий					
14	31	1	23	опитувач зайнятий					
15	68	2	25	55	так	80	4	25	29
16	14	0	25	опитувач зайнятий					
17	58	1	26	опитувач зайнятий					
18	87	3	29	33	так	65	4	29	33
19	99	5	34	65	так	03	2	34	36
				10 інтерв'ю набрано					

Після початку процедури через 36 хв. завершиться 10 інтерв'ю. Використання іншої множини випадкових чисел приведе до іншого результату.

Зауваження. Якщо потрібно визначити час, необхідний для 10 інтерв'ю, необхідно зробити за такою імітаційною моделлю розрахунки для більшого числа інтерв'ю, наприклад, для 100 або 200, і тільки після цього можливо вирахувати середній час, потрібний для завершення 10 інтерв'ю.

У ситуаціях більшого масштабу, моделювання яких здійснюється за допомогою комп'ютера, дуже важливо, щоб рішення про те, які дані необхідні і про способи їх збору і представлення, було прийнято ще на початковому етапі, щоб процес моделювання можливо було продовжити. Збір даних має на меті дві основні цілі. По-перше, їх можна використати при перевірці положення про те, що модель функціонує так, як і вважаємо при її складанні. Така процедура є складовою частиною обґрунтування моделі.

Наприклад, за даними вихідного розподілу математичне сподівання тривалості інтерв'ю є:

$$M\,(\textit{тривалість інтерв'ю}) = 2 \times 0{,}45 + 4 \times 0{,}50 + 6 \times 0{,}05 = 3{,}2 \text{ хв.}$$

За даними нашої невеликої імітаційної моделі на проведення 10 інтерв'ю опитувач витрачає 28 хв., отже, середнє значення одного інтерв'ю складає 2,8 хв., що трохи менше ніж вважалося на початку.

Для вибірок такого невеликого розміру такі коливання незначні, але якби таке відхилення отримали на прикладі 100 інтерв'ю, це означало б, що модель є некоректною і потребує ретельної перевірки.

По-друге, дані можливо використовувати для одержання певної інформації безпосередньо із моделі. Наприклад, скільки часу потрібно, щоб одержати 10 інтерв'ю? – 36 хв. Яку частину часу опитувач не працював? – 8 хв. із 36. Скільки осіб пройшло повз опитувача, поки він отримував 10 інтерв'ю? – 19: 6 осіб пройшло, поки опитувач був зайнятий, 3 особи відмовилось дати інтерв'ю, у 10 осіб було взято інтерв'ю.

Таблиця 7

Номер перехожого	Модель появи			Згода дати інтерв'ю		Модель інтерв'ю					
	Випадкове число	Інтервал між появою перехожих, хв.	Час появи, хв.	Випадкове число	ТАК / НІ	Випадкове число	Тривалість хв.	Опитувач 1 Початок	Опитувач 1 Закінчення	Опитувач 2 Початок	Опитувач 2 Закінчення
1	04	0	0	37	так	59	4	0	4		
2	49	1	1	68	так	31	2			1	3
3	45	1	2	обидва опитувачі зайняті							
4	75	2	4	18	так	36	2	4	6		
5	88	3	7	24	так	14	2	7	9		
6	99	5	12	81	ні	відмова					
7	76	2	14	96	ні	відмова					
8	26	0	14	41	так	23	2	14	16		
9	69	2	16	86	ні	відмова					
10	66	2	18	44	так	35	2	18	20		
11	18	0	18	19	так	61	4			18	22
12	78	2	20	55	так	80	4	20	24		
13	65	2	22	33	так	65	4			22	26
14	31	1	23	обидва опитувач зайняті							
15	68	2	25	65	так	03	2	25	27		
10 інтерв'ю набрано											

Одна з проблем, яка виникає при побудові імітаційних моделей, полягає в тому, що необхідно точно знати, якого роду інформацію слід збирати, щоб процес моделювання можливо було продовжити. У даній ситуації невеликої розмірності існує можливість ідентифікувати кожний крок і за необхідністю повернутися на попередній крок, якщо виникла потреба в додатковій інформації.

Дане дослідження можливо розширити, якщо, наприклад, ввести в модель другого опитувача. Витрати на оплату його роботи можуть бути компенсовані скороченням часу, необхідного для отримання 10 інтерв'ю.

Введення в модель другого опитувача потребує прийняття додаткових правил, які визначають функціонування моделі. Що відбудеться, якщо обидва опитувачі будуть вільні? Хто з них підійде до найближчого наступного перехожого? Приймемо передумову про те, що першого перехожого бере на себе опитувач 1. Подібні правила необхідно вводити на початковому етапі формулювання будь-якої моделі. У даному випадку неважливо, який із опитувачів буде обраний, але при побудові всіх імітаційних моделей необхідно бути послідовним і вміти чітко сформулювати правила функціонування системи, яка моделюється. Моделювання процесу проведення 10 інтерв'ю двома опитувачами показано в таблиці 7.

Отже, в даному випадку отримання 10 інтерв'ю займе 27 хв. Як правило, на практиці середні значення обчислюються на основі більш довшого процесу моделювання. Для того, щоб прийняти рішення, чи користуватися послугами другого опитувача, чи ні, потрібні і інші дані, наприклад, про проміжки часу, коли обидва опитувачі вільні.

