

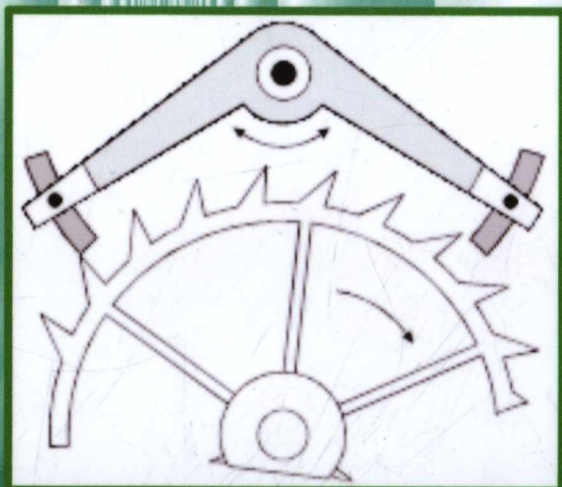
22.236.35073

076

**Остафійчук Б. К., Гасюк І. М., Кайкан Л. С.**

# **КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ**

**курс лекцій**



**Івано-Франківськ  
2012**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника

Остафійчук Б. К., Гасюк І. М., Кайкан Л. С.

## **КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ**

Курс лекцій

НБ ПНУС



787330

Івано-Франківськ  
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника  
2012

УДК 539.142.2  
ББК 22.236.35  
О-76

Рекомендовано до друку вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 1 від 15 вересня 2011 р.)

#### Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізики і хімії твердого тіла **Фреїк Д. М.**;  
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри радіофізики і електроніки **Запухляк Р. І.**

#### Остафійчук Б. К.

О-76 Коливання і хвилі : курс лекцій / Остафійчук Б. К., Гасюк І. М., Кайкан Л. С. – Івано-Франківськ : Вид-во Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2012. – 200 с.

Посібник містить курс лекцій з механічних коливань і хвиль і є складовою частиною курсу «Фізика коливних процесів», що читаються для спеціальності «Прикладна фізика».

Для студентів фізичних спеціальностей університетів та вищих навчальних закладів.

НАУКОВА БІБЛІОТЕКА

78 73 30

УДК 530.1  
ББК 22.236.55

Робота виконана за підтримки CRDF/USAID (UKX 2-9200 – IF-08) та МОН України (М/130-2009).

ISBN 978-966-640-321-9

© Остафійчук Б. К., Гасюк І. М., Кайкан Л. С., 2012

© Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2012

## Передмова

На кафедрі матеріалознавства і новітніх технологій Фізико-технічного факультету Прикарпатського національного університету ведеться робота з підготовки курсу «Фізика коливних процесів», призначеного для студентів фізичних спеціальностей вузів. Курс буде охоплювати три розділи: «Механічні коливання і хвилі», «Електромагнітні коливання», «Фізичні основи зберігання і передачі інформації», відповідати новим навчальним програмам, створених на кафедрі та відображати сучасні тенденції і технології фізичної освіти.

Структура курсу «Фізика коливних процесів» в методичному відношенні відображає єдність основних форм навчання. Лекції з кожної теми починаються з демонстрації та аналізу основних експериментальних фактів, які потім узагальнюються у вигляді фізичних законів та співвідношень. Більш глибоке розуміння фізичних явищ і закономірностей досягається на практичних заняттях.

Лекції 1-2 присвячені коливним процесам з одним ступенем вільності. Поряд з традиційними коливними системами (математичний та фізичний маятники) розглядаються характеристики різних осциляторів: камертона, прецизійного фізичного маятника, який використовується як гравітаційна антена, коливного контура, багатоатомних молекул, електрона у атомі тощо.

Для аналізу і опису коливань, зокрема нелінійних, запропоновано оригінальний підхід – аналіз фазового портрету для якісної оцінки процесу та використання енергетичного балансу для їх пояснення, з одного боку, та використання строгого математичного апарату для отримання загального і частинного розв'язків – з іншого. Таке поєднання методів в рамках одного курсу дає більш поглиблене розуміння як суті коливних процесів, так і особливостей їх математичного опису.

Детально розглянуто перехід від коливань з одним ступенем вільності до двох, трьох і в граничному випадку, при  $N \rightarrow \infty$  - до поширення коливань в суцільному середовищі. Введено поняття мод коливань та дисперсійного співвідношення, що дозволяє пов'язати частоту конкретної моди  $\omega$  з її конфігурацією, що задається хвильовим числом  $k$  (лекції 3-4).

Процесам, що мають місце при поширенні коливань у суцільних середовищах присвячені лекції 5-6. Значна увага приділяється акустичним хвилям і опису ряду ефектів, що їм притаманні, зокрема,

проаналізовано фізіологічні характеристики акустичних хвиль та класичні явища (інтерференція, дифракція, ефект Доплера).

Для найбільш підготовлених студентів на основі системи рівнянь Ейлера пропонується адаптований підхід до опису гравітаційно-капілярних хвиль, оцінюються їх характеристики та умови виникнення, включаючи хвилі цунамі, а також викладаються основні елементи нелінійного поширення акустичних хвиль скінченої амплітуди.

Автори виражають вдячність доц. Федоріву В.Д., проф. Яцури М.М., доц. Салію Я.П. за корисне обговорення змісту окремих тем, а також студентам Кайкан Юлії та Панчишину Тарасу за допомоги у редагуванні рукопису і цінні зауваження.

## ЛЕКЦІЯ 1

1. Незгасаючі гармонічні коливання з одним ступенем вільності.
2. Метод векторних діаграм.
3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.
4. Фазовий портрет коливної системи.
5. Негармонічні коливання математичного маятника.
6. Вільні коливання в дисипативних системах із в'язким тертям.
7. Згасання коливань у системах із сухим тертям.

Світ, що нас оточує, заповнений рухомими об'єктами. Їх рух у широкому значенні можна розділити на два класи, залежно від того, чи залишається об'єкт поблизу деякого середнього положення, чи такого положення немає. Прикладами рухів першого класу можуть бути коливання маятника, вібрація струни скрипки, коливання рівня води в чашці, рух електрона в атомі, світло, що багатократно відбивається від дзеркал лазера і т.д. Як приклад рухів другого класу можна навести ковзання хокейної шайби по льоду, рух імпульсу по довгому тросу під час смикання за його кінець, пучок електронів у електронно-променевої трубки. Деколи один і той самий рух можна віднести як до одного, так і до іншого класу, залежно від точки зору на явище: так, хвилі океану рухаються до берега, однак тіло, що плаває на поверхні, здійснює рух вгору і вниз, а також вперед і назад відносно деякого середнього положення.

Як відомо з курсу механіки, коливаннями називають процеси, що повторюються (або приблизно повторюються) з часом.

Колівальний рух замкнутих систем, викликаний попереднім зовнішнім збудженням, називають **вільними** або **власними коливаннями**.

Рух складної системи, яка має багато рухомих елементів, може бути представлений суперпозицією більш простих рухів, що відбуваються одночасно і називаються **модами**. Якою б складною не була система, властивості кожної її моди дуже подібні на властивості простого гармонічного осцилятора і для кожної моди вільних коливань системи сила, що діє на кожний рухомий елемент і віднесена до одиниці зміщення і одиниці маси, одна і та ж, і всі рухомі елементи коливаються з однаковою часовою залежністю

$\cos(\omega t + \varphi)$ , тобто з однаковою частотою  $\omega$  і однаковою фазовою сталою  $\varphi$ .

Будь-яка система, що здійснює коливання, може бути описана деякою фізичною величиною, відхилення якої  $f(x, y, z, t)$  від рівноважного значення залежить від координат і часу. Такими рухомими об'єктами можуть бути точкові маси або фізично малі елементи об'єму матеріального середовища (рідини, газу, твердого тіла і т.д.). Тому під час опису коливань таких систем функція  $f(x, y, z, t)$  може характеризувати зміщення (лінійне чи кутове), швидкість, прискорення, деформацію, потенціальну чи кінетичну енергію, тиск та ін. У випадку механічних коливань (коливання здійснюють тіла точкової маси, на які діють повертаючі сили) такою фізичною величиною є зміщення маси в точці з координатами  $x, y, z$  від положення рівноваги. Зміщення описується вектором  $s(x, y, z, t)$ . Цю векторну функцію називають **хвильовою функцією**. Вона є неперервною функцією  $x, y, z$  тільки в тому випадку, коли рух сусідніх елементів майже повторює рух даного елемента.

Наприклад, під час коливань у електричних системах величиною  $f$ , що коливається, може бути струм у колі, заряд на пластинах конденсатора коливального контуру, напруга на котушці індуктивності тощо. У випадку відкритого коливального контуру в оточуючому просторі коливаються електричне  $E(x, y, z, t)$  і магнітне  $B(x, y, z, t)$  поля.

Коливання можуть бути результатом короточасного зовнішнього збудження, тоді вони називаються **вільними** або **власними**. Такі коливання відбуваються на частотах, зумовлених виключно конструктивними особливостями системи – **власних частотах**, і тривають протягом деякого характерного часу – **часу згасання**, який залежить від дисипації енергії в системі.

Для підтримки незгасаючих коливань до системи повинна неперервно підводитись енергія від зовнішнього джерела. В цьому випадку коливання будуть вимушеними. Залежно від способу підтримування незгасаючих коливань розрізняють вимушені коливання під дією періодичної сили, автоколивання, параметричні коливання, релаксаційні коливання і т.д.

## 1.1. Незгасаючі гармонічні коливання з одним ступенем вільності

Якщо положення системи в будь-який момент часу може бути описане одним єдиним параметром  $f(t)$ , що залежить від часу, то така система володіє **одним ступенем вільності**. Прикладами таких коливань є математичний і пружинний маятники, коливальний контур.

Для математичного маятника  $f(t)$  може характеризувати або кутове зміщення ( $f(t) = \alpha(t)$ ), або лінійне зміщення вздовж траєкторії ( $f(t) = s(t)$ ) точкової маси  $m$  від положення рівноваги, а для пружинного маятника  $f(t) = s(t)$ , де  $s(t)$  – зміщення маси  $m$  від її рівноважного положення.

Для всіх систем з одним ступенем вільності зміщення рухомого елемента від положення рівноваги описується однією і тією ж часовою залежністю (**гармонічним коливанням**):

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.1)$$

Для маси, що здійснює коливання,  $s$  відповідає зміщенню маси від положення рівноваги; для коливального контуру  $s$  – це або струм в індуктивності, або заряд на обкладках конденсатора. Строго кажучи, часова залежність (1.1) не дає правильного опису коливань з дуже великою амплітудою. Для великих кутів відхилення маятника рівняння (1.1) є тільки грубим наближенням; для великих розтягів реальної пружини повертаюча сила вже не буде пропорційною до зміщення і рух також не буде описуватися рівнянням (1.1); достатньо великий заряд на пластинах конденсатора викличе його пробій, відбудеться проскакування іскри між пластинами, і часова поведінка заряду вже не буде задовольняти рівняння (1.1).

