H. Weber
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА
ВЪ СТРАССБУРГѢ.

и

J. Wellstein
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА
ВЪ ГИССЕНѢ.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ
элементарной математики.

РУКОВОДСТВО

для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику.

ВЪ ТРЕХЪ ТОМАХЪ.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями
В. КАГАНА
приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета.

ТОМЪ I.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИЗЪ.

MATHESIS

ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, 66.
1906.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ
И
АНАЛИЗА.

Составилъ

Г. Веберъ.

Предисловіе къ русскому изданію.

Сочиненія по элементарной математикѣ рѣзко дѣлятся на два типа Одни представляютъ собой учебники въ собственномъ смыслѣ этого слова, по которымъ можно систематически изучать предметъ безъ предварительной подготовки; другія представляютъ собою трактаты, содержащіе научное изложеніе дисциплины и разсчитанные на подготовленнаго читателя. Въ то время, какъ новые учебники появляются очень часто, цѣнныя сочиненія второго рода появляются разъ въ четверть вѣка и даже рѣже. Появленіе новаго трактата такого рода всегда указываетъ на то, что въ изложеніи и въ разработкѣ дисциплины установились новыя теченія, новые взгляды; они какъ бы подводятъ итогъ работамъ цѣлаго научнаго поколѣнія. Такое значеніе въ концѣ шестидесятыхъ и въ семидесятыхъ годахъ имѣли: „Элементы математики“ Бальцера [1]) и „Алгебра“ Жозефа Бертрана [2]). Но въ послѣднюю четверть вѣка основы элементарной математики подверглись тщательному пересмотру. Глубокій анализъ, которому посвятили много труда наиболѣе выдающіеся ученые, пролилъ совершенно новый свѣтъ на элементы ариѳметики и геометріи. Научное изложеніе этихъ дисциплинъ значительно уклонилось отъ той системы, которую мы находимъ въ элементарныхъ учебникахъ. Когда г. Билибинъ предпринялъ изданіе „Алгебры“ Бертрана въ русскомъ переводѣ, онъ вынужденъ былъ уже существенно переработать и дополнить текстъ оригинала.

Дать научное и современное изложеніе основъ элементарной математики составляетъ задачу „Энциклопедіи элементарной математики“ профессоровъ Вебера и Вельштейна. Первый томъ этого сочиненія „Энциклопедія элементарной алгебры“ принадлежитъ профессору Страсбургскаго университета Г. Веберу, автору обширнаго трактата по высшей алгебрѣ. [3]) Книга содержитъ, на нашъ взглядъ, мастерское изложеніе элементовъ ариѳметики, алгебры и анализа. Обоснованіе началъ ариѳметики все еще не можетъ считаться законченнымъ; поэтому нѣкоторые пункты въ I, II и IV главѣ могутъ и здѣсь не вполнѣ удовлетворить вдумчиваго читателя; но

---

[1]) *R. Baltzer.* „Elemente der Mathematik“. Leipzig. 1865.

[2]) *J. Bertrand.* „Traité d'Algèbre“. Paris. 1862.

[3]) *H. Weber.* „Lehrbuch der Algebra.“ Braunschweig. I Bd. 1893, II Bd. 1895.

онъ найдетъ въ этомъ сочиненіи оригинальную систему изложенія основъ ариѳметики, отражающую всѣ изслѣдованія послѣдняго времени по этому вопросу. Очень обстоятельно и, главное, строго научно изложены и остальные отдѣлы; особенный же интересъ представляетъ XIX глава, содержащая, можно сказать, первую попытку дать элементарное изложеніе сложныхъ доказательствъ невозможности рѣшенія общаго уравненія 5-ой степени въ радикалахъ, неприводимости формулы Кардана и т. п. Общая теорія рядовъ и разложеніе наиболѣе важныхъ функцій изложены столь же строго, какъ и доступно. Очень удачно переработаны также авторомъ доказательства трансцендентности чиселъ e и π.

Авторъ сопровождаетъ многія предложенія историческими указаніями, свѣдѣніями объ ихъ авторахъ. Впрочемъ, свѣдѣнія эти по причинамъ, указаннымъ въ предисловіи автора, довольно скудны Но въ декабрѣ 1905 г. появилось второе изданіе I-го тома, въ которомъ историческія свѣдѣнія и литературныя указанія значительно расширены. Тѣ добавленія, которыя мы не успѣли внести въ текстъ настоящаго перевода, будутъ приложены къ концу книги.

Наконецъ, чтобы сдѣлать книгу доступной возможно болѣе широкому кругу читателей, мы сочли полезнымъ присоединить разъясняющія примѣчанія въ тѣхъ мѣстахъ, которыя изложены авторомъ слишкомъ сжато. Всѣ подстрочныя примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены цифрами, принадлежатъ намъ; тѣ же примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены звѣздочками, принадлежатъ автору. Мы полагаемъ, что съ этими дополненіями книга будетъ доступна даже хорошо подготовленному ученику старшаго класса. Первыя главы, по своей отвлеченности, труднѣе другихъ; мы полагаемъ, однако, что это не остановитъ читателя, который съ интересомъ къ дѣлу приступитъ къ чтенію этого сочиненія· Можно даже при первомъ чтеніи опустить первую главу и возвратиться къ ней по прочтеніи всей книги.

В. Каганъ.

Предисловіе автора[1].

Сочиненіе, первый томъ котораго мы въ настоящее время выпускаемъ въ свѣтъ, не должно представлять собой учебника въ собственномъ смыслѣ слова. Читателями, которыхъ мы имѣемъ въ виду, являются, во первыхъ, учителя, которые, мы надѣемся, найдутъ въ немъ полезныя указанія для выбора учебнаго матеріала, особенно для старшихъ классовъ; во вторыхъ, лица, изучающія уже математику спеціально и серьезно, которыя желаютъ пріобрѣсти для этого твердую почву путемъ освѣженія и дополненія пріобрѣтенныхъ раньше элементарныхъ знаній.

Нерѣдко уже разбирался вопросъ, что слѣдуетъ понимать подъ элементарной математикой и какъ установить границы этой области. Единственный научный принципъ, который могъ бы служить для рѣшенія этого вопроса, состоитъ въ томъ, что изъ области элементарной математики исключаютъ понятія о безконечности и о предѣлѣ; элементарная математика противопоставляется поэтому анализу безконечнаго. Съ этой точки зрѣнія къ элементарной математикѣ надо отнести все, что получается при посредствѣ извѣстныхъ простыхъ логическихъ пріемовъ; послѣдніе же даютъ при дальнѣйшемъ развитіи всю теорію чиселъ, включая труднѣйшія ея части, вообще все, что, по мнѣнію Кронекера (Kronecker), имѣетъ въ математикѣ право на существованіе; при этомъ, однако, возникаютъ затрудненія въ самомъ примѣненіи этихъ простыхъ логическихъ пріемовъ, для устраненія чего и созданъ высшій анализъ. Уже такія понятія, какъ ирраціональное число, квадратный корень, логариѳмъ, не относились бы, если стать на эту точку зрѣнія, къ элементарной математикѣ.

Въ геометріи къ элементамъ относятъ то, что выводится изъ понятій о прямой и о кругѣ и (въ пространствѣ) изъ понятій о плоскости и о шарѣ. Но уже соединеніе геометріи въ плоскости и въ пространствѣ приводитъ къ понятію о конусѣ, а отсюда къ его сѣченіямъ плоскостью, къ такъ называемымъ коническимъ сѣченіямъ. Если же мы соединимъ геометрію съ ариѳметикой, то мы неизбѣжно выйдемъ за предѣлы области, опредѣляемой для элементарной геометріи вышеприведеннымъ принципомъ; такъ, для опредѣленія понятій: площадь, длина дуги и т. п. необходимо пользоваться переходомъ къ предѣлу.

---

[1] Вскорѣ послѣ появленія этого сочиненія авторъ отпечаталъ предисловіе въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ съ нѣкоторыми дополненіями, которыя мы считаемъ существенными. Съ этими дополненіями мы и воспроизводимъ переводъ.

Итакъ, мы видимъ, что такое опредѣленіе элементарной математики, хотя и представляетъ научный интересъ, т. е. можетъ служить для разъясненія возникновенія математическихъ понятій,—тѣмъ не менѣе, не имѣетъ никакой цѣны съ педагогической точки зрѣнія, если только не ограничиваться лишь самыми простѣйшими главами элементовъ.

Поэтому мы подъ элементарной математикой понимаемъ все то, что можно цѣлесообразно примѣнять при преподаваніи математики въ школѣ, но въ томъ періодѣ его, который предшествуетъ выбору особой спеціальности. Съ такой точки зрѣнія границы этой области зависятъ, главнымъ образомъ, отъ выбора педагога. Но и математическая наука имѣетъ право голоса при обсужденіи даннаго вопроса.

Мнѣнія по вопросу о выборѣ матеріала для школьнаго преподаванія всегда будутъ и должны быть различны. Эти различія зависятъ отъ индивидуальности и научныхъ склонностей преподавателя, и, прежде всего, отъ цѣлей, къ которымъ преподаваніе стремится.

Планъ преподаванія будетъ тотъ или иной въ зависимости отъ того, что мы будемъ считать главною задачею научнаго образованія: всестороннее ли, гармоническое развитіе ума, пробужденіе дремлющихъ духовныхъ силъ и упражненіе ихъ,—или сообщеніе юношѣ извѣстной суммы полезныхъ свѣдѣній и умѣній, которыя какъ можно раньше сдѣлали бы его готовымъ къ трудной жизненной борьбѣ.

Послѣдняя задача заставила бы присоединить къ элементарному преподаванію по возможности больше матеріала для того, чтобы при переходѣ къ изученію спеціальности не было нужды останавливаться больше на подготовительной работѣ.

Очевидно, что это возможно только въ ущербъ глубинѣ и основательности; а при этомъ возникаетъ опасность, что обученіе математикѣ потеряетъ свое существенное значеніе.

Значеніе же это очень различно для различныхъ индивидуальностей. Математическая работа содержитъ въ себѣ особый элементъ творчества. И это относится не только къ творческой дѣятельности въ собственномъ смыслѣ этого слова, но сказывается и въ мелочахъ, проявляется при рѣшеніи задачъ или въ болѣе глубокомъ пониманіи и точномъ воспроизведеніи математическихъ идей. Эта дѣятельность ума въ состояніи совершенно поглотить человѣка и служитъ для лицъ, одаренныхъ соотвѣтствующими способностями, источникомъ величайшихъ наслажденій. Такое явленіе наблюдается какъ въ области абстрактныхъ представленій, въ наукѣ о числахъ, такъ и въ области пространственныхъ представленій геометріи.

Поэтому я не сомнѣваюсь въ томъ, что для особенно успѣшнаго преподаванія математики необходимо, чтобъ ученики обладали извѣстнымъ специфическимъ дарованіемъ. Отсюда отнюдь не слѣдуетъ, понятно, чтобы средне одаренному ученику нельзя было преподать въ извѣстномъ объемѣ математическихъ знаній и свѣдѣній, которыя будутъ ему нужны при изученіи всякой спеціальной отрасли знаній; это даже необходимо для логическаго воспитанія мысли.

Но такое положеніе вещей создаетъ раздвоеніе въ математическомъ преподаваніи, а это влечетъ за собой крупныя затрудненія. И преподаватель, стремящійся одновременно выполнить обѣ эти задачи—цѣлесообразнаго преподаванія выдающимся ученикамъ и среднимъ—, долженъ обладать не только основательными познаніями, но и глубокимъ математическимъ образованіемъ и пониманіемъ тонкостей и красотъ математики.

До сихъ поръ еще, послѣ почти пятидесяти лѣтъ, я вспоминаю съ благодарностью моего учителя въ Гейдельбергскомъ лицеѣ, Арнета (Arneth) и его уроки, оказавшіе на меня глубокое вліяніе. Для большинства учениковъ его преподаваніе представляло мало интереса; но тѣмъ увлекательнѣе оно было для немногихъ исключительныхъ учениковъ, которымъ было доступно его тонкое математическое чутье и пониманіе физики, опередившее господствовавшіе въ то время взгляды.

Въ тѣ времена въ южно-германскихъ гимназіяхъ математикѣ въ программѣ преподаванія отводилось второстепенное мѣсто; и со стороны большинства учителей и учениковъ она не пользовалась уваженіемъ. Поэтому преподаватель могъ вліять лишь на небольшой кружокъ склонныхъ къ математикѣ юношей. Теперь обстоятельства измѣнились къ лучшему и въ настоящее время врядъ-ли можетъ случиться, чтобы какой-нибудь ученикъ окончилъ гимназію безъ всякихъ математическихъ познаній.

Это есть несомнѣнный шагъ впередъ; но онъ не долженъ покупаться цѣною пониженія внутренняго содержанія преподаванія; нужно, чтобы при новой системѣ и болѣе способный ученикъ нашелъ необходимый для себя матеріалъ. Послѣднее же достигается не тѣмъ, что лучшихъ учениковъ выводятъ возможно дальше изъ области элементарной математики въ область высшей. Для дальнѣйшаго математическаго развитія это могло бы скорѣе служить помѣхою, чѣмъ помощью. Значительно болѣе плодотворнымъ является углубленіе содержанія элементарнаго преподаванія, въ которомъ, не выходя изъ прежнихъ границъ, можно найти неисчерпаемыя богатства матеріала; такое углубленіе дѣйствуетъ на ученика, развивая его и оживляя предметъ. При этомъ учителю должна быть дана полная свобода выбирать изъ всего многообразнаго матеріала то, что соотвѣтствуетъ его собственнымъ склонностямъ. Ибо плодотворное воздѣйствіе на ученика можетъ имѣть мѣсто только тамъ, гдѣ преподаватель относится еще съ живымъ интересомъ къ предмету.

Между прочимъ, и строгое логическое обоснованіе математики можетъ быть отнесено къ области элементовъ. Относящіеся сюда вопросы въ новѣйшее время подверглись глубокому изслѣдованію, и мы сдѣлали значительный шагъ впередъ къ ихъ разрѣшенію. Основаніямъ ариѳметики посвящены статьи Дедекинда (Dedekind): „*Was sind und was sollen die Zahlen*“ [2]) (Braunschweig, 1888, 1892) и „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ (1872, 1892). Авторъ оперируетъ въ нихъ при посредствѣ простѣйшихъ пріемовъ, которыми располагаетъ всякій здравый разсудокъ и которые не предполагаютъ никакихъ спеціальныхъ философскихъ или математическихъ свѣдѣній. Въ томъ же направленіи ведутся новѣйшія изслѣдованія по основаніямъ геометріи; правда, они не достигли еще той законченности, какою отличаются соотвѣтствующія изслѣдованія по ариѳметикѣ. Но, чтобы понимать эти вопросы, необходимо располагать извѣстною зрѣлостью сужденій, а потому съ нихъ нельзя начинать преподаванія.

Итакъ, изложеніе этихъ принципіальныхъ вопросовъ, въ видѣ своего рода философской пропедевтики, можно рекомендовать въ послѣднемъ классѣ гимназіи, хорошо подготовленномъ. Но при этомъ необходимо соблюдать осторожность, такъ какъ полупониманіе въ этой области равносильно непониманію, если не хуже его.

Для большинства учениковъ полезнѣе и интереснѣе, если преподаваніе будетъ расширено въ сторону *приложеній*. Новыя программы испытаній на званіе преподавателя средней школы въ Германіи даютъ къ этому толчокъ [3]), и тѣмъ самымъ реальному образованію отводится больше мѣста. Приложенія могутъ оживить преподаваніе математики, увеличить къ ней интересъ, а точность и чистота при черченіи придаютъ этой отрасли преподаванія немалое воспитательное значеніе.

Далѣе, извѣстныя главы теоріи чиселъ и высшей алгебры могутъ съ успѣхомъ примѣняться при элементарномъ преподаваніи. Во первыхъ, онѣ пользуются лишь элементарными математическими пріемами; а во вторыхъ, преимущество ихъ въ многочисленности примѣровъ, которыми можетъ воспользоваться учитель; рѣшеніе этихъ примѣровъ, допускающее всегда простую повѣрку, даетъ учащемуся большое удовлетвореніе. Примѣненіе этихъ главъ къ построенію правильныхъ многоугольниковъ вызываетъ и геометрическій интересъ.

Затѣмъ существуетъ рядъ знаменитыхъ задачъ, извѣстныхъ уже съ древнихъ временъ, какъ, напримѣръ, проблемы объ удвоеніи куба, о трисекціи угла при посредствѣ циркуля и линейки, рѣшеніе въ радикалахъ уравненія пятой степени, квадратура круга,—о невозможности рѣшенія которыхъ школьни-

---

[2]) Переводъ этого небольшого сочиненія, сдѣланный С. О. Шатуновскимъ, былъ помѣщенъ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, въ №№ 191 и 192. Брошюра была также выпущена отдѣльнымъ изданіемъ. [Это изданіе разошлось и въ настоящее время готовится новое. „Mathesis“.

[3]) По этимъ программамъ при государственномъ экзаменѣ на званіе преподавателя математики за одинъ изъ второстепенныхъ предметовъ можно взять прикладную математику. А при допущеніи къ экзамену засчитываются два семестра, проведенные студентомъ, вмѣсто университета, въ спеціальномъ техническомъ заведеніи.

ки постоянно слышать. Въ настоящее время наука не только располагаетъ доказательствами невозможности, но доказательствамъ этимъ она придала столь простую форму, что ими можно безъ труда воспользоваться при элементарномъ преподаванiи.

Въ теченiе самой работы матерiалъ, предназначенный для настоящаго сочиненiя, былъ увеличенъ и самый планъ былъ расширенъ. Оказалось поэтому цѣлесообразнымъ разбить сочиненiе не на два тома, какъ это предполагалось сначала, а на три. Первый томъ долженъ охватить область ариѳметики и алгебры, второй—геометрiю, а третiй будетъ посвященъ приложенiямъ. Мы надѣемся, что второй и третiй томы появятся въ непродолжительномъ времени. Благодаря этому оказалось возможнымъ удѣлить значительно больше мѣста приложенiямъ, которыя мы имѣли въ виду и при выборѣ примѣровъ въ различныхъ частяхъ текста.

Впрочемъ, согласно плану настоящаго сочиненiя, мы не разрабатывали большого числа примѣровъ. Мы не считали цѣлесообразнымъ останавливаться на примѣрахъ, имѣющихъ въ виду только упражненiя, такъ какъ въ литературѣ нѣтъ недостатка въ прекрасныхъ сборникахъ такого рода примѣровъ. Примѣры мы помѣщали лишь въ тѣхъ случаяхъ, если это казалось необходимымъ для пониманiя текста, или если примѣръ самъ по себѣ могъ представлять научный интересъ. Точно также мы не удѣляли много мѣста историческимъ и литературнымъ справкамъ. Мы имѣемъ въ настоящее время обширное сочиненiе по исторiи математики М. Кантора; въ этомъ сочиненiи мы находимъ подробныя и точныя свѣдѣнiя за огромный перiодъ отъ зарожденiя первыхъ начатковъ математики до середины XVIII столѣтiя; благодаря же тщательно составленному регистру, это сочиненiе даетъ возможность легко орiентироваться и въ отдѣльныхъ вопросахъ. Сверхъ того въ непродолжительномъ времени въ „Энциклопедiи Математическихъ наукъ“ [1]) имѣетъ появиться статья „Элементарная Математика“ М. Симона (M. Simon); мы имѣли возможность видѣть эту статью въ рукописи; онасодержитъ подробныя историческiя и литературныя указанiя по всѣмъ вопросамъ, которые могутъ быть отнесены къ элементарной математикѣ. Намъ казалось поэтому достаточнымъ ограничиваться при каждомъ собственномъ имени, появляющемся при наименованiи того или другого предложенiя, короткой замѣткой о времени и обстоятельствахъ жизни этого автора.

---

[1]) „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen,“ Leipzig. Teubner. „Энциклопедiя математическихъ наукъ со включенiемъ ихъ приложенiй“. Чрезвычайно обширное и цѣнное сочиненiе, выходящее въ настоящее время одновременно на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ Отдѣльныя статьи разрабатываются выдающимися учеными всего мiра. Въ настоящее время вполнѣ законченъ только I томъ „Ариѳметика и Алгебра“, содержащiй 1196 страницъ; вышли также многiе выпуски другихъ томовъ.

Наконецъ, мы должны указать, что настоящее сочиненіе обязано своимъ появленіемъ въ свѣтъ иниціативѣ издателя А. Акермана-Тейбнера (A. Ackermann-Teubner); онъ указалъ намъ на „Элементы Математики“ Бальцера (Baltzer), сочиненіе, которое выдержало нѣсколько изданій и въ настоящее время уже не существуетъ въ продажѣ; на такого рода сочиненіе, очевидно, имѣется спросъ. Поэтому обработать такого рода сочиненіе согласно господствующимъ въ настоящее время въ наукѣ воззрѣніямъ, представляетъ собой несомнѣнно благодарную задачу; я тѣмъ охотнѣе взялъ ее на себя, что съ 1888 г. я читалъ въ Марбургѣ, Гёттингенѣ и Страсбургѣ университетскій курсъ подъ заглавіемъ: „Энциклопедія Элементарной Математики“.

Страсбургъ, въ іюлѣ 1903 г. **Г. Веберъ.**

Предисловіе ко второму изданію.

Первый томъ нашей „Энциклопедіи элементарной математики“ встрѣтилъ благопріятный пріемъ какъ со стороны математическаго міра, такъ и со стороны критики. Но наряду съ чрезмѣрными похвалами слышались отчасти въ критикѣ, отчасти въ личныхъ разговорахъ различныя пожеланія. Я тщательно обдумалъ всѣ высказанныя мнѣ пожеланія и по скольку я находилъ ихъ въ чемъ либо правильными, я постарался удовлетворить ихъ во второмъ изданіи.

Часто высказывалось пожеланіе болѣе подробной разработки исторической части. Для того, чтобы избѣжать слишкомъ большого труда, но въ то же время не ограничиться сухимъ перечисленіемъ заглавій книгъ и хронологическихъ данныхъ, я остановился на слѣдующемъ: не стремясь все таки къ полнотѣ изложенія, подробнѣе разработать части математики, имѣющія общій интересъ и дать небольшіе эскизы изъ исторіи математики. Въ этомъ и во многихъ другихъ вопросахъ я пользовался совѣтомъ и дѣятельною помощью г. Штекеля (Stäckel) въ Ганноверѣ. Считаю своимъ долгомъ выразить ему здѣсь мою благодарность.

Изъ болѣе существенныхъ измѣненій я долженъ упомянуть еще о XXVII главѣ, которая посвящена первоначальнымъ элементамъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Въ послѣднее время въ дѣлѣ математическаго преподаванія создалось движеніе, направленное къ тому, чтобы очень рано выяснять понятія о перемѣнной величинѣ и о функціи и такимъ образомъ подготовлять учащагося къ примѣненію его познаній къ естественнымъ и техническимъ наукамъ. Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этихъ планахъ и стремленіяхъ можно найти въ изданномъ Ф. Клейномъ и Е. Рике трудѣ „Матеріалы по вопросу о преподаваніи математики и физики въ высшей школѣ“ [1]. Этотъ путь, вполнѣ естественно, приводитъ къ основнымъ понятіямъ дифференціальнаго исчисленія. Теперь возникаетъ только вопросъ,—слѣдуетъ ли просто употреблять установившіеся въ этихъ дисциплинахъ и общепринятые термины и обозначенія, или ихъ слѣдуетъ

---

[1] F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen“, Leipzig, Teubner, 1904.

избѣгать, неявно замѣняя ихъ другими. Я, однако, не могъ найти достаточнаго основанія къ тому, чтобы, давая понятія, скрывать ихъ названія. Ибо врядъ ли слѣдуетъ опасаться того, что ученикъ, нуждающійся въ математическихъ познаніяхъ при своихъ дальнѣйшихъ занятіяхъ, удовольствуется тѣми начатками, которые могли быть ему сообщены въ школѣ, и потому станетъ вести свои дальнѣйшія занятія съ меньшимъ интересомъ или съ менѣе серьезнымъ отношеніемъ къ дѣлу. Я тѣмъ охотнѣе рѣшился присоединить къ этому труду XXVII главу, что въ предыдущихъ главахъ изложено уже о безконечныхъ рядахъ все, что необходимо для пониманія этихъ основныхъ понятій, и еще потому, что въ геометріи все-таки нельзя обойти понятій о касательной, о кривизнѣ, о величинѣ поверхности, объ объемѣ и т. д.

Страсбургъ, Ноябрь 1905 г.

Книга I.

ОСНОВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

ГЛАВА I

Натуральныя числа.

§ 1. Единицы, комплексы.

1. Человѣческій духъ одаренъ способностью оріентироваться въ рядѣ смѣняющихъ другъ друга впечатлѣній, ощущеній, представленій и мыслей, выдѣляя нѣкоторыя изъ нихъ въ опредѣленную группу и разсматривая таковую, какъ единицу, какъ одинъ объектъ. Самый процессъ выдѣленія вполнѣ зависитъ отъ нашего произвола: мы руководствуемся только его цѣлесообразностью [1]). Чтобы объясняться другъ съ другомъ, мы часто даемъ такой группѣ особое названіе. Но понятіе о единицѣ ни въ какомъ случаѣ не ограничивается тѣми объектами, которые имѣютъ особыя названія въ культурныхъ языкахъ; оно не ограничивается также вещественными, конкретными объектами. Съ понятіемъ о единицѣ неразрывно связано понятіе о множествѣ.

2. Слѣдующій шагъ въ развитіи нашей мысли заключается въ томъ, что мы воспринимаемъ цѣлый рядъ объектовъ и объединяемъ ихъ въ новую единицу, которую мы называемъ единицей высшаго порядка, системой, классомъ, категоріей или, наконецъ, комплексомъ. Отдѣльные объекты такой системы называются ея элементами.

Образованіе этихъ классовъ также вполнѣ произвольно: классъ считается опредѣленнымъ, если мы имѣемъ возможность установить относительно каждаго объекта, принадлежитъ ли онъ этому классу или нѣтъ. По существу, мы можемъ соединять въ одинъ классъ самые разнообразные объекты; руководящимъ началомъ при этомъ служитъ лишь наша цѣль, заключающаяся въ томъ, чтобы разбираться въ мірѣ нашихъ представленій и объясняться съ ближними. Мы соединяемъ преимущественно въ одинъ классъ такіе объекты, которые имѣютъ извѣстное сходство, извѣстное родство въ нашемъ представленіи. Для многихъ изъ

---

[1]) Авторъ хочетъ сказать, что отъ нашего усмотрѣнія вполнѣ зависитъ, какіе именно объекты соединять въ группы и отдѣлять отъ остальныхъ объектовъ; производя то или другое отдѣленіе, мы сознательно или безсознательно руководствуемся лишь тѣмъ, что намъ удобно или полезно.

такихъ классовъ языкъ выработалъ особыя названія. Чѣмъ дальше ушло образованіе такихъ категорій, тѣмъ языкъ богаче, тѣмъ онъ болѣе развитъ.

Часто встрѣчающіяся категоріи обращаются въ нашемъ представленіи въ понятія, съ которыми мы уже не соединяемъ представленія о множествѣ[2]); такимъ образомъ мы получаемъ новыя единицы. Этимъ путемъ мы создаемъ объекты, которымъ мы присваиваемъ также извѣстное объективное существованіе—идеи. Это особенно ясно по отношенію къ числамъ: какъ ни сложно ихъ первоначальное опредѣленіе, они все таки становятся въ нашемъ представленіи отдѣльными объектами.

§ 2. Сопряженіе, мощность.

Третій видъ дѣятельности нашего духа заключается въ сопряженіи однихъ объектовъ съ другими. Каждое сужденіе, каждое предложеніе, которое не сводится къ простому наименованію какого либо объекта, представляетъ собой такого рода сопряженіе. И здѣсь мы совершенно свободны въ выборѣ тѣхъ объектовъ, которые мы сопрягаемъ другъ съ другомъ; этотъ актъ нашего духа именно и ставитъ ихъ въ опредѣленныя отношенія другъ къ другу. Но всѣ успѣхи нашего познанія именно и сводятся къ удачному и цѣлесообразному производству такого рода сопряженій.

Мы будемъ обыкновенно обозначать комплексы прописными буквами латинскаго алфавита. Положимъ, что мы имѣемъ два комплекса A и B. Мы можемъ попытаться отнести каждый элементъ комплекса A къ нѣкоторому элементу комплекса B (т. е. считать каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ нѣкоторому элементу комплекса B) при томъ такъ, чтобы два различныхъ элемента комплекса A всегда отвѣчали различнымъ же элементамъ комплекса B. Если намъ удастся выполнить такого рода сопряженіе, то мы будемъ говорить, что мы отобразили комплексъ A въ комплексѣ B или что мы установили соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B[3]). Элементы комплекса A мы бу-

---

[2] Называя, напримѣръ, „столъ“, мы обыкновенно не думаемъ о томъ, что это есть названіе категоріи, содержащей множество объектовъ.

[3]) Это основное понятіе необходимо выяснить подробнѣе. Положимъ, что комплексъ A состоитъ изъ элементовъ a, b c d,—комплексъ же B изъ элементовъ x, y, z, u, v. Будемъ считать элементъ a соотвѣтствующимъ, скажемъ, элементу x, элементъ b соотвѣтствующимъ элементу u, элементы c и d соотвѣтствующими элементамъ z и y. Этимъ будетъ установлено соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B. Это соотвѣтствіе ни въ чемъ иномъ не заключается, какъ въ томъ, что мы считаемъ каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ (въ силу нашего соглашенія) нѣкоторому элементу комплекса B. Ясно, что такое соотвѣт е можно установить многими другими способами.

демъ называть оригиналами, а элементы комплекса B, къ которымъ они отнесены, ихъ изображеніями.

Легко видѣть, какую пользу можетъ приносить такого рода сопряженіе: если комплексъ B намъ хорошо извѣстенъ, то такое соотвѣтствіе даетъ намъ возможность оріентироваться въ другомъ комплексѣ A, который до того представлялся намъ безпорядочнымъ аггрегатомъ элементовъ; каждый элементъ комплекса A какъ бы получаетъ особое названіе.

2. Такого рода соотвѣтствіе будетъ взаимнымъ, если намъ пришлось, устанавливая его, воспользоваться каждымъ элементомъ комплекса B, т. е. если къ каждому элементу комплекса B отнесенъ такимъ образомъ нѣкоторый элементъ комплекса A. Такого рода соотвѣтствіе мы будемъ называть однозначнымъ [4]).

Если два комплекса могутъ быть сопряжены такого рода однозначнымъ соотвѣтствіемъ, то говорятъ, что они имѣютъ одинаковую мощность [5]).

Предыдущія соображенія не исключаютъ возможности, что комплексъ A совпадаетъ съ комплексомъ B; иными словами, можно устанавливать соотвѣтствіе комплекса съ самимъ собой. При этомъ каждый элементъ можетъ соотвѣтствовать либо себѣ же самому, либо другому элементу. Если каждый элементъ соотвѣтствуетъ самому себѣ, то такое сопряженіе, очевидно, однозначно, и потому каждый комплексъ имѣетъ съ самимъ собой одинаковую мощность [6]).

Нужно замѣтить, что при соотвѣтствіи, связывающемъ комплексъ съ самимъ собой, каждый элементъ сопряженъ съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его оригинала и съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его изображенія; эти два элемента могутъ быть различны [7]).

Примѣрами комплексовъ одинаковой мощности могутъ служить пальцы одной руки и пальцы другой руки или точки одного отрѣзка AB

---

[4]) Соотвѣтствіе, установленное въ предыдущемъ примѣчаніи, не однозначно, потому что элементъ v комплекса B остался свободнымъ: ему не соотвѣтствуетъ ни одинъ элементъ комплекса A. Если бы въ комплексѣ B элемента v не было, то соотвѣтствіе было бы однозначнымъ.

[5]) Если бы, слѣдовательно, въ предыдущемъ примѣрѣ не было элемента v, то комплексы имѣли бы одинаковую мощность.

[6]) Пусть въ комплексѣ A (a, b, c, d) элементъ a соотвѣтствуетъ элементу b, элементъ b - элементу d, элементъ c элементу a и элементъ d элементу c. Это соглашеніе сопрягаетъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ комплексъ A съ самимъ собой. Ясно, что такого рода соотвѣтствія могутъ быть установлены 24 способами, при чемъ одно изъ нихъ относитъ каждый элементъ самому себѣ.

[7]) Такъ напримѣръ, въ соотвѣтствіи, установленномъ въ предыдущемъ примѣчаніи, элементу a отвѣчаетъ элементъ b въ качествѣ его изображенія и элементъ c въ качествѣ оригинала.

и точки другого отрѣзка CD. Чтобы убѣдиться въ послѣднемъ, представимъ себѣ, что отрѣзки приложены другъ къ другу подъ угломъ такъ, что концы A и C совпадаютъ. Если мы теперь будемъ считать соотвѣтствующей каждой точкѣ M отрѣзка AB ту точку N отрѣзка CD, которая расположена на прямой MN, параллельной BD, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между точками одного и другого отрѣзка.

3. Если комплексы A и B, а также комплексы B и C имѣютъ одинаковую мощность, то комплексы A и C также имѣютъ одинаковую мощность. Въ самомъ дѣлѣ, если произвольный элементъ a комплекса A связывается съ опредѣленнымъ элементомъ b комплекса B, а послѣдній съ элементомъ c комплекса C, то мы можемъ отнести элементъ a элементу c; при этомъ каждый элементъ комплекса A будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому элементу комплекса C; и такимъ же образомъ, исходя отъ любого элемента комплекса C, мы покажемъ, что ему соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ комплекса A.

4. Каковъ бы ни былъ комплексъ A, всегда существуютъ еще объекты β, которые не содержатся въ комплексѣ A. Такой объектъ β мы можемъ создать, напримѣръ, слѣдующимъ образомъ. Если нѣсколько объектовъ α, α', α''... соединены въ одинъ комплексъ A, то этотъ комплексъ самъ по себѣ, разсматриваемый какъ нѣкоторый объектъ, отличенъ отъ элементовъ α, α', α'' ...., и потому не содержится въ комплексѣ A.

Это соображеніе остается въ силѣ даже въ томъ случаѣ, когда комплексъ A состоитъ только изъ одного элемента, потому что мысль „объектъ α самъ по себѣ образуетъ систему“—представляетъ собой нѣчто отличное отъ объекта α *).

5. Если мы прибавимъ къ комплексу A элементъ β, въ немъ не содержащійся, то мы составимъ новый комплексъ B, который цѣлесообразно обозначить такъ:

$$B = A + \beta; \tag{1}$$

при этомъ знакъ $+$ (плюсъ) обозначаетъ операцію прибавленія, а знакъ $=$ выражаетъ, что оба символа, которые онъ соединяетъ, обозначаютъ одинъ и тотъ же объектъ.

Точно такъ же, если комплексъ A содержитъ болѣе одного элемента, то мы можемъ составить новый комплексъ такимъ образомъ, что исключимъ изъ него нѣкоторый элементъ α, а совокупность остальныхъ

---

*) Такимъ образомъ „комплексъ, содержащій всѣ существующіе объекты“, которымъ Дедекиндъ (Dedekind) пользуется для доказательства существованія безконечныхъ комплексовъ, не подходитъ подъ понятіе „комплекса“ въ томъ смыслѣ, какъ мы его понимаемъ.

элементовъ будемъ разсматривать, какъ комплексъ B. Для выраженія этого мы будемъ пользоваться обозначеніемъ:

$$B = A - \alpha, \tag{2}$$

при чемъ знакъ — (минусъ) обозначаетъ операцію отниманія.

Подъ частью комплекса A мы будемъ разумѣть такой комплексъ A', всѣ элементы котораго содержатся въ комплексѣ A.

Съ этой точки зрѣнія каждый комплексъ представляетъ часть самого себя. Комплексъ A' называется правильной частью комплекса A, если A' не совпадаетъ съ A, т. е. если комплексъ A содержитъ не только всѣ элементы комплекса A', но еще и другіе элементы. Если A' есть правильная часть комплекса A, то мы будемъ разумѣть подъ символомъ $A—A'$ комплексъ, который остается, если мы удалимъ изъ комплекса A всѣ элементы комплекса A'. Точно такъ же, если A и B суть два комплекса, то мы будемъ разумѣть подъ символомъ $A+B$ комплексъ, содержащій всѣ элементы, входящіе въ составъ комплексовъ A и B.

Если комплексы A и B имѣютъ общіе элементы, то совокупность таковыхъ образуетъ новый комплексъ, который мы будемъ называть, руководясь геометрической аналогіей, пересѣченіемъ комплексовъ A и B. Если два комплекса не имѣютъ общихъ элементовъ, то они не имѣютъ пересѣченія, — не пересѣкаются.

Если всѣ элементы комплекса B содержатся также въ A, то самый комплексъ B представляетъ собою пересѣченіе комплексовъ A и B. Въ этомъ случаѣ $A+B=A$. Если же пересѣченіе D представляетъ собой правильную часть комплекса B, то комплексъ $B—D$ уже не имѣетъ общихъ элементовъ съ комплексомъ A; въ этомъ случаѣ

$$A + B = A + (B - D). \tag{3}$$

Въ выраженіи $(B—D)$ скобки означаютъ, что этотъ комплексъ долженъ быть присоединенъ какъ одно цѣлое къ комплексу A. Такимъ образомъ выраженіе $A + (B—D)$ означаетъ нѣчто совершенно другое, чѣмъ выраженіе $(A+B)—D$. Первый символъ выражаетъ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ, которые содержатся либо въ комплексѣ A, либо въ комплексѣ B, либо въ обоихъ комплексахъ. Второй-же символъ выражаетъ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ, которые содержатся либо въ A либо въ B, но не содержатся въ обоихъ комплексахъ вмѣстѣ. Напротивъ, каковы-бы ни были комплексы A, B и C, всегда имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{4}$$
$$A + B = B + A$$

Точно такъ же, если комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ и комплексъ C составляетъ часть комплекса B, то

$$(A+B)-C=A+(B-C);$$

если же B есть часть комплекса A, а C часть комплекса B, то

$$A-(B-C)=(A-B)+C.$$

6. Если A и B суть комплексы одинаковой мощности и α представляетъ собой элементъ, не входящій въ составъ комплекса A, а β есть элементъ, не входящій въ составъ B, то комплексы $A+\alpha$ и $B+\beta$ имѣютъ одинаковую мощность.

Дѣйствительно, если установлено однозначное соотвѣтствіе между комплексомъ A и B, то достаточно отнести элементъ α къ элементу β, чтобы установить однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A+\alpha$ и $B+\beta$.

Если всѣ элементы комплекса B входятъ также въ составъ комплекса A, то мы будемъ говорить, что комплексъ B содержится въ комплексѣ A; при этомъ B либо совпадаетъ съ A, либо составляетъ правильную часть его.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе:

7. Если комплексы A и B имѣютъ одинаковую мощность и α представляетъ собой элементъ комплекса A, а β элементъ комплекса B, то $A-\alpha$ и $B-\beta$ суть комплексы одинаковой мощности.

Въ самомъ дѣлѣ, если комплексы A и B имѣютъ одинаковую мощность, то между ними можетъ быть установлено однозначное соотвѣтствіе. Если при этомъ соотвѣтствіи элементъ α связанъ съ элементомъ β, то достаточно опустить эту пару элементовъ и сохранить тѣ же соотношенія между остальными элементами, чтобы комплексъ $A-\alpha$ былъ однозначно сопряженъ съ комплексомъ $B-\beta$. Если же α связанъ съ элементомъ β' комплекса B, отличнымъ отъ элемента β, и слѣдовательно, элементъ β, въ свою очередь, связанъ съ нѣкоторымъ элементомъ α' комплекса A, отличнымъ отъ α, то достаточно опустить элементы α и β и связать другъ съ другомъ элементы α' и β'; этимъ будетъ вновь установлено однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A-\alpha$ и $B-\beta$, и они имѣютъ, слѣдовательно, одинаковую мощность, какъ это требовалось доказать.

§ 3. Числа и счетъ.

1. Согласно изложенному, мы можемъ соединить всѣ комплексы, имѣющіе съ однимъ изъ нихъ, а слѣдовательно, и другъ съ другомъ

(§ 2, 3), одинаковую мощность, въ одну систему, въ одну категорію; такого рода категоріи, вслѣдствіе присущей имъ большой общности, находятъ себѣ широкое примѣненіе. Эти категоріи называются числами. Наименованія, которыя они получаютъ, суть названія чиселъ, а знаки, которыми они обозначаются на письмѣ, называются цифрами. Если a есть знакъ или названіе такого рода категоріи, въ составъ которой входитъ комплексъ A, то говорятъ, что a есть число элементовъ комплекса A или, что комплексъ A состоитъ изъ a элементовъ, или короче, что a есть число комплекса A, или a есть значеніе этого числа, или наконецъ, что комплексъ A имѣетъ мощность a [8]).

Каждое число вполнѣ опредѣляется однимъ комплексомъ, принадлежащимъ соотвѣтствующей категоріи; такой комплексъ мы будемъ называть представителемъ этой категоріи.

Съ этой точки зрѣнія числа не представляютъ собой безсодержательныхъ символовъ, надъ которыми мы оперируемъ по произвольно созданнымъ правиламъ; это есть содержательное родовое понятіе, къ которому мы были приведены практическими потребностями нашего духа и его отношеніемъ къ внѣшнему міру [9]).

Всѣ комплексы, состоящіе только изъ одного элемента, имѣютъ одинаковую мощность; они образуютъ одну категорію, число которой называется „одинъ" и обозначается символомъ „1."

2. Если a есть число комплекса A и α представляетъ собой элементъ, не входящій въ составъ комплекса A, то мы будемъ обозначать число комплекса $A+\alpha$ символомъ $a+1$. Это число $a+1$ не мѣняется, если мы замѣнимъ комплексъ A другимъ представителемъ числа или элементъ α другимъ элементомъ, не входящимъ въ составъ комплекса A (§ 2, 6).

---

[8]) Въ примѣчаніи 3 мы разсматривали комплексъ A, состоящій изъ элементовъ a, b, c, d. Всѣ комплексы, имѣющіе ту же мощность, объединяются въ одну категорію, которой даютъ названіе „четыре", и говорятъ, что такой комплексъ состоитъ изъ четырехъ элементовъ или, что четыре есть число этого комплекса. Такимъ же образомъ и другіе комплексы распредѣляются въ категоріи, объединяющія комплексы одинаковой мощности; съ каждой такой категоріей соединяютъ особое понятіе—ея число, именуемое особымъ названіемъ. Съ этой точки зрѣнія и совокупность прямолинейныхъ отрѣзковъ представляетъ собой такую категорію (§ 2, 2). Если мы будемъ обозначать черезъ ω соотвѣтствующее ей число, то выраженіе: „комплексъ A имѣетъ ω элементовъ", будетъ означать, что комплексъ A имѣетъ ту же мощность, что и прямолинейный отрѣзокъ, или иначе, что элементы этого комплекса могутъ быть сопряжены однозначнымъ соотвѣтствіемъ съ точками прямолинейнаго отрѣзка.

[9]) Авторъ намекаетъ здѣсь на другую систему построенія основъ ариѳметики' съ точки зрѣнія которой числа представляютъ собой не болѣе какъ символы, надъ которыми по опредѣленнымъ формальнымъ законамъ совершаются операціи. Нужно сказать, что эта вторая теорія имѣетъ свои серьезныя достоинства.

Не исключена, однако, возможность, что комплексы A и $A+\alpha$ имѣютъ одинаковую мощность, такъ что a и $a+1$ выражаютъ одно и то же число.

3. Если число e отлично отъ $e+1$, то оно называется конечнымъ числомъ. Если-же число ω совпадаетъ съ числомъ $\omega+1$, то оно называется безконечнымъ числомъ [10]). Число 1 есть конечное число. Мы апеллируемъ при этомъ къ очевидности, что два объекта (напр. 1, 1) не могутъ быть однозначно сопряжены съ однимъ объектомъ (1). Число $1+1$ или 2, такимъ образомъ отлично отъ 1.

Если число e конечно, то и число $e+1$ конечно.

Это слѣдуетъ непосредственно изъ предложенія § 2,7.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть комплексы A, $A'=A+\alpha$, $A''=A+\alpha+\beta$ будутъ представители чиселъ e, $e+1$, $e+1+1$; если бы комплексы A' и A'' имѣли одинаковую мощность, то въ силу названнаго предложенія комплексы A и A' также имѣли бы одинаковую мощность, т. е. e не было бы конечнымъ числомъ.

4. Теперь мы займемся особыми комплексами Z, элементами которыхъ служатъ числа (числовыми комплексами); именно, мы будемъ обозначать символомъ Z комплексы, обладающіе слѣдующими двумя свойствами:

α) Число 1 содержится въ комплексѣ Z.

β) Если въ комплексѣ Z содержится число z, то въ немъ содержится и число $z+1$.

Эти два свойства во всякомъ случаѣ принадлежатъ комплексу, содержащему всѣ числа. Но существуютъ и другіе числовые комплексы, обладающіе этими свойствами.

Мы опредѣлимъ теперь натуральный рядъ чиселъ N, какъ пересѣченіе всѣхъ комплексовъ Z, обладающихъ свойствами α) и β). Иными словами, мы введемъ въ составъ комплекса N тѣ и только тѣ числа, которыя фигурируютъ во всѣхъ комплексахъ Z.

Согласно этому опредѣленію, число 1 во всякомъ случаѣ фигурируетъ въ комплексѣ N. Кромѣ того, если въ комплексѣ N содержится

---

[10]) Представимъ себѣ неопредѣленный рядъ точекъ на прямой линіи B, C, D, E, . . . , слѣдующихъ другъ за другомъ на одномъ и томъ же разстояніи одна отъ другой. Обозначимъ черезъ ω соотвѣтствующее этому комплексу число. Отъ точки B съ противоположной стороны на томъ же разстояніи нанесемъ точку A. Если мы присоединимъ ее къ прежнему комплексу, то получимъ новый комплексъ, которому соотвѣтствуетъ число $\omega+1$. Легко показать, что въ этомъ случаѣ новый комплексъ имѣетъ ту же мощность, что и первоначальный. Дѣйствительно, если мы отнесемъ точку A точкѣ B, точку B точкѣ C, точку C точкѣ D, вообще, отнесемъ каждую точку слѣдующей точкѣ, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между первоначальнымъ и новымъ комплексомъ. Въ данномъ случаѣ число ω совпадаетъ съ $\omega+1$, и потому ω есть безконечное число.

число n, то въ немъ содержится также число $n+1$. Эти числа n мы будемъ называть натуральными числами.

5. Всякое натуральное число конечно, т. е. если n есть натуральное число, то оно отлично отъ числа $n+1$. Въ самомъ дѣлѣ, комплексъ E всѣхъ конечныхъ чиселъ, согласно пункту 3, удовлетворяетъ условіямъ α) и β) [1]). Слѣдовательно, E представляетъ собой одинъ изъ комплексовъ Z; поэтому N входитъ въ составъ комплекса E, т. е. каждое число комплекса N конечно.

Справедливо ли также обратное предложеніе, т. е. фигурируетъ-ли каждое конечное число въ натуральномъ рядѣ, — это вопросъ, рѣшеніе котораго мы вынуждены еще отложить.

При помощи натуральнаго ряда чиселъ мы выдѣлимъ частные числовые комплексы слѣдующимъ образомъ:

6. Пусть a будетъ натуральное число; мы будемъ обозначать символомъ Z_a числовой комплексъ, удовлетворяющій слѣдующимъ двумъ требованіямъ:

α') Число $a+1$ входитъ въ составъ комплекса Z_a.

β') Если въ составъ комплекса Z_a входитъ число z, то въ его составъ входитъ также число $z+1$.

Этимъ требованіямъ удовлетворяетъ самый натуральный рядъ N; но имъ удовлетворяютъ и другіе числовые комплексы; каждый такой комплексъ, какъ сказано, мы будемъ обозначать символомъ Z_a. Теперь мы опредѣлимъ комплексъ N_a, какъ пересѣченіе всѣхъ комплексовъ Z_a. Въ такомъ случаѣ комплексъ N_a содержится въ каждомъ комплексѣ Z_a.

Согласно этому, комплексъ Z_{a+1} опредѣляется слѣдующими свойствами:

α'') Число $a+2$ фигурируетъ въ комплексѣ Z_{a+1}.

β'') Если число z содержится въ комплексѣ Z_{a+1}, то въ немъ содержится также и число $z+1$.

(Для краткости мы здѣсь пишемъ $a+2$ вмѣсто $[(a+1)+1)]$.

Отсюда слѣдуетъ, что каждый комплексъ Z_a представляетъ собой также комплексъ Z_{a+1}. Если-же комплексъ Z_{a+1} содержитъ число $a+1$, то онъ представляетъ собой въ то же время комплексъ Z_a; но если комплексъ Z_{a+1} числа $a+1$ не содержитъ, то къ нему достаточно присоединить число $a+1$, чтобы получить комплексъ Z_a. Въ обозначеніяхъ

---

[1]) Дѣйствительно, 1, какъ конечное число, фигурируетъ въ комплексѣ E; кромѣ того, если e есть конечное число, то и $e+1$ есть конечное число, т. е. если e фигурируетъ въ комплексѣ E, то въ немъ фигурируетъ также число $e+1$.

§2 это можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$Z_a = Z_{a+1} + (a+1) \text{ [12]}$$

Основываясь на этомъ, легко доказать слѣдующее предложенiе.

7. *Число 1 не содержится въ комплексѣ N_1.* Обозначимъ черезъ N' числовой комплексъ, который образуется изъ комплекса N, если удалить изъ него число 1, т. е. положимъ $N' = N - 1$. Въ такомъ случаѣ комплексъ N' удовлетворяетъ условiямъ α') и β') предыдущаго пункта при $a=1$, и потому N' представляетъ собой комплексъ Z_1. Съ другой стороны, комплексъ N' содержится во всякомъ комплексѣ Z_1; въ самомъ дѣлѣ, если къ какому-либо комплексу Z_1 присоединимъ число 1, то получимъ комплексъ Z; если бы поэтому существовалъ такой комплексъ Z_1, въ которомъ не содержался бы комплексъ N', то присоединивъ къ нему 1, мы получили бы такой комплексъ Z, въ которомъ не содержался бы комплексъ N,—что противорѣчитъ опредѣленiю натуральнаго ряда [13]).

8. *Если число a не содержится въ комплексѣ N_a, то число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_{a+1}.*

Въ самомъ дѣлѣ, если число a не входитъ въ составъ комплекса N_a, то оно не входитъ также въ составъ комплекса $N_a' = N_a - (a+1)$; поэтому комплексъ N_a' удовлетворяетъ требованiямъ α'') и β''), а потому

---

[12]) Прибавимъ къ этому еще слѣдующее: если какой-либо комплексъ Z_1 содержитъ число 1, то онъ представляетъ собой также комплексъ Z; если же въ немъ нѣтъ числа 1, то достаточно присоединить число 1, чтобы получить комплексъ Z. Дѣйствительно, условiе α) пункта 4 выполняется присоединенiемъ числа 1, условiе же β), присущее и комплексу Z_1, этимъ не нарушается, такъ какъ число $1+1$ имѣется и въ комплексѣ Z_1. Въ обозначенiяхъ § 2 это можно выразить такъ:

$$Z = Z_1 + 1$$

(ибо, если 1 входитъ въ составъ комплекса Z_1, то комплексъ Z_1+1 совпадаетъ съ комплексомъ Z_1).

[13]) Пункты 7—9 въ первоначальной редакцiи содержали погрѣшность; вслѣдствiе этого авторъ опубликовалъ позже исправленный текстъ, съ котораго и сдѣланъ переводъ; исправленный текстъ, однако, изложенъ очень сжато, и мы считаемъ нужнымъ его пояснить.

Авторъ хочетъ прежде всего показать, что N' есть комплексъ Z_1; для этого ему нужно обнаружить, что, во первыхъ, въ составъ комплекса N' входитъ число $1+1$, во вторыхъ, если въ составъ комплекса N' входитъ число n, то въ его составъ входитъ число $n+1$.

Въ составъ комплекса N число 1 входитъ; поэтому въ составъ его входитъ также и число $1+1$ (п. 4); такъ какъ изъ комплекса N удалено только число 1, то число $1+1$ въ комплексѣ N' осталось; первое требованiе, слѣдовательно, выполнено.

Обращаемся теперь ко второму требованiю; комплексъ N этому требованiю удовлетворяетъ. Если бы въ составъ комплекса N входило число x, удовлетворяющее условiю $x+1=1$, то, устраняя изъ него число 1 и сохраняя число x, мы бы, ко-представляетъ собой комплексъ Z_{a+1}. Съ другой стороны, комплексъ N'_a содержится въ каждомъ комплексѣ Z_{a+1}; дѣйствительно, $Z_{a+1} + (a+1)$ есть комплексъ Z_a (п. 6), и потому содержитъ комплексъ N_a; слѣдовательно, комплексъ Z_{a+1} содержитъ $N_a-(a+1)$, т. е. N_a'. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что $N_a'=N_{a+1}$.

9. *Число a не содержится въ комплексѣ N_a.*

Дѣйствительно, обозначимъ черезъ A комплексъ чиселъ a, удовлетворяющихъ требованію, что комплексъ N_a не содержитъ числа a; въ такомъ случаѣ, согласно п. 7, число 1 входитъ въ составъ комплекса A. Съ другой стороны, въ виду п. 8, если въ составъ комплекса A входитъ число z, то въ его составъ входитъ также число $z+1$. Вслѣдствіе этого комплексъ A представляетъ собой комплексъ Z, и потому содержитъ въ себѣ натуральный рядъ (п. 4). А такъ какъ индексъ a въ обозначеніи комплекса N_a, согласно опредѣленію (п. 6), есть натуральное число, то оно входитъ въ составъ комплекса A, т. е комплексъ N_a не содержитъ числа a.

10. *Если число b содержится въ комплексѣ N_a, то комплексъ N_b содержится въ комплексѣ N_a.*

Дѣйствительно, если комплексъ N_a содержитъ число b, то онъ содержитъ также число $b+1$; а такъ какъ онъ удовлетворяетъ также условію β'), то онъ при этихъ условіяхъ представляетъ собой комплексъ Z_b, и потому содержитъ въ себѣ комплексъ N_b (п. 6).

11. *Если число b содержится въ комплексѣ N_a, то число a не содержится въ комплексѣ N_b.*

Согласно п. 9, число a не содержится въ комплексѣ N_a; поэтому, при условіяхъ заданія, оно не можетъ содержаться и въ комплексѣ N_b,

---

нечно, нарушили это условіе Но дѣло въ томъ, что такое число x не только не входитъ въ составъ комплекса N, но не введено вовсе опредѣленіемъ п. 1, ибо его представителемъ долженъ былъ бы служить комплексъ, не имѣющій вовсе элементовъ, а это противорѣчитъ понятію о комплексѣ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что комплексъ N' удовлетворяетъ обоимъ требованіямъ, т. е представляетъ собой комплексъ Z_1. Такъ какъ комплексъ N_1 входитъ въ составъ всякаго комплекса Z_1 (п. 6), то N_1 входитъ въ составъ комплекса N'.

Съ другой стороны, можно показать, что N' входитъ въ составъ каждаго комплекса Z_1; допустимъ, дѣйствительно, что $\overline{Z}_1$ есть комплексъ Z_1, въ составъ котораго N' не входитъ; но въ такомъ случаѣ комплексъ $N'+1=N$ не входилъ бы въ составъ комплекса $\overline{Z}_1+1=Z$ (см. предыд. примѣчаніе), а это противорѣчитъ опредѣленію натуральнаго ряда N. Итакъ, комплексъ N' входитъ въ составъ всякаго комплекса Z_1, а потому входитъ въ составъ N_1, согласно опредѣленію этого комплекса. Такъ какъ N_1 входитъ также въ составъ N', то $N_1=N'$, а потому комплексъ N_1 не содержитъ числа 1.

Понявъ всѣ детали доказательства настоящаго пункта, уже нетрудно уяснить себѣ доказательства п. п 8 и 9.

такъ какъ всѣ элементы послѣдняго комплекса въ этомъ случаѣ принадлежатъ комплексу N_a (п. 10).

Мы будемъ называть комплексъ N_a совокупность натуральныхъ чиселъ, которыя больше числа a. Если b есть число комплекса N_a, то мы будемъ говорить, что число „b больше числа a“ и будемъ выражать это въ знакахъ такъ:

$$b > a.$$

Въ этой терминологіи предложенія п. п. 9, 10 и 11 могутъ быть выражены такъ:

9*. Число a не больше числа a.

10*. Если число b больше числа a, а число c больше числа b, то число c больше числа a.

11*. Если число b больше числа a, то число a не больше числа b.

12. Каждое натуральное число n, за исключеніемъ 1, можетъ быть получено изъ нѣкотораго опредѣленнаго натуральнаго числа m прибавленіемъ къ нему единицы, т. е. существуетъ опредѣленное такое число m, что $n = m + 1$. Это число m мы будемъ обозначать символомъ $n - 1$.

Чтобы доказать высказанное утвержденіе, обозначимъ черезъ N' комплексъ, содержащій всѣ числа вида $m+1$, гдѣ m есть натуральное число. Въ составъ этого комплекса входитъ число 2, т. е. $(1+1)$; кромѣ того, если число a входитъ въ составъ этого комплекса, то въ немъ содержится и число $a+1$. Слѣдовательно, комплексъ N' удовлетворяетъ требованіямъ α') и β') п. 6 при $a=1$, и потому представляетъ собой комплексъ Z_1; такимъ образомъ комплексъ N_1 входитъ въ составъ комплекса N'. Но съ другой стороны, каждое число комплекса N' входитъ въ составъ комплекса N_1, ибо послѣдній содержитъ всѣ натуральныя числа, кромѣ 1; вслѣдствіе этого комплексы N_1 и N' совпадаютъ.

Итакъ, каждое число комплекса N_1 можетъ быть представлено въ видѣ $m+1$. Что же касается того, что данному числу $m+1$ отвѣчаетъ только одно число m, то это вытекаетъ изъ предложенія § 2, 7; въ самомъ дѣлѣ, согласно этому предложенію, если A представляетъ собой комплексъ мощности $a+1$ и α есть какой либо элементъ этого комплекса, то всѣ комплексы $A - \alpha$ имѣютъ одинаковую мощность.

§ 4. Теорема о совершенной индукціи.

На этомъ точномъ опредѣленіи натуральнаго ряда чиселъ покоится предложеніе, представляющее собой одно изъ наиболѣе важныхъ и плодотворныхъ средствъ для познаванія математическихъ истинъ; это есть такъ называемое предложеніе о совершенной индукціи, или заключеніе отъ n къ $n+1$. Предложеніе это заключается въ слѣдующемъ.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ представляетъ собой нѣкоторое утвержденіе относительно неопредѣленнаго натуральнаго числа n, т. е. предложеніе, содержащее неопредѣленное натуральное число n. Если это утвержденіе оказалось справедливымъ

а) для нѣкотораго частнаго значенія неопредѣленнаго числа $n=a$,

b) а также для всякаго числа $n+1$ въ томъ случаѣ, если оно справедливо для числа n, то оно справедливо также для всѣхъ чиселъ комплекса N_a, т. е. для всѣхъ чиселъ n, которыя больше, нежели a.

Итакъ, примемъ условія а) и b) и обозначимъ черезъ S комплексъ тѣхъ чиселъ n, для которыхъ предложеніе $\mathfrak{S}_n$ справедливо. Согласно условіямъ а) и b) число $a+1$ содержится въ комплексѣ S; этотъ комплексъ удовлетворяетъ, слѣдовательно, требованіямъ α') и β') § 3. Слѣдовательно, комплексъ N_a входитъ въ составъ комплекса S. Иначе говоря, каждое число комплекса N_a (т. е. каждое число, которое больше, нежели a) принадлежитъ къ тѣмъ числамъ n, для которыхъ утвержденіе $\mathfrak{S}_n$ справедливо,—что и требовалось доказать.

Индуктивный процессъ умозаключенія, который представляетъ собою основу всѣхъ опытныхъ наукъ, заключается въ томъ, что нѣкоторый фактъ, который мы наблюдали въ отдѣльныхъ случаяхъ, принимается за общій законъ. Дальнѣйшія наблюденія либо постоянно подтверждаютъ это допущеніе, либо опровергаютъ его. Въ математикѣ такого рода процессъ можетъ служить только указаніемъ того пути, которому нужно слѣдовать при разысканіи истины; для дѣйствительнаго же доказательства необходимо дополненіе, точное обоснованіе, которое во многихъ случаяхъ достигается примѣненіемъ доказаннаго сейчасъ предложенія; оно называется поэтому предложеніемъ о совершенной индукціи.

Если предложеніе или понятіе, содержащее неопредѣленное число n, приводится отъ случая $n+1$ къ случаю n, то такой пріемъ называютъ также рекуррентнымъ.

§ 5. Расположеніе чиселъ натуральнаго ряда по величинѣ.

Пользуясь совершенной индукціей, мы можемъ доказать предложеніе, обратное тому, которое было приведено въ § 3, 11.

1. Если число a отлично отъ числа b и не содержится въ комплексѣ N_b, то число b содержится въ комплексѣ N_a.

а) Предложеніе справедливо при $a=1$. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ комплексъ N_1, выключая изъ натуральнаго ряда N одно только число 1 (§ 3, 7); поэтому каждое натуральное число, отличное отъ 1, содержится въ комплексѣ N_1.

b′) Допустимъ теперь, что предложенiе 1 доказано для нѣкотораго числа a. Пусть b будетъ число отличное отъ a. Дано, что

число a не содержится въ комплексѣ N_b и, слѣдовательно, (согласно допущенiю) число b содержится въ комплексѣ N_a.

Требуется доказать:

если число b отлично отъ $a+1$ и число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b, то число b содержится въ комплексѣ N_{a+1}.

При доказательствѣ мы можемъ также принимать, что число b отлично отъ a; если бы $b = a$, то число $a+1$ содержалось бы въ комплексѣ N_b (§ 3, 6).

Такъ какъ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b, то въ немъ не содержится и число a: если бы послѣднее входило въ составъ комплекса N_b, то въ его составъ, согласно опредѣленiю (§ 3, β′), должно было бы войти и число $a+1$.

Согласно заданiю, число b входитъ въ составъ комплекса N_a; такъ какъ при этомъ (§ 3, 7)

$$N_a = N_{a+1} + (a+1), \qquad (1)$$

число же b отлично отъ $a+1$, то оно необходимо входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, что и требовалось доказать.

Такимъ образомъ, въ силу теоремы о совершенной индукцiи, предложенiе 1 справедливо при $a=1$, а также для всѣхъ чиселъ a, содержащихъ въ комплексѣ N_1, т. е. для всѣхъ чиселъ натуральнаго ряда. Изъ всего сказаннаго (§ 3, 11 и § 5, 1) вытекаетъ слѣдующiй выводъ: если числа a и b различны, то либо число a содержится въ комплексѣ N_b, либо же число b содержится въ комплексѣ N_a; то и другое вмѣстѣ не можетъ имѣть мѣста. Это даетъ возможность расположить числа натуральнаго ряда по величинѣ.

Дополнимъ опредѣленiе § 3, 11, именно: если число b содержится въ комплексѣ N_a, то мы будемъ говорить, что число b больше числа a, а число a меньше числа b.

Слѣдовательно, если число a отлично отъ числа b и не больше, нежели b, то оно меньше числа b. Относительно двухъ различныхъ чиселъ a и b такимъ образомъ строго опредѣлено, которое изъ нихъ больше, которое меньше. Если b есть большее изъ этихъ двухъ чиселъ, то мы будемъ писать

$$b > a \text{ и } a < b;$$

одно изъ этихъ соотношенiй представляетъ собой слѣдствiе другого.

Вмѣстѣ съ тѣмъ предложеніе § 3, 10* можетъ быть дополнено слѣдующимъ образомъ.

2. Если число a меньше, нежели b, а b меньше, нежели c, то число a меньше, нежели c.

3. Если число a меньше, нежели b, то $a+1$ меньше, нежели $b+1$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$N_{a+1} = N_a - (a+1) \text{ и } N_{b+1} = N_b - (b+1). \qquad (2)$$

Если теперь $a<b$, то комплексъ N_b представляетъ собой правильную часть комплекса N_a, при чемъ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b; слѣдовательно, комплексъ N_b входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}; комплексъ-же $N_b-(b+1)$ составляетъ часть комплекса N_{a+1}. Это и составляетъ содержаніе доказываемаго предложенія 14).

4. Всѣ комплексы N_a имѣютъ одинаковую мощность—и именно ту же, что и комплексъ N.

Дѣйствительно, если отнесемъ каждый элементъ a комплекса N числу $a+1$ комплекса N_1, то между комплексами N и N_1 будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе; они имѣютъ, слѣдовательно, одинаковую мощность. Точно такъ же мы получаемъ однозначное соотвѣтствіе между комплексами N_a и N_{a+1}, если мы отнесемъ каждый элементъ n комплекса N_a элементу $n+1$ комплекса N_{a+1}; вслѣдствіе этого комплексъ N_{a+1} имѣетъ ту-же мощность, что и комплексъ N_a. Въ силу закона индукціи, мы отсюда заключаемъ, что комплексы N_a и N имѣютъ одну и ту-же мощность. Если мы обозначимъ мощность всѣхъ этихъ комплексовъ черезъ ω, то число ω совпадаетъ съ $\omega+1$, а потому ω есть безконечное или, по Кантору (G. Cantor), трансфинитное число.

---

14) Это доказательство также изложено очень сжато.

Прежде всего покажемъ, что при $b>a$ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b. Такъ какъ $b>a$, то число b принадлежитъ комплексу N_a (опр. § 3,11). Соотношеніе (1) обнаруживаетъ, что число b либо совпадаетъ при этомъ съ $a+1$, либо содержится въ комплексѣ N_{a+1}. Если число b совпадаетъ съ $a+1$, то N_b есть N_{a+1}, а потому число $a+1$ въ его составъ не входитъ (§ 3,9). Если же число b входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, то и въ этомъ случаѣ число $a+1$ не входитъ въ составъ комплекса N_b (3, 11).

По условію $b>a$, т. е. число b принадлежитъ комплексу N_a, а потому комплексъ N_b входитъ въ составъ комплекса N_a (§ 3, 10). Но такъ какъ число $a+1$ въ комплексѣ N_b не содержится, то мы можемъ исключить изъ комплекса N_a число $(a+1)$, и комплексъ N_b будетъ все же содержаться въ оставшемся комплексѣ. Но оставшійся комплексъ [соотн. (2)] есть N_{a+1}; слѣдовательно, комплексъ N_b входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, а потому въ составъ комплекса N_{a+1} входитъ и число $b+1$, принадлежащее комплексу N_b. Иными словами, $b+1>a+1$ (опр. § 3, 11).

Всякій комплексъ, имѣющій ту же мощность, что и комплексъ N, называется исчислимымъ комплексомъ.

5. Если комплексъ M содержитъ въ себѣ безконечный комплексъ A, то онъ и самъ представляетъ собой безконечный комплексъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ элементъ, не входящій въ составъ комплекса M; составимъ комплексъ $M' = M + \alpha$. Такъ какъ по условію комплексъ A безконеченъ, то онъ можетъ быть связанъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ съ комплексомъ $A + \alpha$. Если мы затѣмъ отнесемъ каждый изъ остальныхъ элементовъ комплекса M (т. е. элементы комплекса $M - A$) самому себѣ, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между M' и M. Если поэтому ω есть число комплекса M, то оно совпадаетъ съ $\omega + 1$, и потому безконечно.

6. Если мощность какого либо комплекса M не совпадаетъ съ мощностью ни одного изъ чиселъ натуральнаго ряда, то онъ содержитъ въ себѣ часть, имѣющую мощность натуральнаго ряда, а потому онъ безконеченъ.

Комплексъ M, какъ всякій комплексъ, содержитъ въ себѣ часть M_1 мощности 1. Выдѣлимъ такую часть и отнесемъ къ ней число 1.

Теперь допустимъ, что комплексъ M имѣетъ часть M_a мощности натуральнаго числа a, содержащую въ себѣ M_1. Такъ какъ самый комплексъ M не имѣетъ мощности натуральнаго числа, то комплексъ M_a представляетъ собою правильную часть комплекса M,—иначе говоря, въ комплексѣ M имѣются элементы, которыхъ нѣтъ въ комплексѣ M_a. Выбравъ одинъ опредѣленный изъ этихъ элементовъ, отнесемъ ему число $a + 1$ и присоединимъ его къ комплексу M_a. Такимъ образомъ мы составимъ комплексъ M_{a+1}, заключающій въ себѣ комплексъ M_a и представляющій собой часть комплекса M. Въ силу закона индукціи мы отсюда заключаемъ, что такое построеніе возможно для каждаго числа a,— иными словами, что каждому числу натуральнаго ряда можно отнести элементъ комплекса M, что и требовалось доказать.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что понятіе о натуральномъ числѣ совпадаетъ съ понятіемъ о конечномъ числѣ, какъ оно было установлено въ § 3, 3.

7. Во всякомъ конечномъ числовомъ комплексѣ S_a, содержащемъ a натуральныхъ чиселъ, имѣется одно наибольшее и одно наименьшее число.

Само собою разумѣется, что теорема справедлива при $a = 1$; въ этомъ случаѣ комплексъ A состоитъ изъ одного только числа, которое само можетъ быть разсматриваемо, какъ самое большее и самое меньшее число этого комплекса. Допустимъ теперь, что теорема доказана для нѣкотораго опредѣленнаго значенія a, и пусть ζ_1 будетъ самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_a. Каждый комплексъ S_{a+1} получается изъ нѣкотораго комплекса S_a путемъ присоединенія одного новаго числа ζ_0. Если теперь $\zeta_0<\zeta_1$, то ζ_0 представляетъ собою самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_{a+1}; если $\zeta_0>\zeta_2$, то ζ_1 есть самое меньшее, ζ_0 самое большее число комплекса S_{a+1}; если, наконецъ, $\zeta_1<\zeta_0<\zeta_2$, то ζ_1 есть самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_{a+1}. Въ силу совершенной индукціи, предложеніе такимъ образомъ доказано.

§ 6. Кардинальныя числа. Системы счисленія.

Если мы выключимъ изъ натуральнаго ряда N комплексъ N_a, то останутся, кромѣ числа a, только тѣ числа, которыя меньше a, ибо каждое число, большее, нежели a, принадлежитъ комплексу N_a.

Этотъ комплексъ мы будемъ обозначать черезъ E_a, такъ что

$$E_a = N - N_a.$$

Комплексъ E_a состоитъ, слѣдовательно, изъ всѣхъ чиселъ n, удовлетворяющихъ условію

$$n \leqq a,$$

или—въ словахъ—изъ всѣхъ чиселъ, которыя равны или меньше числа a.

1. Комплексъ E_{a+1} получается изъ комплекса E_a путемъ присоединенія къ послѣднему числа $a+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ комплекса N_a мы получаемъ комплексъ N_{a+1}, выключая изъ него число $a+1$; поэтому, чтобы изъ комплекса $N—N^a$ получить комплексъ $N—N_{a+1}$, къ нему нужно только присоединить число $a+1$.

2. Число E_a имѣетъ мощность a.

Доказательство ведется индуктивнымъ путемъ. Предложеніе справедливо, если $a=1$, потому что комплексъ E_1 содержитъ только одно число 1. Если же предложеніе справедливо для комплекса E_a,, то, въ силу предыдущаго предложенія, оно справедливо также для комплекса E_{a+1}.

Итакъ, E_a есть конечный комплексъ, и если $b>a$, то комплексъ E_a представляетъ собой правильную часть комплекса E_b, ибо комплексъ N_b есть правильная часть комплекса N_a.

Если поэтому комплексы A и B суть представители натуральныхъ чиселъ a и b, то комплексъ A, которому соотвѣтствуетъ меньшее число можетъ быть приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ правильною частью комплекса B; и обратно, если одинъ изъ двухъ конечныхъ комплексовъ можетъ быть приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ правильною частью другого, то ему отвѣчаетъ меньшее число.

Комплексъ E_a представляетъ собой кардинальное (количественное) число. Онъ является наиболѣе удобнымъ представителемъ категоріи, содержащей всѣ комплексы мощности a; имъ и пользуются, большей частью, для этой цѣли. Каждый конечный комплексъ A можетъ быть однозначно сопряженъ съ однимъ изъ комплексовъ E_a. Самое производство этого сопряженія называется счетомъ.[15]). Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ заключенію, что результатъ счета элементовъ комплекса не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ отсчетъ[16]). Для производства счета элементы комплекса N получаютъ опредѣленныя названія и обозначаются особыми знаками, между которыми основными являются

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Такъ какъ при счетѣ комплексовъ, содержащихъ много элементовъ, запасъ названій и знаковъ для чиселъ скоро бы истощился, то пришлось прибѣгнуть къ особому способу производства счета; способъ этотъ заключается въ томъ, что извѣстныя группы чиселъ соединяются въ новыя группы, и производится счетъ не отдѣльныхъ единицъ, а этихъ группъ.

Это сказывается уже въ языкѣ въ образованіи словъ: десять, двадцать, тридцать, сто, двѣсти, триста и т. п. Но еще совершеннѣе наша десятичная система счисленія. Въ этой системѣ, когда мы пишемъ какую нибудь цифру a, необходимо чѣмъ-нибудь обозначить, какія единицы она выражаетъ. Когда искусство счета находилось еще въ первобытномъ состояніи, то это достигалось тѣмъ, что цифры, смотря по значенію выражаемыхъ ими единицъ, помѣщались въ особыя рубрики счетной таблицы или счетной доски (Abacus). По сравненію съ этимъ было огромнымъ шагомъ впередъ, когда пришли къ мысли обозначать особымъ знакомъ, нулемъ, „0“, если какая-либо рубрика остается незанятой, т. е. не содержитъ вовсе ни одной единицы. Благодаря этой идеѣ, весь аппаратъ оказался вовсе излишнимъ, такъ какъ мѣсто, занимаемое цифрой, оказалось достаточнымъ для обозначенія единицъ, которыя она выражаетъ. Такова простая мысль, служащая основаніемъ совершенной системы счисленія, которой мы теперь пользуемся.

Это удивительно простое твореніе человѣческаго духа, вліяніе котораго на все развитіе западной культуры, какъ правильно замѣчаетъ Кронекеръ (Kronecker), даже не можетъ быть достаточно оцѣнено, возникло,

---

[15]) Если намъ нужно сосчитать элементы комплекса A (a, b, c, d), то мы относимъ элементу a число 1, элементу b число 2, элементу c число 3 и элементу d число 4. Операція закончена и заключается въ томъ, что комплексъ A однозначно сопряженъ съ комплексомъ E_4.

[16]) Потому что каждый комплексъ, какъ было показано выше, можетъ быть связанъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ только съ однимъ изъ комплексовъ E_a.

повидимому, въ Индіи и съ XII столѣтія, начинаетъ, благодаря арабамъ, медленно распространяться на Западѣ.

Интересная попытка научно произвести соединеніе числовыхъ группъ въ высшія единицы имѣется въ литературѣ древней Греціи у Архимеда (287—212 до Р. Х.) въ недошедшемъ до насъ письмѣ къ Дзейксипу (Ζεύξιππος,) а также въ другомъ сохранившемся его сочиненіи „ψαμμίτης“ („счетъ песка“). Послѣднее сочиненіе замѣчательно еще въ томъ отношеніи, что въ немъ имѣются свѣденія о космогоническихъ воззрѣніяхъ древнихъ.

Въ этомъ сочиненіи авторъ ставитъ себѣ задачей называть весьма большія числа; онъ облекаетъ эту задачу въ своеобразную форму: онъ хочетъ назвать число, превышающее число зернъ песка, которое можетъ содержать шаръ, обнимающій всю вселенную. Съ чрезвычайно утомительной тщательностью онъ вычисляетъ массу, которую онъ долженъ при этомъ принять, чтобы быть увѣреннымъ, что онъ не оцѣниваетъ ее слишкомъ малымъ числомъ *).

Чтобы называть такія громадныя числа, онъ разсматриваетъ числа до ста милліоновъ (миріадъ миріадовъ), какъ первыя числа. Число сто милліоновъ, которое въ нашей системѣ счисленія изображается 1 съ восемью нулями, образуетъ единицу вторыхъ чиселъ, которыя онъ также считаетъ до ста милліоновъ. Изъ ста милліоновъ этихъ единицъ онъ образуетъ единицу третьихъ чиселъ, которая изображается у насъ 1 съ 16 нулями. Чтобы сосчитать зерна песка, нужно дойти только до восьмыхъ чиселъ, единица которыхъ изображается у насъ черезъ 1 съ 64 нулями. Но Архимедъ въ своихъ теоретическихъ разсужденіяхъ доходитъ до

---

*) Любопытенъ способъ, которымъ Архимедъ пользуется для опредѣленія размѣровъ вселенной.

Обыкновенная точка зрѣнія, говоритъ онъ, заключается въ томъ, что земля составляетъ центръ вселенной и что радіусъ круга, по которому солнце катится вокругъ земли, представляетъ собой въ то же время радіусъ вселенной. Между тѣмъ Аристархъ Самосскій (около 270 г. до Р. Х.) допускаетъ, что солнце представляетъ собой центръ, вокругъ котораго вращается весь міръ; радіусъ же вселенной, т. е. радіусъ сферы неподвижныхъ звѣздъ, относится къ радіусу земной орбиты, какъ поверхность шара къ своему центру.