Після побудови імітаційної моделі необхідно оцінити її надійність, щоб переконатися в тому, що модель формалізує ситуацію з достатнім ступенем точності. Найпростіший спосіб оцінки надійності полягає в порівнянні результатів розрахунків, одержаних за даними по моделі із дійсною поведінкою системи в часі.

§2. Імітаційні моделі в системах масового обслуговування

Будь-яка імітаційна модель та її особливості формулювання залежать від специфіки проблеми, яка досліджується. Розглянемо два типи систем масового обслуговування, які ілюструють загальний алгоритм застосування імітаційного моделювання.

Приклад 1. Два стоматолога *А* і *Б* мають спільний власний кабінет, в якому проводять прийом хворих починаючи з 10.00 годин ранку. Прийомна відкривається з 9.30, а закривається в 11.00 ранку. Записи звернень пацієнтів за останні десять тижнів секретар зберігає, крім того самі лікарі ведуть облік пацієнтів, прийнятих ними в години консультацій.

Модель вхідного потоку пацієнтів представлена в таблиці 8.

Таблиця 8

Інтервал між моментами появи пацієнтів, хв.	1	2	3	4	5	6	7	8
Ймовірність	0,05	0,05	0,10	0,20	0,30	0,15	0,10	0,05

Одна частина пацієнтів реєструється у стоматолога *А*, інша – у стоматолога *Б*, причому вони утворюють дві окремі черги, які рухаються за принципом "обслуговування в порядку прибуття". Але якщо вільний інший лікар то 90% пацієнтів висловлюють бажання звернутися до нього, коли підійшла їх черга, а їхній лікар зайнятий. Розподіл тривалості консультацій обох лікарів – модель обслуговування показаний в таблиці 9.

Таблиця 9

Тривалість консультацій, хв.	4	6	8	10	12
Ймовірність	0,05	0,30	0,40	0,20	0,05

Незалежно від того, який із стоматологів консультує пацієнтів, для кожного хворого відводиться однаковий час, але в залежності від конкретної ситуації можливо ввести в модель і два типи розподілу часу консультацій окремо для кожного із лікарів.

За імітаційною моделлю, оцінити вхідний потік пацієнтів в години прийому і відповісти на наступні запитання.

1. Яке число пацієнтів чекає в приймальні в 10.00?

2. Чому дорівнює середня тривалість очікування пацієнтів прийому в черзі?

3. О котрій годині кожного із стоматологів залишає останній пацієнт?

Задача включає в себе наступні стохастичні змінні:

а) інтервал між послідовними появами пацієнтів, на основі яких розраховується час прибуття кожного пацієнта (таблиця 10).

б) лікар, до якого попадає пацієнт (таблиця 12).

в) згода пацієнта піти на прийом до іншого лікаря, якщо останній вільний (таблиця 13).

г) тривалість консультації, яка передбачається, залежить від самого пацієнта, а не від лікаря, до якого він попаде (таблиця 11).

Кожному значенню змінних поставимо у відповідність випадкові числа.

Можна почати безпосередній процес моделювання, оскільки попередня робота завершена.

Підрахунок часу почнемо вести з 9.30 ранку, вважатимемо, що перший пацієнт приходить в 9.30 + перший інтервал появи пацієнта (ІПП)

1. В 10.00 в приймальні знаходиться 5 чоловік

2. Середній час очікування пацієнта в черзі складає:

У стоматолога *А* – ≈ 39 хв. для 11 пацієнтів.

У стоматолога *Б* – ≈ 25 хв. для 11 пацієнтів.

Всього – ≈ 32 хв., причому мінімальний час очікування складає 4 хв., максимальний 54 хв.

3. Останній пацієнт піде від лікаря *А* в 11 г. 56 хв., а від лікаря *Б* – в 11 г. 46 хв.

Таблиця 10

Кількість хвилин	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
1	0,05	0,05	00-04
2	0,05	0,10	05-09
3	0,10	0,20	10-19
4	0,20	0,40	20-39
5	0,30	0,70	40-69
6	0,15	0,85	70-84
7	0,10	0,95	85-94
8	0,05	1,00	95-99

Таблиця 11

Кількість хвилин	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
4	0,15	0,05	00-04
6	0,30	0,35	05-34
8	0,40	0,75	35-74
10	0,20	0,95	75-94
12	0,05	1,00	95-99

Таблиця 12

	Ймовірність	Випадкові числа
А	0,5	0-4
Б	0,5	5-9

Таблиця 13

	Ймовірність	Випадкові числа
Так	0,8	0-7
Ні	0,2	8

Перш ніж використовувати отриману інформацію, лікарям слід змоделювати декілька прийомів пацієнтів і підрахувати середні значення всіх статистичних характеристик. Почати їм слід з того, щоб задати запитання про те, як покращити обслуговування клієнтів. Чому приймальня відкривається саме за 30 хв. до початку прийому? Чи слід ввести систему попереднього запису? Чи необхідно організовувати окрему чергу для пацієнтів, які хотіли б попасти на прийом до будь-якого лікаря? Перш ніж ввести в практику обслуговування кожного із вказаних альтернативних варіантів, слід провести моделювання кожного із них і визначити їх теоретичний ефект.

В таблиці 14 представимо імітаційну модель прийому пацієнтів двома стоматологами.