У рівнянні (1.1)  $A$  – додатна константа, що носить назву **амплітуди** – максимальне зміщення відносно положення рівноваги;  $\omega$  – **циклічна (колова) частота**, що має розмірність рад/с;  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  – **частота**, що вимірюється в герцах (Гц) або в циклах за секунду; величина, обернена до  $\nu$ , називається **періодом**  $T$  (час одного повного коливання) і вимірюється в секундах:  $T = \frac{1}{\nu}$ ;  $\varphi$  називається **фазовою сталою** або **фазою коливань** (положення коливної точки в момент часу  $t = 0$ ). Часто значення фази нас не цікавить, оскільки ми

завжди можемо «перевести годинник» так, щоб  $\varphi = 0$ . Тоді, замість загального рівняння (1.1), матимемо  $s(t) = A \cos \omega t$  або  $s(t) = A \sin \omega t$ .

Коливання, що описуються рівнянням (1.1), є результатом таких властивостей фізичної системи, як **повертаюча сила** та **інерція**. Повертаюча сила намагається повернути «рухомий елемент» у положення рівноваги ( $s = 0$ ), в результаті чого він отримує швидкість  $\frac{ds}{dt}$ . Чим більше значення  $s$ , тим більша повертаюча сила.

У випадку коливального контуру повертаюча сила виникає внаслідок відштовхування між електронами, які чинять перепону накопичення їх на одній з пластин конденсатора і намагається розподілити їх на пластинах так, щоб заряд кожної з пластин дорівнював нулю. Інерція системи протидіє будь-якій зміні  $\frac{ds}{dt}$ . Інерція коливального контуру визначається індуктивністю  $L$ , яка протидіє зміні величини струму  $\frac{ds}{dt}$  (у цьому випадку  $S$  – заряд на пластинах конденсатора).

Якщо коливання починаються за додатного зміщення  $s$  і швидкості  $\frac{ds}{dt} = 0$ , то повертаюча сила створює прискорення, що викликає появу швидкості, протилежної за знаком до зміщення. «Від'ємна» швидкість досягає максимуму в момент повернення  $s$  у положення рівноваги  $s = 0$ . При цьому повертаюча сила стане рівною нулю, а наявність від'ємної швидкості викличе появу і наростання від'ємного зміщення. Повертаюча сила стає при цьому додатною, однак тепер вона повинна долати інерцію, зумовлену від'ємною швидкістю. Нарешті, швидкість стане рівною нулю  $\frac{ds}{dt} = 0$ , а зміщення – максимальним і від'ємним ( $-s$ ), і процес буде повторюватися у зворотній послідовності. Розглянутий цикл повторюється: повертаюча сила намагається повернути  $s$  у нульове положення, тим самим викликаючи рух з деякою швидкістю; інерція, у свою чергу, зберігає швидкість, що є причиною «проскакування»  $s$  через нульове положення. Система здійснює коливання.

### 1.1.1. Коливання математичного маятника.

Математичний маятник складається з невагомої нерозтяжної нитки довжиною  $l$ , один кінець якої закріплений, а до іншого

прикріплена матеріальна точка масою  $m$  (рис.1.1). Позначимо через  $\alpha$  кут (у радіанах) відхилення маятника від вертикалі. (Маятник коливається в заданій площині, і його положення повністю визначається кутом  $\alpha$ ). Зміщення матеріальної точки по дузі кола дорівнює  $l\alpha$ ; такому зміщенню відповідають миттєва тангенціальна швидкість  $\frac{ld\alpha}{dt}$  і тангенціальне прискорення  $\frac{ld^2\alpha}{dt^2}$ . Повертаюча сила являє собою тангенціальну складову сили тяжіння

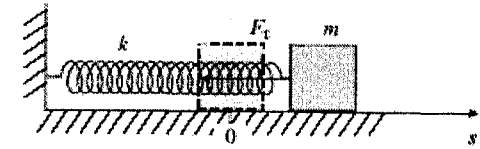
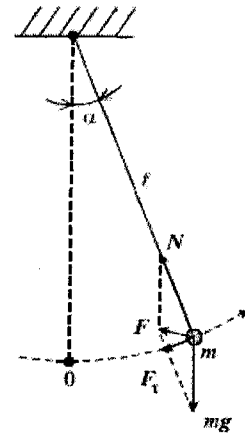


Рис. 1.1.

$mg$ , що діє на маятник. Ця складова дорівнює  $-mg \sin \alpha$ . За другим законом Ньютона:

$$ml \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \alpha(t). \quad (1.2)$$

Якщо знехтувати силами опору (далі ми їх врахуємо), то на масу  $m$  математичного маятника діятиме результуюча сила  $\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$  (де  $\vec{N}$  – сила натягу нитки) напрямлена, взагалі кажучи, під кутом до траєкторії, а на масу  $m$  пружинного маятника, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, горизонтальна сила  $F_t$ , яка є функцією зміщення  $s$  від положення рівноваги.

Оскільки зміщення  $s(t)$  у випадку математичного маятника визначається тангенціальним прискоренням, то рівняння (1.1) запишеться у вигляді:

для математичного маятника

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = F_t(s) = -mg \sin \frac{s}{l}, \quad (1.2a)$$

де  $l$  – довжина нитки, а  $\sin \frac{s}{l} = \sin \alpha(t)$ .

Скористаємося розкладом у ряд Тейлора:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

Для достатньо малих  $\alpha$  можна знехтувати всіма членами за винятком першого ( $\alpha$ ), тоді рівняння (1.2а) можна переписати у вигляді:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega^2 s.$$

Для пружинного маятника:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_r(s) \quad (1.26)$$

У рівнянні (1.2а) використана проекція  $\vec{F}_r(s)$  результуючої сили  $\vec{F}$  на напрям вектора швидкості у вигляді

$$\vec{F}_r = -mg \sin \alpha = -mg \sin \frac{s}{l}.$$

Будемо вважати, що зміщення малі, порівняно з довжиною нитки чи довжиною недеформованої пружини. За таких припущень, повертаюча сила пропорційна зміщенню:

$$\begin{aligned} F_r(s) &= -mg \frac{s}{l} \\ F_r(s) &= -ks \end{aligned} \quad (1.3)$$

Перший вираз записано із врахуванням умови, що  $\sin(s/l) \approx s/l$ , а другий – з використанням закону Гука, справедливого за умови малих деформацій пружини з жорсткістю  $k$ .

Із врахуванням (1.3) рівняння (1.2) набудуть однакового вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{dt^2} &= -\frac{g}{l} s; \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= -\frac{k}{m} s. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Розрізняються лише коефіцієнти в правих частинах цих рівнянь, які чисельно рівні відношенню повертаючої сили при одиничному зміщенні до маси тіла, що здійснює коливання, і мають розмірність  $[c^{-2}]$ . Якщо використати позначення

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.5)$$

то рівняння (1.4) набудуть вигляду рівняння незгасаючих гармонічних коливань, або рівняння гармонічного осцилятора:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (1.6)$$

Розв'язком рівняння (1.6) є сімейство гармонічних функцій

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.7)$$

у чому легко переконатися, двічі продиференціювавши функцію  $s(t)$  за часом:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \frac{d^2 s}{dt^2} &= -s_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Відзначимо, якщо рівняння руху зводиться до вигляду (1.6), то його розв'язком будуть гармонічні функції (1.7) з частотою  $\omega_0$ , що рівна кореню квадратному із коефіцієнту при  $s$ .

Значення цих гармонічних функцій у початковий момент часу (для  $t = 0$ ) визначаються початковою фазою  $\varphi_0$  і амплітудою коливань  $s_0$ .

Щоб збудити власні коливання, потрібно спочатку (для  $t = 0$ ) або відхилити тіло (задавши початкове зміщення  $s(0)$ ), або штовхнути його (задавши початкову швидкість  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = v(0)$ ), або зробити і те й інше одночасно. Знання початкових умов (зміщення і швидкості) дозволяє визначити амплітуду  $s_0$  і початкову фазу коливань  $\varphi_0$  з очевидних рівнянь:

$$s(0) = s(t) \Big|_{t=0} = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Big|_{t=0} = s_0 \sin \varphi_0; \quad (1.8)$$

$$v(0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Big|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos \varphi_0. \quad (1.9)$$

Розв'язок цих рівнянь має вигляд:

$$s_0 = \sqrt{s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}};$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 s(0)}{v(0)}.$$
(1.10)

Важливо відзначити, що амплітуда коливань  $s_0$ , рівна величині максимального зміщення тіла від положення рівноваги, може переважати початкове зміщення  $s(0)$  за наявності початкового поштовху.

Поряд з коловою частотою  $\omega_0$  коливання характеризуються частотою  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ , що рівна числу коливань за одиницю часу, і періодом коливань  $T = 1/\nu_0$ , який рівний тривалості одного коливання.

Період гармонічних коливань (так само як і частоти  $\omega_0$  і  $\nu_0$ ) не залежить від початкових умов і дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$
(1.11)

Розглянемо випадок поперечних коливань маси на пружинах. Маса  $m$  знаходиться між двома однаковими пружинами, кінці яких закріплені в стінках. Пружини не мають маси, їх коефіцієнти жорсткості однакові і дорівнюють  $k$ , початкова довжина  $a_0$ . Коли маса  $m$  знаходиться в положенні рівноваги, кожна пружина має довжину  $a$ . Знехтуємо силою тяжіння. (Сила тяжіння в даному випадку не створює ніякої повертаючої сили. Вплив сили тяжіння проявиться в тому, що система провисне, однак у даному наближенні це явище не вплине на результат). Маса  $m$  володіє трьома ступенями вільності. Вона може рухатися в напрямку осі  $z$  (уздовж осей пружин), здійснюючи поздовжні коливання (цей випадок розглянуто раніше), а також переміщатися в напрямках осей  $x$  та  $y$ , здійснюючи поперечні коливання. Для спрощення розглядатимемо ті коливання, що здійснюються тільки в напрямі осі  $x$ . В положенні рівноваги кожна пружина має довжину  $a$  і натяг  $T_0$ , що визначається як  $T_0 = k(a - a_0)$  у більш загальному вигляді кожна пружина має довжину  $l$  і натяг  $T_0 = k(l - a_0)$ .

Цей натяг напрямлений уздовж осі пружини. Повертаюча сила  $T \sin \theta$ , що діє на масу з боку кожної пружини в напрямку  $x$ , являє собою проекцію цього натягу на вісь  $x$ . Використовуючи другий закон Ньютона і рівність  $\sin \theta = \frac{x}{l}$ , знайдемо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x = -2T \sin \theta = -2k(l - a_0) \frac{x}{l} = -2kx \left(1 - \frac{a_0}{l}\right).$$

Дане рівняння справедливе тоді, коли виконуються припущення стосовно «лінійності», тобто справджується закон Гука.

Іншим прикладом є коливання фізичного маятника – тіла довільної форми маси  $m$ , закріпленого на горизонтальній осі  $O'$  так, що його центр мас знаходиться в точці  $O$ , віддаленій від осі на відстань  $a$ . Якщо відхилити маятник від вертикалі на невеликий кут  $\alpha$ , то він буде здійснювати вільні гармонічні коливання під дією сили тяжіння, прикладеної до центра мас.

Якщо відомий момент інерції тіла  $J$  відносно осі обертання, то рівняння обертового руху запишеться у вигляді:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M = -mga \sin \alpha.$$
(1.12)

Якщо вважати, що під час обертання, наприклад, проти годинникової стрілки, кут  $\alpha$  збільшується, то момент сили тяжіння  $M$  викликає зменшення цього кута, отже, при  $\alpha > 0$  момент  $M < 0$ . Це і відображає знак мінус у правій частині (1.12).