Аристархъ, очевидно, хотѣлъ этимъ сказать, что вселенная безконечна и неизмѣрима; но Архимедъ пользуется этимъ для опредѣленнаго измѣренія. Такъ какъ не можетъ быть рѣчи объ отношеніи поверхности шара къ ея центру, т. е. къ точкѣ, не имѣющей размѣровъ, то онъ толкуетъ слова Аристарха въ томъ смыслѣ, что сфера неподвижныхъ звѣздъ относится къ сферѣ земного пути такъ, какъ по обычному воззрѣнію вселенная, т. е. сфера солнечной орбиты (вокругъ земли), относится къ своему центру, т. е. къ поверхности земли. Разстояніе земли отъ солнца онъ принимаетъ при этомъ слишкомъ малымъ, относительно же размѣровъ земли его соображенія гораздо болѣе близки къ истинѣ.

чиселъ стомилліоннаго порядка, послѣднее изъ которыхъ (изображаемое у насъ единицей съ 800 000 000 нулей) образуетъ единицу второго періода, съ которой можно далѣе поступать такъ же, какъ съ простой единицей.

Въ теоретическихъ разсужденіяхъ мы будемъ часто обозначать числа буквами, какъ мы это неоднократно уже дѣлали выше, чтобы выражать короче и понятнѣе, нежели въ словахъ, что соотвѣтствующія утвержденія относятся не къ тѣмъ или другимъ опредѣленнымъ числамъ, а ко всякому числу вообще. Но эти буквы не означаютъ, какъ въ греческомъ языкѣ, опредѣленныхъ чиселъ; напротивъ того онѣ могутъ быть замѣняемы совершенно произвольными числами. Поэтому операціи надъ такого рода знаками или символами называются буквенными вычисленіями.

Предложеніе, высказывающее, что нѣкоторый символъ a имѣетъ то же значеніе, что и символъ b, называется равенствомъ; *при помощи* математическихъ символовъ оно выражается такъ:

$$a = b.$$

ГЛАВА II.

Ариѳметическія дѣйствія.

§ 7. Сложеніе.

Мы воспользуемся совершенной индукціей для доказательства слѣдующаго предложенія.

1. Если мы соединимъ два конечныхъ комплекса A и B въ одинъ комплексъ, то получимъ конечный комплексъ.

При доказательствѣ мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ элементы комплекса B принадлежатъ также комплексу A, то, комплексъ $A+B=A$, а потому представляетъ собой, согласно условію, конечный комплексъ. Если же D есть пересѣченіе комплексовъ A и B то $B-D$ есть часть комплекса B, не имѣющая общихъ элементовъ съ комплексомъ A; вмѣстѣ съ тѣмъ (§ 2, 5)

$$A+B=A+(B-D).$$

Такимъ образомъ мы можемъ съ самаго начала принять, что комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ. Если теперь комплексъ B содержитъ только одинъ элементъ β, то доказываемая теорема справедлива, потому что комплексъ $A+B$, согласно предложенію § 3, 3, представляетъ собой конечный комплексъ. Теперь примемъ, что b есть число элементовъ комплекса B и что наше предложеніе для комплексовъ A и B уже доказано, такъ что $A+B$ представляютъ собой конечный комплексъ. Если теперь β' представляетъ собой новый элементъ, не содержащійся ни въ A ни въ B, то $B+\beta'$ также есть конечный комплексъ, число элементовъ котораго есть $b+1$. Поэтому комплексъ

$$(A+B)+\beta'=A+(B+\beta'),$$

въ силу того же § 3, 3, конеченъ.

Всѣ условія, необходимыя для примѣненія совершенной индукціи, такимъ образомъ на лицо, и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

2. Итакъ, если A и B суть конечные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, а a и b суть ихъ числа, то комплексу $A+B$ также отвѣчаетъ опредѣленное число, которое мы будемъ обозначать символомъ $a+b$ и называть суммою чиселъ a и b. Это число $a+b$ не мѣняется, если мы замѣнимъ комплексы A и B другими комплексами A' и B' той же мощности. Въ самомъ дѣлѣ, каждое однозначное соотвѣтствіе, связывающее комплексъ A съ комплексомъ A' и комплексъ B съ B', устанавливаетъ также однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A+B$ и $A'+B'$. Слѣдовательно, чтобы опредѣлить число $a+b$, мы можемъ воспользоваться любыми представителями чиселъ a и b, напр. пальцами руки, монетами; вообще другого пути для этой цѣли не существуетъ. Съ ранняго дѣтства мы запечатлѣваемъ въ своей памяти результаты образованія суммы для небольшихъ чиселъ и во всякій моментъ можемъ ими воспользоваться при надобности. Наша индійская система счисленія имѣетъ то преимущество, что намъ достаточно знать результаты для немногихъ случаевъ, когда a и b взяты изъ ряда чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Образованіе суммы называютъ также сложеніемъ или складываніемъ. Относительно сложенія, на основаніи предыдущаго, легко вывести слѣдующія основныя предложенія.

3. Въ § 2, 5 мы видѣли, что

$$A+B=B+A$$

$$(A+B \;+ C = A+(B+C)$$

каковы бы ни были комплексы A, B и C. Если мы примѣнимъ это соотношеніе къ тому случаю, когда A, B и C представляютъ собой конечные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, и обозначимъ черезъ a, b и c соотвѣтствующія имъ числа, то мы отсюда получимъ:

$$a+b=b+a, \tag{1}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b. \tag{2}$$

Естественно, что числа a, b и c не должны быть необходимо различны. Первое изъ этихъ соотношеній выражаетъ, что сумма не зависитъ отъ порядка сложенія и называется перемѣстительнымъ или коммутативнымъ закономъ. Второе соотношеніе выражаетъ, что для сложенія трехъ чиселъ можно сначала составить сумму любыхъ двухъ изъ нихъ и къ послѣдней прибавить третье число. Это можетъ быть выполнено тремя способами, которые всѣ даютъ одинъ и тотъ же результатъ. Это соотношеніе извѣстно подъ названіемъ сочетательнаго или ассоціативнаго закона.

Эти законы допускаютъ еще значительное обобщеніе. Если A, B, C, ... N суть произвольные комплексы въ конечномъ числѣ, то существуетъ опредѣленный комплексъ S, который содержитъ всѣ элементы этихъ комплексовъ и никакихъ другихъ. Этотъ комплексъ можно обозначить символомъ

$$S = A + B + C + \ldots. + N.$$

При помощи совершенной индукціи, на основаніи предложенія 1, не трудно вывести, что S есть конечный комплексъ, если конечны комплексы A, B, $C \ldots N$ [1]). Если комплексы A, B, $C \ldots N$ не имѣютъ попарно никакихъ общихъ элементовъ, то число комплекса S называется суммой чиселъ комплексовъ A, B, $C \ldots N$; если обозначимъ послѣднія числа черезъ a, b, $c \ldots n$, а число комплекса S черезъ s, то мы будемъ писать

$$s = a + b + c + \ldots + n;$$

числа a, b, $c \ldots n$ мы будемъ называть слагаемыми, образующими сумму s.

Число s опредѣляется посредствомъ отсчета элементовъ въ комплексѣ S. При вычисленіи поступаютъ обыкновенно короче: пишутъ слагаемыя въ произвольной послѣдовательности и затѣмъ, начиная сверху или снизу, прибавляютъ каждое слѣдующее число къ полученной уже суммѣ. Что результатъ этого вычисленія не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, слѣдуетъ изъ того, что число не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы считаемъ элементы представляющаго его комплекса (§ 6).

Если слагаемыя написаны въ десятичной системѣ, то сначала складываютъ единицы, затѣмъ десятки, потомъ сотни и т. д.; если при сложеніи единицъ какого-либо разряда образуются единицы высшаго разряда, то ихъ нужно прибавлять къ единицамъ соотвѣтствующаго разряда. Этому обучаются уже дѣти.

4. Сложеніе содержитъ, какъ частный случай, правило, посредствомъ котораго мы въ § 3 опредѣлили по числу m непосредственно слѣдующее число $m+1$. Точно также изъ данныхъ въ § 3 опредѣленій терминовъ „больше“ и „меньше“ слѣдуетъ, что сумма нѣсколькихъ чиселъ изъ ряда a, b, $c \ldots n$ меньше, нежели сумма всѣхъ ихъ, — что сумма увеличивается съ увеличеніемъ одного или нѣсколькихъ слагаемыхъ. Все это вытекаетъ изъ того, что меньшее число соотвѣтствуетъ тому изъ двухъ комплексовъ, которое можетъ быть приведено въ однозначное соотвѣтствіе съ правильной частью другого комплекса (§ 6, 2).

---

[1]) Доказательство ведется такъ: если допустимъ, что предложеніе справедливо, когда S состоитъ изъ n комплексовъ, то въ случаѣ $n+1$ комплексовъ

$$A + B + C + \ldots + M + N = (A + B + C + \ldots + M) + N = S + N;$$

поэтому оно оправдывается въ силу предложенія 1.

§ 8. Умноженіе.

Часто приходится составлять суммы одинаковыхъ слагаемыхъ; для нихъ введено особое обозначеніе. Чтобы это объяснить, предположимъ, что намъ дано a слагаемыхъ, которыя всѣ равны b, и что нужно образовать сумму всѣхъ этихъ чиселъ, т. е. напримѣръ

$$b + b + b \qquad \text{при } a = 3$$
$$b + b + b + b \qquad \text{при } a = 4.$$

Сумму этихъ a чиселъ мы будемъ обозначать символомъ $a.b$, или $a \times b$, или, наконецъ, просто черезъ ab. Образованіе этой суммы называется умноженіемъ числа b на число a. Число b называется множимымъ, число a множителемъ, а ab—результатъ умноженія—произведеніемъ числа b на число a.

Согласно опредѣленію, $a.1 = a$; мы положимъ также[2]) $1.b = b$, такъ какъ это въ предыдущемъ опредѣленіи не содержится. Умноженіе на большаго множителя можетъ быть приведено къ умноженію на меньшихъ множителей посредствомъ рекуррентной формулы

$$(a+1)b = ab + b, \tag{1}$$

которая, въ виду установленнаго выше соглашенія, сохраняетъ свою силу также при $a=1$.

2. Первое основное предложеніе относительно умноженія есть законъ перемѣстительный, заключающійся въ томъ, что результатъ умноженія не измѣнится, если мы множимое и множителя замѣнимъ другъ другомъ; этотъ законъ выражается соотношеніемъ

$$ab = ba. \tag{2}$$

Доказательство этого предложенія можетъ быть произведено при помощи совершенной индукціи. Представимъ себѣ a конечныхъ комплексовъ B, которые мы для отличія будемъ обозначать черезъ B_1, B_2, ... B_a; допустимъ, что эти комплексы не имѣютъ попарно общихъ элементовъ, но всѣ имѣютъ одну и ту-же мощность b. Въ такомъ случаѣ произведеніе ab представляетъ собой число комплекса M, который получимъ, если соединимъ всѣ наши комплексы B_1, B_2 ... B_a.

Теперь къ каждому изъ комплексовъ B_1, B_2 ... B_a мы присоединимъ еще по одному элементу, такъ что b перейдетъ въ $b+1$. Этимъ мы присоединяемъ къ M еще a новыхъ элементовъ. Если M есть комплексъ, который мы такимъ образомъ получаемъ вмѣсто M, то онъ выражается

---

[2]) т. е. введемъ въ качествѣ особаго соглашенія

числомъ $ab + a$; съ другой стороны, тотъ же комплексъ можетъ быть выраженъ числомъ $a(b+1)$, а потому

$$ab + a = a(b+1); \qquad (3)$$

это соотношеніе сохраняетъ свою силу и при $b=1$. Но при $b=1$, въ силу самаго опредѣленія,

$$ab = ba.$$

Если мы поэтому примемъ, что соотношеніе (2) доказано для нѣкотораго значенія числа b, то изъ равенства (3) вытекаетъ

$$a(b+1) = ba + a;$$

если же мы въ соотношеніи (1) замѣнимъ a и b другъ другомъ, то получимъ

$$ba + a = (b+1)a;$$

слѣдовательно,

$$a(b+1) = (b+1)a,$$

т. е. справедливость соотношенія (2) доказана и для ближайшаго большаго значенія числа b. Мы можемъ поэтому примѣнить индуктивный пріемъ, и предложеніе доказано во всемъ его объемѣ.

Въ силу этого нѣтъ болѣе основаній къ тому, чтобы отличать другъ отъ друга множимое и множителя; ихъ называютъ обыкновенно безразлично сомножителями произведенія.

Для производства умноженія достаточно знать произведенія любыхъ двухъ чиселъ въ ряду 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9—которыя мы составляемъ непосредственнымъ счетомъ и запечатлѣваемъ въ своей памяти. Десятичная система счисленія даетъ возможность извѣстнымъ способомъ составлять произведенія большихъ чиселъ.

3. Законъ сочетательный или ассоціативный.

Представимъ себѣ теперь, что каждый элементъ во всѣхъ комплексахъ B_1, B_2, B_3 ... B_a замѣщенъ нѣкоторымъ комплексомъ C; предположимъ, что всѣ эти комплексы C имѣютъ одинаковую мощность c, но никакіе два изъ нихъ не имѣютъ общихъ элементовъ. Теперь соединимъ всѣ элементы этихъ комплексовъ C въ одинъ комплексъ P, число котораго намъ нужно опредѣлить.

Но число комплексовъ C есть ab; слѣдовательно, число всѣхъ элементовъ комплекса P равно

$$(ab)c.$$

Съ другой стороны, въ каждомъ комплексѣ B содержится bc элементовъ; а такъ какъ число комплексовъ B равно a, то число элементовъ комплекса P равно также

$$a(bc).$$

Отсюда получаемъ соотношеніе

$$(ab)c = a(bc),$$

которое и выражаетъ сочетательный или ассоціативный законъ. Сочетая этотъ законъ съ предыдущимъ, мы можемъ представить произведеніе трехъ сомножителей въ 12 различныхъ видахъ.

Правило производства вычисленія можно выразить слѣдующимъ образомъ: выбираемъ любыя два изъ данныхъ трехъ чиселъ a, b и c и перемножаемъ ихъ,—произведеніе же умножаемъ на третье число; результатъ не зависитъ отъ того, какъ мы выбрали первыя два числа, и такъ какъ поэтому скобки уже не нужны, то мы обозначимъ его такъ:

$$m = abc.$$

Число m называется произведеніемъ трехъ чиселъ a, b и c,e послѣднія называются сомножителями этого произведенія.

Доказательство перемѣстительнаго и сочетательнаго законовъ можно сдѣлать нагляднымъ, если мы представимъ себѣ элементы комплексовъ C въ видѣ шаровъ; шары эти распредѣлимъ въ ряды по c въ каждомъ ряду; b такихъ рядовъ расположимъ въ видѣ прямоугольника, и затѣмъ a такихъ прямоугольниковъ положимъ одинъ на другой. Вся фигура имѣетъ въ такомъ случаѣ видъ прямоугольной призмы, три сходящихся ребра которой соотвѣтственно содержатъ a, b и c шаровъ. Эти шары можно тремя способами распредѣлить въ прямоугольники, а каждый прямоугольникъ двумя способами разбить въ ряды.

4. Опираясь на эти предложенія, мы можемъ при помощи индукціи опредѣлить произведеніе любого числа множителей.

Положимъ, что намъ данъ комплексъ R, состоящій изъ чиселъ

$$a, b, c, d, \ldots n (R).$$

Пусть r будетъ число этихъ чиселъ. Выберемъ изъ нихъ произвольно два, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Мы получимъ комплексъ, содержащій $r—1$ чиселъ. Съ этимъ комплексомъ мы поступимъ такъ же, какъ съ прежнимъ, т. е. вновь выберемъ два числа, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Этотъ процессъ мы продолжимъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число. Это число не зависитъ отъ того, какъ мы выбирали въ каждомъ случаѣ два числа для перемноженія, т. е. не зависитъ отъ порядка нашего вычисленія. Это число мы будемъ называть произведеніемъ сомножителей a, b, c, ... n и, обозначая его черезъ m, будемъ писать

$$m = abcd \dots n,$$

т. е. попросту напишемъ сомножителей одинъ за другимъ.

Для доказательства высказаннаго утвержденія, на которое опирается это опредѣленіе [3]), мы вновь воспользуемся совершенной индукціей. Какъ было доказано въ п. п. 2 и 3, предложеніе это справедливо, когда $r=2$ или же когда $r=3$ (здѣсь нельзя ограничиться случаемъ $r=2$, т. к. при двухъ сомножителяхъ ассоціативный законъ не находитъ себѣ примѣненія). Теперь примемъ, что наше предложеніе справедливо для произведенія $r-1$ сомножителей и докажемъ, что оно при этихъ условіяхъ справедливо и для произведенія r сомножителей. Итакъ, въ системѣ R выберемъ прежде всего два числа и составимъ ихъ произведеніе; за эти числа могутъ быть взяты a и b—это зависитъ только отъ обозначенія; мы получаемъ такимъ образомъ комплексъ R', содержащій $r-1$ чиселъ

$$(ab),\ c,\ d,\ \dots.\ n.\ (R').$$

Если мы теперь начнемъ нашъ процессъ иначе, то мы можемъ либо выбрать первые два множителя отличными отъ a и b, напримѣръ составить комплексъ R'' изъ $r-1$ чиселъ

$$a,\ b,\ (cd),\ \dots.\ n\quad (R''),$$

или же сохранить одно изъ чиселъ a и b, т. е. составить, скажемъ, комплексъ

$$(ac)\ b,\ d,\ \dots.\ n\quad (R''').$$

Согласно допущенію, произведенія чиселъ въ каждомъ изъ комплексовъ R', R'' и R''' не зависятъ отъ порядка вычисленія; вслѣдствіе этого вычисленіе можно продолжать такъ, чтобы послѣ перваго-же пріема комплексы R' и R'', а также комплексы R' и R''' дали тождественные результаты; именно, комплексы R' и R'', очевидно, могутъ дать комплексъ

$$(ab),\ (cd),\ \dots.\ n;$$

комплексы-же R' и R''' могутъ дать результатъ

$$(abc),\ d,\ \dots.\ n.$$

А такъ какъ R', какъ уже было сказано, во всякомъ случаѣ даетъ одно и то же окончательное произведеніе, то то же произведеніе даютъ комплексы R'' и R'''.

5. Изъ соотвѣтствующихъ предложеній относительно сложенія не-

---

[3]) т. е. что результатъ не зависитъ отъ порядка процесса

посредственно вытекаетъ, что произведеніе двухъ сомножителей возрастаетъ съ каждымъ изъ нихъ, т. е. если

$$a > a',$$

то

$$ab > a'b;$$

и подавно, если

$$a > a' \quad \text{и } b > b',$$

то

$$ab > a'b'.$$

Посредствомъ индукціи отсюда легко вывести предложеніе, что произведеніе какого угодно числа сомножителей возрастаетъ, если увеличимъ нѣкоторые изъ его множителей, а остальные оставимъ безъ измѣненія. Какъ слѣдствіе отсюда, получаемъ также, что произведеніе ac лишь въ томъ случаѣ равно произведенію bc, если $a = b$.

§ 9. Произведенія суммъ.

1. Положимъ, что въ произведеніи двухъ сомножителей одинъ изъ нихъ представляетъ собой сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ. Въ этомъ случаѣ произведеніе можно представить въ видѣ суммы такого же числа слагаемыхъ, не производя сложенія предварительно. Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно помножить сумму r слагаемыхъ

$$S = a + b + c + \ldots. + n$$

на число m; согласно опредѣленію умноженія, это произведеніе равно суммѣ m слагаемыхъ, равныхъ a, m слагаемыхъ, равныхъ b, и т. д....,—m слагаемыхъ, равныхъ n. Такъ какъ мы можемъ соединять слагаемыя въ какія угодно группы и производить сложеніе въ какомъ-угодно порядкѣ, то мы можемъ соединить m слагаемыхъ, равныхъ a, т. е. составить произведеніе ma, затѣмъ взять всѣ слагаемыя b, т. е. составить произведеніе mb, и наконецъ составить произведеніе mn. Такимъ образомъ мы получимъ

$$ms = ma + mb + mc + \ldots. + mn.$$

Чтобы показать, что намъ нужно помножить всю сумму $a + b + \ldots. + n$, нужно воспользоваться скобками; сообразно этому, пишемъ

$$m\ (a+b+c+\ldots.+n) = ma+mb+mc+\ldots.+mn. \qquad (1)$$

Въ виду-же закона перемѣстительнаго при умноженіи, мы отсюда получаемъ также

$$(a+b+c+\ldots.+n)m = am+bm+cm+\ldots.+nm., \qquad (2)$$

Часто случается, что сумма дана въ формѣ

$$ma + mb + mc + \dots + mn,$$

но что по тѣмъ или инымъ причинамъ выгоднѣе представить ее въ одной изъ формъ

$$m(a+b+c+\dots+n) \text{ или } (a+b+c+\dots n+)m.$$

Эта операція называется вынесеніемъ за скобки множителя m.

2. Если второй сомножитель m также представляетъ собою сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, такъ что

$$m = a' + b' + c' + \dots + n',$$

то въ правой части равенствъ (1) и (2) можно вновь примѣнять то же самое правило; такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы составить произвденіе двухъ суммъ

$$(a+b+c+\dots+n)(a'+b'+c'+\dots+n'),$$

перемножаемъ каждое слагаемое одной суммы на каждое слагаемое другой суммы и складываемъ всѣ полученныя такимъ образомъ произведенія.

Если первая сумма содержитъ r, а вторая r' слагаемыхъ, то произведеніе содержитъ rr' слагаемыхъ, потому что каждое изъ r слагаемыхъ въ правой части равенства (2) разлагается на r' слагаемыхъ.

Вмѣсто того, чтобы обозначать рядъ чиселъ послѣдовательными буквами a, b, c ..., часто пользуются одной и той же буквой, напримѣръ a, присоединяя къ ней указатели или „индексы“:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \dots\ a_r.$$

Самый индексъ часто также обозначаютъ буквой, которая можетъ имѣть значеніе 1, 2, 3 .... r, напримѣръ,

$$a_i \quad i = 1,\ 2, 3\ \dots\ r.$$

Сумму s чиселъ a_1 a_2, a_3 .... a_r можно въ этихъ обозначеніяхъ выразить такъ:

$$s = \sum_{i=1}^{r} a_i,$$

гдѣ знакъ Σ служитъ для сокращеннаго обозначенія слова „сумма“, числа 1 и r называются предѣлами индекса i. Если указаніе этихъ предѣловъ представляется излишнимъ, то пишутъ короче

$$s = \sum^{i} a_i.$$

Въ этихъ обозначеніяхъ содержаніе предложенія 2 можетъ быть выражено такъ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r'} b_j\right) = \sum^{i,j} a_i\, b_j. \qquad (3)$$

Это предложеніе можетъ быть также распространено на произведеніе нѣсколькихъ множителей, напримѣръ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right)\left(\sum_{h=1}^{t} c_h\right) = \sum^{i,j,h} a_i\, b_j\, c_h. \qquad (4)$$

Выраженіе вида $a+b$, гдѣ a и b суть неопредѣленныя числа, называютъ двучленомъ или биномомъ. Точно такъ же выраженіе $a+b+c$ называется трехчленомъ, или триномомъ, и вообще сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ, обозначенныхъ буквами, называютъ многочленомъ, или полиномомъ. Отдѣльныя слагаемыя называются членами полинома.

§ 10. Возвышеніе въ степень.

1. Сложеніе равныхъ слагаемыхъ привело насъ къ умноженію; точно такъ же умноженіе равныхъ сомножителей приводитъ къ новому дѣйствію— возвышенію въ степень.

Положимъ, что намъ нужно составить произведеніе n сомножителей, которые всѣ равны между собой—именно равны, скажемъ, числу a. Результатъ этой операціи называется n-ой степенью числа a и обозначается символомъ a^n, такъ что

$$a.a.a \,\ldots\, a = a^n; \qquad (1)$$

въ лѣвой части этого равенства подразумѣваемъ n сомножителей; число a называется основаніемъ степени; говорятъ также короче „a въ n-ой степени". Вычислить n-ую степень числа a значитъ „возвысить число a въ n-ую степень".

Первая степень числа a равна основанію a

$$a^1 = a. \qquad (2)$$

Такъ какъ произведеніе всякаго числа на 1 даетъ въ результатѣ множимое, то при любомъ показателѣ n

$$1^n = 1. \qquad (3)$$

Въ частности, въ виду геометрическихъ приложеній, вторая степень числа a часто называется квадратомъ числа a, а третья степень—кубомъ этого числа.

Основная теорема относительно степеней, которая выводится непосредственно изъ опредѣленія, заключается въ слѣдующемъ:

2. Чтобы перемножить двѣ степени одного и того же основанія, достаточно сложить показателей; въ символахъ:

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{4}$$

Справедливость этого равенства вытекаетъ изъ того, что справа и слѣва мы имѣемъ $m+n$ множителей, равныхъ a. Это предложеніе при помощи индукціи легко обобщается на произвольное число множителей.

$$a^m . a^n \dots a^q = a^{m+n+\dots+q}, \tag{5}$$

каковы бы ни были числа $m, n, \dots q$ и каково бы ни было число ихъ r.

3. Если въ равенствѣ (5) всѣ показатели равны между собой, то оно выражаетъ слѣдующую вторую теорему о степеняхъ:

Чтобы возвысить степень въ новую степень, достаточно перемножить показателей, т. е.:

$$(a^m)^r = a^{mr}.$$

4. Чтобы возвысить въ степень произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно возвысить въ эту степень каждый изъ сомножителей въ отдѣльности и полученныя произведенія перемножить:

$$(abc\dots)^n = a^n b^n c^n \dots$$

Если здѣсь вновь будемъ считать всѣ основанія $a, b, c \dots$ равными между собой, то мы, въ силу соотношенія (5), вновь получимъ предложеніе 3.

5. Если число a больше 1, то a^n тѣмъ больше, чѣмъ больше показатель n; можно также выбрать число n настолько большимъ, чтобы a^n было больше любого заданнаго числа c. Въ этомъ легко убѣдиться индуктивнымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, утвержденіе справедливо, если $c = 1$, потому что даже a^1 уже больше 1.

Если же $a^n > c$, то $a^{n+1} > ac > c+1$. Такимъ образомъ, если наше утвержденіе справедливо для нѣкотораго значенія c, то оно справедливо также для $c+1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, если $a^n > c$ для нѣкотораго значенія m показателя n, то тѣмъ болѣе $a^n > c$, если n имѣетъ значеніе большее, нежели m.

6. Въ основаніи нашей десятичной системы счисленія лежатъ степени числа 10. Число 10^n изображается 1 съ n нулями и образуетъ единицу n-го разряда. Число, изображаемое r цифрами $a, b, c \dots m, n$, имѣетъ значеніе

$$a 10^r + b 10^{r-1} + c 10^{r-2} + \dots + m 10 + n. \tag{7}$$

Но чтобы мѣсто, занимаемое цифрой, могло служить для обозначенія степени, необходимо также указать, какія степени вовсе отсутствуютъ; для этого служитъ знакъ 0 (нуль), который тоже принято считать цифрой. (Собственно говоря слово „цифра“ первоначально обозначало только 0, и только позже это названіе было распространено на остальные знаки, выражающіе числа). Сообразно съ этимъ въ формулѣ (7) подъ a, b, c ..., m, n нужно разумѣть одинъ изъ знаковъ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Если при нѣкоторомъ вычисленіи число единицъ какого-либо разряда превышаетъ 9, то нужно пользоваться формулой

$$(a+10).10^r = 10^{r+1} + a10^r.$$

Такимъ образомъ правило умноженія чиселъ въ десятичной системѣ основывается, какъ мы видимъ, на предложеніи § 9, 2.

При возвышеніи въ степень не имѣютъ мѣста ни перемѣстительный ни сочетательный законы, потому что a^b имѣетъ другое значеніе, нежели b^a (напр. $a^1=a$, $1^a=1$); точно такъ же $a^{(m^r)}$ имѣетъ не то значеніе, что $(a^m)^r$ (напр. $a^{(1^r)}=a$, $(a^1)^r=a^r$. Вслѣдствіе этой именно причины не образуютъ новыхъ дѣйствій въ томъ порядкѣ идей, въ какомъ умноженіе составлено изъ сложенія, хотя по существу это было бы возможно, если принять за основаніе и показатель одно и то же число. Законы такой операціи были бы очень сложны, а нужды практической жизни и науки не дѣлаютъ такого обобщенія необходимымъ.

§ 11. Вычитаніе. Отрицательныя числа.

1. Если мы изъ конечнаго комплекса A исключимъ его часть B, то остается конечный комплексъ $A—B$, число котораго c вполнѣ опредѣляется числами a и b комплексовъ A и B. Мы положимъ

$$c = a - b, \qquad (1)$$

и будемъ называть $a—b$ (a минусъ b) разностью чиселъ a и b; дѣйствіе же, посредствомъ котораго эта разность находится, вычитаніемъ; число a называется уменьшаемымъ, число b вычитаемымъ. Такъ какъ комплексъ B представляетъ собой часть 4) комплекса A, то число b должно быть меньше числа a, т. е. уменьшаемое должно быть больше вычитаемаго.

Чтобы совершать вычитаніе въ десятичной системѣ достаточно за-

---

1) Авторъ часто употребляетъ слово „часть“ вмѣсто „правильная часть “(§ 2, 5). Впрочемъ, это нигдѣ не вызываетъ двусмысленности.

помнить результаты этой операцiи (получаемые непосредственнымъ вычисленiемъ) для небольшихъ чиселъ; именно, нужно охватить всѣ случаи, въ которыхъ уменьшаемое не превышаетъ 18, а вычитаемое не превышаетъ 9. Уже это вычисленiе въ десятичной системѣ часто приводитъ насъ къ тому, что нужно вычесть большее число изъ меньшаго; чтобы выйти изъ этого затрудненiя, мы занимаемъ единицу слѣдующаго высшаго разряда; но научная ариѳметика, а также многiя ея примѣненiя требуютъ еще болѣе широкаго обобщенiя задачи вычитанiя, которое можетъ быть достигнуто введенiемъ новаго ряда чиселъ.

Мы поставимъ задачу такъ:

2. Даны два числа a и b; требуется найти число c, которое нужно прибавить къ числу b для того, чтобы получить число a.

Если $a > b$, то эту задачу рѣшаютъ формулой (1). Если $a = b$, то не нужно ничего прибавлять къ b, чтобы получить число a; это мы выразимъ, какъ и въ десятичной системѣ, тѣмъ, что будемъ обозначать знакомъ 0 отсутствiе какихъ бы то ни было объектовъ; т. е. положимъ

$$a - a = 0; \; a + 0 = a; \; a - 0 = a; \qquad (2)$$

въ нѣсколько болѣе широкомъ смыслѣ слова мы будемъ называть 0 также числомъ. Если же число $b > a$, то задача содержитъ въ себѣ требованiе, которое при наличныхъ средствахъ не выполнимо. Если, однако, мы все же желаемъ сдѣлать эту задачу разрѣшимой, то мы должны придать слову „число“ болѣе широкое значенiе.

3. Представимъ себѣ вновь рядъ натуральныхъ чиселъ (безъ нуля) и воспользуемся этимъ вторымъ рядомъ для счета объектовъ, находящихся въ извѣстномъ противоположенiи къ тѣмъ объектамъ, которые мы считали при помощи перваго ряда, какъ напр. объекты, расположенные справа и слѣва, градусы, лежащiе ниже и выше точки замерзанiя, имущество и долгъ. Для различенiя мы должны чѣмъ-нибудь отличать числа второго ряда отъ чиселъ перваго ряда. Чтобы произвести это различiе, мы будемъ называть числа перваго ряда положительными, числа второго ряда—отрицательными и послѣднiя будемъ отмѣчать знакомъ—, т. е. будемъ писать:

$$-1, \; -2, \; -3 \; \ldots . \text{ и т. д.}$$

или въ словахъ: „минусъ одинъ“, „минусъ два“, „минусъ три“ .... и т. д.; если почему-либо требуется особенно подчеркнуть это противоположенiе, то положительныя числа часто обозначаются знакомъ $+$, т. е. пишутъ

$$+1, \; +2, \; +3 \; \ldots . \text{ и т. д.,}$$

въ словахъ: „плюсъ одинъ“, „плюсъ два,“ „плюсъ три“ .... и т. д.

Натуральное число a называется абсолютнымъ значенiемъ чиселъ $+a$ и $-a$. Чтобы обозначить число того или другого ряда, пользуются также знакомъ $\pm a$ (плюсъ минусъ a).

Знаки $+$ и $-$ въ символѣ $\pm a$ называются знаками числа $\pm a$.

Число нуль мы можемъ отнести къ тому или другому ряду: $+0$ и -0 тождественны. Два числа этихъ двухъ рядовъ, имѣющіе одну и ту же абсолютную величину, называются противоположными. Число 0 противоположно себѣ самому. Число, противоположное противоположному числу, совпадаетъ съ первоначальнымъ числомъ. Если поэтому α есть отрицательное число, то подъ символомъ $-\alpha$ разумѣютъ положительное число той же абсолютной величины. Этотъ двойной рядъ, включая сюда 0, мы будемъ называть рядомъ цѣлыхъ чиселъ. Числа этого ряда мы расположимъ по величинѣ при помощи слѣдующаго правила:

4. Всѣ положительныя числа больше нуля, всѣ отрицательныя числа меньше нуля. Если a есть положительное число, то

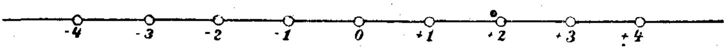
$$a > 0 \text{ и } -a < 0.$$

Положительныя числа мы будемъ располагать въ томъ же порядкѣ, какъ и прежде, а отрицательныя въ противоположномъ порядкѣ, такъ что изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ меньшимъ считается то, которое имѣетъ большую абсолютную величину.

Благодаря такому соглашенію, если α, β, и γ суть три произвольныхъ цѣлыхъ числа и $\alpha<\beta$, а $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$.

Это расположеніе чиселъ по величинѣ называютъ „алгебраическимъ“; такимъ образомъ говорятъ, что одно число „алгебраически“ больше или меньше другого, если принимаются во вниманіе знаки чиселъ; если же говорятъ, что одно число „абсолютно больше другого“, то подъ этимъ разумѣется, что абсолютная величина перваго числа больше абсолютной величины второго. Если число α алгебраически меньше числа β, то пишемъ $\alpha<\beta$ или $\beta>\alpha$; если при этомъ не исключается возможность равенства, то пишемъ $\alpha \leqq \beta$, или въ словахъ: „α равно β или меньше, нежели β“ (иногда выражаютъ короче, хотя и не совсѣмъ правильно, такъ: „α равно или меньше β“); аналогично этому пишутъ также $\beta \geqq \alpha$.

Чтобы сдѣлать эти опредѣленія наглядными, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи (напр. жемчужины, нанизанныя на нити). Любую изъ этихъ точекъ помѣтимъ „0“, а затѣмъ считаемъ въ одномъ направленіи, скажемъ, слѣва направо точки $+1$, $+2$, $+3$ и т. д., а въ другомъ направленіи точки -1, -2, -3 .... (фиг. 1).



Фиг. 1.

При такихъ условіяхъ точкѣ, лежащей направо отъ другой точки, всегда отвѣчаетъ большее число; числа возрастаютъ слѣва направо, или, какъ часто говорятъ, въ положительномъ направленіи.

§ 12. Дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Надъ этими числами мы установимъ теперь нижеслѣдующія правила дѣйствій; при этомъ мы будемъ руководиться только тѣмъ основнымъ положеніемъ, чтобы установленныя уже дѣйствія въ области натуральныхъ чиселъ представляли собою частные случаи вводимыхъ нами новыхъ болѣе общихъ правилъ и чтобы основные законы ариѳметическихъ дѣйствій сохранили свою силу при этомъ обобщеніи.

1. Сложеніе. Пусть α и β будутъ два цѣлыхъ числа съ абсолютными величинами a и b; положимъ при этомъ, что

$$b > a. \qquad (1)$$

Въ такомъ случаѣ мы положимъ:

$$\begin{array}{llllll} \alpha+\beta = & a+b, & \text{если } \alpha \text{ имѣетъ знакъ} & +, & \text{а } \beta \text{ имѣетъ знакъ} & + \\ \alpha+\beta = & b-a & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & - & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & + \\ \alpha+\beta = & -(b-a) & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & + & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & - \\ \alpha+\beta = & -(b+a) & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & - & \text{„ \quad „ \quad „ \quad „} & - \end{array} \qquad (2)$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha\,[5] \qquad (3).$$

Число 0 можетъ быть при этомъ отнесено произвольно къ положительнымъ или къ отрицательнымъ числамъ. Съ помощью ряда точекъ, приведеннаго въ § 11 (фиг. 1), правило сложенія можно сдѣлать нагляднымъ.

Чтобы къ числу α прибавить число β, имѣющее абсолютную величину b, отсчитываемъ b точекъ въ положительномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha+1$, если β есть число положительное, и въ отрицательномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha-1$, если β есть число отрицательное; точка, къ которой мы такимъ образомъ придемъ, соотвѣтствуетъ числу $\alpha+\beta$.

2. Вычитаніе. Полагая по прежнему $b>a$ (1), мы положимъ

$$\begin{array}{lll} & & \text{Знаки чиселъ } \alpha \text{ и } \beta \\ \alpha - \beta & = -(b-a) & + \quad + \\ & = -(a+b) & - \quad + \\ & = a+b & + \quad - \\ & = b-a & - \quad - \end{array} \qquad (4)$$

$$\beta - \alpha = -(\alpha-\beta) \qquad (5).$$

---

[5] Опредѣленія, содержащіяся въ соотношеніяхъ (2), устанавливаютъ, что значитъ прибавить къ числу α число β, имѣющее такую же или большую абсо-

Мы видимъ такимъ образомъ, что сложеніе и вычитаніе натуральныхъ чиселъ подходятъ подъ эти опредѣленія, какъ частные случаи. Вмѣстѣ съ тѣмъ по этимъ правиламъ любое число можетъ быть вычтено изъ другого числа; результатъ всегда представляетъ собой опредѣленное число нашего ряда.

3. Вычитаніе можетъ быть приведено къ сложенію посредствомъ формулы

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta). \qquad (6).$$

Сообразно съ этимъ вычесть нѣкоторое число равносильно тому, чтобы прибавить то же число съ обратнымъ знакомъ.

Поэтому вычитаніе такъ же, какъ и сложеніе, можетъ быть выполнено при помощи отсчитыванія точекъ въ томъ или въ другомъ направленіи.

4. Сочетательный законъ при сложеніи. Перемѣстительный законъ при сложеніи мы уже выразили формулой (3).

Законъ сочетательный долженъ выразиться соотношеніемъ

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \beta + (\alpha + \gamma), \quad (7)$$

гдѣ α, β и γ суть произвольныя три числа, абсолютныя значенія которыхъ обозначимъ черезъ a, b и c. Этотъ законъ вытекаетъ изъ опредѣленій (2) и (3). Число случаевъ, которое слѣдовало бы различать относительно знаковъ чиселъ α, β и γ, значительно уменьшается, благодаря слѣдующему обстоятельству: по конструкціи равенствъ (7), если онѣ оказываются справедливыми при нѣкоторомъ значеніи α, β и γ, то онѣ сохраняютъ свою силу и въ томъ случаѣ, если мы замѣстимъ другъ другомъ α и β, или β и γ, или α и γ[6]), а также если мы замѣстимъ α, β и γ черезъ $-\alpha$, $-\beta$ и $-\gamma$. Вслѣдствіе этого намъ достаточно доказать соотношеніе (7) въ томъ предположеніи, что

$$a \leqq b \leqq c$$

и что γ есть положительное число ($\gamma = c$). При этихъ условіяхъ намъ остается разсмотрѣть только 4 случая, соотвѣтствующіе четыремъ комбинаціямъ чиселъ α и β. Соотвѣтственно этимъ комбинаціямъ, соотношенія (7) принимаютъ такія формы:

1. Числа α и β положительны

$$(a+b) + c = a + (b+c) = b + (a+c);$$

лютную величину; опредѣленіе это дополняется соглашеніемъ (3), которое говоритъ, что прибавить къ числу α число β, имѣющее меньшую абсолютную величину, означаетъ то же, что прибавить къ числу β число α.

[6]) Такъ какъ при этомъ однѣ части равенства переходятъ въ другія.

2. α отрицательно, β положительно

$$(b-a)+c=(b+c)-a=b+(c-a);$$

3. α положительно, β отрицательно

$$c-(b-a)=a+(c-b)=(a+c)-b;$$

4. Числа α и β отрицательны

$$c-(a+b)=(c-b)-a=(c-a)-b,\ \text{если } c>a+b,$$

$$(a+b)-c=a-(c-b)=b-(c-a),\ \text{если } c<a+b.$$

Справедливость этихъ формулъ вытекаетъ изъ соотношенiй, приведенныхъ въ концѣ пункта 5 параграфа 2. Такимъ образомъ сочетательный законъ доказанъ и для обобщеннаго сложенiя.

Если мы теперь дословно повторимъ тотъ же рядъ разсужденiй, который былъ примѣненъ въ § 8,4 къ умноженiю, то получимъ слѣдующiй болѣе общiй законъ:

5. Если намъ нужно опредѣлить сумму любого количества цѣлыхъ чиселъ (слагаемыхъ), то можно поступать слѣдующимъ образомъ: выбираемъ произвольно два слагаемыхъ, складываемъ ихъ и сумму присоединяемъ къ остальнымъ слагаемымъ. Въ полученной такимъ образомъ новой системѣ, содержащей уже меньше элементовъ, мы вновь выбираемъ два и поступаемъ съ ними точно такъ же, какъ выше. Этотъ процессъ мы продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не останется только одно число. Это число не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ наши отдѣльныя операцiи, и называется суммой всѣхъ чиселъ.

6. Законы перемѣстительный и ассоцiативный принимаютъ для вычитанiя другую форму, которая получается изъ соотвѣтствующихъ формулъ сложенiя, если разсматривать вычитанiе, какъ сложенiе отрицательныхъ чиселъ; именно, каковы бы ни были числа α, β и γ, имѣютъ мѣсто слѣдующiя соотношенiя:

$$\alpha-\beta=-(\beta-\alpha),\qquad \text{(ср. форм. (5))}\qquad (8)$$

$$(\alpha+\beta)-\gamma=\alpha+(\beta-\gamma)\qquad (9)$$

$$(\alpha-\beta)+\gamma=\alpha-(\beta-\gamma)=\alpha+(\gamma-\beta)\qquad (10)$$

$$(\alpha-\beta)-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\gamma)-\beta.\qquad (11).$$

7. Отсюда легко получить (при помощи совершенной индукцiи) часто примѣняемое правило вычитанiя, извѣстное также подъ названiемъ „правила для открыванiя скобокъ“; оно выражается слѣдующей формулой:

$$\alpha - (\beta + \gamma + \dots + \nu) = \alpha - \beta - \gamma - \dots - \nu$$

или въ словахъ:

Если нужно вычесть изъ какого-либо числа полиномъ, составленный изъ произвольнаго количества чиселъ и заключенный въ скобки, то можно скобки опустить, измѣняя при этомъ знакъ каждаго члена на обратный, или, иначе, замѣняя каждое сложеніе вычитаніемъ и обратно.

§ 13. Умноженіе.

1. Если мы будемъ разсматривать умноженіе, какъ повторное сложеніе (§ 8), то мы можемъ распространить это дѣйствіе и на тотъ случай, когда множимое отрицательно или равно нулю. Правило сложенія предыдущаго параграфа въ этомъ случаѣ даетъ

$$a.(-b) = -(ab) \qquad (1)$$

$$a.0 = 0. \qquad (2)$$

Но если множитель есть число отрицательное, то прежнее опредѣленіе теряетъ всякій смыслъ: отъ насъ зависитъ приписать этимъ символамъ то или другое значеніе [7]). Мы выразимъ опредѣленіе умноженія для тѣхъ случаевъ, когда множитель отрицателенъ или равенъ нулю, слѣдующими соотношеніями:

$$(-a)b = -(ab) \qquad (3)$$

$$(-a)(-b) = ab \qquad (4)$$

$$0b = 0. \qquad (5)$$

Формула (3) необходимо вытекаетъ изъ формулы (1), если поставимъ себѣ задачей сохранить перемѣстительный законъ; формула же (4) слѣдуетъ изъ формулы (3), если послѣдняя должна остаться въ силѣ и для отрицательныхъ значеній числа b, ибо $-(-a) = +a$, какъ мы установили выше. Наконецъ, соотношеніе (5) вытекаетъ изъ (2) въ силу перемѣстительнаго закона [8]).

---

[7]) Выраженіе $(-a).b$ представляетъ собой символъ, которому предыдущими опредѣленіями не присвоено никакого опредѣленнаго значенія. Отъ насъ зависитъ поэтому приписать этому символу то значеніе, которое мы найдемъ цѣлесообразнымъ.

[8]) Выражаемая здѣсь мысль заключается въ слѣдующемъ: опредѣленіе умноженія при отрицательномъ и нулевомъ множителѣ необходимо сводится къ соотношеніямъ (3), (4) и (5), если мы желаемъ сохранить законъ перемѣстительный и если затѣмъ формула (3) должна остаться справедливой и для отрицательныхъ значеній множимаго b; дѣйствительно, если законъ перемѣстительный долженъ

Согласно установленнымъ такимъ образомъ опредѣленіямъ, для любыхъ двухъ цѣлыхъ чиселъ α и β остается въ силѣ перемѣстительный законъ

$$\alpha\beta = \beta\alpha; \qquad (6)$$

опредѣленія же (1) — (5) могутъ быть выражены слѣдующимъ правиломъ:

Если одинъ изъ двухъ сомножителей обращается въ нуль, то и произведеніе равно нулю.

Произведеніе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное, произведеніе положительнаго числа на отрицательное есть число отрицательное.

Абсолютная величина произведенія двухъ сомножителей есть произведеніе абсолютныхъ величинъ сомножителей.

Законъ сочетательный для умноженія гласитъ:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma),$$

что не трудно вывести изъ того же закона для положительныхъ чиселъ и изъ соотношенія (1), если перебрать всѣ комбинаціи знаковъ, которыя здѣсь возможны. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказывается и общее предложеніе относительно произведенія какого угодно числа сомножителей (§ 8),

$$\mu = \alpha\beta\gamma\ldots\nu,$$

согласно которому это произведеніе можно получить, перемножая произвольные два сомножителя, умножая затѣмъ полученное произведеніе на третьяго множителя, и т. д.; результатъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ ведется это вычисленіе[9]).

2. Въ случаѣ, если между сомножителями имѣются отрицательныя числа, можно сдѣлать слѣдующія заключенія относительно знака всего произведенія.

Чтобы опредѣлить знакъ произведенія, перемножимъ сначала всѣхъ положительныхъ сомножителей; если остается только одинъ отрицательный множитель, то произведеніе имѣетъ, согласно опредѣленію (1), отрица-

---

остаться въ силѣ, то $(-a)b$ должно быть равно $b(—a)$ или по формулѣ (2)—(ab) Точно также, если формула (3) должна остаться въ силѣ при отрицательномъ значеніи числа b, то

$$(—a)\,(—b) = —\,(-ab) = ab.$$

[9]) Данный въ § 8 выводъ основывается исключительно на сочетательномъ и перемѣстительномъ законахъ. Онъ остается поэтому въ силѣ, коль скоро остаются въ силѣ эти два закона.

тельное значеніе; если же имѣется нѣсколько отрицательныхъ произведеній, то мы распредѣлимъ ихъ въ пары и перемножимъ сомножителей каждой пары, которые дадутъ положительныя произведенія. Если послѣ этого остается еще одинъ отрицательный множитель, то произведеніе отрицательно; если же всѣ отрицательные множители могуть быть распредѣлены въ пары, то произведеніе положительно.

Это заставляетъ насъ дѣлать слѣдующее различіе между натуральными числами. Если нѣкоторый комплексъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ его элементы могутъ быть безъ остатка распредѣлены въ пары, то соотвѣтствующее число называется четнымъ; если послѣ распредѣленія элементовъ въ пары, остается одинъ свободный элементъ, то соотвѣтствующее число называется нечетнымъ.

При помощи совершенной индукціи можно безъ труда убѣдиться, что одно и то же число не можетъ быть одновременно четнымъ и нечетнымъ. За каждымъ четнымъ числомъ слѣдуетъ нечетное число, за нечетнымъ— четное.

1, 3, 5, 7, 9, 11 суть нечетныя; 2, 4, 6, 8, 10, 12 суть четныя числа.

Послѣ этого опредѣленія мы можемъ выразить правило знаковъ при умноженіи слѣдующимъ образомъ.

Произведеніе положительно, если число отрицательныхъ сомножителей четное, и отрицательно, если число отрицательныхъ множителей нечетное.

3. Когда установлено понятіе о произведеніи какого угодно числа сомножителей, то понятіе о степени отрицательнаго числа опредѣляется само собой. Степень отрицательнаго числа имѣетъ положительное значеніе, если показатель есть число четное, и отрицательное, если показатель есть число нечетное.

$$(-a)^n = a^n, \text{ если } n \text{ есть число четное,} \qquad (8)$$
$$= -a^n, \text{ если } n \text{ есть число нечетное.}$$

Въ частности квадратъ отрицательнаго числа всегда представляетъ собой положительное число.

Обратимъ еще вниманіе на слѣдующій частный случай:

$$(-1)^n = +1, \text{ если } n \text{ есть число четное,} \qquad (9)$$
$$= -1, \text{ если } n \text{ есть число нечетное.}$$

Послѣдней формулой часто пользуются, чтобы выразить, что нѣкоторое число, зависящее отъ n, имѣетъ положительное значеніе при четномъ n и отрицательное значеніе при нечетномъ n. Такъ напримѣръ, соотношенія (8) могутъ быть выражены такъ:

$$(-a)^n = (-1)^n a .$$

ГЛАВА III.

Дѣленіе и введеніе дробей.

§ 14. Дѣленіе и дѣлимость чиселъ.

1. Если a и b суть натуральныя числа, то всегда можно опредѣлить положительное число m такимъ образомъ, чтобы mb было больше, нежели a.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a=1$, то теорема, очевидно, справедлива при всякомъ b, ибо $b\geqslant 1$, и достаточно взять $n>1$, чтобы nb было больше 1 (§ 8, 5); отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ a $nab>a$ и, слѣдовательно, $mb>a$, если $m>na$.

Если $b<a$, то изъ всѣхъ значеній числа m, удовлетворяющихъ неравенству $mb>a$, имѣется одно наименьшее. Это наименьшее число больше 1; мы его обозначимъ поэтому черезъ $q+1$, такъ что

$$qb \leqslant a < (q+1)b.$$

Если мы поэтому положимъ

$$a - qb = r,$$

то $r = 0$, когда $qb = a$, а въ противномъ случаѣ r есть положительное число, меньшее, нежели b. Отсюда вытекаетъ слѣдующій выводъ.

2. Если a и b суть два натуральныя числа и $b<a$, то можно опредѣлить положительное число q и другое число r, которое равно или больше 0 и меньше, нежели b, такимъ образомъ, что

$$a = qb + r; \tag{1}$$

эти числа q и r однозначно опредѣляются числами a и b.

Процессъ разысканія чиселъ q и r по заданнымъ числамъ a и b называется дѣленіемъ числа a на число b; число a называется дѣлимымъ, b дѣлителемъ, q частнымъ, r остаткомъ.

При этихъ условіяхъ говорятъ также, что число b содержится въ числѣ a q разъ, при чемъ остается остатокъ r.

Съ этой задачей мы встрѣчаемся, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если намъ бываетъ нужно, какъ это часто случается въ жизни, раздѣлить комплексъ, состоящій изъ a недѣлимыхъ объектовъ, на b равныхъ частей. Вообще говоря, такое дѣленіе не совершается безъ остатка.

Какъ находятся числа q и r, когда a и b заданы въ десятичной системѣ счисленія, излагается въ элементарной ариѳметикѣ.

3. Если остатокъ равенъ 0, то говорятъ также, что a дѣлится на b, или что b есть дѣлитель или множитель числа a, или что дѣленіе числа a на b совершается нацѣло, или наконецъ, что число a кратно числа b. Такимъ образомъ, число a дѣлится на b, если существуетъ такое цѣлое число m, что

$$a = mb. \tag{2}$$

4. Обобщая это опредѣленіе, мы будемъ говорить, что число 0 дѣлится на всякое положительное или отрицательное число, имѣя въ виду, что равенство (2) удовлетворяется при всякомъ значеніи числа b, если положимъ $a = 0$ и $m = 0$. Мы будемъ также говорить, что число $-a$ дѣлится на b или на $-b$, если b есть число, отличное отъ нуля, и a дѣлится на b. Но подъ дѣлителями числа мы будемъ разумѣть исключительно натуральныя (положительныя) числа.

5. Каждое число дѣлится на себя и на единицу, потому что соотношеніе (2) удовлетворяется, если положимъ $b = a$ и $m = 1$ или $b = 1$ и $m = a$.

6. Ни одно число, отличное отъ нуля, не дѣлится на нуль. Въ самомъ дѣлѣ, при $b = 0$ соотношеніе (2) можетъ быть удовлетворено только тогда, если и $a = 0$; въ этомъ же послѣднемъ случаѣ число m можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе.

Изъ даннаго выше опредѣленія вытекаютъ далѣе слѣдующія предложенія.

7. Произведеніе нѣсколькихъ множителей

$$p = a_1 a_2 a_3 \ldots . a_a$$

дѣлится на число b, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на b. Замѣтимъ, однако, что произведеніе можетъ иногда дѣлиться на b, хотя ни одинъ изъ множителей не дѣлится на b; такъ напримѣръ, 3. 4 дѣлится на 6, хотя ни 3 ни 4 не дѣлятся на 6.

8. Если два числа a и b дѣлятся на третье число c, то числа $a+b$ и $a-b$ также дѣлятся на c. Впрочемъ, это есть только частный случай слѣдующаго болѣе общаго предложенія:

Если каждое изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ дѣлится на число b, такъ что

$$a_1 = m_1b,\ a_2 = m_2b,\ a_3 = m_3b\ \dots\ a_n = m_nb,$$

то каковы бы ни были числа $c_1,\ c_2,\ c_3\ \dots\ c_n$,

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \dots + a_nc_n = b\,(m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3 + \dots + m_nc_n)$$

и, слѣдовательно, число

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \dots + a_nc_n$$

дѣлится на b.

9. Если a дѣлится на b, такъ что

$$a = mb,$$

то m есть частное отъ дѣленія a на b. Это выражаютъ на письмѣ еще и такъ:

$$m = a : b \text{ или } m = \frac{a}{b} \text{ или } m = a/b,$$

(въ словахъ: m равно a, дѣленному на b).

§ 15. Общій наибольшій дѣлитель. Числа, первыя между собой. Наименьшее кратное.

1. Если два натуральныхъ числа a и b дѣлятся на третье число c, то послѣднее называется общимъ дѣлителемъ чиселъ a и b. Такъ какъ дѣлитель числа не можетъ быть больше самаго числа, то между всѣми общими дѣлителями чиселъ a и b всегда долженъ быть одинъ наибольшій; послѣдній называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, или же наибольшей общей мѣрой этихъ двухъ чиселъ; разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ представляетъ собой одну изъ основныхъ задачъ ариѳметики. Эта задача рѣшается пріемомъ, который былъ уже указанъ Евклидомъ и который поэтому извѣстенъ подъ названіемъ Евклидова алгориѳма, или алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя *).

---

*) Подъ алгориѳмомъ въ настоящее время разумѣютъ правило, которое указываетъ, какъ найти нѣкоторый общій результатъ въ каждомъ частномъ случаѣ, хотя оно и не даетъ общаго выраженія для этого результата. Въ исторіи математики подъ „алгориѳмиками" разумѣютъ математическую школу, которая пользовалась для своихъ исчисленій индійскими цифрами и нулемъ, выражая разрядъ единицъ мѣстомъ, занимаемымъ цифрой. Въ противоположность этому подъ „абацистами" разумѣютъ тѣхъ, которые пользовались счетной доской (abacus). Относительно происхожденія самого слова „алгориѳмъ" долго царило сомнѣніе, пока новѣйшія изслѣдованія не установили, что это слово представляетъ собой искаженіе арабскаго собственнаго имени: Alchwarizmî (Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî); это имя при-

2. Пусть a и a_1 будутъ данныя два положительныя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ намъ нужно разыскать. Если они равны между собой, то общее ихъ значеніе и представляетъ ихъ общій наибольшій дѣлитель. Мы предположимъ поэтому, что $a > a_1$. Раздѣлимъ число a на a_1, и если дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ, который меньше, нежели a_1; этотъ остатокъ мы обозначимъ черезъ a_2. Теперь раздѣлимъ a_1 на a_2; если и это дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ a_3, который меньше, нежели a_2, и т. д. Продолжая этотъ процессъ, мы будемъ получать постоянно меньшіе остатки; послѣ опредѣленнаго числа такихъ дѣленій мы необходимо должны придти къ такому дѣленію, которое совершается нацѣло, такъ какъ не можетъ быть неограниченнаго числа остатковъ, меньшихъ, нежели опредѣленное число. Этимъ заканчивается вычисленіе, и дѣлитель послѣдняго дѣленія есть искомый наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Этотъ процессъ становится нагляднѣе, если выразить его нижеслѣдующими равенствами, въ которыхъ буквами q, q_1, q_2 .... q_{n-1} обозначены частныя послѣдовательныхъ дѣленій:

$$\begin{array}{lllll} a & = & qa_1 & + & a_2 \\ a_1 & = & q_1a_2 & + & a_3 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-2} & = & q_{n-2}a_{n-1} & + & a_n \\ a_{n-1} & = & q_{n-1}a_n & & \end{array} \qquad (1)$$

Наше утвержденіе заключается въ томъ, что a_n есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Это будетъ доказано, если мы обнаружимъ,

α) что a_n есть дѣлитель чиселъ a и a_1 и

β) что каждый общій дѣлитель чиселъ a и a_1 представляетъ собою также дѣлителя числа a_n.

Въ самомъ дѣлѣ, если d есть искомый общій наибольшій дѣлитель, то изъ свойства α) слѣдуетъ, что $a_n \leqq d$, а изъ свойства β) слѣдуетъ, что $a_n \geqq d$; поэтому изъ соотношеній α) и β) вмѣстѣ слѣдуетъ, что $a_n = d$. Что-же касается самихъ требованій α) и β), то въ ихъ справедливости легко убѣдиться, разсматривая равенства (1). (§ 14, 8) 1)

надлежало арабскому писателю, который въ началѣ X столѣтія училъ производить вычисленія при помощи индійскихъ цифръ (Cantor, Geschichte der Mathematik. 2 Auflage, Bd. 1, S. 671 f; Euklid, Elemente, VII Buch, II. Ausgabe von Heiberg, Bd. II. Leipzig, Teubner 1884).

1) Выяснимъ подробнѣе этотъ основной пунктъ.

α) Послѣднее изъ равенствъ (1) показываетъ, что a_{n-1} дѣлится на a_n; вслѣдствіе этого предпослѣднее изъ равенствъ (1), въ виду предложенія § 14, 8, обнаруживаетъ, что a_{n-2} дѣлится на a_n. Такимъ же образомъ предыдущее соотношеніе

Изъ сказаннаго попутно вытекаетъ слѣдующій выводъ.

Каждый общій дѣлитель двухъ чиселъ есть также дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя ихъ. Это слѣдуетъ непосредственно изъ соотношенія β).

Приведемъ еще слѣдующій примѣръ для выясненія этого алгориѳма.

$$\begin{aligned} 6552 &= 14 \,.\, 448 + 280, \\ 448 &= 1 \,.\, 280 + 168, \\ 280 &= 1 \,.\, 168 + 112, \\ 168 &= 1 \,.\, 112 + 56, \\ 112 &= 2 \,.\, 56. \end{aligned}$$

Итакъ, 56 есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ 6552 и 448.

3. Вмѣсто равенства

$$a = qb + r$$

можно при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя пользоваться также равенствомъ

$$a = (q+1)\ b - (b-r);$$

что представляетъ собой преимущество въ томъ случаѣ, если $b-r$ меньше, нежели r, т. е. если $2r$ больше, нежели b. Въ этомъ случаѣ отрицательное число $-(b-r)$ называютъ абсолютно наименьшимъ остаткомъ отъ дѣленія числа a на число b. Пользуясь въ алгориѳмѣ общаго наибольшаго дѣлителя абсолютно наименьшими остатками, мы скорѣе придемъ къ цѣли.

Въ нашемъ примѣрѣ вычисленіе можно было бы вести такъ:

$$\begin{aligned} 6552 &= 15 \,.\, 448 - 168 \\ 448 &= 3 \,.\, 168 - 56 \\ 168 &= 3 \,.\, 56, \end{aligned}$$

что даетъ значительное сокращеніе.

4. Точно такъ же, какъ и для двухъ чиселъ, можно поставить вопросъ о разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ, т. е. самаго большого числа, которое дѣлитъ всѣ данныя числа. Но эту задачу можно привести къ предыдущей, основываясь на слѣдующемъ замѣчаніи:

(третье отъ конца) обнаруживаетъ, что a_{n-3} дѣлится на a_n. Восходя такимъ образомъ къ первымъ равенствамъ въ ряду (1), мы получимъ, что числа a и a_1 дѣлятся на a_n.

β) Пусть b будетъ общій дѣлитель чиселъ a и a_1. Если мы представимъ первое изъ равенствъ (1) въ видѣ

$$a_2 = a - qa_1,$$

то, въ силу предложенія § 14, 8, оно обнаруживаетъ, что a_2 дѣлится на b. Пользуясь этимъ, мы такимъ же образомъ при помощи второго изъ равенствъ (1) покажемъ, что a_3 дѣлится на a_n. Продолжая тотъ-же рядъ разсужденій, мы докажемъ при помощи предпослѣдняго равенства (1), что число a_n дѣлится на b.

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b, то всякій общій дѣлитель чиселъ a и b дѣлитъ также число d; поэтому всякій общій дѣлитель чиселъ a, b и c представляетъ собой также общаго дѣлителя чиселъ d и c; обратно, каждый общій дѣлитель чиселъ d и c есть также общій дѣлитель чиселъ a, b и c. Вслѣдствіе этого общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b и c совпадаетъ съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ d и c.

5. Два числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 1, называются взаимно простыми или первыми между собою. Говорятъ также, что такія числа не имѣютъ общихъ дѣлителей; при этомъ, конечно, не принимается въ счетъ постоянный общій дѣлитель 1. Такъ, взаимно-простыми числами являются, напримѣръ, 3 и 7, 15 и 49, 105 и 128. Какія бы ни были даны два числа a и b, даже если они очень велики, можно рѣшить сравнительно простымъ вычисленіемъ, имѣютъ ли они общихъ дѣлителей или нѣтъ.

6. Если a и b суть числа первыя между собой, и число ma, кратное a, дѣлится на b, то число m дѣлится на b.

Въ справедливости этого предложенія нетрудно убѣдиться при помощи алгориѳма (1). Если a и $b = a_1$ суть числа первыя между собой, то $b_n = 1$. Соотвѣтствующій алгориѳмъ имѣетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$\begin{aligned} a &= qa_1 + a_2 \\ a_1 &= q_1a_2 + a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-2} &= q_{n-2}a_{n-1} + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Умножая обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ на m, мы получимъ:

$$\begin{aligned} ma &= q\,ma_1 + ma_2 \\ ma_1 &= q_1ma_2 + ma_3 \\ &\dots\dots\dots \\ ma_{n-2} &= q_{n-2}ma_{n-1} + m \end{aligned} \tag{3}$$

Если теперь ma дѣлится на a_1, то первое изъ этихъ равенствъ обнаруживаетъ, что и ma_2 дѣлится на a_1; вслѣдствіе этого второе равенство обнаруживаетъ, что ma_3 дѣлится на a_1; дальнѣйшія равенства послѣдовательно обнаруживаютъ (въ силу совершенной индукціи), что числа ma_4 .... ma_{n-1}, m дѣлятся на a_1.

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b и если

$$a = da' \text{ и } b = bd', \tag{4}$$

то a' и b' суть числа первыя между собой. Дѣйствительно, если-бы числа a' и b' имѣли общаго дѣлителя e, отлично отъ 1, то числа a и b дѣлились бы на de,—что противно условію.

7. Число, которое дѣлится на два числа a и b, называется общимъ кратнымъ этихъ чиселъ. Изъ всѣхъ общихъ кратныхъ двухъ чиселъ одно должно быть наименьшимъ, а остальныя должны быть кратны этого наименьшаго.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что число m дѣлится на a и b; придерживаясь обозначенія (4), мы можемъ сказать, что число m дѣлится на da', т. е. можетъ быть представлено въ видѣ

$$m = da'n.$$

Если это число дѣлится на $b'd$, то $a'n$ дѣлится на b'; а такъ какъ a' и b' суть числа первыя между собой, то n дѣлится на b' (п. 6). Если $n = b'p$, то

$$m = da'b'p.$$

Итакъ, каждое число m, кратное a и b, дѣлится на число $a'b'd = \frac{ab}{d}$; поэтому $\frac{ab}{d}$ есть наименьшее кратное чиселъ a и b.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что наименьшее общее кратное двухъ чиселъ очень просто опредѣляется, если мы знаемъ общаго наибольшаго дѣлителя ихъ.

8. Совершенно такъ же, какъ при общемъ наибольшемъ дѣлителѣ, мы можемъ распространить понятіе о наименьшемъ кратномъ на нѣсколько чиселъ. Чтобы получить наименьшее кратное чиселъ

$$a, b, c, d \ldots,$$

поступаемъ слѣдующимъ образомъ: беремъ два изъ этихъ чиселъ, скажемъ, a и b, и замѣняемъ ихъ наименьшимъ кратнымъ ихъ; такимъ образомъ мы получаемъ рядъ, содержащій однимъ числомъ меньше. Съ этимъ рядомъ поступаемъ точно такъ же и продолжаемъ этотъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число.

§ 16. Простыя и составныя числа.

Натуральное число, которое не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ себя самого и единицы, называется простымъ числомъ; числа же, имѣющія также другихъ дѣлителей, называются составными числами. Число 1 занимаетъ исключительное положеніе: это единственное число, которое имѣетъ только одного дѣлителя. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ цѣлесообразно не относить 1 къ простымъ числамъ; такимъ образомъ приходится отличать три категоріи чиселъ: единицу, простыя числа и составныя числа.

Это, конечно, только вопросъ цѣлесообразнаго соглашенія; часто относятъ единицу къ простымъ числамъ, какъ оно и кажется естественнѣе на первый взглядъ. Мы предпочитаемъ, однако, отдѣлять единицу отъ простыхъ чиселъ, такъ какъ это даетъ возможность короче выражать нѣкоторыя предложенія.

Относительно простыхъ чиселъ имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

1. Если произведеніе двухъ чиселъ ab дѣлится на простое число p, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей a или b дѣлится на p.

Въ самомъ дѣлѣ, если a не дѣлится на p, то a и p суть числа первыя между собой, такъ какъ p не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ p и 1; если поэтому произведеніе ab все-же дѣлится на p, то второй множитель b долженъ дѣлиться на p (§ 15, 6).

Это предложеніе легко обобщить слѣдующимъ образомъ:

Если произведеніе нѣсколькихъ сомножителей a, b, c, d .... дѣлится на простое число p, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей дѣлится на p.

2. Каждое простое число можетъ быть однимъ и только однимъ способомъ представлено въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей, или, какъ часто говорятъ, можетъ быть разложено на простыхъ сомножителей

Чтобы доказать это предложеніе, замѣтимъ прежде всего, что каждое составное число m дѣлится по крайней мѣрѣ на одно простое число. Дѣйствительно, если m есть составное число, то оно имѣетъ дѣлителя m_1, который меньше, нежели m, и больше 1. Если m_1 также есть составное число, то и оно имѣетъ дѣлителя, который отличенъ отъ единицы и меньше, нежели m_1. Продолжая это разсужденіе, мы необходимо придемъ къ дѣлителю, который представляетъ собой простое число. Если p_1 есть простой дѣлитель числа m, то

$$m = p_1 m_1, \qquad (1),$$

гдѣ $m_1 < m$. Если m_1 не представляетъ собой простого числа, то оно имѣетъ простого дѣлителя p_2; такимъ образомъ

$$m = p_1 p_2 m_2. \qquad (2)$$

Это разсужденіе мы можемъ продолжить, и такъ какъ числа m_1, m_2, m_3 .... постоянно убываютъ и отличны отъ 1, то мы необходимо должны придти къ числу m_n, которое представляетъ собой простое число. Такимъ образомъ мы получаемъ разложеніе числа m на простыхъ дѣлителей, число которыхъ обозначимъ черезъ n:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_n \qquad (3)$$

Между дѣлителями p_1, p_2 .... p_n нѣкоторые могутъ, конечно, повторяться нѣсколько разъ; эти равные дѣлители даютъ въ произведенiи степень того же числа. Принимая поэтому, что между простыми дѣлителями имѣется π равныхъ p, $\varkappa$ равныхъ q, ρ равныхъ r, и. т. д.,—мы можемъ представить разложенiе (3) въ такомъ видѣ

$$m = p^{\pi} q^{\varkappa} r^{\rho} \ldots . \qquad (4).$$

Числа p, q, r .... мы здѣсь уже считаемъ различными, а

$$\pi + \varkappa + \rho + \ldots = n.$$

Отсюда уже легко вывести, что разложенiе можетъ быть произведено только однимъ способомъ. Дѣйствительно, согласно предложенiю 1, число m, выражаемое произведенiемъ (4), не можетъ дѣлиться ни на какое простое число, кромѣ p, q, r ....; сверхъ того, число p не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ π разъ; число q не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ ρ разъ, и т. д.[2]).

3. Комплексъ, состоящiй изъ всѣхъ простыхъ чиселъ, безконеченъ*).

Если бы комплексъ, содержащiй всѣ простыя числа, былъ конеченъ то должно было бы существовать наибольшее простое число. Итакъ, допустимъ, что ω представляетъ наибольшее простое число. Въ такомъ случаѣ всѣ простыя числа могутъ быть расположены въ возрастающемъ порядкѣ въ рядъ: 2, 3, 5, 7 .... ω, оканчивающiйся числомъ ω. Составивъ произведенiе всѣхъ этихъ чиселъ, прибавимъ къ нему 1:

$$\Omega = 2.3.5.7 \ldots \omega + 1. \qquad (5)$$

Это число больше, нежели ω, но не можетъ дѣлиться ни на одно изъ чиселъ нашего ряда; 2, 3, 5, 3 .... ω, ибо при дѣленiи на каждое изъ нихъ получаемъ въ остаткѣ 1. Поэтому сдѣланное допущенiе, что имѣется наибольшее простое число, неправильно.

Если мы примемъ въ выраженiи (5) за ω какое-либо опредѣленное простое число, то число Ω будетъ больше, нежели ω, но не можетъ дѣлиться ни на одно простое число, меньшее, нежели ω. Поэтому Ω либо должно быть простымъ числомъ, либо должно дѣлиться на простое число, которое больше, чѣмъ ω. Въ дѣйствительности можетъ имѣть мѣсто, какъ

---

[2]) Частное $m : p^{\pi} = q^{\varkappa} r^{\rho} \ldots$; вслѣдствiе предложенiя 1, оно уже не можетъ дѣлиться на p. Слѣдовательно, другое разложенiе не можетъ содержать p въ болѣе высокой степени; но по той же причинѣ первое разложенiе также не можетъ содержать число p въ болѣе высокой степени, чѣмъ второе.

*) Это предложенiе и его доказательство имѣются уже у Евклида. „Elemente,“ Buch IX, № XX (Heiberg Bd. 2).

то, такъ и другое; напримѣръ,

$$2\,.\,3 + 1 = 7 \text{ простое число,}$$
$$2\,.\,3\,.\,5 + 1 = 31 \text{ простое число,}$$
$$2\,.\,3\,.\,5\,.\,7 + 1 = 211 \text{ простое число,}$$
$$2\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,11 + 1 = 2311 \text{ простое число,}$$
$$2\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,11\,.\,13 + 1 = 30031 = 59\,.\,509 \text{ составное число.}$$

Задача о нахожденіи простыхъ дѣлителей даннаго составного числа, а также рѣшеніе вопроса, есть ли заданное число простое или составное, гораздо сложнѣе, нежели нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. Общаго прямого метода для рѣшенія этой задачи мы не имѣемъ; вообще, изслѣдованіе вопроса о распредѣленіи простыхъ чиселъ принадлежитъ къ труднѣйшимъ проблемамъ ариѳметики. Мы будемъ имѣть случай въ послѣдующихъ главахъ сдѣлать нѣкоторыя указанія по этому вопросу. Здѣсь же мы ограничимся слѣдующими указаніями.

4. Существуютъ простые признаки, посредствомъ которыхъ нетрудно узнать, дѣлится ли данное число, написанное въ десятичной системѣ, на первыя простыя числа 2, 3, 5.

Если число m изображается n цифрами a_1, a_2, a_3 .... a_n, то

$$m = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1}10 + a_n.$$

Такъ какъ число 10 и всѣ его степени дѣлятся на 2 и на 5, то число m дѣлится на 2 или на 5, если a_n, т. е. число простыхъ его единицъ, дѣлится соотвѣтственно на 2 или на 5.

Такъ какъ 100 дѣлится на 4 и на 25, то мы можемъ еще прибавить, что число m дѣлится на 4 или на 25, если $a_{n-1}10+a_n$, т. е. если число, составленное изъ его десятковъ и единицъ, дѣлится на 4 или на 25. Тѣмъ же способомъ устанавливаютъ признаки дѣлимости чиселъ на 8 и 125, а также на болѣе высокія степени чиселъ 2 и 5.

Если мы обозначимъ теперь черезъ q сумму цифръ числа m (т. е. сумму чиселъ, изображаемыхъ отдѣльными его цифрами), иными словами, положимъ

$$q = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

то

$$m-q = a_1 (10^{n-1}-1) + a_2 (10^{n-2}-1) + \ldots + a_{n-1} (10-1);$$

а такъ какъ числа

$$10 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 99, \quad 10^3 - 1 = 999, \ldots$$

дѣлятся на 9, то число $m - q$ дѣлится на 9. Если поэтому одно изъ этихъ чиселъ дѣлится на 3 или на 9, то и другое дѣлится на это число. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее правило:

Число m дѣлится на 3 или на 9, если сумма его цифръ дѣлится на это число.

Точно также, если мы положимъ

$$q' = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \dots \pm a_1,$$

то

$$m - q' = a_{n-1}(10+1) + a_{n-2}(10^2-1) + a_{n-3}(10^3+1) \dots;$$

такъ какъ число

$$10 + 1 = 11,\ 10^2 - 1 = 99,\ 10^3 + 1 = 1001, \dots$$

дѣлятся на 11, то число m дѣлится на 11, если q' дѣлится на 11 и обратно.

5. Если m есть составное число, то оно можетъ быть во всякомъ случаѣ разложено на двухъ множителей, изъ которыхъ каждое больше 1. Если $m = ab$ и $a \leqq b$, то $a^2 \leqq m$. Между дѣлителями числа m долженъ быть, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ, квадратъ котораго не превышаетъ m. Поэтому, чтобы опредѣлить, есть ли заданное число простое или составное, нужно прежде всего опредѣлить, при помощи вышеприведенныхъ признаковъ, дѣлится ли оно на 2, 3, 5, 11. Если это не имѣетъ мѣста, то нужно дѣлить заданное число далѣе послѣдовательно на всѣ простыя числа, квадраты которыхъ не превышаютъ даннаго числа; эти числа мы предполагаемъ, слѣдовательно, извѣстными. Если ни одно изъ этихъ дѣленій не совершается нацѣло, то m есть простое число; если же одно изъ дѣленій совершается нацѣло, то число—составное, и для производства разложенія нужно подвергнуть такому же изслѣдованію частное. Такимъ образомъ, если число, меньшее 100, не дѣлится на 2, 3, 5 и 7, то оно представляетъ собой простое число; точно такъ же числа, не превышающія 10000, приходится для той же цѣли дѣлить только на простыя числа, меньшія 100.

6. Вопросъ объ опредѣленіи простыхъ чиселъ очень интересовалъ уже древнихъ. Мы упомянули уже, что Евклидъ доказываетъ предложенія касающіяся простыхъ чиселъ. Сохранился отрывокъ сочиненія, подъ названіемъ: „Рѣшето“ (κόσκινον, cribrum Eratosthenis), принадлежащаго Эротосѳену [*]), въ которомъ указанъ остроумный методъ для опредѣленія всѣхъ простыхъ чиселъ, не превышающихъ даннаго числа; методъ этотъ заключается въ слѣдующемъ.

Напишемъ всѣ числа до указаннаго числа. Начнемъ счетъ съ перваго простого числа 2; это число мы оставимъ на мѣстѣ, а послѣ него

---

[*]) Эратосѳенъ Киренскій жилъ повидимому, отъ 275 до 194 г. до Р. Х; большую часть жизни онъ провелъ въ Александріи (Ср. Cantor „Gesch. der Mathematik.“ Bd. I S. 313).