Таблиця 14

Прихід пацієнта І П П			Лікар, який обслуговує пацієнта		Підете до іншого лікаря?		Консультація: Години		Консультація: Лікар А		Консультація: Лікар Б		Тривалість очікування в черзі, хв.
Випадкове число	Хвилини	Години	Випадкове число	Лікар	Випадкове число	Так Ні	Випадкове число	Хвилини	Початок	Закінчення	Початок	Закінчення	
62	5	9.35	7	Б	5	Так	67	10			10.00	10.10	25
26	4	9.39	3	А	3	Так	36	10	10,00	10,10			21
14	3	9,42	2	А	1	Так	40	10	10,10	10,20			28
98	8	9.50	3	А	3	Так	25	8			10.10	10.18	20
85	6	9.56	4	А	7	Так	87	12	10.20	10.32			24
70	5	10.01	2	А	2	Так	51	10	10.32	10.42			31
73	5	10.06	4	А	2	Так	91	14	10.42	10.56			36
44	5	10.11	4	А	8	Так	27	8	10.56	11.04			45
10	3	10.14	6	Б	1	Так	83	12			10.18	10.30	4
01	1	10.15	8	Б	0	Так	45	10			10.30	10.40	15
14	3	10.18	6	Б	3	Так	40	10			10.40	10.50	22
13	3	10.21	6	Б	6	Так	03	6			10.50	10.56	29
17	3	10.24	4	А	2	Так	82	12	11.04	11.16			40
06	2	10.26	2	А	9	Ні	02	6	11.16	11.22			50
13	3	10.29	8	Б	1	Так	76	10			10.56	11.06	27
57	5	10.34	3	А	3	Так	89	12	11.22	11.34			48
67	5	10.39	8	Б	0	Так	60	10			11.06	11.16	27
38	4	10.43	4	А	4	Так	80	12	11.34	11.46			51
30	4	10.47	9	Б	3	Так	67	10			11.16	11.26	29
07	2	10.49	3	А	5	Так	35	10			11.26	11.36	37
12	3	10.52	4	А	1	Так	41	10	11.46	11.56			54
54	5	10.57	8	Б	2	Так	65	10			11.36	11.46	39

Приймальня закрита

Приклад 2. Фірма здійснює ремонт і продаж автомобільних покришок до коліс. Система попереднього запису відсутня, прихід клієнтів носить випадковий характер. Клієнтам відповідають, що вони можуть прийти в будь-яку зручну для них годину. За результатами спостережень за часовими інтервалами між послідовними моментами приходу клієнтів отримані дані, показані в таблиці 15 (модель інтервалів приїзду автомобілів).

Таблиця 15

Часові інтервали між прибуттям автомобілів, хв.	0	5	10	15	20	25	30	35
Ймовірність	0,05	0,10	0,15	0,20	0,18	0,16	0,12	0,04

Із точністю до хвилини був оцінений термін досмотру і заміни покришок, який змінюється в межах проміжку від 21 до 40 хв., причому поява будь-якого значення однаково ймовірна.

На даний момент майстерня має лише одну необхідну монтажну площадку, а також місце для парковки ще одного автомобіля. Крім того, поза майстернею є ще одне місце для парковки лише одного автомобіля. Отже, будь-який водій, який під'їхав в той момент , коли зайняті як монтажна площадка, так і обидва відведені для парковки місця, вимушений буде поїхати і тим самим є для фірми втраченим клієнтом. Через це фірма в середньому втрачає 60 гр. одиниць.

Проте якщо здійснити реконструкцію, то можна оснастити ще одну монтажну площадку, але місце для парковки всередині майстерні прийдеться демонтувати, хоча це не представляє проблеми, оскільки в будь-якому випадку довжина черги і порядок переміщення клієнтів залишиться незмінним. Вартість експлуатації другої монтажної площадки складає 40 гр. одиниць на годину.

Побудуємо імітаційну модель для ситуації з 25 клієнтами. Чи слід вводити в експлуатацію другу монтажну площадку?

Розв'язок. Змінними в задачі є:

1. Інтервали часу між послідовними моментами приїзду клієнтів. Слід зауважити, що такі дані зібрати досить важко, оскільки нам потрібна модель прибуття потенційних клієнтів, багато яких вимушені проїхати мимо, оскільки місця для парковки зайняті.

2. Час обслуговування автомобілів. Він являє собою 21 інтервал довжиною в одну хвилину кожний від 21 до 40 включно. Якщо всі вони однаково ймовірні, то ймовірність появи кожного значення складає $\frac{1}{20} = 0{,}05$. Розподіл інтервалів випадкових чисел для інтервалів прибуття клієнтів та для тривалості обслуговування приведений у відповідних таблицях 16, 17.