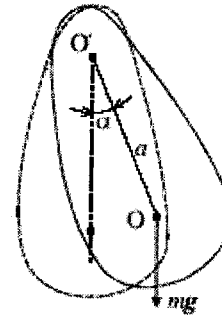


Рис. 1.2.

Для малих кутів відхилення рівняння (1.12) переходить у рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J} \alpha,$$
(1.13)

з виду якого зразу зрозуміло, що частота  $\omega_0$  і період коливань  $T$ , відповідно, дорівнюють

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{J},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}.$$
(1.14)



Порівнюючи вирази для періоду коливань фізичного (1.14) і математичного (1.11) маятників, легко побачити, що обидва періоди співпадають, якщо

$$\frac{J}{ma} = l \quad (1.15)$$

Тому фізичний маятник характеризується зведеною довжиною (1.15), яка дорівнює довжині математичного маятника з таким самим періодом коливань.

Період коливань фізичного маятника (а, отже, і його зведена довжина  $l$ ) немонотонно залежить від відстані  $a$ . Це легко бачити, якщо у відповідності з теоремою Гюйгенса-Штейнера момент інерції  $J$  виразити через момент інерції  $J_0$  відносно паралельної горизонтальної осі, що проходить через центр мас:  $J = J_0 + ma^2$ . Тоді період коливань (1.14) буде рівний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}} \quad (1.16)$$

Зміна періоду коливань під час віддалення осі обертання від центра мас  $O$  в обидва боки на відстані  $a$  показана на рис. 1.3.

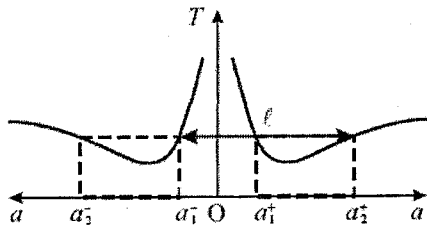


Рис. 1.3.

З рисунка видно, що один і той самий період коливань може реалізуватися відносно будь-якої з чотирьох осей, розташованих попарно по різні боки від центра мас. Можна показати, що сума відстаней  $a_1^+$

і  $a_2^+$  дорівнює зведеній довжині фізичного маятника:  $l = a_1^+ + a_2^+$ . В силу симетрії графіка, зрозуміло, що

$$l = a_2^+ + a_1^- \quad (1.17)$$

Ця обставина дозволяє для будь-якої осі обертання  $O^+$  визначити спряжену вісь  $O^-$ . Період коливань відносно цих осей однаковий, а відстань між ними рівна зведеній довжині фізичного маятника.

На рис.(1.4) зображені положення осей  $O^+$  і  $O^-$ , при цьому вісь обертання, віддалена на

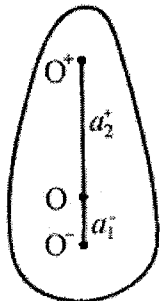


Рис. 1.4.

відстань  $a_2^-$ , за такої форми маятника знаходиться поза ним.

Фізичний маятник застосовують для вимірювання прискорення вільного падіння. З цією метою вимірюють залежність періоду коливань маятника від положення осі обертання і за даною експериментальною залежністю знаходять у відповідності з формулою (1.17) зведену довжину. Визначена таким чином довжина в поєднанні з вимірним з достатньою точністю періодом коливань відносно обох осей дозволяє розрахувати прискорення вільного падіння. Важливо відзначити, що для такого способу вимірювань не вимагається визначення положення центра мас, що в ряді випадків підвищує точність вимірювань.

## 1.2. Метод векторних діаграм

Гармонічні коливання (1.7) допускають наочну графічну інтерпретацію. Її зміст полягає в тому, що кожному гармонічному коливанню з частотою  $\omega_0$  можна поставити у відповідність вектор,

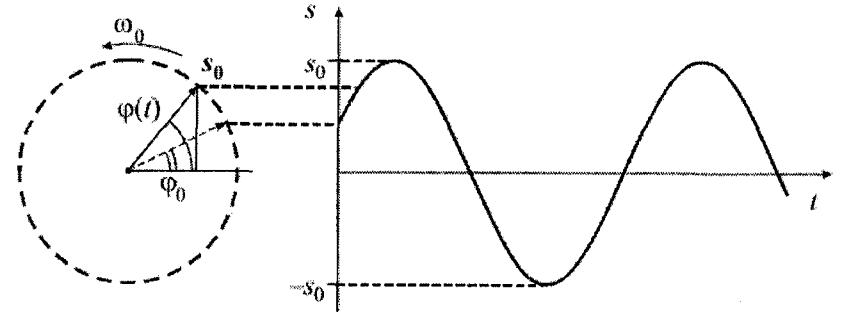


Рис. 1.5.

який обертається з кутовою швидкістю  $\omega_0$ , довжина якого дорівнює амплітуді  $s_0$ , а його початкове (стартове) положення задається кутом  $\varphi_0$ , що співпадає з початковою фазою (рис. 1.5).

Вертикальна проекція вектора  $\vec{s}_0$  змінюється з часом:  $s(t) = s_0 \sin \varphi(t)$ . Миттєве положення вектора  $\vec{s}_0$  визначається кутом  $\varphi(t)$ , який називається фазою і дорівнює:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 \quad (1.18)$$

За кутової швидкості (коловій частоті)  $\omega_0$  вектор здійснює  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  обертів (циклів) за секунду, а тривалість одного оберту (період) рівна відношенню кута  $2\pi$  до кутової швидкості  $\omega_0$ :  $T = 2\pi/\omega_0$ .

За допомогою векторних діаграм легко здійснити додавання гармонічних коливань. Так, якщо необхідно додати два коливання з однаковими частотами

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

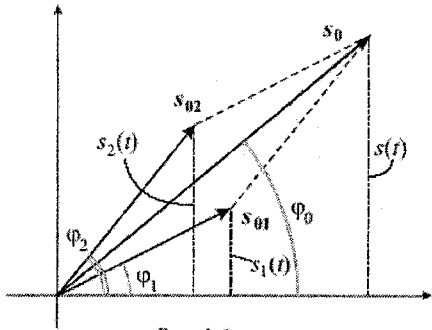


Рис. 1.6а.

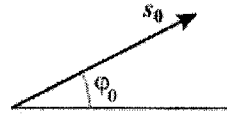


Рис. 1.6б.

то амплітуду  $s_0$  і початкову фазу  $\varphi_0$  сумарного коливання  $s(t)$  з тією ж частотою  $\omega_0$  можна легко розрахувати з рис. 1.6а, на якому графічно зображена операція додавання векторів  $\vec{s}_0 = \vec{s}_{01} + \vec{s}_{02}$  у момент часу  $t = 0$ :

$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2}$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}.$$

Зрозуміло, що вертикальна проекція вектора  $\vec{s}_0$  також буде змінюватися за гармонічним законом з частотою  $\omega_0$ , оскільки взаємне розташування векторів  $s_{01}$  і  $s_{02}$  не змінюється з часом.

З діаграми (рис.1.6а) видно, що сумарне коливання  $s(t)$  випереджує за фазою коливання  $s_1(t)$  і відстає за фазою від коливання  $s_2(t)$ . Повна фаза для кожного з трьох коливань у довільний момент часу відрізняється від їх початкових фаз на одну і ту саму величину  $\omega_0 t$ , яку під час побудови векторних діаграм не

враховують. При цьому коливання зображується нерухомим вектором (рис.1.6б), а частота коливань вважається відомою.

### 1.3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо коливну систему, що складається з точкового вантажу маси  $m$  і чотирьох зв'язаних з ним пружин (рис.1.7) – ускладнений варіант розглянутого вище пружинного маятника.

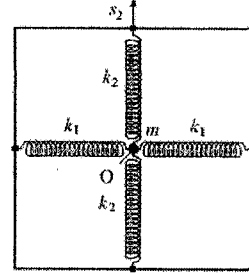


Рис. 1.7.

Якщо маса рухається по гладкій горизонтальній поверхні, то її миттєве розташування описується двома зміщеннями від положення рівноваги – точки  $O$ :  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$ . Така система володіє двома ступенями вільності. Будемо вважати зміщення малими, щоб, по-перше, виконувався закон Гука, і, по-друге, під час зміщення вздовж напрямку  $s_1$  деформації пружин з жорсткістю  $k_2$  не призводили до якого-небудь помітного вкладу в повертаючу силу  $F_1 = -2k_1 s_1$ . Аналогічно, під час зміщення в перпендикулярному напрямі  $s_2$  повертаюча сила  $F_2 = -2k_2 s_2$ . За таких умов коливання у двох взаємно перпендикулярних напрямках відбуваються незалежно одне від одного

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_1) \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тут власні частоти гармонічних коливань рівні

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \sqrt{\frac{2k_1}{m}} \\ \omega_{02} &= \sqrt{\frac{2k_2}{m}}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

а амплітуди і початкові фази визначаються початковими умовами.

Під час збудження коливань у такій системі за довільного співвідношення власних частот  $\omega_{01}$  і  $\omega_{02}$  траєкторія вантажу, що здійснює коливання, може бути досить складною. Таку траєкторію можна проаналізувати, беручи до уваги, що результуюче коливання є суперпозицією двох взаємно перпендикулярних незалежних коливань.

Розглянемо випадок, коли  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  (жорсткості всіх пружин однакові). Щоб отримати траєкторію руху, виключимо з (1.19) час. Для цього перепишемо (1.19) у вигляді:

$$\frac{s_1}{s_{01}} = \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1$$

$$\frac{s_2}{s_{02}} = \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2$$
(1.21)

Домножимо перше рівняння (1.21) на  $\cos \varphi_2$ , а друге – на  $\cos \varphi_1$ , і віднімемо друге рівняння від першого. В результаті отримаємо:

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 = \cos \omega_0 t \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$
(1.22a)

Тепер домножимо перше рівняння на  $\sin \varphi_2$ , а друге – на  $\sin \varphi_1$ , повторимо віднімання і отримаємо

$$\frac{s_1}{s_{01}} \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$
(1.22б)

Піднесемо до квадрата кожне з рівнянь (1.22) і додамо їх. У результаті час буде виключено, а рівняння траєкторії рухомого вантажу буде рівнянням еліпса:

$$\left(\frac{s_1}{s_{01}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{s_{02}}\right)^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$
(1.23)

Отже, у загальному випадку вантаж буде здійснювати періодичні рухи по еліптичній траєкторії. Напрямок руху вздовж траєкторії і орієнтація еліпса відносно осей  $Os_1$  і  $Os_2$  залежать від початкової різниці фаз  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

На рис.1.8 зображені траєкторії руху вантажу за різних значень  $\Delta\varphi$ .

Усі траєкторії містяться в прямокутнику зі сторонами  $2s_{01}$  і  $2s_{02}$ . За  $\Delta\varphi = 0$  і  $\Delta\varphi = \pi$  вантаж рухається по прямій лінії. За  $\Delta\varphi = \pi/2$  і  $\Delta\varphi = 3\pi/2$  півосі еліпса співпадають з  $Os_1$  і  $Os_2$  (за  $s_{01} = s_{02}$  еліпс вироджується в коло).