будемъ зачеркивать каждое второе число; такимъ образомъ всѣ числа, кратныя 2, кромѣ самого числа 2, будутъ вычеркнуты. Затѣмъ начинаемъ счетъ съ ближайшаго оставшагося числа, т. е. съ 3; сохраняемъ число 3, а послѣ него вычеркиваемъ каждое третье число, считая, однако, при этомъ и тѣ числа, которыя уже были перечеркнуты прежде. Этотъ процессъ мы продолжаемъ дальше, т. е. начинаемъ съ ближайшаго незачеркнутаго числа, оставляемъ его, а послѣ него зачеркиваемъ числа черезъ столько мѣстъ, сколько единицъ въ томъ числѣ, съ котораго мы начали. Послѣ окончанія этой операціи останутся исключительно простыя числа. Однако, согласно п. 5, мы должны продолжать этотъ процессъ только до тѣхъ поръ, пока квадратъ числа, съ котораго мы начинаемъ, не превышаетъ послѣдняго числа нашего ряда. Такъ напримѣръ, при опредѣленіи простыхъ чиселъ, которыя меньше 121, намъ пришлось бы только вычеркнуть числа, кратныя 2, 3, 5 и 7. Чтобы уяснить себѣ этотъ процессъ, полезно продѣлать его дѣйствительно для чиселъ, не превышающихъ 100. Само собою разумѣется, что примѣненіе, какъ этого способа „просѣиванія“, такъ и дѣленія на извѣстныя уже простыя числа при большихъ числахъ скоро становится совершенно неосуществимымъ вслѣдствіе того, что они требуютъ слишкомъ громоздкихъ вычисленій. Въ виду этого нахожденіе дѣлителей очень большихъ чиселъ, а также распознаваніе простыхъ чиселъ представляетъ собой одну изъ труднѣйшихъ задачъ математики. Поэтому старались составить таблицы, содержащія разложенія чиселъ и простыя числа до извѣстнаго предѣла. Мы имѣемъ теперь такія таблицы до 9 милліоновъ включительно *). Простыхъ чиселъ, меньшихъ 100, имѣется 15, меньшихъ 1000—имѣется 168, а до 9 000 000 по подсчету, произведенному Глейзеромъ (Glaisher), имѣется 602 567 простыхъ чиселъ. Итакъ, поскольку можно полагаться на точность таблицъ, мы можемъ считать извѣстными всѣ простыя числа, меньшія 9000000. Но такъ какъ всякое вычисленіе, производимое человѣкомъ, можетъ содержать ошибки, а такой огромный числовой матеріалъ, конечно, не былъ провѣренъ многими калькуляторами, то къ этимъ числамъ всегда нужно относиться съ извѣстной осторожностью.

За указанными предѣлами намъ извѣстны только отдѣльныя простыя числа; самое большое изъ нихъ слѣдующее:

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$ **)

---

*) Такія таблицы вычислены Л. Чернакомъ (L. Chernac) до 1 020 000, I. Буркгартомъ (J. Burckhardt) до 3 036 000, З. Дазомъ (Z. Dase) для чиселъ отъ 7-го до 9-го милліона; а Глайзеромъ (Glaisher) отъ 4-го до 6-го милліона включительно. Меньшія таблицы для настольнаго употребленія имѣются въ сочиненіи „Sammlung mathnmatischer Tafeln“ nach Vega, herausgegeben von Hülsse. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1865.

(**) Это было констатировано сначала Зельгофомъ, а потомъ подтверждено

Для разложенія весьма большихъ чиселъ пользовались средствами высшей математики и въ частности теоріей квадратичныхъ формъ. Ниже мы приведемъ простой примѣръ такого рода пріемовъ.

§ 17. Дроби.

1. Задача дѣленія числа a на другое число b въ томъ случаѣ, когда a кратно b, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ. Требуется найти такое число c, которое нужно помножить на данное число b, чтобы получить другое данное число a.

Съ этой точки зрѣнія дѣленіе можетъ быть разсматриваемо, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Въ предыдущей главѣ мы обобщили дѣйствіе, обратное сложенію; чтобы сдѣлать это дѣйствіе всегда выполнимымъ, мы вынуждены были ввести новаго рода числа—отрицательныя числа. Такимъ же образомъ мы можемъ обобщить и задачу дѣленія, но для этого необходимо вновь расширить область чиселъ, именно, кромѣ цѣлыхъ чиселъ, которыя мы изучали до сихъ поръ, необходимо ввести еще такъ называемыя дробныя числа, или дроби. Мы введемъ эти числа сначала совершенно формально и формально же установимъ для нихъ правила дѣйствій. Тѣмъ не менѣе новая система чиселъ, которую мы такимъ образомъ получимъ, также находитъ себѣ примѣненіе для выраженія извѣстныхъ соотношеній между объектами внѣшняго міра.

2. Къ понятію о дроби мы приходимъ проще всего слѣдующимъ путемъ. Пусть m будетъ знакъ, символъ, который можетъ обозначать любое цѣлое число (нуль, положительное или отрицательное число); пусть n будетъ знакъ, выражающій какое-нибудь положительное число. Символъ m/n или $\frac{m}{n}$, составленный изъ этихъ двухъ знаковъ, вполнѣ опредѣляется заданными значеніями чиселъ m и n. Такого рода символы мы будемъ называть дробными числами, или дробями; относительно нихъ мы установимъ слѣдующія соглашенія.

Число m называется числителемъ, а n—знаменателемъ дроби.

Если знаменатель равенъ, напримѣръ—2, 3, 4 и т. д. 10, то дробь читается такъ: m вторыхъ, m третьихъ, m четвертыхъ .... m десятыхъ.

Символы $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ должны имѣть одно и то же значеніе, каково бы ни было положительное число q ([3]).

другими изслѣдователями. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 31 Jahrgang, S. 174).

[3] Смыслъ послѣдняго соглашенія заключается въ слѣдующемъ: подъ дро-

Вслѣдствіе послѣдняго соглашенія, общаго дѣлителя, числителя и знаменателя каждой дроби можно опустить, не измѣняя значенія дроби (такъ напримѣръ, $\frac{2}{3}$ означаетъ то же, что $\frac{4}{6}$ или $\frac{10}{15}$ и т. д).

Уничтоженіе общаго дѣлителя q въ числителѣ и знаменателѣ, т. е. замѣна дроби $\frac{qm}{qn}$ дробью $\frac{m}{n}$, называется сокращеніемъ дроби на q.

Сообразно этому, для каждой дроби существуетъ нѣкоторая простѣйшая форма, которую называютъ несократимой формой; чтобы получить несократимую форму дроби, нужно раздѣлить числителя и знаменателя на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. Въ несократимой дроби числитель и знаменатель суть числа первыя между собой.

Если намъ дано нѣсколько дробей, то мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ, чтобы они имѣли одного и того же знаменателя. Для этого достаточно выбрать общимъ знаменателемъ любое число m, кратное всѣхъ знаменателей, и помножить числителя и знаменателя каждой дроби на множителя, недостающаго знаменателю до числа m. Такъ напримѣръ, любыя три дроби $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$ мы можемъ представить въ видѣ

$$\frac{a}{a_1} = \frac{ab_1c_1}{n}, \quad \frac{b}{b_1} = \frac{bc_1a_1}{n}, \quad \frac{c}{c_1} = \frac{ca_1b_1}{n},$$

гдѣ $n = a_1 b_1 c_1$.

3. Теперь мы условимся изъ двухъ дробей съ общимъ знаменателемъ считать большей ту, которая имѣетъ большаго числителя.

Это соглашеніе вполнѣ совмѣстимо съ опредѣленіемъ п. 2-го, потому что умноженіе или дѣленіе числителя и знаменателя на одно и то же число не вліяетъ на критерій, по которому мы условились отличать

бями мы разумѣемъ, какъ сказано, только опредѣленнаго рода символы; ближайшаго значенія мы этимъ символамъ не приписываемъ, сохраняя за собой право разумѣть подъ ними, что намъ угодно, приписать имъ то значеніе, какое мы найдемъ цѣлесообразнымъ. Мы уславливаемся, однако, подъ символами $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ всегда разумѣть одно и то же; это значитъ, если мы припишемъ какое либо значеніе символу $\frac{m}{n}$, то то же значеніе мы, въ силу этого соглашенія, должны приписать и символу $\frac{qm}{qn}$. Это соглашеніе допускаетъ, впрочемъ, и болѣе формальное (быть можетъ, и болѣе правильное) толкованіе. Но мы не считаемъ возможнымъ развивать здѣсь точку зрѣнія, которой авторъ, повидимому, не придерживается.

большую дробь отъ меньшей [4]).

Это соглашеніе удовлетворяетъ также основному требованію, которому должно удовлетворять всякое расположеніе чиселъ по величинѣ (§ 5). Если α, β и γ суть три дроби, и α больше, нежели β, и β больше, нежели γ, то α больше, нежели γ.

Условія, установленныя для сравненія дробей, могутъ быть такъ же выражены слѣдующимъ образомъ:

Изъ двухъ дробей $\alpha = \frac{a}{a_1}$ и $\beta = \frac{b}{b_1}$ первая меньше, равна или больше второй, смотря по тому, которое изъ трехъ соотношеній имѣетъ мѣсто

$$\begin{aligned} ab_1 &< ba_1 \\ ab_1 &= a_1b \\ ab_1 &> a_1b. \end{aligned} \qquad (2).$$

Это вытекаетъ непосредственно изъ предыдущаго опредѣленія, если мы приведемъ обѣ дроби къ общему знаменателю $a_1 b_1$, такъ что

$$\alpha = \frac{ab_1}{a_1b_1}, \beta = \frac{ba_1}{a_1b_1}.$$

4. Чтобы въ составъ дробныхъ чиселъ вошли также всѣ цѣлыя числа, введемъ слѣдующее соглашеніе: условимся разумѣть подъ дробью со знаменателемъ 1 цѣлое число, выраженное ея числителемъ, т. е. положимъ

$$\frac{a}{1} = a.$$

При этомъ условіи установленное выше расположеніе чиселъ по величинѣ (§ 5) вполнѣ согласуется съ критеріемъ сравненія дробныхъ чиселъ.

Такимъ образомъ совокупность всѣхъ дробныхъ чиселъ, включая сюда также и всѣ положительныя и отрицательныя цѣлыя числа, расположены въ одинъ рядъ, который мы будемъ называть **рядомъ раціональныхъ чиселъ**. Такъ же, какъ и у цѣлыхъ чиселъ, мы будемъ и у раціональныхъ чиселъ отличать ихъ абсолютную величину и ихъ

---

[4]) Авторъ хочетъ сказать слѣдующее: если, въ силу приведеннаго выше соглашенія, дробь $\frac{a}{a_1}$ окажется большей, нежели дробь $\frac{b}{b_1}$, то и дробь $\frac{ma}{ma_1}$ окажется большей, нежели $\frac{b}{b_1}$; это, конечно, очень легко доказать, приводя къ одному знаменателю, какъ дроби $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$, такъ и дроби $\frac{ma}{ma_1}$ и $\frac{b}{b_1}$.

алгебраическую величину. При сравненіи чиселъ по абсолютной величинѣ принимаются во вниманіе только ихъ абсолютныя или положительныя значенія; при алгебраическомъ же расположеніи чиселъ всѣ отрицательныя числа меньше положительныхъ, а изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ больше то, которое имѣетъ меньшую абсолютную величину. Дробь, абсолютная величина которой меньше единицы, называется правильной дробью. Правильной дробью является, слѣдовательно, такая дробь, числитель которой по абсолютной величинѣ меньше знаменателя.

5. Чтобы дать наглядное представленіе о дробяхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ указать важное примѣненіе ихъ къ реальнымъ объектамъ, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи, какъ на масштабѣ, на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой, скажемъ, на разстояніи сантиметра, это разстояніе мы будемъ называть единицей длины. Затѣмъ любую изъ этихъ точекъ обозначимъ числомъ нуль; далѣе, точки, расположенныя направо отъ нея, будемъ послѣдовательно обозначать цѣлыми положительными числами $+1$, $+2$, $+3, \ldots$; точки же, расположенныя налѣво, помѣтимъ числами -1, $-2, -3 \ldots$. Теперь раздѣлимъ каждый интервалъ на опредѣленное число, скажемъ, на n равныхъ частей; эти точки мы опять будемъ отмѣчать числами $+1$, $+2$, $+3 \ldots$ на право отъ нуля и числами -1, -2, $-3 \ldots$ налѣво. Эти точки даютъ въ такомъ случаѣ картину послѣдовательнаго расположенія тѣхъ дробей, которыя имѣютъ знаменателя n или могутъ быть приведены къ этому знаменателю. Въ приложеніяхъ обыкновенно полагаютъ n равнымъ 10 или степени 10.

6. Изъ соотношенія (2) п. 3-го слѣдуетъ, что изъ двухъ положительныхъ дробей съ одинаковымъ числителемъ та меньше, которая имѣетъ большій знаменатель. Въ самомъ дѣлѣ, если $a = b$ и $a_1 > b_1$, то $ab_1 < ba_1$; отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ указать сколько угодно дробей, которыя по абсолютной величинѣ меньше заданной дроби. Такимъ образомъ, дробь $\frac{1}{n}$ тѣмъ меньше, чѣмъ больше знаменатель n; какова бы ни была положительная дробь $\frac{a}{b}$, можно выбрать число n настолько большимъ, чтобы $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$.[5]) Это предложеніе представляетъ собой частный случай слѣдующей общей теоремы.

Если α и β суть два произвольныхъ раціональныхъ числа,

---

[5]) Въ силу § 14,1, мы всегда можемъ выбрать число n настолько большимъ, чтобы $na>b$; тогда $\frac{1}{n}<\frac{a}{b}$.

не равныхъ между собой, то можно найти сколько угодно дробей, содержащихся между α и β.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha > \beta$ и

$$\alpha = \frac{a}{a_1}, \beta = \frac{b}{b_1}.$$

Слѣдовательно, $ab_1 > ba_1$, а потому разность $ab_1 - ba_1$ представляетъ собой положительное цѣлое число. Вслѣдствіе этого можно всегда подобрать множитель q такимъ образомъ, чтобы произведеніе $q(ab_1 - ba_1)$ было больше, нежели произвольное заданное число r (§ 14, 1),—иными словами, чтобы между числами qab_1 и qba_1 содержалось больше, чѣмъ r цѣлыхъ чиселъ. Если x есть одно изъ такихъ чиселъ, то

$$qab_1 > x > qba_1;$$

а потому

$$\frac{a}{a_1} > \frac{x}{qa_1b_1} > \frac{b}{b_1}.$$

Въ приведенномъ выше представленіи раціональныхъ чиселъ при помощи дѣленія масштаба съ понятіемъ объ абсолютномъ уменьшеніи дроби связывается представленіе о постоянно убывающемъ отрѣзкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто при всѣхъ примѣненіяхъ дробныхъ чиселъ къ реальнымъ объектамъ; но съ точки зрѣнія теоретической въ установленномъ выше критеріи сравненія дробей не содержится ничего, объективно указывающаго на большую или меньшую величину.

7. До сихъ поръ мы ввели только дроби $\frac{m}{n}$ съ положительными знаменателями, и по существу дѣла этого достаточно; тѣмъ не менѣе часто бываетъ цѣлесообразно пользоваться также дробями съ отрицательными знаменателями. Эти дроби мы опредѣлимъ равенствомъ.

$$\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n}.\qquad (4)$$[6]

Только числа нуль мы никогда не будемъ употреблять въ качествѣ знаменателя дроби.

§ 18. Дѣйствія надъ дробями.

1. Чтобы сложить двѣ дроби или вычесть одну дробь изъ другой, ихъ приводятъ къ общему знаменателю (§ 17, 2). Общимъ знамена-

---

[6] Иными словами, подъ дробью $\frac{m}{-n}$ мы условимся разумѣть то же, что подъ дробью $\frac{-m}{n}$.

телемъ служитъ общее кратное знаменателей данныхъ дробей: если же данныя дроби несократимы, то проще всего взять за общій знаменатель наименьшее кратное ихъ знаменателей.

Если же

$$\alpha = \frac{a}{n} \text{ и } \beta = \frac{b}{n},$$

то мы опредѣлимъ сумму и разность этихъ дробей равенствами

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{n} \text{ и } \alpha - \beta = \frac{a-b}{n}. \qquad (1)$$

Согласно этому опредѣленію, сумма или разность двухъ дробей также представляетъ собой нѣкоторую дробь.

Результатъ, который мы такимъ образомъ получаемъ, иногда оказывается сократимой дробью (напр. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$); но результатъ этотъ никогда не зависитъ отъ той формы, въ которой заданы данныя дроби: если мы умножимъ числителя и знаменателя одной изъ дробей α и β или обѣихъ дробей на q, то въ результатѣ числитель и знаменатель также окажутся умноженными на q.

Сообразно этому уже ясно, какъ слѣдуетъ опредѣлить сумму нѣсколькихъ дробей; легко также видѣть, что и основные законы этихъ операцій, которыя были изложены для цѣлыхъ чиселъ въ §§ 7 и 12, сохраняютъ свою силу и для дробей. Вообще, вычисленія надъ дробями, поскольку рѣчь идетъ только о сложеніи и вычитаніи, представляютъ собой не что иное, какъ вычисленія надъ цѣлыми числами въ примѣненіи къ особаго рода объектамъ, единица которыхъ называется $1/n$. Характернымъ для этихъ вычисленій является лишь то, что здѣсь приходится предварительно привести данныя числа къ опредѣленному виду, а затѣмъ результатъ, если возможно, сократить.

2. Умноженіе. Подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ab}{a_1 b_1}$. Мы получаемъ такимъ образомъ правило умноженія, которое непосредственно распространяется на случай какого угодно числа сомножителей.

Чтобы перемножить нѣсколько дробей, нужно перемножить всѣхъ числителей и всѣхъ знаменателей. Произведеніемъ дробей будетъ дробь, числителемъ которой служитъ произведеніе всѣхъ числителей, а знаменателемъ—произведеніе всѣхъ знаменателей заданныхъ дробей.

Само собой разумѣется, что въ результатѣ можно сдѣлать всѣ сокращенія, которыя онъ допускаетъ. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ содержится, какъ частный случай, въ этомъ общемъ правилѣ умноженія дробей.

Что сочетательный и перемѣстительный законы остаются въ силѣ и при умноженіи дробей, вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія, потому что этимъ законамъ слѣдуютъ въ отдѣльности произведенія, служащія числителемъ и знаменателемъ произведенія дробей.

Точно также и относительно знака произведенія остается въ силѣ то же правило, что и при умноженіи цѣлыхъ чиселъ: произведеніе будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, имѣется ли четное или нечетное число отрицательныхъ сомножителей.

И здѣсь произведеніе равно нулю въ томъ и только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей равенъ нулю (⁷).

Но относительно измѣненія абсолютной величины произведеніе дробей слѣдуетъ не тѣмъ законамъ, что произведеніе цѣлыхъ чиселъ. Именно:

Произведеніе $\alpha\beta$ по абсолютной величинѣ больше или меньше, нежели α, смотря по тому, представляетъ ли собой β правильную или неправильную дробь.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, то $\alpha\beta$ меньше или больше, нежели α, смотря по тому, которое изъ двухъ неравенствъ имѣетъ мѣсто (§ 17, 3)

$$aa_1b < aa_1b_1 \text{ или } aa_1b_1 > aa_1b_1;$$

если a и a_1 суть положительныя числа, то это сводится къ тому, будетъ ли $b < b_1$ или $b > b_1$, т. е. будетъ ли β правильная или неправильная дробь.

3. Если α, β, γ суть три дроби, изъ которыхъ послѣдняя отлична отъ нуля, то равенство $\alpha\gamma = \beta\gamma$ будетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если $\alpha = \beta$. Это также слѣдуетъ изъ предложенія § 17, 3. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, $\gamma = \frac{c}{c_1}$; если $\alpha\gamma = \beta\gamma$, то

$$acb_1c_1 = bca_1c_1;$$

(⁷) Опредѣленіе § 17,2 вводитъ также дроби вида $\frac{0}{n}$, согласно опредѣленію § 17,4, $\frac{0}{1} = 0$; а такъ какъ $\frac{0}{n} = \frac{0 \,.\, n}{1 \,.\, n}$, то $\frac{0}{n}$ равно нулю при всякомъ знаменателѣ. Легко показать, что произведеніе нѣсколькихъ дробей обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей имѣетъ видъ $\frac{0}{n}$.

а такъ какъ числа c и c_1 отличны отъ нуля, то отсюда, въ силу послѣдняго предложенія § 8, слѣдуетъ, что

$$ab_1 = ba_1,$$

т. е. $\alpha = \beta$.

4. Дѣленіе. Въ числовомъ ряду, который мы такимъ образомъ получили, задача о дѣленіи можетъ быть поставлена и рѣшена во всей ея общности.

Пусть α и β будутъ два произвольныхъ раціональныхъ числа. Требуется найти такое число ξ, которое нужно помножить на β, чтобы получить число α, такъ что

$$\alpha = \xi\beta. \qquad (2)$$

Эта задача, очевидно, не имѣетъ вовсе рѣшенія, если $\beta = 0$, а α не равно нулю, потому что при $\beta = 0$ произведеніе $\xi\beta = 0$, каково бы ни было значеніе множителя ξ. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то ξ можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе—каждое число удовлетворяетъ требованію.

Если, однако, β отлично отъ нуля, то задача можетъ имѣть не болѣе одного рѣшенія. Дѣйствительно, если бы существовало два числа ξ и ξ', удовлетворяющихъ требованію, то должно было бы имѣть мѣсто равенство $\xi\beta = \xi'\beta$; согласно п. 3, это возможно только въ томъ случаѣ, когда $\xi = \xi'$.

Итакъ, дѣло сводится къ тому, чтобы, найти одно число, удовлетворяющее требованію (2). Если $\alpha = \frac{a}{a_1}$ и $\beta = \frac{b}{b_1}$, то мы получимъ такое число, полагая

$$\xi = \frac{ab_1}{ba_1}, \qquad (3)$$

ибо въ такомъ случаѣ

$$\beta\xi = \frac{ab_1\,b}{ba_1b_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Образованіе числа ξ мы будемъ называть дѣленіемъ числа α на число β; число α мы будемъ называть дѣлимымъ, β—дѣлителемъ, ξ—частнымъ.

Если α и β суть цѣлыя числа, то ξ есть дробь, которая сводится къ цѣлому числу, когда α кратно β. Такимъ образомъ задача о дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ безъ остатка можетъ быть, вообще говоря, разрѣшена только при помощи дробей и содержится, какъ частный случай, въ задачѣ о дѣленіи дробей.

Частное отъ дѣленіе двухъ дробей мы будемъ также изображать такъ:

$$\alpha : \beta, \ \alpha/\beta, \ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ab_1}{ba_1} \tag{4}$$

(α дѣленное на β); вмѣстѣ съ тѣмъ мы выразимъ полученный нами результатъ слѣдующимъ правиломъ.

Чтобы раздѣлить одну дробь на другую, нужно помножить числителя дѣлимаго на знаменателя дѣлителя и знаменателя дѣлимаго на числителя дѣлителя; первое произведеніе будетъ числителемъ частнаго, второе его знаменателемъ.

Въ выраженіи (4) число α также называютъ часто числителемъ, а β—знаменателемъ дроби α/β.

Дробь $1/\alpha$ называется обратной по отношенію къ α; она получается путемъ обращенія числа α, т. е. путемъ замѣщенія числителя и знаменателя другъ другомъ.

Дѣленіе можетъ быть приведено къ умноженію при помощи слѣдующаго правила:

5. Чтобы раздѣлить дробь α на дробь β можно помножить дѣлимое на обращеннаго дѣлителя.

Вслѣдствіе того, что равенство (2) при $\beta = 0$ либо вовсе не имѣетъ рѣшенія, либо имѣетъ ихъ безчисленное множество, изъ ариѳметики дѣленіе на нуль вовсе исключено. Однако, въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ высшаго анализа бываетъ цѣлесообразно приписывать извѣстное значеніе также символу $1/0$.

6. Возвышеніе въ степень. Когда понятіе объ умноженіи дробей установлено, то возвышеніе въ степень опредѣляется само собой. Если α есть дробь, а n натуральное число, то α^n представляетъ собой произведеніе n сомножителей, равныхъ α. Число α называется основаніемъ, n—показателемъ, α^n — n-ой степенью числа α. Всѣ эти понятія опредѣлены только для цѣлыхъ и положительныхъ значеній числа n. Мы обобщимъ, однако, это понятіе; именно—мы распространимъ его на тотъ случай, когда показатель равенъ нулю или имѣетъ отрицательное значеніе. Мы достигнемъ этого лучше всего тѣмъ, что распространимъ на всѣ эти случаи основное равенство

$$\alpha^m . \alpha^n = \alpha^{m+n}, \tag{5}$$

которое для цѣлыхъ и положительныхъ показателей (⁸) вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія.

(⁸) Иными словами, мы постараемся опредѣлить степень съ отрицательнымъ или нулевымъ показателемъ такимъ образомъ, чтобы равенство (5) осталось въ силѣ при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ показателя.

Если мы, сообразно этому, положимъ, въ равенствѣ (5) $n = 0$, то получимъ

$$\alpha^m \cdot \alpha^0 = \alpha^m;$$

если поэтому α, а стало быть, и α^m отличны отъ нуля, что мы и будемъ теперь предполагать, то

$$\alpha^0 = 1 \qquad (6).$$

Далѣе, если мы положимъ въ равенствѣ (5) $n = - m$, то получимъ

$$\alpha^m \cdot \alpha^{-m} = \alpha^0 = 1,$$

такъ что

$$\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}.$$

7. Итакъ, если мы хотимъ, чтобы соотношенiе (5) сохранило свою силу, то мы должны подъ α^0 разумѣть 1, а подъ α^{-m} —число, обратное α^m.

Равенство $1^m = 1$ остается справедливымъ и при этомъ обобщенiи.

8. Если α есть неправильная дробь, то степень α^n растетъ вмѣстѣ съ показателемъ n; Это вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленiя степени, какъ произведенiя равныхъ сомножителей. Мы имѣемъ, однако, теперь возможность установить ближе ходъ этого возрастанiя.

Если p есть цѣлое положительное число, большее, нежели 1, то α^p больше, нежели α, и мы можемъ вставить между α и α^p число γ такимъ образомъ, что

$$\alpha^p > \gamma > \alpha.$$

Умножая обѣ части этого неравенства на α, мы получимъ:

$$\alpha^{p+1} > \gamma\alpha = \gamma + \gamma(\alpha-1) > \gamma + \alpha(\alpha-1) > \alpha.$$

Если мы повторимъ то же разсужденiе, замѣняя, однако, p черезъ $p+1$ и γ черезъ $\gamma + \alpha(\alpha-1)$, то мы получимъ:

$$\alpha^{p+2} > \gamma + 2\alpha(\alpha-1);$$

отсюда помощью индукцiи заключаемъ, что для каждаго цѣлаго положительнаго числа n

$$\alpha^{p+n} > \gamma + n\alpha(\alpha-1). \qquad (8)$$

Такъ какъ $\alpha(\alpha-1)$ есть положительное число, то число n можно выбрать настолько большимъ, чтобы $\gamma + n\alpha(\alpha-1)$ было больше любого заданнаго числа c. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

Если $\alpha > 1$ и c есть произвольное заданное положительное число, то $\alpha^n > c$, коль скоро n превышаетъ нѣкоторое достаточно большое число m. Это представляетъ собой обобщеніе предложенія § 10,5.

Примѣняя это предложеніе къ обращенному числу, мы легко заключаемъ отсюда, что α^n становится меньше любого заданнаго положительнаго числа c, если показатель n принимаетъ достаточно большія значенія.

Возвратимся, однако, къ тому случаю, когда $\alpha > 1$. Изъ соотношенія (8) слѣдуетъ, что

$$\alpha^{n+p} > n\alpha(\alpha-1);$$

поэтому

$$\alpha^n > n\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p}.$$

Если мы здѣсь положимъ для сокращенія $\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p} = \delta$, то получимъ:

$$\alpha^n > \delta n, \tag{9}$$

гдѣ δ представляетъ собой положительное число, зависящее отъ α, но не зависящее отъ n.

Если $k+1$ есть произвольное заданное цѣлое положительное число, то, какъ бы ни было велико цѣлое число m, всегда можно найти два послѣдовательныхъ кратныхъ числа $k+1$, между которыми лежитъ число m, такъ что

$$(k+1)n \leqq m < (k+1)(n+1). \tag{10}$$

Возводя теперь обѣ части неравенства (9) въ $(k+1)$-ую степень и принимая во вниманіе, что $\alpha^m \geqq \alpha^{n(k+1)}$, получимъ:

$$\alpha^m > \delta^{k+1}\, n^{k+1}. \tag{11}$$

Далѣе изъ соотношенія (10) находимъ:

$$n > \frac{m-k-1}{k+1} = \frac{m}{k+1}\left(1 - \frac{k+1}{m}\right).$$

Если при этомъ m выбрано больше, нежели $2(k+1)$, то предыдущее неравенство даетъ (8)

$$n > \frac{m}{2(k+1)};$$

---

(8) Ибо въ этомъ случаѣ

$$\frac{k+1}{m} < \frac{1}{2} \text{ и } 1 - \frac{k+1}{m} > \frac{1}{2}$$

поэтому, согласно неравенству (11),

$$\alpha^m > m^k \cdot \frac{\delta^{k+1} m}{[2(k+1)]^{k+1}} \cdot \qquad (12)$$

Съ другой стороны, если c есть произвольное заданное число, то мы можемъ взять число m настолько большимъ, чтобы

$$\frac{\delta^{k+1}\ m}{[2(k+1)]^{k+1}} > c \qquad (13)$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha^m > cm^k.$$

Такимъ образомъ доказано слѣдующее предложеніе:

Если $\alpha > 1$, а k есть произвольное заданное натуральное число и, наконецъ, c также представляетъ собою сколь угодно большое положительное число, то $\alpha^m > cm^k$, коль скоро m превосходитъ нѣкоторое достаточно большое число.

Это предложеніе выражаютъ еще такъ: α^m возрастаетъ быстрѣе, нежели сколь угодно высокая степень числа m.

§ 19. Десятичныя дроби.

1. При нашей индійской системѣ счисленія каждое натуральное число можно изображать сколь угодно большимъ количествомъ цифръ; для этого достаточно приписать съ лѣвой стороны надлежащее число нулей. Такимъ образомъ 03 означаетъ то же, что 3, 000 650 то же, что 650. Но эти нули съ лѣвой стороны излишни, и потому ихъ не пишутъ.

Разсмотримъ теперь дроби, знаменателями которыхъ служатъ степени числа 10; такія дроби имѣютъ видъ

$$\alpha = A.10^{-n}, \qquad (1)$$

гдѣ A есть натуральное число. Въ виду сдѣланнаго выше замѣчанія, такого рода дроби можно опредѣленнымъ образомъ обозначать безъ знаменателя, пользуясь только значеніемъ мѣста, занимаемаго цифрой.

Съ этой цѣлью мы пишемъ число A такъ, чтобы оно имѣло болѣе n цифръ, скажемъ $n+m+1$ цифръ гдѣ $m \geqq 0$ [9]). Цифру высшаго разряда мы обозначимъ черезъ a_m, а затѣмъ слѣдующія цифры обозна-

---

[9]) Если число A нормально изображается болѣе, нежели n цифрами, то мы сохраняемъ обычное изображеніе; если же число A въ обычномъ изображеніи имѣетъ меньше n цифръ, то мы его дополняемъ нулями съ лѣвой стороны, такъ чтобы получать $n+1$ цифръ. Число m при этомъ условіи всегда имѣетъ опредѣленное значеніе; но можно сдѣлать m больше, если писать съ лѣвой стороны еще лишніе нули.

чимъ тою же буквою съ послѣдовательно убывающими индексами, такъ что нѣкоторые изъ этихъ индексовъ будутъ отрицательны.

$$A = a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots\, a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots\, a_{-n};$$

цифры a имѣютъ, конечно, значенія, принадлежащія ряду 0,1, ... 9. Въ случаѣ надобности вначалѣ должно быть написано надлежащее число нулей. Теперь положимъ

$$\alpha = A.10^{-n} = a_m\, a_{m-1} \dots\, a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \dots\, a_{-n}, \qquad (2)$$

приписывая этому выраженію значеніе

$$a_m 10^m + a_{m-1}\, 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + a^{-1}\, 10^{\ 1} + \\ + a^{-2}\, 10^{-2} + \dots + a_{-n}\, 10^{-n}.$$

Такимъ образомъ запятая указываетъ, гдѣ начинаются отрицательныя степени 10. (*)

Если $A < 10^m$, т. е. если α есть правильная дробь, то всѣ цифры, стоящія до запятой, должны быть нулями. Въ этомъ случаѣ передъ запятой достаточно писать только одинъ нуль. Можно было бы даже опустить и этотъ нуль, но было бы очень непривычно, а иногда даже неясно начинать число просто запятой.

Нули же, стоящіе непосредственно послѣ запятой, если таковые имѣются, имѣютъ существенное значеніе—точно такъ же, какъ нули, стоящіе въ концѣ цѣлаго числа. Напротивъ того, послѣ послѣдней цифры можно приписать сколько угодно нулей. Обыкновенно нули, стоящіе въ концѣ десятичной дроби, послѣ значащихъ цифръ, опускаются.

Если мы будемъ пользоваться для обозначенія числа въ десятичной системѣ общимъ символомъ a, съ послѣдовательными индексами, т. е. будемъ писать

$$a_{m-1}\ a_{m-2} \dots\, a_n,$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя и отрицательныя нулевыя значенія ($m > n$), а самые символы a_{m-1}, a_{m-2} .... означаютъ цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то мы можемъ вовсе не ставить запятой; значеніе цифры вполнѣ опредѣляется индексомъ.

Дробь, имѣющая знаменателемъ степень десяти и написанная въ формѣ (2), называется десятичною дробью. Въ отличіе отъ десятичныхъ дробей остальныя называются простыми дробями.

2. Дѣйствія надъ десятичными дробями совершаются тѣми же способами, что и надъ цѣлыми числами; при сложеніи и при вычитаніи

(*) Этимъ обозначеніемъ десятичныхъ дробей въ первый разъ сталъ пользоваться, повидимому, Joost Bürgi (1552—1632 или 1633); онъ, имѣлъ, правда, предшественниковъ, но вполнѣ правильная постановка этого вопроса принадлежитъ ему (Cantor. Gesch. der Mathematik, Bd. II. S. 617).

нужно писать числа такимъ образомъ, чтобы цифры, выражающія одни и тѣ же разряды, стояли одни подъ другими. Если при этомъ приписать въ случаѣ нужды нули такъ, чтобы всѣ числа имѣли послѣ запятой одинаковое число цифръ, то вычисленіе можно вести такъ, какъ будто-бы запятой и вовсе не было; въ результатѣ нужно только поставить запятую на томъ-же мѣстѣ, которое она занимаетъ въ данныхъ числахъ.

3. Если мы умножимъ десятичную дробь на 10, то запятая перемѣстится на одинъ знакъ вправо; при умноженіи же на 10^h она перемѣщается на h знаковъ вправо. Если мы дѣлимъ десятичную дробь на 10^h, то запятая перемѣщается на h знаковъ влѣво. Эти операціи всегда могутъ быть выполнены, иногда бываетъ только нужно приписать справа или слѣва надлежащее число нулей.

4. Если нужно перемножить двѣ десятичныя дроби α и β, изъ которыхъ первая имѣетъ μ, а вторая ν десятичныхъ знаковъ послѣ запятой, то опускаютъ прежде всего обѣ запятыя, т. е. перемножаютъ числа $10^\mu . \alpha$ и $10^\nu . \beta$. Произведеніе равно поэтому $10^{\mu+\nu}\alpha\beta$; чтобы получить $\alpha\beta$ остается раздѣлить полученное число на $10^{\mu+\nu}$, т. е. отдѣлить въ результатѣ съ правой стороны $\mu+\nu$ знаковъ запятой. Такимъ образомъ умноженіе десятичныхъ дробей приводится къ умноженію цѣлыхъ чиселъ.

§ 20. Приближенныя значенія десятичныхъ дробей.

1. Значеніе цифръ въ десятичной дроби становится тѣмъ меньше, чѣмъ далѣе эта цифра отстоитъ отъ запятой по направленію слѣва направо. Однако, часто случается, что при числовыхъ заданіяхъ или вычисленіяхъ цифры, занимающія послѣднія мѣста, начиная съ нѣкоторой, вовсе не принимаются во вниманіе („опускаются“); иногда это обусловливается тѣмъ, что дальнѣйшія цифры вовсе неизвѣстны, иногда-же эти цифры не имѣютъ значенія по самому характеру задачи. Дробь, которую мы получаемъ, опуская послѣдніе десятичные знаки въ десятичной дроби, называется приближеннымъ ея значеніемъ. Пріемъ этотъ находитъ себѣ оправданіе въ слѣдующемъ предложеніи:

Написанное въ десятичной системѣ число

$$\rho = a_{n-1}\ a_{n-2}\ ....\ a_k \qquad (1)$$

(гдѣ, какъ n, такъ и k могутъ имѣть отрицательныя значенія, но $n > k$ (§ 19,1)) всегда меньше нежели 10^n [10]).

---

[10] Здѣсь указатель $n-1$ при первой цифрѣ указываетъ, что число начинается n-ымъ разрядомъ; если это число цѣлое, то $k = 0$; если-же оно имѣетъ десятичные знаки, то k имѣетъ отрицательное значеніе; если, наконецъ, число предста-

Въ самомъ дѣлѣ, если мы замѣнимъ всѣ цифры a_{n-1}, a_{n-2} .... a_k десятками, то мы это число увеличимъ, или по крайней мѣрѣ, не уменьшимъ; такъ что

$$\rho \leqslant 9.10^k + 9.10^{k+1} + ... + 9.10^{n-1}.$$

Если мы сюда придадимъ 10^k, т. е. увеличимъ послѣднюю цифру единицей, то мы получимъ

$$\begin{aligned} 9.10^k + 10^k &= 10^{k+1}, \\ 9.10^{k+1} + 10^{k+1} &= 10^{k+2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 9.10^{n-1} + 10^{n-1} &= 10^n. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и опуская съ обѣихъ сторонъ числа 10^{k+1}, 10^{k+2} .... 10^{n-1}, получимъ

$$\rho + 10^k \leqslant 10^n;$$

слѣдовательно, подавно

$$\rho < 10^n, \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ:

Значеніе написаннаго въ десятичной системѣ числа α

$$\alpha = a_m \, a_{m-1} \, ... \, a_n \, a_{n-1} \, ... \, a_k$$

больше, нежели

$$A = a_m \, a_{m-1} \, ... \, a_n$$

и меньше, нежели

$$A' = a_m \, a_{m-1} \, ... \, (a_n+1) = A + 10^n.$$

Если $a_n = 9$, то здѣсь, конечно, нужно вмѣсто a_{n+1} (a_n+1) написать $(a_{n+1}+1)$ 0.

Такимъ образомъ, ошибка, которую мы дѣлаемъ, опуская цифры, стоящія послѣ a_n, меньше, нежели 10^n.

Вообще говоря, замѣняя десятичную дробь ея приближеннымъ значеніемъ, всегда стараются сдѣлать абсолютную величину ошибки возможно меньшей. Сохраняя одно и тоже число десятичныхъ знаковъ, мы можемъ замѣнить число α либо числомъ A, либо числомъ A'.

Такъ какъ

$$\alpha = A + \rho = A' - (10^n - \rho),$$

гдѣ ρ имѣетъ прежнее значеніе (1), то ошибка въ первомъ случаѣ равна

вляетъ собой правильную дробь, т. е. начинается десятичными знаками, то не только k, но и n имѣетъ отрицательное значеніе.

ρ, во второмъ случаѣ равна $\rho' = 10^n - \rho$. Послѣдняя ошибка меньше первой, если $\rho > 10^n - \rho$, т. е. если $2\rho > 10^n$. Это имѣетъ мѣсто, если первая отбрасываемая цифра $a_{n-1} = 5, 6, 7, 8$ или 9; напротивъ, $\rho < 10^n - \rho$, если a_{n-1} равно 0, 1, 2, 3, 4. Единственное исключеніе имѣетъ мѣсто, если $a_{n-1} = 5$, а всѣ слѣдующія цифры равны 0; въ этомъ случаѣ $\rho = \rho'$ и оба приближенія A и A' даютъ ту же ошибку. Мы получаемъ отсюда слѣдующее правило:

Опуская въ десятичной дроби для полученія приближеннаго ея значенія, послѣдніе десятичные знаки, слѣдуетъ увеличить послѣднюю удерживаемую цифру на единицу, если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ больше 4-хъ.

2. При производствѣ ариѳметическихъ дѣйствій надъ приближенными значеніями десятичныхъ дробей опущенные десятичные знаки могутъ иногда оказать вліяніе на тѣ знаки, которые мы желаемъ сохранить. Если, напримѣръ, мы складываемъ k приближенныхъ дробей, составленныхъ по указанному выше правилу, то послѣдній десятичный знакъ, который мы сохраняемъ, можетъ оказаться maximum на $k/2$ единицъ больше или меньше истиннаго своего значенія. Но этого наибольшаго значенія ошибка достигаетъ только въ томъ случаѣ, если ошибки всѣхъ приближеній имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ и всѣ достигаютъ наибольшаго значенія. Если-же намъ даны только приближенія, то о вѣроятности той или другой ошибки можно судить по правиламъ, указываемымъ исчисленіемъ вѣроятностей. Большія ошибки оказываются при этомъ менѣе вѣроятными, чѣмъ меньшія.

Если мы имѣемъ еще какія нибудь свѣдѣнія относительно ошибки, если мы знаемъ, напримѣръ, что имѣется число съ положительной ошибкой или число съ отрицательной ошибкой, то предѣлы возможной ошибки результата еще болѣе сближаются.

3. Если нужно перемножить двѣ приближенныя десятичныя дроби, то обыкновенный пріемъ умноженія въ примѣненіи къ низшимъ десятичнымъ знакамъ даетъ совершенно безполезный результатъ и представляетъ собой до нѣкоторой степени безплодную работу. Въ этихъ случаяхъ пользуются поэтому такъ называемымъ сокращеннымъ умноженіемъ.

Соображенія, на которыхъ этотъ пріемъ основанъ, лучше всего уясняются на примѣрѣ.

Положимъ, что намъ нужно перемножить два четырехзначныхъ числа

$$\alpha = a_3\ a_2\ a_1\ a_0,$$
$$\beta = b_3\ b_2\ b_1\ b_0.$$

Если мы начнемъ умноженіе съ высшаго разряда множителя β, то вычисленіе, согласно обычному способу умноженія, расположится слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\cline{1-4}
a_3\,b_3 & a_2\,b_3 & a_1\,b_3 & a_0\,b_3 & * & * & * \\
 & a_3\,b_2 & a_2\,b_2 & a_1\,b_2 & a_0\,b_2 & * & * \\
 & & a_3\,b_1 & a_2\,b_1 & a_1\,b_1 & a_0\,b_1 & * \\
 & & & a_3\,b_0 & a_2\,b_0 & a_1\,b_0 & a_0\,b_0 \\
\hline
c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0\,.
\end{array}$$

При этомъ, естественно, какъ въ произведеніяхъ $a_h\,b_k$, такъ и въ суммахъ c_k, превосходящихъ число 9, десятки должны быть присоединены къ слѣдующему разряду. Однако, на тѣхъ мѣстахъ, на которыхъ въ нашей схемѣ поставлены звѣздочки, должны были стоять не нули, а неизвѣстныя намъ цифры. Такимъ образомъ цифры c_2, c_1, c_0 могутъ также оказаться ошибочными. При этомъ цифры по направленію отъ c_2 къ c_0 становятся все менѣе надежными. Ошибка въ числѣ c_2 можетъ въ неблагопріятномъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя, изъ которыхъ оно получается достигаютъ наибольшаго значенія, отразиться на цифрѣ c_4, можетъ даже дорости до 3 единицъ этого разряда. Вслѣдствіе этого въ окончательномъ результатѣ цифра c_2 уже не проставляется, но отдѣльныя слагаемыя этого разряда оказывается нужнымъ вычислить для исправленія цифръ c_3 и c_4. Точно также, каждымъ свѣдѣніемъ, какое мы имѣемъ относительно цифръ, помѣченныхъ звѣздочками, можно воспользоваться для исправленія результата. Но умѣлое примѣненіе всѣхъ этихъ пріемовъ на практикѣ достигается только упражненіемъ *).

(*) Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig, Teubner. 1900. Полная теорія приближеннаго вычисленія довольно сложна. Введеніемъ въ этотъ вопросъ могутъ служить небольшія сочиненія:

В. Циммерманъ. Приближенныя вычисленія.

В. Ермаковъ. Приближенное вычисленіе. Кіевъ, 1905.

ГЛАВА VI

Ирраціональныя числа.

§ 21. Извлеченіе квадратныхъ корней.

1. Среди чиселъ натуральнаго ряда есть такія, которыя представляютъ собою вторыя степени (квадраты) другихъ чиселъ того же ряда, напримѣръ:

$$1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2,\ 16 = 4^2,\ 25 = 5^2, \qquad (1)$$
$$36 = 6^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 8^2,\ 81 = 9^2,\ 100 = 10^2.$$

Эти числа 1, 4, 9, 16, ... называются полными квадратами, такъ какъ они являются вторыми степенями чиселъ 1, 2, 3, 4, ...; эти послѣднія называются корнями (точнѣе квадратными корнями) предыдущихъ. Это взаимоотношеніе изображается такъ:

$$1 = \sqrt{1},\ 2 = \sqrt{4},\ 3 = \sqrt{9},\ 4 = \sqrt{16} \text{ и т. д.}$$

Число n^2 есть n-ый полный квадратъ; разность между n-ымъ и $(n-1)$-ымъ квадратами равна, слѣдоватетьно, числу $n^2 - (n-1)^2$, или $2n - 1$, т. е. представляетъ собою n-ое нечетное число.

2. Задача. Дано цѣлое число a, написанное въ десятичной системѣ; нужно узнать, представляетъ ли оно собой полный квадратъ или нѣтъ; въ первомъ случаѣ нужно найти его корень, во второмъ—опредѣлить наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ a, и найти корень изъ этого послѣдняго числа.

Вычисленіе, помощью котораго рѣшается предложенная задача, называется извлеченіемъ квадратнаго корня и обозначается знакомъ $\sqrt{}$ впереди числа a. Если послѣднее не превосходитъ ста, задача можетъ быть рѣшена непосредственно помощью таблицы (1).

Предположимъ, что задача наша рѣшена для какого-нибудь числа a, т. е. найдено число α, удовлетворяющее условію

$$\alpha^2 \leqslant a < (\alpha+1)^2 \qquad (2).$$

Мы покажемъ, какимъ образомъ, пользуясь этимъ, можно рѣшить ту же задачу для другого числа a_1, связаннаго съ числомъ a равенствомъ:

$$a_1 = 100a + 10b + c,$$

гдѣ буквы b и c обозначаютъ нѣкоторыя цифры.

Число a_1 имѣетъ двумя цифрами больше, нежели число a, и получается, если приписать къ послѣднему двѣ цифры bc.

Мы положимъ,

$$\alpha_1 = 10\alpha + \beta; \qquad (4)$$

намъ остается опредѣлить число β, удовлетворяющее условію:

$$(10\alpha + \beta)^2 \leq a_1 < (10\alpha + \beta + 1)^2. \qquad (5)$$

Докажемъ, что буква β обозначаетъ нѣкоторую цифру. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы было $\beta \geq 10$, то, согласно условію (5), мы имѣли бы

$$100(\alpha + 1)^2 \leq (10\alpha + \beta)^2 \leq 100a + 10b + c,$$

или

$$(\alpha + 1)^2 \leq a + b10^{-1} + c10^{-2},$$

а въ виду того, что $(\alpha + 1)^2$ есть цѣлое число, и кромѣ того $b10^{-1} + c10^{-2}$ меньше единицы, мы пришли бы къ заключенію, что

$$(\alpha + 1)^2 \leq a;$$

это же противорѣчитъ условію (2), согласно которому $(\alpha + 1)^2 > a$.

Такимъ образомъ число β должно имѣть одно изъ десяти значеній: 0, 1, 2, ... 9; согласно-же соотношенію (5), это должно быть самое большее число, удовлетворяющее условію

$$\beta\,(20\alpha + \beta) \leq 100(a - \alpha^2) + 10b + c \qquad (6).$$

Нетрудно поэтому рѣшить, какое именно значеніе нужно выбрать для числа β. На практикѣ это дѣлается слѣдующимъ образомъ. Число $10(a - \alpha^2) + b$ дѣлимъ на число 2α, и въ частномъ получимъ для числа β нѣкоторое предварительное значеніе, которое послѣ соотвѣтствующей повѣрки иногда должно быть уменьшено на одну или нѣсколько единицъ; при нѣкоторомъ навыкѣ вычисленіе дѣлается легко и быстро. На этомъ основанъ извѣстный алгориѳмъ извлеченія квадратнаго корня. Примѣръ:

$$\sqrt{8\,.\,40\,.\,00\,.\,00} = 2898$$

$$\begin{array}{l}
4 \\ \hline
440 : 4 \mid 8 \\
384 \\ \hline
\;\;5600 : 56 \mid 9 \\
\;\;5121 \\ \hline
\;\;\;\;47900 : 578 \mid 8 \\
\;\;\;\;46304 \\ \hline
\;\;\;\;\;\;1596
\end{array}$$

Вторая цифра результата 8 здѣсь получена послѣ дѣленія 44 : 4, т. е. частное 11 пришлось уменьшить на три единицы.

2. Пользуясь указаннымъ пріемомъ, можно получить десятичную дробь, квадратъ которой сколь угодно мало отличается отъ даннаго числа a. Съ этой цѣлью ищемъ цѣлое число α^2, которое представляетъ собою наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ $10^{2n}a$. Тогда имѣемъ

$$\alpha^2 \leqslant 10^{2n}a < (\alpha+1)^2. \qquad (7)$$

Дѣля всѣ члены послѣдняго выраженія на 10^{2n} и вводя обозначеніе,

$$\alpha_n = \alpha 10^{-n}, \qquad (8)$$

получимъ

$$\alpha^2{}_n \leqslant a < (\alpha_n + 10^{-n})^2. \qquad (9)$$

Число $10^{2n}a$ получится изъ числа a, если къ послѣднему приписать $2n$ нулей; число α_n получится изъ числа α, если отдѣлимъ послѣднія n цифръ запятой. Если послѣднюю цифру дроби α_n увеличимъ на одну единицу, то получится уже слишкомъ большое значеніе.

Числа α_n называются приближенными значеніями квадратнаго корня изъ числа a. Такъ, въ вышеприведенномъ примѣрѣ число 28,98 есть приближенное значеніе квадратнаго корня изъ 840.

Тѣмъ же пріемомъ можно пользоваться и при нахожденіи приближенныхъ значеній квадратныхъ корней изъ десятичныхъ дробей. Предварительно нужно лишь разбить дробь на грани въ ту и въ другую сторону отъ запятой по двѣ цифры въ каждой грани, кромѣ первой, въ которой иногда можетъ быть только одна цифра; въ концѣ дроби, если нужно, приходится приписать еще одинъ нуль.

§ 22. Ирраціональныя числа.

О каждомъ числѣ натуральнаго ряда легко судить, представляетъ ли оно собою полный квадратъ или нѣтъ, если только извѣстно, каковы первоначальные множители этого числа. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ a, b, c, … отличныя другъ отъ друга первоначальныя числа, а α, β, γ, … пусть будутъ положительные показатели; пусть далѣе

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots;$$

число m представляетъ собою полный квадратъ, если всѣ показатели— числа четныя; это условіе необходимое и достаточное. Это слѣдуетъ изъ теоремы объ однозначности разложенія натуральнаго числа на первоначальныхъ множителей.

Если указанное условіе выполнено, т. е. $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$, $\gamma = 2\gamma'$,… то квадратный корень числа m представится въ такой формѣ:

$$\sqrt{m} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots$$

Если же число m не представляетъ собою полнаго квадрата, то нельзя также указать такой дроби p/q, квадратъ которой равнялся бы числу m.

Дѣйствительно, если у какого-нибудь первоначальнаго множителя a числа m показателемъ степени служитъ нечетное число α, то равенство $mq^2 = p^2$ невозможно; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ показатель числа a представляетъ собой нечетное число, то это равенство было бы возможно только въ томъ случаѣ, если бы и въ число p^2 множитель a входилъ съ нечетнымъ показателемъ.

Точно также несократимая дробь m/n представляетъ собою полный квадратъ нѣкоторой дроби p/q лишь въ томъ случаѣ, когда числа m и n оба представляютъ собой полные квадраты.

Дѣйствительно, предположимъ, что числа m и n не имѣютъ ни одного общаго множителя; положимъ далѣе, что въ составъ числа m входитъ простое число a съ нечетнымъ показателемъ α; если бы при этихъ условіяхъ имѣло мѣсто равенство $mq^2 = np^2$, то правая его часть np^2 должна была бы содержать множителя a^α; въ виду того, однако, что знаменатель n не содержитъ множителя a, мы должны были бы притти къ заключенію, что полный квадратъ p^2 содержитъ множитель a въ нечетной степени; это же не можетъ имѣть мѣста*).

2. Такимъ образомъ выполненіе дѣйствія, обратнаго возвышенію въ степень, оказывается иногда невозможнымъ уже при показателѣ 2. Задача эта представляется въ той же степени неразрѣшимой, какъ вопросъ о дѣленіи цѣлыхъ чиселъ до введенія дробей.

---

*) Полагаютъ, что Пиѳагоръ первый ясно понялъ невозможность выразить числомъ (ἄλογον) корень квадратный изъ числа, которое не представляетъ собой полнаго квадрата, напр. квадратный корень изъ числа 2, который представляетъ собою отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ. У Евклида (Elemente X. 117, Heiberg, т. III, стр. 409) находимъ указанное еще Аристотелемъ доказательство этого предложенія. Доказательство это по существу совпадаетъ съ приведеннымъ нами въ текстѣ: нельзя указать двухъ цѣлыхъ чиселъ, которыя не имѣли бы общихъ множителей и удовлетворяли бы условію $2x^2 = y^2$; дѣйствительно, при наличности такого равенства число y было бы четное (такъ какъ его квадратъ, т. е. y^2 было бы четнымъ числомъ $2x^2$); слѣдовательно, квадратъ его y^2 былъ бы кратнымъ четырехъ. Но если число $2x^2$ кратно четырехъ, то число x^2 кратно 2, слѣдовательно, число x было бы также четнымъ и имѣло бы съ числомъ y общаго множителя 2, что противорѣчитъ условію.

Дедекиндъ въ своемъ сочиненіи „Непрерывность и ирраціональныя числа“ приводитъ другое доказательство, не основанное на теоремахъ о разложеніи числа на первоначальныхъ множителей.

Если же мы тѣмъ не менѣе желаемъ сдѣлать нашу задачу разрѣшимой, намъ необходимо вновь расширить понятіе о числѣ, введя числа новой природы; эти послѣднія мы будемъ называть вообще ирраціональными числами; въ противоположность имъ мы будемъ впредь называть раціональными числа, которыми мы занимались до сихъ п ръ; они должны подходить, какъ частный случай, подъ вновь расширенное понятіе о числѣ.

Эти новыя числа, какъ и вообще всякаго рода числа, являются продуктомъ свободнаго творчества нашего духа; пользуемся ли мы этимъ расширеннымъ понятіемъ о числѣ или нѣтъ, даемъ ли ему новое названіе или нѣтъ, это исключительно вопросъ точки зрѣнія и цѣлесообразности.

Вопросъ этотъ не имѣетъ значенія при практическихъ вычисленіяхъ, такъ какъ здѣсь приходится, въ концѣ концовъ, оперировать исключительно надъ раціональными числами. Однакожъ указанное расширеніе понятія о числѣ необходимо для внутренней гармоніи ученія о числѣ; безъ этой эволюціи формулировка и изложеніе многихъ теоремъ, особенно въ высшемъ анализѣ, представляла бы огромныя трудности и требовала бы чрезвычайной пространности.

Мы имѣемъ, конечно, право давать особое названіе каждому строго опредѣленному родовому понятію. Но при этомъ безусловно необходимо установить содержаніе понятія съ такой опредѣленностью, чтобы во всѣхъ случаяхъ можно было безъ всякаго сомнѣнія рѣшить, что подходитъ и что не подходитъ подъ это понятіе; лишь такія безукоризненно опредѣленныя понятія могутъ составлять тотъ матеріалъ, надъ которымъ оперируетъ математика.

Понятіе объ ирраціональномъ числѣ, какъ и вообще понятіе о числѣ, есть родовое понятіе. Можно установить безконечное число системъ такъ, чтобы между индивидумами любыхъ двухъ такихъ системъ могло существовать однозначное соотвѣтствіе, и всѣ такія системы одинаково хорошо могли бы служить той цѣли, ради которой вводятся ирраціональныя числа¹). Напримѣръ, мы можемъ исходить отъ безконечныхъ десятичныхъ дробей, или отъ безконечныхъ непрерыв-

---

¹) Эта мысль требуетъ, повидимому, поясненія. Изложеніе ариѳметики начато введеніемъ комплекса логическихъ объектовъ (понятій), которые названы натуральными числами. Этотъ комплексъ затѣмъ расширенъ введеніемъ новыхъ элементовъ,—дробныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Теперь необходимо произвести дальнѣйшее расширеніе этого комплекса. Та цѣль, которая имѣется при этомъ въ виду можетъ быть достигнута различными путями. Иначе говоря, можно различнымъ образомъ построить комплексы такъ, что въ составъ каждого изъ нихъ войдутъ всѣ раціональныя числа и каждый изъ нихъ можетъ удовлетворить поставленной цѣли; но всѣ эти комплексы будутъ имѣть одинаковую мощность. Указанные въ текстѣ примѣры не могутъ получить здѣсь значительнаго развитія, такъ какъ это потребовало бы пространныхъ разсужденій.

ныхъ дробей; той же цѣли служатъ и „числовые ряды“ Г. Кантора (G. Cantor) и „характеристики“ Христофеля (Christoffell). При выборѣ точки исхода мы будемъ руководствоваться лишь большей простотой и удобопонятностью: въ этомъ отношеніи предпочтенія заслуживаетъ предложенное Дедекиндомъ (Dedekind) понятіе сѣченія.

Совокупность всѣхъ элементовъ каждой изъ системъ одинаковой мощности, о введеніи которыхъ мы говорили выше, образуетъ родовое понятіе, которое мы называемъ ирраціональнымъ числомъ. Совершенно безразлично, какимъ представителемъ этого понятія мы будемъ пользоваться для его изученія. Такого рода представителей этого понятія мы будемъ иногда также называть ирраціональными числами (напр. безконечную десятичную дробь).

3. Легче всего и проще всего было бы воспользоваться пространственными представленіями и разсматривать числа, какъ отрѣзки прямой[2]). Исходнымъ *пунктомъ тогда послужила бы аксіома примѣрно такого* содержанія:

Если совокупность точекъ прямой (расположенной, скажемъ, горизонтально передъ нашими глазами) подраздѣляется на двѣ группы A и A' такого рода, что каждая точка группы A лежитъ влѣво отъ каждой точки группы A', то самая прямая дѣлится нѣкоторой опредѣленной точкой α на двѣ части, изъ которыхъ одна заключаетъ въ себѣ всѣ точки группы A, а другая всѣ точки группы A'.

Существованіе такой точки α составляетъ аксіому, которая никоимъ образомъ не можетъ быть доказана чисто логическимъ путемъ: источникъ ея коренится въ природѣ нашихъ пространственныхъ представленій. Строго говоря, нельзя доказать даже существованіе такихъ точекъ, которыя геометрически вполнѣ возможно строить, напримѣръ, средины какого-либо отрѣзка.

Поэтому при всей наглядности указанной аксіомы мы не можемъ положить ее въ основу чисто ариѳметическаго построенія понятія о числѣ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ ею, однако, пользоваться, но не для доказательства положеній, а лишь въ качествѣ иллюстраціи, въ качествѣ такъ сказать, символическаго языка, для фиксированія мыслей и для большей доступности изложенія.

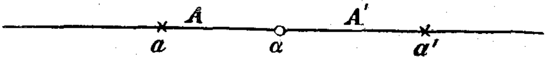
4. Сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ назовемъ подраздѣленіе совокупности раціональныхъ чиселъ (положительныхъ и отрицательныхъ) на двѣ группы такого рода, что каждое число группы A меньше каждаго числа группы A'.

---

[2]) Т. е. остановиться на этомъ именно комплексѣ представителей понятія о числѣ.

Такое сѣченіе мы символически будемъ изображать знакомъ A/A' или, короче, греческой буквой α; любое раціональное число группы A мы будемъ обозначать буквой a, а число группы A'—буквой a'. Такимъ же образомъ мы будемъ пользоваться другими буквами трехъ алфавитовъ.

Эти обозначенія наглядно представлены на приложенной здѣсь фигурѣ, изображающей числовую прямую.



Фиг. 2.

Каждое раціональное число r образуетъ одно или, точнѣе говоря, два сѣченія R/R'.

Дѣйствительно, всѣ числа, меньшія числа r, мы отнесемъ къ группѣ R, числа, бóльшія его—къ группѣ R'; самое же число r мы, по желанію, можемъ отнести либо къ группѣ R, либо къ группѣ R'; сообразно этому, число r образуетъ два сѣченія: въ одномъ изъ нихъ число r есть наибольшее изъ чиселъ группы R, въ другомъ наименьшее изъ чиселъ группы R'. Произведенныя такимъ образомъ сѣченія мы называемъ раціональными сѣченіями[3]).

Есть, однако, и другія сѣченія, которыя не производятся раціональными числами: мы ихъ назовемъ ирраціональными сѣченіями; слѣдующій примѣръ доказываетъ существованіе ирраціональныхъ сѣченій.

Къ группѣ A отнесемъ всѣ тѣ числа, квадратъ которыхъ меньше 2, къ группѣ A' всѣ числа, квадратъ которыхъ больше 2. Тогда группами A и A' исчерпываются всѣ раціональныя числа, такъ какъ такого раціональнаго числа, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2, не существуетъ; кромѣ того, любое число a меньше любого a'. Такимъ образомъ группы A и A' образуютъ нѣкоторое сѣченіе, которому, однако, не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число, его образующее; т. е. нельзя указать ни наибольшаго числа въ группѣ A, ни наименьшаго числа въ группѣ A'. Дѣйствительно, если, напримѣръ, $a^2<2$, то всегда можно указать такое натуральное число n, чтобы

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2,$$

или иначе

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2.$$

---

[3]) Подъ раціональнымъ сѣченіемъ авторъ разумѣетъ, слѣдовательно, такое дѣленіе раціональныхъ чиселъ, при которыхъ существуетъ наибольшее число группы R или наименьшее число группы R'; про это именно число онъ говоритъ, что оно производитъ сѣченіе—это формулировано имъ же въ текстѣ. Если, напримѣръ, мы раздѣлимъ всѣ положительныя числа на двѣ группы, относя къ группѣ R всѣ правильныя дроби, а къ группѣ R' всѣ неправильныя дроби, то получимъ раціональное сѣченіе, которое производится числомъ 1, наименьшимъ числомъ группы R'.

Это значитъ, существуетъ число $a+\frac{1}{n}$, квадратъ котораго меньше 2, хотя само оно больше числа a[4]).

Такимъ же способомъ можно доказать, что въ группѣ A' не существуетъ наименьшаго числа.

5. Итакъ группамъ A и A' соотвѣтствуетъ раціональное сѣченіе A/A', если можно указать наибольшее число a въ первой группѣ или наименьшее число a' во второй; если же ни того ни другого не существуетъ, то группамъ соотвѣтствуетъ ирраціональное сѣченіе A/A'.

Поэтому, если A/A' означаетъ ирраціональное сѣченіе, то для любого числа a можно указать другія, бо̀льшія его, числа a той же группы A, а для любого числа a' группы A' можно указать меньшія его числа a' той же группы.

Въ каждомъ сѣченіи A/A' существуетъ сколько угодно паръ чиселъ a и a' разность которыхъ $a—a'$ меньше любого заданнаго числа d.

Для доказательства выберемъ такое натуральное число n, чтобы $\frac{1}{n} < d$. Выберемъ два такихъ цѣлыхъ положительныхъ или отрицательныхъ числа k и k', чтобы число k/n было меньше нѣкотораго числа a (т. е. изъ группы A), а число k'/n было больше нѣкотораго числа a'; подобрать такія числа k и k' всегда возможно. Тогда число k/n должно быть отнесено къ группѣ A, а число k'/n—къ группѣ A'.

Перебираемъ по порядку числа слѣдующаго ряда:

$$\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n},\ \frac{k+2}{n},\ \ldots\ \frac{k'}{n}.$$

Крайній лѣвый членъ принадлежитъ группѣ A', крайній правый—группѣ A'; гдѣ-нибудь между $\frac{k}{n}$ и $\frac{k'}{n}$ мы найдемъ такой членъ—пусть это будетъ число m/n—который самъ еще принадлежитъ группѣ A, между тѣмъ, какъ непосредственно слѣдующій относится уже къ группѣ A'. Тогда имѣемъ

$$\frac{m}{n} = a,\quad \frac{m+1}{n} = a'$$

и

$$a'-a = 1/n < d.$$

Въ ирраціональномъ сѣченіи между такими двумя числами a и a' можно указать сколько угодно другихъ чиселъ обѣихъ группъ[5]). Въ раціональ-

---

[4]). Иначе говоря, каково бы ни было число a первой группы (A), всегда существуетъ большее число $a+\frac{1}{n}$, также принадлежащее первой группѣ.

[5]) Такъ какъ ни въ группѣ A нѣтъ наибольшаго числа, ни въ группѣ A' нѣтъ наименьшаго числа, то мы можемъ уменьшать число a и увеличивать число a'.

номъ сѣченіи между нашими двумя числами a и a' также существуетъ сколько угодно другихъ чиселъ, удовлетворяющихъ тому же требованію; но если одно изъ этихъ чиселъ a или a' есть крайнее число соотвѣтствующей группы, то варіировать можно только второе число.

Обоимъ сѣченіямъ, производимымъ раціональнымъ числомъ r, мы будемъ относить это число r, какъ соотвѣтствующее этимъ сѣченіямъ; обоимъ этимъ сѣченіямъ мы, такъ сказать, приписываемъ одно и то же численное значеніе r.

Каждому же ирраціональному сѣченію, мы отнесемъ нѣкоторый индивидуумъ новой категоріи чиселъ, ирраціональное число, которое мы будемъ обозначать символомъ α.

Въ нижеслѣдующемъ изложеніи латинскія буквы означаютъ раціональныя, греческія—ирраціональныя числа.

6. Теперь нужно расположить ирраціональныя числа по величинѣ и при томъ такъ, чтобы каждое раціональное число нашло себѣ опредѣленное мѣсто въ этомъ распредѣленіи; расположеніе раціональныхъ чиселъ по величинѣ должно при этомъ находиться въ согласіи съ тѣмъ расположеніемъ ихъ, которое было установлено выше (§17,3).

Разсмотримъ два различныхъ сѣченія A/A' и B/B'. Положимъ, что въ группѣ A' можно указать одно и только одно число a'_1, равное нѣкоторому числу b_1 группы B; въ такомъ случаѣ a'_1 есть наименьшее число въ группѣ A', а число b_1 есть наибольшее въ группѣ B7). Стало быть наши сѣченія A/A' и B/B' таковы, что въ группѣ A' есть наименьшее число a_1' а въ группѣ B' наибольшее число b_1, т. е. наши сѣченія раціональны, и при томъ имѣютъ одно и то же численное значеніе ($\alpha = \beta$). Имѣя это въ виду, устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Мы принимаемъ, что число α меньше числа β,

$$\alpha < \beta,$$

если можно указать по крайней мѣрѣ два числа a' группы A', которыя были бы въ то же время числами b изъ группы B.

Въ этомъ случаѣ есть безчисленное множество чиселъ a' и чиселъ b, удовлетворяющихъ равенству $a' = b$, ибо таковы всѣ числа, заключенныя между тѣми двумя, которыя предусмотрѣны опредѣленіемъ. Наглядно это усматривается изъ фигуры 3. Ею же можно пользоваться для доказательства слѣдующаго предложенія:

Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

---

7) Дѣйствительно, по условію, всякое другое число группы A' равно числу b' группы B', а потому оно больше, нежели a'_1 (ибо $b' > b_1$). Такимъ же образомъ всякое другое число группы B равно нѣкоторому числу группы A, а потому меньше, нежели a'_1.

Если мы припишемъ раціональнымъ сѣченіямъ числовыя значенія, равныя производящимъ ихъ раціональнымъ числамъ, то данныя здѣсь опредѣленія равенства и неравенства совпадаютъ съ обычными: изъ двухъ раціональныхъ чиселъ первое меньше второго, если можно указать третье раціональное число, которое больше перваго и меньше второго[8].

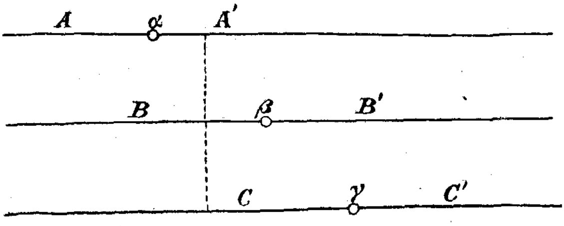


Fig. 3.

Если дано сѣченіе A/A', то каждое число $-a'$ меньше любого числа $-a$; обозначивъ совокупность чиселъ $-a$ и $-a'$ соотвѣтственно черезъ $-A$ и $-A'$, получимъ новое сѣченіе $-A'/-A$. Соотвѣтствующее число обозначается символомъ $-\alpha$ и называется ирраціональнымъ числомъ, противоположнымъ числу α.

7. Казалось бы, что, пользуясь принципомъ сѣченій, можно получить еще новаго рода числа: примѣрно, мы могли бы отнести къ одной группѣ **A** совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, меньшихъ числа α, а къ группѣ **A'** совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, не меньшихъ числа α. Покажемъ, что, поступая такимъ образомъ, мы не расширяемъ понятія о числѣ, и что получаемыя указаннымъ образомъ сѣченія **A**/**A'** въ области ирраціональныхъ чиселъ имѣютъ такія же численныя значенія, какъ сѣченія въ области раціональныхъ чиселъ, такъ что новыя сѣченія не обогащаютъ имѣющагося уже запаса чиселъ.

Дѣйствительно, пусть **A**/**A'** означаетъ сѣченіе въ области ирраціональныхъ чиселъ, такъ что каждое число α группы **A** меньше любого числа α' группы **A'**. Чтобы показать, что такого рода сѣченіе не вызываетъ потребности въ новаго рода числахъ, т. е. что оно производится какимъ-нибудь уже извѣстнымъ намъ числомъ, мы докажемъ, что либо въ группѣ **A** есть наибольшее число σ, либо въ группѣ **A'** есть наименьшее число σ, такъ что ирраціональное число σ и есть то, которымъ производится сѣченіе **A**/**A'**.

Всякое раціональное число r, будучи частнымъ случаемъ ирраціональнаго числа, заключается либо въ группѣ **A**, либо же въ группѣ **A'**;

---

[8] Здѣсь умѣстно замѣтить, что ирраціональное число α больше любого числа a группы A соотвѣтствующаго сѣченія A/A' и меньше любого числа a' группы A'.

обозначая раціональныя числа группы **A** черезъ a, группы **A′** черезъ a', получимъ сѣченіе A/A' въ области раціональныхъ чиселъ, каковое опредѣляетъ собою нѣкоторое ирраціональное число σ; какъ и всякое ирраціональное число оно непремѣнно заключается либо въ группѣ **A**, либо въ группѣ **A′**. Въ первомъ случаѣ число σ должно быть наибольшимъ среди чиселъ группы **A**; въ самомъ дѣлѣ, если бы нѣкоторое число α этой группы было больше числа σ, то послѣднее было бы также меньше всякаго раціональнаго числа, заключеннаго между σ и α, и содержащагося поэтому еще въ группѣ **A**, а слѣдовательно, и въ группѣ A; но число σ не можетъ быть меньше ни одного изъ чиселъ группы A. Такимъ образомъ, если только число σ входитъ въ группу **A**, оно должно быть здѣсь наибольшимъ. Такъ же можно доказать, что если число σ принадлежитъ группѣ **A′**, то оно должно быть въ ней наименьшимъ. Итакъ, мы заключаемъ, что въ сѣченіи **A/A′** либо существуетъ наибольшее число въ группѣ **A**, либо наименьшее число въ группѣ **A′**.

§ 23. Верхняя и нижняя граница.

1. Означимъ черезъ T нѣкоторый числовой комплексъ, элементы котораго суть раціональныя или ирраціональныя числа $\tau, \tau' \ldots$; если всѣ эти числа меньше нѣкотораго числа t, то существуетъ одно и только одно число γ, имѣющее слѣдующія два свойства:

a) Каждое число комплекса T меньше числа γ или, по крайней мѣрѣ, не превышаетъ γ.

b) Напротивъ, всякому числу ε, которое меньше числа γ, отвѣчаетъ, по крайней мѣрѣ, одно такое число τ комплекса T, которое заключается между числами ε и γ, такъ что число τ удовлетворяетъ условію:

$$\varepsilon < \tau \leqslant \gamma. \qquad (1)$$

Число γ, существованіе котораго мы сейчасъ докажемъ, называется верхней границей числового комплекса T.

Короче его можно опредѣлить такъ:

Верхней границей комплекса называется такое число, котораго не превышаетъ ни одно число τ этого комплекса, но сколь угодно близко къ которому имѣются числа комплекса.

Прежде всего легко усмотрѣть, что можетъ быть только одно такое число γ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что такихъ чиселъ было бы два, напримѣръ γ и γ', при чемъ $\gamma < \gamma'$; въ виду того, что число γ' есть верхняя граница, а число γ меньше, нежели γ', мы могли бы, согласно пункту b), указать число τ, удовлетворяющее условію $\gamma < \tau \leqslant \gamma'$, такъ что число γ, будучи меньше нѣкотораго числа τ нашего комплекса, не могло бы служить верхней его границей. Итакъ, верхняя граница, если таковая существуетъ, можетъ быть только одна.

Чтобы доказать ея существованіе, замѣтимъ, что относительно каждаго числа r мы должны сказать одно изъ двухъ: либо въ нашемъ комплексѣ есть число τ, превышающее r—такія числа r будемъ обозначать буквой c; либо же ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа r; такія числа r обозначимъ буквой c'. Легко видѣть, что имѣются какъ числа c, такъ и числа c': къ числамъ c' относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя превышаютъ число t; къ числамъ c относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа τ нашего комплекса T. Любое число c меньше любого числа c', такъ что числа c, c' образуютъ сѣченіе C/C' и опредѣляютъ нѣкоторое число γ, которое, какъ легко усмотрѣть, удовлетворяетъ условіямъ a) и b).

Дѣйствительно, если бы нашлось хоть одно число τ комплекса T, превышающее γ, то существовало бы раціональное число r такого рода, что $\gamma < r < \tau$, и это число r съ одной стороны, будучи меньше τ, должно быть отнесено къ числамъ c; съ другой стороны, превышая γ, оно должно быть отнесено къ числамъ c' [9]); мы заключаемъ изъ этого противорѣчія, что ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа γ. Если же $\varepsilon < \gamma$, то между числами ε и γ заключено нѣкоторое число c; слѣдовательно, согласно опредѣленію чиселъ c, существуетъ нѣкоторое число τ, удовлетворяющее условію $\varepsilon < c < \tau \leqslant \gamma$, такъ что число γ обладаетъ также и свойствомъ b).

2. Аналогично доказывается слѣдующее предложеніе:

Если всѣ числа комплекса T превышаютъ нѣкоторое число t', то существуетъ одно и только одно число γ', имѣющее слѣдующія два свойства:

a′) Число γ' не превышаетъ ни одного числа нашего комплекса T.

b′) Если же нѣкоторое число ε' больше числа γ', то въ комплексѣ T можно указать по крайней мѣрѣ одно число τ', которое заключено между числами γ' и ε', такъ что τ' удовлетворяетъ неравенству:

$$\gamma' \leqslant \tau' < \varepsilon' \ .$$

Это число γ' называется нижней границей числового комплекса T. Существованіе ея доказывается тѣмъ же путемъ, что и существованіе верхней границы, или же проще такъ: числовой комплексъ $-T$, состоящій изъ чиселъ $-\tau, -\tau', \ldots$ имѣетъ, по доказанному, верхнюю границу; перемѣнивъ знакъ ея, получимъ нижнюю границу комплекса T. Нѣкоторые комплексы имѣютъ только верхнюю границу, другіе—только нижнюю. Такъ напримѣръ, комплексъ положительныхъ чиселъ имѣетъ своей нижней границей нуль, а верхней границы не имѣетъ. Наоборотъ, со-

---

[9]) См. примѣчаніе 8).

вокупность отрицательныхъ чиселъ нижней границы не имѣетъ, а верхней границей ея служитъ нуль. Совокупность правильныхъ положительныхъ дробей имѣетъ и нижнюю границу—нуль, и верхнюю границу—единицу.