Таблиця 16

Інтервали прибуття клієнтів, хв.	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
0	0,05	0,05	00-04
5	0,10	0,15	05-14
10	0,15	0,30	15-29
15	0,20	0,50	30-49
20	0,18	0,68	50-67
25	0,16	0,84	68-83
30	0,12	0,96	83-95
35	0,04	1,00	96-99

Таблиця 17

Тривалість обслуговування, хв.	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
21	0,05	0,05	00-04
22	0,05	0,10	05-09
23	0,05	0,15	10-14
24	0,05	0,20	15-19
25	0,05	0,25	20-24
26	0,05	0,30	25-29
27	0,05	0,35	30-34
28	0,05	0,40	35-39
29	0,05	0,45	40-44
30	0,05	0,50	45-49
31	0,05	0,55	50-54
32	0,05	0,60	55-59
33	0,05	0,65	60-64

Таблиця 17

34	0,05	0,70	65-69
35	0,05	0,75	70-74
36	0,05	0,80	75-79
37	0,05	0,85	80-84
38	0,05	0,90	85-89
39	0,05	0,95	90-94
40	0,05	1,0	95-99

Процес моделювання почнемо з однієї монтажної площадки і максимальної черги, яка складається з трьох автомобілів. Встановимо облік часу на нульову відмітку, а перший клієнт прибуде в момент часу: 0 + інтервал прибуття клієнта. В процесі моделювання потоку із 25 клієнтів 10 із них поїхали через відсутність стоянки. Цей факт призводить до втрати прибутку, що дорівнює 600 гр. одиниць. Середній час очікування закінчення послуговування до того моменту, коли отримавши послугу клієнт покине майстерню, дорівнює 50 хв.

Далі побудуємо імітаційну модель для двох монтажних площадок і одного місця парковки (таблиця 19). Час прибуття клієнтів візьмемо із таблиці 18. Розподіл часу обслуговування залишиться незмінним, проте відповідні випадкові числа будуть іншими, хоча заради спрощення таблиці їх значення не приведені.

Зазначимо, що нова модель значно відрізняється від побудованої раніше, лише 2 клієнти не отримують обслуговування, а стоянка для парковки часто залишається вільною. В цілому модель краще відображає задоволення клієнтів.

Для врахування витрат слід співставити значення вартості, пов'язаної з втратою клієнтів і вартості експлуатації другої монтажної площадки. Для потоку із 25 клієнтів час її роботи склав 461 хв. Загальна вартість експлуатації другої площадки, яка відповідає потоку із 25 клієнтів, дорівнює: $461 \cdot \frac{40}{60} + 2 \cdot 50 = 407{,}3$ гр. одиниць.

У порівнянні із задачею для однієї монтажної площадки тут досягається економія в 192, 7 гр. одиниць.

Таблиця 18

Автомобіль	Модель прибуття клієнта			Розміщення автомобілів			Обслуговування, парковка				Очікування обслуговування, хв.
	Випадкове число	Інтервал прибуття клієнта	Час, починаючи з 0 хв.	Обслуговування	Площадка 1	Площадка 2	Випадкове число	Час, хв.	Початок	Кінець	
А	48	15	15	А	-	-	96	40	15	55	0
Б	27	10	25	А	Б	-	21	25	55	80	30
В	81	25	50	А	Б	В	12	23	80	103	30
Г	83	25	75	Б	В	Г	78	36	103	139	28
Д	24	10	85	В	Г	Д	32	27	139	166	54
Е	06	5	90	В	Г	Д	Е	Не може стати в чергу			
Ж	37	15	105	Г	Д	Ж	78	36	166	202	61
З	44	15	120	Г	Д	Ж	З	Не може стати в чергу			
К	11	5	125	Г	Д	Ж	К	Не може стати в чергу			
Л	49	15	140	Д	Ж	Л	26	26	202	228	62
М	66	20	160	Д	Ж	Л	М	Не може стати в чергу			
Н	09	5	165	Д	Ж	Л	Н	Не може стати в чергу			
О	94	30	195	Ж	Л	О	77	36	228	264	33
П	05	5	200	Ж	Л	О	П	Не може стати в чергу			
Р	52	20	220	Л	О	Р	36	28	264	292	44
С	17	10	230	О	Р	С	33	27	292	319	62
Т	93	30	260	О	Р	С	Т	Не може стати в чергу			
У	81	25	285	Р	С	У	93	39	319	358	34
Ф	64	20	305	С	У	Ф	13	23	358	381	54
Х	57	20	325	У	Ф	Х	82	37	381	418	56
Ц	82	25	350	У	Ф	Х	Ц	Не може стати в чергу			
Ч	59	20	370	Ф	Х	Ч	51	31	418	449	48
Ш	63	20	390	Х	Ч	Ш	90	39	449	488	59
Щ	13	5	395	Х	Ч	Ш	Щ	Не може стати в чергу			
Ю	17	10	405	Х	Ч	Ш	Ю	Не може стати в чергу			