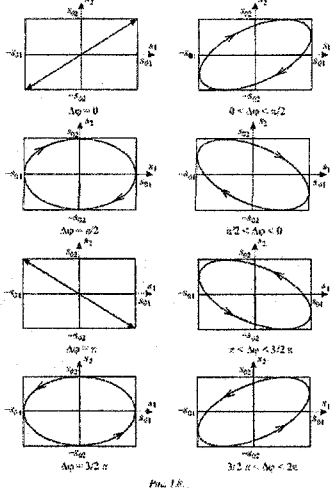


Рис. 1.8.

За різниці фаз  $0 < \Delta\varphi < \pi$  вантаж рухається за стрілкою годинника, а за  $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$  – проти стрілки годинника.

Типовим прикладом двовимірного осцилятора (маятника) є електрон у атомі, який рухається навколо ядра по еліптичній орбіті з періодом обертання  $T \approx 10^{-15}$  с. Можна вважати, що такий електрон одночасно здійснює два взаємно перпендикулярні коливання з частотою  $\omega_0 = 2\pi/T \approx 10^{16} \text{ c}^{-1}$ .

Якщо частоти двох взаємно перпендикулярних коливань не співпадають, але є кратними:  $m\omega_{02} = n\omega_{01}$ , де  $m$  і  $n$  – цілі числа, то траєкторії руху являють собою замкнуті криві, які називаються фігурами Ліссажу (рис.1.9). Відзначимо, що відношення частот

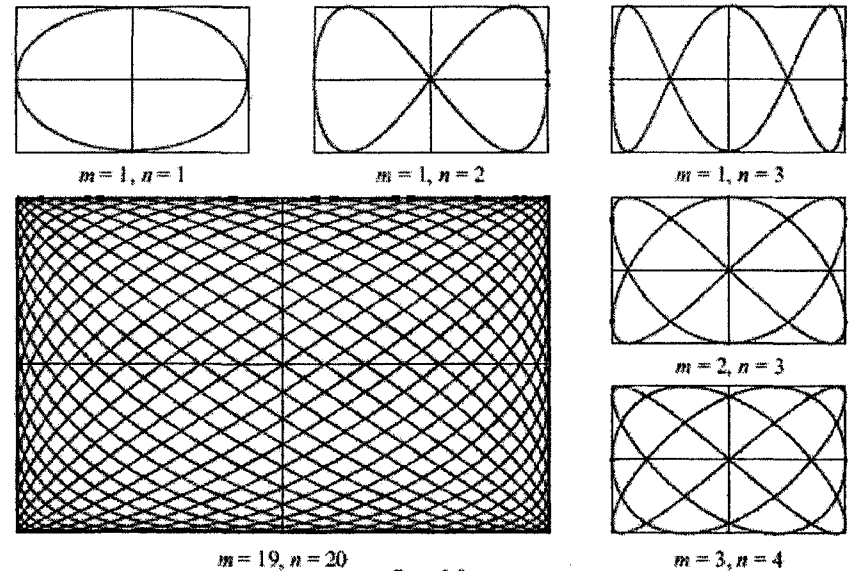


Рис. 1.9.

коливань дорівнює відношенню чисел точок дотику фігури Ліссажу до сторін прямокутника, в який вона вписана.

Якщо кратність між частотами відсутня, то траєкторії не будуть замкнутими і поступово заповнюють весь прямокутник.

## 1.4. Фазовий портрет коливної системи

У будь-якій коливній системі з одним ступенем вільності зміщення  $s(t)$  і швидкість  $v(t) = ds/dt$  змінюються з часом. Стан системи в кожний момент часу можна характеризувати двома значеннями  $s$  і  $v$ , і на площині цих змінних такий стан однозначно визначається положенням зображеної точки  $P$  з координатами  $s$  і  $v$ . З часом точка  $P$  буде переміщатися по кривій, яку називають фазовою траєкторією руху (рис.1.10).

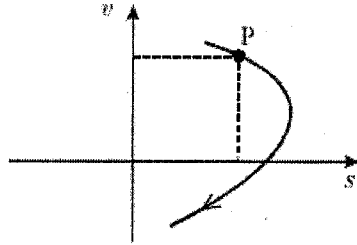


Рис. 1.10.

Площина змінних  $s$  і  $v$  називається фазовою площиною. Сімейство фазових траєкторій утворює фазовий портрет коливної системи. Аналіз фазового портрета дає хоча й не повну, але значну

інформацію про коливну систему. До побудови такого портрета звертаються тоді, коли не вдається аналітично розв'язати рівняння, що описує складні коливання. В першу чергу це стосується нелінійних коливань, аналіз яких утруднений внаслідок відсутності точних розв'язків нелінійних рівнянь.

Спочатку проілюструємо сказане вище на прикладі найпростіших гармонічних коливань виду  $s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ .

Оскільки швидкість  $v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$  випереджує

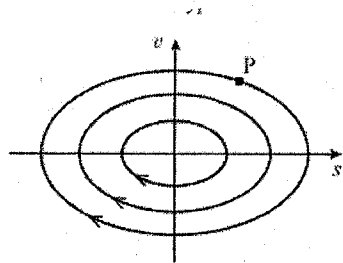


Рис. 1.11.

зміщення по фазі на  $\pi/2$ , то фазова траєкторія буде еліпсом. Точка  $P$  буде рухатись по еліптичній траєкторії за годинниковою стрілкою (за  $v > 0$  зміщення  $s$  збільшується, а за  $v < 0$  – зменшується (рис.1.11)).

Параметри еліпса визначаються енергією, якою володіє гармонічний осцилятор. Потенціальна енергія

пружинного маятника пропорційна квадрату зміщення:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.24)$$

Кінетична енергія пропорційна квадрату швидкості:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 s_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.25)$$

Якщо взяти до уваги рівність  $k = m \omega_0^2$ , то легко побачити, що взаємоперетворення одного виду енергії в інший за період відбувається двічі. При цьому повна енергія системи залишається сталою:

$$E_0 = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} m (\omega_0^2 s^2 + v^2). \quad (1.26)$$

Рівність (1.26) і є рівнянням еліпса, яке можна переписати в більш зручному вигляді:

$$s^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0}{m\omega_0^2}. \quad (1.27)$$

Фазовий портрет гармонічного осцилятора являє собою сімейство еліпсів, кожному з яких відповідає енергія  $E_0$ , якою володіє осцилятор. Положення рівноваги в точці 0 на фазовій площині є особливою точкою і називається **особливою точкою типу «центр»**.

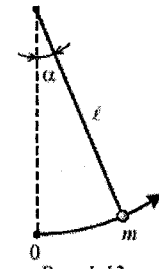


Рис. 1.12.

Із збільшенням енергії  $E_0$  зростають амплітуди коливань зміщення  $s_0$  і швидкості  $s_0 \omega_0$ . Коливання, як правило, перестають бути гармонічними, а фазові траєкторії – еліпсами.

Проаналізуємо на фазовій площині коливання математичного маятника за довільних кутів  $\alpha$  відхилення від положення рівноваги (рис.1.12). При цьому будемо вважати, що точкова маса  $m$  закріплена не до нитки, а до жорсткого невагомому стержню довжини  $l$ . Перше з рівнянь

(1.2) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (1.28)$$

Це нелінійне рівняння не має простого аналітичного розв'язку, тому пізніше ми наведемо його наближений розв'язок. Однак багато закономірностей таких коливань можна отримати з використанням фазового портрета на площині  $(\alpha; \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt})$ . З цією метою рівняння (1.28) потрібно перетворити до такого вигляду, щоб у ньому

залишилися тільки ці змінні, а час було виключено. Для цього кутове прискорення в лівій частині (1.28) перетворимо до вигляду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha} \quad (1.29)$$

Підставляючи (1.29) у (1.28), отримаємо

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha}^2) = -\omega_0^2 \sin \alpha d\alpha \quad (1.30)$$

Рівняння (1.30) відображає той факт, що приріст кінетичної енергії маятника дорівнює втраті його потенціальної енергії в полі сили тяжіння. Інтегруючи (1.30), отримаємо

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \alpha = const \quad (1.31)$$

Якщо прийняти, що потенціальна енергія маятника в положенні рівноваги рівна нулю, то константа виражається через енергію, отриману маятником  $E_0 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_0^2$  ( $\dot{\alpha}_0$  – кутова швидкість маятника в положенні рівноваги):

$$const = \frac{E_0}{ml^2} - \omega_0^2 \quad (1.32)$$

Рівняння фазової траєкторії (1.31) остаточно запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} + (1 - \cos \alpha) = \frac{E_0}{ml^2 \omega_0^2} \quad (1.33)$$

При цьому потенціальна і кінетична енергії задаються виразами

$$E_{pot} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2 \quad (1.34)$$

$$E_{kin} = ml^2 \omega_0^2 (1 - \cos \alpha)$$

Використовуючи (1.33), побудуємо фазовий портрет системи (рис.1.13).

З рисунка чітко видно два типи фазових траєкторій, що відповідають двом типам руху. Замкнуті траєкторії, які оточують особливі точки типу «центр» з координатами  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = 2n\pi$  ( $n$  – ціле число), відповідають коливанням маятника відносно стійкого нижнього положення рівноваги. Такі коливання мають місце, якщо енергія системи  $E_0 < ml^2 \omega_0^2 = 2mgl$  (рис.1.13). При цьому, якщо  $E_0 << 2mgl$ , коливання будуть гармонічними, а фазові траєкторії – еліпсами. Якщо  $E_0 \approx 2mgl$ , то коливання будуть негармонічними. В

разі збільшення енергії, а, отже і амплітуди коливань осцилятора, їх період буде зростати, оскільки повертаюча сила в рівнянні (1.28) менша, ніж у випадку гармонічного осцилятора.

Верхньому положенню рівноваги з координатами  $\dot{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = (2n-1)\pi$  відповідають особливі точки типу «сідло». Фазові криві, що проходять через «сідла», відповідають енергії  $E_0 = 2mgl$  і називаються сепаратрисами.

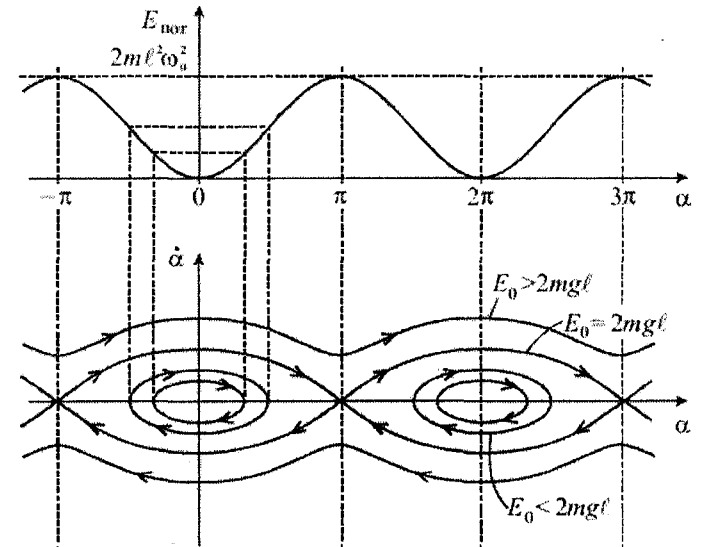


Рис. 1.13.