Верхняя или нижняя граница можетъ входить въ составъ комплекса, какъ элементъ его, но можетъ и не входить въ него. Въ первомъ случаѣ нижняя граница называется минимумомъ комплекса, а верхняя граница—максимумомъ его[10]).

Если сѣченіе A/A' опредѣляетъ собою число α, то это послѣднее одновременно является верхней границей всѣхъ чиселъ a и нижней границей всѣхъ чиселъ a'.

§ 24. Дѣйствія надъ ирраціональными числами.

1. Теперь займемся опредѣленіемъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій въ области ирраціональныхъ чиселъ. Для этого достаточно остановиться подробно на одномъ какомъ-либо дѣйствіи, напр. сложеніи: прочія тогда уже не представятъ намъ ничего существенно новаго. Пусть α и β обозначаютъ числа, опредѣляемыя соотвѣтственно сѣченіями A/A' и B/B'; въ виду того, что всѣ числа a и b не превышаютъ соотвѣтственно чиселъ α и β, а эти послѣднія не превышаютъ чиселъ a' и b', то комплексъ суммъ $a+b$ имѣетъ нѣкоторую верхнюю границу γ, а комплексъ суммъ $a'+b'$ имѣетъ нижнюю границу γ'. Обѣ эти границы γ и γ' не могутъ быть отличны другъ отъ друга.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы $\gamma'<\gamma$, мы вынуждены были бы заключить, что нѣкоторая сумма $a'+b'$ меньше нѣкоторой суммы $a+b$: стоитъ лишь выбрать первую достаточно близко къ γ', а вторую достаточно близко къ γ; но неравенство $a'+b'<a+b$ невозможно, такъ какъ всегда $a'>a$ и $b'>b$; такъ что невозможно, чтобы $\gamma'<\gamma$.

Если же мы примемъ, что $\gamma<\gamma'$, то мы могли бы подобрать два раціональныхъ числа c и c', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\gamma<c<c'<\gamma'.$$

Всѣ суммы $a'+b'$ были бы больше числа c', а всѣ суммы $a+b$ были бы меньше числа c, т. е.

$$c' < a' + b' \quad \text{для всѣхъ значеній } a' \text{ и } b'$$
$$c > a + b \quad \text{для всѣхъ значеній } a \text{ и } b.$$

---

[10]). Если, напримѣръ, комплексъ T состоитъ изъ всѣхъ чиселъ вида $\frac{k-1}{k}$, гдѣ k есть цѣлое положительное число, то его нижней границей служитъ 0, а верхней 1; но ни то ни другое число комплексу не принадлежитъ. Если, однако, мы присоединимъ число 0 къ нашему комплексу, то нижняя граница войдетъ въ его составъ и будетъ служить его минимумомъ. Если мы присоединимъ къ комплексу и 1, то и верхняя граница войдетъ въ составъ комплекса и будетъ служить его максимумомъ.

Слѣдовательно, мы получили бы, что для всѣхъ чиселъ a, b, a', b' имѣетъ мѣсто неравенство

$$c' - c < (a' - a) + (b' - b).$$

Это заключеніе противорѣчитъ доказанному раньше предложенію, что положительныя разности $a' - a$ и $b' - b$ можно сдѣлать сколь угодно малыми, если подобрать соотвѣтствующимъ образомъ числа a и a', b и b'. (§ 22,5).

Итакъ, числа γ и γ' не могутъ быть отличны другъ отъ друга имѣя это въ виду, мы устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Суммой $\alpha + \beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу всѣхъ суммъ $a + b$ и равную ей нижнюю границу всѣхъ суммъ $a' + b'$.

2. Раньше, чѣмъ дать опредѣленіе разности ирраціональныхъ чиселъ, замѣтимъ, что разности $a - b'$ и $a' - b$ имѣютъ соотвѣтственно верхнюю и нижнюю границу. Повторяя буквально разсужденія предыдущаго параграфа, мы докажемъ, что обѣ границы не могутъ быть отличны другъ отъ друга. Сообразно этому

разностью $\alpha - \beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу чиселъ $a - b'$ и равную ей нижнюю границу чиселъ $a' - b$.

3. Дадимъ теперь опредѣленіе умноженія и дѣленія, имѣя въ виду сперва лишь положительныя числа α и β; числа a и числа b мы точно также пока беремъ исключительно положительныя. Тогда легко по предыдущему найти, что произведенія ab и частныя a/b' имѣютъ верхнюю границу, а произведенія $a'b'$ и a'/b имѣютъ нижнюю границу, при чемъ обѣ границы совпадаютъ.

Произведеніемъ $\alpha\beta$ положительныхъ чиселъ α и β называется общая граница (соотвѣтственно верхняя или нижняя) чиселъ ab и $a'b'$. Частнымъ α/β положительныхъ чиселъ α и β называется верхняя граница частныхъ a/b' и равная ей нижняя граница чиселъ a'/b.

Чтобы распространить умноженіе и дѣленіе и на отрицательныя ирраціональныя числа, мы оставимъ для нихъ въ силѣ тѣ условія, которыя мы приняли относительно умноженія раціональныхъ чиселъ (§ 13); именно:

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta, \quad -\alpha(-\beta) = \alpha\beta$$

$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}; \quad \frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Если одинъ изъ множителей произведенія $\alpha\beta$ или дѣлимое частнаго α/β есть нуль, то соотвѣтствующее произведеніе или частное мы считаемъ равнымъ нулю. По прежнему, дѣлитель β частнаго α/β не долженъ быть нулемъ (случай, когда дѣлитель равенъ нулю, исключается изъ разсмотрѣнія).

4. Практическая цѣнность данныхъ нами опредѣленій основныхъ четырехъ дѣйствій обнаруживается при разсмотрѣніи вытекающей изъ этихъ опредѣленій важной теоремы,—назовемъ ее теоремой о непрерывности. Эта теорема имѣетъ слѣдующее содержаніе.

Возьмемъ два произвольныхъ числа α и β причемъ разъ навсегда замѣтимъ, что случай, когда дѣлитель β частнаго α/β есть нуль, исключается; черезъ $f(\alpha, \beta) = \rho$ обозначимъ результатъ какого-либо изъ четырехъ основныхъ дѣйствій, которому мы желаемъ совершить надъ числами α, β; далѣе, черезъ $f(a,b) = r$ обозначимъ результатъ тѣхъ же дѣйствій, если выполнить ихъ надъ раціональными числами a, b.

Возмемъ теперь два произвольныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g < \rho < g'. \tag{1}$$

Утверждаемъ, что числа a_1, a_1', b_1 и b_1', удовлетворяющія неравенствамъ

$$a_1 < \alpha < a_1', \quad b_1 < \beta < b_1' \tag{2}$$

можно подобрать такимъ образомъ, чтобы при всякой парѣ раціональныхъ чиселъ a, b, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$a_1 < a < a_1', \quad b_1 < b < b_1', \tag{3}$$

выполнялось неравенство

$$g < r < g'. \tag{4}$$

Смыслъ всѣхъ этихъ неравенствъ словами можно передать такъ:

Къ результату $f(\alpha, \beta)$ нѣкотораго дѣйствія надъ ирраціональными числами можно подойти **сколь угодно** близко, составляя результатъ $f(a, b)$ того же дѣйствія надъ раціональными числами: стоитъ лишь подобрать числа a и b такъ, чтобы они **достаточно** мало отличались отъ чиселъ α и β.

Такія числа a и b называются приближенными значеніями чичелъ α и β.

Доказательство приведенной теоремы вытекаетъ непосредственно изъ данныхъ нами опредѣленій дѣйствій надъ ирраціональными числами; мы ограничимся доказательствомъ теоремы для того случая, когда разсматриваемое дѣйствіе есть сложеніе, т. е. $\rho = \alpha + \beta$. Такъ какъ число ρ есть верхняя граница суммъ $a + b$ и нижняя граница суммъ $a' + b'$, то для всякой пары чиселъ c и c' сѣченія C/C', соотвѣтствующаго числу ρ, мы можемъ подобрать сумму $a_1 + b_1$ и сумму $a'_1 + b'_1$ такъ, чтобы численныя значенія этихъ суммъ заключались соотвѣтственно между числами c и ρ, и числами ρ и c'; имѣемъ, слѣдовательно,

$$c < a_1 + b_1 < a_1' + b_1' < c'. \tag{5}$$

Если теперь выбрать такую пару чиселъ a и b, чтобы удовлетворялись неравенства (3), то получимъ:

$$a_1 + b_1 < a + b < a_1' + b_1'; \qquad (6)$$

откуда слѣдуетъ, что

$$c < a + b < c',$$

что и требовалось доказать (¹¹).

5. Изложенную теорему можно обобщить:

Основная теорема о непрерывности. Обозначимъ черезъ ρ результатъ нѣкотораго вычисленія $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, состоящаго въ произвольной комбинаціи основныхъ четырехъ дѣйствій и выполненнаго надъ числами α, β, $\gamma, \ldots$; выберемъ далѣе любую пару чиселъ g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g < \rho < g'. \qquad (7)$$

Утверждаемъ, что можно подобрать числа a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, $c_1'\ldots$, удовлетворяющія неравенствамъ

$$a_1 < \alpha < a_1',\ b_1 < \beta < b'_1,\ c_1 < \gamma < c_1', \ldots \qquad (8)$$

такимъ образомъ, чтобы число $r = F(a, b, c, \ldots)$ удовлетворяло соотношенію

$$g < r < g', \qquad (9)$$

коль скоро

$$a_1 < a < a_1',\quad b_1 < b < b_1',\quad c_1 < c < c_1', \ldots \qquad (10)$$

Мы докажемъ эту теорему по способу математической индукціи, исходя изъ того частнаго случая, который мы изложили въ пунктѣ 4.

Итакъ, допустимъ, что теорема наша доказана для нѣкоторой системы чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \qquad (11)$$

и для нѣкотораго дѣйствія

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \rho, \qquad (12)$$

а также для другой системы чиселъ

$$\mu, \nu, \ldots \qquad (13)$$

и для дѣйствія

$$\varphi(\mu, \nu, \ldots) = \sigma; \qquad (14)$$

нужно доказать, что теорема справедлива и для дѣйствія

$$F(\rho, \sigma) = \tau, \qquad (15)$$

выполненнаго надъ числами ρ и σ.

Выбираемъ произвольно два числа h и h' такъ, чтобы

$$g < \tau < g'. \qquad (16)$$

---

[11] Ясно, что числа c и c' замѣняютъ здѣсь числа g и g' неравенства (1).

Согласно пункту 4, можно подобрать для чиселъ ρ и σ значенія k, l, k', l', которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k < \rho < k', \quad l < \sigma < l', \qquad (17)$$

при чемъ результатъ $F(r, s)$ заключается между тѣми же предѣлами g и g', что и число τ, если только выбрать приближенныя значенія r и s чиселъ ρ и σ въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (17), т. е. если

$$k < r < k', \ l < s < l'. \qquad (18)$$

Послѣднее же условіе можетъ быть выполнено. Дѣйствительно, согласно *нашему предположенію, теорема доказана для чиселъ ρ и σ*; это значитъ, выбравъ достаточно тѣсные предѣлы для раціональныхъ приближенныхъ значеній a, b, c, ..., m, n, ... чиселъ α, β, γ, ..., μ, ν, ... мы получимъ въ результатѣ дѣйствій

$$f(a, b, c, \ldots) = r \text{ и } \varphi(m, n, \ldots) = s$$

числа r и s въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (18). Такимъ образомъ теорема доказана въ общемъ видѣ [12]).

6. Теоремѣ о непрерывности можно дать нѣсколько иную формулировку, которая необходима во многихъ случаяхъ, при чемъ доказательство остается прежнее:

Если по прежнему число $\rho = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ есть результатъ нѣкоторыхъ вычисленій, произведенныхъ надъ числами α, β, γ, ..., и если $g < \rho$, то можно замѣнить числа α, β, γ, ... ихъ раціональными приближенными значеніями a, b, c, ... такимъ образомъ, чтобы $r = f(a, b, c, \ldots)$, и $g < r < \rho$.

Теорема эта съ соотвѣтственными измѣненіями остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если принять $\rho < g'$ [13]).

7. Изложенная нами теорема имѣетъ двоякое значеніе. Съ одной стороны, она даетъ намъ увѣренность, что въ практическихъ вычисленіяхъ,

---

[12]) Индуктивный пріемъ доказательства здѣсь примѣняется, очевидно, къ числу дѣйствій, которыя нужно произвести надъ данными числами. Если этихъ дѣйствій имѣется, напримѣръ, три, то третье дѣйствіе можно разсматривать какъ операцію $F(\rho, \sigma)$, производимую надъ результатомъ ρ первыхъ двухъ дѣйствій и новымъ числомъ σ.

[13]) Мы привели послѣднее предложеніе цѣликомъ въ томъ видѣ, какъ оно формулировано авторомъ, но должны указать на то, что оно не всегда справедливо; такъ, напримѣръ, если положимъ

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2,$$

то, при $\alpha = \beta$, $\rho = 0$; въ этомъ случаѣ, очевидно, нельзя замѣнить α и β такими приближенными значеніями, чтобы получить результатъ меньшій, нежели ρ. Это любопытный примѣръ того, какъ легко впасть въ ошибку, если опускать доказательства.

которыя по существу дѣла приходится выполнять лишь надъ приближенными значеніями, мы можемъ достичь какой угодно степени точности. Съ другой стороны, изъ нашей теоремы вытекаетъ теоретически важное слѣдствіе: равенство или неравенство, которое справедливо для всѣхъ раціональныхъ значеній входящихъ въ него буквъ, остается въ силѣ и для ирраціональныхъ значеній ихъ.

Дѣйствительно, любое равенство, связывающее раціональныя числа, можетъ быть представлено въ формѣ

$$f(a, b, c, \ldots) = 0, \qquad (19)$$

гдѣ знакъ f обозначаетъ нѣкоторое сочетаніе основныхъ четырехъ дѣйствій. Если это равенство справедливо при всѣхъ значеніяхъ раціональныхъ чиселъ a, b, c, ... то оно остается въ силѣ и для ирраціональныхъ значеній α, β, γ, ... , т. е. имѣетъ мѣсто равенство

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0. \qquad (20)$$

Дѣйствительно, если бы результатъ $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ былъ отличенъ отъ нуля, напр., если бы $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$ то можно было бы указать два такихъ положительныхъ числа g и g', чтобы

$$g < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < g'; \qquad (21)$$

согласно теоремѣ о непрерывности, этимъ же неравенствамъ должны удовлетворять и нѣкоторыя приближенныя раціональныя значенія a, b, c, ... чиселъ α, β, γ, ... , т. е. число $f(a, b, c, \ldots)$ оказалось бы положительнымъ, что противорѣчило бы условію (19).

Изложенное предложеніе имѣетъ мѣсто и для неравенствъ, только въ этомъ случаѣ для доказательства приходится пользоваться той формулировкой основной теоремы, которая дана въ пунктѣ 6.

Предположимъ, напримѣръ, что всѣ раціональныя числа a, b, c, ... , удовлетворяющія условію $\varphi(a, b, c, \ldots) > 0$, выполняютъ и неравенство $f(a, b, c, \ldots) > 0$; утверждаемъ, что это соотношеніе имѣетъ мѣсто и для ирраціональныхъ чиселъ, т. е., если $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$, то и $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы неравенство $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$ было совмѣстимо съ неравенствомъ $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < 0$, то можно было бы выбрать пару отрицательныхъ чиселъ g и g' и пару положительныхъ чиселъ k и k' такъ, чтобы

$$g < f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < g', \quad k < \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) < k'.$$

Тогда мы могли бы подобрать для чиселъ α, β, γ, ... такія приближенныя значенія a, b, c, ... , чтобы число $\varphi(a, b, c, \ldots) > 0$, а число $f(a, b, c, \ldots)$ было меньше нуля, что противорѣчило бы заданному условію. Точно также число $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ не можетъ быть равно нулю; для доказательства обратимся къ той формулировкѣ основной теоремы, которая дана въ пунктѣ 6. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что, если бы число $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ равнялось нулю, то можно было бы подобрать такія приближенныя значенія a, b, c, чтобы результатъ $f(a, b, c, \ldots)$ оказался отрицательнымъ числомъ, тогда какъ число $\varphi(a, b, c, \ldots)$ по прежнему имѣло бы положительное значеніе[14].

Приведемъ теперь нѣсколько предложеній, составляющихъ частные случаи доказанной нами общей теоремы:

1) Для ирраціональныхъ чиселъ остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы при сложеніи и умноженіи.

2) Вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію:

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha.$$

3) Дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha.$$

4) Съ возрастаніемъ слагаемаго возрастаетъ и сумма.

5) Произведеніе положительныхъ сомножителей увеличивается съ возрастаніемъ любого изъ сомножителей, и, конечно, еще больше возрастаетъ, если всѣ множители возрастаютъ.

6) Разность двухъ чиселъ бываетъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли вычитаемое меньше или больше уменьшаемаго.

7) Степень числа, превосходящаго единицу, возрастаетъ съ увеличеніемъ показателя и при томъ возрастаетъ безпредѣльно.

8) Степень положительной правильной дроби есть число положительное, которое съ возрастаніемъ показателя можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ.

§ 25. Безконечныя десятичныя дроби.

1. Обозначимъ черезъ A_n десятичную дробь съ произвольнымъ числомъ знаковъ до запятой и n знаками справа отъ запятой, такъ что A_0, напримѣръ, означаетъ нѣкоторое цѣлое число, которое можетъ быть и нулемъ. Положимъ, что намъ указанъ рядъ дѣйствій, т. е. какой либо

---

[14] Это предложеніе также не вполнѣ справедливо, какъ и то, на котрое авторъ ссылается. Справедливо только слѣдующее предложеніе: если для всѣхъ раціональныхъ значеній чиселъ $a, b, c \ldots$, при которыхъ $\varphi(a, b, c \ldots) > 0$, и $f(a, b, c \ldots) > 0$, то при ирраціональныхъ значеніяхъ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, при которыхъ $\varphi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) > 0$, имѣетъ мѣсто соотношеніе $f(\alpha, \beta, \gamma \ldots) \geqslant 0$; возможность равенства не исключается. Такъ, напримѣръ, неравенство

$$(a^2 - 2)^2 + (b^2 - 2)^2 > 0.$$

справедливое при всѣхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ a и b, обращается въ равенство при $a = \pm\sqrt{2}$ и $b = \pm\sqrt{2}$.

алгориѳмъ, при помощи котораго можно отъ десятичной дроби A_n перейти къ одной и только одной дроби A_{n+1}, содержащей тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, что и дробь A_n, и кромѣ того еще одну прибавочную цифру справа. Предположимъ, что алгориѳмъ этотъ имѣетъ то свойство, что его можно примѣнять послѣдовательно неограниченное число разъ. Съ однимъ такимъ алгориѳмомъ, а именно съ приближеннымъ вычисленіемъ квадратнаго корня изъ неполныхъ квадратовъ, мы уже познакомились въ § 21. Подобный алгориѳмъ, или, точнѣе говоря, опредѣляемый имъ рядъ цифръ съ запятой на опредѣленномъ мѣстѣ мы называемъ безконечной десятичной дробью 15).

Каждой безконечной десятичной дроби можетъ быть отнесено нѣкоторое число слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$A'_n = A_n + 10^{-n}, \tag{1}$$

гдѣ $n > 0$, такъ что десятичная дробь A'_n получается изъ дроби A_n, если въ ней увеличить на одну единицу послѣднюю цифру (при этомъ, если эта послѣдняя цифра равна 9, то пишутъ вмѣсто нея нуль, а предпослѣднюю цифру увеличиваютъ на одну единицу). Если къ дроби A_n приписать $(n+1)$-ую цифру, то получимъ дробь A_{n+1}, такъ что

$$A_{n+1} = A_n + z10^{-n-1}, \quad A'_{n+1} = A^n + (z+1)10^{-n-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$A_n \leqq A_{n+1} < A'_{n+1} \leqq A'_n. \tag{2}$$

Такимъ образомъ, всѣ дроби A_n, A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots$ порознь меньше дроби A'_n, а всѣ дроби A'_n, A'_{n+1}, $A'_{n+2}, \ldots$ больше дроби A_n; слѣдовательно, дроби A_n имѣютъ верхнюю границу, а дроби A'_n — нижнюю границу; обѣ эти границы должны необходимо совпадать, такъ какъ разность $A'_n - A_n = 10^{-n}$ при достаточно большомъ n можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Число α, составляющее общую границу этихъ двухъ числовыхъ комплексовъ, называется **численнымъ значеніемъ безконечной десятичной дроби**. Число α заключено между двумя дробями каждой пары A_n и A'_n; эти послѣднія называются верхнимъ и нижнимъ приближенными значеніями числа α; онѣ тѣмъ менѣе отличаются другъ отъ друга и отъ дроби α, чѣмъ больше число n. Такъ какъ

---

15) Правило приближеннаго вычисленія квадратнаго корня, даетъ намъ возможность послѣдовательно опредѣлить десятичные знаки корня; такъ что, если A_n есть корень, вычисленный съ приближеніемъ до n-го десятичнаго знака (приближенно меньшее его значеніе), то мы имѣемъ алгориѳмъ, дающій возможность опредѣлить A_{n+1}, т. е дробь, состоящую изъ дроби A_n и еще одного опредѣленнымъ образомъ устанавливаемаго десятичнаго знака.

числа A_n всѣ положительныя, то α также есть число положительное.

2. Подобно тому, какъ каждой безконечной десятичной дроби мы относимъ нѣкоторое положительное число α, точно такъ же для каждаго положительнаго числа α можно подобрать соотвѣтствующую безконечную десятичную дробь. Всѣ раціональныя дроби, имѣющія знаменателемъ число 10^n, расположимъ въ порядкѣ по ихъ величинѣ и наибольшую изъ нихъ, не превосходящую числа α, обозначимъ черезъ A_n, такъ что

$$A_n \leqslant \alpha < A'_n. \tag{3}$$

Тогда найдется одна и только одна цифра z, удовлетворяющая неравенствамъ

$$A_{n+1} \leqslant \alpha < A'_{n+1}. \tag{4}$$

Такимъ образомъ можно наращать дробь A_n, приписывая къ ней справа каждый разъ одну опредѣленную цифру, при чемъ число α будетъ представлять собою верхнюю границу дробей A_n.

3. Разсмотримъ теперь вопросъ, могутъ ли двѣ различныя безконечныя десятичныя дроби имѣть одну и ту же численную величину.

Допустимъ, что двѣ различныя десятичныя дроби съ нижними приближенными значеніями A_n и B_n имѣютъ одинаковую численную величину α. Дроби A_n и B_n, начиная съ нѣкотораго значенія указателя n, должны отличаться другъ отъ друга одной или нѣсколькими цифрами; пусть a_k и b_k обозначаютъ первыя несходныя между собою цифры дробей A_n и B_n; допустимъ еще, что $a_k < b_k$. Тогда имѣемъ:

$$\begin{aligned} B_k - A_k &= (b_k - a_k)10^{-k}, \\ B_k - A'_k &= (b_k - a_k - 1)10^{-k} \end{aligned} \tag{5}$$

Если $n > k$, то, согласно формулѣ (2), $B_n \geqslant B_k$ и $A'_n \leqslant A'_k$, такъ что

$$B_n - A'_n \geqslant (b_k - a_k - 1)10^{-k}. \tag{6}$$

Такъ какъ съ увеличеніемъ числа n лѣвая часть безпредѣльно уменьшается, а число $(b_k - a_k - 1)10^{-k}$ не мѣняется, то неравенство (6) возможно лишь при условіи: $b_k - a_k - 1 = 0$, такъ что

$$b_k = a_k + 1. \tag{7}$$

Отсюда слѣдуетъ, что при любомъ значеніи $n \geqslant k$, согласно формулѣ (6), получимъ:

$$B_n = A'_n = A_n + 10^{-n}. \tag{8}$$

Обозначивъ $(n+1)$-ыя цифры черезъ a_{n+1} и b_{n+1}, получимъ:

$$B_n + b_{n+1}10^{-n-1} = A_n + (a_{n+1} + 1)\,10^{-n-1}, \tag{9}$$

или, подставляя сюда значеніе числа B_n изъ формулы (8),

$$10^{-n} + b_{n+1}10^{-n-1} = (a_{n+1} + 1)10^{-n-1},$$

т. е.

$$a_{n+1} = b_{n+1} + 9.$$

Такъ какъ цифра a_{n+1} не можетъ превосходить девяти, то заключаемъ, что $b_{n+1} = 0$, и $a_{n+1} = 9$, если только $n \geqslant k$. Въ этомъ случаѣ обѣ десятичныя дроби A_n и B_n дѣйствительно стремятся къ одному и тому же предѣлу: къ конечной десятичной дроби B_k. Напримѣръ, десятичныя дроби 0,999 . . . , 1,000 . . . имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ одно и то же численное значеніе—единицу.

4. Сообразно этому, теорію ирраціональныхъ чиселъ можно было бы обосновать, исходя изъ понятія о безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ. Для этого пришлось бы производить сѣченія не въ области всѣхъ *раціональныхъ дробей, но лишь въ области десятичныхъ дробей*. Съ одной стороны, это имѣло бы то удобство, что установленіе новаго понятія примыкало бы непосредственно къ алгориѳму, обычно употребляемому для вычисленія ирраціональныхъ чиселъ, но за то, съ другой стороны, доказательства теоремъ были бы болѣе сложны. При первомъ способѣ изложенія (принятомъ нами) любому раціональному числу соотвѣтствуютъ два различныхъ сѣченія; при второмъ же способѣ этимъ свойствомъ обладаютъ лишь десятичныя дроби.

§ 26. Превращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

1. Обыкновенная дробь обратима въ десятичную лишь въ томъ случаѣ, если по умноженіи на нѣкоторую степень десяти, она даетъ въ произведеніи цѣлое число. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, данная дробь въ несократимомъ видѣ m/n, имѣла въ знаменателѣ число n, не содержащее другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ 2 и 5, т. е. чтобы $n = 2^a5^b$, гдѣ a и b суть цѣлыя числа; если тогда возьмемъ произвольное цѣлое число c, которое не меньше большаго изъ чиселъ a и b, и помножимъ нашу дробь на 10^c, то получимъ въ произведеніи цѣлое число $\frac{m}{n}.10$.

Если же дробь m/n взята произвольно, то связь ея съ десятичными дробями можетъ быть установлена слѣдующимъ образомъ.

Произведя дѣленіе числа m на число n, мы получимъ частное ζ и остатокъ m_1, который меньше дѣлителя n, такъ что

$$m = \zeta n + m_1. \qquad (1)$$

Здѣсь ζ обозначаетъ цѣлое число, положительное или нуль. Остатокъ m_1

также есть положительное число, которое меньше дѣлителя n, и равенъ нулю лишь въ томъ случаѣ, когда число m дѣлится безъ остатка на число n, т. е. когда m/n есть цѣлое число.

Оставляя тотъ же дѣлитель n, дѣлимъ на него число $10m_1$; получимъ:

$$10m_1 = \zeta_1 n + m_2 \quad \text{и} \quad 10m_1 \geqq \zeta_1 n, \qquad (2)$$

такъ что $\zeta_1 < 10$. Слѣдовательно, ζ_1 означаетъ нѣкоторую цифру (0, 1, 2, . . . 9). Если $m_2 = 0$, то число m/n равно десятичной дроби ζ, ζ_1. Есди же число $m_2 > 0$, то оно меньше дѣлителя n, и мы можемъ продолжать дѣленіе по тому же правилу:

$$\begin{aligned} 10m_2 &= \zeta_2 n + m_3 \\ 10m_3 &= \zeta_3 n + m_4 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 10m_s &= \zeta_s n + m_{s+1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Пока остатки $m_1, m_2, \ldots m_s$ отличны отъ нуля, числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_s$ всѣ суть цифры, т. е. не превосходятъ девяти, а число ζ можетъ быть и больше девяти. Изъ равенствъ (1), (2) и (3) слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \zeta + \frac{m_1}{n} \\ \frac{m_1}{n} &= \zeta_1 10^{-1} + \frac{m_2}{n} 10^{-1} \\ \frac{m_2}{n} &= \zeta_2 10^{-1} + \frac{m_3}{n} 10^{-1}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда найдемъ:

$$\frac{m}{n} = \zeta + \zeta_1 10^{-1} + \zeta_2 10^{-2} + \ldots + \zeta_s 10^{-s} + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s},$$

или же, представляя правую часть послѣдняго равенства въ видѣ десятичной дроби,

$$\frac{m}{n} = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_s + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}. \qquad (4)$$

Если послѣдній остатокъ $m_{s+1} = 0$, то дробь m/n можетъ быть представлена въ видѣ десятичной дроби; это имѣетъ мѣсто лишь въ вышеупомянутомъ случаѣ, когда число n имѣетъ форму $2^a 5^b$ (предполагая, что дробь m/n приведена къ несократимому виду). Въ другихъ случаяхъ вычисленіе, которое, очевидно, представляетъ собою не что иное, какъ обыкновенное дѣленіе элементарной ариѳметики, можетъ быть продолжено безконечно, такъ что въ формулѣ (4) число s можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ. Въ этомъ случаѣ десятичная дробь

$$\delta_s = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots \zeta_s \tag{5}$$

всегда меньше обыкновенной дроби

$$\gamma = \frac{m}{n}; \tag{6}$$

такъ какъ $m_{s+1} < n$, то разность $\gamma - \delta_s$ меньше дроби 10^{-s}. Слѣдовательно, разность эта тѣмъ меньше, чѣмъ больше число десятичныхъ знаковъ дроби δ_s; *она можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой,* если выбрать число s достаточно большимъ. Поэтому обыкновенныя дроби могутъ быть съ любой степенью точности замѣнены десятичными во всѣхъ тѣхъ приложеніяхъ, гдѣ числа вообще извѣстны лишь приблизительно: напримѣръ, въ вычисленіяхъ, гдѣ данныя суть результаты измѣреній. Десятичная дробь δ_s называется приближеннымъ значеніемъ обыкновенной дроби γ. Вычисленіе десятичной дроби δ_s по заданной дроби γ называется обращеніемъ обыкновенной дроби въ десятичную.

Въ равенствѣ (4) часто опускаютъ остатокъ $m_{s+1}/10^s n$, вмѣсто него ставятъ многоточіе и этимъ выражаютъ, что дробь безконечна:

$$\frac{m}{n} = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots .$$

Для вычисленія цифръ $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ нѣтъ надобности приводить предварительно дробь m/n къ несократимому виду, т. е. въ этомъ отношеніи безразлично, имѣютъ ли числа m и n общаго множителя или нѣтъ.

2. Рядъ цифръ

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \dots$$

называется мантиссой дроби m/n (Gauss, Disq. arithmeticae, Art. 312).

Мантисса имѣетъ конечное число цифръ, если дробь m/n можетъ быть точно выражена въ видѣ десятичной дроби; въ противномъ случаѣ число цифръ мантиссы можно увеличивать безпредѣльно. Двѣ мантиссы

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \dots$$

и

$$Z' = \zeta'_1 \zeta'_2 \zeta'_3 \dots$$

называются отличными другъ отъ друга, если онѣ заключаютъ въ себѣ хотя бы по одному десятичному знаку ζ_s и ζ'_s, которые отличны другъ отъ друга по величинѣ, но занимаютъ въ мантиссахъ одно и то же мѣсто.

Дроби, различающіяся между собою цѣлымъ числомъ, имѣютъ всѣ одну и ту же мантиссу; поэтому, для того, чтобы вычислить мантиссы всѣхъ дробей съ знаменателемъ n, достаточно разсмотрѣть однѣ лишь правильныя дроби m/n.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Отличныя другъ отъ друга правильныя дроби γ и γ' имѣютъ различныя мантиссы [16]).

Для доказательства предположимъ, что $\gamma' > \gamma$; найдемъ такое число s, чтобы

$$10^s(\gamma'-\gamma) > 1$$

(найти такое число s, всегда возможно: см. § 18,8) тогда получимъ:

$$\gamma' > \gamma + 10^{-s}. \tag{7}$$

Положимъ, что

$$\delta_s = 0,\ \zeta_1\ \zeta_2\ \ldots\ \zeta_s,\quad \delta'_s = 0,\ \zeta'_1\ \zeta'_2\ \zeta'_3\ \ldots\ \zeta'_s;$$

тогда, какъ намъ уже извѣстно,

$$\gamma > \delta_s,\quad \gamma' < \delta'_s + 10^{-s};$$

принимая во вниманіе неравенство (7), найдемъ:

$$\delta'_s + 10^{-s} > \gamma' > \gamma + 10^{-s} > \delta_s + 10^{-s},$$

слѣдовательно, $\delta'_s > \delta_s$. Поэтому мантиссы Z и Z' дробей γ и γ' отличаются другъ отъ друга, по крайней мѣрѣ, въ s-мъ десятичномъ знакѣ (если не въ которомъ-нибудь изъ предыдущихъ).

Дополнимъ доказанную теорему другой, аналогичной:

Нѣтъ такой правильной дроби γ, мантисса которой состояла бы только изъ однѣхъ девятокъ.

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большомъ s мы найдемъ, что $10_s(1-\gamma) > 1$, слѣдовательно, $1 > \gamma + 10^{-s}$, и a fortiori $1 > \delta_s + 10^{-s}$. Если же всѣ цыфры ζ_1, ζ_2, ... ζ_s были бы девятки, то мы нашли бы, что $\delta_s + 10^{-s} = 1$, что противорѣчило бы предыдущему неравенству. Поэтому, уже s-ый десятичный знакъ (если не который-нибудь изъ предыдущихъ) мантиссы дроби γ представляетъ собой цифру, меньшую девяти.

---

[16]) Это есть предложеніе, обратное тому, которое доказано въ § 25, 3.

Каждая обыкновенная дробь производитъ сѣченіе въ совокупности безконечныхъ десятичныхъ дробей; поэтому и обыкновенныя дроби находятъ себѣ мѣсто въ той области чиселъ, которая опредѣляется совокупностью безконечныхъ десятичныхъ дробей.

Впослѣдствіи мы разсмотримъ подробнѣе нѣкоторыя своеобразныя особенности, присущія тѣмъ безконечнымъ десятичнымъ дробямъ, которыя соотвѣтствуютъ раціональнымъ дробямъ.

ГЛАВА V.

Отношенія.

§ 27. Измѣримость.

1. Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть вопросъ, какимъ образомъ числа, которыя, какъ мы уже не разъ указывали, представляютъ собой продуктъ творчества нашего духа, находятъ себѣ примѣненіе во внѣшнемъ мірѣ. Что касается чиселъ натуральнаго ряда, то ими мы пользуемся при счетѣ; это было изложено въ первой главѣ и мы не будемъ здѣсь возвращаться къ этому вопросу. Раціональныя же дроби и числа ирраціональныя находятъ себѣ примѣненіе въ томъ процессѣ, который называется измѣреніемъ.

Измѣримо все то, что производитъ на наши чувства впечатлѣнія различной интенсивности: напряженность (яркость) свѣта, температура, высота звука, сила звука, тяжесть, твердость, боль и т. п. Непосредственное чувственное воспріятіе доставляетъ намъ лишь ту неопредѣленную оцѣнку впечатлѣній, которая выражается словами „больше“ и „меньше“. Точныя измѣренія возможны лишь послѣ того, какъ между даннымъ явленіемъ, съ одной стороны, временемъ и пространствомъ, съ другой, установлена такая связь, что каждому впечатлѣнію, относящемуся къ этому явленію, соотвѣтствуетъ опредѣленное измѣненіе въ пространствѣ или во времени;—связь эта устанавливается помощью измѣрительныхъ приборовъ. Пространственныя величины мы различаемъ троякаго рода: длину, площадь и объемъ; геометрія даетъ намъ способы свести измѣреніе всѣхъ этихъ трехъ величинъ къ измѣренію длинъ.

Возможность измѣрять пространство основывается на предположеніи, что существуетъ тѣло, которое мы можемъ переносить изъ одного мѣста на другое, не измѣняя его состоянія во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ. Подобное тѣло, называется масштабомъ. Ясно, что предположеніе это заключаетъ въ себѣ нѣкоторое допущеніе, какъ о природѣ пространства, такъ и о свойствахъ тѣлъ, его наполняющихъ¹).

Измѣреніе промежутковъ времени основывается на допущеніи, что можно наблюдать нѣкоторый процессъ, который одинаково протекаетъ во всякое время: таково, напримѣръ, движеніе часовой стрѣлки, если оно всегда происходитъ равномѣрно; самымъ совершеннымъ образцомъ часовъ мы считаемъ вращеніе земли вокругъ ея оси²).

Третью группу основныхъ величинъ составляютъ массы, которыя мы измѣряемъ помощью вѣсовъ: это измѣреніе предполагаетъ существованіе правильныхъ вѣсовъ и неизмѣняемость массъ.

Всѣ эти предположенія не совсѣмъ согласуются съ дѣйствительностью: менѣе всего съ ней расходится первое допущеніе, наиболѣе послѣднее: въ качествѣ идеальныхъ мѣръ приходится разсматривать лишь нѣкоторыя среднія значенія, которыя путемъ долгаго и многократнаго опыта образовались въ нашемъ представленіи, какъ результатъ взаимной компенсаціи отступленій въ ту и въ другую сторону отъ истинныхъ мѣръ.

2. Въ области чистыхъ чиселъ произвольно созданныя нами понятія „больше“ и „меньше“ имѣютъ отвлеченный характеръ и лишены наглядности; наоборотъ, въ области измѣряемыхъ предметовъ внѣшняго міра „большее“ и „меньшее“ являются уже наглядными представленіями, находящимися въ связи съ той или другой степенью или силой чувственныхъ впечатлѣній. Даже съ такими выраженіями, какъ „очень большое“, „очень малое“, „приблизительно“ мы связызаемъ нѣкоторыя представленія, хотя и не совсѣмъ опредѣленныя, напримѣръ: мы называемъ очень малыми тѣ величины, которыхъ мы не можемъ или почти не можемъ непосредственно воспринять нашими чувствами, а только съ помощью инструментовъ.

Такъ какъ никакое измѣреніе не можетъ быть выполнено съ абсолютной точностью, и, кромѣ того, наши геометрическія построенія не даютъ намъ дѣйствительныхъ точекъ, линій и поверхностей, то эмпирически полученные результаты измѣреній вполнѣ удовлетворительно представляются одними лишь раціональными числами: здѣсь никогда не сказывается надобность въ дальнѣйшемъ развитіи понятія о числѣ.

---

¹) Утвержденіе это врядъ ли соотвѣтствуетъ современному взгляду на пространство и геометрію.

²) Это утвержденіе, кажущееся столь яснымъ на первый взглядъ, въ дѣйствительности, не имѣетъ содержанія. Входить въ подробное выясненіе этого мы не можемъ. Читатель можетъ найти обстоятельный анализъ этого вопроса въ книгѣ H. Poincaré „La Science et l'hypothèse“ (имѣется русскій переводъ подъ названіемъ „Наука и Гипотеза“), а еще лучше въ статьѣ того же автора подъ заглавіемъ „Mesure du temps,“ напечатанной въ „Revue de Métaphysique et de Morale“ за 1898 г.

Тѣмъ не менѣе мы не можемъ отказаться отъ мысли, что, напримѣръ, діагональ квадрата, или окружность круга имѣютъ опредѣленную длину, выражаемую опредѣленнымъ числомъ; то же имѣетъ мѣсто и для промежутковъ времени и вѣса: мы склонны принять, что измѣряемые объекты представляютъ собой какъ бы эквиваленты всей совокупности чиселъ *).

3. Условія измѣримости элементовъ нѣкотораго комплекса можно, на нашъ взглядъ, выразить въ слѣдующихъ положеніяхъ:

1. Два элемента a и b даннаго комплекса либо равны другъ другу, либо одинъ изъ нихъ больше, другой меньше.

2. Если a есть нѣкоторый элементъ этого комплекса, то можно указать элементы, которые меньше элемента a (безконечная дѣлимость).

3. Если a и b суть нѣкоторые элементы нашего комплекса (равные другъ другу или различные), то въ этомъ же комплексѣ существуетъ элементъ $c = a + b$, представляющій собою сумму обоихъ элементовъ и превосходящій оба слагаемыя, порознь взятыя.

При суммированіи имѣетъ мѣсто перемѣстительный и сочетательный законы сложенія (§ 7).

4. Если элементъ b меньше элемента c, то существуетъ опредѣленный элементъ $a = c - b$, имѣющій то свойство, что $a + b = c$.

5. Повторное суммированіе нѣсколькихъ равныхъ другъ другу элементовъ a приводитъ къ понятію произведенія ma, гдѣ m означаетъ число натуральнаго ряда. Относительно произведеній имѣетъ мѣсто принципъ Архимеда:

Если a и b суть произвольные два элемента нашей группы, то можно указать элементъ ma, кратный элемента a, который превосходитъ элементъ b.

Такимъ образомъ среди элементовъ измѣримой группы нѣтъ ни наибольшаго, ни наименьшаго; изъ свойствъ 2), 3) и 4) слѣдуетъ, что между двумя любыми элементами заключены еще другіе элементы. Кромѣ того, должно быть выполнено слѣдующее условіе:

6. Если a обозначаетъ какой-либо элементъ группы, а n есть число натуральнаго ряда, то существуетъ элементъ b, удовлетворяющій равенству $nb = a$. Этотъ элементъ b называется n-ой частью элемента a и

---

*) Понятіе о непрерывности, столь простое и наглядное въ области отвлеченныхъ чиселъ, представляетъ почти непреодолимыя трудности въ области измѣряемыхъ величинъ, т. е. въ области объектовъ внѣшняго міра.

Павелъ Дюбуа-Реймонъ (Paul du Bois-Reymond) разработалъ этотъ вопросъ въ своемъ трудѣ: „Allgemeine Functionentheorie“ (Tübingen 1882). Онъ пришелъ къ тому выводу, что по этому вопросу равно возможны и равно правильны двѣ взаимно другъ друга исключающія точки зрѣнія: идеалистическая и эмпирическая.

обозначается такъ: $b = a/n$. Что существуетъ одинъ лишь элементъ b, легко заключить изъ изложенныхъ посылокъ. Дѣйствительно, если $b' > b$, то $nb' = nb + n(b' - b)$ и превосходитъ элементъ nb.

§ 28. Отношенія.

1. Соизмѣримыми называютъ такіе два элемента a и b измѣримаго комплекса, для которыхъ можно указать два натуральныхъ числа p и q, удовлетворяющихъ условію

$$qa = pb. \tag{1}$$

Изъ равенства (1) видно, что, раздѣливъ (согласно § 27, 6) элементъ a на p частей, а элементъ b на q частей, получимъ равныя другъ другу части:

$$a/p = b/q = d, \tag{2}$$

такъ что $a = pd$, $b = qd$. Элементъ d, слѣдовательно, есть общая мѣра элементовъ a и b (отсюда терминъ: „соизмѣримый“).

Въ этомъ случаѣ выражаются такъ: отношеніе элементовъ a и b равно отношенію чиселъ p и q.

Равенство (1) остается въ силѣ, если элементы a и b одно и то же число разъ взять слагаемымъ или раздѣлить на одно и то же число, а также, если числа p и q умножить на одно и то же число, или, наконецъ, отбросить у нихъ общаго дѣлителя. Поэтому отношеніе чиселъ p и q остается неизмѣннымъ, если не мѣняется численное значеніе дроби p/q, и такимъ образомъ отношенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, а слѣдовательно, и всякихъ двухъ соизмѣримыхъ элементовъ измѣримой группы можно привести въ однозначное соотвѣтствіе съ раціональными дробями.

Тогда равенство отношеній, помимо вышеприведенной формы (1), можетъ быть представлено еще такъ:

$$a : b = p : q \text{ или } a/b = p/q;$$

отношеніе a/b считается большимъ, нежели отношеніе $a'/b' = p'/q'$, если дробь p/q больше дроби p'/q'.

Элементы a и b называются соотвѣтственно числителемъ и знаменателемъ отношенія. Если $a = b$, то отношеніе ихъ $= 1$. Если дано отношеніе p/q, то величина одного изъ элементовъ a и b можетъ быть взята произвольно. Если, напримѣръ, даны: p, q и b, то, раздѣливъ элементъ pb на q частей, получимъ элементъ a, удовлетворяющій равенству (1).

2. Если фиксируемъ b, то всякому другому элементу a той же группы, соизмѣримому съ элементомъ b, будетъ такимъ образомъ отнесено

опредѣленное число p/q; самому же элементу b отвѣчаетъ при этомъ число 1. Онъ называется поэтому **единицей системы измѣренія**. Въ выборѣ единицы мы ничѣмъ не ограничены, и руководимся лишь нашими удобствами. Однако, въ высшей степени важно, особенно для научной практики, чтобы единица была строго опредѣлена и чтобы въ любой моментъ мы имѣли возможность получить ее въ неизмѣненномъ видѣ. Конечно, съ абсолютной точностью требованіе это не можетъ быть выполнено, но путемъ обширныхъ вспомогательныхъ средствъ этому требованію стараются, по возможности, удовлетворить.

Съ древнихъ временъ за единицы времени принимаютъ сутки *) и ихъ подраздѣленія: часы, минуты и секунды. Дѣленіе на 24 и 60 частей также относится къ глубокой древности, и мы съ нимъ настолько сроднились, что трудно даже въ будущемъ ожидать, что оно будетъ замѣнено другимъ подраздѣленіемъ, хотя бы, напримѣръ, десятичнымъ.

Что касается мѣръ длины и массы (послѣднія въ обиходѣ совпадаютъ съ мѣрами вѣса), то еще въ недалекомъ прошломъ здѣсь царило самое пестрое разнообразіе и даже неопредѣленность. Въ 1799 г. французское республиканское правительство ввело новую единицу длины—метръ. Хотя первоначально мѣру эту опредѣляли какъ одну сорокамилліонную часть земного меридіана, но въ дѣйствительности эталонъ этотъ представляетъ собою произвольно выбранный, строго опредѣленный и тщательно сохраняемый **нормальный метръ**. Большинство культурныхъ государствъ примкнуло къ состоявшейся въ 1875 г. **интернаціональной метрической конвенціи**: въ нихъ метръ служитъ узаконенной единицей длины, причемъ въ дальнѣйшихъ подраздѣленіяхъ строго проведенъ принципъ десятичной системы [3]).

На метрической единицѣ длины основанъ выборъ единицъ для **мѣръ поверхностей и объемовъ**, каковыми являются **квадратный метръ** и **кубическій метръ** или ихъ десятичныя доли; точно также и единица массы находится въ связи съ единицей длины: единица массы граммъ —это масса кубическаго сантиметра воды въ состояніи наибольшей плотности **).

Углы также образуютъ измѣримый комплексъ особаго рода. Измѣреніе элементовъ этого комплекса на практикѣ сводится къ измѣренію длины, а именно—къ отсчету раздѣленнаго круга.

---

*) Точнѣе: среднія солнечныя сутки, т. е. среднюю величину промежутка между двумя кульминаціями солнца.

[3]) Въ Россіи метрическая система введена факультативно, т. е., какъ разрѣшенная для торговой практики система мѣръ, но не обязательная; точно также обстоитъ дѣло и въ Англіи.

) Срав. статью **Runge: „Mass und Messen“ въ Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften.

Однако углы имѣютъ свою особую единицу, и даже двѣ единицы: одна употребляется для практическихъ цѣлей, другая—больше въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ. Чтобы получить первую единицу, дѣлятъ всю окружность на 360 равныхъ частей, которыя называются градусами. Градусъ подраздѣляется на 60 минутъ, минута въ свою очередь на 60 секундъ. Прямой уголъ содержитъ 90 градусовъ, выпрямленный уголъ—180 градусовъ. Для сокращенія градусы, минуты и секунды изображаютъ еще, напримѣръ, такъ: $57^0\ 17'\ 44{,}8''$; читаютъ 57 градусовъ, 17 минутъ, 44,8 секунды.

Второй единицей угловъ служитъ уголъ, дуга котораго по своей длинѣ равна радіусу. При такомъ выборѣ единицы уголъ въ 180 градусовъ измѣряется числомъ $\pi = 3,\ 14159265$, т. е. числомъ, выражающимъ длину полуокружности, радіусъ которой равенъ 1. Число 1 представляетъ собою мѣру угла въ $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ или въ 206264,8 секунды.

Числа, выражающія собою результатъ измѣренія, могутъ быть, собственно говоря, лишь положительными. Тѣмъ не менѣе часто оказывается весьма полезнымъ употреблять и отрицательныя числа—тамъ, гдѣ между измѣряемыми величинами нужно выразить отношеніе противоположности. При этомъ число не будетъ, собственно говоря, выражать измѣряемой длины, но представитъ нѣкоторую точку, которую получимъ, отложивъ измѣряемую величину отъ нѣкоторой опредѣленной начальной точки. При такомъ условіи положительныя числа выразятъ точки, лежащія по одну сторону отъ начала, отрицательныя числа—точки по другую сторону отъ начала. Нагляднѣе всего это видно на измѣреніи длины и времени, хотя вышеизложенныя соображенія находятъ себѣ примѣненіе и при измѣреніи скоростей, силъ, и многихъ другихъ величинъ. При этомъ оказывается то удобство, что не только сложеніе, но и вычитаніе можетъ быть всегда выполнено.

§ 29. Физическія мѣры.

1. Измѣряемые предметы, собственно говоря, могутъ измѣряться лишь единицами того же рода, что измѣряемая величина: длины нѣкоторой длиной, времена—нѣкоторымъ промежуткомъ времени, электрическое сопротивленіе сопротивленіемъ же опредѣленнаго размѣра: на практикѣ такой способъ измѣренія является самымъ цѣлесообразнымъ и простымъ, если только не требуется величайшей степени точности. Число измѣряемыхъ величинъ, уже и теперь весьма большое, возрастаетъ безпредѣльно съ успѣхомъ науки; вслѣдствіе этого для науки въ высшей степени важно не имѣть необходимости измѣрять каждую особую величину спеціальной единицей, которую приходилось бы сохранять въ безусловно неизмѣнномъ со-

стояніи. Поэтому слѣдуетъ считать огромнымъ успѣхомъ новѣйшей физики то, что ей удалось свести всѣ мѣры къ тремъ основнымъ мѣрамъ: длины, времени и массы.

Впервые это было сдѣлано Гауссомъ для магнитныхъ мѣръ; его трудъ пріобрѣлъ огромное значеніе въ новѣйшемъ ученіи объ электричествѣ и въ его техническихъ приложеніяхъ.

Каждая единица мѣры, которая выражена посредствомъ трехъ основныхъ единицъ длины, времени и массы, называется абсолютной единицей, а весь комплексъ такихъ мѣръ называется абсолютной системой мѣръ.

Мы познакомимся съ этой системой на нѣкоторыхъ примѣрахъ, число которыхъ легко можно было бы увеличить.

2. Скорость. Когда тѣло движется, оно можетъ проходить одинаковый путь въ различные промежутки времени, и наоборотъ пути различной длины въ одинаковые промежутки времени, т. е. тѣло можетъ имѣть различную скорость.

Если тѣло за одинъ и тотъ же промежутокъ времени, напримѣръ, за одну секунду, одинъ разъ проходитъ путь a, другой разъ путь b, а третій разъ путь $a + b$, то скорость тѣла въ третьемъ движеніи есть сумма скоростей въ обоихъ первыхъ движеніяхъ: этимъ удостовѣряется наличность критеріевъ измѣримости комплекса скоростей (§ 27, 3).

Скорость увеличивается въ два раза, въ три раза и т. д., если отрѣзки пути, проходимые за данный промежутокъ времени, удваиваются или утраиваются, или же, если для прохожденія даннаго отрѣзка пути требуется время, въ два или три раза меньшее.

Мѣра скорости сведется къ мѣрамъ времени и длины, если приемемъ за единицу скорости такую скорость, при которой тѣло проходитъ единицу длины за единицу времени.

Тѣло, проходящее путь λ за время τ, имѣетъ скорость λ/τ; частное отъ дѣленія этихъ именованныхъ чиселъ получаетъ такимъ образомъ особое значеніе, выражающее собой величину, отличную какъ отъ длины, такъ и отъ времени.

Слѣдующіе примѣры показываютъ, какъ выбранныя единицы вводятся въ обозначеніе. Предположимъ, что локомотивъ за одинъ часъ проходитъ путь въ 70 километровъ. Скорость его изображаютъ такъ:

$$70 \frac{\text{километръ}}{\text{часъ}}$$

$$\text{или } 70000 \frac{\text{метръ}}{\text{часъ}} = 1167 \frac{\text{метръ}}{\text{минута}} = 19{,}45 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

За время полнаго вращенія земли вокругъ ея оси точка земного экватора пробѣгаетъ путь, равный окружности экватора, т. е. приблизительно 40 милліоновъ метровъ. Поэтому скорость этой точки равна

$$40\,000\,000\,\frac{\text{метръ}}{\text{сутки}} = 463\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}\,.$$

Какова скорость точки, географическая широта которой равна $50^0\,30$ (Берлинъ) или $48^0\,35'$ (Страсбургъ)?

Пѣшеходъ среднимъ числомъ проходитъ одинъ километръ за 12 минутъ. Скорость его поэтому равна

$$\frac{1\ \text{километръ}}{12\ \text{минутъ}}\ \text{или}\ 1{,}4\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}\,.$$

Разстояніе земли отъ солнца составляетъ въ среднемъ 149 милліоновъ километровъ, а длина земной орбиты содержитъ 936 милліоновъ километровъ. Этотъ путь земля проходитъ за 365 дней, что соотвѣтствуетъ скорости въ

$$29\,600\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}\,,$$

или круглымъ числомъ 30 километрамъ въ секунду.

Какова скорость Меркурія, Венеры, Марса и Юпитера, если среднія разстоянія этихъ планетъ отъ солнца и періоды ихъ обращенія мы представимъ соотвѣтственно слѣдующими числами:

Меркурій	58	милліоновъ	километровъ	88	дней
Венера	108	„	„	225	„
Марсъ	227	„	„	688	„
Юпитеръ	777	„	„	4333	„

Траекторіи планетъ мы принимаемъ за окружности.

Скорость звука въ сухомъ воздухѣ равна приблизительно $331\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$, тогда какъ скорость свѣта равна 300 милліонамъ $\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$.

3. Ускореніе. Поѣздъ, начиная двигаться, не тотчасъ получаетъ свою полную скорость, но достигаетъ ея постепенно въ теченіе нѣкотораго промежутка времени. Точно также при остановкѣ онъ не мгновенно теряетъ свою скорость, но лишь постепенно.

Падающее на землю тѣло пробѣгаетъ свой путь не съ одной и той же скоростью все время: скорость увеличивается съ приближеніемъ тѣла къ землѣ. Отсюда проистекаетъ понятіе объ ускореніи и замедленіи движенія.

За единицу ускоренія принимаютъ такое ускореніе, при которомъ въ единицу времени скорость получаетъ приращеніе, равное единицѣ скорости.

Если въ началѣ ускореннаго движенія тѣло имѣетъ скорость, равную нулю, а по прошествіи времени τ получаетъ скорость v, то ускореніе такого движенія равно v/τ. Если за это время тѣло прошло путь λ, то частное λ/τ должно выражать ту скорость, которую тѣло имѣло бы, если бы оно двигалось безъ ускоренія и приходило за то же время τ такой же путь λ. Но эта скорость есть средняя ариѳметическая $\frac{1}{2}v$ изъ начальной скорости нуль и скорости v въ концѣ движенія; обозначивъ ускореніе черезъ g, мы получимъ:

$$\tfrac{1}{2}v = \lambda/\tau, \quad g = \frac{2\lambda}{\tau^2}. \qquad (1)$$

Если начальная скорость движенія равна не нулю, а v_0, то получимъ:

$$\frac{v+v_0}{2} = \lambda/\tau, \quad g = \frac{v-v_0}{\tau}. \qquad (2)$$

Ускореніе падающаго тѣла называется также ускореніемъ силы тяжести. Если пренебречь сопротивленіемъ воздуха, то ускореніе это есть величина постоянная въ данномъ мѣстѣ земли для всѣхъ тѣлъ; на параллели, широта которой равна 45⁰, ускореніе это

$$g = 9{,}8062 \; \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Оно возрастаетъ отъ экватора къ полюсамъ; на экваторѣ оно равно 9,761, на полюсѣ 9,832. Такимъ образомъ падающее тѣло за первую секунду паденія проходитъ въ среднемъ 4,9 метра.

Чтобы узнать длину пути, пройденнаго за первыя двѣ секунды, нужно въ формулу (1) подставить $\tau = 2$; получимъ путь, равный 19,6 метра. Слѣдовательно, длина пути, пройденнаго въ продолженіе второй секунды, равна 14,7 метра.

Ускореніе тяжести мѣняется съ измѣненіемъ высоты тѣла надъ уровнемъ земли; при этомъ имѣетъ мѣсто законъ Ньютона, по которому ускореніе тяжести въ различныхъ мѣстахъ обратно пропорціонально квадратамъ разстояній этихъ мѣстъ отъ центра земли, т. е., если обозначимъ черезъ g и g_1 ускоренія тяжести въ двухъ мѣстахъ, разстоянія которыхъ отъ центра земли равны соотвѣтственно r и r_1, то

$$g : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1{}^2} = r_1{}^2 : r^2.$$

Каково было бы ускореніе тяжести въ мѣстѣ, которое удалено отъ земли на такое разстояніе, какъ луна, принимая длину земного радіуса и разстояніе земли отъ луны соотвѣтственно въ 858,5 миль и 52000 миль? (Такъ какъ для рѣшенія этого вопроса нужно знать лишь отношеніе

r_1/r, то единица длины можетъ быть выбрана произвольно.

$$g_1 = 9{,}8 \cdot \frac{858{,}5^2}{52000^2} = 0{,}0027 \, \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2},$$

$$= 0{,}27 \, \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}.$$

4. Сила. За единицу массы выбираютъ массу кубическаго сантиметра чистой воды, которую называютъ „граммъ“. Какая-нибудь масса имѣетъ численное значеніе m, если она можетъ быть уравновѣшена помощью массы, содержащейся въ m кубическихъ сантиметрахъ воды.

Массу отнюдь не слѣдуетъ смѣшивать съ вѣсомъ, который выражается произведеніемъ mg изъ массы на ускореніе силы тяжести.

Масса тѣла одинакова во всѣхъ мѣстахъ земли; вѣсъ тѣла, наоборотъ, зависитъ отъ того, въ какомъ мѣстѣ земли находится разсматриваемое тѣло: онъ уменьшается съ увеличеніемъ географической широты мѣста, а также съ увеличеніемъ разстоянія тѣла отъ земной поверхности.

Вѣсъ—это сила, съ которой можно сравнивать другія силы, напримѣръ, силу нашихъ мускуловъ. Если сила не встрѣчаетъ противодѣйствія, то она сообщаетъ тѣлу, на которое дѣйствуетъ, нѣкоторое ускореніе. Но опредѣленная сила сообщаетъ тѣлу тѣмъ меньшее ускореніе, чѣмъ больше его масса; поэтому за единицу силы можно принять такую силу, которая сообщаетъ единицѣ массы ускореніе, равное единицѣ. Если за единицу массы принятъ граммъ, за единицу длины—сантиметръ и за единицу времени—секунду, то соотвѣтствующая этому единица силы называется диной (δύναμις). Итакъ, имѣемъ:

$$\text{одна дина} = 1 \cdot \frac{\text{граммъ сантиметръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Примѣръ. Выразить въ динахъ силу, съ которой земля притягиваетъ луну.

Объемъ земли содержитъ приблизительно

$$1083 \cdot 10^{24} \text{ кубическихъ сантиметровъ*)}.$$

---

*) Множитель 10^{24} означаетъ, что число умножается на 10 въ степени 24, т. е. къ нему приписываютъ 24 нуля. Когда приходится имѣть дѣло съ очень большими числами, то удобно пользоваться этимъ сокращеннымъ обозначеніемъ. Конечно, въ дѣйствительности, нужно было бы приписывать не нули, а другія цифры. Поэтому указанное обозначеніе примѣняютъ въ тѣхъ лишь случаяхъ, гдѣ истинныя значенія чиселъ неизвѣстны, или же тамъ, гдѣ нѣтъ надобности ихъ знать. Количество цифръ такихъ чиселъ называютъ также порядкомъ ихъ величины. Часто приходится довольствоваться сравненіемъ порядковъ чиселъ за невозможностью сравнивать ихъ истинныя значенія.

Если бы земля состояла только изъ воды, то это же самое число выражало бы и массу земли. Но средняя плотность земли приблизительно въ 5,5 разъ больше плотности воды; слѣдовательно, масса земли въ 5,5 раза больше вышеприведеннаго числа, т. е. она равна приблизительно

$$6 \,.\, 10^{27} \text{ граммамъ.}$$

Масса луны составляетъ приблизительно одну восмидесятую часть массы земли, и равна приблизительно

$$75 \,.\, 10^{24} \text{ граммамъ.}$$

Умноживъ это число на выраженную въ сантиметрахъ и секундахъ величину ускоренія, сообщаемаго земнымъ притяженіемъ на разстояніи, равномъ разстоянію луны отъ земли, мы получимъ число

$$2025 \,.\, 10^{22},$$

указывающее, сколько динъ содержитъ сила, съ которой земля притягиваетъ луну.

Силу можно сравнивать также съ вѣсомъ, т. е. выражать ее не въ динахъ, а въ единицахъ вѣса. За единицу силы тогда принимаютъ вѣсъ одного грамма на поверхности земли на широтѣ въ 45⁰, гдѣ ускореніе тяжести

$$g_0 = 981 \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}\,.$$

Сила, которая массѣ m граммовъ сообщаетъ ускореніе g, получитъ тогда численное значеніе mg/g_0, выражающее силу въ граммахъ.

Такимъ образомъ, чтобы выразить вѣсъ луны въ граммахъ, нужно число $2025 \,.\, 10^{22}$ раздѣлить на 981, получимъ $2 \,.\, 10^{22}$ граммовъ.

§ 30. Несоизмѣримыя величины.

1. До сихъ поръ мы въ нашихъ разсужденіяхъ и опредѣленіяхъ исходили изъ предположенія, что величины, отношенія которыхъ мы разсматриваемъ, соизмѣримы, такъ что эти отношенія выражаются раціональными числами; для практическихъ цѣлей можно было бы ограничиться соизмѣримыми величинами. Однако, теперь мы сдѣлаемъ шагъ впередъ, и разсмотримъ также ирраціональныя отношенія.

Пусть e будетъ элементъ нѣкотораго измѣримаго комплекса, а r нѣкоторое положительное раціональное число; изъ понятія объ измѣримости слѣдуетъ, что re, въ свою очередь, есть нѣкоторый элементъ того же комплекса. Такимъ образомъ, если a означаетъ нѣкоторый элементъ даннаго комплекса, то мы можемъ образовать сѣченіе R/R' (§ 22, 4.), если отнесемъ къ группѣ R всѣ тѣ числа r, которыя удовлетворяютъ условію $re < a$, и къ группѣ R' тѣ числа r', которыя удовлетворяютъ неравенству $r'e > a$; при этомъ число r, удовлетворяющее равенству $re = a$, если только такое число r существуетъ, мы можемъ по произволу отнести либо къ группѣ R, либо же къ группѣ R'. Сѣченіе R/R' опредѣляетъ собою нѣкоторое число α, вообще говоря, ирраціональное: это число α мы относимъ элементу a. Мы полагаемъ при этомъ $\alpha e = a$, и говоримъ, что α есть число, измѣряющее элементъ a. Понятно, что съ измѣненіемъ элемента e, принятаго за единицу нашей системы измѣренія, мѣняется и число α. Если $\beta e = b$ есть нѣкоторый другой элементъ той же группы, и $a < b$, то имѣетъ мѣсто неравенство $\alpha < \beta$.

Итакъ, каждой парѣ a, e элементовъ измѣримаго комплекса отвѣчаетъ опредѣленное число α, измѣряющее элементъ a; это слѣдуетъ, согласно вышеизложенному, изъ тѣхъ предпосылокъ, которыя представляютъ собою опредѣленіе измѣримости. Обратное предложеніе, что при данной единицѣ e всякому числу α соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ a, численное значеніе котораго равно числу α, есть новое допущеніе, которое мы склонны принять въ силу нѣкотораго рода внутренняго созерцанія: отнынѣ мы принимаемъ эту предпосылку, которую назовемъ непрерывностью группы [4]).

Съ этой непрерывностью мы не связываемъ никакого (чувственнаго) представленія; никакой внѣшній опытъ не можетъ ни подтвердить ее, ни опровергнуть. Однако же совокупность чиселъ есть измѣримый комплексъ, дѣйствительно обладающая свойствомъ непрерывности.

2. Теперь мы перейдемъ къ общему опредѣленію отношеній.

Евклидъ (Элементы, книга V) даетъ слѣдующее опредѣленіе: Если a и b суть два элемента нѣкотораго измѣримаго комплекса, а A и B представляютъ собою два элемента нѣкотораго другого или даже того же самаго измѣримаго комплекса, то выберемъ два какихъ-либо числа натуральнаго ряда m и n. Тогда имѣетъ мѣсто одно и только одно изъ трехъ соотношеній.

$$\text{I) } ma < nb, \quad \text{II) } ma = nb, \quad \text{III) } ma > nb. \qquad (1)$$

---

[4]). Совершенно непонятно, почему автору понадобилось туманное „внутреннее созерцаніе“ (innere Anschauung) и новый постулатъ для введенія этого понятія. Если мы возьмемъ нѣкоторый элементъ какой-либо измѣримой группы и присоединимъ къ нему всѣ соизмѣримые съ нимъ элементы, то получимъ комплексъ, не обладающій непрерывностью. Введеніе ирраціональныхъ чиселъ показываетъ, что мы имѣемъ возможность построить непрерывные комплексы въ области абстрактныхъ объектовъ. Вопросъ же о томъ, существуютъ ли реальные непрерывные комплексы, какъ авторъ справедливо указываетъ, экспериментально рѣшенъ быть не можетъ.

Если вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтственно имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\text{I)}\, mA < nB,\ \text{II)}\, mA = nB,\ \text{III)}\, mA > nB \qquad (2)$$

и это справедливо при всякихъ значеніяхъ чиселъ m и n [5]), то a относится къ b, какъ A къ B. Мы выражаемъ это равенствомъ

$$a : b = A : B. \qquad (3)$$

Замѣтимъ еще, что здѣсь мы имѣемъ дѣло только съ абсолютными (положительными) значеніями элементовъ измѣримаго комплекса.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Отношеніе двухъ положительныхъ чиселъ α и β равно отношенію числа α/β къ числу 1, то есть

$$\alpha : \beta = \alpha/\beta : 1. \qquad (4)$$

Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части соотношеній

$$m\alpha \overset{<}{\underset{>}{=}} n\beta$$

на число β, мы получимъ:

$$m\frac{\alpha}{\beta} \overset{<}{\underset{>}{=}} n\,.\,1.$$

Число α/β разсматривается поэтому, какъ мѣра отношенія чиселъ α и β и всѣхъ другихъ равныхъ ему отношеній.

3. Отношеніе двухъ элементовъ a и b нѣкотораго измѣримаго комплекса равно отношенію измѣряющихъ ихъ чиселъ α и β.

Дѣйствительно, если

$$m\alpha < n\beta, \qquad (5)$$

то можно указать два такихъ раціональныхъ числа mr' и ns, которыя содержатся между числами $m\alpha$ и $n\beta$, т. е. удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$m\alpha < mr' < ns < n\beta. \qquad (6)$$

Тогда $\alpha < r'$ и $s < \beta$, такъ что, если e обозначаетъ единицу нашего комплекса, то мы имѣемъ

$$a < er', \quad es < b.$$

---

[5]). Т. е., если соотношеніе I) въ ряду (1) всегда влечетъ за собой соотношеніе I въ ряду (2), соотношеніе II) въ ряду (1) влечетъ за собой соотношеніе II) въ ряду (2), соотношеніе III) въ ряду (1) влечетъза собой соотношеніе III) въ ряду (2), каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

Отсюда, принимая во вниманіе неравенства (6), найдемъ:

$$ma < nb. \tag{7}$$

Точно также, если дано неравенство (7), то изъ него вытекаютъ неравенства (5) Дѣйствительно, мы можемъ подобрать два количества er' и es, раціонально кратныхъ единицы мѣры e (т. е. чтобы r' и s были раціональными числами), такъ, чтобы имѣли мѣсто неравенства:

$$ma < mer' < nes < nb. \tag{8}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha < r' \text{ и } s < \beta,$$

стало быть

$$m\alpha < n\beta. \tag{9}$$

Такимъ же образомъ можно показать, что неравенства $ma > nb$ и $m\alpha > n\beta$ вытекаютъ одно изъ другого; отсюда уже слѣдуетъ, что равенство $ma = nb$ всегда обусловливаетъ собою равенство $m\alpha = n\beta$, и обратно.

Поэтому частное α/β также служитъ мѣрой отношенія элементовъ a и b и не зависитъ отъ выбора единицы e. Надъ именованными числами, выражающими элементы комплекса, можно производить такія же вычисленія, какъ и надъ всякими другими числами; можно, однако, задать вопросъ, какое значеніе должны мы приписать результатамъ такихъ вычисленій.

Сложенію и вычитанію присваиваютъ обыкновенно опредѣленное значеніе лишь тогда, когда эти дѣйствія производятся надъ именованными числами одного и того же наименованія; нельзя, напримѣръ, складывать другъ съ другомъ или вычитывать промежутки времени и длины. Если же оба числа выражены посредствомъ одной и той же единицы, напримѣръ, единицы длины, то сумма или разность измѣряющихъ чиселъ представляетъ собою число, измѣряющее сумму или разность соотвѣтственныхъ величинъ, измѣренныя той же единицей.

Въ случаѣ, когда измѣряющія числа имѣютъ раціональныя значенія, предложеніе это слѣдуетъ изъ опредѣленій, которыя мы дали въ § 27; для ирраціональныхъ же чиселъ оно вытекаетъ изъ допущенія о непрерывности комплекса.

Произведеніе именованныхъ чиселъ представляетъ собою именованное число нѣкотораго новаго комплекса, единица котораго опредѣляется, какъ произведеніе единицъ умножаемыхъ величинъ; то же самое относится къ частному. Такъ напримѣръ, произведеніе двухъ мѣръ длины есть мѣра поверхности, произведеніе трехъ мѣръ длины есть мѣра объема, частное отъ дѣленія мѣры длины на мѣру времени есть опредѣленная скорость. Частное же двухъ мѣръ относится къ одному и тому же комплексу, представляетъ собою отношеніе ихъ, а, стало быть, оно есть отвлеченное число.

§ 31. Пропорціи.

1. Пропорціей называется равенство вида

$$a:b=c:d, \tag{1}$$

гдѣ a, b, c и d обозначаютъ элементы измѣримаго комплекса. Равенство это имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда существуетъ отношеніе элементовъ a и b, и отношеніе элементовъ c и d, т. е., когда, съ одной стороны, элементы a и b, съ другой стороны, элементы c и d принадлежатъ соотвѣтственно одному и тому же комплексу; но комплексъ, къ которому относятся элементы a и b можетъ быть отличенъ отъ комплекса, которому принадлежатъ элементы c и d, напримѣръ, одинъ изъ нихъ можетъ быть системой массъ, другой—системой длинъ.

Элементы a, b, c и d называются членами пропорціи; a называется первой, b—второй, c--третьей и d—четвертой пропорціональной.

Если числа α, β, γ и δ представляютъ собою числа, измѣряющія элементы a, b, c и d, то изъ равенства (1) слѣдуетъ числовая пропорція:

$$\alpha:\beta=\gamma:\delta, \tag{2}$$

или равенство

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}. \tag{3}$$

Изъ ариѳметическихъ слѣдствій этого равенства можно сдѣлать соотвѣтственныя заключенія относительно элементовъ a, b, c и d.

Любыя три изъ четырехъ чиселъ α, β, γ и δ однозначно опредѣляютъ соотвѣтствующее имъ четвертое число. Принимая во вниманіе, что каждому числовому значенію, согласно нашему допущенію, соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ комплекса измѣряемыхъ объектовъ, мы можемъ сказать:

Если изъ четырехъ членовъ пропорціи три какихъ-либо члена извѣстны, то они однозначно опредѣляютъ собою четвертый.

2. Изъ формулы (3) можно получить по правиламъ ариѳметики слѣдующія равенства:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta};$$

сообразно съ этимъ, изъ пропорціи (1) получимъ слѣдующія пропорціи:

$$\begin{aligned}(a+b):b&=(c+d):d,\\(a-b):b&=(c-d):d,\qquad(4)\\(a+b):(a-b)&=(c+d):(c-d).\end{aligned}$$

Здѣсь предполагается, что $a - b$ и, слѣдовательно, также $c - d$ суть величины положительныя.

3. Изъ формулы (3) слѣдуетъ, что $\alpha/\gamma = \beta/\delta$. Сдѣлать изъ этого равенства выводъ относительно элементовъ a, b, c и d можно лишь въ томъ случаѣ, когда между элементами a и c существуетъ отношеніе, т. е., когда всѣ четыре элемента a, b, c и d принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ предположеніи мы получимъ:

Изъ пропорціи

$$a:b=c:d \qquad (5)$$

слѣдуетъ пропорція

$$a:c=b:d.$$

4. Если въ пропорціи (1) второй и третій члены равны другъ другу, то каждый изъ нихъ называется среднимъ пропорціональнымъ между первымъ членомъ и четвертымъ. Спрашивается, всегда ли можно опредѣлить средній пропорціональный элементъ между двумя произвольно заданными элементами a и b? Иными словами, можно ли опредѣлить элементъ x, удовлетворяющій пропорціи

$$a:x=x:b? \qquad (7)$$

Очевидно, это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда элементы a и b принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ пропорціи (7) слѣдуетъ:

$$\frac{\alpha}{\xi}=\frac{\xi}{\beta},\quad \xi^2=\alpha\beta,$$

гдѣ α, β и ξ суть числа, измѣряющія элементы a, b и x.

Положивъ $\xi=\sqrt{\alpha\beta}$, мы получаемъ значеніе ξ, удовлетворяющее числовой пропорціи:

$$\alpha:\xi=\xi:\beta. \qquad (7')$$

Отсюда уже вытекаетъ и пропорція (7). Такимъ образомъ нахожденіе средняго пропорціональнаго приводится къ извлеченію квадратнаго корня.

Если черезъ a и b обозначимъ длины двухъ отрѣзковъ, то средняя пропорціональная между этими величинами представитъ намъ сторону квадрата, равновеликаго прямоугольнику, построенному на отрѣзкахъ a и b, какъ на сторонахъ.

5. Предыдущую задачу можно развить слѣдующимъ образомъ: Опредѣлить двѣ величины x и y такъ, чтобы

$$a : x = x : y = y : b. \tag{8}$$

Обозначивъ соотвѣтствующія числа черезъ α, ξ, η и β, имѣемъ:

$$\alpha : \xi = \xi : \eta = \eta : \beta. \tag{9}$$

Изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$\alpha\eta = \xi^2, \quad \beta\xi = \eta^2 \text{ и } \alpha\beta = \xi\eta; \tag{10}$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$\alpha^2\beta = \xi^3 \text{ и } \alpha\beta^2 = \eta^3. \tag{11}$$

Отсюда найдемъ:

$$\xi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}\ ; \quad \eta = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}. \tag{12}$$

Найденныя значенія ξ и η удовлетворяютъ пропорціямъ (9), а слѣдовательно, и пропорціямъ (8).

Но число $\alpha^2\beta$ выражаетъ объемъ четыреугольнаго столба, имѣющаго высоту b и квадратное основаніе, сторона котораго равна a; число ξ выражаетъ длину ребра куба, объемъ котораго равенъ $\alpha^2\beta$. Такимъ образомъ посредствомъ нашей пропорціи рѣшается задача о превращеніи четырехугольнаго столба въ равновеликій ему кубъ. Комбинируя эту задачу съ задачей 4, мы можемъ превратить любой параллелопипедъ въ кубъ.

Частный случай, когда $b = 2a$, есть не что иное, какъ знаменитая Делосская задача объ удвоеніи куба*).

6. Золотое сѣченіе. Данный отрѣзокъ a раздѣлить на такія двѣ части x и $a - x$, чтобы меньшая часть $a - x$ относилась къ большей x такъ, какъ большая часть относится ко всему отрѣзку. То есть, должна быть удовлетворена пропорція:

$$a - x : x = x : a; \tag{13}$$

---

*) Преданіе разсказываетъ, что оракулъ, къ которому обратились жители Делоса во время свирѣпствовавшей среди нихъ эпидеміи, посовѣтовалъ имъ удвоить алтарь Аполлона, имѣвшій форму куба. Геометрическое рѣшеніе задачи приписываютъ Платону. Подробности этого преданія, а также исторію задачи можно найти въ трудѣ Кантора, т. I.

обозначивъ числа, измѣряющія элементы a и x соотвѣтственно черезъ α и ξ, получимъ уравненіе $\xi^2 = \alpha(\alpha - \xi)$, или

$$\xi(\xi + \alpha) = \alpha^2.$$

Представивъ это уравненіе въ другомъ видѣ:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \left(\xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha^2$$

и примѣняя формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, мы найдемъ

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\alpha^2,$$

слѣдовательно,

$$\xi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}\,\alpha}{2}\ ^{*)}.$$

Въ примѣрахъ этого отдѣла, мы отчасти пользовались такими понятіями и теоремами, которыя мы ближе разсмотримъ лишь впослѣдствіи, въ отдѣлахъ, посвященныхъ вопросамъ геометріи и механики.