17-12-173

Таблиця 19

Авто-мобіль	Прибуття клієнтів, починаючи з 0 хв.	Розміщення автомобілів: Площадка 1	Площадка 2	Площадка	Обслуговування: Час, хв.	1 парковка: Початок	Кінець	2 парковка: Початок	Кінець	Очікування обслуговування, хв.
А	15	А	-	-	40	15	-	-	-	0
Б	25	А	Б	-	38	-	-	25	63	0
В	50	А	Б	В	23	55	78	-	-	5
Г	75	В	Г	-	27	-	-	75	102	0
Д	85	Д	Г	-	40	85	125	-	-	0
Е	90	Д	Г	Е	23	-	-	102	125	12
Ж	105	Д	Е	Ж	36	125	161	-	-	20
З	120	Д	Е	Ж	-	З		Не може стати в чергу		
К	125	Ж	К	-	37	-	-	125	162	0
Л	140	Ж	К	Л	26	161	187	-	-	21
М	160	Ж	К	Л	-	М		Не може стати в чергу		
Н	165	Л	Н	-	29	-	-	165	194	0
О	195	О	-	-	36	195	231	-	-	0
П	200	О	П	-	24	-	-	200	224	0
Р	220	О	П	Р	37	-	-	224	261	4
С	230	О	Р	С	27	231	258	-	-	1
Т	260	Т	Р	-	37	260	297	-	-	0
У	285	Т	У	-	39	-	-	285	324	0
Ф	305	Ф	У	-	23	305	328	-	-	0
Х	325	Ф	Х	-	36	-	-	325	361	0
Ц	350	Ц	Х	-	32	350	382	-	-	0
Ч	370	Ц	Ч	-	35	-	-	370	405	0
Ш	390	Ш	Ч	-	39	390	429	-	-	0
Щ	395	Ш	Ч	Щ	21	-	-	405	426	10
Ю	405	Ш	Щ	Ю	35	-	-	426	461	21

Проте перед тим, як приймати певне рішення, процес моделювання слід продовжувати і підрахувати економію, яка буде мати місце за 1 годину роботи другої площадки.

Крім можливої суми економії тут можна обчислити середню тривалість очікування клієнтами закінчення обслуговування та час простою монтажних площадок.

§3. Імітаційне моделювання в задачах управління запасами

Приведені у попередніх параграфах алгоритми можна використати при моделюванні більш складних проблем, які виникають в управлінні запасами. За допомогою них можна враховувати невизначеність як попиту, так і терміну виконання замовлення, враховуючи зібрану інформацію, на базі якої можна побудувати розподіл ймовірностей для відповідних змінних.

Приклад 3. Автомобільна компанія виробляє легкові автомобілі, а акумулятори до них закуповує у зовнішнього постачальника. Користуючись минулим досвідом, компанія оцінила, що попит на акумулятори протягом тижня можна апроксимувати нормальним розподілом із середнім значенням 450 і стандартним відхиленням 10 для проміжку від 420 до 480.

Початковий запас акумуляторів складає 1500 штук, причому адміністрація компанії прийняла рішення здійснювати замовлення на партії акумуляторів розміром в 2000 штук, кожний раз, коли запас зменшується нижче рівня в 1000 штук. Крім того, минулий досвід показує, що інтервали часу між наданням замовлення і здійсненням поставок змінюється таким чином (таблиця 20):

Таблиця 20

Час виконання замовлення	1	2	3	4
Ймовірність	0,15	0,60	0,20	0,05

Одинична вартість збереження запасів дорівнює 0, 40 гр. одиниць на тиждень і підраховується для загального обсягу запасу, який залишився на кінець тижня. Вартість замовлення – 55 гр. одиниць, а відсутність акумуляторів на складі оцінюється в 15 гр. одиниць на тиждень.

Скориставшись імітаційною моделлю для періоду в 20 тижнів, оцінимо середню вартість проведення викладеної вище політики протягом тижня. Зауважимо, що всі розрахунки проводяться в кінці тижня, а надання замовлень і поставки за ними – на початку тижня.

Розв'язок. Змінними вважатимемо попит і час виконання замовлення. Оскільки попит апроксимується неперервним нормальним розподілом, будемо моделювати зміну попиту кроком в 5 акумуляторів. Ймовірність попиту, рівного 460 акумуляторам, буде оцінюватися з допомогою співвідношення

$$P(457{,}5 < \textit{попит} < 462{,}5).$$

Середнє значення попиту – $\frac{8857}{20} = 442{,}82$ *акумуляторів на тиждень.*

Середній розмір запасу на кінець тижня – $\frac{14571}{20} = 728{,}55$

акумуляторів на тиждень.

Середній розмір дефіциту – $\frac{1975}{20} = 98{,}75$ *акумуляторів на тиждень.*

Число замовлень поданих протягом 20 тижнів, дорівнює 4, отже,

середнє число замовлень на тиждень – $\frac{4}{20} = 0{,}2$.

Очікувана вартість на тиждень =

$$=728{,}55\cdot 0{,}40+98{,}75\cdot 20+0{,}2\cdot 55=291{,}42+1975+11=2277{,}42 \textit{ гр. одиниць.}$$

Як і в попередніх прикладах, процес моделювання слід продовжити, щоб переконатися, що досягнуті умови дійсно характеризують стаціонарний стан моделі.

Імітаційні моделі можна також застосовувати при дослідженні поведінки системи управління запасами в умовах альтернативних варіантів політики надання замовлень.

Це дозволить адміністрації підібрати той варіант, який найкращим чином відповідає поставленій меті.

Таблиця 21.

Розподіл інтервалів випадкових чисел для терміну виконання замовлення

Термін виконання, тижнів	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
1	0,15	0,15	00-14
2	0,60	0,75	15-59
3	0,20	0,95	60-94
4	0,05	1,00	95-99

Таблиця 22.

Розподіл інтервалів випадкових чисел для попиту за тиждень

Попит за тиждень	Ймовірність	Кумулятивна ймовірність	Випадкові числа
420	0,002	0,002	00-001
425	0,010	0,012	002-011
430	0,030	0,042	012-041
435	0,065	0,107	042-106
440	0,120	0,227	107-226
445	0,172	0,399	227-400
450	0,202	0,601	401-600
455	0,172	0,773	601-772
460	0,120	0,893	773-892
465	0,065	0,958	893-957
470	0,030	0,988	958-987
475	0,010	0,998	988-997
480	0,002	0,002	998-999

Таблиця 23.