Якщо, нарешті,  $E_0 > 2mgl$ , то отримуються незамкнуті траєкторії, що відповідають обертовому руху маятника.

Отже, сепаратриса розділяє фазову площину на дві області: область замкнутих траєкторій і область траєкторій, що приходять з безмежності і йдуть у безмежність.

Відзначимо, що для негармонічних коливань не можна використовувати термін «колова частота», оскільки, як буде показано нижче, такі коливання є, як правило, суперпозицією гармонічних коливань з різними частотами. Період залишається однією з головних характеристик коливань. Фазовий портрет не дозволяє визначити, як швидко рухається точка P по траєкторії. Однак період нелінійних коливань математичного маятника можна отримати на основі наближеного розв'язку рівняння (1.28).

## 1.5. Негармонічні коливання математичного маятника

Коливання математичного маятника за великих амплітуд не будуть гармонічними. Це відбувається тому, що повертаюча сила в правій частині рівняння (1.28) пропорційна  $\sin \alpha$  і за великих значень кута стає меншою за ту «лінійну» силу (пропорційну  $\alpha$ ), яка повертає масу, що коливається в положення рівноваги за незмінний час, рівний чверті періоду коливань. Така «лінійна» сила забезпечує незалежність цього часу від амплітуди  $\alpha_0$ , тобто ізохронність коливань.

Для аналізу коливань за великих амплітуд  $\alpha_0$  запишемо розклад  $\sin \alpha$  в ряд:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots, \quad (1.35)$$

в якому відкинуто члени більш високого порядку:  $\alpha^5, \alpha^7$  і т.д. Підстановка (1.35) в (1.28) призводить до нелінійного рівняння коливань:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3. \quad (1.36)$$

Розв'язком цього рівняння вже не буде гармонічна функція. Дійсно, припустимо, що розв'язком рівняння (1.36) буде гармонічне рівняння виду  $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ . Підставляючи цей вираз у праву частину (1.36) і враховуючи тригонометричну тотожність:

$$\sin^3 \omega t \equiv \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (1.37)$$

приходимо до протиріччя. Виходить, що нелінійний член у правій частині рівняння змінюється з часом не тільки з основною частотою  $\omega$ , а також і з потроєною частотою  $3\omega$  (частотою третьої гармоніки). Щоб усунути це протиріччя, будемо вважати, що коливання маятника відбуваються одночасно на частотах  $\omega$  і  $3\omega$  так, що

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \alpha_0 \sin 3(\omega t + \varphi_0), \quad (1.38)$$

де  $\varepsilon$  – безрозмірний параметр.

Підставляючи (1.38) у (1.36), знову виявляємо, що нелінійний член, крім двох частот  $\omega$  і  $3\omega$ , змінюється з часом і на частоті  $9\omega$ . Це свідчить про те, що розв'язок (1.38) не є повним (у ньому відсутні вищі гармоніки  $9\omega, 27\omega$  і т.д.). Однак, якщо амплітуда коливань  $\alpha_0$  не дуже велика, то параметр  $\varepsilon \ll 1$  і відсутні члени з вищими

гармоніками мають амплітуди  $\varepsilon^2 \alpha_0, \varepsilon^3 \alpha_0$  і т.д., які набагато менші за амплітуду третьої гармоніки  $\varepsilon \alpha_0$ .

Тепер розрахуємо частоту  $\omega$ . Для спрощення візьмемо  $\varphi_0 = 0$  (маятник отримує початковий поштовх у положенні рівноваги). Використовуючи (1.38), запишемо кожний з трьох членів рівняння (1.36), опускаючи доданки, що мають порядок малості  $\varepsilon^2$  і вище:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= -\omega^2 \alpha_0 \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t \\ \omega^2 \alpha &= \omega^2 \alpha_0 \sin \omega t + \omega^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$-\frac{1}{6} \omega_0^2 \alpha_0^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24} \alpha_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} \alpha_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2} \alpha_0^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t.$$

Відзначимо, що в останній рівності третій доданок у правій частині, яка містить множник  $\alpha_0^2 \varepsilon$ , малий, порівняно з двома попередніми, і його також можна відкинути.

Додамо отримані три рівності. В силу (1.36), сума лівих частин рівностей (1.39) рівна нулю.

$$0 = \alpha_0 \left( -\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \alpha_0^2 \right) \sin \omega t + \alpha_0 \left( -9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{1}{24} \omega_0^2 \alpha_0^2 \right) \sin 3\omega t. \quad (1.40)$$

Оскільки рівність (1.40) повинна виконуватися для будь-якого моменту часу, то кожен з виразів, що стоїть у круглих дужках, повинен дорівнювати нулю. З рівності нулю першого виразу легко визначити квадрат частоти основної гармоніки

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{8} \alpha_0^2 \right). \quad (1.41)$$

Якщо  $\frac{\alpha_0^2}{8} \ll 1$ , то для частоти отримаємо

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{8} \right)^{1/2} \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{\alpha_0^2}{16} \right). \quad (1.42)$$

Останній вираз показує, що зі зростанням амплітуди коливань їх частота зменшується (період збільшується), тобто порушується ізохронність коливань.

Прирівняємо до нуля другий вираз у круглих дужках у формулі (1.40):

$$-9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \alpha_0^2 = 0. \quad (1.43)$$

Вважаючи, що  $\omega \approx \omega_0$ , знаходимо величину малого коефіцієнта

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192}. \quad (1.44)$$

Якщо покласти  $\alpha_0 = 15^\circ = 0,26$  рад, то  $\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-4}$ , і вклад третьої гармоніки в коливання малий. Відмінність частоти  $\omega$  від частоти гармонічних коливань  $\omega_0$  складе величину

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\alpha_0^2}{16} \cdot 4,2 \cdot 10^{-3}. \quad (1.45)$$

Навіть за  $\alpha_0 \sim 1$  рад,  $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$ , а  $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \sim 6\%$ . Отже, наближеним розв'язком рівняння (1.36) буде (1.38), де частота  $\omega$  визначається (1.41), а параметр  $\varepsilon$  знаходиться з (1.44).

Відзначимо, що негармонічні коливання можуть виникати не тільки за великих відхилень від положення рівноваги системи. Наприклад, якщо в розкладі повертаючої сили  $F_r(s)$  за степенями  $s$  відсутній лінійний член і він починається з члена, пропорційного  $s^3$ , то коливання будуть ангармонічними за будь-яких, (навіть дуже малих) відхилень.

## 1.6. Вільні коливання в дисипативних системах з в'язким тертям

У реальних системах завжди відбувається дисипація енергії. Якщо втрати енергії не будуть компенсуватися за рахунок зовнішніх пристроїв, то коливання з часом будуть згасати і через деякий час зовсім припиняться.

Формально згасаючі коливання описуються рівнянням

$$m\ddot{s} = F_r(s) + F_{mp}(s), \quad (1.46)$$

яке, на відміну від (1.2), крім повертаючої сили  $F_r$  містить і силу тертя  $F_{mp}$ . Сила опору руху, взагалі, залежить як від напрямку швидкості (наприклад, за сухого тертя), так і від величини швидкості (під час руху у в'язкому середовищі). Якщо повертаюча сила пропорційна зміщенню:  $F_r(s) = ks$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності (для пружинного маятника – жорсткість пружини), то рівняння (1.46) можна переписати у вигляді

$$s - \frac{F_{mp}}{m} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.47)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – власна частота незгасаючих гармонічних коливань.

Розглянемо спочатку згасаючі коливання у випадку, коли на тіло, що здійснює коливання, діє сила в'язкого тертя, пропорційна швидкості:  $F_{mp} = \Gamma \dot{s}$ . Така ситуація може мати місце, наприклад, під час коливального руху тіла в повітрі або в рідині, коли число Рейнольдса  $Re \sim 1$  або  $Re < 1$ . Тоді рівняння (1.47) можна записати у вигляді

$$\dot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1.48)$$

де  $\delta = \frac{\Gamma}{2m}$  – коефіцієнт, або показник згасання.

Загальна ідея розв'язку однорідних лінійних рівнянь типу (1.48) полягає в наступному: в якості функціональної залежності  $s(t)$  потрібно вибрати таку, яка під час диференціювання по часу переходить сама в себе, тобто експоненту:  $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$ . Підставимо її в рівняння (1.48):

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (1.49)$$

Оскільки  $e^{\lambda t} \neq 0$ , отримуємо так зване «характеристичне» рівняння:

$$\lambda^2 + 2\delta \lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.50)$$

яке в даному випадку (для рівняння другого порядку) має два корені

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (1.51)$$

а саме рівняння (1.48) – два незалежних розв'язки:  $s_1(t) = s_{01} e^{\lambda_1 t}$  і  $s_2(t) = s_{02} e^{\lambda_2 t}$ . В силу лінійності рівняння (1.48) сума будь-яких його розв'язків також є розв'язком, тобто справедливий так званий «принцип суперпозиції» розв'язків, і загальним розв'язком даного рівняння є

$$s(t) = s_{01} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + s_{02} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (1.52)$$

Розв'язок містить дві незалежні константи  $s_{01}$  і  $s_{02}$ , які визначаються з початкових умов  $s(0)$  і  $v(0)$ .

Залежно від співвідношення  $\delta$  і  $\omega_0$  можливі три випадки.

Якщо  $\delta \ll \omega_0$ , то  $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , де  $i \equiv \sqrt{-1}$  – «уявна» одиниця. Розв'язок є комплексним, але, оскільки початкові умови дійсні, то за допомогою формули Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.53)$$

Легко показати, що загальний розв'язок буде дійсним і може бути записаний у вигляді

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.54)$$

тобто являє собою згасаючі коливання, частота яких  $\omega$  менша, ніж у власних незгасаючих коливань:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.55)$$

Колівання, що описуються (1.54), не є гармонічними (рис.1.14). Під їх амплітудою будемо розуміти величину

$$A(t) = s_0 e^{-\delta t}, \quad (1.56)$$

яка монотонно зменшується з часом. «Тривалість» коливань характеризується часом згасання

$$\tau = \frac{1}{\delta}. \quad (1.57)$$

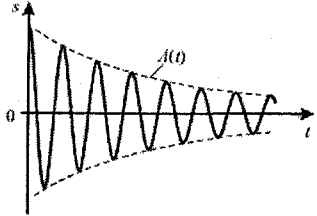


Рис. 1.14.

Якщо підставити  $\tau$  в (1.56), то легко бачити, що протягом часу згасання  $\tau$  амплітуда зменшується в  $e$  разів. Кількість здійснених системою коливань за час  $\tau$  дорівнює відношенню цього часу до періоду згасаючих коливань  $T = 2\pi/\omega$ . Якщо згасання в системі мале ( $\delta \ll \omega_0$ ), то період коливань  $T \approx 2\pi/\omega_0$ , і кількість цих коливань велика:

$$N = \frac{\tau}{T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\delta} \gg 1. \quad (1.58)$$

Експоненціальний закон зменшення амплітуди з часом дозволяє ввести безрозмірний параметр – **логарифмічний декремент згасання**  $\theta$ , що рівний логарифму відношення двох послідовних відхилень в один і той самий бік:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (1.59)$$

З (1.57), (1.58) і (1.59) знаходимо:

$$\theta = \frac{1}{N}. \quad (1.60)$$

Логарифмічний декремент згасання можна оцінити, якщо підрахувати число коливань, здійснених системою за час згасання  $\tau$ , тобто до зменшення амплітуди коливань приблизно в 3 рази. Чим більша кількість таких коливань, тим менші втрати енергії в системі.