---

*) Задачѣ этой, получившей впослѣдствіи названіе „золотого сѣченія,“ пиѳагорійцы приписывали мистическое значеніе. Сѣченіе это, какъ наиболѣе пріятное для глазъ отношеніе, часто примѣнялось въ греческомъ строительномъ искусствѣ. Эстетическая сторона золотого сѣченія подробно разработана въ трудѣ Лука Паччоло (Luca Paciuolo) (1509): „Divina proportio“; трудъ этотъ возникъ подъ вліяніемъ Леонардо-да-Винчи (Lionardo da Vinci) и при его сотрудничествѣ.

ГЛАВА VI.

Степени и логариѳмы.

§ 32. Корни.

1. Если p есть число натуральнаго ряда и a произвольное положительное число, то существуетъ одно и только одно положительное число x, которое удовлетворяетъ условію $x^p = a$.

Что не можетъ быть болѣе одного такого числа, слѣдуетъ изъ предложенія о степеняхъ, согласно которому съ возрастаніемъ числа x возрастаетъ также x^p. Поэтому, если x отлично отъ y, то невозможно, чтобы $x^p = y^p$.

Чтобы показать существованіе одного такого числа x, мы составимъ сѣченіе X/X', относя къ комплексу X всѣ числа, p-ая степень которыхъ меньше или равна a, а къ X' числа, которыхъ p-ая степень превосходитъ a. Тогда любое число содержится либо въ X, либо въ X'; если x есть число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ, то $x^p = a$.

Дѣйствительно, если бы было $x^p < a$, то по теоремѣ о непрерывности (§ 24, 5) въ X' должны были бы заключаться и такія числа, которыхъ p-ая степень меньше, чѣмъ a, что противорѣчитъ опредѣленію этого комплекса; въ силу такихъ же соображеній неравенство $x^p > a$ также невозможно [1].

Опредѣленное такимъ образомъ число x называется корнемъ p-ой степени изъ числа a и обозначается еще такъ:

$$x = \sqrt[p]{a};$$

число p называется показателемъ корня или также показателемъ степени корня. Число a, которое и само можетъ быть ирраціональнымъ, называется подкореннымъ числомъ.

---

[1] Согласно § 24, 5, если $x^p < a$, то существуютъ числа x', большія, нежели x, также удовлетворяющія тому же неравенству. Но такъ какъ число x опредѣляется нашимъ сѣченіемъ, то числа x' принадлежатъ комплексу X'; между тѣмъ, по условію, числа комплекса X' удовлетворяютъ неравенству $(x')^p > a$.

Случай $p = 1$ не представляетъ интереса, такъ какъ при этомъ $x = a$. Корень второй степени, встрѣчающійся чаще всего, называется также корнемъ **квадратнымъ**; при немъ показатель 2 часто опускается, такъ что $\sqrt{a}$ обозначаетъ то же, что $\sqrt[2]{a}$ (какъ въ § 21). Корень третьей степени называется **корнемъ кубичнымъ**. Числа вида $\sqrt[p]{a}$ называются также **радикалами**.

2. Для производства вычисленій надъ радикалами служатъ двѣ формулы:

$$\sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab},\quad \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a:b},$$

которыя выражаютъ слѣдующее:

Чтобы умножить или раздѣлить другъ на друга два радикала одинаковой степени p, соотвѣтственно умножаютъ или дѣлятъ подкоренныя числа и берутъ p-ый корень изъ произведенія или частнаго.

Это легко получается изъ перемѣстительнаго закона при умноженіи, по которому имѣемъ:

$$\left(\sqrt[p]{a}\,\sqrt[p]{b}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = ab.$$

Для сложенія и вычитанія нельзя указать такого же простого правила.

Слѣдующія теоремы выражаютъ соотношенія между величинами корней.

3. Если $a > b$, то $\sqrt[p]{a} > \sqrt[p]{b}$ или въ словахъ: Съ возрастаніемъ подкоренного числа возрастаетъ и корень.

Дѣйствительно, если бы было $\sqrt[p]{a} \leqq \sqrt[p]{b}$, то мы имѣли бы $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p \leqq \left(\sqrt[p]{b}\right)^p$, т. е. $a \leqq b$.

$\sqrt[p]{1}$ равенъ 1; слѣдовательно, если $a > 1$, то и $\sqrt[p]{a} > 1$.

4. Если $a > 1$ и $p > q$, то $\sqrt[p]{a} < \sqrt[q]{a}$, т. е.: если подкоренное число больше 1, то и корень больше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень уменьшается.

5. Если $a < 1$ и $p > q$, то $1 > \sqrt[p]{a} > \sqrt[q]{a}$, т. е. если подкоренное число меньше 1, то и корень меньше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень возрастаетъ.

Три послѣднія теоремы мы соединимъ въ одно болѣе общее предложеніе.

6. Если a обозначаетъ произвольное положительное число, а c_1 и c_2 суть какія-либо два числа, удовлетворяющія соотношенію

$$c_1 < 1 < c_2,$$

то всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < \sqrt[p]{a} < c_2,$$

если p достаточно велико, т. е., если оно превосходитъ нѣкоторое опредѣленное число q, зависящее отъ a, c_1 и c_2.

Всѣ эти предложенія легко доказываются на основаніи § 18. Дѣйствительно, если число a больше 1, то вмѣстѣ съ тѣмъ, согласно п. 3-му, и $\sqrt[q]{a} > 1$; если, далѣе, $p > q$, то $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$, т. е. $a > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ и, слѣдовательно, $\sqrt[q]{a} > \sqrt[p]{a}$; предложеніе п. 4-го такимъ образомъ доказано. Примѣнивъ эти разсужденія къ числу, обратному относительно a, получимъ предложеніе п. 5-го.

Такъ какъ c_1 меньше, а c_2 больше 1, то, каково бы ни было число a, согласно § 18, 8, для каждаго достаточно большого показателя p имѣемъ:

$$c_1^p < a < c_2^p;$$

отсюда по п. 3. слѣдуетъ предложеніе п. 6-го.

§ 33. Общая теорія степеней.

1. Въ § 18 установлено понятіе о степени съ цѣлымъ (положительнымъ или отрицательнымъ) показателемъ. Доказательство существованія корней даетъ намъ возможность установить также понятіе о степени съ дробнымъ и даже съ ирраціональнымъ показателемъ.

Изъ понятія о степени мы вывели формулу

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} \tag{1}$$

и, кромѣ того, положили

$$\alpha^{-m} = 1 : \alpha^m, \ \alpha^0 = 1, \tag{2}$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя или отрицательныя цѣлыя значенія, а α есть произвольное число, которое мы теперь обозначаемъ греческой буквой, чтобы указать, что оно можетъ имѣть и ирраціональное значеніе.

Теперь спрашивается, что нужно подразумѣвать подъ степенью α^μ, если μ есть дробное число, напримѣръ, $\mu = p/q$?

Если мы при этомъ желаемъ избѣжать большихъ осложненій, то мы сначала должны ограничиться допущеніемъ, что основаніе α есть положительное число. Формула (1) даетъ намъ тогда отвѣтъ на нашъ вопросъ. Дѣйствительно, положивъ въ ней $m = \mu = p/q$, $n = q$, получимъ изъ этой формулы

$$(\alpha^\mu)^q = \alpha^p. \tag{3}$$

Слѣдовательно, [2])

$$\alpha^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p; \tag{4}$$

и если мы желаемъ, чтобы формула (3) оставалась справедливой и для отрицательныхъ значеній μ, то, измѣнивъ p на $-p$, мы получимъ

$$\alpha^\mu = 1 : \alpha^{-\mu}. \tag{5}$$

Согласно этому опредѣленію, для всякаго показателя μ имѣемъ

$$1^\mu = 1. \tag{6}$$

Относительно обобщенныхъ степеней имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

2. Каковы бы ни были показатели μ и ν,

$$\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^\mu \alpha^\nu \tag{7}$$

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Пусть

$$\mu = \frac{m}{p}, \quad \nu = \frac{n}{q};$$

если тогда p и q суть положительныя числа, то

$$(\alpha^{\mu+\nu})^{pq} = \alpha^{mq+np} = \alpha^{mq}\alpha^{np};$$

---

[2]) Авторъ пользуется здѣсь, по существу, тѣмъ же пріемомъ, къ которому онъ прибѣгалъ въ § 18 (см. примѣчаніе 3 на стр. 63). Формула (4) представляетъ собой, конечно, только опредѣленіе; но мы необходимо должны придти къ этому опредѣленію, если мы хотимъ ввести понятіе о дробныхъ степеняхъ такъ, чтобы соотношеніе (1) осталось въ силѣ.

извлекая корень pq-ой степени, получимъ:

$$\alpha^{\mu+\nu} = \sqrt[pq]{\alpha^{mq}\alpha^{np}} = \alpha^{\mu}\alpha^{\nu},$$

чѣмъ и доказывается соотношеніе (7).

Такъ же найдемъ

$$((\alpha^{\mu})^{\nu})^{q} = (\alpha^{\mu})^{n} = \alpha^{n\mu} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}}$$

и

$$(\alpha^{\mu\nu})^{q} = (\alpha^{\mu})^{n} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}};$$

извлекая корень q-ой степени, получаемъ отсюда соотношеніе (8).

3. Если $\alpha > 1$ и $\mu > \nu$, то

$$\alpha^{\mu} > \alpha^{\nu}. \tag{9}$$

Дѣйствительно,

$$(\alpha^{\mu})^{pq} = \alpha^{mq}, \quad (\alpha^{\nu})^{pq} = \alpha^{np};$$

если $\mu > \nu$, то $mq > np$, слѣдовательно,

$$(\alpha^{\mu})^{pq} > (\alpha^{\nu})^{pq};$$

отсюда слѣдуетъ соотношеніе (9).

4. Если $\alpha > 1$, а c есть какое-нибудь число, удовлетворяющее условію $1 < c$, то можно подобрать достаточно малое число μ_0 такимъ образомъ, что для всякаго $\mu < \mu_0$ имѣетъ мѣсто неравенство:

$$1 < \alpha^{\mu} < c. \tag{10}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть p будетъ такое число, чтобы $c^p > \alpha$ (§ 18,8), тогда $c > \alpha^{1/p} > \alpha^{\mu}$, если $\mu < \frac{1}{p}$. Такимъ образомъ, неравенство (10) удовлетворяется при всякомъ μ, если

$$0 < \mu < \frac{1}{p}.$$

Въ случаѣ, если $\alpha < 1$, имѣютъ мѣсто соотношенія, которыя получаются изъ (9) и (10) замѣной знака $<$ знакомъ $>$ и обратно.

5. Пусть, наконецъ, $\alpha > 1$ и a, a' обозначаютъ приближенно меньшее и приближенно большее значенія числа α; кромѣ того, пусть c_1 и c_2 будутъ два числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$c_1 < \alpha^{\mu} < c_2. \tag{11}$$

Если тогда разность $a' - a$ достаточно мала, то имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^{\mu} < a'^{\mu} < c_2. \tag{12}$$

Дѣйствительно, чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно лишь выбрать числа a и a' такъ, чтобы выполнялись слѣдующія неравенства:

$$c_1^{1/n} < a < \alpha < a' < c_2^{1/n}.$$

6. Теперь легко установить понятіе о степени съ ирраціональнымъ показателемъ. Пусть будетъ ξ ирраціональное число, опредѣляемое сѣченіемъ X/X', и x, x' обозначаютъ числа комплексовъ X и X'. Пусть α будетъ положительное число, которое мы будемъ предполагать большимъ 1. Тогда для всѣхъ значеній x и x' имѣемъ $x < x'$; слѣдовательно,

$$\alpha^x < \alpha^{x'}. \tag{13}$$

Изъ этого слѣдуетъ, что комплексъ чиселъ a^x имѣетъ верхнюю границу, комплексъ чиселъ $a^{x'}$—нижнюю границу, при чемъ обѣ эти границы не могутъ быть различны. Дѣйствительно, обозначимъ эту нижнюю границу черезъ β, верхнюю черезъ β'; тогда число β' не можетъ быть меньше, нежели β. Въ самомъ дѣлѣ, всегда можно указатъ такія числа x, x', чтобы a^x и $a^{x'}$ сколь угодно мало отличались соотвѣтственно отъ β и β' [3]); поэтому, если бы было $\beta > \beta'$, то можно было бы выбрать x, x' такъ, чтобы $a^x > a^{x'}$, что противорѣчитъ соотношенію (13). Невозможно также, чтобы $\beta < \beta'$; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ β'/β было бы неправильной дробью, и мы имѣли бы

$$1 < \beta'/\beta < \alpha^{x'-x},$$

какъ бы мы ни выбирали чиселъ x' и x. Но, согласно предложенію пункта 4-го, это невозможно, такъ какъ разность $x'-x$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой [4]).

Итакъ, подъ символомъ

$$\beta = \alpha^\xi$$

мы будемъ понимать общую границу комплексовъ, составленныхъ изъ чиселъ a^x и $a^{x'}$; такимъ образомъ мы опредѣлили степень для всякаго ирраціональнаго показателя.

7. Исходя изъ этого опредѣленія, мы можемъ доказать теорему:

Пусть $\beta = \alpha^\xi$, а b пусть означаетъ число, которое получается изъ β замѣной чиселъ α и ξ ихъ приближенными значеніями a, a', x, x'; пусть, наконецъ, c_1, c_2 будутъ два какихъ-нибудь числа, удовлетворяющія условію

$$c_1 < \alpha^\xi < c_2;$$

---

[3]) По самому значенію верхней и нижней границы.

[4]) Согласно указанному предложенію $\alpha^{x'-x}$ неопредѣленно приближается къ 1 съ уменьшеніемъ показателя $x'-x$, а потому не можетъ оставаться больше дроби β'/β.

тогда имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < b < c_2,$$

если разности $x' - x$ и $a' - a$ будутъ достаточно малы.

Прежде всего изъ понятія о верхней и нижней границѣ имѣемъ:

$$c_1 < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < c_2,$$

коль скоро разность $x' - x$ становится меньше нѣкотораго достаточно малаго числа. Но тогда, согласно предложенію пункта 5-го, можно выбрать разность $a' - a$ столь малой, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^x < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < a'^{x'} < c_2,$$

что и требовалось доказать.

8. Сказанное позволяетъ расширить основную теорему о непрерывности (§ 24, 5) въ томъ смыслѣ, что въ ряду дѣйствій, выражаемыхъ символомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, можетъ быть и возвышеніе въ степень положительнаго основанія съ ирраціональнымъ показателемъ; отсюда слѣдуетъ далѣе, что всѣ теоремы, изложенныя нами относительно основанія съ раціональными показателями, справедливы и въ случаѣ ирраціональныхъ показателей ⁵).

§ 34. Логариѳмы.

1. Согласно тому, что мы доказали въ предыдущемъ параграфѣ, если a есть положительное и x какое угодно число, то положительное число y однозначно опредѣляется уравненіемъ

$$y = a^x.$$

Точно такъ же, если даны число x и положителное число y, то уравненіемъ

$$a = y^{1/x}$$

однозначно опредѣляется число a. Естественно возникаетъ вопросъ:

16. Если a и y суть данныя положительныя числа, какъ найти число x? Или, другими словами: въ какую степень нужно возвысить положительное число a, чтобы получить данное положительное число y?

Это число x называется логариѳмомъ числа y при основаніи a и изображается такъ:

$$x = \overset{a}{\log} y.$$

---

⁵) Ибо теоремы въ § 24, 6 и 7 выведены изъ этой основной теоремы.

Такъ, число 2 есть логариѳмъ 4 при основанiи 2, логариѳмъ 64 при основанiи 2 есть 6, а 3 есть логариѳмъ 1000 при основанiи 10. Логариѳмъ единицы равенъ нулю при всякомъ основанiи, потому что $a^0 = 1$ при всякомъ a.

Такъ какъ и 1^x равно единицѣ при всякомъ x, то, при основанiи 1 имѣетъ логариѳмъ только число 1, и при томъ этимъ логариѳмомъ можетъ служить совершенно произвольное число. Поэтому основанiемъ 1 не пользуются для практическихъ цѣлей. Мы примемъ, что основанiе больше единицы, хотя это само по себѣ не является необходимостью. Такъ какъ при этомъ предположенiи для положительныхъ чиселъ x a^x всегда больше, а для отрицательныхъ чиселъ x—всегда меньше единицы, и такъ какъ, кромѣ того, $a^{-x} = 1/a^x$, то неправильныя дроби имѣютъ положительные, а правильныя—отрицательные логариѳмы, и два обратныя другъ другу числа y и $1/y$ имѣютъ логариѳмы, равные по абсолютной величинѣ, но различающiеся знаками.

2. Что при данныхъ числахъ y и a всегда существуетъ логариѳмъ, мы покажемъ снова съ помощью сѣченiя. Соединимъ всѣ числа x, для которыхъ $a^x < y$, въ комплексъ X, а числа x', для которыхъ $a^{x'} > y$, въ комплексъ X'. Тогда любое число x' больше любого числа x, и мы имѣемъ сѣченiе X/X', которое опредѣляетъ нѣкоторое число ξ. Если бы число a^ξ было больше числа y, то можно было бы указать такое число x, для котораго $y < a^x < a^\xi$, что было бы несогласно съ опредѣленiемъ чиселъ x; точно также a^ξ не можетъ быть менѣе y; слѣдовательно,

$$a^\xi = y.$$

Итакъ, всякое положительное число y при всякомъ положительномъ основанiи, отличномъ отъ 1, имѣетъ одинъ и только одинъ логариѳмъ.

3. Основныя формулы для производства вычисленiй съ логариѳмами получаются изъ соотвѣтствующихъ формулъ для степеней. Эти послѣднiя мы представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}, \quad a^{\mu x} = (a^x)^\mu,$$

гдѣ x, x_1, x_2, μ суть любыя положительныя или отрицательныя, рацiональныя или иррацiональныя числа. Введемъ обозначенiя:

$$a^x = y, \quad a^{x_1} = y_1, \quad a^{x_2} = y_2,$$

гдѣ y, y_1, y_2 суть произвольныя, но исключительно положительныя числа; въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$x = \log y, \quad x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2,$$

гдѣ для простоты общее основаніе a не обозначено. Тогда получимъ:

$$x_1 + x_2 = \log(y_1 y_2),\quad x_1 - x_2 = \log\frac{y_1}{y_2},\quad \mu x = \log(y^{\mu}),$$

т. е. для любыхъ положительныхъ чиселъ y, y_1, y_2 и для любого положительнаго или отрицательнаго показателя μ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\begin{aligned}\log y_1 + \log y_2 &= \log(y_1 y_2)\\ \log y_1 - \log y_2 &= \log\frac{y_1}{y_2}\\ \mu \log y &= \log(y^{\mu}).\end{aligned}$$

Словами эти формулы выражаются такъ:

Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Логариѳмъ частнаго равенъ разности между логариѳмомъ дѣлимаго и логариѳмомъ дѣлителя.

Логариѳмъ степени равенъ произведенію изъ логариѳма основанія степени на ея показателя.

4. Если a и b суть положительныя числа, то, по опредѣленію логариѳма, имѣемъ

$$a = b^{\overset{b}{\log} a};$$

слѣдовательно, если x есть произвольное, а y—положительное число,

$$a^x = b^{x \overset{b}{\log} a} = y,$$

то

$$x = \overset{a}{\log} y,\quad x \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} y;$$

поэтому,

$$\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log} a \overset{a}{\log} y.$$

Посредствомъ этой формулы можно перейти отъ одного основанія a къ другому основанію b.

Если умножить логариѳмы всѣхъ положительныхъ чиселъ, взятыхъ при основаніи a, на одно и то же число $\overset{b}{\log} a$, то получатся логариѳмы тѣхъ же чиселъ, взятыхъ при основаніи b.

5. Если $y = a^x$, т. е. x есть логариѳмъ числа y, то y называется также числомъ (Numerus), соотвѣтствующимъ логариѳму x (при основаніи a), такъ что каждое изъ двухъ равенствъ

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad y = \overset{a}{\mathrm{num}}\, x$$

представляетъ собой слѣдствіе другого. Основаніе a иногда не обозначается, если это не можетъ вести къ недоразумѣнію.

§ 35. Неперовы логариѳмы.

1. Благодаря необыкновенному облегченію, которое доставляютъ логариѳмы при практическихъ вычисленіяхъ, они играли огромную роль въ развитіи науки, особенно въ развитіи измѣрительныхъ отраслей естествознанія; въ этомъ отношеніи ихъ можно, пожалуй, сравнить съ десятичной системой счисленія.

Исторически, однако, ученіе о логариѳмахъ развилось не изъ систематическаго обобщенія понятія о возвышеніи въ степень и объ обращеніи этого дѣйствія, а изъ сравненія ариѳметической и геометрической прогрессіи; впрочемъ, принципіально это сводится къ тому же.

Ариѳметической прогрессіей называется послѣдовательный рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее число получается путемъ *прибавленія* къ предыдущему одного и того же числа, называемаго *разностью* ариѳметической прогрессіи. *Геометрическая прогрессія* есть рядъ чиселъ, каждый членъ котораго получается *умноженіемъ* предыдущаго на одного и того же множителя—*знаменателя* геометрической прогрессіи.

2. Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующую маленькую таблицу; первая строка содержитъ числа натуральнаго ряда, образующія ариѳметическую прогрессію. Соотвѣтствующія мѣста во второй строкѣ занимаютъ послѣдовательно возрастающія степени числа 2, образующія геометрическую прогрессію:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \end{array}; \qquad (1)$$

предъ нами таблица логариѳмовъ съ основаніемъ 2. Въ первой строкѣ находится логариѳмъ числа, стоящаго подъ нимъ. Таблицей можно пользоваться слѣдующимъ образомъ: напримѣръ, чтобы найти произведеніе 8.64, мы складываемъ логариѳмы чиселъ 8 и 64, т. е. 3 и 6; получимъ 9, которому соотвѣтствуетъ число (numerus) 512.

Эту таблицу можно продолжить и въ лѣвую сторону:

—4	—3	—2	—1	0	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

(2)

Если бы мы пожелали, напримѣръ, вычислить по этой таблицѣ произведеніе $\frac{1}{8} . 512$, мы должны были бы найти число, котораго логариѳмъ есть $9 - 3 = 6$, и получили бы правильный результатъ.

Подобная таблица съ указаніями ея примѣненія дана впервые въ „Arithmetica integra“ Михаила Штифеля (Michael Stifel около 1544 г.).

3. Таблица логариѳмовъ въ этомъ видѣ имѣетъ лишь ограниченное примѣненіе, такъ какъ изъ нея можно узнать логариѳмы лишь немногихъ чиселъ, которыя слѣдуютъ другъ за другомъ съ большими, постоянно возрастающими промежутками.

Неперъ (John Neper) и до него еще Бюрги (Joost Bürgi) старались устранить этотъ недостатокъ, уменьшая разность ариѳметической прогрессіи, и принимая вмѣстѣ съ тѣмъ знаменатель геометрической прогрессіи близкимъ къ 1. Этимъ можно достигнуть того, что въ извѣстныхъ предѣлахъ произвольно заданное число заключается какъ въ ариѳметической, такъ и въ геометрической прогрессіи; по крайней мѣрѣ, если въ таблицѣ нѣтъ самого числа, то въ ней имѣется близко подходящее къ нему приближенное значеніе *).

Пусть Δ обозначаетъ нѣкоторую малую величину; составимъ двѣ прогрессіи—одну ариѳметическую, другую геометрическую слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta,\ 5\Delta,\ldots, \\ 1,\ 1+\Delta,\ (1+\Delta)^2,\ (1+\Delta)^3,\ (1+\Delta)^4,\ (1+\Delta)^5,\ldots. \end{array} \qquad (3)$$

Каждое положительное число заключается между двумя сосѣдними членами первой строки, и содержится такимъ образомъ въ этой строкѣ съ погрѣшностью, не превышающей $\frac{1}{2}\Delta$; каждое число, большее единицы, расположено между двумя числами второй строки, напримѣръ, между $(1+\Delta)^n$

---

*) I. Бюрги (1552—1632 или 1633) родился въ Швейцаріи, былъ на службѣ у ландграфа Вильгельма IV въ Касселѣ, и позднѣе жилъ въ Прагѣ. Уже между 1603 и 1611 г.г. онъ вычислилъ подобную таблицу подъ названіемъ „Progress tabulen“, но такъ какъ онъ держалъ ее въ тайнѣ, то и лишился пріоритета. Первый трудъ Непера появился въ 1614 г.; Неперъ первый употребляетъ терминъ „логариѳмы“ („Descriptio mirifici logarithmorum canonis“). Для построенія подобныхъ таблицъ при тогдашнемъ состояніи науки требовались огромныя вычисленія.

и $(1+\Delta)^{n+1}$; максимумъ ошибки составляетъ здѣсь $\frac{1}{2}\Delta(1+\Delta)^n$, а потому возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ.

Чтобы перемножить два числа второй строки

$$a=(1+\Delta)^m \text{ и } b=(1+\Delta)^n,$$

складываютъ соотвѣтствующія числа первой строки

$$\alpha=m\Delta, \quad \beta=n\Delta$$

и отыскиваютъ во второй строкѣ число $ab=(1+\Delta)^{m+n}$, соотвѣтствующее суммѣ $\alpha+\beta=(m+n)\Delta$.

Вмѣсто возрастающей геометрической прогрессіи можно вычислить убывающую 1, $1-\Delta$, $(1-\Delta)^2$, $(1-\Delta)^3$, ... но при этомъ получаются лишь числа, меньшія единицы *).

4. Пусть

$$a=(1+\Delta)^m, \quad \alpha=m\Delta,$$

тогда

$$a=(1+\Delta)^{\frac{\alpha}{\Delta}}$$

и α есть логариѳмъ числа a при основаніи

$$E=(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}.$$

Такимъ образомъ таблица (3) есть таблица логариѳмовъ при основаніи E.

Неперъ положилъ въ основаніе своей таблицы число

$$\Delta=0{,}0000001$$

и получилъ поэтому

$$E=(1{,}0000001)^{10000000}.$$

По таблицѣ Непера логариѳмъ числа 2 при указанномъ основаніи оказывается равнымъ 0,693146922, а по новѣйшимъ таблицамъ такъ называемый натуральный логариѳмъ 2, т. е. логариѳмъ 2 при основаніи

$$e=2{,}71828182846,$$

почти совпадаетъ съ вышеприведеннымъ; именно онъ равенъ 0,693147180.

---

*) Такъ, дѣйствительно, Неперъ и составилъ свою таблицу, которая сперва предназначалась для тригонометрическихъ величинъ, меньшихъ 1.

Такимъ образомъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ очень мало разнится отъ числа e.

§ 36. Бригговы логариѳмы.

1. Есть еще другой способъ пополнять два ряда соотвѣтствующихъ другъ другу членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи. Если имѣемъ при любомъ основаніи логариѳмы двухъ чиселъ

$$x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2, \tag{1}$$

то изъ § 34 слѣдуетъ:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \log \sqrt{y_1 y_2}; \tag{2}$$

число $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ называется **среднимъ ариѳметическимъ** обоихъ чиселъ x_1, x_2, а $\sqrt{y_1 y_2}$ — **среднимъ геометрическимъ** чиселъ (положительныхъ) y_1, y_2, такъ что содержаніе формулы (2) можетъ быть изложено такъ:

Среднее ариѳметическое логариѳмовъ двухъ чиселъ есть логариѳмъ средняго геометрическаго этихъ двухъ чиселъ.

Если $x_1 < x_2$, то и $y_1 < y_2$ и, кромѣ того,

$$x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$$

$$y_1 < \sqrt{y_1 y_2} < y_2.$$

Поэтому, если извѣстенъ рядъ логариѳмовъ, то простымъ извлеченіемъ квадратнаго корня можно вычислить логариѳмы сколькихъ угодно промежуточныхъ чиселъ и такимъ образомъ строить таблицу логариѳмовъ, постоянно сгущая интервалы между послѣдовательными числами. Таковъ, въ дѣйствительности, и былъ тотъ путь, которымъ были вычислены первыя таблицы логариѳмовъ. Возьмемъ, напримѣръ, таблицы (1) и (2) § 35; слѣдуя этому правилу, получимъ при основаніи 2:

$$0{,}5 = \log \sqrt{2} = \log 1{,}41421,$$

$$1{,}5 = \log \sqrt{8} = \log 2{,}82842,$$

$$0{,}25 = \log \sqrt[4]{2} = \log 1{,}18920.$$

Этимъ способомъ можно составить таблицу логариѳмовъ при любомъ основаніи. Генрихъ Бриггъ (Henry Briggs), современникъ и другъ

Непера первый понялъ, какія удобства представляетъ основаніе 10, и вычислилъ таблицу при этомъ основаніи; таблица эта была напечатана въ 1617—1624 гг. Поэтому логариѳмы эти называются Бригговыми логариѳмами. Преимущество этого основанія состоитъ въ слѣдующемъ:

Если какое-нибудь число, выраженное по десятичной системѣ счисленія, будь то цѣлое число или десятичная дробь, имѣетъ m цифръ (до запятой), то по своей величинѣ это число заключается между 10^{m-1} и 10^m, и, слѣдовательно, его Брикговъ логариѳмъ содержится между $m-1$ и m (включая нижній предѣлъ $m-1$.)

Легко поэтому указать цѣлую часть логариѳма, т. е. число, стоящее до запятой: для этого достаточно уменьшить на 1 число цифръ заданнаго числа, находящихся до запятой. Это число называется **характеристикой** логариѳма; обыкновенно оно въ таблицахъ вовсе не приводится. Слѣдующіе за запятой десятичные знаки называются **мантиссой** логариѳма. Въ таблицахъ дается лишь мантисса. Если въ таблицѣ ищутъ по данному логариѳму соотвѣтствующее число, то отыскиваютъ данную мантиссу и находятъ соотвѣтствующее ей число; въ этомъ числѣ нужно оставить передъ запятой столько цифръ, чтобы число ихъ превышало на 1 характеристику логариѳма. Числа, меньшія, чѣмъ 1, т. е. числа, въ которыхъ въ десятичной системѣ передъ запятой стоитъ нуль, имѣютъ отрицательные логариѳмы. Чтобы вычисленія приходилось дѣлать только съ положительными числами, мантиссу всегда берутъ положительной, и лишь характеристика можетъ быть отрицательной; а именно, правильную дробь, логариѳмъ которой нужно взять, умножаютъ предварительно на надлежащимъ образомъ выбраную степень десяти [6]), а изъ логариѳма полученнаго такимъ образомъ числа вычитываютъ показатель этой степени десяти. Напримѣръ:

$$\log \text{brigg. } 1/3 = -\log 3 = -0{,}4771212547,$$

$$0{,}5228787453 - 1,$$

$$\log \text{brigg. } 0{,}003657 = 0{,}5631249603 - 3 .$$

Таблица Бригга появилась въ свѣтъ въ 1617—1624 гг. Въ нихъ даны были логариѳмы съ 14 десятичными знаками, но имѣлись большіе пробѣлы. Послѣдніе были устранены въ 10-значныхъ таблицахъ Адріана Влака (Adrian Vlack, 1628). Таблицы Влака даютъ десятизначные логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100000.

На опытѣ было замѣчено, что въ большинствѣ случаевъ нѣтъ необходимости примѣнять десятизначныя таблицы, и поэтому наиболѣе рас-

---

[6]) Эту степень нужно выбрать, такъ чтобы по умноженіи получить неправильную дробь; такъ въ первомъ изъ двухъ приведенныхъ ниже примѣровъ $\frac{1}{3}$ достаточно помножить на 10, а во второмъ примѣрѣ 0,003657 слѣдуетъ помножить на 10^3.

пространенными таблицами являются семизначныя. Въ 1793 г. Вега (Vega) издалъ такія таблицы, которыя въ послѣдовавшей затѣмъ обработкѣ Гюльзе (Hülse) разошлись въ большомъ числѣ изданій. Послѣ нашли, что и семизначные логариѳмы слишкомъ громоздки для многихъ цѣлей, въ частности для цѣлей педагогическихъ (для упражненія въ примѣненіи логариѳмовъ) а также и въ примѣненіи къ естественнымъ наукамъ въ случаяхъ, не требующихъ особенно большой точности; изданы были шести, пяти и даже четырехзначныя таблицы. Изъ множества трудовъ этого рода, составители которыхъ стремятся обыкновенно облегчить употребленіе логариѳмовъ типографскими пріемами, отмѣтимъ здѣсь таблицы, принадлежащія авторамъ: Schrön, Bremiker, Wittstein, Greve, F. G. Gauss, Heyer, Schülke.

Наоборотъ, иногда не только въ естественныхъ наукахъ—въ астрономіи въ особенности,—но и при изслѣдованіяхъ въ области теоріи чиселъ, бываютъ случаи, когда и семизначныя таблицы оказываются недостаточно точными; поэтому математику необходимо пріобрѣсти навыкъ въ употребленіи болѣе точныхъ таблицъ. Среди послѣднихъ самой цѣнной и сравнительно наиболѣе доступной является „Thesaurus logarithmorum“ Вега; это сочиненіе, изданное въ 1794 г. въ Лейпцигѣ, содержитъ полную десятизначную таблицу бригговыхъ логариѳмовъ и, кромѣ того, замѣчательную таблицу Вольфрама (Wolfram), въ которой даны натуральные логариѳмы чиселъ до 10009 съ 48-ю десятичными знаками.

Каждое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія его первоначальныхъ множителей, и логариѳмъ его можетъ быть полученъ сложеніемъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ; поэтому если предположить извѣстнымъ разложеніе чиселъ на ихъ первоначальныхъ множителей, то достаточно имѣть таблицу, содержащую лишь логариѳмы простыхъ чиселъ. Въ послѣдней части таблицы Вольфрама это упрощеніе, затрудняющее, конечно, нѣсколько пользованіе таблицей, нашло себѣ примѣненіе.

Въ виду рѣдкости и дороговизны Thesaurus'а, въ 1896 г. во Флоренціи появилось фотоцинкографическое воспроизведеніе его, болѣе доступное по цѣнѣ.

§ 37. Интерполяція.

1. Въ каждой распространенной логариѳмической таблицѣ во введеніи даются указанія, какъ ею пользоваться; упражненіе и опытъ научаютъ нѣкоторымъ мелкимъ упрощеніямъ. Здѣсь мы остановимся лишь на одномъ пунктѣ, имѣющемъ болѣе общее значеніе,—на такъ называемой интерполяціи.

Семизначныя таблицы, напримѣръ, даютъ непосредственно мантиссы, вычисленныя съ семью знаками, для всѣхъ чиселъ до 99999 включительно, т. е. для всѣхъ пятизначныхъ чиселъ.

Логариѳмъ семизначнаго числа можетъ быть найденъ непосредственно изъ таблицы лишь, когда обѣ послѣднія цифры суть нули. Но отъ семизначной таблицы мы вправѣ требовать, чтобы она давала намъ логариѳмы всѣхъ семизначныхъ чиселъ съ одинаковой точностью.

Такъ же точно и данный логариѳмъ, соотвѣтствующее которому число мы желаемъ опредѣлить, вообще говоря, не можетъ быть точно найденъ въ таблицѣ; между тѣмъ, бываетъ нужно найти точно семь цифръ этого числа.

Дѣлается это посредствомъ интерполяціи, основанной на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Пусть будетъ x, x_1, x_2, x_3, ... рядъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію съ разностью D:

$$x-x_1=x_1-x_2=x_2-x_3= \;...\; =D$$

и пусть будетъ

$$\begin{aligned} y &= \log x, \\ y_1 &= \log x_1, \quad y_1-y=\Delta, \\ y_2 &= \log x_2, \quad y_2-y_1=\Delta_1, \\ y_3 &= \log x_3, \quad y_3-y_2=\Delta_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Разности Δ, Δ_1, Δ_2, ... не равны другъ другу, но постепенно убываютъ, какъ это видно изъ таблицъ. Такъ какъ это убываніе происходитъ чрезвычайно медленно, то безъ замѣтной погрѣшности можно принять, что и числа y внутри достаточно малаго промежутка составляютъ ариѳметическую прогрессію; это предположеніе въ дѣйствительности не совсѣмъ справедливо, но при пользованіи нашей семизначной таблицей никогда не влечетъ сколь-нибудь замѣтной ошибки.

Положимъ, что нужно отыскать логариѳмъ $y+\beta$ нѣкотораго числа $x+\alpha$, лежащаго между x и x_1, такъ что α есть дробная часть числа D; согласно сдѣланному предположенію, β окажется такой же частью числа Δ, такъ что

$$\beta=\frac{\Delta}{D}\alpha \tag{2}$$

Для облегченія вычисленія въ таблицахъ подъ заголовкомъ P. P.

(Partes proportionales, пропорціональныя части) даны разности Δ и произведенія:

$$\frac{\Delta}{10}, \frac{2\Delta}{10}, \ldots, \frac{9\Delta}{10}$$

съ той степенью точности, съ которой производятся вычисленія.

Изъ тѣхъ же таблицъ можно по данному числу β найти число α по формулѣ

$$\alpha = \frac{D}{\Delta}\beta.$$

Для этого нужно лишь выполнить небольшое дѣленіе, либо по сокращенному способу, либо съ помощью вспомогательныхъ таблицъ P. P.

Такъ какъ разности Δ наиболѣе велики у меньшихъ чиселъ (ниже 10000), то въ этихъ частяхъ таблицы интерполяція даетъ наименѣе точные результаты; поэтому нѣкоторыя таблицы продолжены за предѣлы пятизначныхъ чиселъ и эти дополнительные логариѳмы даются съ 8 десятичными знаками. У Вега таблицы продолжены до 107999.

2. Въ десятичныхъ таблицахъ „Thesaurus“ даны непосредственно логариѳмы всѣхъ пятизначныхъ чиселъ. Интерполяція и здѣсь выполняется согласно тѣмъ же основнымъ положеніямъ. Но чтобы использовать эту таблицу вполнѣ, не всегда бываетъ достаточно принять, что промежуточные логариѳмы образуютъ ариѳметическую прогрессію.

Тогда принимаютъ, что разности Δ, Δ_1, $\Delta_2, \ldots$ не одинаковы, но составляютъ ариѳметическую прогрессію и для логариѳмовъ y получается такимъ образомъ ариѳметическая прогрессія второго порядка [7]).

Если мы пожелаемъ воспользоваться этимъ предположеніемъ, чтобы отыскать по таблицѣ логариѳмъ $y+\beta$ нѣкотораго числа $x+\alpha$, заключающійся между двумя послѣдовательными логариѳмами таблицы y и y_1, то нужно положить

$$\beta = m\alpha + m'\alpha(D-\alpha)$$

и опредѣлить числа m и m' такимъ образомъ, чтобы для x_1 и x_2, т. е. при $\alpha = D$ и $\alpha = 2D$ изъ этой формулы получались правильныя значе-

---

[7]) Подъ ариѳметической прогрессіей второго порядка разумѣютъ рядъ чиселъ, послѣдовательныя разности которыхъ, образуютъ обыкновенную ариѳметическую прогрессію. Таковъ, напримѣръ, рядъ чиселъ 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22....

[8]) Достаточное обоснованіе этого требуетъ пространныхъ разсужденій, которыя относятся къ „теоріи конечныхъ разностей“, дисциплинѣ, въ которой исчер-

нія $y_1 = y + \Delta$ и $y_2 = y + \Delta + \Delta_1$ 8)). Отсюда слѣдуетъ:

$$m = \frac{\Delta}{D}$$

$$\Delta + \Delta_1 = 2mD - 2m'D^2$$

$$2m'D^2 = \Delta - \Delta_1 = \Delta';$$

такимъ образомъ нащеніе β дается формулой

$$\beta = \frac{\Delta}{D}\alpha + \frac{\alpha(D-\alpha)\Delta'}{2D^2}. \qquad (3)$$

Число $\Delta - \Delta_1 = \Delta'$ называется второй разностью. Вліяніе послѣдней сказывается на послѣдней цифрѣ логариѳма, иногда даже на предпослѣдней, но не дальше.

Если примемъ, что y есть десятизначное, а x пятизначное цѣлое число (безъ десятичныхъ дробей), то нужно положить $D = 1$ и $\alpha = 0{,}abcde$, гдѣ буквы a, b, c, d, e обозначаютъ соотвѣтственно цифры, занимающія 6^{oe}, 7^{oe}, 8^{oe}, 9^{oe} и 10^{oe} мѣста въ данномъ числѣ $x + \alpha$. Такъ какъ Δ' есть число, очень малое въ сравненіи съ разностью Δ, то во второмъ членѣ правой части формулы (3) достаточно взять число α лишь съ двумя цифрами 9)).

Если N есть число, логариѳмъ котораго отыскивается, а n есть число, изображаемое пятью первыми цифрами числа N, то изъ таблицы находимъ точно $\log n$ съ десятью знаками, а изъ формулы (3) получается:

$$\log N = \log n + 0{,}abcde\,\Delta + \frac{1}{2}\,0{,}ab(1 - 0{,}ab)\,\Delta'. \qquad (4)$$

Въ этой формулѣ число N надо понимать такъ, что пять цифръ числа n стоятъ впереди запятой. Въ зависимости отъ дѣйствительнаго положенія запятой, каждый разъ выбирается соотвѣтственная характеристика.

Если число N изображается болѣе, чѣмъ десятью цифрами, то одиннадцатая изъ нихъ можетъ быть принята во вниманіе при выполненіи умноженія во второмъ членѣ.

Ищемъ, напримѣръ, десятизначный бригговъ логариѳмъ числа e

$$e = 2{,}71828182846.$$

пывающимъ образомъ изслѣдуется вопросъ объ интерполяціи. Мы должны сказать, что въ томъ сжатомъ видѣ, въ какомъ эта теорія здѣсь изложена, въ ней, конечно, трудно вполнѣ разобраться; но развитіе ея выходитъ за предѣлы настоящаго сочиненія.

9)) Если, напримѣръ, намъ нужно отыскать логариѳмъ числа 32,89716534, то мы принимаемъ за x цѣлое число 32897, за α число 0,16534, за y логариѳмъ числа x изъ таблицы, а β опредѣляется формулой (3); перенесеніе же запятой вліяетъ только на характеристику. Это авторъ и выражаетъ въ общемъ видѣ формулой (4).

Въ таблицѣ находимъ десятизначные логариѳмы слѣдующихъ пяти послѣдовательныхъ чиселъ:

		Δ	Δ′
log 27182 =	4342814081		
3 =	2973851	159770	
4 =	3133615	764	6
5 =	3293373	758	6
6 =	3453126	753	5

Нужно получить сокращеннымъ способомъ произведенія:

$$0{,}8182846 \times 159770$$

и

$$\frac{1}{2}0{,}82 \times 0{,}18 \times 6.$$

Получается:

$$\begin{array}{rl}
4342814081 & \\
127816 & \\
1597 & .\ 7 \\
1278 & .\ 16 \\
31 & .\ 95 \\
12 & .\ 78 \\
 & \ \ 64 \\
 & \ \ \ 9 \\
\hline
 & \ \ 45 \\
\hline
0{,}4342944818 & .\ 77\ ;
\end{array}$$

въ результатѣ первыя десять цифръ точны. Вторая разность даетъ здѣсь только приблизительно половину единицы послѣдняго десятичнаго разряда; она принимается во вниманіе лишь при особенно точныхъ вычисленіяхъ. Вторыя разности возрастаютъ съ уменьшеніемъ чиселъ, логариѳмы которыхъ отыскиваются.

Для упрощенія умноженій въ таблицѣ помѣщаются еще вспомогательныя таблички; ихъ устройство и примѣненіе излагается во введеніи къ таблицамъ.

Рѣшеніе обратной задачи—по данному логариѳму найти соотвѣтствующее число—производится по формулѣ (2), если принимаютъ въ разсчетъ лишь первую разность. Для того, чтобы принять во вниманіе и вторую разность, нужно было бы вывести формулу, аналогичную формулѣ (3); но это требуетъ обширныхъ предварительныхъ вычисленій при самомъ составленіи таблицъ.

Вообще говоря, чѣмъ больше промежутки между числами, логариѳмы которыхъ даны въ таблицѣ непосредственно, тѣмъ важнѣе принять во вниманіе вторую разность. Напримѣръ, можно построить вполнѣ удовлетворительную четырехзначную таблицу логариѳмовъ, помѣщающуюся на половинѣ страницы, выписавши логариѳмы всѣхъ двухзначныхъ чиселъ. Съ помощью этой таблицы можно дѣлать вычисленія съ точностью до четвертаго десятичнаго знака, но при этомъ часто необходимо бываетъ принять въ разсчетъ вторую разность.

§ 38. Примѣры.

Дадимъ теперь нѣкоторые примѣры логариѳмическихъ вычисленій, при которыхъ для полученія искомаго результата необходимо пользоваться болѣе точными таблицами. Пусть

$$e = 2{,}71828182846 \qquad (1)$$

основаніе натуральныхъ логариѳмовъ,

$$\pi = 3{,}14159265359 \qquad (2)$$

Лудольфово (Ludolf) число. Съ точностью до десятаго знака находимъ:

$$\log(\pi \log e) = 0{,}1349341840\,{}^{*}). \qquad (3)$$

Изъ нѣкоторыхъ теоретическихъ соображеній, которыя не могутъ быть здѣсь приведены**), слѣдуетъ, что число

$$z = e^{\pi\sqrt{19}} \qquad (4)$$

отличается отъ ближайшаго большаго цѣлаго числа меньше, чѣмъ на $\frac{1}{4}$. Какое это цѣлое число?

Изъ формулы (4) имѣемъ:

$$\log\log z = \log\sqrt{19} + \log(\pi \log e).$$

Пользуясь десятичной таблицей, найдемъ

$$\log\sqrt{19} = 0{,}6393768005\,,$$

а въ виду соотношенія (3)

$$\log\log z = 0{,}7743109845.$$

---

*) Необходимыя для вычисленія этого числа данныя находятся на послѣдней страницѣ соч. Vega „Sammlung mathematischer Tafeln“, изд. Hülsse (Berlin 1865).

**) H. Weber, „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“, стр. 247, 355, 405. Braunschweig 1891.

Разыскавъ два раза подъ рядъ соотвѣтствующее число, мы получимъ:

$$\log z = 5{,}94717865$$

$$z = 885479{,}8.$$

Такимъ образомъ искомое число

$$A = 885480.$$

Доказательствомъ правильности результата (обоснованіе его не можетъ быть здѣсь приведено) служитъ то обстоятельство, что $A - 744$ должно оказаться полнымъ кубомъ; и въ самомъ дѣлѣ оказывается

$$A - 744 = 884736 = 96^3.$$

Есть еще нѣкоторыя другія числа, обладающія подобными свойствами, а именно:

$$z = e^{\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\pi\sqrt{163}}.$$

Ихъ значенія отличаются отъ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ цѣлыхъ чиселъ A еще менѣе, чѣмъ въ предыдущемъ примѣрѣ, такъ что, напримѣръ, третье изъ нихъ имѣетъ послѣ запятой 12 девятокъ. Для перваго изъ этихъ трехъ чиселъ точное вычисленіе посредствомъ Thesaurus'а даетъ

$$A = 884736744.$$

Другія два числа выходятъ далеко за предѣлы Thesaurus'а. Ихъ можно однако, вычислить, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что и числа

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}},$$

очень мало, хотя и не въ такой степени, какъ z, отличаются отъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ B и, кромѣ того,

$$A = B^3 + 744.$$

Такимъ образомъ получимъ, напримѣръ,

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}} = 960{,}000042$$

или $B = 960$, а въ двухъ другихъ случаяхъ

$$B = 5280, \quad B = 640320.$$

Примѣры эти иллюстрируютъ нѣкоторыя, глубоко сокрытыя ариѳметическія свойства, присущія числамъ 19, 43, 67, 163, и никакимъ другимъ.

ГЛАВА VII.

Уравненія первой степени.

§ 39. Уравненія первой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Въ § 17 мы показали, что необходимость ввести дробныя числа была вызвана рѣшеніемъ слѣдующей задачи:

1. Даны числа a и b; найти число x, удовлетворяющее условію

$$ax = b. \tag{1}$$

Мы видѣли, что, если a и b суть произвольныя цѣлыя или дробныя числа и, кромѣ того, $a \neq 0$, то существуетъ одно и только одно число, удовлетворяющее поставленному требованію. Если же $a = 0$, и $b \neq 0$, то нѣтъ ни одного числа, которое выполняло бы условіе (1). Наконецъ, когда $a = 0$, $b = 0$, то всякое число x удовлетворяетъ условію (1).

Послѣ того, какъ мы ввели дробныя и ирраціональныя числа, числа a и b могутъ имѣть дробныя и ирраціональныя значенія.

Въ сборникахъ для упражненій находится множество задачъ, въ которыхъ требуется выразить посредствомъ такого рода равенства вопросъ изъ обыденной жизни или изъ какой-нибудь отрасли науки. Въ унаслѣдованной нами отъ древнихъ грековъ антологіи находится множество прекрасныхъ задачъ этого рода, изложенныхъ въ формѣ эпиграммъ *).

Равенство (1) называется уравненіемъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; нахожденіе же неизвѣстнаго числа x называется рѣшеніемъ уравненія.

Не всегда, однако, условія, при помощи которыхъ должны быть найдены неизвѣстныя, бываютъ столь просты, какъ въ приведенномъ при-

---

*) Ариѳметическія эпиграммы греческой антологіи собраны и изданы съ рѣшеніями въ нѣмецкомъ переводѣ Циркелемъ (Zirkel) въ программной работѣ гимназіи въ Боннѣ за 1853 г.

мѣрѣ: иногда, напримѣръ, неизвѣстныхъ чиселъ бываетъ нѣсколько, и условія, которымъ они должны удовлетворять, выражены посредствомъ нѣсколькихъ уравненій. Мы сперва займемся слѣдующей болѣе общей задачей.

2. Даны числа a, b, c, a', b', c'. Найти неизвѣстныя числа x, y, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ:

$$\begin{array}{l|cc} ax+by=c & b' & -a' \\ a'x+b'y=c' & -b & a \end{array} \tag{2}$$

(Два уравненія съ двумя неизвѣстными).

Для рѣшенія этой задачи можно поступить слѣдующимъ образомъ. Умножаемъ всѣ члены обоихъ уравненій на написанныхъ сбоку множителей: одинъ разъ соотвѣтственно на $b', -b$, другой разъ соотвѣтственно на $-a'$, a; каждый разъ складываемъ полученные результаты и тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} (ab'-ba')x &= \quad cb'-bc' \\ (ab'-ba')y &= -ca'+ac', \end{aligned} \tag{3}$$

т. е. два уравненія, каждое съ однимъ неизвѣстнымъ. Въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя x и y имѣютъ одинъ и тотъ же коэффиціентъ

$$\Delta = ab'-ba'. \tag{4}$$

Этотъ коэффиціентъ называется детерминантомъ системы уравненій (2) и иногда изображается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \tag{5}$$

3. Если детерминантъ не равенъ нулю, то есть одна и только одна пара чиселъ x, y, удовлетворяющихъ уравненіямъ (2):

$$x = \frac{cb'-bc'}{\Delta}, \quad y = \frac{-ca'+ac'}{\Delta}. \tag{6}$$

Въ изложенномъ способѣ рѣшенія уравненій (2) мы исключали изъ обоихъ уравненій поперемѣнно каждое изъ неизвѣстныхъ, и потому этотъ способъ называется способомъ исключенія. Можно рѣшать уравненія еще иначе, такъ называемымъ способомъ подстановки, отличающимся большей постепенностью.

Если о коэффиціентахъ a, b, a', b' извѣстно, что одинъ изъ нихъ не равенъ нулю, то мы можемъ, не нарушая общности, считать отличнымъ отъ нуля любой изъ четырехъ коэффиціентовъ, напримѣръ b': мы можемъ, вѣдь, написать на второмъ мѣстѣ любое изъ двухъ уравненій, а затѣмъ обозначить черезъ y любое изъ двухъ неизвѣстныхъ.

Итакъ пусть b' не равно нулю. Если бы число x было извѣстно, то посредствомъ второго изъ уравненій (2) мы нашли бы значеніе неизвѣстного y:

$$y = \frac{c' - a'x}{b'}. \tag{7}$$

Если подставить это значеніе неизвѣстнаго y въ первое изъ уравненій (2), то посредствомъ простыхъ вычисленій получимъ:

$$\Delta x = cb' - bc'. \tag{8}$$

Если число Δ отлично отъ нуля, то значеніе неизвѣстнаго x окажется такое же, какъ и выше (6). Затѣмъ изъ уравненія (7) получается выраженіе для неизвѣстнаго y, которое также совпадаетъ съ формулой (6).

И при этомъ способѣ рѣшенія ясно, что въ случаѣ, когда $\Delta = 0$, $cb' - bc' \neq 0$, нѣтъ ни одного значенія для неизвѣстнаго x, которое удовлетворяло бы условію (8); слѣдовательно, уравненія (2) въ этомъ случаѣ не имѣютъ рѣшенія. Если же и $\Delta = 0$ и $cb' - bc' = 0$, то въ уравненіи (8) значеніе неизвѣстнаго x ничѣмъ не опредѣляется; въ этомъ случаѣ для x можно взять произвольное значеніе, а соотвѣтствующее значеніе для неизвѣстнаго y получится изъ уравненія (7): любая пара чиселъ, полученная такимъ образомъ, удовлетворяетъ уравненіямъ (2).

Наконецъ, когда всѣ коэффиціенты a, b, a', b', суть нули, то уравненія (2) имѣютъ смыслъ лишь при условіи, что и числа c и c' суть нули. Но тогда уравненія удовлетворяются произвольными значеніями неизвѣстныхъ x и y. Соединяя все сказанное, приходимъ къ слѣдующему выводу:

4. Если детеминантъ уравненій (2) равенъ нулю, то послѣднія либо противорѣчатъ другъ другу и не имѣютъ ни одного рѣшенія, либо же одно изъ двухъ уравненій представляетъ собой слѣдствіе другого, и въ этомъ случаѣ уравненія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній.

§ 40. Уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными.

1. Займемся вопросомъ объ уравненіяхъ первой степени въ нѣсколько болѣе общемъ видѣ. Разсмотримъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстным x, y, z:

$$\begin{array}{l|ll} ax + by + cz = e, & & \\ a'x + b'y + c'z = e', & c'' & -b'' \\ a''x + b''y + c''z = e'', & -c' & b' \end{array} \tag{1}$$

двѣнадцать коэффиціентовъ a, b, c, e, ... суть данныя числа.

Если всѣ девять коэффиціентовъ a, b, ... c'' равны нулю, то имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо коэффиціенты e, e', e'' не всѣ равны нулю, и тогда уравненія заключаютъ въ себѣ противорѣчіе, либо же $e = e' = e'' = 0$, и тогда уравненія не даютъ никакихъ условій для опредѣленія неизвѣстныхъ x, y, z.

Будемъ разсматривать каждую пару изъ трехъ уравненій (1), какъ систему двухъ уравненій первой степени попеременно относительно каждой изъ трехъ паръ неизвѣстныхъ: y и z, z и x, x и y. Тогда изъ девяти коэфиціентовъ

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \tag{2}$$

мы составимъ для девяти указанныхъ системъ уравненій девять детерминантовъ:

$$\begin{aligned} \alpha &= b'c'' - c'b'', & \beta &= c'a'' - a'c'', & \gamma &= a'b'' - b'a'', \\ \alpha' &= b''c - c''b, & \beta' &= c''a - a''c, & \gamma' &= a''b - b''a, \\ \alpha'' &= bc' - cb', & \beta'' &= ca' - ac', & \gamma'' &= ab' - ba'. \end{aligned} \tag{3}$$

Если всѣ коэффиціенты (2) равны нулю, то и всѣ детерминанты (3) суть нули. Разсмотримъ случай, когда всѣ детерминанты (3) равны нулю, но коэффиціенты (2) не всѣ суть нули; легко видѣть, что въ этомъ случаѣ либо уравненія (1) другъ другу противорѣчатъ, либо два изъ нихъ представляютъ собой слѣдствія третьяго. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что коэффиціентъ c'' отличенъ отъ нуля; тогда послѣднее изъ уравненій (1) дастъ намъ:

$$z = \frac{e'' - a''x - b''y}{c''}; \tag{4}$$

подставивъ это значеніе неизвѣстнаго z въ первыя два уравненія системы (1) и пользуясь обозначеніями (3), получимъ:

$$\begin{aligned} \beta' x - \alpha' y &= ec'' - ce'' \\ -\beta x + \alpha y &= e'c'' - c'e'', \end{aligned} \tag{5}$$

Слѣдовательно, если $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$, но правыя части уравненій (5) не равны нулю, то наши уравненія оказываются невозможными; если же и $ec'' - ce'' = 0$, $e'c'' - c'e'' = 0$, то уравненія (5) удовлетворяется при произвольныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ x и y; значеніе неизвѣстнаго z, соотвѣтствующее каждой системѣ значеній x и y, получится подстановкой изъ уравненія (4).

2. Разсмотримъ теперь случай, когда не всѣ детерминанты (3) равны нулю; постановка вопроса останется не менѣе общей, чѣмъ до сихъ поръ, если примемъ, что отличный отъ нуля детерминантъ есть $\alpha = b'c'' - c'b''$. Тогда, считая величину x извѣстной, опредѣлимъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) неизвѣстныя y и z; по формуламъ § 39, 3 получимъ:

$$\begin{aligned} \alpha y &= e'c'' - e''c' + \beta x \\ \alpha z &= -e'b'' + e''b' + \gamma x. \end{aligned} \tag{6}$$

Полученныя отсюда значенія неизвѣстныхъ y и z подставимъ въ первое изъ уравненій (1). Получимъ:

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''.$$

Снова вводимъ обозначеніе

$$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma, \tag{7}$$

или, принимая во вниманіе формулы (3),

$$\begin{aligned} \Delta = & \; ab'c'' - ac'b'' \\ & + bc'a'' - ba'c'' \\ & + ca'b'' - cb'\alpha''. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда

$$\Delta x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''. \tag{9}$$

Отсюда вполнѣ опредѣляется величина неизвѣстнаго x, если только детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля; значенія неизвѣстныхъ y и z получатся тогда съ помощью формулъ (6).

Если же $\Delta = 0$, то уравненіе (9) возможно лишь при условіи

$$e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'' = 0; \tag{10}$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе (9) ничѣмъ не ограничиваетъ значенія неизвѣстнаго x; величина x можетъ быть взята произвольно; значенія неизвѣстныхъ y и z найдутся изъ уравненій (6).

Величина Δ и здѣсь называется детерминантомъ системы (1), и часто обозначается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} \tag{11}$$

Разсматривая формулу (8), находимъ, что величина Δ останется безъ измѣненія, если замѣнить соотвѣтственно коэффиціенты b на a', c на a'' и c' на b'', такъ что можно писать и такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix}$$

Девять величинъ: $\alpha = b'c'' - c'b''$, . . . опредѣляемыя равенствами (3), называются минорами детерминанта Δ.

3. Изложенное въ двухъ предыдущихъ пунктахъ сводится къ слѣдующему.

Если детерминантъ системы (1) отличенъ отъ нуля, то неизвѣстныя x, y, z опредѣляются ею однозначно. Если же $\Delta = 0$, то уравненія (1) либо противорѣчатъ другъ другу, либо одно, или два, или всѣ три неизвѣстныя остаются произвольными; число неизвѣстныхъ, получающихъ произвольныя значенія, зависитъ отъ того, будетъ ли одна изъ величинъ (3) отлична отъ нуля,— или же всѣ онѣ равны нулю, но одинъ изъ коэффиціентовъ (2) отличенъ отъ нуля,—или, наконецъ, всѣ коэффиціенты (2) обращаются въ нуль.

4. Детерминантъ Δ выражается любой изъ шести слѣдующихъ формулъ:

$$\begin{aligned} \Delta &= a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = a\alpha + b\beta + c\gamma \\ &= b\beta + b'\beta' + b'\beta'' = a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \\ &= c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' = a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma''. \end{aligned} \tag{12}$$

Эти шесть формулъ получаются изъ выраженія (8), если въ послѣднемъ соединить въ группы члены, имѣющіе множителемъ соотвѣтственно a, a' и a'', либо b, b' и b'', либо c, c' и c'', либо a, b, c и т. д., и принять во вниманіе обозначенія (3).

Далѣе имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Непосредственнымъ вычисленіемъ обнаружимъ справедливость перваго изъ равенствъ (13). Получимъ тождество:

$$b(b'c''-c'b'')+b'(b''c-c''b)+b''(bc'-cb')=0.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости прочихъ равенствъ (13), достаточно въ написанномъ тождествѣ всевозможными способами замѣщать другъ другомъ буквы a, b, c.

Съ помощью соотношеній (12) и (13) систему (1) можно рѣшить непосредственно способомъ исключенія. Для этого умножаемъ уравненія (1) три раза соотвѣтственно на множителей, указанныхъ ниже, и складываемъ каждый разъ почленно полученные результаты:

$$\begin{array}{l|lll} ax+by+cz=e & \alpha & \beta & \gamma \\ a'x+b'y+c'z=e' & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a''x+b''y+c''z=e'' & \alpha'' & \beta'' & \gamma''. \end{array}$$

Пользуясь соотношеніями (12) и (13), найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta x &= e\alpha+e'\alpha'+e''\alpha'', \\ \Delta y &= e\beta+e'\beta'+e''\beta'', \\ \Delta z &= e\gamma+e'\gamma'+e''\gamma''. \end{aligned} \qquad (14)$$

Первое изъ этихъ равенствъ совпадаетъ съ полученнымъ раньше равенствомъ (9). Два другія равенства совпадаютъ съ тѣми, которыя получатся изъ формулъ (6), если подставимъ вмѣсто x его значеніе изъ равенства (9); въ этомъ легко убѣдиться вычисленіемъ, котораго нѣтъ надобности здѣсь приводить.

Если нѣкоторыя величины имѣютъ въ какомъ-либо заданіи аналогичныя значенія и при рѣшеніи съ каждой изъ этихъ величинъ приходится поступать одинаково, то такой способъ рѣшенія называется симметричнымъ; такимъ образомъ изложенный выше способъ исключенія можетъ быть названъ симметричнымъ, чего нельзя сказать о способѣ подстановки.

5. Изложенная выше теорія уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными x, y, z, допускаетъ геометрическое толкованіе (мы предполагаемъ извѣстными основныя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи трехъ измѣреній въ томъ размѣрѣ, какъ они изложены во второмъ томѣ настоящаго сочиненія). Любыя три числа x, y, z могутъ быть разсматриваемы, какъ координаты нѣкоторой точки въ пространствѣ. Всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію первой степени

$$ax+by+cz=e$$

лежатъ въ одной плоскости, если только не всѣ коэффиціенты a, b, c

равны нулю. Точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ, какъ предыдущему уравненію, такъ еще и другому

$$a'x + b'y + c'z = e',$$

лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ и образуютъ поэтому прямую, по которой обѣ плоскости пересѣкаются. Если дано еще третье уравненіе

$$a''x + b''y + c''z = e'',$$

то всѣ три уравненія удовлетворяются координатами точки, въ которой пересѣкаются три плоскости, или, вѣрнѣе, координатами всѣхъ точекъ, одновременно лежащихъ на этихъ трехъ плоскостяхъ.

Если детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля, то три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если же $\Delta = 0$, но миноры (3) не всѣ равны нулю, тогда имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо равенство (10) справедливо, и, слѣдовательно, одна изъ трехъ величинъ x, y, z остается произвольной, либо же равенство (10) не справедливо. Въ первомъ случаѣ три плоскости пересѣкаются по прямой; во второмъ случаѣ нѣтъ ни одной точки, которая принадлежала бы всѣмъ тремъ плоскостямъ; плоскости пересѣкаются попарно по埠тремъ параллельнымъ прямымъ подобно боковымъ гранямъ трехугольной призмы, или же двѣ плоскости параллельны другъ другу и пересѣкаются съ третьей по параллельнымъ прямымъ.

Если, наконецъ, всѣ миноры (3) обращаются въ нуль, то лѣвыя части уравненій (1) отличаются другъ отъ друга лишь нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ, и наши три плоскости либо параллельны, либо совпадаютъ: въ первомъ случаѣ онѣ не имѣютъ ни одной общей точки, во второмъ случаѣ—безчисленное множество ихъ.

§ 41. Однородныя уравненія.

1. Однородныя уравненія составляютъ особый классъ уравненій первой степени. Сюда относятся такія уравненія, каждый членъ которыхъ содержитъ которое-нибудь изъ неизвѣстныхъ. Таковы, напримѣръ, уравненія вида

$$ax + by + cz = 0.$$

Очевидно, что подобныя уравненія удовлетворяются, если положить $x = y = z = 0$. Такое рѣшеніе называется несобственнымъ. Если же, по крайней мѣрѣ, одно неизвѣстное отлично отъ нуля, то рѣшеніе называется собственнымъ. Тогда всѣ члены уравненія можно раздѣлить на неизвѣстное, отличное отъ нуля, за каковое примемъ, напримѣръ, z, и получится уравненіе, содержащее лишь отношенія x/z, y/z.

Итакъ, однородныя уравненія выражаютъ условія, связывающія не самыя неизвѣстныя, но лишь отношенія неизвѣстныхъ къ одному изъ нихъ.

Разсмотримъ сначала систему двухъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{array}{l|ll} a'x + b'y + c'z = 0, & b'' & -a'' \\ a''x + b''y + c''z = 0 & -b' & a' \end{array}$$

Способомъ, указаннымъ въ § 39, мы можемъ опредѣлить отсюда отношенія x/z, y/z; для этого умножаемъ всѣ члены уравненій на множителей, написанныхъ сбоку, и полученные результаты складываемъ. Тогда найдемъ:

$$(a'b'' - b'a'')x + (c'b'' - b'c'')z = 0,$$
$$(a'b'' - b'a'')y + (a'c'' - c'a'')z = 0,$$

или, пользуясь обозначеніями § 40,(3),

$$\gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0.$$

Если исключить случай, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$, найдемъ:

$$\frac{x}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta};$$

эти уравненія можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

2. Разсмотримъ теперь систему трехъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \qquad (1) \\ a''x + b''y + c''z &= 0. \end{aligned}$$

Опредѣливъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій отношенія $x : z$ и $y : z$, подставляемъ ихъ въ первое уравненіе. Тогда найдемъ:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta = 0.$$

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то детерминантъ Δ во всякомъ случаѣ равенъ нулю [1]).

---

[1]) Эта оговорка необходима потому, что при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) опредѣлены быть не могутъ (§ 40, 4).

Итакъ, система трехъ однородныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными лишь въ томъ случаѣ имѣетъ собственное рѣшеніе, когда детерминантъ Δ обращается въ нуль.

Если $\Delta = 0$, а миноры α, β, γ не всѣ равны нулю, то мы получимъ рѣшеніе, указанное въ пунктѣ 1.

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) одно есть слѣдствіе другого; отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему опредѣляются тогда при помощи первыхъ двухъ уравненій (1).

3. Въ аналитической геометріи однородное уравненіе первой степени выражаетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ. Двѣ такія плоскости всегда имѣютъ общую прямую, которая также проходитъ черезъ начало координатъ.

Уравненіе $\Delta = 0$ представляетъ собой условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненій (1), если выражаемыя ими 3 плоскости пересѣкаются всѣ по одной прямой.

4. Изъ вышеизложенныхъ разсужденій ясно, какимъ образомъ можно обобщить задачу о рѣшеніи линейныхъ уравненій. Если дана система уравненій первой степени съ произвольнымъ числомъ неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$, то посредствомъ одного изъ уравненій, въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ при x, не равенъ нулю, выражаютъ неизвѣстное x при помощи прочихъ неизвѣстныхъ. Подставивъ это выраженіе неизвѣстнаго x во всѣ прочія уравненія данной системы, получимъ новую систему, въ которой число неизвѣстныхъ по крайней мѣрѣ на единицу меньше, такъ какъ неизвѣстное x въ нее не входитъ.

Продолжая тотъ же процессъ, мы исключаемъ изъ уравненій всѣ неизвѣстныя, пока таковыя остаются. Но послѣ этого мы можемъ получить равенства, содержащія лишь извѣстныя величины; равенства эти либо выполняются, либо не выполняются. Въ послѣднемъ случаѣ система не имѣетъ рѣшеній. Если же равенства выполняются, то неизвѣстныя иногда могутъ быть всѣ вполнѣ опредѣлены, иногда же нѣкоторыя остаются произвольными. Съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ и уравненій вычисленія усложняются, и вмѣстѣ съ тѣмъ становится труднѣе усмотрѣть общіе законы, которые здѣсь имѣютъ мѣсто. Къ счастью, Якоби (Jacobi) своей теоріей детерминантовъ создалъ алгориѳмъ, при помощи котораго общія свойства линейныхъ уравненій получаютъ чрезвычайно изящное выраженіе. Теорія эта, однако, выходитъ за предѣлы настоящаго сочиненія*).

---

*) Jacobi, „De formatione et proprietatibus determinantium". Crelle's „Journal für Mathematik", Bd. 22 (1841). Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten". 4 изд. Leipzig 1875.

На русскомъ языкѣ наиболѣе обстоятельнымъ сочиненіемъ по теоріи детерминантовъ является сочиненіе проф. Ващенко-Захарченко, „Теорія опредѣлителей

§ 42. Приложенія.

Линейныя уравненія весьма часто примѣняются въ геометріи и естественныхъ наукахъ. Разсмотримъ сперва простой примѣръ изъ химіи, такъ называемый косвенный анализъ. Обозначимъ черезъ A, B и P три химическихъ элемента и черезъ AP и BP два химическихъ соединенія, въ которыхъ на каждый атомъ одного элемента приходится одинъ атомъ другого. Дана смѣсь соединеній AP и BP, при чемъ извѣстны:

1) общій вѣсъ g смѣси,

2) вѣсъ q всего входящаго въ смѣсь вещества P.

Требуется найти содержащіяся въ смѣси вѣсовыя количества соединеній AP и BP.

Обозначивъ искомыя количества соотвѣтственно черезъ x и y, имѣемъ одно уравненіе

$$x+y=g. \qquad (1)$$

Второе уравненіе можно составить, основываясь на законахъ теоретической химіи. Если черезъ a, b и p обознвчимъ соотвѣтственно атомные вѣса элементовъ A, B и P, то молекулярный вѣсъ соединенія AP выразится числомъ $a+p$, число же молекулъ въ x вѣсовыхъ единицахъ этого соединенія есть $x:(a+p)$. Вѣсъ всѣхъ атомовъ элемента P, содержащихся въ соединеніи AP, есть $\frac{px}{a+p}$, а въ соединеніи BP вѣсовое количество того же элемента выразится черезъ $\frac{py}{b+p}$. Такъ какъ число q обозначаетъ вѣсъ всего находящагося въ смѣси вещества P, то можемъ составить второе уравненіе:

$$\frac{x}{a+p}+\frac{y}{b+p}=\frac{q}{p}. \qquad (2)$$

Изъ уравненій (1) и (2) можно опредѣлить числа x и y (за исключеніемъ того случая, когда $a=b$)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a+p}{p}\cdot\frac{gp-q(b+p)}{a-b} \\ y&=\frac{b+p}{p}\cdot\frac{q(a+p)-gp}{a-b}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Изложенная задача имѣетъ для химика важное практическое значеніе: часто случается, что не составляетъ большой трудности выдѣлить изъ смѣси элементъ P и количественно его опредѣлить, тогда какъ от-

---

и теорія формъ".— Кіевъ, 1877. Кромѣ того, Проф. Ярошенко. „Теорія опредѣлителей". Одесса. 1871.

дѣленіе элементовъ A и B другъ отъ друга сопряжено съ несравненно большими затрудненіями.

2. Примѣры. Имѣемъ, напримѣръ, три грамма смѣси хлористаго калія и хлористаго натрія и найдено, что вѣсъ хлора, содержащагося въ смѣси, есть 1,7 грамма; числа a, b, p обозначаютъ соотвѣтственно атомные вѣса калія, натрія и хлора:

$$a = 39{,}1, \qquad b = 23, \qquad p = 35{,}4$$
$$a - b = 16{,}1, \quad a + p = 74{,}5, \quad b + p = 58{,}4,$$
$$g = 3, \qquad q = 1{,}7.$$

Находимъ приближенно:

$$x = \frac{74{,}5.(3.35{,}4 - 1{,}7.58{,}4)}{35{,}4.16{,}1} = \frac{74{,}5.\ 6{,}9}{35{,}4.16{,}1} = 0{,}9;$$
$$y = \frac{58{,}4.(1{,}7.74{,}5 - 3.35{,}4)}{35{,}4.16{,}1} = \frac{58{,}4.20{,}4}{35{,}4.16{,}1} = 2{,}1.$$

Иногда, вмѣсто атомовъ, могутъ быть даны атомныя группы. Напримѣръ, имѣемъ два грамма смѣси углекислаго кальція (CaC_3O) и углекислаго стронція ($SrCO_3$), а углекислоты (CO_2) во всей смѣси находится 0,7 грамма. Обозначимъ вѣса атомныхъ группъ CO_2, CaO и SrO соотвѣтственно черезъ p, b и a. Тогда

$$a = 103{,}6 \qquad a - b = 47{,}6$$
$$b = 56 \qquad a + p = 147{,}6$$
$$p = 44 \qquad b + p = 100$$
$$g = 2, \quad q = 0{,}7.$$

Изъ формулъ (3) получимъ приближенно:

$$x = 1{,}3,$$
$$y = 0{,}7.$$

3. Изложенный пріемъ непримѣнимъ въ томъ случаѣ, когда число веществъ, составляющихъ данную смѣсь, болѣе двухъ. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Въ смѣси соединеній AP, BP и CP замѣнимъ элементъ P другимъ элементомъ P', и получимъ смѣсь изъ соединеній AP', BP' и CP'. Обозначимъ вѣсовыя количества обѣихъ смѣсей соотвѣтственно черезъ g и g', атомные вѣса элементовъ—черезъ a, b, c, p, p'; вѣса вещества P въ первой смѣси и P' во второй обозначимъ черезъ q и q'. Числа x, y, z означаютъ вѣсовыя количества веществъ A, B и C, находящіяся въ каждой смѣси. Имѣемъ 4 уравненія:

$$\frac{a+p}{a}x+\frac{b+p}{b}y+\frac{c+p}{c}z=g$$

$$\frac{a+p'}{a}x+\frac{b+p'}{b}y+\frac{c+p'}{c}z=g'$$

$$\frac{p}{a}x\ \ +\ \frac{p}{b}y\ \ +\ \frac{p}{c}z\ =q$$

$$\frac{p'}{a}x\ \ +\ \frac{p'}{b}y\ \ +\ \frac{p'}{c}z\ =q'.$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій невозможно выбрать трехъ такихъ, которыя были бы независимы другъ отъ друга. Изъ двухъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ, что $\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'}$, такъ что эти два уравненія сводятся къ одному лишь слѣдующему:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{q}{p};$$

изъ двухъ же первыхъ уравненій при помощи послѣдняго получаемъ:

$$x+y+z=g-q=g'-q'.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ всего лишь два независимыхъ уравненія; для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ этого недостаточно.

4. Покажемъ теперь, какъ примѣняются линейныя уравненія для изслѣдованія вопроса о развѣтвленіи электрическаго тока въ системѣ проволокъ. Мы предполагаемъ извѣстными понятія о силѣ тока и сопротивленіи цѣпи; замѣтимъ лишь, что сопротивленіе отрѣзка проволоки можно измѣрять его длиной, если на всемъ протяженіи разсматриваемой системы проволока сдѣлана изъ одного и того же матеріала и имѣетъ одну и ту же толщину.

Силу тока можно разсматривать, какъ количество электричества, протекающее за единицу времени черезъ поперечное сѣченіе цѣпи. Если въ какой нибудь части цѣпи мы выберемъ одно направленіе за положительное, то сила тока въ зависимости отъ его направленія выражается положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Дана сѣть проволокъ; въ нее входитъ въ опредѣленномъ мѣстѣ токъ данной силы, который развѣтвляется по проволокамъ и выходитъ изъ сѣти въ другой вполнѣ опредѣленной точкѣ. Спрашивается, какова сила тока въ каждой части сѣти?

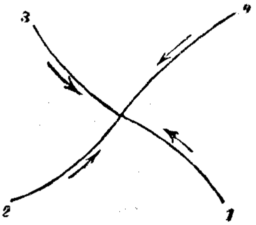
Кирхгофъ установилъ два закона, которые даютъ возможность рѣшить нашу задачу посредствомъ линейныхъ уравненій. Законы эти слѣдующіе.