Моделювання управління запасами

Тижні	Запас на початок тижня	Попит		Запас на кінець тижня	Повтор-не замов-лення Так/Ні	Час виконання замовлення		Дефі-цит
		Випад-кове число	Обсяг			Випад-кове число	Тижні	
1	1500	032	480	1020				
2	1020	745	455	565				
3	565	740	455	110	Так	97	4	
4	110	638	455	0				345
5	0	965	470	0				470
6	0	734	455	0				455
7	2000	617	455	1545				
8	1545	697	455	1090				
9	1090	638	455	635				
10	635	160	440	195	Так	75	3	
11	195	334	445	0				250
12	0	615	455	0				455
13	2000	802	460	1540				
14	1540	560	202	1338				
15	1338	112	440	898				
16	898	410	450	448	Так	12	1	
17	448	958	470	1978				
18	1978	776	460	1518				
19	1518	245	445	1073				
20	1073	761	455	618				
		Всього	8857	14571				1975

Додаток 1

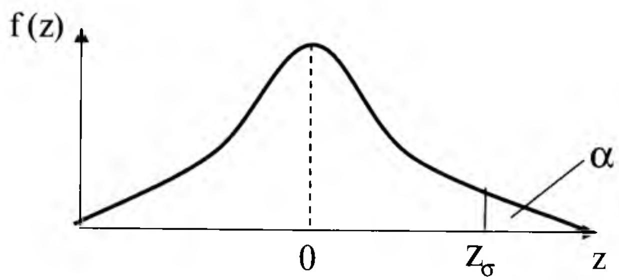
Номери днів року

Місяць / дні	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Додаток 2

Нормальний розподіл (площі)

Значення площі α краю стандартизованої нормальної кривої N(0,1) при різних значеннях z.



Приклад: площа справа від $z = 1,96$ (або зліва від $z = -1,96$) складає $\alpha = 0,02500$. Для нормальної кривої з параметрами $\mu = 10$ та $\sigma = 2$ площа справа від $x = 12$, наприклад, рівна площі справа від

, тобто $\alpha = 0,15866$.

$z \rightarrow$ ↓	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414
0.1	.4601	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
0.2	.4207	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
0.3	.3820	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
0.4	.3445	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
0.5	.3085	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
0.6	.2742	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
0.7	.2419	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
0.8	.2118	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
0.9	.1840	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
1.0	.1586	.15625	.15386	.15150	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
1.1	.1356	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
1.2	.1150	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853

1.3	.0968	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08692	.08534	.08379	.08226
1.4	.0807	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07214	.07078	.06944	.06811
1.5	.0668	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
1.6	.0548	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
1.7	.0445	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
1.8	.0359	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
1.9	.0287	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
2.0	.0227	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.0178	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.0139	.01355	.01321	.01287	.01254	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.0107	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.0082	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.0062	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00509	.00494	.00480
2.6	.0046	.00453	.00440	.00427	.00415	.00403	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.0034	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00263
2.8	.0025	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.0018	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
3.0	.0013	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
3.1	.0009	.00094	.00090	.00087	.00085	.00082'	.00079	.00076	.00074	.00071
3.2	.0006	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
3.3	.0004	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
3.4	.0003	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
3.5	.0002	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
3.6	.0001	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
3.7	.0001	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008
3.8	.0000	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
3.9	.0000	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003
4.0	.0000	.00003	.00003	.00003	.00003	.00002	.00002	.00002	.00002	.00002

α	0.4	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
z_α	.2533	.6745	.8416	1.0364	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3 0902

Додаток 3

Випадкові числа

Випадкові числа від 0 до 9, які для зручності згруповані в «блоки», можуть бути використані будь-яким систематичним чином: якщо, наприклад, необхідно здійснити випадкову вибірку 5 з 83 елементів популяції, для ідентифікації цих елементів можна використовувати два перших стовпчики, тобто числа від 01 до 83, таким чином, вибираються числа 29, 12, 02, 69 та 11. Числа більше 83 можна не враховувати. Якщо числа двох перших стовпчиків вже вичерпано, можна використовувати стовпчики 3, 4 і т.д.

29 32 95 99 57	98 08 36 97 08	65 30 47 22 00	38 60 10 01 10
12 11 80 16 17	01 03 97 59 73	74 98 73 65 85	59 74 66 37 58
87 58 22 25 55	35 72 79 28 15	69 17 42 98 72	05 47 12 40 99
02 92 42 87 57	53 53 34 55 75	83 64 09 10 19	33 29 57 62 98
69 28 63 73 98	45 61 10 43 20	08 10 43 16 81	17 62 99 09 16

11 95 68 77 86	91 76 11 63 34	15 08 35 39 37	12 74 15 00 10
06 43 41 02 13	65 23 94 48 88	88 87 03 90 77	68 98 09 17 22
68 55 98 08 39	59 85 46 66 13	42 90 86 13 29	12 38 48 27 54
41 01 06 65 10	29 29 91 86 24	45 59 04 88 17	68 31 01 91 13
46 75 71 76 88	04 42 94 41 42	39 79 14 46 13	49 37 18 28 08