Прослідкуємо за зменшенням енергії осцилятора з часом. Використовуючи (1.54), запишемо за аналогією з (1.24) і (1.25) вирази для потенціальної і кінетичної енергій осцилятора:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k s_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (1.61)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \omega^2 s_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.62)$$

Відзначимо, що, строго кажучи, швидкість дорівнює

$$v = \dot{s} = -s_0 \delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + s_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.63)$$

Очевидно, якщо ( $\delta \ll \omega$ ), то першим доданком у (1.63) можна знехтувати і записати вираз для кінетичної енергії у вигляді (1.62). Сумарна енергія осцилятора зменшується з часом:

$$E(t) = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2} s_0^2 e^{-2\delta t} [k \sin^2(\omega t + \varphi_0) + m \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (1.64)$$

Візьмемо до уваги, що за ( $\delta \ll \omega_0$ ) частота  $\omega \approx \omega_0$ . Оскільки  $k = m \omega_0^2$ , то (1.64) остаточно запишеться у вигляді

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (1.65)$$

Повна енергія осцилятора, що була рівна спочатку  $E_0 = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2$ , монотонно зменшується з часом за експоненціальним законом і зменшується в  $e$  разів за час

$$\tau_E = \frac{1}{2\delta} = \frac{\tau}{2}. \quad (1.66)$$

«Якість» коливної системи характеризують безрозмірним параметром  $Q$ , який називають **добротністю**. Добротність пропорційна відношенню енергії  $E(t)$  до енергії  $\Delta E_T$ , що втрачається за період (рис.1.15):

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}. \quad (1.67)$$

Якщо число коливань велике, то  $\delta T = 1/N \ll 1$ . Тоді

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T + \dots)} \approx \frac{\pi}{\theta} = \pi N. \quad (1.68)$$



При експоненціальному законі зменшення енергії з часом добротність  $Q$  є сталою величиною, яку (як і логарифмічний декремент згасання  $\theta$ ) можна легко оцінити за числом коливань  $N_Q = \pi N \approx 3N$ , що здійснюється системою до їх повного припинення (за час  $3\tau$  амплітуда коливань зменшується в  $e^3 \approx 20$  разів, тобто коливання практично повністю згасають).

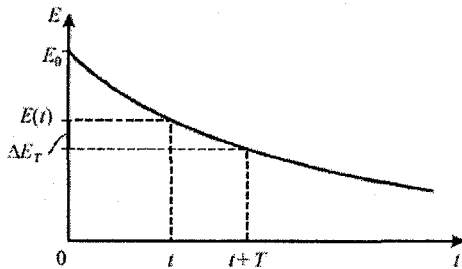


Рис. 1.15.

здійснюються під дією зовнішньої періодичної сили.

Розглянемо тепер випадок ( $\delta = \omega_0$ ), коли корені характеристичного рівняння кратні:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . При цьому частота  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$ , тобто коливання відсутні. Загальний розв'язок, що легко перевірити підстановкою, має такий вигляд:

$$s(t) = (s_0 + Ct)e^{-\delta t}, \quad (1.69)$$

де незалежні змінні  $s_0$  і  $C$  визначаються, як і раніше, початковими умовами. Можливий вигляд залежності  $s(t)$  за різних початкових умов зображено на рис.1.16.

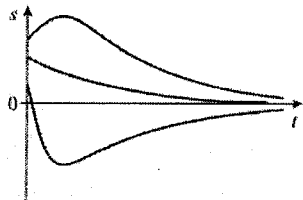


Рис. 1.16.

Їх характерною особливістю є те, що вони перетинають вісь  $Ot$  не більше одного разу, і повернення до рівноважного стану в системі, виведеної з нього, відбувається за час порядку декількох  $\tau$ . Такий режим руху називають

критичним.

Нарешті, якщо ( $\delta > \omega_0$ ), то загальний розв'язок (1.52) є сумою двох спадних з часом експонент, оскільки  $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$ . Можливий вигляд залежностей  $s(t)$  у цьому випадку подібний до залежності, наведеної на рис.1.16, але повернення до рівноваги здійснюється повільніше ніж у критичному режимі, оскільки в'язке

тертя більше. Цей режим руху називається аперіодичним, або закритичним.

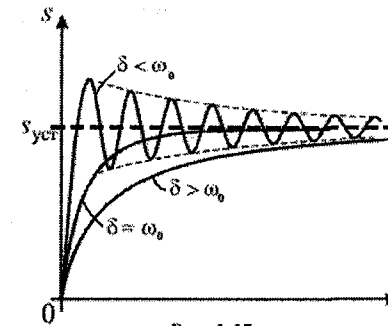


Рис. 1.17.

Відзначимо, що найбільш швидке повернення системи до положення рівноваги відбувається в критичному режимі, а в коливальному і аперіодичному режимах цей процес триває довше. Тому, наприклад, гальванометри – прилади для електричних вимірювань – працюють, зазвичай, у режимі, близькому до критичного, коли процес встановлення їх показів, тобто зміщення  $S$  рамки до стійкого

положення  $s_{ст}$ , має найменшу тривалість (рис.1.17).

Ілюстрацією до розглянутих закономірностей згасаючих коливань є фазові портрети, побудовані для коливального ( $\delta < \omega_0$ ), а також критичного і аперіодичного ( $\delta \geq \omega_0$ ) режимів (рис.1.18).

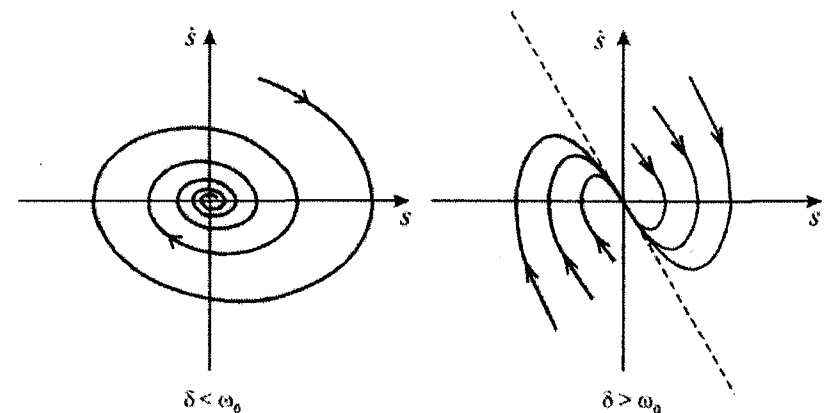


Рис. 1.18.

За  $\delta < \omega_0$  фазовий портрет являє собою сукупність спіралей, що стягуються в особливу точку типу «фокус». На рис.1.18 зображена одна з таких спіралей. За кожен оберт радіус спіралі зменшується в  $e^\theta$  разів. Для критичного і аперіодичного режимів  $\delta \geq \omega_0$  фазові траєкторії сходяться в особливу точку типу «вузол».

### 1.7. Згасання коливань у системах із сухим тертям

На практиці ми часто маємо справу із системами, в яких головну роль відіграє сила сухого тертя, що не залежить від швидкості. Типовий приклад – пружинний маятник, вантаж якого ковзає по шорсткій горизонтальній поверхні, або коливальна система в стрілочних вимірювальних приладах, основу яких складає рамка, що обертається, зазнає дії сил сухого тертя в осі обертання. Хоча сила  $F_{tr}$  сухого тертя і не змінюється за величиною, проте, вона змінює свій напрямок під час зміни напрямку швидкості. В силу цього необхідно записати два рівняння

$$s + \omega_0^2 s = -\frac{F_{tr}}{m} \text{ для } s > 0; \quad (1.70)$$

$$s + \omega_0^2 s = +\frac{F_{tr}}{m} \text{ для } s < 0. \quad (1.71)$$

Якщо в (1.70) використати змінну  $s_1 = s + \frac{F_{tr}}{m\omega_0^2}$ , а в (1.71) –

$s_2 = s - \frac{F_{tr}}{m\omega_0^2}$ , то обидва рівняння набудуть однакового вигляду:

$$s_{1,2} + \omega_0^2 s_{1,2} = 0. \quad (1.72)$$

Фазові траєкторії, що відповідають цьому рівнянню, являють собою еліпси з центрами, що мають координати

$s_- = -\frac{F_{tr}}{m\omega_0^2}$  ( $s_1 = 0$ ) для верхньої півплощини  $s > 0$ , і

$s_+ = +\frac{F_{tr}}{m\omega_0^2}$  ( $s_2 = 0$ ) для нижньої півплощини  $s < 0$ . Щоб

намалювати фазовий портрет,

необхідно з'єднати фазові траєкторії верхньої і нижньої півплощин на їх спільній границі  $s = 0$ .

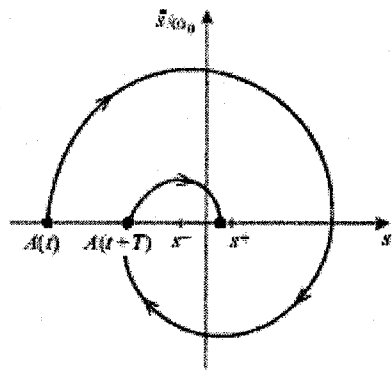


Рис. 1.19.

З побудованого на рис.1.19 фазового портрета видно, що рух припиняється після скінченного числа коливань. Важливо відзначити, що система не обов'язково прийде до стану  $s = 0$ , а може

зупинитися, потрапивши в зону застою  $s_+ - s_-$ . Зона застою тим більша, чим більша сила  $F_{tr}$ . З фазового портрета легко визначити зменшення амплітуди коливань за один період. Ця зміна амплітуди у два рази перевищує протяжність зони застою:

$$\Delta A = A(t) - A(t+T) = 2(s_+ - s_-) = \frac{4F_{tr}}{m\omega_0^2}. \quad (1.73)$$

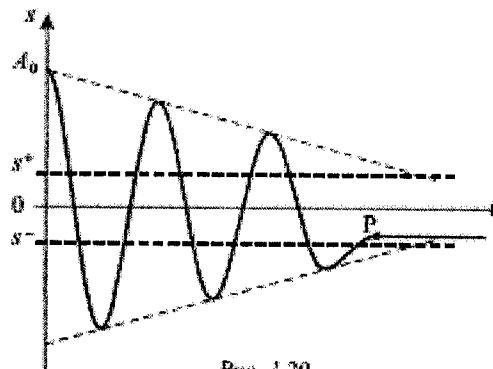


Рис. 1.20.

Отже, на відміну від експоненціального закону (1.56), характерного для в'язкого тертя, амплітуда коливань зменшується з часом лінійно.

На рис.1.20 показана залежність від часу зміщення тіла, яке коливається, за наявності сухого тертя. Число

коливань, що здійснюється системою до їх припинення, визначається за формулою:

$$N = \frac{A_0}{\Delta A} = \frac{A_0}{2(s_+ - s_-)}. \quad (1.74)$$

Вона залежить від початкової амплітуди  $A_0$ . Частота коливань

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  залишається такою ж, як і за відсутності сили тертя (1.72).