1. Если въ какой либо точкѣ сѣти (такъ называемой узловой точкѣ) пересѣкаются нѣсколько проволокъ, въ которыхъ сила тока равна соотвѣтственно i_1, i_2, i_3, . . . (силу тока будемъ выражать положительнымъ числомъ, если токъ направленъ въ проволокѣ къ узловой точкѣ), то имѣетъ мѣсто равенство:

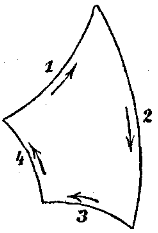
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \ldots = 0.$$

2. Для каждой замкнутой группы проволокъ 1, 2, 3, . . . , сопротивленія которыхъ обозначены черезъ w_1, w_2, w_3, . . . , имѣетъ мѣсто равенство:

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \ldots = 0.$$

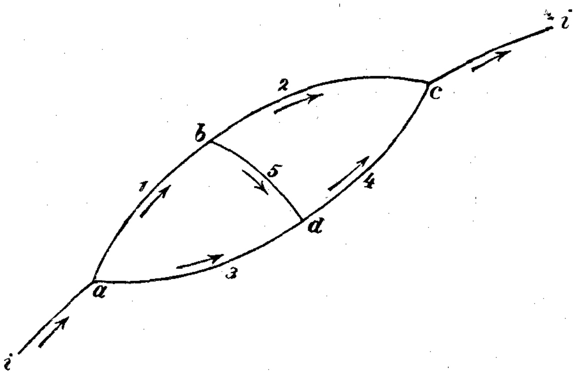


Фиг. 4.



Фиг. 5.

3. Изложенными законами воспользуемся для разсмотрѣнія такъ называемаго Уитстонова мостика, который употребляется для измѣренія сопротивленій. Существенную часть этого мостика составляетъ система проволокъ, схематически изображенная на фигурѣ 6.



Фиг. 6.

Буквами a, b, c и d обозначены узловыя точки. Черезъ точку a въ систему вводится токъ силы i, и такой же силы токъ выходитъ черезъ точку c. Въ отрѣзкахъ проволоки, отмѣченныхъ цифрами 1, 2, 3, 4, 5, сила тока равна соотвѣтственно i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, а сопротивленіе есть w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, при чемъ въ каждомъ отрѣзкѣ проволоки положительное направленіе тока указано стрѣлкой.

Согласно съ первымъ закономъ, мы имѣемъ для четырехъ узловыхъ точекъ слѣдующія четыре уравненія:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_3 = i_2 + i_4, \\ i_5 &= i_1 - i_2 = i_4 - i_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Система эта сводится лишь къ тремъ независимымъ уравненіямъ, такъ какъ изъ перваго ряда равенствъ слѣдуетъ, что

$$i_1 - i_2 = i_4 - i_3.$$

Разсматривая контуры abd, bcd и $abcd$, мы въ силу второго закона можемъ составить соотвѣтственно слѣдующія три уравненія:

$$\begin{aligned} i_5 w_5 &= i_3 w_3 - i_1 w_1 \\ i_5 w_5 &= i_2 w_2 - i_4 w_4\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Третье уравненіе $i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_3 w_3 + i_4 w_4$ представляетъ собою лишь слѣдствіе первыхъ двухъ.

Изъ уравненій (4) получимъ:

$$i_4 = i - i_2, \quad i_3 = i - i_1, \quad i_5 = i_1 - i_2.$$

Подставивъ эти значенія величинъ i_4, i_3 и i_5 въ уравненія (5), найдемъ:

$$\begin{aligned} i_1(w_1 + w_3 + w_5) - i_2 w_5 &= i w_3, \\ - i_1 w_5 + i_2(w_2 + w_4 + w_5) &= i w_4; \end{aligned}$$

отсюда можно опредѣлить величины i_1 и i_2.

Чаще всего одна изъ узловыхъ точекъ, напримѣръ d, устанавливается такимъ образомъ, чтобы сила тока $i_5 = 0$. Этотъ результатъ достигается весьма точно. Вслѣдствіе перемѣщенія узловой точки d сопротивленія w_3 и w_4 мѣняютъ свою величину. Такъ какъ $i_5 = 0$, то изъ уравненій (4) получимъ равенства: $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$. При помощи послѣднихъ двухъ равенствъ и уравненій (5) найдемъ соотвѣтствующее этому случаю соотношеніе:

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

Эта формула примѣняется для вычисленія одной изъ величинъ w_1, w_2, w_3 и w_4 посредствомъ трехъ другихъ*).

---

*) Kirchhoff, Poggendorff's Annalen, Bd. 72 (1847);
W. Ahrens, Mathematische Annalen, Bd. 49.

ГЛАВА VIII.

Квадратныя уравненія и мнимыя числа.

§ 43. Квадратныя уравненія.

1. Въ седьмой главѣ мы разсмотрѣли лишь такія уравненія, въ которыя неизвѣстныя входятъ только въ первой степени, а произведенія неизвѣстныхъ вовсе не входятъ. Поэтому мы и назвали эти уравненія уравненіями первой степени. Вслѣдствіе тѣхъ примѣненій, которыя эти уравненія находятъ въ геометріи, ихъ называютъ еще линейными уравненіями.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію такихъ уравненій, которыя содержатъ неизвѣстныя не только въ первой степени, но и во второй. Сперва мы займемся уравненіями этого типа, содержащими лишь одно неизвѣстное; они называются уравненіями второй степени, а также квадратными уравненіями. Покажемъ, какъ рѣшаются такія уравненія.

2. Квадратное уравненіе имѣетъ слѣдующую форму:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Коэффиціенты a, b и c представляютъ собою данныя числа, а x есть неизвѣстное число, для котораго нужно найти значеніе, удовлетворяющее уравненію (1). Такое значеніе неизвѣстнаго x называется корнемъ уравненія. Не будемъ пока касаться вопроса, имѣетъ ли данное уравненіе корни вообще и сколько оно имѣетъ корней.

Коэффиціентъ a будемъ считать отличнымъ отъ нуля, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе (1) имѣло бы видъ $bx + c = 0$, т. е. представляло бы собою линейное уравненіе, котораго мы здѣсь уже не будемъ болѣе разсматривать. Умноживъ всѣ члены уравненія (1) на произвольный множитель g, мы получимъ новое уравненіе $gax^2 + gbx + gc = 0$, которое удовлетворяется тѣми же значеніями неизвѣстнаго x, что и уравненіе (1). Выбравъ $g = \frac{1}{a}$, мы упростили бы уравненіе, такъ какъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ x^2 сдѣлается равнымъ единицѣ. Цѣлесообразнѣе, однако, выбрать для множителя g другое значеніе, именно $g = 4a$. Мы получимъ тогда уравненіе:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

въ силу же тождества $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$, мы можемъ представить его въ видѣ:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Для сокращенія вводимъ обозначеніе

$$b^2 - 4ac = D, \tag{2}$$

и наше уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей уравненія квадратный корень, мы сведемъ наше квадратное уравненіе къ линейному

$$2ax + b = \sqrt{D}.$$

Такъ какъ квадраты двухъ чиселъ, имѣющихъ одну и ту жу абсолютную величину, но различные знаки, равны другъ другу, то мы получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$2ax + b = -\sqrt{D}.$$

Оба уравненія ничѣмъ не отличаются другъ отъ друга, если $D = 0$. Такъ какъ до сихъ поръ мы не знаемъ такихъ чиселъ, квадраты которыхъ суть отрицательныя числа, то мы будемъ различать три случая.

1) D есть число отрицательное; уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

2) $D = 0$; уравненіе имѣетъ одинъ корень $x = -b/2a$.

3) D есть положительное число; уравненіе имѣетъ два корня:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 &= -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Такимъ образомъ отъ значенія числа D зависитъ, будетъ ли квадратное уравненіе имѣть одинъ корень, или два, или ни одного корня. Замѣнимъ въ формулѣ (2) числа a, b и c соотвѣтственно числами ga, gb и gc, гдѣ g есть произвольное число, отличное отъ нуля; вмѣсто числа D мы теперь будемъ имѣть число g^2D съ такимъ же знакомъ, что и число D:

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто тотъ же случай 1, 2 или 3. Такимъ образомъ квадратное уравненіе не опредѣляетъ числа D, оставляя при немъ множителя, представляющаго собой квадратъ неопредѣленнаго числа; но выраженіе ax^2+bx+c вполнѣ опредѣляетъ число D[1]).

Мы будемъ называть число D дискриминантомъ выраженія ax^2+ $+bx+c$.

Введемъ новыя обозначенія коэффиціентовъ квадратнаго уравненія (1) и представимъ его въ слѣдующей формѣ:

$$x^2+2ax+b=0\,. \tag{4}$$

Для этого уравненія число $D=4(a^2-b)$; если $D>0$, уравненіе имѣетъ два корня:

$$x_1=-a-\sqrt{a^2-b}$$
$$x_2=-a+\sqrt{a^2-b}.$$

§ 44. Мнимыя числа.

1. Для того, чтобы не было квадратнаго уравненія, не имѣющаго корней, приходится снова расширить понятіе о числѣ. Мы вводимъ такъ называемыя мнимыя числа. Введеніе этихъ чиселъ въ науку оказалось весьма плодотворнымъ; благодаря имъ почти всѣ отрасли математики выигрываютъ въ полнотѣ и законченности. Что касается дальнѣйшаго расширенія понятія о числѣ, то въ немъ въ настоящее время не чувствуется настоятельной потребности.

2. Всѣ разсмотрѣнныя нами до сихъ поръ числа, положительныя и отрицательныя, раціональныя и ирраціональныя, мы будемъ называть вещественными числами. Мы будемъ соединять вещественныя числа въ пары; каждую такую пару, составленную изъ вещественныхъ чиселъ a и b, мы будемъ обозначать символомъ (a, b). Эти числовые символы мы будемъ называть мнимыми или комплексными числами. Основная мысль здѣсь та же, которой мы руководились выше, когда мы посредствомъ цѣлыхъ чиселъ устанавливали понятіе о дробяхъ; но правила дѣйствій надъ новыми числами, которыя мы теперь вводимъ, совершенно иныя. Въ установленіи этихъ

---

[1]) Въ трехчленѣ ax^2+bx+c коэффиціенты имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія, которыми опредѣляется дискриминантъ b^2-4ac. Въ уравненіи же

$$ax^2+bx+c=0$$

коэффиціенты a, b и c могутъ быть замѣнены пропорціональными имъ числами ga, gb, gc, отчего дискриминантъ, какъ указано въ текстѣ, пріобрѣтаетъ множителя g^2.

правилъ мы ничѣмъ не стѣснены; къ этому мы и перейдемъ.

1) Два комплексныхъ числа $\alpha = (a, b)$ и $\alpha' = (a', b')$ мы будемъ считать **равными** въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $a = a'$, и $b = b'$ *).

2) Чтобы имѣть возможность представить вещественное число, какъ частный случай комплекснаго, мы примемъ, что $(a, 0) = a$ [2]). Отсюда слѣдуетъ, что $(0, 0) = 0$.

3) **Сложеніе и вычитаніе** опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$(a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b'). \qquad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что **сочетательный** и **перемѣстительный** законы сложенія остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ, что вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, что при $b = b' = 0$ сложеніе и вычитаніе комплексныхъ чиселъ приводятся соотвѣтственно къ тѣмъ же дѣйствіямъ надъ вещественными числами [3]).

---

*) Для комплексныхъ чиселъ не принято устанавливать понятія „больше" и „меньше". Лишь въ очень рѣдкихъ случаяхъ приходится пользоваться этими понятіями; ихъ можно тогда опредѣлять различнымъ образомъ. Можно, напримѣръ, условиться считать, что число (a, b) больше числа (a', b'), если $a > a'$ или если $a = a'$ и $b > b'$.

[2]) Это значитъ подъ символомъ $(a, 0)$ мы будемъ разумѣть то же, что и подъ символомъ a.

[3]) Остановимся нѣсколько подробнѣе на вопросѣ о введеніи мнимыхъ чиселъ. Въ § 27,2 дроби были опредѣлены, какъ символы вида $\frac{m}{n}$; были установлены условія равенства и неравенства ихъ и правила дѣйствій надъ ними; было обнаружено, что дѣйствія эти подчинены тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Этого же пути авторъ, слѣдуя Гамильтону, придерживается и здѣсь. Вводятся новые символы (a, b), гдѣ a и b суть вещественныя числа. Такимъ образомъ, получается комплексъ новыхъ символовъ, которые мы называемъ комплексными числами. Мы устанавливаемъ условія равенства и неравенства этихъ чиселъ и правила дѣйствій надъ ними, именно: подъ суммой двухъ мнимыхъ чиселъ (a, b) и (a', b') мы условливаемся разумѣть число $(a + a', b + b')$. Тогда ясно, что законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ, дѣйствительно:

$$[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = \big((a + a') + a'', (b + b') + b''\big).$$

$$(a, b) + [(a', b') + (a'', b'')] = \big(a + (a' + a''), b + (b' + b'')\big).$$

И такъ какъ

$$(a + a') + a'' = a + (a' + a''), \quad (b + b') + b'' = b + (b' + b''),$$

то

$$[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a, b) + [(a', b') + (a'', b'')].$$

Аналогичнымъ образомъ устанавливаются остальныя дѣйствія надъ комплексными числами и доказывается, что они слѣдуютъ тѣмъ же формальнымъ законамъ что и вещественныя числа.

4) Умноженіе опредѣляется равенствомъ

$$(a,\ b)(a',\ b') = (aa' - bb',\ ab' + ba'). \qquad (2)$$

При $b = 0$ и $b' = 0$ дѣйствіе это сведется къ умноженію вещественныхъ чиселъ. Законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ.

Возвышеніе въ степень съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ выполняется посредствомъ умноженія, повтореннаго соотвѣтственное число разъ.

5) Дѣленіе разсматривается, какъ дѣйствіе, обратное умноженію.

Даны два комплексныхъ числа $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$; требуется найти третье число $(x,\ y)$, удовлетворяющее равенству:

$$(a,\ b)(x,\ y) = (a',\ b'). \qquad (3)$$

Если такое число существуетъ, то оно представитъ собою частное $(a',\ b')/(a,\ b)$.

Изъ равенствъ (2) и (3) и опредѣленія 1) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= a' \\ bx + ay &= b'\,. \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Для нахожденія чиселъ x и y нужно рѣшить два уравненія первой степени по правиламъ, даннымъ въ § 39.

Детерминантъ Δ этой системы равенъ суммѣ $a^2 + b^2$; онъ обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда числа a и b одновременно равны нулю, т. е. когда число $(a,\ b)$ есть нуль. Поэтому мы исключимъ случай, когда дѣлитель равенъ нулю, подобно тому, какъ мы это сдѣлали при дѣленіи вещественныхъ чиселъ.

Изъ уравненій (4) получаемъ:

$$x = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

Такимъ образомъ дѣленіе однозначно опредѣляется слѣдующей формулой:

$$\frac{(a', b')}{(a, b)} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2},\ \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}\right).$$

Дѣленіе вещественныхъ чиселъ содержится здѣсь, какъ частный случай.

Установленныя такимъ образомъ опредѣленія четырехъ дѣйствій надъ комплексными числами вполнѣ согласованы съ понятіями о соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ вещественными числами; мало того, теоремы, выведенныя нами, какъ слѣдствія изъ опредѣленій, относящихся къ вещественнымъ числамъ, остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ.

3. Исходя изъ основныхъ определенiй, можно получить для комплексныхъ чиселъ весьма простыя обозначенiя.

Согласно опредѣленiямъ 3), 2) и 4), имѣемъ:

$$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b), \tag{7}$$

или

$$(a,\ b) = a + b\,(0,\ 1). \tag{8}$$

Такимъ образомъ любое комплексное число можетъ быть представлено посредствомъ вещественныхъ множителей и одного лишь мнимаго числа (0,1). Для сокращенiя вводятъ обозначенiя

$$(0,\ 1) = i, \quad (-1)\,i = -i. \tag{9}$$

Число i называется мнимой единицей.

Изъ равенства (8) получимъ:

$$(a,\ b) = a + bi. \tag{10}$$

Благодаря этому, мы можемъ оставить обозначенiе (a, b), которымъ мы временно пользовались; число a называется вещественной частью, bi или ib—мнимой частью комплекснаго числа $a + bi$. Мнимая часть называется положительной или отрицательной въ зависимости отъ того, будетъ ли число b положительное или отрицательное. Мнимое число, вещественная часть котораго равна нулю, т. е. число bi, называется чисто мнимымъ. Числа $a + bi$ и $a - bi$, въ которыхъ вещественныя части одинаковы, а мнимыя отличаются лишь знаками, называются сопряженными мнимыми числами.

Подставивъ въ формулу (2) $a = a' = 0$, $b = b' = +1$ или -1, получимъ:

$$i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1\,. \tag{11}$$

Поэтому число i называется еще корнемъ квадратнымъ изъ -1, т. е.

$$i = \sqrt{-1}\,. \tag{12}$$

Такимъ образомъ въ области мнимыхъ чиселъ существуютъ и такiя числа, квадраты которыхъ представляютъ собой отрицательныя числа; сообразно этому, въ области мнимыхъ чиселъ корни квадратнаго уравненiя x_1 и x_2 (§ 43, (3)) имѣютъ опредѣленныя значенiя и въ случаѣ отрицательнаго дискриминанта.

4. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующiя формулы для сложенiя, вычитанія, умноженія и дѣленія мнимыхъ чиселъ:

$$(a+bi)\pm(a'+b'i)=(a\pm a')+i(b\pm b'),$$
$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+i(ab'+ba'),\quad (13)$$
$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{aa'+bb'+i(ab'-ba')}{a^2+b^2};$$

Эти формулы содержатся въ общихъ правилахъ дѣйствій надъ дробями и буквенными выраженіями [4]).

Изъ приведенныхъ формулъ слѣдуетъ, что результатъ вычисленій надъ мнимыми числами всегда можно представить въ видѣ выраженія $A+Bi$, гдѣ A и B обозначаютъ вещественныя числа. Если при вычисленіяхъ замѣнимъ каждое число сопряженнымъ ему числомъ, то въ результатѣ получится число $A-Bi$, сопряженное съ результатомъ, полученнымъ раньше. Отсюда слѣдуетъ, что равенство, содержащее мнимыя числа, не нарушится, если замѣнить въ обѣихъ частяхъ его число i числомъ $-i$.

§ 45. Извлеченіе квадратнаго корня изъ мнимыхъ чиселъ.

Мы показали уже, какъ выполняются въ области комплексныхъ чиселъ такъ называемыя раціональныя дѣйствія, т. е. сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе; такимъ образомъ изложенная выше теорія линейныхъ уравненій остается справедливой и для комплексныхъ чиселъ. Чтобы развить для этихъ чиселъ также теорію квадратныхъ уравненій, мы должны предварительно установить понятіе о корнѣ квадратномъ изъ комплекснаго числа. Итакъ, мы ставимъ слѣдующій вопросъ.

Дано комплексное число $a+bi$; найти другое комплексное число $x+yi$, квадратъ котораго равенъ числу $a+bi$. Иными словами, если число $x+yi$ удовлетворяетъ уравненію

$$a+bi=(x+yi)^2,\quad (1)$$

то мы называемъ его корнемъ квадратнымъ изъ числа $a+bi$ и обозначаемъ символомъ

$$x+yi=\sqrt{a+bi}.$$

Въ правой части уравненія (1) выполнимъ дѣйствіе; согласно опре-

---

[4]) Это значитъ: дѣйствія совершаются здѣсь по тѣмъ правиламъ, по которымъ они производятся надъ буквенными выраженіями, и въ результатѣ i^2 замѣняется черезъ -1. Въ частности, правая часть послѣдняго равенства (13) можетъ быть получена изъ лѣвой, если мы числителя и знаменателя умножимъ на $a-bi$, затѣмъ выполнимъ дѣйствія въ числителѣ и знаменателѣ, какъ надъ буквенными выраженіямии, и въ результатѣ замѣнимъ i^2 черезъ -1.

дѣленію равенства комплексныхъ чиселъ, уравненіе (1) равносильно двумъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Итакъ, намъ нужно опредѣлить неизвѣстныя x и y изъ двухъ уравненій степени выше первой. Изъ второго уравненія мы получаемъ для неизвѣстнаго y выраженіе $b/2x$, которое подставимъ въ первое уравненіе. Получимъ уравненіе, содержащее одно лишь неизвѣстное x:

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

или

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Хотя это уравненіе четвертой степени, но, благодаря своей спеціальной формѣ, оно можетъ быть легко рѣшено: оно превращается въ квадратное уравненіе, если за неизвѣстное примемъ не число x, но число x^2. Рѣшая уравненіе относительно x^2, мы получимъ по формуламъ (3) § 43:

$$x_1{}^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad x_2{}^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Замѣтимъ, что x должно быть вещественнымъ числомъ, такъ что x^2 есть положительное число. Такъ какъ $a^2 < a^2 + b^2$, то $a < \sqrt{a^2 + b^2}$, и $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$; поэтому для неизвѣстнаго x^2 мы можемъ взять лишь второй корень. Такимъ образомъ для неизвѣстнаго x мы получимъ два значенія, одно положительное, другое отрицательное:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \qquad (3)$$

Число x обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, когда $b = 0$ и a есть отрицательное число (потому что тогда $+\sqrt{a^2} = -a$, такъ что $a + \sqrt{a^2} = 0$). Въ этомъ частномъ случаѣ значеніе неизвѣстнаго y опредѣляется непосредственно первымъ изъ уравненій (2):

$$y = \pm \sqrt{-a}\,.$$

Если же число x отлично отъ нуля, то, подставивъ его значеніе во второе уравненіе (2), получимъ линейное уравненіе относительно неизвѣстнаго y. Каждому значенію неизвѣстнаго x соотвѣтствуетъ одно лишь значеніе неизвѣстнаго y; при $b > 0$ значенія обоихъ неизвѣстныхъ имѣютъ одинаковые знаки, при $b < 0$—различные.

2. Тотъ же результатъ можно получить слѣдующимъ, болѣе изящнымъ способомъ.

Возвышаемъ обѣ части каждаго изъ уравненій (2) въ квадратъ; получимъ:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = a^2$$
$$4x^2y^2 = b^2;$$

складывая почленно полученныя уравненія и замѣчая, что $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, найдемъ:

$$x^2 + y^2 = + \sqrt{a^2 + b^2};$$

прибавляя къ этому уравненію и вычитывая изъ него почленно первое изъ уравненій (2), мы получимъ:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2};$$

каковы бы ни были значенія вещественныхъ чиселъ a и b, полученныя выраженія неизвѣстныхъ x^2 и y^2 имѣютъ положительныя значенія, такъ какъ $+ \sqrt{a^2 + b^2} > a$. Такимъ образомъ для неизвѣстныхъ x и y найдемъ по два рѣшенія:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Комбинируя полученныя рѣшенія, мы получимъ четыре пары значеній неизвѣстныхъ x и y: двѣ пары съ одинаковыми знаками и двѣ съ противоположными. Изъ этихъ четырехъ комбинацій допустимы либо только первыя двѣ, если b есть число положительное,—либо же только вторыя двѣ, если b есть число отрицательное.

Такимъ образомъ оказывается, что квадратный корень изъ комплекснаго числа имѣетъ два значенія, различающіяся лишь знаками, т. е. символъ $\sqrt{a + bi}$ двузначенъ. Подъ нимъ разумѣютъ либо безразлично которое нибудь изъ двухъ значеній квадратнаго корня, либо же одно опредѣленное; въ послѣднемъ случаѣ должно быть оговорено, о которомъ изъ двухъ корней идетъ рѣчь: напримѣръ, двузначность можетъ быть устранена требованіемъ, чтобы вещественная часть корня, т. е. число x, была положительнымъ числомъ.

Теорія корней высшихъ степеней изъ комплексныхъ чиселъ, а также логариѳмовъ и степеней съ комплексными показателями будетъ изложена ниже.

§ 46. Функціи второй степени.

1. Послѣ того какъ введены комплексныя числа, становится всегда возможнымъ рѣшить уравненіе второй степени независимо отъ того, будетъ ли дискриминантъ величина положительная или отрицательная; мы можемъ рѣшить уравненіе 2-ой степени даже въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты его и дискриминантъ суть числа комплексныя. Мы всегда получимъ два корня за исключеніемъ того случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль; въ послѣднемъ случаѣ уравненіе имѣетъ всего одинъ корень.

Выраженіе

$$ax^2+bx+c,$$

въ которомъ число x имѣетъ произвольное значеніе, называется функціей второй степени отъ x. Мы будемъ обозначать это выраженіе символомъ $f(x)$, гдѣ буква f для краткости замѣняетъ слово „functio“. Числа a, b и c называются коэффиціентами функціи, а число x—ея аргументомъ. Эта функція обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда аргументъ x получаетъ одно изъ двухъ значеній x_1 и x_2 (§ 43,(3)), а именно:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\quad (D=b^2-4ac).$$

Изъ этихъ выраженій легко найдемъ:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1-x_2=-\frac{\sqrt{D}}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Отсюда получимъ:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+x\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)=a\,[x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2];$$

слѣдовательно,

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2). \qquad (1)$$

Полученный результатъ выражается слѣдующимъ образомъ:

Функція второй степени можетъ быть представлена въ видѣ произведенія изъ одного численнаго множителя a и двухъ множителей первой степени: $x-x_1$ и $x-x_2$.

Изъ выраженія (1) легко усмотрѣть, что $f(x)$ обращается въ нуль при $x=x_1$ или $x=x_2$. Однако, равенство (1) справедливо при всѣхъ значеніяхъ аргумента, и поэтому оно называется тождествомъ. Числа x_1 и x_2, которыя мы назвали корнями уравненія $f(x)=0$, называютъ также корнями функціи $f(x)$.

2. Чтобы найти разложеніе (1), нужно знать корни квадратнаго уравненія $f(x)=0$; предложеніе о возможности такого разложенія по существу тождественно съ предложеніемъ, доказаннымъ раньше, что всякое квадратное уравненіе имѣетъ два корня. Однако, первое предложеніе (о разложеніи функцій) имѣетъ то преимущество предъ послѣднимъ, что не допускаетъ исключенія для случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ оба линейныхъ множителя выраженія (1) тождественны, такъ что мы получимъ:

$$f(x)=a(x-x_1)^2,$$

т. е. при $D=0$ функція второй степени обращается въ квадратъ линейной функціи.

Чтобы вполнѣ согласовать оба предложенія, говорятъ, что въ томъ случаѣ, когда дискриминантъ уравненія обращается въ нуль, оба корня его, которые вообще отличны одинъ отъ другого, дѣлаются равными; число x_1 называется тогда двойнымъ корнемъ.

3. Примемъ коэффиціентъ a равнымъ 1; тогда квадратная функція приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x)=x^2+bx+c; \tag{2}$$

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ:

$$x_1+x_2=-b, \quad x_1x_2=c, \quad (x_1-x_2)^2=D.$$

Такимъ образомъ, если коэффиціентъ при x^2 равенъ единицѣ, то коэффиціентъ при x представляетъ сумму корней, взятую съ обратнымъ знакомъ; членъ же, не содержащій x, равенъ произведенію корней, а дискриминантъ—квадрату ихъ разности.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что равенство $x_1=x_2$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы дискриминантъ D обратился въ нуль.

4. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что задача о нахожденіи двухъ неизвѣстныхъ чиселъ, когда даны ихъ сумма и произведеніе, сводится къ рѣшенію нѣкотораго квадратнаго уравненія. Если x и y обозначаютъ неизвѣстныя числа и дано, что

$$\begin{aligned} x+y&=a, \\ xy&=b, \end{aligned} \tag{3}$$

то числа x и y представляютъ собою корни квадратнаго уравненія

$$z^2-az+b=0;$$

значеніе неизвѣстнаго x можетъ быть представлено любымъ изъ двухъ корней этого уравненія, при чемъ другой корень дастъ значеніе неизвѣстнаго y, такъ что предложенная задача рѣшается однозначно. Уравненія (3) могутъ быть рѣшены и непосредственно. Для этого обѣ части перваго уравненія возводимъ въ квадратъ, обѣ части второго—умножаемъ на четыре и вычитываемъ почленно изъ перваго уравненія. Мы получимъ:

$$(x+y)^2-4xy=a^2-4b,$$

или

$$(x-y)^2=a^2-4b.$$

Отсюда

$$x-y=\sqrt{a^2-4b};$$

слѣдовательно,

$$2x=a+\sqrt{a^2-4b},\quad 2y=a-\sqrt{a^2-4b}.$$

Если мы возьмемъ квадратный корень со знакомъ минусъ, то неизвѣстныя x и y *помѣняются своими значеніями.*

Если даны разность и произведеніе неизвѣстныхъ, т. е.

$$x-y=a,\quad xy=b,$$

то, подобно предыдущему, найдемъ:

$$(x-y)^2+4xy=a^2+4b;$$

или

$$(x+y)^2=a^2+4b.$$

Отсюда

$$x+y=\sqrt{a^2+4b}$$

и, слѣдовательно,

$$2x=a+\sqrt{a^2+4b},\quad 2y=-a+\sqrt{a^2+4b}.$$

Если мы возьмемъ выраженіе $\sqrt{a^2+4b}$ со знакомъ минусъ, то неизвѣстное x приметъ значеніе, которое раньше имѣло неизвѣстное $-y$, а неизвѣстное y получитъ значеніе, которое имѣло неизвѣстное $-x$. Такимъ образомъ эта задача допускаетъ два различныхъ рѣшенія.

5. *Если коэффиціенты квадратнаго уравненія суть числа вещественныя,* то корни его все таки могутъ быть комплексными числами, когда дискриминантъ уравненія представляетъ собою отрицательное число. Такъ какъ $\sqrt{D}$ въ этомъ случаѣ есть чисто мнимое число, то, представивъ одинъ корень въ видѣ $\alpha+\beta i$, гдѣ α и β суть вещественныя числа, мы получимъ для другого корня значеніе $\alpha-\beta i$.

Итакъ, если квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ одинъ комплексный корень, то второй его корень есть также число комплексное, сопряженное съ первымъ корнемъ.

Если же нѣкоторыми коэффиціентами квадратнаго уравненія служатъ мнимыя числа, то корни этого уравненія могутъ быть хотя и комплексными, но не сопряженными числами; оно и очевидно, такъ какъ мы можемъ составить функцію второй степени $(x-\alpha)(x-\beta)$, корнями которой служатъ произвольныя два числа α и β.

§ 47. Геометрическое изображеніе комплексныхъ чиселъ.

1. Мы видѣли, что совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ можно представить геометрически посредствомъ точекъ прямой линіи; равнымъ образомъ и комплексныя числа могутъ быть изображены точками двумѣрной области, напримѣръ, плоскости.

Вообразимъ себѣ плоскость и на ней двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя; послѣднія называются координатными осями: одну изъ нихъ называютъ осью x-овъ, другую—осью y-овъ. Точку пересѣченія обѣихъ осей мы будемъ называть точкой нуля или началомъ координатъ и будемъ ее разсматривать, какъ изображеніе числа нуль. Считая отъ начала координатъ, мы будемъ на обѣихъ осяхъ произвольно различать двѣ стороны: положительную и отрицательную. Согласимся разъ на всегда считать ось x-овъ направленной съ запада на востокъ, а ось y-овъ—съ юга на сѣверъ; восточную половину первой и сѣверную второй мы будемъ называть положительными (нужно представить себѣ географическую карту). Каждая ось дѣлитъ плоскость на двѣ полуплоскости: изъ нихъ положительной полуплоскостью называютъ ту, которая содержитъ положительную половину другой оси; вторая полуплоскость называется отрицательной.

Выберемъ еще нѣкоторую единицу длины (остановимся, напримѣръ, на сантиметрѣ); на координатныхъ осяхъ отложимъ, считая отъ начала, два числа x и y въ видѣ двухъ отрѣзковъ, направленія которыхъ возьмемъ въ зависимости отъ знаковъ чиселъ x и y. Изъ концовъ отложенныхъ отрѣзковъ возставимъ къ обѣимъ осямъ перпендикуляры, которые пересѣкутся въ опредѣленной точкѣ z нашей плоскости. Отрѣзки x и y называются координатами точки z: отрѣзокъ x называется ея абсциссой, отрѣзокъ y—ординатой.

Четыре квадранта нашей плоскости различаются знаками координатъ x и y:

1-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значеніе, y также имѣетъ положительное значеніе;

2-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значеніе, y имѣетъ положительное значеніе;

3-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значеніе, y имѣетъ отрицательное значеніе;

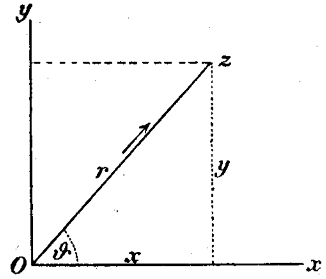
4-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значеніе, y имѣетъ отрицательное значеніе.

Точку z разсматриваютъ, какъ изображеніе мнимаго числа

$$z = x + yi. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ одно мнимое число и, наоборотъ, каждое мнимое число изображается одной и только одной точкой плоскости.

Выше мы видѣли, что вещественныя числа могутъ быть изображены на прямой линіи какъ въ видѣ точекъ, такъ и въ видѣ отрѣзковъ, при чемъ положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ отрѣзки, направленные въ одну сторону, напримѣръ, вправо, а отрицательнымъ числамъ—отрѣзки, направленные въ противоположную сторону. Подобнымъ же образомъ комплексныя числа можно наглядно представить въ видѣ оріентированныхъ отрѣзковъ опредѣленной величины и опредѣленнаго направленія, при чемъ приходится различать не два только направленія, но всѣ возможныя направленія въ плоскости.



Фиг. 7.

Такимъ образомъ представленный на фигурѣ 7 отрѣзокъ $0z$, имѣющій направленіе, указанное стрѣлкой, является изображеніемъ комплекснаго числа z.

Весьма цѣлесообразнымъ является предложенное Вейерштрассомъ (Weierstrass) обозначеніе, согласно которому длина отрѣзка $0z = r$, независимо отъ его направленія, называется абсолютной величиной[1]) комплекснаго числа z. Численное значеніе этой величины выражается формулой

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad (2)$$

это легко усмотрѣть изъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ координаты x и y служатъ катетами, а отрѣзокъ r—гипотенузой.

Направленіе отрѣзка $0z$ опредѣляется угломъ, который онъ образуетъ съ какимъ-нибудь напередъ установленнымъ направленіемъ, напримѣръ, съ положительной осью x-овъ.

Угломъ этимъ измѣряется поворотъ, который долженъ совершить отрѣзокъ, чтобы отъ направленія положительной оси x-овъ перейти въ положеніе $0z$; мы будемъ считать вращеніе положительнымъ, если оно направлено отъ

---

[1]) Часто абсолютную величину комплекснаго числа называютъ его модулемъ,

положительной оси x-овъ къ положительной оси y-овъ (т. е. противъ направленія часовой стрѣлки: съ востока черезъ сѣверъ къ западу и югу).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разсматривается не самое вращеніе отрѣзка $0z$, а лишь его положеніе, послѣднее всегда опредѣляется однозначно угломъ, взятымъ въ интервалѣ въ 360^0, напримѣръ, отъ 0^0 до 360^0, или отъ -180^0 до $+180^0$.

Этотъ уголъ мы будемъ называть фазой[2] комплекснаго числа z. Къ одному и тому же положенію отрѣзка $0z$, а стало быть, къ одной и той же фазѣ приводитъ любое изъ безчисленнаго множества вращеній, отличающихся другъ отъ друга на цѣлое (положительное или отрицательное) число окружностей.

Вмѣсто грдуснаго измѣренія угловъ часто употребляется ихъ дуговое измѣреніе (§ 28). Тогда уголъ въ 180^0 выражается числомъ π, а полный оборотъ—числомъ 2π; при этомъ подъ фазой подразумѣвается уголъ, находящійся въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, или въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

2. Цѣлесообразность геометрическаго изображенія комплексныхъ чиселъ при помощи отрѣзковъ опредѣленнаго направленія особенно проявляется въ той наглядности, которую при этомъ получаютъ основныя дѣйствія: сложеніе и вычитаніе.

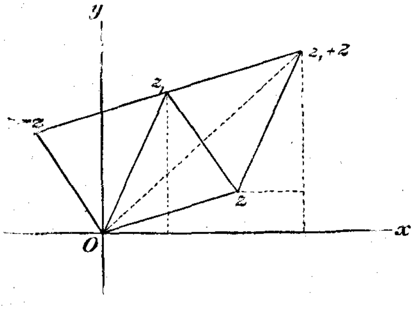
Согласно опредѣленію, которое дано въ § 44 п. 4, сумма двухъ комплексныхъ чиселъ

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i$$

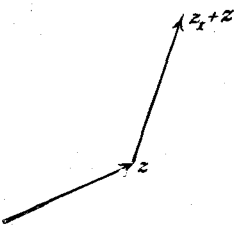
представится такъ:

$$z_1 + z = x_1 + x + i(y_1 + y).$$

Такимъ образомъ полученная сумма изобразится точкой, координаты которой равны $x_1 + x$ и $y_1 + y$; точка эта, какъ видно изъ фиг. 8., есть четвертая вершина параллелограма, тремя другими вершинами котораго служатъ точки 0, z и z_1; при этомъ точка $z + z_1$ и начало координатъ составляютъ концы одной и той же діагонали разсматриваемаго параллелограма.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

---

[2] Гораздо употребительнѣе терминъ аргументъ комплекснаго числа.

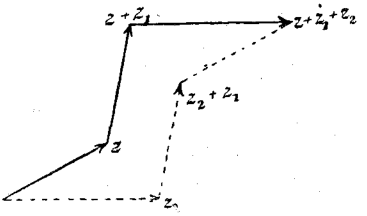
Подобнымъ же образомъ и разность $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}$ представится четвертой вершиной параллелограма, въ которой остальными вершинами служатъ точки 0, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_1$; но при этомъ вершина $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}$ противолежитъ вершинѣ $\mathfrak{z}$.

Изъ построенія слѣдуетъ, что положеніе точки $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}$ опредѣлится, если отложить отрѣзокъ $\mathfrak{z}_1$ въ соотвѣтствующемъ ему направленіи, начиная отъ конца отрѣзка $\mathfrak{z}$; такое же построеніе приходится повторять при нахожденіи суммы какого угодно числа слагаемыхъ

$$\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \cdots$$

При этомъ получится ломанная линія съ вершинами $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$ и т. д., которая составлена изъ отрѣзковъ, имѣющихъ каждый соотвѣтствующую длину и соотвѣтствующее направленіе. Конечная вершина этой ломанной и представитъ собою искомую сумму.

Если при сложеніи мы переставимъ нѣкоторыя слагаемыя, то въ результатѣ мы получимъ ломанную линію другого вида, но положеніе послѣдней вершины ея не измѣнится; въ этомъ обстоятельствѣ сказывается перемѣстительный законъ сложенія (фиг. 10).



Фиг. 10.

Вычитаніе какого нибудь отрѣзка можно замѣнить прибавленіемъ отрѣзка, имѣющаго противоположное направленіе. Такимъ образомъ мы можемъ построить разность $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}$, если отъ конца отрѣзка $\mathfrak{z}_1$ отложимъ отрѣзокъ $\mathfrak{z}$ въ направленіи, противоположномъ тому, которое онъ собственно имѣетъ.

3. Чтобы выразить комплексное число при помощи его фазы и абсолютной величины, пользуются тригонометрическими функціями $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Геометрическая теорія этихъ функцій обстоятельно изложена во второмъ томѣ этого сочиненія; простѣйшія свойства этихъ функцій мы здѣсь предполагаемъ извѣстными.

Припомнимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ съ острымъ угломъ ϑ отношеніе катета, лежащаго противъ этого угла, къ гипотенузѣ называется синусомъ угла ϑ, а отношеніе катета, прилежащаго къ углу ϑ, къ гипотенузѣ—косинусомъ этого угла; функціи эти обозначаются символами $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Между этими двумя функціями имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta,$$

$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1.$$

Если разсматриваемый уголъ больше прямого, то названныя функціи связаны между собой слѣдующими равенствами:

$$\sin(\pi-\vartheta)=\sin\vartheta,\qquad \cos(\pi-\vartheta)=-\cos\vartheta$$
$$\sin(\vartheta+\pi)=-\sin\vartheta,\quad \cos(\vartheta+\pi)=-\cos\vartheta.$$

Такимъ образомъ во всѣхъ четырехъ квадрантахъ функцiи $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ имѣютъ соотвѣтственно такiе же знаки, какъ координаты x и y (п. 1). Кромѣ того, имѣемъ еще:

$$\sin(\vartheta+2\pi)=\sin\vartheta,\quad \cos(\vartheta+2\pi)=\cos\vartheta,$$
$$\sin(-\vartheta)=-\sin\vartheta,\quad \cos(-\vartheta)=\cos\vartheta;$$

всѣ вращенiя, которыя приводятъ къ одной и той же фазѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ и одинъ и тотъ же косинусъ.

Мы будемъ еще пользоваться формулами сложенiя:

$$\cos(\vartheta+\vartheta_1)=\cos\vartheta\cos\vartheta_1-\sin\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta+\vartheta_1)=\sin\vartheta\cos\vartheta_1+\cos\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\cos(\vartheta-\vartheta_1)=\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta-\vartheta_1)=\sin\vartheta\cos\vartheta_1-\cos\vartheta\sin\vartheta_1.$$

Замѣтимъ также формулу, которая выражаетъ соотношенiе между сторонами треугольника a, b и c и косинусомъ одного изъ угловъ треугольника:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

гдѣ черезъ α обозначенъ уголъ, лежащiй противъ стороны a.

4. Разсмотримъ теперь прямоугольный треугольникъ, изображенный на фигурѣ 7, съ гипотенузой r и катетами x и y. Имѣемъ:

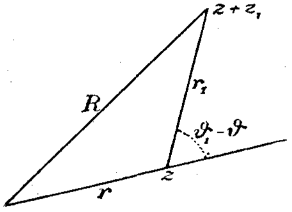
$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,$$

а слѣдовательно,

$$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta).$$

Эта формула остается справедливой независимо отъ того, въ которомъ изъ четырехъ квадрантовъ находится точка z. Формула эта сохраняетъ смыслъ и тогда, если черезъ ϑ обозначимъ не фазу, но величину того вращенiя, которое приводитъ къ точкѣ z[3]).

5. Обозначимъ черезъ z и z_1 два комплексныхъ числа, которыя имѣютъ абсолютныя величины соотвѣтственно r и r_1 и фазы ϑ и ϑ_1. Абсолютную величину суммы $z+z_1$ назовемъ черезъ R. Изъ треугольника со сторонами R, r и r_1, гдѣ между сторонами r



Фиг. 11.

---

[3]) Эта величина можетъ, слѣдовательно, отличаться отъ ϑ на 2π.

и r_1 заключенъ уголъ $\pi-(\vartheta_1-\vartheta)$, имѣемъ:

$$R^2=r_1^2+r^2+2rr_1\cos(\vartheta_1-\vartheta);$$

это отношеніе можетъ быть выражено двояко слѣдующимъ образомъ:

$$R^2=(r_1+r)^2-2rr_1[1-\cos(\vartheta_1-\vartheta)],$$
$$R^2=(r_1-r)^2+2rr_1[1+\cos(\vartheta_1-\vartheta)].$$

Такъ какъ косинусъ любого угла по своей абсолютной величинѣ не превышаетъ единицы, то множители $1-\cos(\vartheta_1-\vartheta)$ и $1+\cos(\vartheta_1-\vartheta)$ никогда не бываютъ отрицательными; слѣдовательно, R^2 меньше, чѣмъ $(r_1+r)^2$ и больше, чѣмъ $(r_1-r)^2$. Отсюда слѣдуетъ предложеніе:

Абсолютная величина суммы никогда не превышаетъ суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ и никогда не бываетъ меньше ихъ разности.

Въ этомъ нельзя не усмотрѣть выраженія извѣстной геометрической теоремы: *во всякомъ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ и больше разности ихъ.*

Абсолютная величина суммы равна суммѣ абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ лишь въ томъ случаѣ, когда $\vartheta_1=\vartheta$; она равна разности послѣднихъ, когда уголъ $\vartheta_1-\vartheta$ равенъ двумъ прямымъ. Въ обоихъ этихъ случаяхъ отношеніе $z/z_1=\pm r/r_1$, слѣдовательно, есть вещественное число; знакъ плюсъ нужно взять для перваго случая, знакъ минусъ—для второго.

6. Дадимъ теперь геометрическую интерпретацію умноженія и дѣленія комплексныхъ чиселъ. Изъ чиселъ

$$z=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$
$$\text{и}\quad z_1=r_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1)$$

мы составимъ произведеніе zz_1 и частное z_1/z по формуламъ § 44, п. 4. Имѣемъ:

$$zz_1=rr_1[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1-\sin\vartheta\sin\vartheta_1)+i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1+\sin\vartheta\cos\vartheta_1)],$$
$$\frac{z_1}{z}=\frac{r_1}{r}[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1)+i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1-\sin\vartheta\cos\vartheta_1)].$$

Согласно формуламъ сложенія, которыя приведены въ п. 3, мы получимъ:

$$\begin{aligned} z_1&=rr_1[\cos(\vartheta_1+\vartheta)+i\sin(\vartheta_1+\vartheta)]\\ \frac{z_1}{z}&=\frac{r_1}{r}[\cos(\vartheta_1-\vartheta)+i\sin(\vartheta_1-\vartheta)]. \end{aligned} \qquad (10)$$

Формулы (10) мы видоизмѣнимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть

$$zz_1 = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\frac{z_1}{z} = R'(\cos\theta' + i\sin\theta');$$

тогда

$$R = rr_1, \quad R' = \frac{r_1}{r}.$$

Если для фазъ будемъ брать, какъ мы условились выше, углы въ интервалѣ отъ 0 до 2π, то разность $\vartheta_1 - \vartheta$ можетъ быть отрицательной, но во всякомъ случаѣ она превышаетъ -2π; сумма же $\vartheta_1 + \vartheta$ можетъ превышать 2π, но она меньше 4π. Такъ что

$$\begin{array}{lll} \theta = \vartheta_1 + \vartheta, & \text{если} & \vartheta_1 + \vartheta < 2\pi \\ = \vartheta_1 + \vartheta - 2\pi, & \text{„} & \vartheta_1 + \vartheta \geqslant 2\pi \\ \theta' = \vartheta_1 - \vartheta, & \text{„} & \vartheta_1 \geqslant \vartheta \\ = \vartheta_1 - \vartheta + 2\pi, & \text{„} & \vartheta_1 < \vartheta. \end{array}$$

Отсюда слѣдуетъ:

Абсолютная величина произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равна произведенію или частному абсолютныхъ величинъ этихъ чиселъ.

Фаза произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ отличается отъ суммы или разности фазъ данныхъ чиселъ лишь на цѣлое число окружностей.

7. Вышеизложенное даетъ способъ построить произведеніе комплексныхъ чиселъ.

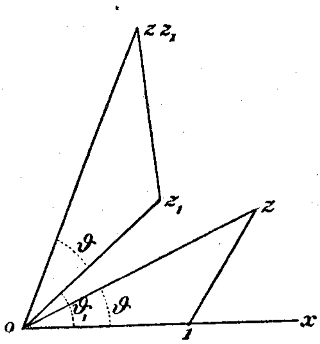
На положительной оси x-овъ отложимъ отрѣзокъ 1 (т. е. единицу длины) и построимъ треугольникъ $(0, z_1, z_2)$, подобный треугольнику $(0, 1, z)$. По извѣстной теоремѣ изъ теоріи подобныхъ треугольниковъ имѣемъ:

$$r_2 : r_1 = r : 1,$$

откуда $r_2 = rr_1 = R$; уголъ $z_2 0\, 1 = \vartheta + \vartheta_1 = \theta$.

Такимъ образомъ точка z_2 является изображеніемъ произведенія zz_1.

Точно также можно представить частное $z_2/z = z_1$ посредствомъ подобныхъ треугольниковъ $(0 1 z)$ и $(0 z_1 z_2)$. Число z_2/z изобразится точкой, имѣющей относительно точки z_2 такое же положеніе, какое занимаетъ точка 1 относительно точки z.



Фиг. 12.

8. Пусть $\vartheta_1=\vartheta$ и $r_1=r$. Тогда изъ формулы умноженія (п. 6, (10)) получимъ:

$$z^2=r^2(\cos 2\vartheta+i\sin 2\vartheta);$$

положивъ въ той же формулѣ $z_1=z^2$, $r_1=r^2$, и $\vartheta_1=2\vartheta$, получимъ:

$$z^3=r^3(\cos 3\vartheta+i\sin 3\vartheta).$$

При помощи совершенной индукціи легко доказать справедливость общей формулы:

$$z^n=r^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta). \qquad (11)$$

Для этого нужно въ формулѣ (10) подставить: $z_1=z^n$, $r_1=r^n$ и $\vartheta_1=n\vartheta$.

Если мы во второй изъ двухъ формулъ (10) положимъ:

$$z_1=1,\quad r_1=1 \quad \text{и}\ \vartheta_1=0,$$

то получимъ:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\,(\cos\vartheta-i\sin\vartheta).$$

Если въ той же формулѣ возьмемъ, кромѣ того, дѣлителемъ не число z, а число z^n, то, согласно формулѣ (11), мы должны замѣнить модуль r и фазу ϑ соотвѣтственно черезъ r^n и $n\vartheta$, такъ что окончательно найдемъ:

$$z^{-n}=r^{-n}\,(\cos n\vartheta-i\sin n\vartheta).$$

Такимъ образомъ, формула (11) справедлива при всякомъ цѣломъ n какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ.

Формула (11) извѣстна подъ названіемъ формулы Муавра (Moivre). Посредствомъ нея можно получить любую степень комплекснаго числа съ цѣлымъ показателемъ. Позже мы покажемъ, какъ можно воспользоваться этой формулой для опредѣленія степени, когда показатель не есть цѣлое число.

Въ заключеніе, скажемъ два слова объ историческомъ развитіи теоріи мнимыхъ чиселъ. Давно уже было извѣстно, что нѣкоторыя уравненія не имѣютъ ни одного корня въ области чиселъ, надъ которыми оперировали. Столь же давно стали дѣлать условно вычисленія надъ выраженіями, содержащими знакъ $\sqrt{-1}$, такъ, какъ будто онъ дѣйствительно представляетъ собою число. Напримѣръ, Карданусъ (Hieronymus Cardanus 1501—1576) знаетъ уже, что отрицательные корни уравненій имѣютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ опредѣленный смыслъ, но онъ еще не въ состояніи приписать какой нибудь смыслъ такимъ символамъ, какъ $\sqrt{-1}$. У Декарта (Decartes, 1596—1650) мы уже встрѣчаемъ термины „вещественные корни“

и „мнимые корни.“ Въ такомъ видѣ вопросъ о мнимыхъ числахъ находился вплоть до XIX-го столѣтія, хотя къ этому времени мнимыя числа все чаще и чаще примѣнялись въ вычисленіяхъ; много занимались этими формальными вычисленіями между прочими Лейбницъ, Ньютонъ, Даламберъ и въ особенности Эйлеръ. Долгое время мнимыя числа считались чѣмъ-то загадочнымъ, пока не выработалось сознаніе, что эти числа представляютъ результатъ вполнѣ законнаго и цѣлесообразнаго расширенія созданнаго нашимъ духомъ понятія о числѣ; тогда убѣдились, что эти числа имѣютъ такой же реальный смыслъ, какъ и вещественныя числа, такъ какъ, подобно послѣднимъ, они служатъ для выраженія извѣстнаго рода соотношеній между вещами. Это было выяснено, главнымъ образомъ, работами Коши (Cauchy) и Гаусса (Gauss); послѣднему мы обязаны изложенной выше геометрической интерпретаціей мнимыхъ чиселъ[6].

---

[6] Abraham de Moivre, 1667—1754; будучи протестантомъ, онъ послѣ отмѣны Нантскаго эдикта эмигрировалъ изъ Франціи, жилъ и работалъ въ Лондонѣ, въ кругу Ньютона; въ 1730 г. появился его трудъ „Miscellanea analytica,“ въ которомъ находится приведенная нами формула.

Gauss. Göttinger gelehrte Anzeigen, 23 April 1831, въ статьѣ „Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda“. Въ 1880 г. было опубликовано письмо Гаусса къ Бесселю (Bessel), помѣченное 1811 г.; въ этомъ письмѣ изложены весьма важныя соображенія относительно даннаго вопроса.

Cauchy, Analyse algébrique (1821), Exercices d'analyse, т. III (1844).

Изъ новѣйшихъ сочиненій по этому вопросу упомянемъ:

Heine, Die Elemente der Functionentheorie, Crelles Journal, т. 74 (1871).

ГЛАВА X.

Перестановки и сочетанія:

§ 48. Перестановки.

1. Предположимъ, что мы имѣемъ комплексъ, содержащій конечное число предметовъ. Обозначимъ это число черезъ n; какъ мы уже раньше видѣли, это число можетъ быть отсчитано различными способами; другими словами, мы можемъ различнымъ образомъ ассоціировать (сопрягать) элементы нашего комплекса съ числами 1, 2, 3, ... n, или, еще иначе, предметы нашего комплекса можно различными способами расположить.

Одинъ единственный элементъ допускаетъ, естественно, только одно расположеніе; два элемента a и b могутъ быть расположены двояко: ab и ba; три элемента a, b и c могутъ быть расположены шестью способами: abc, acb, bac, bca cab и cba. Эти шесть перестановокъ можно получить слѣдующимъ образомъ: пишемъ на первомъ мѣстѣ поочередно каждый изъ трехъ элементовъ a, b и c и каждый разъ располагаемъ послѣ перваго элемента прочіе два двумя возможными способами.

Эти различныя размѣщенія называются перестановками изъ n элементовъ нашего комплекса. Какъ показываютъ приведенные примѣры, эти перестановки, въ свою очередь, образуютъ нѣкоторый комплексъ, состоящій изъ конечнаго числа элементовъ; это предложеніе мы сейчасъ докажемъ способомъ математической индукціи, при чемъ доказательство дастъ намъ еще способъ опредѣлить число перестановокъ изъ n элементовъ.

Итакъ, допустимъ, что число перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ a_1, a_2, a_3, . . . , a_{n-1} конечно; обозначимъ это число черезъ $\pi(n-1)$. Присоединимъ къ нашему комплексу еще n-тый элементъ a_n. Въ каждой изъ имѣющихся у насъ $\pi(n-1)$ перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ мы можемъ помѣстить новый элементъ a_n на первомъ, на второмъ, на третьемъ, ... или, наконецъ, на n-томъ мѣстѣ. Такимъ образомъ каждая перестановка изъ $n-1$ элементовъ дастъ n перестановокъ изъ n элементовъ, и всѣ получаемыя перестановки отличны другъ отъ друга.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Pi(n) = n\,\Pi(n-1)\,. \tag{1}$$

Мы видѣли, что $\Pi(1)=1$ и $\Pi(2)=2$; слѣдовательно, по формулѣ (1), $\Pi(3)=2.3$, и вообще (въ силу совершенной индукціи)

$$\Pi(n) = 1\,.\,2\,.\,3\;.\,.\,.\;n; \tag{2}$$

т. е. число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію всѣхъ чиселъ отъ 1 до n.

Это произведеніе имѣетъ еще особое названіе: факультетъ n-го порядка (n—факультетъ), и обозначается слѣдующимъ символомъ:

$$1\,.\,2\,.\,3\;.\,.\,.\;n = n!$$

Такимъ образомъ, мы вполнѣ опредѣлили число перестановокъ въ комплексѣ, состоящемъ изъ n элементовъ.

Формулу (1) можно представить въ болѣе общемъ видѣ. Если подъ m будемъ подразумѣвать натуральное число, которое меньше числа n, то имѣемъ:

$$\Pi(n) = (m+1)(m+2)\;.\,.\,.\;n\,\Pi(m)\,. \tag{3}$$

Если увеличивать число n, то число $\Pi(n)$ возрастаетъ очень быстро, напримѣръ:

$\Pi(1)=1$, $\Pi(2)=2$, $\Pi(3)=6$, $\Pi(4)=24$, $\Pi(5)=120$,
$\Pi(6)=720$, $\Pi(7)=5040$, $\Pi(8)=40320$, $\Pi(9)=362880$,
$\Pi(10)=3\,628\,800$.

Относительно того, въ какой мѣрѣ быстро увеличивается число $\Pi(n)$ съ возрастаніемъ числа n мы докажемъ слѣдующее предложеніе.

2. Каково бы ни было положительное число $a>1$, можно указать такое число m, что $\Pi(n)>a^n$, коль скоро $n>m$.

Для доказательства выберемъ произвольное цѣлое число $p>a$; тогда $\frac{a}{p}=\Theta$ есть положительная правильная дробь; возьмемъ теперь цѣлое число $n>p$; имѣемъ:

$$\frac{a}{p+1}<\Theta,\quad \frac{a}{p+2}<\Theta,\;.\,.\,.\;\frac{a}{n}<\Theta.$$

Перемножая эти неравенства почленно, получимъ:

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\ldots n}<\Theta^{n-p}.$$

Помноживъ обѣ части полученнаго неравенства на $a^p/\Pi(p)$ и пользуясь формулой (3), получимъ:

$$\frac{a^n}{\Pi(n)}<\frac{a^p\,\Theta^n}{\Theta^p\,\Pi(p)}\,. \tag{4}$$

Согласно предложенію, изложенному въ § 18, 8, можно подобрать достаточно большое число m такъ, чтобы

$$\Theta^n < \Theta^p a^{-p} \Pi(p)$$

для всякаго $n > m$.

Поэтому при достаточно большихъ значеніяхъ числа n правая часть неравенства (4) обращается въ правильную дробь и, слѣдовательно, $\frac{a^n}{\Pi(n)} < 1$, т. е.

$$\Pi(n) > a^n, \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

3. Подъ многосторонникомъ, (n-сторонникомъ) разумѣютъ замкнутую ломанную линію, состоящую изъ n отрѣзковъ, попарно сходящихся въ каждой вершинѣ; отрѣзки эти (стороны) могутъ иногда взаимно перекрещиваться, какъ это бываетъ у такъ называемыхъ звѣздныхъ многосторонниковъ. Мы можемъ теперь рѣшить такую задачу: *сколько n-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ.* Въ каждомъ многосторонникѣ мы можемъ любую вершину считать первой, такъ что при построеніи нашихъ многосторонниковъ мы можемъ выбрать любую изъ данныхъ n точекъ за общую ихъ начальную вершину; прочія же $n-1$ точекъ можно брать въ различной послѣдовательности столькими различными способами, сколько единицъ содержится въ числѣ $\Pi(n-1)$. Всего получится, однако, не $\Pi(n-1)$ многосторонниковъ, а вдвое меньше, т. е. $\frac{1}{2}\Pi(n-1)$. Въ самомъ дѣлѣ, *одна и та же* фигура получится, если мы будемъ брать вершины въ одной послѣдовательности и въ противоположной послѣдовательности, такъ что одинъ многосторонникъ приходится не на одну перестановку вершинъ, но на двѣ перестановки. Такимъ образомъ изъ трехъ точекъ можно получить *одинъ* лишь трехсторонникъ изъ четырехъ точекъ—три четырехсторонника, изъ пяти точекъ—двѣнадцать пятисторонниковъ, изъ шести точекъ—шестьдесятъ шестисторонниковъ, и т. д. Читатель легко можетъ выяснить себѣ расположеніе этихъ многосторонниковъ посредствомъ простыхъ чертежей.

§ 49. Четныя и нечетныя перестановки.

1. Будемъ обозначать элементы нѣкотораго комплекса числами натуральнаго ряда 1, 2, 3, . . . , n. Среди всѣхъ возможныхъ перестановокъ этихъ элементовъ есть одна такая: $E = 1, 2, 3, \ldots, n$, въ которой числа расположены въ той же послѣдовательности, какъ и въ *натуральномъ ряду*. Назовемъ эту перестановку *главной* или *основной перестановкой*. Всякую другую перестановку мы будемъ обозначать такъ:

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

здѣсь буквы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ означаютъ числа того же ряда $1, 2, 3, \ldots, n$, но расположенныя въ другой послѣдовательности.

Напримѣръ, при $n = 3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ:

$$A_1 = 1,2,3, \qquad A_4 = 1,3,2,$$
$$A_2 = 2,3,1, \qquad A_5 = 2,1,3,$$
$$A_3 = 3,1,2, \qquad A_6 = 3,2,1.$$

Чтобы получить изъ главной перестановки E какую-нибудь перестановку A, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Если $a_1 = 1$, то первый элементъ главной перестановки оставляютъ на прежнемъ мѣстѣ. Если же a_1 отлично отъ 1, то мы перемѣщаемъ въ перестановкѣ E элементы a_1 и 1 одинъ на мѣсто другого. Тогда элементъ a_1 окажется на надлежащемъ мѣстѣ, котораго мы болѣе не будемъ мѣнять. Послѣ того, какъ элементъ a_1 займетъ принадлежащее ему въ перестановокъ A первое мѣсто, мы аналогичнымъ образомъ помѣняемъ мѣстами элементы 2 и a_2; чтобы получить требуемую перестановку A, потребуется выполнить не болѣе $n-1$ подобныхъ замѣщеній [1]). Такое взаимное замѣщаніе двухъ элементовъ называется транспозиціей. Такимъ образомъ любую перестановку можно получить изъ главной путемъ ряда послѣдовательныхъ транспозицій. Точно также посредствомъ транспозицій можно получить любую заданную перестановку, исходя не изъ главной перестановки, а изъ какой либо другой. Это можно выполнить безконечнымъ числомъ способовъ: напримѣръ, можно сперва сдѣлать какое угодно число совершенно произвольныхъ транспозицій, а потомъ ужъ дѣйствовать планомѣрно вышеописаннымъ образомъ.

2. Тѣ $n!$ перестановокъ, которыя получаются изъ n элементовъ $1, 2, 3, \ldots n$, можно раздѣлить на два класса, исходя изъ слѣдующихъ соображеній.

Если въ какой нибудь перестановкѣ меньшее число стоитъ не впереди большаго, а позади его, то говорятъ, что соотвѣтствующіе элементы составляютъ инверсію. Напримѣръ, въ перестановкѣ A два элемента a_i и a_k при $i < k$ составляютъ инверсію, если $a_i > a_k$, и не составляютъ инверсіи, если $a_i < a_k$. Поэтому, за исключеніемъ главной перестановки E, не имѣющей ни одной инверсіи, всякая перестановка имѣетъ опредѣленное число инверсій. Напримѣръ, перестановка

---

[1]) Напримѣръ, чтобы изъ главной перестановки $E = 1, 2, 3, 4$, получить перестановку 3, 1, 4, 2, нужно сначала замѣстить другъ другомъ элементы 1 и 3; получимъ перестановку 3, 2, 1, 4; теперь нужно здѣсь замѣстить другъ другомъ элементы 2 и 1, получимъ: 3, 1, 2, 4; остается перемѣстить элементы 2 и 4, послѣ чего получимъ требуемую перестановку 3, 1, 4, 2.

$n, n-1, n-2, \ldots, 1$ имѣетъ слѣдующее число инверсій:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{1}{2}n(n-1).$$ [2]

Это—наибольшее число инверсій, которымъ можетъ обладать какая либо перестановка нашего комплекса. Въ вышеприведенномъ примѣрѣ $n=3$; перестановки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 имѣютъ инверсій соотвѣтственно 0, 2, 2, 1, 1 и 3. По числу инверсій мы подраздѣляемъ перестановки каждаго комплекса на два класса.

Четными перестановками называются такія, которыя имѣютъ четное число (включая сюда и нуль) инверсій.

Нечетными перестановками называются такія, которыя имѣютъ нечетное число инверсій.

При $n=3$ перестановки A_1, A_2 и A_3 суть четныя, а перестановки A_4. A_5 и A_6—нечетныя.

3. Если мы въ какой нибудь перестановкѣ перемѣстимъ два элемента одинъ на мѣсто другого, то количество инверсій этой перестановки измѣнится на нечетное число.

Справедливость этого предложенія легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Примемъ, что въ перестановкѣ A элементъ a_g находится впереди элемента a_k (т. е. $g<k$); замѣняя другъ другомъ элементы a_g и a_k, мы этимъ совершенно не измѣняемъ инверсій, которыя они образуютъ съ элементами, стоящими впереди элемента a_g или позади элемента a_k.

Если черезъ a_l обозначимъ элементъ, который находится въ перестановкѣ A между элементами a_g и a_k, то двѣ пары элементовъ a_g, a_l и a_l, a_k либо не даютъ ни одной инверсіи, либо образуютъ одну, либо же двѣ инверсіи; при замѣщеніи другъ другомъ элементовъ a_g и a_k двѣ пары a_k, a_l, и a_l, a_g образуютъ соотвѣтственно либо двѣ инверсіи, либо одну, либо же не даютъ ни одной, такъ что число этихъ инверсій разсматриваемой перестановки или увеличилось на два, или осталось безъ перемѣны, или же уменьшилось на два; во всякомъ случаѣ, стало быть, оно измѣняется на четное число. Наконецъ, если пара a_g, a_k образуетъ инверсію, то пара a_k, a_g не даетъ ни одной инверсіи, и наоборотъ, если пара a_g, a_k не образуетъ инверсіи, то пара a_k, a_g образуетъ одну инверсію; число инверсій, такимъ образомъ, измѣняется еще на 1. Этимъ и подтверждается справедливость нашего предложенія.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ:

4. Число четныхъ перестановокъ равно числу нечетныхъ,

---

[2] Въ этой перестановкѣ каждый элементъ образуетъ инверсію съ каждымъ изъ послѣдующихъ элементовъ; такимъ образомъ элементъ n образуетъ съ послѣдующими элементами $n-1$ инверсій, элементъ $n-1$ образуетъ $n-2$ инверсій и т. д.

т. е. тѣхъ и другихъ въ каждомъ комплексѣ имѣется по $\frac{1}{2}n!$ Дѣйствительно, мы можемъ во всѣхъ перестановкахъ A замѣстить другъ другомъ два какихъ либо опредѣленныхъ элемента, напримѣръ 1 и 2; тогда, съ одной стороны, каждая четная перестановка перейдетъ въ нечетную и, обратно, каждая нечетная перестановка—въ четную; но такъ какъ въ общемъ мы получимъ всѣ тѣ же перестановки, которыя мы имѣли раньше, то необходимо заключить, что четныхъ перестановокъ столько же, сколько нечетныхъ.

5. Будемъ выводить помощью транспозицій всевозможныя перестановки даннаго комплекса изъ n элементовъ изъ главной перестановки; въ какомъ бы порядкѣ мы ни вели этотъ процессъ, всякая четная перестановка получится послѣ четнаго числа транспозицій, а всякая нечетная перестановка—путемъ нечетнаго числа транспозицій. Въ самомъ дѣлѣ, главная перестановка, не имѣя ни одной инверсіи, принадлежитъ къ четнымъ перестановкамъ, а каждая транспозиція измѣняетъ количество инверсій на нечетное число.

Изложенныя теоремы вмѣстѣ съ нѣкоторыми другими составляютъ основанія теоріи детерминантовъ.

§ 50. Составленіе перестановокъ.

1. Какъ мы видѣли выше, изъ любыхъ n элементовъ можно составить $n!$ перестановокъ A. Хотя эти перестановки не представляютъ собою численныхъ величинъ, все же онѣ поддаются математической обработкѣ; въ области перестановокъ можно установить правила дѣйствій, имѣющія аналогію съ правилами обыкновенной ариѳметики, хотя и существенно отличающіяся отъ послѣднихъ въ нѣкоторыхъ пунктахъ. Эти дѣйствія надъ перестановками имѣютъ огромное значеніе для алгебры; мы сейчасъ разсмотримъ ихъ вкратцѣ, такъ какъ эти своеобразныя дѣйствія при всей своей важности имѣютъ совершенно элементарный характеръ; къ тому же они представляютъ собою прекрасный примѣръ свободнаго творчества въ области понятія о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними.

2. Чтобы перейти отъ основной перестановки

$$E=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

къ какой либо другой перестановкѣ

$$A=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

нужно замѣнить элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2—элементомъ a_2, . . . , элементъ n—элементомъ a_n. Это дѣйствіе называется субституціей [3]); для наглядности его изображаютъ такъ:

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, \dots, & n\\ a_1, & a_2, & a_3, \dots, & a_n\end{pmatrix}, \tag{1}$$

т. е. подъ каждымъ элементомъ пишутъ тотъ элементъ, которымъ его замѣняютъ. Эта субституція обозначается одной какой либо буквой, напримѣръ буквой S, такъ что символъ (1) читается такъ: субституція S. Такимъ образомъ посредствомъ субституціи S мы переходимъ отъ главной перестановки E къ перестановкѣ A.

Когда мы производимъ субституцію, то безразлично, въ какой послѣдовательности мы замѣняемъ прежніе элементы $1, 2, 3, \dots, n$ новыми элементами $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$; можно, напримѣръ, замѣнить сперва элементъ 1 элементомъ a_1, а потомъ элементъ 2 элементомъ a_2; но можно также сперва замѣнить элементъ 2 элементомъ a_2, а потомъ уже элементъ 1—элементомъ a_1, такъ что субституцію S можно представить еще такъ:

$$\begin{pmatrix}2, & 1, & 3, \dots, & n\\ a_2, & a_1, & a_3, \dots, & a_n\end{pmatrix},$$

и, вообще, въ символѣ (1) можно переставлять любыя двѣ пары цифръ (т. е. любыя вертикали), при чемъ значеніе символа отъ этого не измѣняется, потому что послѣ такой перестановки онъ выражаетъ ту же субституцію, что и до нея. [4])

Какой либо элементъ b изъ ряда $1, 2, 3, \dots, n$ послѣ субституціи S замѣнится элементомъ a_b, такъ что если обозначимъ какую либо перестановку нашего комплекса черезъ

$$B = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n,$$

то субституцію S можно представить еще такъ:

$$S = \begin{pmatrix}b_1, & b_2, \dots, & b_n\\ a_{b_1}, & a_{b_2}, \dots, & a_{b_n}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

---

[3]) Нѣкоторые русскіе авторы употребляютъ терминъ подстановка, другіе въ томъ же значеніи—терминъ перестановка; въ виду того, что русская терминологія, такимъ образомъ, не установилась, мы рѣшили сохранить терминъ субституція (какъ и выше терминъ транспозиція), принятый во всей европейской литературѣ.

[4]) Это важно очень хорошо себѣ уяснить Символы:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

выражаютъ одну и ту же субституцію, именно ту, которая замѣняетъ элементъ 1 элементомъ 2, элементъ 2 элементомъ 3 и элементъ 3 элементомъ 1. Субституція опредѣляется, такимъ образомъ, только тѣмъ, какимъ элементомъ она замѣняетъ каждый элементъ комплекса.

Однако, перестановка A сравнительно со всѣми другими перестановками находится въ особенной связи съ субституціей S; именно, она получается при помощи субституціи S изъ основной перестановки E.

3. Если мы будемъ выполнять замѣну элементовъ, выражаемую субституціей S, исходя не изъ главной перестановки E, но изъ какой либо другой перестановки B, то, какъ показываетъ формула (2), мы при этомъ получимъ нѣкоторую перестановку

$$M = a_{b_1},\ a_{b_2},\ .\ .\ .\ .\ ,\ a_{b_n}; \qquad (3)$$

мы могли бы обозначить эту перестановку черезъ A_b; однако, предпочитаютъ пользоваться другимъ символомъ, а именно

$$M = BA. \qquad (4)$$

Понятно, что выражаемое символомъ BA дѣйствіе не есть умноженіе, какъ мы его привыкли понимать.[5])

4. Мы только что познакомились со способомъ получить изъ двухъ данныхъ перестановокъ A и B опредѣленную третью; другими словами, въ области перестановокъ мы устанавливаемъ правило дѣйствія, аналогичное правиламъ дѣйствій въ ариѳметикѣ. Для обозначенія этого дѣйствія мы выбрали знакъ умноженія, какъ наиболѣе простой (съ не меньшимъ правомъ можно было бы употреблять знакъ сложенія); однако, чтобы избѣжать недоразумѣній, мы будемъ называть это дѣйствіе не умноженіемъ, но составленіемъ[6]) или соединеніемъ перестановокъ. Важно замѣтить, что это дѣйствіе можно производить лишь надъ такими перестановками, которыя состоятъ изъ опредѣленнаго числа элементовъ, при чемъ эти послѣдніе не мѣняются въ предѣлахъ нашего разсужденія.

---

[5]) Итакъ, подъ символомъ BA мы разумѣемъ перестановку, которая получается изъ перестановки B посредствомъ той же субституціи, при помощи которой перестановка A получается изъ основной перестановки E.

Пусть, напримѣръ,

$$B = 3,\ 1,\ 2;\ A = 2,\ 1,\ 3;$$

тогда субституція

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix},$$

переобразующая перестановку E въ перестановку A, замѣщаетъ элементы 1, 2, 3 соотвѣтственно элементами 2, 1, 3. Если мы произведемъ это замѣщеніе въ перестановкѣ B, то получимъ перестановку

$$3,\ 2,\ 1.$$

Эта, именно, перестановка и выражается въ настоящемъ случаѣ символомъ BA. Въ текстѣ ниже приведенъ еще примѣръ.

[6]) Почти во всей литературѣ принятъ, однако, терминъ умноженіе перестановокъ.

Чтобы выяснить процессъ составленія перестановокъ на простомъ примѣрѣ, возьмемъ $n = 4$,

$$A = 1,\ 3,\ 4,\ 2 \text{ и } B = 3,\ 2,\ 1,\ 4.$$

Чтобы получить перестановку BA, нужно выполнить тѣ замѣщенія въ перестановкѣ B, которыя приводятъ отъ $E = 1, 2, 3, 4$ къ A. Мы получимъ тогда

$$BA = 4,\ 3,\ 1,\ 2.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$AB = 3,\ 1,\ 4,\ 2.$$

Уже изъ этихъ примѣровъ видно, что перемѣстительный законъ не имѣетъ мѣста или, по крайней мѣрѣ, не всегда имѣетъ мѣсто при составленіи перестановокъ.

5. Ту же операцію можно производить не только надъ двумя, но и надъ нѣсколькими перестановками. Если C означаетъ третью перестановку, то можно образовать перестановку $C(BA)$, составленную изъ перестановокъ C и (BA). Покажемъ, что послѣдняя перестановка тождественна съ перестановкой $(CB)A$; другими словами, докажемъ, что при составленіи перестановокъ сочетательный законъ остается справедливымъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно выполнить требуемыя операціи по правилу, указанному въ пунктѣ 3.

Дѣйствительно, пусть

$$\begin{aligned} A &= a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \\ B &= b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \\ C &= c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n; \end{aligned}$$

тогда

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n}\ [7]. \qquad (5)$$

Чтобы получить перестановку $C(BA)$, нужно въ перестановкѣ C

---

[7] Нужно помнить, что

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n$$

суть тѣ же числа

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n,$$

разставленныя въ иномъ порядкѣ. Субституція, ведущая отъ перестановки E къ перестановкѣ A, замѣщаетъ элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2 элементомъ a_2, вообще, элементъ i элементомъ a_i. Слѣдовательно, она замѣщаетъ элементъ b_1 элементомъ a_{b_1}, элементъ b_2 элементомъ a_{b_2} и т. д. Отсюда вытекаютъ равенства (5) и (3).

выполнить субституцію, ведущую отъ главной перестановки E къ перестановкѣ BA; такъ какъ для этого элементъ 1 нужно замѣнить элементомъ a_{b_1}, элементъ 2—элементомъ a_{b_2} и т. д., то элементъ c_1 замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ:

$$C(BA) = a_{b_{c_1}},\ a_{b_{c_2}},\ \ldots,\ a_{b_{c_n}}. \qquad (6)$$

Съ другой стороны, найдемъ:

$$CB = b_{c_1},\ b_{c_2},\ \ldots,\ b_{c_n};$$

чтобы образовать перестановку $(CB)A$, слѣдуетъ выполнить въ перестановкѣ CB замѣщенія, которыя ведутъ отъ E къ A; для этого элементъ 1 замѣнится элементомъ a_1, элементъ 2—элементомъ a_2, и т. д.; элементъ b_{c_1} замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такую же перестановку, какъ и въ формулѣ (6):

$$(CB)A = a_{b_{c_1}},\ a_{b_{c_2}},\ \ldots,\ a_{b_{c_n}} = C(BA).$$

Такимъ образомъ мы доказали справедливость сочетательнаго закона при составленіи перестановокъ [8]). Поэтому можно не писать скобокъ въ обозначеніяхъ $C(BA)$ и $(CB)A$, а изображать символомъ CBA перестановку, которая получается, какъ результатъ составленія перестановокъ A, B и C (въ этой послѣдовательности).

Можно соединять любое число перестановокъ, при чемъ одна и та же перестановка можетъ повторяться нѣсколько разъ.

6. Всякая перестановка A, при соединеніи съ основной перестановкой, остается безъ перемѣны, въ какомъ бы порядкѣ мы ни производили эту операцію, т. е.

$$EA = AE = A.$$

Это предложеніе слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія составленія перестановокъ: чтобы получить перестановку EA, нужно выполнить

---

[8]) Провѣримъ это на примѣрѣ. Пусть

$$A = 1,\ 3,\ 2,\ 4;\ B = 3,\ 4,\ 1,\ 2;\ C = 2,\ 3,\ 1,\ 4.$$

Въ такомъ случаѣ

$$BA = 2.\ 4,\ 1,\ 3.$$
$$C(BA) = 4,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Такимъ же образомъ

$$CB = 4,\ 1,\ 3,\ 2$$
$$(CB)A = 4,\ 1,\ 2,\ 3.$$

замѣщенія, ведущія отъ E къ A, непосредственно въ перестановкѣ E, такъ что въ результатѣ получимъ вновь перестановку A; перестановка AE получится, если мы въ перестановкѣ A сдѣлаемъ тѣ замѣщенія, которыя отъ основной перестановки E приводятъ къ ней же, т. е. нужно оставить перестановку A безъ измѣненія. Итакъ, перестановка AE, равно какъ и перестановка EA, есть то же, что и A.