80 14 13 43 24	47 61 47 42 24	24 82 12 23 54	81 33 18 96 89
30 56 60 77 80	33 67 68 31 67	73 23 45 30 55	81 51 87 68 58
53 50 41 02 98	49 97 32 43 55	75 33 51 20 99	64 76 20 80 98
84 14 75 87 37	58 51 94 06 73	27 94 23 76 77	81 72 90 45 41
08 27 89 33 87	52 24 57 50 22	22 76 60 05 79	86 58 83 88 41

97 08 50 16 41	67 40 56 13 12	68 67 36 22 08	55 76 86 45 67
97 08 37 42 48	95 90 48 34 88	19 66 38 94 64	95 07 78 23 86
70 15 04 10 34	95 57 63 75 82	88 74 28 24 66	99 52 65 36 98
06 38 31 17 38	24 98 52 67 04	95 54 89 79 45	28 05 18 60 17
63 87 79 25 86	56 74 17 45 32	53 62 09 04 86	65 87 48 82 02

17 00 56 31 14	18 56 97 91 78	85 82 06 24 88	49 17 68 51 50
17 76 35 38 19	24 47 21 09 43	09 72 02 64 66	06 78 21 70 41
57 77 32 13 60	37 68 66 11 23	30 62 97 71 02	20 13 22 00 40
35 86 97 84 91	77 73 03 37 77	50 24 54 51 40	20 66 16 34 84
72 68 64 77 89	72 77 67 45 72	25 56 78 69 72	63 86 52 07 43

91 01 78 50 50	91 99 15 36 02	74 42 55 33 19	88 35 17 58 37
70 37 55 94 53	05 78 53 23 29	15 57 70 30 88	63 20 12 64 38
11 06 17 48 24	57 50 76 81 77	30 12 92 27 19	32 63 70 97 80
60 37 89 98 61	05 51 89 47 28	34 83 98 44 66	96 84 64 64 92
37 41 11 09 04	84 38 51 91 49	23 78 53 95 40	17 73 23 04 70

28 97 38 27 97	54 95 94 54 79	93 88 00 82 39	61 93 78 07 88
14 29 17 18 84	03 10 62 15 70	01 15 06 30 97	79 55 98 79 39
81 70 53 83 20	25 26 56 55 56	33 58 74 21 76	94 24 80 12 50
08 20 90 25 43	22 81 74 51 76	53 39 59 35 34	46 55 54 73 50
61 95 25 85 66	34 76 39 98 88	45 57 64 11 17	06 43 35 27 09

64 58 31 05 45	77 25 20 02 09	36 87 63 01 10	08 01 19 19 06
75 49 97 87 79	31 66 57 89 56	56 97 71 43 65	62 36 77 50 87
66 95 10 78 42	24 91 82 74 29	00 53 44 70 18	23 48 09 90 99
85 37 61 48 07	99 13 01 16 94	37 31 28 96 59	77 62 24 95 84
06 87 15 09 48	31 18 66 87 11	19 71 67 20 93	92 02 96 15 65

11 15 95 59 69	81 75 75 88 69	95 12 75 69 18	10 60 35 31 47
03 64 44 33 46	16 02 28 14 33	61 57 28 33 96	47 49 86 85 83
68 89 57 51 94	84 09 80 37 90	52 99 85 52 49	66 63 69 11 31
43 13 09 12 00	65 69 54 11 00	20 94 22 93 90	16 82 64 27 46
42 68 71 56 74	17 71 63 80 81	02 41 49 27 92	44 44 13 45 21

12 55 09 80 30	50 34 96 31 71	19 21 79 42 17	57 04 04 19 00
88 84 87 74 01	39 99 02 75 76	61 88 97 89 06	97 15 70 26 27
49 27 92 08 87	65 12 32 27 96	11 26 30 88 48	89 29 73 50 47
46 51 54 92 06	44 85 83 14 78	68 83 33 17 03	10 99 10 17 34
34 96 78 90 18	41 44 69 10 30	48 98 32 76 12	81 29 83 02 87

80 07 15 41 15	37 42 39 24 45	48 73 61 15 44	74 40 27 26 47
39 08 51 67 63	03 76 76 86 09	39 32 62 77 60	85 37 14 69 76
51 32 57 06 49	13 01 25 98 83	44 96 92 78 37	24 49 35 54 52
84 46 17 46 71	53 88 78 3О 71	53 85 55 10 93	40 05 66 72 38
04 88 20 78 89	94 31 36 83 74	51 25 28 43 54	76 57 08 21 23

21 45 86 26 12	21 28 37 56 47	86 18 38 39 18	89 99 62 81 98
71 38 27 31 40	52 36 03 51 54	83 14 51 17 86	77 66 84 50 84
78 50 39 32 55	17 25 06 90 90	69 48 70 68 22	07 85 07 95 84
22 76 93 40 26	30 77 61 71 74	81 13 73 21 99	00 47 52 43 18
25 21 70 62 69	05 05 58 75 92	85 60 50 87 81	35 80 83 42 16