Колівання тривають доти, доки їх амплітуда залишається більшою, ніж половина ширини зони застою  $s_+ - s_-$ . При цьому в реальних умовах маса, що коливається, зупиняється у випадковому положенні всередині цієї зони (в точці P на рис. 1.20).

## ЛЕКЦІЯ 2

1. Вимушені коливання під дією гармонічної сили.
2. Режими повільних, швидких і резонансних коливань.
3. Амплітудно-частотні і фазово-частотні характеристики.
4. Балістичний режим коливань.
5. Усталення коливань.
6. Характеристики різних коливальних систем.
7. Параметричні коливання.
8. Автоколивання.
9. Маятник на валу, що обертається (маятник Фруда).

У попередній лекції ми розглянули вільні згасаючі коливання, що виникають під час початкової короткочасної дії зовнішніх сил на коливну систему. Однак у щоденній практиці ми стикаємося з незгасаючими коливаннями, для підтримання яких необхідно підводити енергію до коливної системи, щоб компенсувати її енергетичні втрати.

Одним із поширених способів підтримання незгасаючих коливань є неперервний вплив на масу, яка коливається, періодичної сили (вимушуючої сили),

$$F(t) = F(t + T), \quad (2.1)$$

що змінюється з часом  $t$ , взагалі кажучи, довільно в межах періоду тривалості  $T$ . Якщо, наприклад, таку силу прикласти до коливної системи пружинного маятника (рис.2.1), то рівняння її руху набуде вигляду:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F(t). \quad (2.2)$$

Дослід показує, що якщо сила раптово починає діяти (наприклад, у момент часу  $t=0$ ), то маятник поступово розгойдуватиметься, і за якийсь час його коливання усталяться. За порядком величини час усталення таких вимушених коливань буде співпадати з часом згасання  $\tau = \delta^{-1} = 2m/\Gamma$ . Далі ми розглядатимемо саме усталені коливання. Природно, що параметри таких коливань будуть залежати від конкретного виду сили  $F(t)$ . З курсу математики відомо, що будь-яку періодичну функцію можна представити у вигляді ряду Фур'є:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \Psi_n\right). \quad (2.3)$$

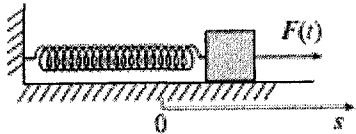


Рис. 2.1

Фізичний зміст такого представлення полягає в тому, що періодичний вплив  $F(t)$  еквівалентний одночасному впливові сталої сили  $F_{00}$  і набору гармонічних сил з відповідними амплітудами  $F_{0n}$ , початковими фазами  $\Psi_n$  і частотами  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n = \omega n$ , кратними найнижчій (основній) частоті  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Щоб отримати повну картину вимушених коливань під дією сили (2.3), необхідно взяти до уваги лінійність рівняння (2.2). Це дозволяє представити його розв'язок  $s(t)$ , як суму гармонічних коливань:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right), \quad (2.4)$$

що відбуваються з усталеними амплітудами  $s_{0n}$  і фазами  $\varphi_n$  на частотах  $\omega_n$  відповідних гармонік вимушуючої сили (2.3). Кожний доданок у (2.4) може бути розглянутий як вимушене гармонічне коливання, що відбувається під дією зовнішньої гармонічної сили з амплітудою  $F_{0n}$  і частотою  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}n$ .

Амплітуди  $s_{0n}$  і фази  $\varphi_n$  вимагають означення, і ми перейдемо зараз до їх знаходження.

### 2.1. Вимушені коливання під дією гармонічної сили

Нехай зовнішня сила змінюється за гармонічним законом

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (2.5)$$

Рівняння (2.2) в цьому випадку набуде вигляду:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F_0 \sin \omega t. \quad (2.6)$$

Під дією цієї сили маятник у всталеному режимі буде здійснювати гармонічні коливання

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.7)$$

Як показує досвід, амплітуда  $s_0$  і початкова фаза  $\varphi_0$  (тобто зсув фази між зміщенням  $s$  і силою  $F$ ) усталених коливань залежать не тільки від амплітуди сили  $F_0$  (що очевидно з рівняння (2.6)), але і від того, наскільки частота вимушуючої сили  $\omega$  відрізняється від власної частоти коливання маятника  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Найсильніше

маятник буде розгойдуватися, коли ці частоти практично співпадають:  $\omega \approx \omega_0$ .

Відзначимо, що для механічних коливних систем не так просто, з технічної точки зору, здійснити вплив гармонічної сили безпосередньо на рухому масу. Значно простіше це зробити для електричних і оптичних коливних систем, наприклад, для коливального контуру, підключеного до зовнішнього джерела змінної напруги. Однак легко бачити, що можна підтримувати вимушені коливання маятника, зображеного на рис. 2.1, інакшим способом, не прикладаючи безпосередньо зовнішню силу  $F(t)$  до маси  $m$ . Достатньо цю силу прикласти до лівого кінця вільної пружини так, щоб цей кінець рухався за гармонічним законом  $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$

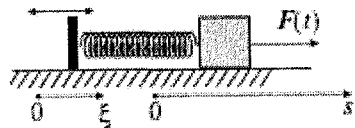


Рис. 2.2

(рис. 2.2). Тоді видовження пружини складе величину  $s - \xi$ , а сила пружності, прикладена до маси  $m$ , буде рівна  $-k(s - \xi)$ . Тому рівняння руху маси  $m$  запишеться у вигляді:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - k(s - \xi). \quad (2.8)$$

Якщо взяти до уваги, що сила пружності пружини при відсутності зміщення вантажу ( $s = 0$ ) рівна

$$F(t) = k\xi(t) = k\xi_0 \sin \omega t, \quad (2.9)$$

то рівняння (2.8) повністю еквівалентне рівнянню (2.6). Сила (2.9) виконує роль зовнішньої гармонічної сили в класичній схемі, зображеній на рис. 2.1. Ця сила легко може бути візуалізована, оскільки її величина і напрям однозначно визначається зміщенням рухомого лівого кінця пружини. Це, у свою чергу, дає можливість наочно продемонструвати фазові співвідношення між силою  $F(t)$  (або зміщенням  $\xi(t)$ ) і зміщенням  $s(t)$  маси, що коливається.

Перепишемо рівняння (2.8) так:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (2.10)$$

де  $F_0 = k\xi_0$ .

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді гармонічного коливання (2.7), де амплітуда  $s_0$  і фаза  $\varphi_0$  можуть бути визначені, якщо підставити (2.7) у (2.10). Ми зробимо це дещо

пізніше, а поки що розглянемо три важливих режими вимушених коливань.

## 2.2. Режими повільних, швидких і резонансних коливань.

### 2.2.1. Повільні коливання

Якщо частота вимушуючої сили  $\omega$  значно менша за  $\omega_0$ , то швидкість  $\dot{s}$  і прискорення  $\ddot{s}$  коливної системи будуть дуже малими. Тому можна знехтувати першими двома членами в лівій частині рівняння (2.10) і записати його у вигляді:

$$\omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (2.11)$$

Його розв'язок, очевидно, матиме вигляд:

$$s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{k} \sin \omega t. \quad (2.12)$$

У цьому режимі зміщення вантажу пропорційне зовнішній силі і не залежить від величини його маси  $m$ . Розв'язок (2.12) є, по суті, математичним виразом закону Гука для статичної деформації пружини. Тому цей режим можна назвати квазістатичним (майже статичним). Амплітуда коливань у відповідності з цим законом рівна  $s_0 = F_0/k$ , а зміщення  $s(t)$  змінюється у фазі із зовнішньою силою.

У схемі, зображеній на рис. 2.2, це еквівалентне тому, що зміщення маси  $m$  практично повторює зміщення лівого кінця пружини:

$$s(t) = \frac{F_0}{k} \sin \omega t = \frac{k\xi_0}{k} \sin \omega t = \xi(t), \quad (2.13)$$

оскільки  $F_0 = k\xi_0$ . Це не дивно, оскільки для руху маси  $m$  з дуже малим прискоренням  $\ddot{s}$  не вимагається великих деформацій пружини:  $s(t) - \xi(t) \approx 0$ .

### 2.2.2. Швидкі коливання

Якщо  $\omega \gg \omega_0$ , то період вимушених коливань  $T = 2\pi/\omega$  малий. Це означає, що маса  $m$  зазнає дії тільки зовнішньої сили  $F(t)$ , а сила пружності  $ks$  і в'язкого тертя  $\Gamma\dot{s}$  малі. Дійсно, за половину короткого періоду коливань, коли маса рухається в одному напрямку, вона не встигає набрати як помітної швидкості  $\dot{s}$ , так і зміститися на достатньо велику відстань  $s$  від положення рівноваги.

Тому в рівнянні (2.10) можна опустити члени, що містять  $s$  і  $\dot{s}$ , і записати його в іншому наближеному вигляді:

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (2.14)$$

Інтегруючи двічі дане рівняння, знаходимо закон руху маси, що коливається:

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (2.15)$$

З (2.15) випливає, що зміщення по відношенню до зовнішньої сили запізнюється за фазою на  $\pi$  ( $\varphi_0 = -\pi$ ), а амплітуда, як ми і припускали, зменшується зі збільшенням частоти.

У схемі, зображеній на рис.2.2, в такому режимі лівий рухомий кінець пружини і маса  $m$  завжди рухаються в протилежних напрямках:

$$s(t) = -\frac{k\xi_0}{m\omega^2} \sin \omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \xi(t). \quad (2.16)$$

За абсолютною величиною зміщення маси  $m$  в  $\omega^2/\omega_0^2 \gg 1$  разів менше ніж зміщення лівого кінця пружини, тобто практично не буде помітним.

### 2.2.3. Резонансний режим

Якщо частота  $\omega \approx \omega_0$ , то вимушені коливання відбуваються на власній частоті коливань. Це означає, що

$$s + \omega_0^2 s = 0. \quad (2.17)$$

Отже, рівняння (2.10) із врахуванням (2.17) набуде вигляду:

$$2\delta\dot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t. \quad (2.18)$$

Інтегруючи його, отримуємо вираз для зміщення:

$$s(t) = \frac{F_0}{2\delta m \omega_0} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.19)$$

Останній вираз зручно переписати у вигляді

$$s(t) = \frac{F_0}{k} Q \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.20)$$

де  $Q = \frac{\pi}{\delta T}$  – добротність маятника. Якщо добротність  $Q \gg 1$ ,

то амплітуда коливань може в багато разів перевищувати амплітуду повільних квазістатичних коливань. Тому такий режим називається резонансним.

Великими будуть також амплітуди швидкості і прискорення. Оскільки швидкість  $\dot{s}$ , як випливає з (2.18), змінюється у фазі із зовнішньою силою, то з енергетичної точки зору це дуже сприятливо для «підкачки» енергії в коливну систему. Робота зовнішньої сили за період коливань рівна:

$$A = \int_0^T F(t) \cdot \dot{s}(t) dt = \frac{F_0^2}{2\delta m} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{F_0^2 T}{4\delta m} \quad (2.21)$$

і значно перевищує роботу цієї сили в обох розглянутих вище режимах. Така велика робота необхідна для компенсації значних втрат внаслідок дії сили в'язкого тертя.