Отсюда заключаемъ, что перестановка E имѣетъ при составленіи перестановокъ такое же значеніе, какъ единица при умноженіи чиселъ (или нуль при сложеніи). Въ силу этого, если при составленіи перестановокъ встрѣчается основная перестановка, то она всегда можетъ быть опущена.

7. Одну и ту же перестановку можно взять въ качествѣ составляющей нѣсколько разъ; при этомъ цѣлесообразно обозначать результатъ на подобіе степеней чиселъ:

$$A = A^1, \quad AA = A^2, \quad AAA = A^3, \ldots .$$

Такъ же, какъ для степеней чиселъ, и для этихъ своеобразныхъ степеней остается справедливымъ основное равенство

$$A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu}, \tag{7}$$

гдѣ μ и ν суть цѣлыя и положительныя числа и $A^\mu A^\nu$ означаетъ результатъ составленія перестановокъ A^μ и A^ν. Формула эта остается справедливой и для $\mu = 0$ и $\nu = 0$, если только условимся, что

$$A^0 = E; \tag{8}$$

это обозначеніе напрашивается само собою въ виду аналогіи перестановки E съ числомъ 1.

8. Каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ одна и только одна перестановка A', удовлетворяющая условію

$$A'A = E.$$

Дѣйствительно, если $BA = E$, то по формулѣ (3) имѣемъ:

$$a_{b_1} = 1, \quad a_{b_2} = 2, \ldots, a_{b_n} = n;$$

такъ какъ элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если расположить ихъ въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ, также совпадаютъ соотвѣтственно съ числами $1, 2, \ldots, n$, то этимъ однозначно опредѣляются значенія элементовъ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 9).

---

9) Пояснимъ сказанное примѣромъ. Возьмемъ $n = 4$ и $A = 3, 1, 2, 4$, т. е. $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$. Ищемъ B такъ, чтобы $BA = E$. Тогда $a_{b_1} = 1 = a_2$; $a_{b_2} = 2 = a_3$; $a_{b_3} = 3 = a_1$; $a_{b_4} = 4 = a_4$. Слѣдовательно: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$, $b_4 = 4$, и $B = 2, 3, 1, 4$. Повѣркой легко убѣдиться, что $BA = 1, 2, 3, 4 = E$.

Перестановка A', удовлетворяющая условію $A'A = E$, называется обратной по отношенію къ перестановкѣ A.

9. Если A' есть перестановка, обратная относительно перестановки A, то A есть перестановка, обратная относительно A', т. е. если $A'A = E$ и $A''A' = E$, то $A'' = A$.

Дѣйствительно, такъ какъ $A'A = E$, то, согласно пункту 6 этой главы, имѣемъ:

$$A'AA' = A'.$$

Если A'' означаетъ перестановку, обратную относительно A', т. е. $A''A' = E$, то, принимая во вниманіе предыдущее равенство, найдемъ:

$$A''A'AA' = A''A' = E.$$

Если подставимъ $A''A' = E$ въ лѣвую часть равенства $A''A'AA' = E$, то получимъ $AA' = E$, т. е. перестановка A и есть обратная относительно перестановки A', что и требовалось доказать. По аналогіи E съ единицей представляется цѣлесообразнымъ разсматривать перестановку A', какъ (-1)-ую степень перестановки A, откуда слѣдуетъ равенство:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad (9)$$

10. Нетрудно понять, какое значеніе имѣютъ степени перестановокъ съ отрицательными показателями. Положивъ въ формулѣ (7) $\mu = -\nu$, найдемъ:

$$A^{-\nu}A^{\nu} = A^0, \text{ или } A^{-\nu}A^{\nu} = E,$$

т. е. $A^{-\nu}$ означаетъ перестановку, обратную относительно перестановки A^{ν}; теперь формула (7) получаетъ смыслъ и для того случая, когда показатель μ или ν есть отрицательное число.

11. Понятіе объ обратной перестановкѣ даетъ возможность установить въ области перестановокъ дѣйствіе, аналогичное дѣленію.

Дѣйствительно, въ равенствѣ

$$BA = C$$

можно по двумъ даннымъ перестановкамъ C и B, или C и A опредѣлить соотвѣтствующую третью: A или B; для этого служатъ формулы:

$$A = B^{-1}C \quad \text{и} \quad B = CA^{-1}.$$

Докажемъ теперь слѣдующее предложеніе: если перестановки A, M и N удовлетворяютъ условію $AM = AN$, то перестановки M и N тождественны. Это слѣдуетъ изъ равенства $A^{-1}AM = A^{-1}AN$.

Аналогично этому изъ равенства $MA = NA$ слѣдуетъ $M = N$.

§ 51. Изображеніе перестановокъ въ циклахъ.

1. Чтобы получить представленіе обо всей совокупности перестановокъ изъ данныхъ *n* элементовъ, пользуются выраженіемъ перестановокъ при помощи циклов ъ. Эти циклы, къ опредѣленію которыхъ мы теперь перейдемъ, весьма облегчаютъ также составленіе перестановокъ.[10]

---

[10] Слѣдующія за этимъ общія разсужденія будутъ понятнѣе, если читатель уяснитъ себѣ ихъ предварительно на частномъ примѣрѣ.

Перестановка вполнѣ опредѣляется, если указано, какой элементъ стоитъ на каждомъ мѣстѣ; какимъ образомъ это указано — совершенно безразлично. Перестановка можетъ быть непосредственно написана въ той послѣдовательности элементовъ, въ какой они слѣдуютъ другъ за другомъ:

4, 6, 9, 7, 1, 8, 5, 2, 3. [1]

Можетъ быть иначе указано, что на первомъ мѣстѣ стоитъ 4, на второмъ 6, на третьемъ 9 и т. д.

Одинъ изъ наиболѣе важныхъ способовъ обозначенія перестановокъ состоитъ въ распредѣленіи элементовъ въ циклы. Заключается этотъ способъ въ слѣдующемъ.

Въ нашей перестановкѣ [1] на первомъ мѣстѣ стоитъ 4; напишемъ это такъ: 1,4 — и будемъ понимать это обозначеніе въ томъ смыслѣ, что на 1-омъ мѣстѣ стоитъ 4. Закончивъ элементомъ 4, мы посмотримъ теперь, какой элементъ стоитъ на 4-мъ мѣстѣ: оказывается 7; мы выразимъ это такъ: 1, 4, 7. Теперь посмотримъ, какой элементъ стоитъ на 7-мъ мѣстѣ; оказывается 5; пишемъ 1, 4, 7, 5. Теперь смотримъ, какой элементъ стоитъ на 5-мъ мѣстѣ; оказывается 1. Когда мы вернулись къ элементу, съ котораго начали, то мы говоримъ, что получили циклъ (1, 4, 7, 5). Если мы будемъ принимать, что въ этомъ циклѣ за 5 вновь слѣдуетъ 1, то каждое число указываетъ здѣсь элементъ, стоящій на томъ мѣстѣ, которое обозначается предыдущимъ числомъ. Этотъ циклъ можно начать съ какого угодно элемента, напримѣръ, такъ (4, 7, 5, 1); и въ этомъ видѣ онъ будетъ по прежнему указывать, что на 4-мъ мѣстѣ стоитъ 7, на 7-мъ—5, на 5-мъ—1 и на 1-мъ—4.

Закончивъ циклъ, беремъ какой либо изъ элементовъ, въ него не вошедшихъ, напримѣръ 2; на 2-мъ мѣстѣ стоитъ 6,—пишемъ 2, 6; на 6-мъ мѣстѣ стоитъ 8,—пишемъ 2, 6, 8; на 8-мъ мѣстѣ стоитъ 2; циклъ замкнулся: (2, 6, 8).

Беремъ, наконецъ, одинъ изъ элементовъ, еще не появившихся, напримѣръ 3; на третьемъ мѣстѣ стоитъ 9, а на девятомъ 3; мы получаемъ такимъ образомъ третій циклъ (3, 9). Наша перестановка можетъ быть, такимъ образомъ, представлена въ слѣдующемъ видѣ:

(1, 4, 7, 5) (2, 6, 8) (3, 9).

По этому обозначенію, очевидно, легко возстановить перестановку [1], такъ какъ здѣсь вполнѣ указано, какой элементъ стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, какой на второмъ и т. д.

Возможны циклы, состоящіе только изъ одного элемента; это имѣетъ мѣсто, если элементъ выражается тѣмъ же числомъ, что и занимаемое имъ мѣсто; напримѣръ, перестановка

1, 3, 5, 4, 2

Разсмотримъ нѣкоторую опредѣленную перестановку

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

и пусть r означаетъ любое число въ ряду 1, 2, . . . , n.

Въ перестановкѣ A на r-омъ мѣстѣ находится элементъ a_r,

„ „ „ „ a_r-омъ „ „ „ a_{a_r}, который мы обозначимъ черезъ a'_r

„ „ „ „ a'_r-омъ „ „ „ $a_{a'_r}$, который мы обозначимъ черезъ a_r'', и т. д.

Мы получимъ такимъ образомъ рядъ:

$$r,\ a_r,\ a'_r,\ a_r'',\ \ldots,$$

въ которомъ каждый элементъ опредѣляется однозначно какъ предыдущимъ, такъ и послѣдующимъ элементомъ.

Такъ какъ число элементовъ не превышаетъ n, а рядъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно, то элементы его будутъ повторяться; первымъ повторится элементъ r [11]).

Если $a_r^{(g-1)} = r$, то мы имѣемъ замкнутый циклъ изъ g членовъ, изображаемый такъ:

$$\mathfrak{C}_1 = (r,\ a_r,\ a'_r,\ \ldots\ a_r^{(g-2)}).$$

Этотъ символъ нужно понимать такъ, что за послѣднимъ элементомъ $a_r^{(g-2)}$ вновь слѣдуетъ первый элементъ r.

Можетъ случиться, что число элементовъ g цикла равно единицѣ; тогда $a_r = r$, и элементъ r находится на одномъ и томъ же мѣстѣ, какъ въ главной перестановкѣ E, такъ и въ перестановкѣ A.

Если за исходный пунктъ возьмемъ не элементъ r, а элементъ a_r или a_r', то получимъ такіе циклы:

$$(a_r,\ a_r',\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r)$$
$$(a_r',\ a_r'',\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r,\ a_r);$$

въ циклахъ изображается такъ:

(1) (2, 3, 5) (4).

Циклъ (1) показываетъ, что 1 стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, циклъ (4) показываетъ, что 4 стоитъ на 4-мъ мѣстѣ.

Въ текстѣ изложены общія основанія этой теоріи.

[11]) Дѣйствительно, такъ какъ каждый элементъ вполнѣ опредѣляетъ собою предыдущій элементъ, то не можетъ повториться какой нибудь изъ слѣдующихъ за r элементовъ безъ того, чтобы раньше не повторился элементъ r.

такіе циклы разсматриваются, какъ не существенно различные.

2. Если $g < n$, то циклъ $\mathfrak{C}_1$ не исчерпываетъ еще всѣхъ элементовъ перестановки. Въ этомъ случаѣ беремъ какой либо элементъ s перестановки, не содержащійся въ циклѣ $\mathfrak{C}_1$, и составляемъ новый циклъ изъ k членовъ:

$$\mathfrak{C}_2 = (s, a_s, a_s', \ . \ . \ . \ , a_s^{(k-2)}).$$

Будемъ продолжать такъ, пока не исчерпаемъ всѣхъ n элементовъ. Такимъ образомъ перестановка A цѣликомъ разлагается на циклы, а эти послѣдніе вполнѣ опредѣляются перестановкой A. Также и обратно: совокупность полученныхъ цикловъ вполнѣ опредѣляетъ собою перестановку A: въ этихъ циклахъ точно указано, какой элементъ находится на томъ или на другомъ, напримѣръ, на s-омъ мѣстѣ. Поэтому перестановка A можетъ быть однозначно выражена при помощи своихъ цикловъ:

$$A = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ . \ . \ . \ , \tag{1}$$

причемъ послѣдовательность, въ какой пишутся циклы $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots$ не имѣетъ значенія.

Одночленные циклы означаютъ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A тѣ же, что и въ E; въ формулѣ (1) этихъ цикловъ не пишутъ, такъ что въ этой формулѣ обозначены только тѣ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A не таковы, какъ въ E.

Главная перестановка E сама состоитъ исключительно изъ одночленныхъ цикловъ.

Двучленные циклы представляютъ собою не что иное, какъ транспозиціи, о которыхъ мы говорили въ § 49.[12]

Примѣръ. Пусть $n = 7$ и

$$A = (5,\ 2,\ 3)(4,\ 1,\ 7,\ 6). \tag{2}$$

Формула (2) выражаетъ, что

на 1-омъ мѣстѣ находится элементъ 7 (онъ слѣдуетъ за 1),
„ 2-омъ „ „ „ 3,
„ 3-ьемъ „ „ „ 5 (онъ слѣдуетъ циклически за 3),
„ 4-омъ „ „ „ 1,
„ 5-омъ „ „ „ 2,
„ 6-омъ „ „ „ 4,
„ 7-омъ „ „ „ 6,

---

[12] Это не совсѣмъ такъ. Въ той системѣ, которой придерживается авторъ, транспозиція есть нѣкоторая субституція (какъ это и опредѣлено въ § 49), а двучленный циклъ есть нѣкоторая перестановка двухъ элементовъ. Двучленный циклъ получается изъ основной перестановки при помощи транспозиціи. Подъ транспозиціей (a, b) слѣдуетъ разумѣть ту транспозицію, посредствомъ которой перестановка (a, b) получается изъ перестановки E.

такъ что перестановка A представится такъ:

$$A = 7,\ 3,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6.$$

3. Составленіе перестановокъ весьма упрощается, если представлять ихъ въ видѣ цикловъ. Даны перестановки

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n$$

$$\text{и}\quad B = b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots,\ b_n.$$

Нужно найти перестановку

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \dots,\ a_{b_n},$$

или циклы, на которые она разлагается. Если r есть произвольный элементъ, то среди цикловъ, на которые разлагается перестановка B, есть такая часть: $(r,\ b_r,\ \dots)$; также въ циклахъ перестановки A найдется часть $(b_r,\ a_{b_r},\ \dots)$, а въ искомыхъ циклахъ перестановки BA есть такая часть $(r,\ a_{b_r},\ \dots)$.

Отсюда слѣдуетъ простое правило: чтобы составить циклы перестановки BA, нужно за любымъ элементомъ r писать тотъ элементъ a_{b_r}, который въ перестановкѣ A слѣдуетъ за элементомъ b_r, т. е. за тѣмъ элементомъ, который въ перестановкѣ B слѣдуетъ за элементомъ r.

4. Мы освоимся съ этимъ правиломъ, разсмотрѣвъ два—три примѣра. Возьмемъ $n = 7$,

$$A = (5,\ 2,\ 3)\ (4,\ 1,\ 7,\ 6)$$

$$\text{и}\ B = (1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 3)\ (5,\ 6).$$

Тогда

$BA = (1,\ 3,\ 7,\ 5,\ 4,\ 6,\ 2)$ 13).

Такимъ образомъ перестановка BA имѣетъ всего одинъ циклъ. Иначе:

$$BA = 3,\ 1,\ 7,\ 6,\ 4,\ 2,\ 5.$$

Соединимъ перестановку BA съ перестановкой $C = (4, 7)$, въ которой элементы 1, 2, 3, 5 и 6 занимаютъ тѣ же мѣста, что и въ главной перестановкѣ. Получимъ:

$$CBA = (1,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2)\ (4,\ 5).$$

---

13) Въ B за 1 слѣдуетъ 2, а въ A за 2 слѣдуетъ 3; поэтому въ BA за 1 слѣдуетъ 3; далѣе въ B за 3 слѣдуетъ 1, а въ A за 1 слѣдуетъ 7; поэтому въ BA за 3 слѣдуетъ 7 и т. д.

5. Пользуясь циклами, весьма легко находить степени перестановки. Для того, чтобы изъ перестановки A получить перестановку A^2, нужно писать циклы перестановки A, постоянно пропуская одинъ элементъ: т. е. за первымъ элементомъ каждаго цикла нужно писать третій, за третьимъ—пятый и т. д.[14])

Аналогично получается перестановка A^3, если въ циклахъ A пропускать черезъ два элемента, и т. д.

Такъ, для разсмотрѣнной выше перестановки A имѣемъ:

$$A^2 = (5,\ 3,\ 2)\ (4,\ 7)\ (1,\ 6)$$

$$A^3 = (5)\ (2)\ (3)\ (4,\ 6,\ 7,\ 1).$$

Мы видимъ, что при возвышеніи перестановки въ степень циклъ ея можетъ разложиться на два цикла или болѣе. Если мы образуемъ перестановку A^{12}, то получимъ основную перестановку, т. е. въ нашемъ примѣрѣ $A^{12} = E$.

6. Если мы будемъ представлять перестановки въ видѣ цикловъ, опуская при этомъ одночленные циклы, то любой циклъ изъ g членовъ самъ по себѣ представитъ нѣкоторую опредѣленную перестановку. Напримѣръ, при $n = 7$

$$(5,\ 3,\ 2) = 1,\ 5,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 7.$$

При такомъ условіи два или нѣсколько рядомъ написанныхъ цикла, не имѣющихъ ни одного общаго элемента, представляютъ результатъ состав-

---

[14]) Если намъ нужно составить, скажемъ, 2-ую степень цикла

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5),$$

то это значитъ составить перестановку

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5)\ (1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5).$$

Въ первомъ циклѣ за 1 слѣдуетъ 3, а во второмъ за 3 - 4; въ результатѣ за 1 слѣдуетъ 4. Въ первомъ циклѣ за 4 слѣдуетъ 2, а во второмъ за 2: — 5; въ результатѣ за 4 слѣдуетъ 5 и т д. Такимъ образомъ получимъ

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5)^2 = (1,\ 4,\ 5,\ 3,\ 2).$$

Вообще указанное въ текстѣ правило слѣдуетъ изъ того, что изложено въ пунктѣ 3; нужно только принять во вниманіе, что въ данномъ случаѣ $B = A$, такъ что $b_r = a_r$, и потому циклъ перестановки A^2 начнется такъ $(r,\ a_{a_r}\ .\ .\ .\ .)$.

ленія перестановокъ, представленныхъ отдѣльными циклами[15]).

Если мы соединимъ циклъ $(1, 2, 3, \ldots, g-1)$ съ транспозиціей $(g, g-1)$, то получимъ:

$$(g, g-1)\ (1, 2, 3, \ldots, g-1) = (1, 2, 3, \ldots, g-1, g).$$

Отсюда слѣдуетъ, что циклъ, содержащій g членовъ, можетъ быть разложенъ на $g-1$ транспозицій:

$$(1, 2, 3, \ldots g) = (g, g-1)\ (g-1, g-2) \ldots (2,1).$$

Правую часть этого равенства нужно понимать какъ перестановку, которая получится въ результатѣ составленія перестановокъ, представленныхъ отдѣльными или двучленными циклами.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что всякій циклъ представляетъ собою **четную** или **нечетную** перестановку, смотря по тому, содержитъ ли онъ нечетное или четное число членовъ.

Поэтому данная перестановка представляетъ собою четную или нечетную въ зависимости отъ того, есть ли среди цикловъ, на которые разлагается данная перестановка, четное или нечетное число такихъ, которые содержатъ четное число членовъ.

§ 52. Группы перестановокъ.

1. Въ § 50 мы вслѣдъ за составленіемъ перестановокъ разсмотрѣли, какой смыслъ имѣютъ степени A^2, A^3, . . . какой-либо перестановки A. Такъ какъ изъ n элементовъ можно получить лишь конечное число перестановокъ, то въ ряду

$$A,\ A^2,\ A^3,\ A^4, \ldots$$

какая нибудь перестановка раньше или позже должна повториться.

Если перестановка, представленная степенью A^k, повторится вновь въ видѣ степени $A^{k+\alpha}$, то изъ равенства

$$A^k = A^{k+\alpha}$$

слѣдуетъ

$$A^\alpha = E.$$

Итакъ, каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ нѣкоторый опредѣленный наименьшій положительный показатель α, при

---

[15]) Напримѣръ, перестановку $C = 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4 = (5, 3, 2)\ (4, 7)$ можно разсматривать, какъ результатъ составленія AB (или BA) двухъ перестановокъ: $A = (5, 3, 2)$ и $B = (4,7)$.

которомъ A^{α} совпадаетъ съ главной перестановкой.

Этотъ наименьшій положительный показатель называется **порядкомъ** перестановки A. Рядъ

$$E,\ A,\ A^2,\ A^3,\ .\ .\ .\ ,\ A^{\alpha-1}$$

содержитъ лишь отличныя другъ отъ друга перестановки; рядъ этотъ называется **періодомъ** перестановки A, такъ какъ изъ этого, именно, періода, повторяюшагося безконечное число разъ, составляется рядъ послѣдовательныхъ степеней перестановки A.

Если возвысить перестановку A въ степень, показатель которой есть число, кратное α, то всегда получимъ основную перестановку E.

2. Система $\mathfrak{G}$ перестановокъ, выбранныхъ изъ совокупности всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ,

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ .\ .\ .\ A_g \qquad (\mathfrak{G})$$

называется группой, если она удовлетворяетъ слѣдующему условію.

Если A_h и A_k представляютъ собою двѣ различныя или одну и ту же перестановку изъ системы $\mathfrak{G}$, то составленная изъ нихъ перестановка

$$A_h A_k = A_l$$

также заключается въ числѣ перестановокъ системы $\mathfrak{G}$.

Порядкомъ g группы называется число перестановокъ, изъ которыхъ состоитъ система $\mathfrak{G}$.

Согласно этому опредѣленію, совокупность всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу порядка $n!$

Однако, есть группы съ меньшимъ числомъ членовъ. Разысканіе и изслѣдованіе такихъ группъ составляетъ фундаментальную задачу алгебры.

Такъ, напримѣръ, періодъ перестановки A есть группа степени α. Дѣйствительно, какія бы мы ни соединяли степени A, въ результатѣ всегда получимъ нѣкоторую степень этой же перестановки.

Замѣтимъ еще, что совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу степени $\frac{1}{2} n!$[16])

---

[16]) Такъ какъ каждая четная перестановка можетъ быть составлена изъ четнаго числа транспозицій, то перестановка, составленная изъ двухъ четныхъ перестановокъ, также представляетъ собой четную перестановку. Если поэтому S есть совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ, B и A двѣ принадлежащія ей перестановки, то въ ту же совокупность войдетъ и перестановка BA.

3. Если въ группѣ $\mathfrak{G}$ встрѣчается перестановка A (порядка α), то по опредѣленію группы послѣдняя содержитъ всѣ степени перестановки A съ положительными показателями, а слѣдовательно, и степень $A^\alpha = E$.

Итакъ, каждая группа заключаетъ въ себѣ главную перестановку E; эта послѣдняя сама по себѣ образуетъ группу порядка 1.

По опредѣленію степеней съ отрицательными показателями, имѣемъ:

$$A^{-k}A^k = E.$$

Съ другой стороны, изъ $A^\alpha = E$ слѣдуетъ, что $A^{-k} = A^{\alpha-k}$; отсюда заключаемъ: если группа содержитъ перестановку A, то она непремѣнно содержитъ и A^{-k}, т. е. перестановку, обратную перестановкѣ A^k.

4. Если какая-либо группа $\mathfrak{G}$ порядка g заключаетъ въ себѣ всѣ элементы нѣкоторой другой группы $\mathfrak{H}$ порядка h, то число h есть дѣлитель числа g.

Это важное предложеніе доказывается слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ перестановки группы $\mathfrak{H}$ черезъ

$$B_1, B_2, \ldots B_h. \tag{1}$$

По условію, всѣ эти перестановки заключаются въ группѣ $\mathfrak{G}$; если этими элементами группа $\mathfrak{G}$ не исчерпывается, то назовемъ черезъ A перестановку, входящую въ число элементовъ группы $\mathfrak{G}$, но не содержащуюся въ группѣ $\mathfrak{H}$. Соединяя перестановку A съ перестановками (1), получимъ рядъ перестановокъ

$$AB_1, AB_2, \ldots AB_h. \tag{2}$$

Эти h перестановокъ всѣ входятъ въ составъ группы $\mathfrak{G}$ и, кромѣ того, всѣ онѣ отличны другъ отъ друга и отъ h перестановокъ (1). Въ самомъ дѣлѣ, если бы, напримѣръ, $AB_r = AB_s$, то мы имѣли бы (согласно § 50, п. 11), $B_r = B_s$, что невозможно; если бы $AB_r = B_s$, то $A = B_s B_r^{-1}$, т. е. перестановка A заключалась бы въ группѣ $\mathfrak{H}$, что противорѣчитъ нашему условію.

Въ силу этихъ соображеній перестановки (1) и (2) составляютъ вмѣстѣ $2h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Если ими еще не исчерпывается группа $\mathfrak{G}$, то, выбравъ изъ этой группы элементъ A', котораго нѣтъ въ числѣ перестановокъ (1) и (2), составимъ рядъ:

$$A' B_1, A'B_2, \ldots A'B_h. \tag{3}$$

Всѣ эти перестановки во первыхъ содержатся въ группѣ $\mathfrak{G}$, во вторыхъ всѣ отличны другъ отъ друга и отъ перестановокъ (1) и (2). Дѣйствительно, если бы $A'B_r = AB_s$, то отсюда слѣдовало бы : $A' = AB_sB_r^{-1}$, т. е., въ силу того, что перестановка $B_s B_r^{-1}$ есть одна изъ перестановокъ (1), A', вопреки условію, оказалась бы въ числѣ перестановокъ (2). Такимъ образомъ системы (1), (2) и (3) представляютъ собою вмѣстѣ $3h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Такъ какъ число перестановокъ группы $\mathfrak{G}$ конечно, то, продолжая то же разсужденіе мы исчерпаемъ всѣ элементы этой группы. Если послѣдній рядъ, который при этомъ получится, будетъ

$$A^{(k-2)}B_1,\ A^{(k-2)}B_2,\ \ldots,\ A^{(k-2)}B_h, \qquad (4)$$

то имѣемъ:

$$g = hk,$$

и такимъ образомъ предложеніе наше доказано.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

Число $n!$ дѣлится нацѣло на порядокъ любой группы перестановокъ и на порядокъ любой перестановки.

5. Нетрудно для любого числа n составить нѣкоторыя простыя группы невысокаго порядка, напримѣръ, періоды отдѣльныхъ перестановокъ. Для алгебры гораздо большее значеніе имѣетъ полученіе группъ болѣе высокихъ порядковъ; мы, однако, еще очень далеки отъ полнаго рѣшенія этой въ высокой степени важной задачи. Сравнительно нетрудно проникнуть въ строеніе группъ для тѣхъ простѣйшихъ случаевъ, когда $n = 3$ и $n = 4$.

Для обозначенія перестановокъ мы будемъ обыкновенно выражать ихъ въ циклахъ, при чемъ для простоты будемъ обозначать главную перестановку E символомъ (1) въ виду той роли, которую она играетъ при составленіи перестановокъ.

Для $n=3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ.

$$(1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 3) \text{ и } (1,\ 3,\ 2).$$

Здѣсь мы имѣемъ группу четныхъ перестановокъ (1), (1, 2, 3) и (1, 3, 2) порядка 3, которая въ то же время представляетъ собою періодъ перестановки (1, 2, 3) или (1, 3, 2); далѣе здѣсь есть еще три группы второго порядка, именно періоды перестановокъ (1, 2,), (1, 3) и (2, 3). Другихъ группъ здѣсь нѣтъ.

6. При $n = 4$ мы имѣемъ 24 перестановки, которыя можно слѣдующимъ образомъ изобразить посредствомъ ихъ цикловъ:

(1) Главная перестановка;

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)	двучленные циклы,
(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)	по два двучленныхъ цикла,
(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3) (1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2)	трехчленные циклы,
(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4) (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)	четырехчленные циклы.

Такимъ образомъ исчерпаны всѣ 24 перестановки изъ 4 элементовъ.

Группа четныхъ перестановокъ содержитъ слѣдующія 12 перестановокъ:

$$\begin{gathered}(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),\\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (1,3,4),\ (1,4,3),\\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (1,2,3),\ (1,3,2).\end{gathered}$$

Въ ней содержится слѣдующая группа четвертаго порядка:

$$(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,4).$$

Послѣдняя группа имѣетъ особенно важное значеніе для рѣшенія уравненія четвертой степени; аналогичное значеніе имѣютъ три группы 8-го порядка, которыя входятъ въ составъ группы 24-го порядка, состоящей изъ всѣхъ перестановокъ. Одна изъ этихъ трехъ группъ 8-го порядка есть:

$$\begin{gathered}(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),\\ (1,2),\ \ (3,4),\ \ (1,4,2,3),\ \ (1,3,2,4).\end{gathered}$$

Прочія двѣ группы получаются изъ этой, если замѣнимъ другъ другомъ элементы 1 и 3 или элементы 1 и 4.

§ 53. Сочетанія безъ повтореній.

1. Данъ комплексъ N изъ n элементовъ. Сколькими различными способами можно отобрать m элементовъ этого комплекса? Другими словами, сколько различныхъ комплексовъ M, содержащихъ по m элементовъ каждый, можно получить изъ нѣкотораго комплекса содержащаго всего n элементовъ.

Комплексы M называются сочетаніями элементовъ комплекса N по m; чтобы указать на то, что одинъ и тотъ же элементъ комплекса N не можетъ дважды встрѣчаться въ одномъ и томъ же комплексѣ M, комплексы M называютъ также сочетаніями безъ повтореній.

Опредѣлимъ число сочетаній безъ повтореній изъ n элементовъ по m въ каждомъ. Обозначимъ это число символомъ $B_m^{(n)}$. Вопросъ, который мы поставили, имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда число m не превышаетъ n. Если $n = m$, то можно получить только одинъ комплексъ M, который окажется тождественнымъ съ комплексомъ N; слѣдовательно,

$$B_n^{(n)} = 1. \tag{1}$$

Легко также рѣшить нашу задачу и въ томъ случаѣ, когда $m = 1$.

Дѣйствительно, тогда искомыя сочетанія сведутся къ элементамъ комплекса N, взятымъ порознь, а потому

$$B_1^{(n)} = n. \qquad (2)$$

Предположимъ далѣе, что $n = 3$; изъ элементовъ a, b и c мы получимъ слѣдующія сочетанія:

$$\begin{array}{llllr} m = 1: & a, & b, & c; & B_1^{(3)} = 3, \\ m = 2: & bc, & ca, & ab; & B_2^{(3)} = 3, \\ m = 3: & & abc; & & B_3^{(3)} = 1. \end{array}$$

Подобнымъ образомъ нетрудно найти непосредственно числа $B_m^{(n)}$ для *ближайшихъ* случаевъ, когда $n = 4$, 5, 6. Займемся теперь рѣшеніемъ нашей задачи въ общемъ видѣ.

Составимъ всѣ перестановки комплекса N, и отберемъ отъ каждой перестановки m первыхъ ея элементовъ; мы тогда получимъ всѣ безъ исключенія комплексы M, но каждый изъ нихъ при этомъ встрѣчается не одинъ разъ, а нѣсколько разъ. Разсмотримъ, сколько разъ получается при этомъ способѣ одинъ и тотъ же комплексъ M. Обозначимъ одну изъ перестановокъ комплекса N черезъ

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m \,|\, a_{m+1},\ a_{m+2}, \cdots a_n.$$

Черта указываетъ на то, что перестановка A раздѣлена на двѣ части A_1 и A_2:

$$A_1 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\quad A_2 = a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots,\ a_n.$$

Образуемъ всѣ перестановки A и отдѣлимъ отъ каждой элементы A_1; эти послѣдніе представятъ собою искомые комплексы M.

При этомъ мы будемъ получать отличные другъ отъ друга комплексы M всякій разъ, когда для полученія перестановки A нѣкоторые элементы комплекса A_1 замѣняются элементами комплекса A_2. Изъ тѣхъ же перестановокъ A, которыя образованы перемѣщеніями элементовъ одного и того же комплекса A_1 или A_2, мы будемъ получать одинъ и тотъ же комплексъ M. *Поэтому каждый комплексъ M повторится столько разъ, сколькими* способами можно скомбинировать какую либо перестановку элементовъ A_1 съ нѣкоторой перестановкой элементовъ A_2, т. е. всего $m!\,(n-m)!$ разъ. Такъ какъ число перестановокъ A равно $n!$, а число комплексовъ M равно $B_m^{(n)}$, то имѣемъ:

$$m!\,(n-m)\cdot B_m^{(n)} = n!$$

слѣдовательно,

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,.\,^{*)} \qquad (3)$$

Пользуясь формулой § 48 (3), это выраженіе можно представить еще въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$B_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\;\ldots\;(m+1)}{1.2.3\;\ldots\;(n-m)} = $$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\;\ldots\;(n-m+1)}{1.2.3\;\ldots\;m}\,. \qquad (4)$$

Хотя числа $B_m^{(n)}$ представлены нами въ видѣ дробей, но по существу это числа цѣлыя, т. е. въ дробяхъ (3) и (4) числитель дѣлится на знаменателя. Поэтому, принимая во вниманіе вторую дробь въ формулѣ (4), мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе.

Произведеніе m любыхъ послѣдовательныхъ чиселъ натуральнаго ряда дѣлится нацѣло на первыя m чиселъ этого ряда.

Формула (3) показываетъ, что число $B_m^{(n)}$ остается безъ перемѣны, если замѣнить число m числомъ $n-m$, т. е.

$$B_m^{(n)} = B_{n-m}^{(n)}\,. \qquad (5)$$

При выводѣ формулъ (3) и (5) мы молчаливо предполагали, что $m < n$. Если желаемъ, чтобы эти формулы были справедливы и для случая $n = m$, то нужно принять, какъ опредѣленія, слѣдующія равенства:

$$0! = 1, \quad B_0^{(n)} = 1. \qquad (6)$$

При такомъ условіи формула (3) справедлива также при $m = 0$.

2. Мы теперь покажемъ другой способъ нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$; при этомъ мы будемъ имѣть случай познакомиться съ нѣкоторыми новыми свойствами этихъ чиселъ.

Присоединимъ къ элементамъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ комплекса N еще одинъ элементъ a_{n+1}; тогда получимъ новый комплексъ N', состоящій изъ $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1,\; a_2,\; a_3,\; \ldots,\; a_n,\; a_{n+1}.$$

Сочетанія M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ можно получить

---

*) Числа $B_m^{(n)}$ изображаются еще знакомъ $\binom{n}{m}$ или знакомъ n_m. Символъ $B_m^{(n)}$ напоминаетъ названіе „биноміальный коэффиціентъ“, которое также присваивается числамъ $B_m^{(n)}$. Но объ этомъ рѣчь впереди.

слѣдующимъ образомъ: выписываемъ сперва всѣ сочетанія M комплекса N, и затѣмъ присоединяемъ къ нимъ тѣ сочетанія, которыя получатся, если къ каждому сочетанію комплекса N по $m-1$ элементовъ присоединимъ новый элементъ a_{n+1}. Въ силу этихъ соображеній мы получаемъ рекуррентную формулу (§ 4):

$$B_m^{(n+1)} = B_m^{(n)} + B_{m-1}^{(n)}\ ^{*)}. \qquad (7)$$

Пользуясь этой формулой, а также формулами $B_0^{(n)} = 1$ и $B_n^{(n)} = 1$, мы можемъ опредѣлить числа $B_m^{(n+1)}$ для любого $m \leqslant n+1$, если только найдены числа $B_m^{(n)}$ для всякаго $m \leqslant n$. Такимъ образомъ числа $B_m^{(n)}$ всѣ однозначно опредѣляются равенствомъ (7) и двумя частными случаями:

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_n^{(n)} = 1. \qquad (8)$$

Мы можемъ теперь провѣрить справедливость формулъ (7) и (8): именно, значенія, получаемыя изъ равенствъ (3), превращаютъ ихъ въ тождества.

Равенство (7) даетъ намъ еще непосредственное доказательство того, что $B_m^{(n)}$ суть цѣлыя числа: для наименьшихъ значеній числа n мы убѣдимся въ этомъ непосредственнымъ вычисленіемъ, и затѣмъ, пользуясь формулой (7), мы докажемъ по способу совершенной индукціи справедливость нашего предложенія при любомъ значеніи n.

Формула (7) сравнительно съ общей формулой (3) болѣе удобна для послѣдовательнаго нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$: числа ряда $B_m^{(n+1)}$ получатся изъ чиселъ ряда $B_m^{(n)}$, если складывать каждыя два послѣдовательныхъ числа этого ряда. Такъ, напримѣръ, для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ имѣемъ:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

3. Найденные результаты мы примѣнимъ къ рѣшенію слѣдующей

---

*) Эта формула получаетъ смыслъ и при $m=0$ и даже при любомъ отрицательномъ m, если только условиться при отрицательномъ m считать число $B_m^{(n)}$ равнымъ нулю. Точно также, если примемъ $B_m^{(n)} = 0$ при $m > n$, то наша формула будетъ справедлива при любой парѣ цѣлыхъ значеній чиселъ m и n.

геометрической задачи.

Дана система изъ n точекъ N и число $m<n$; сколько m-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ?

По § 48 каждая система M, состоящая изъ m точекъ нашего комплекса, дастъ $\frac{1}{2}(m-1)!$ различныхъ m-сторонниковъ; а такъ какъ системъ M имѣется всего $B_m^{(n)}$, то число всѣхъ m-сторонниковъ, которые можно получить изъ системы точекъ N, выразится такъ:

$$\frac{1}{2}(m-1)!B_m^{(n)}=\frac{1}{2}\frac{n!(m-1)!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{2m}.$$

§ 54. Сочетанія съ повтореніями.

Поставимъ теперь шире вопросъ, которымъ мы занимались въ предыдущемъ параграфѣ.

1. Данъ комплексъ N, содержащій n элементовъ:

$$N=a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

изъ этихъ элементовъ составлены комплексы M по m элементовъ въ каждомъ, при чемъ одинъ и тотъ же элементъ можетъ встрѣчаться нѣсколько разъ въ одномъ и томъ же комплексѣ M.

Эти комплексы M называются сочетаніями съ повтореніями изъ n элементовъ по m въ каждомъ.—Требуется опредѣлить число этихъ сочетаній, которое обозначимъ черезъ $C_m^{(n)}$.

Замѣтимъ, что здѣсь намъ нѣтъ надобности ограничивать себя условіемъ, что $m<n$; m и n суть любыя цѣлыя положительныя числа.

Если $m=1$, то намъ для составленія комплекса M придется брать каждый элементъ комплекса N порознь; слѣдовательно,

$$C_1^{(n)}=n. \qquad (1)$$

Если же $n=1$, то всего получимъ только одинъ комплексъ M, какъ результатъ m-кратнаго повторенія единственнаго элемента даннаго комплекса N, т. е.

$$C_m^{(1)}=1. \qquad (2)$$

Пусть далѣе комплексъ N содержитъ два элемента a и b, т. е. $n=2$, а m есть произвольное число; условимся для краткости изображать k-кратное повтореніе одного и того же элемента въ видѣ степени a^k; мы получимъ тогда слѣдующія сочетанія:

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ \ldots,\ ab^{m-1},\ b^m,$$

т. е.

$$C_m^{(2)} = m + 1. \qquad (3)$$

Непосредственное опредѣленіе числа $C_m^{(n)}$, аналогичное изложенному въ § 53, 1, сопряжено здѣсь съ большими трудностями; мы легче достигнемъ цѣли, пользуясь рекуррентнымъ методомъ, къ которому мы прибѣгли въ § 53, 2.

2. Присоединимъ къ группѣ N еще одинъ элементъ a_{n+1}, т. е. составимъ изъ комплекса N новый комплексъ N', содержащій $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}.$$

Чтобы составить сочетанія M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ, выписываемъ сначала всѣ комплексы M, число которыхъ равно $C_m^{(n)}$; этимъ самымъ будутъ исчерпаны всѣ тѣ комплексы M', которые не содержатъ элемента a_{n+1}. Чтобы опредѣлить число прочихъ комплексовъ M, содержащихъ одинъ или нѣсколько разъ элементъ a_{n+1}, отнимаемъ отъ каждаго такого комплекса элементъ a_{n+1}; тогда мы видимъ, что интересующее насъ число комплексовъ M равно числу сочетаній съ повтореніями изъ $n+1$ элементовъ по $m-1$ въ каждомъ, т. е. равно числу $C_{m-1}^{(n+1)}$. Такимъ образомъ получаемъ соотношеніе:

$$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}. \qquad (4)$$

Замѣняя въ формулѣ (4) число m соотвѣтственно числами $m-1$, $m-2, \ldots, 2$, получимъ равенства:

$$\begin{aligned} C_m^{(n+1)} &= C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}, \\ C_{m-1}^{(n+1)} &= C_{m-2}^{(n+1)} + C_{m-1}^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_2^{(n+1)} &= C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)}. \end{aligned}$$

Сложивъ почленно эти равенства и сдѣлавъ сокращеніе, получимъ:

$$C_m^{(n+1)} - C_1^{(n+1)} = C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \ldots + C_m^{(n)}. \qquad (5)$$

Такъ какъ $C_1^{(n+1)} = n+1$ и $C_1^{(n)} = n$ [см. формулу (1)], то формулу (5) можно представить въ такомъ видѣ:

$$C_m^{(n+1)} = 1 + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \ldots + C_m^{(n)}. \qquad (6)$$

Слѣдовательно, зная для одного числа n всѣ $C_m^{(n)}$, можно опредѣлить помощью формулы (6) всѣ числа $C_m^{(n+1)}$. По формулѣ (2) всѣ числа $C_m^{(1)}$ равны единицѣ; такимъ образомъ числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются однозначно формулами (1), (2) и (4).

Легко убѣдиться, что числа $C_m^{(n)}$ удовлетворяютъ тѣмъ же соотношеніямъ, что и числа $B_m^{(m+n-1)}$, т. е. что

$$C_m^{(n)} = B_m^{(m+n-1)}. \qquad (7)$$

Дѣйствительно, сдѣлавъ соотвѣтственныя подстановки въ формулахъ (1), (2) и (4), получимъ:

$$B_1^{(n)} = n, \quad B_m^{(m)} = 1, \quad B_m^{(m+n)} = B_{m-1}^{(m+n-1)} + B_m^{(m+n-1)},$$ 17)

каковыя соотношенія дѣйствительно имѣютъ мѣсто, какъ это слѣдуетъ изъ формулъ § 53, (1), (2) и (7).

По формулѣ § 53 (3) имѣетъ поэтому:

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}, \qquad (8)$$

или же

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\,2\ldots(n-1)} = \\ = \frac{n(n+1)\ldots(n+m+1)}{1\,.\,2\ldots m}. \qquad (9)$$

---

17) Изъ этихъ соотношеній можно сдѣлать слѣдующій выводъ: если мы будемъ подъ $C_m^{(n)}$ разумѣть число $B_m^{(m+n-1)}$, то соотношенія (1), (2) и (4) будутъ удовлетворены; а такъ какъ этими соотношеніями числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются вполнѣ, то отсюда вытекаетъ равенство (7).

ГЛАВА X.

Различныя приложенія.

§ 55. Биномъ Ньютона.

1. Сочетанія изъ n элементовъ безъ повтореній находятъ себѣ примѣненіе, когда приходится умножать другъ на друга n двучленныхъ множителей.

Даны произвольныя числа x, a_1, a_2, . . . a_n; требуется составить произведеніе изъ n множителей:

$$F_n = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n). \qquad (1)$$

Для $n=2$ и $n=3$ получимъ:

$$F_2 = x^2 + x(a_1+a_2) + a_1 a_2,$$
$$F_3 = x^3 + x^2(a_1+a_2+a_3) + x(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) + a_1a_2a_3.$$

Методомъ математической индукціи докажемъ, что вообще

$$F_n = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n. \qquad (2)$$

Въ этой формулѣ коэффиціентъ A_1 означаетъ сумму чиселъ a_1, a_2, . . . , a_n, A_2 означаетъ сумму ихъ произведеній, взятыхъ по два, коэффиціентъ A_3—сумму ихъ произведеній по три и т. д.; наконецъ, A_n означаетъ произведеніе всѣхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Помощью знака Σ (сумма) значенія коэффиціентовъ A выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$A_1 = \Sigma a_1,\ A_2 = \Sigma a_1 a_2,\ A_3 = \Sigma a_1a_2a_3, \ldots,$$
$$A_n = a_1a_2 \ldots a_n. \qquad (3)$$

Если буквы a_1, a_2, . . . , a_n изображаютъ нѣкоторыя опредѣленныя числа, а x будемъ разсматривать, какъ знакъ, выражающій всякое произвольное число, то выраженіе F_n называется тогда **цѣлой функціей** n-**ой** степени отъ x. Числа A_1, A_2, A_3, . . . A_n называются коэффиціентами этой функціи.

2. Въ выраженіяхъ A_1, A_2, . . . A_n отдѣльныя слагаемыя представляютъ собою не что иное, какъ сочетанія безъ повтореній изъ n элементовъ a_1, a_2, . . . a_n соотвѣтственно по одному, по два, по три и т. д. Поэтому число членовъ каждой суммы соотвѣтственно равно:

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots\ B_n^{(n)}.$$

Особенный интересъ представляетъ тотъ случай, когда числа a_1, a_2, . . . a_n равны одному и тому же числу, напримѣръ, a. Тогда имѣемъ:

$$A_1 = B_1^{(n)}a,\ A_2 = B_2^{(n)}a^2,\ A_3 = B_3^{(n)}a^3,\ \ldots,\ A_n = a^n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ равенствъ 1 и 2 вытекаетъ формула:

$$(x+a)^n = x^n + B_1^{(n)}x^{n-1}a + B_2^{(n)}x^{n-2}a^2 + \ldots + B_{n-1}^{(n)}xa^{n-1} + a^n. \quad (4)$$

Формула (4), извѣстная подъ названіемъ строки Ньютона, употребляется весьма часто. При ея помощи можно расположить n-ую степень бинома $(x+a)$ по степенямъ чиселъ x и a. Въ формулѣ (4) многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ x и по возрастающимъ степенямъ a.

Формулу (4) можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}a^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}a^3 + \ldots \quad (5)$$

Для простѣйшихъ случаевъ, когда $n=2$, 3, 4, 5, получимъ:

$$\begin{aligned} (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2; \\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3; \\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4; \\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставивъ въ формулу (5) $x=1$, получимъ:

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3 + \ldots + a^n. \quad (7)$$

Обратно, изъ этой формулы легко получить общую, такъ какъ $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$.

Теперь ясно, почему числа

$$B_0^{(n)},\ B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots\ B_{n-1}^{(n)},\ B_n^{(n)}$$

называются биноміальными коэффиціентами*).

3. Если n есть первоначальное число, то биноміальные коэффиціенты всѣ, за исключеніемъ перваго и послѣдняго, т. е.

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)}$$

дѣлятся безъ остатка на n; дѣйствительно, изъ § 53 (3) слѣдуетъ:

$$B_m^{(n)} m!(n-m)! = n! \tag{8}$$

Если при этомъ m больше нуля и меньше n, то числа $m!$ и $(n-m)!$ не дѣлятся на число n, тогда какъ число $n!$ кратно n. Слѣдовательно, множитель $B_m^{(n)}$ долженъ дѣлиться безъ остатка на n (см. § 16, п. 1). Принимая во вниманіе формулу (7), мы отсюда заключаемъ, что число

$$[(a+1)^n-(a+1)]-(a^n-a) \tag{9}$$

дѣлится нацѣло на число n, если только a есть цѣлое число[1]. Если положить $a=1$, то отсюда слѣдуетъ, что число 2^n-2 дѣлится на число n; если поэтому считать доказаннымъ, что a^n-a при нѣкоторомъ значеніи числа a дѣлится на число n, то число $(a+1)^n-(a+1)$, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (9), также дѣлится на n.

Такимъ образомъ мы доказали по способу математической индукціи такъ называемую теорему Фермата: **)

При любомъ цѣломъ значеніи a число a^n-a дѣлится безъ остатка на число n, если только n есть число первоначальное.

---

*) Свѣдѣнія о биноміальныхъ коэффиціентахъ находимъ впервые у Михаила Штифеля (см. стр. 126), Arithmetica integra, 1544). См. Cantor, Gesch. d. Mathem, Bd. 2, S. 430.

[1] Разлагая $(a+1)^n$ по строкѣ Ньютона, мы получимъ выраженіе, въ которомъ первый членъ есть a^n, а послѣдній есть 1; всѣ остальные члены, какъ мы видѣли, дѣлятся на n. Отсюда слѣдуетъ, что при цѣлыхъ значеніяхъ a

$$(a+1)^n-a^n-1$$

дѣлится на n Это же выраженіе тождественно съ выраженіемъ (9).

**) Fermat, одинъ изъ величайшихъ изслѣдователей по теоріи чиселъ, жилъ въ Тулузѣ (отъ 1601 до 1665 г.); по профессіи онъ былъ собственно не математикъ, а юристъ. На поляхъ переведеннаго имъ Діофантова сочиненія онъ оставилъ цѣлый рядъ глубокихъ замѣчаній и предложеній изъ области ариѳметики; нѣкоторыхъ изъ этихъ предложеній и по сію пору не удалось еще доказать.

4. Перемножимъ почленно слѣдующія два равенства:

$$(1+a)^m = B_0^{(m)} + B_1^{(m)}a + B_2^{(m)}a^2 + \dots + B_m^{(m)}a^m,$$

$$(1+a)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)}a + B_2^{(n)}a^2 + \dots + B_n^{(n)}a^n,$$

гдѣ m и n означаютъ произвольныя цѣлыя числа. Получимъ:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m)}B_0^{(n)} + (B_0^{(m)}B_1^{(n)} + B_1^{(m)}B_0^{(n)})\,a$$
$$+ (B_0^{(m)}B_2^{(n)} + B_1^{(m)}B_1^{(n)} + B_2^{(m)}B_0^{(n)})\,a^2 + \dots.$$

Съ другой стороны, по правилу бинома имѣемъ также:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m+n)} + B_1^{(m+n)}a + B_2^{(m+n)}a^2 + \dots$$

Изъ сравненія правыхъ частей послѣднихъ двухъ равенствъ выводимъ слѣдующія соотношенія между биноміальными коэффиціентами:

$$B_0^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_0^{(n)},\quad B_1^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_1^{(n)} + B_1^{(m)}B_0^{(n)},\ \dots$$

и, вообще, при любомъ значеніи числа ν имѣетъ мѣсто равенство:

$$B_\nu^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_\nu^{(n)} + B_1^{(m)}B_{\nu-1}^{(n)} + B_2^{(m)}B_{\nu-2}^{(n)} + \dots + B_\nu^{(m)}B_0^{(n)}. \quad (10)$$

(Число $B_\nu^{(n)}$ обращается въ нуль, если $\nu > n$).

Равенствомъ (10) мы воспользуемся впослѣдствіи при доказательствѣ одного весьма важнаго предложенія.

§ 56. Ариѳметическіе ряды.

1. Расположенный въ опредѣленномъ порядкѣ рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее отличается отъ своего предыдущаго на одно и то же число, называется *ариѳметической прогрессіей* или *ариѳметическимъ рядомъ* (§ 35, 1).

Ариѳметическую прогрессію можно опредѣлить еще, какъ рядъ чиселъ, въ которомъ *разность двухъ какихъ либо послѣдовательныхъ чиселъ есть величина постоянная.* Эта постоянная разность называется *разностью ариѳметической прогрессіи.*

Рядъ натуральныхъ чиселъ образуетъ ариѳметическую прогрессію съ разностью 1; рядъ четныхъ чиселъ и рядъ нечетныхъ чиселъ представляютъ собой каждый въ отдѣльности ариѳметическую прогрессію съ разностью 2; рядъ чиселъ 1, 4, 7, 10, 13, . . . , или 2, 5, 8, 11, 14, . . . , или 0, 3, 6, 9, 12, . . . составляютъ каждый ариѳметическую прогрессію съ разностью 3 и т. д. Члены ариѳметической прогрессіи могутъ быть дробными и отрицательными числами, точно также и разность не должна быть непремѣнно цѣлымъ числомъ. Если разность прогрессіи есть число положительное, прогрессія называется возрастающей, если разность—число отрицательное, то прогрессія называется убывающей.

Въ общемъ видѣ ариѳметическая прогрессія можетъ быть представлена такъ:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b, \ldots$$

Число b есть разность прогрессіи, число a называется начальнымъ членомъ прогрессіи; значенія чиселъ a и b, конечно, произвольны.

Выраженіе $a+bx$ называется общимъ членомъ нашей прогрессіи, если x обозначаетъ число, послѣдовательно принимающее значенія: 0, 1, 2, 3, . . .

2. Весьма часто приходится рѣшать такую задачу: опредѣлить сумму n послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи. Рѣшимъ этотъ вопросъ въ общемъ видѣ посредствомъ формулы, выводомъ которой мы сейчасъ займемся. Положимъ, что нужно опредѣлить сумму S первыхъ n членовъ ариѳметической прогрессіи:

$$S=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots+[a+(n-1)].b. \quad (1)$$

Отсюда

$$S=na+[1+2+3+\ldots+(n-1)]b;$$

такимъ образомъ наша задача свелась къ рѣшенію частнаго ея случая —къ нахожденію суммы первыхъ $(n-1)$ натуральныхъ чиселъ:

$$s=1+2+3+\ .\ .\ .\ +(n-1). \qquad (2)$$

Величину этой послѣдней суммы легко опредѣлить, если примемъ во вниманіе, что каждыя два числа этой суммы, равно отстоящія отъ начала и конца ея, составляютъ вмѣстѣ одно и то же число n: таковы, напримѣръ, числа 1 и $n-1$, 2 и $n-2$, 3 и $n-3$ и т. д. Такимъ образомъ, если число $n-1$ четное, то члены суммы s распадаются на $\frac{1}{2}(n-1)$ паръ, при чемъ сумма чиселъ каждой пары равна n, такъ что

$$s=\frac{(n-1)n}{2}. \qquad (3)$$

Если же число $n-1$ есть число нечетное, то сумма s состоитъ изъ $\frac{1}{2}(n-2)$ такихъ паръ и изолированнаго средняго члена, численная величина котораго, какъ нетрудно сообразить, равна $\frac{1}{2}n$, такъ что

$$s=\frac{(n-2)n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2};$$

такимъ образомъ формула (3) остается справедливой и въ этомъ случаѣ.

Теперь, пользуясь формулой (1), легко опредѣлить и сумму S:

$$S=n\left(a+\frac{n-1}{2}b\right). \qquad (4)$$

Какъ примѣръ приложенія этой общей формулы, вычислимъ суммы n первыхъ нечетныхъ чиселъ; для этого въ формулу (4) подставимъ $a=1$, $b=2$; тогда найдемъ:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

3. Рѣшимъ слѣдующую задачу: шары расположены рядами въ видѣ треугольника такъ, что первый рядъ составляетъ одинъ шаръ, второй рядъ составляетъ два шара, третій рядъ составляетъ три шара, ... наконецъ, n-ый рядъ составляетъ n шаровъ. Сколько шаровъ содержитъ весь треугольникъ? Искомое число S найдемъ изъ формулы (4) подстановкой $a=1$ и $b=1$:

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Въ связи съ этой задачей числа вида $\frac{(n+1)n}{2}$ называются **треугольными числами**. Числа эти въ возрастающемъ порядкѣ суть слѣдующія:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .

Если шары расположены въ видѣ квадрата, такъ что въ каждомъ ряду находится столько шаровъ, сколько есть всего рядовъ, то мы получимъ такъ называемыя прямоугольныя или квадратныя числа:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . .

Изъ формулы

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2 \qquad (5)$$

слѣдуетъ правило: сумма $(n-1)$-го и n-го треугольныхъ чиселъ равна n-ому квадратному числу; это предложеніе нетрудно также вывести изъ геометрическихъ соображеній.

§ 57. Ариѳметическіе ряды высшаго порядка.

1. Разсмотримъ рядъ A чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

Найдемъ разности каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ этого ряда:

$$b_0 = a_1 - a_0,\ b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2,\ \ldots .$$

Рядъ B чиселъ b, т. е.

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

называется рядомъ разностей ряда A.

Вычисливъ и для этого ряда разности:

$$c_0 = b_1 - b_0,\ c_1 = b_2 - b_1,\ c_2 = b_3 - b_2,\ \ldots ,$$

получимъ новый рядъ C:

$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots ,$$

который называется рядомъ вторыхъ разностей ряда A; продолжая подобнымъ же образомъ, мы найдемъ рядъ третьихъ, четвертыхъ, ... разностей.

Складывая члены ряда B, получимъ:

$$a_n - a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить $(n+1)$-ый членъ ряда A, нужно къ начальному члену a_0 этого ряда прибавить сумму первыхъ n членовъ ряда B.

Рядъ A представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, если члены ряда B всѣ равны другъ другу. Если же члены ряда B сами составляютъ ариѳметическую прогрессію, то рядъ A называется ариѳметическимъ рядомъ второго порядка. Вообще, данный рядъ называютъ ариѳметическимъ рядомъ k-го порядка, если рядъ его первыхъ разностей есть ариѳметическій рядъ $(k-1)$-го порядка: отсюда слѣдуетъ, что въ ариѳметическомъ ряду k-го порядка члены k-го ряда разностей его всѣ равны другъ другу.

Рядъ треугольныхъ чиселъ представляетъ собою ариѳметическій рядъ второго порядка.

2. Пользуясь биноміальными коэффиціентами, можно представить въ общемъ видѣ члены ариѳметическаго ряда k-го порядка: именно, $(n+1)$-ый членъ a_n ариѳметическаго ряда k-го порядка можетъ быть представленъ слѣдующимъ выраженіемъ:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 B_1^{(n)} + \alpha_2 B_2^{(n)} + \ldots + \alpha_k B_k^{(n)}, \qquad (1)$$

гдѣ коэффиціенты α_0, α_1, α_2, ..., α_k не зависятъ отъ числа n; величины α различны для различныхъ рядовъ k-го порядка.

Это предложеніе легко доказывается по способу совершенной индукціи.

Формула наша, очевидно, справедлива въ случаѣ, когда $k=1$; дѣйствительно, члены ариѳметической прогрессіи перваго порядка всѣ имѣютъ форму: $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$.

Приметъ теперь, какъ это дѣлается при этомъ способѣ доказательства, что наше предложеніе справедливо въ случаѣ ариѳметическаго ряда $(k-1)$-го порядка.

Пусть будетъ A данный ариѳметическій рядъ k-го порядка, а B— рядъ первыхъ разностей ряда A; тогда B есть рядъ $(k-1)$-го порядка. Согласно нашему условію, n-ый членъ ряда B можно представить такъ:

$$b_{n-1} = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_k B_{k-1}^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Но если, $(n+1)$-ый членъ нѣкотораго ряда имѣетъ форму (1), то въ ряду его первыхъ разностей n-ый членъ имѣетъ видъ:

$$\alpha_1 (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2 (B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \ldots + \alpha_k (B_k^{(n)} - B_k^{(n-1)}).$$

Выраженіе это по формулѣ § 53, (7) совпадаетъ съ выраженіемъ (2).

Такъ какъ члены ряда опредѣляются однозначно начальнымъ членомъ ряда и рядомъ его первыхъ разностей, то при надлежащемъ выборѣ начальнаго члена a_0 рядъ членовъ a_n совпадаетъ съ рядомъ A, что и требовалось доказать.

Подставивъ въ формулу (1) послѣдовательно $n=0, 1, 2, \ldots, k$, получимъ:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_0 \\
a_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\
a_2 &= \alpha_0 + B_1^{(2)} \alpha_1 + \alpha_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_k &= \alpha_0 + B_1^{(k)} \alpha_1 + B_2^{(k)} \alpha_2 + \ldots + \alpha_k;
\end{aligned}$$

изъ этихъ равенствъ можно опредѣлить коэффиціенты α посредствомъ $k+1$ первыхъ членовъ ряда A.

3. Обозначимъ черезъ a_n сумму n первыхъ треугольныхъ чиселъ:

$$a_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Числа a_0, a_1, a_2, ... составляютъ ариѳметическую прогрессію третьяго порядка; слѣдовательно, согласно предложенію предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Чтобы найти значенія чиселъ α_0, α_1, α_2 и α_3, нужно въ полученной формулѣ подставить послѣдовательно $n=0$, $n=1$, $n=2$ и $n=3$. Замѣчая, кромѣ того, что

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 10,$$

получимъ:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4,$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10;$$

отсюда

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1;$$

слѣдовательно,

$$a_n = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Число это называется n-ымъ **тетраедрическимъ числомъ**: оно выражаетъ, напримѣръ, число шаровъ, расположенныхъ въ видѣ правильнаго тетраедра. Первые члены ряда тетраедрическихъ чиселъ таковы:

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ \ldots$$

Чтобы вычислить сумму n первыхъ членовъ ряда квадратныхъ чиселъ:

$$c_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2,$$

нужно въ выраженіе

$$c_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

подставить $n=0$, 1, 2, 3; тогда получимъ $\alpha_0=1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=2$; слѣдовательно,

$$c_n=n+3\frac{n(n-1)}{2}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

§ 58. Геометрическіе ряды.

1. Числа ряда a, a_1, a_2, a_3, ... образуютъ геометрическую прогрессію или геометрическій рядъ, если каждое число этого ряда получается изъ предыдущаго числа умноженіемъ его на одного и того же множителя q, иными словами, если частное a_n/a_{n-1} отъ дѣленія котораго нибудь члена на предыдущій равно постоянному числу q. Число a называется начальнымъ членомъ, а число q—знаменателемъ геометрической прогрессіи. Такимъ образомъ члены геометрической прогрессіи выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots;$$

n-ый членъ есть aq^{n-1}. Если знаменатель прогрессіи q есть положительное число, то всѣ члены прогрессіи имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ: напримѣръ, всѣ они положительные, если a есть положительное число. Если же знаменатель q есть отрицательное число, то члены прогрессіи имѣютъ попеременно различные знаки.

Если число q по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу, то каждый членъ прогрессіи по абсолютной величинѣ превосходитъ предыдущій; прогрессія тогда называется возрастающей.

Если знаменатель q есть правильная дробь, то члены прогрессіи послѣдовательно убываютъ по абсолютной величинѣ: такая прогрессія называется убывающей. Если, наконецъ, $q=\pm 1$, то всѣ члены прогрессіи равны $\pm a$.

2. Здѣсь, какъ и въ случаѣ ариѳметической прогрессіи, важно умѣть находить сумму первыхъ n членовъ ряда. Имѣемъ:

$$S=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}). \quad (1)$$

Задача наша такимъ образомъ сводится къ опредѣленію суммы

$$s=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}. \quad (2)$$

Сумму s легко опредѣлить, если замѣтимъ, что, умножая любой членъ ея на число q, получимъ слѣдующій членъ; слѣдовательно,

$$sq=q+q^2+q^3+\ldots+q^n. \quad (3)$$

Вычитывая почленно равенство (3) изъ равенства (2), получимъ:

$$s(1-q)=1-q^n;$$

отсюда вычисляемъ сумму s во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ единственнаго, когда $q=1$:

$$s=\frac{1-q^n}{1-q}. \qquad (4)$$

При $q=1$ всѣ члены нашей суммы равны 1, и мы получаемъ непосредственно $s=n$.

Если $q>1$, сумму s представляютъ такъ:

$$s=\frac{q^n-1}{q-1},$$

такъ какъ въ этомъ выраженіи какъ числитель такъ и знаменатель суть положительныя числа. Изъ формулы (1) слѣдуетъ:

$$S=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Въ словахъ эта формула выражается такъ:

Чтобы получить сумму n первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, нужно разность между $(n+1)$-ымъ членомъ прогрессіи и первымъ членомъ ея раздѣлить на разность между знаменателемъ прогрессіи и единицей.

3. Мы нѣсколько видоизмѣнимъ формулу (4), если положимъ $q=b/a$ и сдѣлаемъ простое преобразованіе. Тогда найдемъ:

$$s=\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}(a-b)}.$$

Изъ формулы же (2) имѣемъ:

$$s=1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Подставивъ это значеніе суммы s въ предыдущее равенство и умноживъ обѣ части полученнаго такимъ образомъ равенства на a^{n-1}, найдемъ:

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b},$$

или иначе:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формулу эту можно провѣрить непосредственнымъ умноженіемъ. Примѣры: положивъ $n = 2$ и $n = 3$, получимъ:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Первая формула выражается словами такъ:

Разность квадратовъ двухъ чиселъ равна произведенію изъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность.

Положивъ въ этой же формулѣ $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$, получимъ формулу, которая встрѣчается весьма часто:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - a)^2 = 4\alpha\beta.$$

§ 59. Вычисленіе процентовъ и ренты.

1. Теорія геометрическихъ рядовъ находитъ себѣ важное практичекое примѣненіе при вычисленіи процентовъ и ренты.

Мы здѣсь дадимъ лишь самыя общія основныя формулы; за подробностями и примѣрами отсылаемъ читателя къ спеціальнымъ сочиненіямъ: особенно можно рекомендовать небольшую книжку М. Кантора (M. Cantor) „Politishche Arithmetik“ (Leipzig. Teubner. 1898. 2. Auflage 1903).

Если капиталъ въ c рублей отданъ въ ростъ, то это значитъ, что должникъ въ концѣ каждаго года долженъ уплачивать заимодавцу опредѣленную сумму, скажемъ p рублей, за каждые 100 занятыхъ рублей (p процентовъ — пишется $p^0/_0$). Число p называется процентной таксой.

Часто проценты уплачиваются по полугодіямъ или четвертямъ, но процентная такса всегда относится къ году. При современномъ состояніи денежнаго рынка обычной процентной таксой является $3^0/_0$, $3^1/_2{}^0/_0$, $4^0/_0$ или $4^1/_2{}^0/_0$. Размѣръ процентной таксы зависитъ, главнымъ образомъ, отъ того, въ какой степени заимодавецъ можетъ быть увѣренъ, что должникъ выполнитъ свои обязательства.

На 100 рублей приходится p рублей процентныхъ денегъ, на 1 рубль — $\frac{p}{100}$ рублей, слѣдовательно, число процентныхъ денегъ съ капитала въ c рублей составитъ $\frac{cp}{100}$ рублей. По этому, по истеченіи года капиталъ вмѣстѣ съ наращенными процентами выразится суммою въ $c+cp/100$ рублей, и такимъ образомъ первоначальный капиталъ c превратится въ капиталъ:

$$c'=c\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Часто процентныя деньги не уплачиваются по истеченіи года, но причисляются къ капиталу и вмѣстѣ съ послѣднимъ идутъ въ ростъ: такимъ образомъ возникаютъ проценты на проценты, или такъ называемые сложные проценты. По истеченіи второго года капиталъ увеличивается въ той же степени, что и за предыдущій годъ. Капиталъ c' превращается въ капиталъ:

$$c''=c'\left(1+\frac{p}{100}\right)=c\left(1+\frac{p}{100}\right)^2;$$

по истеченіи n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C=c\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ при указанныхъ условіяхъ капиталъ ежегодно возрастаетъ въ геометрической прогрессіи.

Если процентныя деньги причисляются къ капиталу не ежегодно, но каждое полугодіе или каждую четверть года, или, вообще, по истеченіи каждой m-ой части года, при чемъ p по прежнему означаетъ годовую процентную таксу, то по формулѣ (1) черезъ n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C=c\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{nm\,*)}. \qquad (2)$$

Если спрашивается, какой капиталъ черезъ n лѣтъ превратится въ капиталъ C, то найдемъ по формулѣ (1):

$$c=C\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}, \qquad (3)$$

---

*) При равныхъ прочихъ условіяхъ сдѣлка тѣмъ выгоднѣе для заимодавца, чѣмъ короче промежутки, по истеченіи которыхъ проценты причисляются къ капиталу, т. е. чѣмъ больше число m. Однако, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, съ возрастаніемъ числа m капиталъ C не возрастаетъ безпредѣльно.

либо по формулѣ (2):

$$c = C\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{-nm}. \qquad (4)$$

2. Вычисленіе ренты. Рентой называютъ сумму, которая имѣетъ быть уплачиваема [2]) въ равные промежутки времени, напримѣръ, ежегодно либо вѣчно, либо въ теченіе ограниченнаго періода времени. Положимъ, что по истеченіи каждаго года имѣетъ быть уплачиваема рента въ r рублей. Если рента не уплачивается, но накопляется и наращается процентами, считая по $p^0/_0$, то какая сумма наростетъ по истеченіи n лѣтъ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, замѣтимъ, что первый взносъ нарастаетъ въ теченіе $n-1$ лѣтъ, второй—въ теченіе $n-2$ лѣтъ, и т. д. предпослѣдній взносъ приноситъ проценты всего за 1 годъ, послѣдній взносъ вовсе не успѣетъ нарасти. Такимъ образомъ

первый взносъ превратится въ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$,

второй „ „ „ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$,

. . . .

предпослѣдній „ „ „ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

послѣдній „ „ „ r.

Введя для сокращенія обозначеніе

$$1+\frac{p}{100}=q, \qquad (5)$$

получимъ для наращеннаго (окончательнаго) капитала такое выраженіе:

$$E = r(1+q+q^2+\ .\ .\ .\ +q^{n-1}),$$

или, согласно § 58,

$$E=\frac{r(q^n-1)}{q-1}.$$

Подставивъ сюда вмѣсто q выраженіе изъ формулы (5), получимъ:

$$E=\frac{100r}{p}\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right]. \qquad (6)$$

Вычислимъ, какой капиталъ A нужно отдать въ ростъ по p сложныхъ процентовъ, чтобы по истеченіи n лѣтъ получить ту же сумму E.

---

[2]). Обыкновенно банкомъ, кредитнымъ учрежденіемъ или государствомъ.

По формулѣ (1) имѣемъ

$$E = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Отсюда

$$A = \frac{100r}{p}\left[1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}\right]. \qquad (7)$$

Сумма эта называется наличной стоимостью ренты. Ее нужно уплатить, если желаютъ выкупить ренту[3]). Чѣмъ больше число n, тѣмъ меньше число $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$ и тѣмъ менѣе отличается капиталъ A отъ суммы $100r/p$, т. е. отъ того капитала, который приноситъ ежегодно r процентныхъ денегъ, считая по p простыхъ процентовъ.

---

[3]) Это значитъ: если нѣкоторое учрежденіе обязано уплачивать какому либо лицу ежегодную ренту въ r рублей въ теченіе n лѣтъ, то оно можетъ освободиться отъ этого обязательства, т. е. погасить или выкупить ренту, уплативъ немедленно сумму A. Наоборотъ, получивъ ссуду въ A рублей, можно ее выплачивать, производя по истеченіи каждаго года срочную уплату въ r рублей.

Книга II.

АЛГЕБРА.

ГЛАВА XI.

Алгебраическія уравненія.

§ 60. Цѣлыя функціи и ихъ корни.

1. Въ области, содержащей всю совокупность введенныхъ нами чиселъ, заключаются нѣкоторыя особенныя числовыя системы, обладающія замѣчательными свойствами. Сюда относятся такъ называемыя алгебраическія числа. Первыя, съ которыми мы встрѣтились, и вмѣстѣ съ тѣмъ простѣйшія алгебраическія числа суть квадратные корни. Точно такъ же, какъ эти послѣдніе получаются при рѣшеніи квадратныхъ уравненій, всѣ другія алгебраическія числа суть результаты рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Прежде, чѣмъ перейти къ ближайшему разсмотрѣнію задачи о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней, необходимо сдѣлать общій обзоръ свойствъ цѣлыхъ функцій.

2. Подъ названіемъ цѣлой функціи или просто функціи мы разумѣемъ выраженіе вида:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть опредѣленныя данныя числа, которыя назовемъ коэффиціентами функціи $f(x)$; n означаетъ цѣлое положительное число, а x есть знакъ, которому можно придать любое численное значеніе. При такихъ условіяхъ мы называемъ x перемѣннымъ, а $f(x)$ есть не что иное, какъ сокращенное обозначеніе всего выраженія (1). Если a_0 отлично отъ нуля, то число n называется степенью функціи $f(x)$.

Нѣтъ необходимости, чтобы коэффиціенты были раціональными числами. Они могутъ имѣть ирраціональныя и даже комплексныя значенія.

Вмѣсто знаковъ a, x, f, конечно, можно употреблять и другія буквы; однако, для обозначенія коэффиціентовъ мы будемъ предпочтительно употреблять первыя строчныя буквы латинскаго алфавита: a, b, c, для перемѣнныхъ—послѣднія буквы x, y, z, t; для сокращеннаго обозначенія функцій будемъ пользовать буквами f, φ, ψ, а также и F, Φ, Ψ.

3. Цѣлыя функціи можно складывать, вычитывать и умножать по тѣмъ же правиламъ, по которымъ эти дѣйствія совершаются надъ полиномами. Результатами этихъ операцій будутъ также цѣлыя функціи. При этомъ члены съ одинаковыми степенями x собираютъ въ одинъ членъ, складывая коэффиціенты, затѣмъ всѣ вновь полученные члены располагаютъ въ рядъ по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ x, начиная справа или слѣва. Такъ напримѣръ:

$$\begin{aligned}&(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)=\\&=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3+\\&+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^2+(a_1b_3+a_2b_2)x+a_2b_3\end{aligned}$$

Если перемножимъ двѣ функціи n-той и m-той степени $f(x)=$ $=a_0x^n+\ldots$, $\varphi(x)=b_0x^m+\ldots$, то произведеніе $f(x)\varphi(x)$, будучи расположено указаннымъ образомъ, начнется съ члена $a_0b_0x^{m+n}$. Это замѣчаніе даетъ право сказать, что степень произведенія двухъ цѣлыхъ функцій равна суммѣ $m+n$ степеней производителей.

4, Двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются равными (точнѣе тождественными) только въ томъ случаѣ, если онѣ одной и той же степени и если коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ одной и въ другой имѣютъ одинаковую величину. При этихъ условіяхъ для любого численнаго значенія перемѣннаго x обѣ функціи имѣютъ одинаковыя численныя значенія.

Совершенно другое значеніе имѣетъ равенство двухъ функцій $f(x)=\varphi(x)$, если оно справедливо только при нѣкоторыхъ особенныхъ значеніяхъ x.

Въ то время какъ, съ одной стороны, равенство $f(x)=0$, если мы его понимаемъ въ первомъ смыслѣ, требуетъ, чтобы коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ всѣ были равны нулю,—можно, съ другой стороны, искать такихъ значеній $x=x_1$, которыя обращаютъ $f(x)$ въ нуль, не смотря на то, что не всѣ коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ нули. Такое значеніе x_1 называется корнемъ функціи $f(x)$ или еще корнемъ уравненія $f(x)=0$. При такой постановкѣ вопроса x въ уравненіи $f(x)=0$ называется неизвѣстнымъ, для котораго мы ищемъ опредѣленное значеніе x_1.

5. Если коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ суть вещественныя числа, то $f(x)$ называется вещественной функціей. Если вещественная функція имѣетъ мнимый корень $x_1=\alpha+\beta i$, то

$$a_0(\alpha+\beta i)^n+a_1(\alpha+\beta i)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(\alpha+\beta i)+a_n=0. \quad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 44, 5), что если мы вездѣ замѣнимъ i черезъ $-i$, то равенство не нарушится:

$$a_0(\alpha-\beta i)^n+a_1(\alpha-\beta i)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(\alpha-\beta i)+a_n=0, \quad (3)$$

т. е. $x_1'=\alpha-\beta i$ также есть корень функціи $f(x)$. Этотъ выводъ мы формулируемъ въ видѣ слѣдующей теоремы:

Каждая вещественная функція можетъ имѣть только парные мнимые корни, при чемъ каждая пара состоитъ изъ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ.

§ 61. Дѣленіе цѣлыхъ функцій.

1. Дѣйствія надъ цѣлыми функціями представляютъ большое сходство съ дѣйствіями въ области раціональныхъ чиселъ. Особенно интересны въ этомъ случаѣ правила дѣленія.

Пусть

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \\ \varphi(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

двѣ функціи степеней n и m, такъ что a_0 и b_0 не нули; предположимъ что $n \geqslant m$.

Говорятъ, что функція $f(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$, если существуетъ цѣлая функція $Q(x)$, удовлетворяющая соотношенію $f(x)=\varphi(x)\,Q(x)$.

По § 60, 3 $Q(x)$ должна быть $(n-m)$-ой степени; чтобы не исключать того случая, когда $m=n$, мы будемъ подъ названіемъ цѣлой функціи нулевой степени разумѣть число, отличное отъ нуля (независящее, слѣдовательно, отъ x).