96 79 06 87 51	04 17 61 42 12	64 77 45 06 55	68 19 39 17 22
97 76 01 89 33	70 46 23 44 83	99 55 95 03 41	89 33 49 89 86
78 03 18 58 00	47 18 01 33 49	99 55 54 70 65	34 76 58 86 20
09 63 31 80 3О	17 11 75 34 81	25 45 91 80 50	25 64 70 05 48
61 33 89 72 78	98 26 56 88 66	51 69 71 48 13	71 40 57 31 22

64	83	61	76	37	68	22	25	09	82	53	59	78	66	81	66	45	56	64	78
18	93	65	67	39	81	96	44	68	46	96	50	08	71	70	81	23	32	89	61
86	84	70	40	22	89	25	42	62	69	95	98	59	26	69	55	33	62	91	88
96	57	56	48	81	92	77	95	43	50	29	89	07	58	10	83	66	04	15	74
54	35	65	28	09	99	04	41	86	60	69	54	82	74	49	86	82	25	07	29
18	79	09	01	55	60	31	19	19	48	01	89	54	63	96	70	99	15	71	84
19	78	77	63	36	52	38	88	16	92	23	42	49	79	27	15	09	94	49	35
55	71	79	75	30	29	13	32	60	07	33	73	61	89	63	64	17	15	21	39
38	58	83	62	94	73	84	48	95	17	79	74	78	38	09	37	35	75	74	70
78	29	66	85	65	45	79	70	88	92	73	24	71	71	63	70	47	56	70	28
87	55	81	22	04	62	21	45	81	82	43	96	17	70	61	80	59	10	59	00
06	98	70	24	03	20	67	45	67	65	04	61	76	89	25	13	73	06	41	16
33	08	62	21	90	70	72	16	01	23	26	05	10	33	23	23	03	07	46	08
54	03	25	45	50	40	58	15	41	07	16	24	16	63	46	64	27	85	27	47
68	90	88	08	25	70	23	82	53	40	51	91	84	67	84	08	09	76	19	19
90	18	00	18	76	88	55	07	52	00	3O	04	83	72	04	74	87	56	90	80
70	07	33	78	52	59	92	46	58	33	61	42	31	47	58	89	32	02	55	36
19	13	05	69	12	74	49	85	21	49	18	11	60	96	94	04	74	26	23	44
95	70	86	00	19	44	74	51	22	34	63	14	11	3O	48	54	71	78	97	12
65	12	41	20	32	33	72	70	71	24	51	39	43	28	90	51	14	46	17	40
15	53	57	75	61	54	95	63	75	51	28	43	39	55	90	58	01	50	31	88
60	27	72	94	00	25	71	09	76	19	66	69	44	09	39	12	60	43	02	52
57	91	58	68	24	78	33	54	25	46	08	87	72	85	28	98	89	67	68	92
40	15	42	80	71	35	81	75	95	40	04	85	70	88	19	44	75	50	63	41
23	97	89	48	74	96	60	10	40	24	33	88	86	93	30	79	96	32	25	34
48	25	55	19	87	97	39	79	66	73	50	78	72	75	08	78	66	69	13	35
24	58	57	51	61	90	39	52	91	33	77	67	76	78	40	42	05	70	73	08
60	22	38	11	98	95	66	00	95	19	32	99	90	77	55	50	86	94	41	83
84	89	06	96	10	47	83	22	11	81	19	13	48	21	71	99	16	81	88	56
30	80	70	60	93	09	74	04	99	72	67	91	91	75	20	36	08	45	28	35
23	95	78	32	20	71	90	24	20	66	09	27	14	97	94	78	67	45	20	62
48	52	58	73	69	63	54	77	76	89	09	15	50	05	85	91	12	10	12	29
33	69	72	87	15	96	24	09	14	84	41	57	16	17	78	18	46	46	23	04
71	71	53	72	84	65	86	16	70	43	62	10	33	15	61	60	80	73	18	21
29	53	27	21	49	53	31	68	21	10	17	47	35	74	84	18	58	07	17	32
17	70	60	84	24	50	82	33	67	40	15	88	50	22	54	28	39	46	14	28
98	37	60	93	52	27	20	93	10	62	90	69	27	96	44	54	01	13	81	14
16	39	86	14	17	56	74	44	76	20	77	74	52	52	56	06	99	78	52	67
53	17	93	61	99	15	08	47	04	09	46	95	53	02	57	60	02	02	99	83
05	38	06	80	55	75	49	12	95	96	98	63	46	51	49	74	97	71	95	88

Навчальне видання

Васильченко Іван Петрович
Васильченко Зоя Миколаївна

Фінансова математика

Навчальний посібник

Редактор *Василенко Людмила Геннадіївна*
Коректор *Котенко Катерина Михайлівна*
Комп'ютерна верстка *Василенко Людмила Геннадіївна*
Дизайн обкладинки *Куташенко Валерій Сергійович*

Підписано до друку 2.03.2012
Формат 60 x 84/16. Папір офсетний. Гарнітура Newton C.
Друк офсетний. Обл.видав.арк.12,6.
Ум.друк.арк. 14,5. Тираж 500 прим.
Зам. №12-173.

ТОВ «Кондор-Видавництво»
Свідоцтво Серія А01 №376847 від 28.07.2010 р.
03067, м. Київ, вул.Гарматна, 29/31
тел./факс (044) 408-76-17, 408-76-25

Віддруковано ЗАТ "ВІПОЛ". 03151, Київ, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001 р.