Чтобы ближе разсмотрѣть вопросъ о дѣлимости цѣлыхъ функцій положимъ

$$Q(x)=q_0x^{n-m}+q_1x^{n-m-1}+\ldots+q_{n-m\ 1}x+q_{n-m}\,. \quad (2)$$

Далѣе коэффиціенты произведенія $\varphi(x)Q(x)$ приравняемъ соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ $f(x)$, начиная съ a_0. Это дастъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} a_0&=b_0q_0, \\ a_1&=b_0q_1+b_1q_0, \\ a_2&=b_0q_2+b_1q_1+b_2q_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu&=b_0q_\nu+b_1q_{\nu-1}+b_2q_{\nu-2}+\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-m}&=b_0q_{n-m}+b_1q_{n-m-1}+\ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

Составить эти равенства очень легко: нужно обратить вниманіе только на то, чтобы въ выраженіи a_ν сумма индексовъ при b_i и q_k, т. е. $i+k$, была равна ν, и прибавлять слагаемыя до тѣхъ поръ, пока значекъ i при b не превыситъ m.

Мы получили систему $n-m+1$ уравненій первой степени, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены $n-m+1$ неизвѣстныхъ $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$. Конструкція этой системы дѣлаетъ ее очень удобной для разрѣшенія; изъ перваго же уравненія находимъ $q_0=\frac{a_0}{b_0}$. Зная q_0, изъ второго уравненія легко находимъ $q_1=\frac{a_1-b_1q_0}{b_0}=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0{}^2}$ и т. д. Въ знаменателѣ будутъ всегда степени числа b_0, которое, по предположенію, отлично отъ нуля.

Если $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$ опредѣлены изъ равенствъ (3), то коэффиціенты при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^m$ въ произведеніи $\varphi(x)\,Q(x)$ совпадаютъ съ соотвѣтствующими коэффиціентами $f(x)$. Разность $f(x)-\varphi(x)\,Q(x)$ есть цѣлая функція

$$R(x)=r_0x^{m-1}+r_1x^{m-2}+\ldots+r_{m-2}x+r_{m-1}, \qquad (4)$$

степень которой не выше $m-1$. $R(x)$ можетъ быть и низшей степени, если $r_0=0$ или r_0 и r_1 равны 0 и т. д. Итакъ:

$$f(x)=\varphi(x)\,Q(x)+R(x). \qquad (5)$$

Операція эта (т. е. нахожденіе функцій $Q(x)$ и $R(x)$) называется дѣленіемъ $f(x)$ на $\varphi(x)$; $f(x)$ называется дѣлимымъ, $\varphi(x)$ — дѣлителемъ, $Q(x)$ — частнымъ и $R(x)$ — остаткомъ. Если функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ даны, то $Q(x)$ и $R(x)$ однозначно опредѣляются тѣмъ, что степень $R(x)$ должна быть ниже степени $\varphi(x)$.

Вопросъ ставится совершенно такъ же, какъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ съ тою разницей, что не численная величина остатка должна быть меньше дѣлителя, а степень остатка должна быть ниже степени дѣлителя. Вычисленіе можно расположить совершенно такъ же, какъ при дѣленіи десятичныхъ чиселъ. Покажемъ это на примѣрѣ; пусть

$$f(x)=3x^4+3x^3-5x^2+2x-8,$$
$$\varphi(x)=x^2+2x-5;$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+3x^3-5x^2+2x-8 & x^2+2x-5=3x^2-3x+16\\
3x^4+6x^3-15x^2 & \\
\hline
-3x^3+10x^2+2x & \\
-3x^3-6x^2+15x & \\
\hline
16x^2-13x-8 & \\
16x^2+32x-80 & \\
\hline
-45x+72. &
\end{array}$$

Въ данномъ случаѣ $Q(x) = 3x^2 - 3x + 16$, а $R(x) = -45x + 72$.

2. Функція $f(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если остатокъ $R(x)$ тождественно равенъ 0, т. е. если

$$r_0 = 0, r_1 = 0, \ldots, r_{m-1} = 0.$$

Чтобы пояснить это на примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1.$$
$$\varphi(x) = x^2 - x - 1;$$

тогда получимъ:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 & x^2 - x - 1 = x^2 + 2x - 1 \\
x^4 - x^3 - x^2 & \\
\hline
\quad 2x^3 - 3x^2 - x & \\
\quad 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\
\hline
\qquad -x^2 + x + 1 & \\
\qquad -x^2 + x + 1 & \\
\hline
\qquad \;\; - \quad - \quad - &
\end{array}$$

3. Дѣленіе совершается особенно просто, если дѣлитель представляетъ собой функцію первой степени или, какъ таковую часто называютъ, линейную функцію. Возьмемъ дѣлителя $\varphi(x)$ въ формѣ $x - \alpha$; въ такомъ случаѣ въ равенствахъ (3) нужно положить $b_0 = 1$, $b_1 = \alpha$. Для опредѣленія коэффиціентовъ q получаемъ равенства:

$$\begin{aligned}
a_0 &= q_0, \\
a_1 &= q_1 - \alpha q_0, \\
a_2 &= q_2 - \alpha q_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} &= q_{n-1} - \alpha q_{n-2};
\end{aligned}$$

откуда находимъ:

$$\begin{aligned}
q_0 &= a_0, \\
q_1 &= a_0\alpha + a_1, \\
q_2 &= a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_{n-1} &= a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + a_2\alpha^{n-3} + \ldots + a_{n-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Остатокъ будетъ нулевой степени, т. е. не будетъ зависѣть отъ x. Можно легко опредѣлить его значеніе; для этого достаточно въ равенство $f(x) = (x - \alpha) Q(x) + R$ подставить α вмѣсто x; тогда $(x - \alpha) Q(x) = 0$, и, слѣдовательно, $R=f(\alpha)$. Итакъ,

$$f(x)=(x-\alpha)\,Q(x)+f(\alpha).$$

Если $f(\alpha)=0$, то $f(x)$ дѣлится на $x-\alpha$; мы получаемъ такимъ образомъ теорему:

Функція $f(x)$ тогда и только тогда дѣлится на $x-\alpha$, если α есть корень функціи $f(x)$.

4. Если не только $f(x)$, но и $Q(x)$ дѣлится на $x-\alpha$, такъ что $Q(\alpha)=0$, то $f(x)$ дѣлится на $(x-\alpha)^2$. Согласно формуламъ (6),

$$Q(\alpha)=q_0\alpha^{n-1}+q_1\alpha^{n-2}+\ldots+q_{n-1}=$$
$$=na_0\alpha^{n-1}+(n-1)a_1\alpha^{n-2}+(n-2)a_2\alpha^{n-3}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}{}^{1)}.$$

Функцію

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

называютъ производной отъ функціи $f(x)$. Мы видимъ, такимъ образомъ, что

$$Q(\alpha)=f'(\alpha).$$

Итакъ, необходимое и достаточное условіе дѣлимости функціи $f(x)$ на $(x-\alpha)^2$ выражается двумя равенствами: $f(\alpha)=0$ и $f'(\alpha)=0$, или въ словахъ:

Функція $f(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ дѣлится на $(x-\alpha)^2$, если α есть общій корень функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

5. Если x_1 есть корень функціи $f(x)$, то можно положить $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$, гдѣ $f_1(x)$ есть функція $n-1$ степени; изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что высшая степень $f_1(x)$, т. е. x^{n-1}, имѣетъ тотъ же коэффиціентъ, какъ x^n въ $f(x)$. Если $f_1(x)$ имѣетъ корень x_2, то мы можемъ положить $f_1(x)=(x-x_2)f_2(x)$ и т. д. Если всѣ полученныя такимъ образомъ функціи f_1, f_2, f_3, . . . имѣютъ корни, а послѣдняя изъ нихъ $f_{n-1}(x)=a_0(x-x_n)$, то

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \qquad (7)$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція n-ой степени никогда не имѣетъ больше n корней.

Дѣйствительно, если $f(x)$ имѣетъ n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то x_2

---

[1] Чтобы это получить, мы умножаемъ обѣ части перваго изъ равенствъ (6) на α^n, второе равенство на α^{n-1} и т. д., а затѣмъ складываемъ оба равенства.

должно быть корнемъ функціи $f_1(x)$, x_3 корнемъ функцій $f_2(x)$ и т. д.; при этомъ, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто разложеніе (7). Если поэтому α есть какой нибудь корень функціи $f(x)$, то должно имѣть мѣсто равенство:

$$(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_n)=0,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, если α есть одно изъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если въ какомъ нибудь частномъ случаѣ окажется, что нѣкоторая функція n-той степени

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

обращается въ нуль больше, чѣмъ при n различныхъ значеніяхъ x, то остается только заключить, что всѣ коэффиціенты a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ суть нули и что такимъ образомъ $f(x)$ тождественно (при всякомъ значеніи x) равно нулю. Нашъ выводъ мы можемъ выразить такъ:

Если число значеній независимаго перемѣннаго x, при которыхъ функція n-той степени отъ x обращается въ нуль, превышаетъ n, то эта функція тождественно сводится къ нулю.

Въ этой формулировкѣ теорема будетъ часто служить основаніемъ при доказательствахъ дальнѣйшихъ теоремъ.

6. Въ ряду чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящихъ въ разложеніе (7), одно и то же число можетъ повторяться нѣсколько разъ. Функція $f(x)$ и въ этомъ случаѣ разлагается на n линейныхъ множителей, но число ея корней меньше n. Чтобы установить единообразіе въ способѣ выраженія, и въ этихъ случаяхъ говорятъ, однако, что функція $f(x)$ имѣетъ n корней; мы получимъ эти n корней, если будемъ считать нѣкоторые корни нѣсколько разъ; именно: каждый корень мы будемъ считать столько разъ, сколько разъ соотвѣтствующій множитель $(x-x_i)$ входитъ въ разложеніе (7). Мы имѣемъ тогда дѣло съ такъ называемыми кратными корнями; согласно пункту 4, x_i есть кратный корень функціи $f(x)$, если онъ представляетъ собой общій корень функцій $f(x)$ и $f'(x)$.

§ 62. Общій наибольшій дѣлитель.

1. Если двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$, которыя мы иногда будемъ обозначать короче черезъ f и f_1, имѣютъ общіе корни, то онѣ имѣютъ также и общаго дѣлителя. Въ самомъ дѣлѣ, если обѣ функціи имѣютъ общій корень x_1, то обѣ дѣлятся на линейную функцію $x-x_1$; функціи $f(x)$ и $f_1(x)$ могутъ имѣть общихъ дѣлителей и болѣе высокихъ степеней. Если $f(x)$ и $f_1(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя, а слѣдовательно, и общихъ корней, то такія двѣ функціи называются взаимно простыми или первыми между собой.

Такъ какъ дѣленіе цѣлыхъ функцій совершается по тѣмъ же правиламъ, какъ и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ, то мы можемъ примѣнить Евклидовъ алгориѳмъ для опредѣленія общихъ дѣлителей двухъ функцій (§ 15).

Пусть f и f_1 двѣ данныя функціи степеней n и n_1, и пусть $n \geqslant n_1$. Посредствомъ дѣленія (§ 61) можно составить рядъ функцій $f_2, f_3, \ldots$ убывающихъ степеней $n_2, n_3, \ldots$ и рядъ частныхъ $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ такимъ образомъ, что

$$\begin{aligned} f &= Q\,f_1 + f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 + f_3, \\ f_2 &= Q_2 f_3 + f_4, \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Этотъ рядъ равенствъ можно продолжать, пока можно дѣлить f_{n-1} на f_n. Такъ какъ степени $f_2, f_3, \ldots$ постоянно убываютъ, то въ концѣ концовъ дѣленіе должно прекратиться. Пусть два послѣднія равенства въ ряду (1) будутъ:

$$\begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1} + f_\nu, \\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1} f_\nu. \end{aligned} \qquad (2)$$

Точно такъ же, какъ при цѣлыхъ числахъ, можно заключить, что f_ν есть дѣлитель всѣхъ предыдущихъ функцій $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, f_{\nu-3}, \ldots, f_1, f$ и что каждый общій дѣлитель функцій f и f_1, долженъ быть также дѣлителемъ функцій $f_2, f_3, \ldots, f_\nu$. Поэтому f_ν называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ функцій f и f_1 (при чемъ слова „больше“, „меньше“ относятся, собственно, къ степени дѣлителя).

Общій наибольшій дѣлитель f_ν можетъ оказаться функціей нулевой степени, т. е. можетъ представлять собой число, отличное отъ нуля и не зависящее отъ x; въ этомъ случаѣ f и f_1 суть функціи первыя между собой, такъ какъ на постоянное число дѣлится всякая функція.

2. Итакъ, общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій можетъ быть найденъ съ помощью четырехъ дѣйствій (т. е. съ помощью раціональнаго вычисленія) надъ коэффиціентами данныхъ функцій.

Мы можемъ также съ помощью раціональнаго вычисленія рѣшить, имѣетъ ли функція кратные корни, находя общаго наибольшаго дѣлителя функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

Возьмемъ примѣръ:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + 2x + 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 2. \end{aligned}$$

Вмѣсто $f'(x) = 2(3x^5 - 5x^4 + 1)$ мы можемъ взять за перваго дѣлителя функцію $f_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$, которая отличается отъ $f'(x)$ только численнымъ множителемъ. Первое дѣленіе даетъ:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)f_1(x) - \frac{5}{9}(x^4 - 3x - 2).$$

За второго дѣлителя f_2 мы можемъ взять $x^4 - 3x - 2$; мы получимъ:

$$f_1(x) = (3x - 5)f_2(x) + 9(x^2 - x - 1).$$

Третье дѣленіе на $f_3 = x^2 - x - 1$ заканчиваетъ вычисленіе:

$$f_2 = (x^2 - x - 1)f_3.$$

Итакъ, $x^2 - x - 1$ есть общій наибольшій дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$. Легко обнаружить, что

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1)^2,$$

если произвести умноженіе въ правой части.

3. При помощи Евклидова алгориѳма можно получить рѣшеніе слѣдующей задачи.

Даны двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$, первыя между собой; требуется опредѣлить двѣ другія цѣлыя функціи $F(x)$ и $F_1(x)$ такимъ образомъ, чтобы

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = 1. \qquad (3)$$

Замѣтимъ сначала, что задача не мѣняется существенно, если съ правой стороны (3) вмѣсто 1 будетъ другое число c, отличное отъ нуля, такъ какъ въ этомъ случаѣ, чтобы получить равенство (3), достаточно коэффиціенты функцій $F(x)$ и $F_1(x)$ раздѣлить на c.

Чтобы найти F и F_1 воспользуемся формулами (1) и (2), въ которыхъ, при взаимно простыхъ f и f_1, функція f_ν будетъ числомъ, отличнымъ отъ нуля. Если теперь первое изъ равенствъ (1) разрѣшить относительно f_2 и подставить полученное выраженіе во второе и третье равенства, затѣмъ второе разрѣшить относительно f_3 и полученныя выраженія подставить въ два слѣдующія, и такъ продолжать до конца, то предпослѣднее изъ равенствъ (2) дастъ требуемое соотношеніе вида (3).

Чтобы показать это на простомъ примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^2 - x - 1; \quad f_1(x) = x^2 + 1;$$
$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 1) - (x + 2);$$
$$x^2 + 1 = (x + 2)(x - 2) + 5.$$

Помножимъ первое равенство на $x - 2$ и сложимъ со вторымъ;

тогда получимъ:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) + (x^2 + 1)(3 - x) = 5.$$

Отсюда $F(x) = x - 2$, $F_1(x) = 3 - x$.

При томъ же предположеніи, что f и f_1 суть функціи взаимно простыя, можно всегда удовлетворить равенству

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = \Phi(x), \qquad (4)$$

гдѣ $\Phi(x)$ есть любая цѣлая функція. Нужно только равенство (3) умножить на $\Phi(x)$ и затѣмъ вмѣсто $F(x)\,\Phi(x)$ и $F_1(x)\,\Phi(x)$ написать $F(x)$ и $F_1(x)$.

§ 63. Приводимыя и неприводимыя функціи.

1. Положимъ теперь, что въ цѣлой функціи n-той степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

коэффиціенты $a_0, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа.

Если a_0 не нуль, то розысканіе корней функціи (1) можно привести къ случаю $a_0 = 1$. Дѣйствительно, помножая функцію (1) на a_0^{n-1}, получимъ:

$$a_0^{n-1}f(x) = a_0^n x^n + a_1(a_0x)^{n-1} + a_2a_0(a_0x)^{n-2} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

Если далѣе положимъ:

$$a_0x = y, \quad a_1 = b_1, \quad a_2a_0 = b_2, \quad a_3a_0^2 = b_3, \ldots, a_na_0^{n-1} = b_n$$
$$\text{и } a_0^{n-1}f(x) = \varphi(y),$$

то

$$\varphi(y) = y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots + b_n, \qquad (2)$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ цѣлыя числа.

Корни функціи $f(x)$ получатся, если каждый корень функціи $\varphi(y)$ раздѣлимъ на a_0.

Мы займемся прежде всего вопросомъ о томъ, какіе раціональные корни можетъ имѣть функція $\varphi(y)$. Если p/q есть корень функціи $\varphi(y)$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, которыя мы можемъ считать взаимно простыми, причемъ $q > 0$, то должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$p^n + b_1p^{n-1}q + b_2p^{n-2}q^2 + \ldots + b_nq^n = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что p^n должно дѣлиться на q, что возможно только при $q = 1$, такъ какъ p и q суть числа взаимно простыя.

Раціональный корень функціи $\varphi(y)$ необходимо долженъ быть цѣлымъ числомъ.

Если p есть такой корень, то

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что b_n должно дѣлиться на p.

Итакъ, чтобы рѣшить, имѣетъ ли функція $\varphi(y)$ раціональные корни, нужно найти всѣхъ дѣлителей числа b_n, и каждый изъ нихъ съ положительнымъ и отрицательнымъ знакомъ подставить для испытанія въ $\varphi(y)$ вмѣсто y. Если p есть одинъ изъ этихъ дѣлителей и $\varphi(p) = 0$, то p есть раціональный корень функціи $\varphi(y)$, а p/a_0 раціональный корень функціи $f(x)$.

При этомъ $\varphi(y)$ дѣлится на $y - p$ и результатъ дѣленія, опредѣляемый равенствомъ $\varphi(y) = (y - p)\varphi_1(y)$, есть функція $\varphi_1(y)$, коэффиціенты которой также представляютъ собою цѣлыя числа. Такъ напримѣръ:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1$$

имѣетъ дѣлителя $y - 1$; производя дѣленіе, получимъ:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1 = (y - 1)(y^3 - 3y^2 - 3y - 1).$$

2. Функція $f(x)$ съ цѣлыми или только съ раціональными коэффиціентами называется приводимой или разложимой, если ее можно разложить на два множителя $f_1(x)$ и $f_2(x)$, изъ которыхъ каждый дѣйствительно содержитъ x и коэффиціенты которыхъ также раціональны. Если такое разложеніе невозможно, то $f(x)$ называется неприводимой или неразложимой функціей.

Не существуетъ общаго признака для различенія приводимыхъ и неприводимыхъ функцій точно такъ же, какъ не существуетъ такого признака для различенія простыхъ и составныхъ чиселъ. Остается въ каждомъ случаѣ пользоваться частными пріемами, т. е. производить испытанія, число которыхъ можетъ быть значительно сокращено методами теоріи чиселъ. Такъ напримѣръ,

$$f(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x - 8 =$$
$$(x^3 - 2x^2 + 2)(x^3 - 4x - 4)$$

есть функція приводимая.

3. О приводимости цѣлой функціи съ цѣлыми коэффиціентами существуетъ общая теорема, частнымъ случаемъ которой является предложеніе о раціональныхъ корняхъ (п. 1). Теорема эта, доказанная Гауссомъ, заключается въ слѣдующемъ.

Если функція

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

съ цѣлыми коэффиціентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ разлагается на множителей:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \ldots + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu,$$

причемъ числа $b_1, \ldots, b_\mu$ и $c_1, \ldots, c_\nu$ раціональны, то какъ коэффиціенты b_i, такъ и коэффиціенты c_i должны быть цѣлыми числами.

Такъ какъ мы предположили, что функція f разлагается на множителей φ и ψ, то, выполняя умноженіе $\varphi\psi = f$, получимъ, съ одной стороны, условіе:

$$\mu + \nu = n,$$

а съ другой стороны:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1, \\ a_2 &= b_2 + c_1 b_1 + c_2, \\ a_3 &= b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

Законъ составленія этихъ равенствъ очень простъ: въ каждомъ изъ нихъ въ каждомъ членѣ правой части сумма индексовъ при b и c равна индексу при a въ лѣвой части.

Исходя отсюда, мы докажемъ нашу теорему отъ противнаго слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что $b_1, \ldots, b_\mu$ не цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ мы можемъ ихъ представить въ видѣ:

$$\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \frac{B_3}{B_0}, \ldots, \frac{B_\mu}{B_0},$$

при чемъ $B_0 \ldots B_\mu$ суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго всѣмъ дѣлителя, а B_0 больше 1. Вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ коэффиціенты $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ замѣняемъ черезъ

$$\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0}, \ldots, \frac{C_\nu}{C_0},$$

при чемъ цѣлыя числа $C_0, \ldots, C_\nu$ также не имѣютъ общаго дѣлителя;

относительно C_0 мы не дѣлаемъ ограниченій, такъ что C_0 можетъ быть и равно 1.

Выбираемъ произвольно одного изъ простыхъ множителей числа B_0, скажемъ p. По предположенію, p не можетъ входить ни во всѣ числа $B_0, \dots, B_\mu$, ни во всѣ числа $C_0, \dots, C_\nu$. Пусть B_h первое изъ чиселъ B, а C_k первое изъ чиселъ C, которыя не дѣлятся на p.

Тогда:

$$\begin{array}{l} B_0, \dots, B_{h-1} \text{ всѣ дѣлятся на } p,\ B_h \text{ не дѣлится на } p. \\ C_0, \dots, C_{k-1} \text{ » » » »},\ C_k \text{ » » » »} \end{array} \qquad (4)$$

h не можетъ быть нулемъ, k же можетъ оказаться равнымъ нулю, если уже C_0 не дѣлится на p.

Возьмемъ теперь изъ равенствъ (3) $(h+k)$-тое и, помноживъ обѣ его части на B_0C_0, напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$B_0C_0a_{h+k} = B_hC_k + B_{h-1}C_{k+1} + B_{h-2}C_{k+2} + \cdots$$
$$+ B_{h+1}C_{k-1} + B_{k+2}C_{k-2} + \cdots$$

При $k=0$ рядъ, стоящій во второй строкѣ, сводится къ нулю. Далѣе, такъ какъ a_{h+k} есть цѣлое число, то лѣвая часть дѣлится на p. Правая часть не дѣлится на p, такъ какъ B_hC_k не дѣлится на p, а остальные члены

$$B_{h-1}C_{k+1},\ B_{h-2}C_{k+2}, \dots\ B_{h+1}C_{k-1}, \dots$$

дѣлятся на p.

Итакъ, допущеніе, что коэффиціенты b и c не представляютъ собой цѣлыхъ чиселъ, привело насъ къ противорѣчію; теорема такимъ образомъ доказана.

4. Изъ предыдущаго вытекаетъ общая теорема о неприводимости цѣлыхъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами; она принадлежитъ Айзенштейну (Eisenstein).

Если коэффиціенты $a_1, \dots, a_n$ функціи n-той степени $f(x)$ суть цѣлыя числа и всѣ дѣлятся на простое число p, а послѣдній изъ этихъ коэффиціентовъ a_n не дѣлится на p^2, то функція $f(x)$ неприводима; при этомъ число 0 мы считаемъ дѣлящимся на всякое первоначальное число.

Чтобы доказать эту теорему, положимъ, что функція

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a_n$$

разлагается на двѣ функціи:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \dots + b_{\mu-1} x + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \dots + c_{\nu-1} x + c_\nu.$$

Если коэффиціенты $b_1, \dots, b_\mu, c_1, \dots, c_\nu$ раціональны, то, по теоремѣ пункта 3, они представляютъ собой цѣлыя числа. Производя умноженіе, получаемъ рядъ равенствъ, которыя располагаемъ теперь въ обратномъ порядкѣ:

$$\begin{aligned} a_n &= b_\mu c_\nu, \\ a_{n-1} &= b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu, \\ a_{n-2} &= b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_\nu &= b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} + \dots + b_1 c_{\nu-1} + c_\nu. \end{aligned} \qquad (5)$$

Непосредственно эти равенства имѣютъ мѣсто лишь въ предположеніи, что $\nu > \mu$; чтобы распространить ихъ и на случай $\nu \leqslant \mu$, достаточно положить $c_0 = 1$, а всѣ c съ отрицательными индексами—равными нулю.

Если a_n дѣлится на p, но не дѣлится не p^2, то изъ равенства $a_n = b_\mu c_\nu$ слѣдуетъ, что одинъ изъ сомножителей либо b_μ, либо c_ν, скажемъ b_μ, дѣлится на p, а другой c_ν не дѣлится. Но такъ какъ числа $a_{n-1}, \dots, a_\nu$ дѣлятся на p, то изъ соотношеній (5) слѣдуетъ, что и числа $b_{\mu-1}, \dots, b_1$ дѣлятся на p; въ такомъ случаѣ послѣднее равенство, опредѣляющее a_ν, находится противорѣчіи съ нашимъ предположеніемъ, такъ какъ изъ этого равенства слѣдуетъ, что c_ν тоже дѣлится на p. Теорема доказана.

Изъ этой теоремы вытекаетъ, напримѣръ, неприводимость функціи 5-ой степени:

$$f(x) = x^5 - 4x - 2. \qquad (6)$$

5. Вводя новую перемѣнную, можно каждую функцію упростить, а именно, уничтожить членъ, содержащій x въ n—1-ой степени.

Дѣйствительно, по формулѣ бинома

$$a_0 \left(x + \frac{a_1}{na_0}\right)^n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \frac{n-1}{2n} \frac{a_1^2}{a_0} x^{n-2} + \dots;$$

если теперь положимъ:

$$y = x + \frac{a_1}{na_0} \qquad (7)$$

то x^{n-2}, x^{n-3}, . . . будутъ функціями (n—2)-ой, (n—3)-ой, . . . степени отъ y, а

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

будетъ цѣлая функція n-той степени отъ y вида

$$\varphi(y) = a_0y^n + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n$$ [1]),

гдѣ коэффиціенты b выражаются раціонально черезъ коэффиціенты a. Напримѣръ, при $n = 3$, $a_0 = 1$:

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

$$y = x + \frac{a_1}{3},$$

$$\varphi(y) = y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1\right)y + \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3.$$

6. Общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій $f(x)$ и $F(x)$ съ раціональными коэффиціентами, какъ видно изъ алгориѳма § 62-го, имѣетъ также раціональные коэффиціенты. Поэтому, если функція $f(x)$ неприводима, то могутъ быть два случая: либо $F(x)$ дѣлится на $f(x)$, либо $F(x)$ и $f(x)$ суть функціи первыя между собой [2]). Въ послѣднемъ случаѣ онѣ не имѣютъ общихъ корней. Эти соображенія даютъ теорему, особенно важную въ теоріи уравненій.

Теорема. Если неприводимая функція $f(x)$ имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то послѣдняя дѣлится на $f(x)$ и всѣ корни функціи $f(x)$ представляютъ собой также корни функціи $F(x)$.

7. Понятіемъ о приводимости и неприводимости пользуются, однако, и въ болѣе широкомъ смыслѣ.

Неприводимая функція можетъ разлагаться на множителей, которые въ своихъ коэффиціентахъ, кромѣ раціональныхъ чиселъ, содержатъ опредѣленныя ирраціональныя числа, напр. $\sqrt{-1}$, или $\sqrt{2}$, или, вообще, какой нибудь квадратный корень; другія функціи могутъ оставаться неразложимыми и при допущеніи такого ирраціональнаго числа. Введеніемъ такого рода ирраціональностей образуется числовой комплексъ, въ которомъ

---

[1]) Такъ какъ соотношеніе (7) даетъ $x = y - \frac{a_1}{na_0}$, то

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots = a^0\left(y - \frac{a_1}{na_0}\right)^n + a_1\left(y - \frac{a_1}{na_0}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$a_0y^n - a_1y^{n-1} + a_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots = a_0y^n + b_2y^{n-2} + \ldots$$

[2]) Это вполнѣ аналогично слѣдующему свойству цѣлыхъ чиселъ: если f есть простое цѣлое число, а F есть другое цѣлое число, то F либо дѣлится на f, либо представляетъ собой число, простое относительно f.

могутъ быть выполнены всѣ раціональныя дѣйствія, кромѣ дѣленія на нуль. Отсюда видно, что этотъ комплексъ въ нашемъ вопросѣ будетъ играть такую же роль, какую до введенія этой ирраціональности играла область раціональныхъ чиселъ; мы назовемъ ею поэтому *областью раціональности*. Присоединеніе ирраціональнаго числа къ раціональнымъ мы будемъ называть *пріобщеніемъ ирраціональности*[3]).

Такъ, функція x^2+1 неприводима въ области раціональныхъ чиселъ, но, напротивъ, приводима при пріобщеніи числа $i=\sqrt{-1}$, такъ какъ $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

Функція x^4-8x^3-8 дѣлается приводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{3}$, дѣйствительно:

$$x^4-8x^3-8=$$
$$=[x^2-4x-2+2\sqrt{3}(x+1)]\,[x^2-4x-2-2\sqrt{3}(x+1)].$$

Часто намъ придется пріобщать не одну ирраціональность, а нѣсколько. Такъ, функція x^4-2x^2+2 остается неприводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{2}$, но дѣлается приводимой, если мы пріобщимъ еще ирраціональность $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$:

$$x^4-2x^2+2=\left(x^2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right)\left({}^2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right).$$

Теорема 6 справедлива и при обобщенномъ понятіи о приводимости:

Если коэффиціенты функцій $F(x)$ и $f(x)$ принадлежатъ какой нибудь расширенной области раціональности, а функція $f(x)$, неприводимая въ этой области, имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то $F(x)$ дѣлится на $f(x)$.

---

[3]) Понятіе объ области ирраціональности играетъ такую важную роль и въ такой мѣрѣ необходимо для пониманія главы XIX, что мы считаемъ необходимымъ остановиться на этомъ понятіи значительно подробнѣе.

Подъ *областью раціональности* (по Кронекеру) или *числовымъ корпусомъ* (Zahlenkörper, по Дедекинду) разумѣютъ числовой комплексъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что производство каждаго изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ любыми двумя числами этого комплекса (конечно, кромѣ дѣленія на нуль) приводитъ къ числу того же комплекса. Этимъ свойствомъ обладаютъ: комплексъ (R) всѣхъ раціональныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ и мнимыхъ чиселъ. Но и помимо этого существуетъ множество числовыхъ комплексовъ, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ. Такъ напримѣръ, совокупность всѣхъ чиселъ вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть любыя раціональныя числа, обладаетъ указаннымъ свойствомъ и потому образуетъ область раціональности; дѣйствительно, сумма, разность, произведеніе или частное двухъ чиселъ этого комплекса есть число того же комплекса:

$$(a+b\sqrt{2}) \pm (a'+b'\sqrt{2}) = (a \pm a') + (b \pm b')\sqrt{2},$$

$$(a+b\sqrt{2})(a'+b'\sqrt{2}) = (aa'+2bb') + (ab'+ba')\sqrt{2},$$

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{a'+b'\sqrt{2}} = \frac{aa'-2bb'}{a'^2-2b'^2} + \frac{(a'b-ab')}{a'^2-2b'^2}\sqrt{2};$$

(такъ какъ a' и b' суть раціональныя числа, то знаменатель $a'^2-2b'^2$ не можетъ быть нулемъ, если a' и b' не обращаются совмѣстно въ нуль).

Замѣтимъ, что въ составъ каждой области раціональности входитъ область R всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Дѣйствительно, если въ составъ нѣкоторой области раціональности входитъ число a, то въ составъ ея, согласно опредѣленію, входитъ также число $\frac{a}{a}=1$; а поэтому въ составъ этой области входятъ также числа: $1+1=2$, $2+1=3$ и т. д., т. е. всѣ цѣлыя числа; отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что въ составъ области входятъ и всѣ дроби.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую область раціональности P. Пусть ε будетъ число, этой области не принадлежащее. Присоединимъ теперь къ области P всѣ числа, которыя мы можемъ получить путемъ производства раціональныхъ дѣйствій надъ числами области P и числомъ ε. Ясно, что этимъ путемъ мы получимъ новую область раціональности, которую мы будемъ обозначать черезъ $P(\varepsilon)$. Этотъ процессъ образованія области $P(\varepsilon)$ изъ области P и называется пріобщеніемъ ирраціональности ε къ области P.

Такъ напримѣръ, производство раціональныхъ дѣйствій надъ раціональными числами и числомъ $\sqrt{2}$ всегда приводитъ къ числу вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть раціональныя числа. Поэтому область, содержащая всѣ числа вида $a+b\sqrt{2}$ гдѣ a и b суть раціональныя числа, представляетъ собой результатъ пріобщенія числа $\sqrt{2}$ къ области R. Точно также совокупность всѣхъ комплексныхъ чиселъ есть результатъ пріобщенія числа i къ области вещественныхъ чиселъ.

Положимъ теперь, что P есть нѣкоторыя область раціональности, а $f(x)$ есть цѣлая функція, коэффиціенты которой принадлежатъ этой области; въ такомъ случаѣ говорятъ, что функція $f(x)$ принадлежитъ этой области. Такъ, функція x^2-2x+5 принадлежитъ области R, функція $x^2-2x\sqrt{2}+3-\sqrt{2}$ принадлежитъ области $R(\sqrt{2})$.

Функція, принадлежащая нѣкоторой области раціональности, называется приводимой въ этой области, если она разлагается на множителей, принадлежащихъ той же области. Въ противномъ случаѣ она называется неприводимой въ этой области.

Функція, неприводимая въ нѣкоторой области, можетъ сдѣлаться приводимой, если мы расширимъ область путемъ пріобщенія нѣкоторой ирраціональности. Такъ, функція x^2-2, принадлежащая области R, неприводима въ этой области; но если мы пріобщимъ къ этой области $\sqrt{2}$, то въ области $R(\sqrt{2})$ функція разлагается на множителей $x-\sqrt{2}$ и $x+\sqrt{2}$. Эта идея выясняется въ текстѣ на другихъ примѣрахъ.

ГЛАВА XII.

Основныя теоремы алгебры.

§ 64. Симметрическія функціи.

1. Условимся разумѣть подъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ совершенно произвольныя (неопредѣленныя, перемѣнныя) величины. Какъ мы видѣли въ § 61, можно составить функцію n-той степени $f(x)$, корнями которой будутъ эти n величинъ;

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (1)$$

и есть требуемая функція; коэффиціентъ при высшей степени x мы полагаемъ равнымъ 1. Располагая $f(x)$ по степенямъ x, получимъ:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n, \qquad (2)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} -a_1 &= \Sigma x_1, \\ a_2 &= \Sigma x_1 x_2, \\ -a_3 &= \Sigma x_1 x_2 x_3, \qquad (3) \\ &\ldots\ldots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n, \end{aligned}$$

т. е.—a_1 есть сумма всѣхъ величинъ x_i, a_2—сумма произведеній этихъ величинъ по двѣ,—a_3—сумма ихъ произведеній по три и т. д., наконецъ $\pm a_n$ есть произведеніе всѣхъ x_i (ср. § 55).

Итакъ, коэффиціенты функціи $f(x)$ можно выразить раціонально черезъ ея корни.

Суммы, стоящія въ правыхъ частяхъ равенствъ (3), т. е. сумма всѣхъ x_i, сумма ихъ произведеній по два, сумма ихъ произведеній по три и т. д. суть симметрическія функціи отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; это значитъ, эти функціи не мѣняются, если какимъ либо образомъ переставить величины

$x_1 . x_2, \dots, x_n$. Эти функціи—a_1, a_2,—$a_3, \dots, \pm a_n$ мы назовемъ основными симметрическими функціями.

2. Опредѣлимъ теперь, что мы будемъ, вообще, разумѣть подъ симметрическими функціями.

Выраженіе $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, составленное посредствомъ дѣйствій сложенія, вычитанія и умноженія надъ n величинами $x_1, x_2, \dots, x_n$ и какими нибудь другими числами, называется симметрической функціей отъ этихъ величинъ, если оно не мѣняется при произвольной перестановкѣ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3. Относительно симметрическихъ функцій имѣетъ мѣсто теорема, важная для всей алгебры. Эта теорема заключается въ слѣдующемъ:

Каждая симметрическая функція $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можетъ быть выражена въ видѣ цѣлой и раціональной функціи отъ основныхъ симметрическхъ функцій.

Иначе говоря, при помощи сложенія, вычитанія и умноженія можно образовать такое выраженіе $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$, что равенство

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (4)$$

при замѣнѣ величинъ $a_1, \dots, a_n$ ихъ выраженіями (3) обращается въ тождество.

Мы приведемъ очень простое и изящное доказательство этой теоремы, данное Коши.

Ясно, что теорема справедлива для $n = 1$; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ только одну основную симметрическую функцію $-a_1 = x_1$. Мы докажемъ нашу теорему для всякаго n, если, пользуясь совершенной индукціей, допустимъ, что она справедлива для $n-1$ перемѣнныхъ величинъ и въ этомъ предположеніи докажемъ, что она справедлива и для функцій, содержащихъ n перемѣнныхъ.

4. Чтобы получить основныя симметрическія функціи $n-1$ величинъ $x_2, x_3, \dots, x_n$, составимъ частное

$$\varphi(x) = f(x) : (x - x_1),$$

которое равно $(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$; слѣдовательно,

$$(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \dots + q_{n-1},$$

гдѣ (§ 61, (6)):

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_1 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} . \end{aligned} \qquad (5)$$

Итакъ, основныя симметрическія функціи величинъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ суть цѣлыя функціи величинъ x_1 и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Предполагая же, что наша теорема справедлива для $n-1$ величинъ, мы можемъ утверждать, что всякая симметрическая функція отъ $x_2, \ldots, x_n$ выражается раціонально черезъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Представимъ себѣ, что данная намъ симметрическая функція

$$S = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

расположена по степенямъ x_1; тогда коэффиціенты отдѣльныхъ степеней будутъ симметрическими функціями отъ $x_2, \ldots, x_n$ и, слѣдовательно, выражаются цѣлыми функціями отъ величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Предполагая теорему 3 справедливой для симметрическихъ функцій отъ $n-1$ велчинъ, мы получили, что функція S можетъ быть представлена въ видѣ цѣлой функціи величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Полученное такимъ образомъ выраженіе для S обозначимъ черезъ $F(x_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Если теперь цѣлую функцію $F(x, a_1, a_2 \ldots a_{n-1})$ раздѣлимъ на $f(x)$, то, согласно § 61 (5), получимъ частное Q и остатокъ R, степень котораго относительно x не превосходитъ $n-1$;

$$F(x) = Qf(x) + R;$$

Q и R, кромѣ $x, a_1, \ldots, a_{n-1}$, содержатъ также и a_n. Положимъ въ послѣдней формулѣ $x = x_1$; тогда $f(x_1) = 0$ и $F = S$; слѣдовательно:

$$S = R(x_1) = R(x_1, a_1, \ldots, a_n),$$

гдѣ R есть цѣлая функція отъ $x_1, a_1, \ldots, a_n$, степень которой относительно x_1 не превышаетъ $n-1$.

По предположенію, S есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она не мѣняется, если, напримѣръ, замѣстить другъ другомъ x_1 и x_2; не мѣняются при этомъ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Слѣдовательно, S равно также $R(x_2)$. Вообще

$$S = R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = \ldots = R(x_n).$$

Цѣлая функція $R(x) - S$, степень которой не превышаетъ $n-1$, обращается въ нуль для n значеній перемѣннаго x: $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Согласно § 61, 5, она должна сводиться къ нулю тождественно. Положимъ:

$$R(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1};$$

тогда всѣ коэффиціенты A_0, A_1, A_2, . . . $(A_{n-1} - S)$ должны быть равны нулю. Слѣдовательно,

$$S = A_{n-1},$$

т. е. S равно нѣкоторой цѣлой функціи отъ a_1, a_2, a_3, . . . , a_n, что и требовалось доказать[1]).

5. Приведенное доказательство теоремы о симметрическихъ функціяхъ даетъ способъ вычисленія ихъ. Правда, большей частью дѣло не обходится безъ продолжительныхъ вычисленій. Разберемъ, напримѣръ, функцію $(n = 3)$

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

которая, очевидно, есть симметрическая функція отъ x_1, x_2, x_3. Пусть

$$-a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad -a_3 = x_1x_2x_3$$

будутъ основныя симметрическія функціи; количества x_1, x_2 и x_3 служатъ корнями функціи третьей степени:

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

а x_1, x_2—корнями функціи второй степени:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^2 + (x_1 + a_1)x + (x_1^2 + a_1x + a_2).$$

Слѣдовательно:

$$x_2 + x_3 = -(x_1 + a_1), \quad x_2x_3 = x_1^2 + a_1x_1 + a_2,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2,$$
$$(x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 = -3x_1^2 - 2a_1x_1 - (4a_2 - a_1^2).$$

---

[1]) Полезно выяснить себѣ тождества (5) на частномъ примѣрѣ; положимъ, что мы имѣемъ четыре перемѣнныхъ; тогда

$$-q_1 = x_2 + x_3 + x_4,$$
$$q_2 = x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$
$$-q_3 = x_1x_2x_3;$$

съ другой стороны,

$$-a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$
$$-a_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$
$$a_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

Слѣдовательно:

$$-D = (3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2)^2(3x_1^2 + 2a_1x_1 + 4a_2 - a_1^2).$$

Если вмѣсто x_1 поставить x и полученное выраженіе раздѣлить на $f(x)$, то остатокъ, который не долженъ зависѣть отъ x, и будетъ представлять собой требуемое выраженіе для D.

Можно упростить вычисленіе, если возвысить въ квадратъ $3x_1^2 + 2a_1x + a_2$ и понизить его степень при помощи уравненія $f(x_1) = 0$; получимъ:

$$(3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2)^2 = (a_1^2 - 3a_2)x_1^2 + (a_1a_2 - 9a_3)x_1 + (a_2^2 - 3a_1a_3).$$

Помножимъ это выраженіе на $3x_1^2 + 2a_1x_1 + 4a_2 - a_1^2$ и результатъ раздѣлимъ на $f(x)$, замѣняя x_1 на x. Такимъ путемъ вычисленія идутъ быстро и въ конечномъ результатѣ даютъ:

$$D = a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Это выраженіе носитъ названіе дискриминанта функціи третьей степени. Если $D = 0$, то это значитъ, что изъ трехъ корней x_1, x_2, x_3 два равны между собой.

§ 65. Суммы одинаковыхъ степеней.

1. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно выразить симметрическую функцію еще болѣе простымъ способомъ черезъ основныя. Разсмотримъ особенно важный изъ случаевъ этого рода.

Пусть

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = \varphi_1(x), \quad \frac{f(x)}{x - x_2} = \varphi_2(x), \ldots, \frac{f(x)}{x - x_n} = \varphi_n(x)$$

и

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}, \quad (1)$$

причемъ, согласно § 61, 3 и 4:

$$\varphi_1(x_1) = f'(x_1), \ \varphi_1(x_2) = 0, \ldots, \varphi_1(x_n) = 0;$$

такія же равенства имѣютъ мѣсто и для $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Равенства (5) выражаютъ, такимъ образомъ, слѣдующія тождества:

$$-(x_2 + x_3 + x_4) = x_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$
$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = x_1^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_1 +$$
$$+ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4);$$
$$-x_1x_2x_3 = x_1^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_1^2 +$$
$$+ x_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4).$$

Сумма этихъ функцій

$$F(x) = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x-x_n},$$

или

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)$$

есть цѣлая функція $(n-1)$ степени; при этомъ

$$F(x_1) = f'(x_1),\ F(x_2), = f'(x_2),\ \ldots,\ F(x_n) = f'(x_n).$$

Разность $F(x)-f'(x)$ точно такъ же есть цѣлая функція, степень которой не превосходитъ $n-1$. Эта разность обращается въ нуль для $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. для n значеній x; слѣдовательно, по теоремѣ § 61, 5 она сводится къ нулю тождественно. Итакъ, мы имѣемъ слѣдующее тождество, т. е. равенство, справедливое для всѣхъ значеній x:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x-x_n} = f'(x). \qquad (2)$$

2. Положимъ

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \ldots + q_{n-1}.$$

Тогда, согласно § 64, 4:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1{}^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1{}^3 + a_1 x_1{}^2 + a_2 x_1 + a_3, \qquad (3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + a_1 x_1^{n-3} + \ldots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Замѣняя здѣсь x_1 послѣдовательно черезъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$, мы получимъ всѣ члены суммы (2).

Если обозначимъ черезъ $\Sigma q_1, \Sigma q_2, \Sigma q_3, \ldots, \Sigma q_{n-1}$ суммы составленныхъ такимъ образомъ выраженій q, то равенство (2) приметъ видъ:

$$nx^{n-1} + x^{n-2}\Sigma q_1 + x^{n-3}\Sigma q_2 + \ldots + \Sigma q_{n-1} = f'(x)$$ 2);

---

2) Это получается въ виду соотношенія (2) путемъ почленнаго сложенія равенствъ

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x-x_1} &= x^{n-1} + q_1{}' x^{n-2} + q_2{}' x^{n-3} + \ldots + q'_{n-1}, \\ \frac{f(x)}{x-x_2} &= x^{n-1} + q_1{}'' x^{n-2} + q_2{}'' x^{n-3} + \ldots + q''_{n-1}, \\ \frac{f(x)}{x-x_3} &= x^{n-1} + q_1{}''' x^{n-2} + q_2{}''' x^{n-3} + \ldots + q'''_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

При этомъ

сравнивая это выраженіе $f'(x)$ съ (1), получимъ:

$$(n-1)a_1 = \Sigma q_1,\ (n-2)a_2 = \Sigma q_2, \ldots, a_{n-1} = \Sigma q_{n-1}. \quad (4)$$

Введемъ теперь симметрическія функціи, представляющія собой суммы одинаковыхъ степеней перемѣнныхъ, для которыхъ примемъ обозначенія:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_n^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n \ldots + x_n^n. \end{aligned}$$

Если мы по формуламъ (3) образуемъ Σq_i, то [3])

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= s_1 + na_1, \\ \Sigma q_2 &= s_2 + a_1 s_1 + na_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma q_{n-1} &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \ldots + na_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выраженія въ равенства (4), получимъ:

$$\begin{aligned} 0 &= s_1 + a_1, \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2a_2, \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3, \\ 0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + a_3 s_{n-4} + \ldots + (n-1)a_{n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта система уравненій легко разрѣшается относительно суммъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Мы получимъ ихъ въ функціяхъ отъ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ s_3 &= -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\ s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &q_1' = x_1 + a_1,\ q_2' = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,\ q'_3 = x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \ldots \\ &q_1'' = x_2 + a_1,\ q_2'' = x_2^2 + a_1 x_2 + a_2,\ q_3'' = x_2^3 + a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3, \ldots \\ &q_1''' = x_3 + a_1,\ q_2''' = x_3^2 + a_1 x_3 + a_2,\ q_3''' = x_3^3 + a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[3]) Смотри предыдущее примѣчаніе:

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= q'_1 + q_1'' + q'''_1 + \ldots q_1^{(n)}, \\ \Sigma q_2 &= q'_2 + q_2'' + q'''_2 + \ldots q_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней легче, чѣмъ другимъ путемъ, вычисляются многія другія симметрическія функціи.

3. Основныя симметрическія функціи можно также выразить черезъ суммы $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$; напримѣръ:

$$\begin{aligned} a_1 &= -s_1, \\ 2a_2 &= s_1^2 - s_2, \\ 2\,.\,3a_3 &= -s_1^3 + 3s_1s_2 - 2s_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція $f(x)$ вполнѣ опредѣляется, если извѣстно, что $a_0 = 1$, и даны суммы одинаковыхъ степеней ея корней; кромѣ того, любая симметрическая функція корней $f(x)$ можетъ быть выражена черезъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Выраженія функцій s черезъ a, какъ видно изъ предыдущихъ формулъ, имѣютъ коэффиціентами только цѣлыя числа; выраженія же функцій a черезъ суммы s содержатъ и дробные коэффиціенты.

4. Съ помощью равенствъ (6) можно находить суммы s_k пока $k < n$. Очень легко, впрочемъ, получить равенства для нахожденія $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, составляя суммы [4]:

$$\Sigma f(x_1) = 0,\ \Sigma x_1 f(x_1) = 0,\ \Sigma x_1^2 f(x_1) = 0, \ldots,$$

а именно:

$$\begin{aligned} 0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + n a_n, \\ 0 &= s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \ldots + a_n s_1, \\ 0 &= s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \ldots + a_n s_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

---

[4] Такъ какъ

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0, \\ f(x_2) &= x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + a_2 x_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_2 + a_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) &= x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n = 0, \end{aligned}$$

то и сумма этихъ выраженій равна нулю; это и выражено въ текстѣ равенствомъ $\Sigma f(x_1) = 0$. Производя же сложеніе въ дѣйствительности, мы получимъ первое изъ равенствъ (9). Точно такъ же, произведенія $x_1 f(x_1)$, $x_2 f(x_2) \ldots x_n f(x_n)$ равны нулю, а потому и сумма ихъ равна нулю; это и выражено въ текстѣ равенствомъ $\Sigma x_1 f(x_1) = 0$. Раскрывая произведенія и складывая ихъ, получимъ второе изъ равенствъ (9) и т. д.

Тѣмъ же путемъ можно вычислить $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$; составимъ для этого суммы:

$$\Sigma x_1^{-1} f(x_1) = 0,\ \Sigma x_1^{-2} f(x_1) = 0, \ldots,$$

откуда

$$0 = s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \ldots + a_n s_{-1},$$

$$0 = s_{n-2} + a_1 s_{n-3} + a_2 s_{n-4} + \ldots + a_n s_{-2};$$

сумму s_0 нужно полагать равной n. Замѣтимъ, что въ выраженія суммъ $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ послѣднія будутъ входить также въ составъ знаменателей *).

5. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ. Положимъ, что нужно вычислить симметрическую функцію $\Sigma x_1^2 x_2^2$, т. е. сумму произведеній квадратовъ перемѣнныхъ x_i, взятыхъ попарно. Обратимся для этого къ равенству

$$(\Sigma x_1^2)^2 = 2\Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^4$$

или

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 = \tfrac{1}{2}(s_2^2 - s_4) =$$

$$= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4.$$

Вотъ еще задача, которая рѣшается съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней. Пусть

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

данная функція отъ x n-той степени; нужно найти функцію

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

корни которой равны квадратамъ корней функціи $f(x)$.

Если $s_1, s_2, s_3, \ldots$ суть суммы одинакихъ степеней корней функціи $f(x)$, то $s_2, s_4, s_6, \ldots$ суть суммы соотвѣтствующихъ степеней корней функціи $F(x)$; формулы пункта 3-го дадутъ для коэффиціентовъ $A_1, A_2, \ldots$

---

*) Первыя выраженія суммъ для одинаковыхъ степеней далъ **Альбертъ Жираръ** (Albert Girard) въ сочиненіи „Invention nouvelle en l'algèbre" (1629). Эти выраженія были обобщены Ньютономъ (Arithmetica universalis, 1707). Поэтому они и носятъ названіе **Ньютоновыхъ формулъ**.

выраженія:

$$A_1 = -s_2,$$
$$2A_2 = s_2^2 - s_4,$$
$$6A_3 = -s_2^3 + 3s_2s_4 - 2s_6,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Отсюда съ помощью формулъ (7) можно выразить $A_1, A_2, \ldots$ черезъ $a_1, a_2, \ldots$; напримѣръ:

$$A_1 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4.$$

Какъ и слѣдовало ожидать, выраженіе A_2 тождественно съ выраженіемъ, найденнымъ выше для $\Sigma x_1^2 x_2^2$.

Этотъ способъ примѣнимъ и въ томъ случаѣ, если по данной функціи $f(x)$ нужно опредѣлить другую, корни которой суть любыя степени, скажемъ, k-тыя степени корней функціи $f(x)$. Суммы одинаковыхъ степеней корней функціи $F(x)$ будутъ тогда $s_k, s_{2k}, \ldots s_{3k}$. Коэффиціенты A опредѣляются по тѣмъ же формуламъ п. 3 го.

6. Можно еще другимъ путемъ опредѣлить коэффиціенты функціи $F(x)$, корни которой суть квадраты корней функціи $f(x)$. Съ этой цѣлью положимъ $x^2 = y$; если вмѣсто y поставимъ одинъ изъ корней функціи $F(x)$, то либо $f(\sqrt{y})$, либо $f(-\sqrt{y})$ должно обратиться въ нуль. Такимъ образомъ

$$F(y) = \pm f(\sqrt{y})\, f(-\sqrt{y}), \tag{10}$$

причемъ верхній знакъ имѣетъ мѣсто при четномъ, нижній при нечетномъ n [5]).

Разложимъ $f(x)$, на два слагаемыхъ $f_1(x) + xf_2(x)$, изъ которыхъ первое содержитъ всѣ четныя, а второе—нечетныя степени x; тогда:

$$F(y) = \pm\left(f_1(\sqrt{y}) + \sqrt{y}f_2(\sqrt{y})\right)\left(f_1(\sqrt{y}) - \sqrt{y}f_2(\sqrt{y})\right)$$
$$= \pm\left[\left(f_1(\sqrt{y})\right)^2 - y\left(f_2(\sqrt{y})\right)^2\right].$$

Въ послѣднюю формулу совершенно не входятъ нечетныя степени

---

[5]) Правая часть равенства (10), какъ обнаруживаютъ послѣдующія вычисленія, есть цѣлая функція n-ой степени отъ y; такъ какъ она имѣетъ тѣ же корни, что и $F(y)$, а старшіе коэффиціенты при указанномъ соотвѣтствіи знаковъ, равны, то обѣ функціи тождественны, что и выражается равенствомъ (10).

$\sqrt{y}$. Пусть, напримѣръ, n четное; тогда:

$$f_1(x) = x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \ldots,$$
$$f_2(x) = \qquad a_1x^{n-2} + a_3x^{n-4} + \ldots,$$

и потому

$$F(x) = \left(y^{\frac{n}{2}} + a_2y^{\frac{n-2}{2}} + a_4y^{\frac{n-4}{2}} + \ldots\right)^2 -$$
$$- y\left(a_1y^{\frac{n-2}{2}} + a_3y^{\frac{n-4}{2}} + \ldots\right)^2 =$$
$$= y^n + (2a_2 - a_1^2)y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4)y^{n-2} + \ldots$$

Вычисленія при этомъ пріемѣ еще проще, чѣмъ при пользованіи суммами одинаковыхъ степеней.

§ 66. Основная теорема о существованіи корня алгебраическаго уравненія.

1. Выше мы видѣли, что всегда можно опредѣлить n коэффиціентовъ цѣлой функціи $f(x)$ такъ, что эта функція будетъ имѣть корнями n произвольно заданныхъ величинъ; въ извѣстномъ смыслѣ можно сказать, что многообразіе функцій съ n корнями при различныхъ значеніяхъ n столь же велико, какъ и многообразіе всѣхъ функцій $f(x)$, которыя вообще можно составить. Этимъ еще не доказывается, конечно, что оба эти многообразія совершенно покрываютъ другъ друга; другими словами: еще не доказано, что функція n-той степени всегда имѣетъ n корней.

Достаточно, впрочемъ, доказать, что при всякомъ n каждая функція n-той степени имѣетъ по меньшей мѣрѣ одинъ корень (вещественный или мнимый). Въ самомъ дѣлѣ, пусть α есть корень функціи $f(x)$; функція $(n-1)$-ой степени $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ точно также имѣетъ корень β и т. д.; такимъ путемъ мы заключаемъ, что $f(x)$ разлагается на n линейныхъ множителей [6].

Если мы докажемъ, что каждая функція съ вещественными коэффиціентами имѣетъ корень, то распространить это на случай мнимыхъ коэффиціентовъ не составитъ труда. Чтобы убѣдиться въ этомъ возьмемъ двѣ функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ съ сопряженными мнимыми коэффиціентами; тогда $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ есть функція съ вещественными коэффиціентами. Если $f(x)$ имѣетъ корень α_1, то либо $f_1(\alpha_1) = 0$, либо $f_2(\alpha_1) = 0$. Пусть

---

[6] И, слѣдовательно, имѣетъ n корней.

$f_1(\alpha_1) = 0$; тогда, если α_2 есть число, сопряженное съ α_1, то $f_2(\alpha_2) = 0$ (§ 44, 4). Итакъ, каждая изъ функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣетъ корень.

Слѣдовательно, намъ достаточно доказать слѣдующую теорему:

Каждая цѣлая функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный или мнимый корень.

Эта теорема настолько важна, что ее называютъ основной теоремой алгебры. Впервые ее доказалъ Гауссъ. Онъ далъ этой теоремѣ три доказательства, построенныхъ на совершенно различныхъ основаніяхъ.

Второе и третье изъ этихъ доказательствъ не могутъ быть проведены элементарно. Первое же, опубликованное Гауссомъ въ докторской диссертаціи (1799 г.), а 50 годами позже существенно имъ упрощенное и усовершенствованное, такъ несложно и ясно, что его легко понять, обладая только элементарными знаніями. Желая изложить это доказательство именно въ такой удобопонятной формѣ, мы будемъ слѣдовать второй редакціи.

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаемъ, когда функція $f(x)$ имѣетъ вещественные коэффиціенты. По сдѣланному выше замѣчанію, мы не внесемъ этимъ существеннаго ограниченія, между тѣмъ это даетъ значительное упрощеніе.

2. Итакъ, пусть

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

цѣлая функція n-той степени, а коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ данныя вещественныя числа. Нужно доказать, что существуетъ вещественное или мнимое число, обращающее въ нуль $f(z)$, если его подставить вмѣсто z. Положимъ:

$$z = x + iy$$

и будемъ изображать z, какъ изложено въ § 47, точкой на плоскости. Тогда x и y будутъ координатами точки, которую мы для краткости будемъ называть точкой z.

Функція $f(z)$ въ каждой точкѣ этой плоскости имѣетъ опредѣленное значеніе; нужно доказать, что существуетъ по крайней мѣрѣ одна точка, въ которой $f(z)$ имѣетъ значеніе, равное нулю. Такую точку можно назвать корневой точкой функціи $f(z)$. Отдѣлимъ въ функціи $f(z)$ вещественную часть отъ мнимой:

$$f(z) = X + iY. \qquad (2)$$

Составныя части X и Y легко найти, примѣняя къ степенямъ

$(x+iy)$ формулу бинома. Впрочемъ, болѣе простыя формулы получатся при употребленіи полярныхъ координатъ благодаря теоремѣ Муавра.

Итакъ, положимъ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$(x+iy)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi);$$

согласно § 47, 8, получимъ:

$$\begin{aligned} X &= r^n\cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \ldots \\ &\quad + a_n, \\ Y &= r^n\sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \ldots \\ &\quad + a_{n-1} r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

3. Мы дадимъ сейчасъ другія выраженія для X и Y, которыми воспользуемся для вывода, очень важнаго для послѣдующаго изложенія.

Положимъ (см. главу о тригонометріи)

$$t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi,$$
$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2};$$

тогда

$$z = r\frac{(1+it)^2}{1+t^2}.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} (1+t^2)^n(X+iY) &= r^n(1+it)^{2n} + a_1 r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2) + \ldots \\ &\quad + a_n(1+t^2)^n; \end{aligned}$$

примѣняя формулу бинома къ отдѣльнымъ членамъ и располагая ихъ по степенямъ t, получимъ:

$$X = \frac{F(t)}{(1+t^2)^n}, \quad Y = \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n}, \tag{4}$$

гдѣ $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи отъ t, степеней не выше $2n$ и $2n-1$. (Помимо того $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи n-той степени отъ r).

4. Всѣ точки плоскости x, y, которымъ соотвѣтствуетъ постоянное значеніе модуля r, лежатъ на окружности радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ. Будемъ обозначать эту окружность черезъ (r). Если мы захотимъ найти точки, въ которыхъ X или Y обращаются въ нуль и которыя лежатъ на этой окружности, то нужно при постоянномъ r рѣшить уравненія: $F(t) = 0$ и $\Phi(t) = 0$, имѣя въ виду, что каждому значенію t соотвѣтствуетъ по одному значенію $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а слѣдовательно, и одна точка на кругѣ.

Нужно замѣтить, что, кромѣ корней $\varphi(t)=0$, функція Y имѣетъ корень при $t=\infty$, т. е. при $\varphi=\pi$ [7]). Зная степени функцій X и Y, мы можемъ сдѣлать слѣдующій выводъ.

Каждая изъ двухъ функцій X и Y на окружности (r) не можетъ обращаться въ нуль больше $2n$ разъ.

Отсюда слѣдуетъ, что ни одна изъ функцій X и Y не можетъ быть равна нулю на протяженіи нѣкоторой площади.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ такую площадь всегда можно провести дугу окружности съ центромъ въ началѣ координатъ; на этой окружности X или Y обращались бы въ нуль безчисленное множество разъ.

5. Корневыми точками функціи $f(z)$ служатъ точки, въ которыхъ одновременно

$$X=0 \quad \text{и} \quad Y=0.$$

При доказательствѣ существованія такихъ точекъ мы будемъ опираться на непрерывность функцій X и Y. Это свойство функціи можно выразить такъ:

Пусть c_1 и c_2 двѣ точки, въ которыхъ X имѣетъ разные знаки. На каждой линіи (прямой или кривой), соединяющей эти двѣ точки c_1 и c_2, есть, по крайней мѣрѣ, одна точка, въ которой X обращается въ нуль [8]).

То же относительно Y.

6. Сначала займемся функціей Y и докажемъ слѣдующее предложеніе.

Можно r взять столь большимъ, что функція Y на окружности (r) будетъ имѣть тотъ же знакъ, что и $\sin n\varphi$, по крайней мѣрѣ, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда $\sin n\varphi$ по абсолютной величинѣ превосходитъ напередъ заданное произвольно малое положительное число ϑ.

---

[7]) Въ выраженіи для X степень t въ числителѣ и знаменателѣ одна и та же, въ выраженіи же для Y степень t въ числителѣ ниже, нежели въ знаменателѣ. Поэтому, когда t возрастаетъ неопредѣленно по абсолютной величинѣ, то X стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, а Y—къ нулю. Поэтому X обращается въ нуль не болѣе $2n$ разъ, т. е. при тѣхъ значеніяхъ t, которыя обращаютъ въ нуль числителя; Y обращается не болѣе $2n-1$ разъ въ нуль вслѣдствіе того, что обращается въ нуль числитель, и одинъ разъ при $t=\infty$, т. е. при $\varphi=\pi$; всего, слѣдовательно, каждая изъ функцій X и Y можетъ обратиться въ нуль не болѣе $2n$ разъ.

[8]) Это утвержденіе нуждается, конечно, въ доказательствѣ, которое, однако, требуетъ продолжительныхъ разсужденій.

Въ этомъ мы убѣждаемся, представляя Y въ видѣ:

$$Y = r^n\left(\sin n\varphi + \frac{a_1}{r}\sin(n-1)\varphi + \frac{a_2}{r^2}\sin(n-2)\varphi + \ldots\right).$$

Дѣйствительно, всегда можно положить r настолько большимъ, что сумма всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за первымъ, по модулю, станетъ меньше любой величины, а слѣдовательно, и меньше ϑ; тогда знакъ опредѣляется первымъ членомъ.

Ведемъ наши разсужденія дальше.

Отмѣтимъ на окружности (r) точки, въ которыхъ

$$\varphi = 0\,, \frac{\pi}{n}, \ \frac{2\pi}{n}, \ \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

и обозначимъ эти точки цифрами:

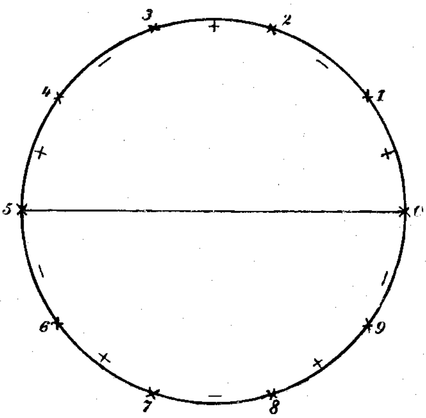
$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, 2n-1$$

Благодаря этому, на окружности получимъ $2n$ интерваловъ:

$$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3), \ldots, [(2n-1),\ 0],$$

въ которыхъ $\sin n\varphi$ попеременно имѣетъ положительное и отрицательное значеніе.

(Фиг. 13 даетъ это дѣленіе для случая $n = 5$).



Фиг. 13.

Если мы выдѣлимъ ближайшія окрестности точекъ дѣленія*) и если положить r достаточно большимъ, то и Y будетъ имѣтъ въ этихъ интервалахъ поперемѣнно положительныя и отрицательныя значенія[9]).

Согласно п. 5, функція Y должна обращаться въ нуль въ окрестности каждой изъ точекъ дѣленія; изъ предложенія же п. 4-го слѣдуетъ, что она не можетъ обращаться въ нуль ни

---

*) Окрестностями точекъ дѣленія мы будемъ называть такіе отрѣзки на окружности (r), въ предѣлахъ которыхъ

$$\frac{k\pi}{n} - \frac{\eta}{n} < \varphi < \frac{k\pi}{n} + \frac{\eta}{n},$$

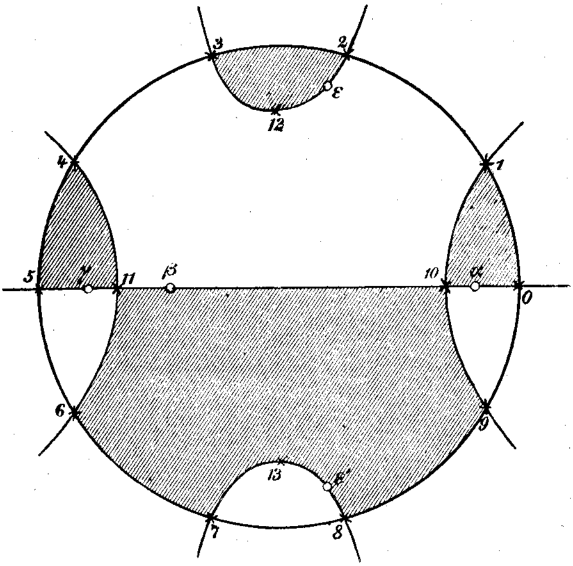
если положить $\vartheta = sin\,\eta$. Длина выдѣленной такимъ образомъ на окружности (r) дуги есть

$$\frac{2\eta r}{n}$$

[9]) Если мы положимъ, напримѣръ, $\varphi = \frac{\pi}{n}$, то $sin\, n\varphi = 0$; но если мы выдѣ-

въ какой другой точкѣ окружности (r).

Съ другой стороны, такъ какъ знакъ X при достаточно большомъ r зависитъ отъ знака перваго члена $r^n \cos n\varphi$, то X въ окрестностяхъ четныхъ точекъ 0, 2, 4, ..., $2n-2$ и въ самихъ этихъ точкахъ имѣетъ положительное значеніе, а въ нечетныхъ точкахъ отрицательное.



Фиг. 14.

7. Какъ мы видѣли въ п. 4, Y не можетъ обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ какой нибудь площади. Слѣдовательно, вся плоскость раздѣляется на области, въ которыхъ Y имѣетъ положительное или отрицательное значеніе; эти области отдѣлены другъ отъ друга линіями, на которыхъ Y обращается въ нуль.

Отъ нѣкотораго участка $(2g, 2g+1)$ окружности (r) внѣ круга (r) расположена область, въ которой Y имѣетъ положительное значеніе; эта область тѣмъ больше приближается краями къ сектору, заключенному между $\varphi = \frac{2g\pi}{n}$ и $\varphi = \frac{(2g+1)\pi}{n}$, чѣмъ больше мы будемъ удаляться

лимъ достаточно малую дугу η, какъ указано въ примѣчаніи автора, то въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n} - \eta$ до $\frac{\pi}{n}$ $\sin n\varphi > 0$, а въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n}$ до $\frac{\pi}{n} + \eta$ $\sin n\varphi < 0$, слѣдовательно, при достаточно большомъ r и Y мѣняетъ знакъ въ этомъ интервалѣ.

отъ центра[10]. Эта полоса должна имѣть продолженіе и внутри круга (r). Часть этой области, лежащую внутри круга (r) обозначимъ черезъ G; эта часть можетъ быть очень разнообразной по своему контуру; два контура, касающіеся другъ друга въ отдѣльныхъ точкахъ мы не будемъ, однако, считать соединенными.

Площадь G либо оканчивается внутри круга (r) и, кромѣ интервала $(2g, 2g+1)$, не приходитъ болѣе въ соприкосновеніе съ окружностью, либо достигаетъ другого интервала $(2k, 2k+1)$, либо, наконецъ, раздѣляется на двѣ и больше вѣтви, изъ которыхъ каждая кончается на какомъ нибудь участкѣ $(2l, 2l+1)$.

Примѣромъ перваго случая на фиг. 14 можетъ служить область (0, 1, 10) или (2, 3, 12,); примѣромъ второго случая служитъ область (8, 9, 10, 11, 6, 7). Въ этомъ простомъ примѣрѣ не имѣетъ мѣста дѣленіе на многія вѣтви.

Можно было бы предположить, что внутри площади G лежитъ, какъ островъ, маленькая площадка, въ которой Y опять имѣетъ отрицательное значеніе; и такого рода контуръ (замѣтимъ мимоходомъ, этотъ случай въ дѣйствительности не можетъ представиться) не помѣшалъ бы нашимъ заключеніямъ.

8. Представимъ себѣ, что мы обходимъ контуръ области G такимъ образомъ, что самая область остается всегда слѣва. Тогда каждый интервалъ окружности, входящій въ составъ контура, въ которомъ Y имѣетъ положительное значеніе, направленъ такъ, что внутренняя часть круга лежитъ влѣво, т. е. мы проходимъ дугу отъ четной точки къ нечетной. Контуръ G покидаетъ окружность (r) на нечетной точкѣ дѣленія и встрѣчаетъ ее снова въ четной.

Разсмотримъ часть контура S, которая отъ точки $2g+1$ черезъ внутреннюю часть круга (r) ведетъ къ точкѣ $2k$; по всей длинѣ контура S $Y=0$. Въ точкѣ $2g+1$ функція X имѣетъ отрицательное значеніе, а въ точкѣ $2k$—положительное. Слѣдовательно, на контурѣ S функція X должна, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ обратиться въ нуль. Точка, въ которой X обращается въ нуль, и будетъ корневой точкой функціи $f(z)$,

---

[10] Когда φ становится больше $\frac{2g\pi}{n}$, то $\sin n\varphi$ получаетъ положительное значеніе, которое мѣняетъ знакъ лишь послѣ того какъ φ пройдетъ черезъ $\frac{(2g+1)\pi}{n}$ Такимъ образомъ въ интервалѣ отъ $\frac{2g\pi}{n}+\eta$ до $\frac{(2g+1)\pi}{n}-\eta$ функція Y имѣетъ положительное значеніе; къ ней примыкаетъ такимъ образомъ положительная область, которая расширяется съ увеличеніемъ r, такъ какъ ея границы приближаются къ радіусамъ, ограничивающимъ секторъ $\left(\frac{2g\pi}{n}, \frac{(2g+1)\pi}{n}\right)$.

существованіе которой такимъ образомъ доказано. Для лучшаго уясненія см. фиг. 14; въ предположеніи, что

$$f(z) = z^5 - 4z - 2$$

она приблизительно соотвѣтствуетъ дѣйствительному положенію дѣла.

На контурѣ (1, 10, 0) лежитъ корневая точка α,
" " (3, 12, 2) " " " ε,
" " (5, 11, 4) " " " γ,
" " (9, 10 11, 6) " " " β,
" " (8, 13, 7) " " " ε'

ГЛАВА XIII.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

§ 67. Сравненія.

1. Какъ мы видѣли выше (§ 14), по двумъ произвольно взятымъ натуральнымъ числамъ m и n всегда можно опредѣлить два такихъ числа q и r, что

$$m = qn + r;$$

при этомъ q можетъ быть нулемъ или положительнымъ числомъ, а r удовлетворяетъ условію

$$0 \leqslant r < n.$$

Число r называется остаткомъ или вычетомъ числа m по n. Остатокъ при данномъ n можетъ имѣть только одно изъ n значеній:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1. \qquad (1)$$

Два числа m и m', которыя имѣютъ одинъ и тотъ же остатокъ, называются равноостаточными или сравнимымы по модулю n. Въ этомъ случаѣ

$$m' = q'n + r$$

и слѣдовательно,

$$m - m' = (q - q')n,$$

т. е. $m - m'$ дѣлится на n.

Обратное предложеніе тоже имѣетъ мѣсто; именно: если разность двухъ чиселъ дѣлится на n, то эти числа равноостаточны.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$m = qn + r,\quad m' = q'n + r',$$

получимъ:

$$m-m'=(q-q')\,n+r-r'.$$

Если $m-m'$ дѣлится на n, то и разность $r-r'$ должна въ данномъ случаѣ дѣлиться на n. Но оба числа r и r' принадлежатъ ряду чиселъ (1); слѣдовательно, ихъ разность по абсолютной величинѣ не можетъ быть больше $n-1$ и потому, будучи отличной отъ нуля, не можетъ дѣлиться на n. Слѣдовательно, $r=r'$.

2. Сравнимость двухъ чиселъ, слѣдуя Гауссу, обозначаютъ такъ:

$$m\equiv m' \pmod{n} \tag{2}$$

(словами: m сравнимо съ m' по модулю n или короче—по n). Самое же соотношеніе (2) называется сравненіемъ.

Каждое число сравнимо со своимъ остаткомъ, если за модуль взять дѣлителя:

$$m\equiv r \pmod{n}.$$

Если при вычисленіи модуль не мѣняется, то его часто можно опустить, не опасаясь недоразумѣній; такъ и нужно понимать дальнѣйшія сравненія.

3. При вычисленіяхъ со сравнимыми числами важны слѣдующія теоремы.

Если

$$a\equiv\alpha \quad \text{и} \quad b\equiv\beta,$$

то и

$$\begin{aligned} a+b&\equiv\alpha+\beta,\\ a-b&\equiv\alpha-\beta,\\ ab&\equiv\alpha\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Въ справедливости этихъ теоремъ легко убѣдиться изъ равенствъ:

$$\begin{aligned} (a+b)-(\alpha+\beta)&=(a-\alpha)+(b-\beta),\\ (a-b)-(\alpha-\beta)&=(a-\alpha)-(b-\beta),\\ ab-\alpha\beta&=(a-\alpha+\alpha)\,(b-\beta+\beta)-\alpha\beta,\\ &=(a-\alpha)\,(b-\beta)+\beta\,(a-\alpha)-\alpha\,(b-\beta). \end{aligned}$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что если $a-\alpha$ и $b-\beta$ дѣлятся на n, то и разности $(a\pm b)-(\alpha\pm\beta)$, $ab-\alpha\beta$ тоже дѣлится на n, какъ того требуютъ теоремы (3).

4. Если

$$a\equiv\alpha,\quad ab\equiv\alpha\beta$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ a и α суть числа, простыя относительно n, то и

$$b \equiv \beta.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$ab - \alpha\beta = a(b - \beta) + \beta(a - \alpha),$$

а такъ какъ разности $ab - \alpha\beta$ и $a - \alpha$ дѣлятся на n, то $a(b - \beta)$ дѣлится на n; но a есть число, простое относительно n; слѣдовательно, $b - \beta$ дѣлится на n (§ 15, 6).

5. Примѣняя нѣсколько разъ теорему о сравнимости произведеній (3), получимъ: если

$$a \equiv \alpha, \quad \text{то и} \quad a^k \equiv \beta^k,$$

гдѣ k есть любое положительное число.

6. Такъ какъ при модулѣ n число различныхъ остатковъ есть n, то, взявши больше чѣмъ n различныхъ чиселъ, мы найдемъ среди нихъ по крайней мѣрѣ два сравнимыхъ между собой. Вмѣстѣ съ тѣмъ можно многообразно составить n чиселъ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \tag{4}$$

среди которыхъ нѣтъ двухъ сравнимыхъ; для этого стоитъ только къ каждому изъ чиселъ (1) прибавить число n, взятое любое число разъ.

Числа (4) такой системы даютъ при дѣленіи на n всѣ возможные остатки (1), при чемъ каждый остатокъ появляется одинъ разъ. Поэтому такая система называется полной системой остатковъ или вычетовъ для модуля n.

Если вмѣсто неопредѣленнаго знака x подставлять одно за другимъ всѣ числа системы (4), то говорятъ, что x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ.

7. Если m и n суть числа, первыя между собою, то r должно быть простымъ относительно n, ибо общій дѣлитель чиселъ n и r былъ бы также дѣлителемъ числа $m = qn + r$. Въ этомъ случаѣ изъ ряда возможныхъ остатковъ (1) нѣкоторые отпадаютъ; во всякомъ случаѣ не будетъ остатка 0.

Обозначимъ черезъ ν число содержащихся въ ряду (1) чиселъ, взаимно простыхъ съ n, и положимъ, чтобы лучше отмѣтить зависимость числа ν отъ n,

$$\nu = \varphi(n).$$

Пусть числа простыя относительно n, содержащіяся въ ряду (1), суть:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu; \tag{5}$$