Для більшої наочності останнього результату звернемося до схеми з рухомим лівим кінцем пружини, де, як це видно з розв'язку (2.20),

$$s(t) = \xi_0 Q \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.22)$$

Амплітуда зміщення правого кінця пружини в  $Q$  разів більша за амплітуду зміщення лівого кінця. Під час проходження масою  $m$  положення рівноваги  $s = 0$ , коли її швидкість максимальна, лівий кінець пружини зміщений на максимальну величину  $\xi_0$  в напрямку швидкості маси, що рухається. У цей момент часу потужність сили пружності пружини має максимально можливе значення при заданій величині  $\xi_0$ . В наступні моменти ця потужність буде залишатися додатною, що, природно, забезпечує найбільш ефективну передачу енергії тілу, яке рухається з тертям.

Якщо сила (2.5) змінюється з довільною частотою  $\omega$ , то амплітуда  $s_0$  і фаза  $\varphi_0$ , що входять у рівняння (2.7), може бути знайдена, як було сказано вище, підстановкою розв'язку (2.7) в рівняння (2.10). Таку підстановку можна здійснити найбільш просто, якщо скористатися методом комплексних амплітуд, що широко використовують у різних областях фізики: теорії коливань, теорії хвиль, електромагнетизмі, оптиці та ін.

## 2.3. Амплітудно-частотні і фазово-частотні характеристики

### 2.3.1. Метод комплексних амплітуд

Якщо у формулі Ейлера (1.53):  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  під  $\varphi$  розуміти фазу гармонічних коливань

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (2.23)$$

то кожному такому коливанню  $s(t)$  можна поставити у відповідність комплексне число

$$\widehat{s}(t) = s_0 e^{i\varphi} = s_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = s_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + i s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2.24)$$

З (2.24) видно, що розв'язок (2.7) є уявною частиною комплексного виразу:

$$s(t) = i s_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \text{Im } \widehat{s}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.25)$$

де  $\widehat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$  – комплексна амплітуда, яка несе інформацію про амплітуду  $s_0$  і початкову фазу  $\varphi_0$  коливань. Слід відзначити, що метод комплексних амплітуд є, фактично, аналітичним виразом методу векторних діаграм. Якщо в останньому методі коливання з частотою  $\omega$  повністю задається вектором  $\widehat{s}_0$ , то в методі комплексних амплітуд коливання задається числом  $\widehat{s}_0$  на комплексній площині. Оскільки з комплексними числами зручно і просто виконувати математичні операції, то ми використовуємо цю обставину для отримання рівняння вимушених коливань (2.10).

### 2.3.2. Вимушені коливання з довільною частотою

Будемо шукати розв'язок рівняння (2.10) у комплексному вигляді:

$$\widehat{s}(t) = \widehat{s}_0 e^{i\omega t} \quad (2.26)$$

Вимушуючу силу в правій частині (2.10) також запишемо в комплексній формі:

$$\widehat{F}(t) = \widehat{F}_0 e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

де  $\widehat{F}_0 = F_0$  – дійсне число, оскільки для спрощення ми поклали, що початкова фаза у виразі для сили (2.5) рівна нулю.

Тоді рівняння (2.10) можна записати у вигляді:

$$\widehat{s} + 2\delta\widehat{s} + \omega_0^2\widehat{s} = \frac{\widehat{F}_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

Комплексну амплітуду  $\widehat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$  знаходимо підстановкою (2.26) у (2.28):

$$(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)\widehat{s}_0 e^{i\omega t} = \frac{\widehat{F}_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.29)$$

Звідси отримуємо:

$$\widehat{s}_0 = \frac{\widehat{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)}. \quad (2.30)$$

З (2.30) неважко знайти амплітуду коливань  $s_0 = |\widehat{s}_0|$ :

$$s_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (2.31)$$

і фазу  $\varphi_0 = \arctg \widehat{s}_0$ :

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{\text{Im } \widehat{s}_0}{\text{Re } \widehat{s}_0} = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (2.32)$$

що повністю визначають вимушені коливання (2.25).

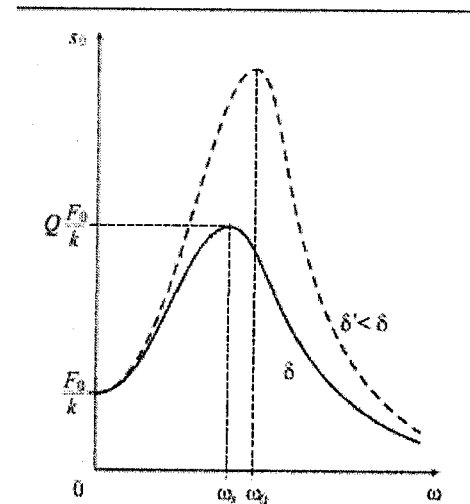


Рис. 2.3

Залежність амплітуди  $s_0$  від частоти  $\omega$ , що задається формулою (2.31), називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ), а залежність  $\varphi_0(\omega)$ , яка описується формулою (2.32), називається фазо-частотною характеристикою (ФЧХ). На рис. 2.3 зображена АЧХ, яка відображає наростання амплітуди  $s_0$  під час наближення  $\omega$  до  $\omega_0$ . Це явище отримало назву резонансу зміщень. Цікаво, що максимальне значення

амплітуди, яке в  $Q$  разів перевищує статичне зміщення  $F_0/k$ , досягається на частоті

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (2.33)$$

яка дещо менша як від власної частоти  $\omega_0$ , так і від частоти згасаючих коливань  $\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ . Для практичної мети для частот  $\omega$ ,

що лежать поблизу частоти  $\omega_0$ , формула (2.1) може бути значно спрощена. Так, можна покласти

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 \approx (\omega_0 - \omega)^2 \cdot 4\omega_0^2; \\ 4\delta^2 \omega^2 &\approx 4\delta^2 \omega_0^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Із врахуванням наближень (2.34) формула (2.31) набуде вигляду:

$$s_0(\omega) = \frac{F_0}{k} Q \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}} \quad (2.35)$$

У фізиці безрозмірну функцію

$$L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\delta}\right)^2 + 1}} \quad (2.36)$$

називають лоренцівською, а графік цієї функції називають лоренцівським контуром. Ширину  $\Delta\omega$  цього контуру, що визначає гостроту резонансу, знаходять з умови спадання вдвічі енергії коливальної системи, яка пропорційна квадрату амплітуди  $s_0(\omega)$  в (2.35), що є еквівалентним до наближеного співвідношення:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega/2}{\delta}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \quad (2.37)$$

Дане співвідношення можна пояснити з рис.2.4. За цієї умови  $\frac{\Delta\omega}{2} = \delta$ , тобто  $\Delta\omega = 2\delta$ . Ширина лоренцівського контуру характеризує смугу пропускання коливної системи, тобто таку область частот зовнішньої сили, для яких система ефективно відгукується на зовнішній вплив. Легко бачити, що добротність системи рівна

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (2.38)$$

тобто обернено пропорційна смузі пропускання.

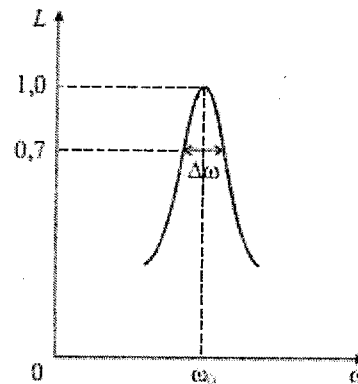


Рис. 2.4

Зменшенням згасання  $\delta$  крива  $\varphi_0(\omega)$  стає більш «чутливою» до зміни частоти поблизу резонансу.

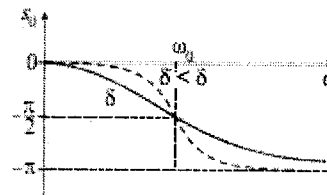


Рис. 2.5

Зі зменшенням коефіцієнта  $\delta$  АЧХ змінює свою форму, як це зображено пунктиром на рис.2.3 для  $\delta' < \delta$ . Смуга пропускання  $\Delta\omega$  зменшується, добротність  $Q'$  збільшується і резонанс стає більш гострим.

Фазочастотна характеристика для двох різних коефіцієнтів згасання зображена на рис.2.5. Фізичний зміст залежності  $\varphi_0(\omega)$  ми детально обговорили для трьох різних режимів вимушених коливань. Відзначимо тільки, що зі

зменшенням згасання  $\delta$  крива  $\varphi_0(\omega)$  стає більш «чутливою» до зміни частоти поблизу резонансу. Поряд з резонансом зміщень можна говорити про резонанс швидкостей  $s$  і резонанс прискорень  $s'$ .

Швидкість маси, що коливається, рівна:

$$s = s_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2.39)$$

а її прискорення:

$$s' = s_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) \quad (2.40)$$

тобто амплітудно-частотна характеристика для швидкості отримується множенням АЧХ (2.31) на  $\omega$ , а для прискорення – на  $\omega^2$ :

$$v_0 = s_0 \omega = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}},$$

$$w_0 = s_0 \omega^2 = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 4 \frac{\delta^2}{\omega^2}}}$$

На рис.2.6 зображені частотні залежності амплітуд швидкості

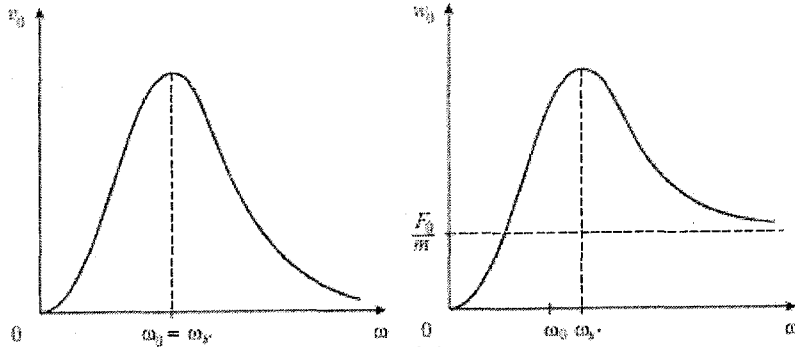


Рис. 2.6

$v_0 = s_0 \omega$  і прискорення  $w_0 = s_0 \omega^2$ .

Характерно, що резонанс швидкості має місце на частоті  $\omega_s = \omega_0$ , а резонанс прискорення – при  $\omega_s > \omega_0$ . Відзначимо, що всі резонансні частоти пов'язані між собою

$$\omega_s \cdot \omega_{s'} = \omega^2 = \omega_0^2. \quad (2.41)$$

Відзначимо також, що в області низьких частот малі як прискорення, так і швидкість. В області високих частот прискорення скінченне ( $s_0 \omega^2 \rightarrow F_0/m$ ) і забезпечується тільки зовнішньою силою. Однак швидкість залишається незначною, оскільки тіло не встигає розігнатися.

Фазочастотні характеристики для швидкості і для прискорення можна легко отримати, скориставшись формулами (2.39) і (2.40), оскільки їх можна отримати простим зсувом ФАХ для зміщення (2.32), зображеної на рис. 2.5, вгору відповідно на  $\pi/2$  або на  $\pi$ .

Розглянемо питання про підведення енергії до осцилятора за довільної частоти вимушуючої сили. Середня за період потужність цієї сили рівна

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t)s(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \sin \omega t \cdot v_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)dt = \\ &= \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega t + \Psi_0)dt = \\ &= \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin^2 \omega t \cos \Psi_0 dt + \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \sin \Psi_0 dt = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \Psi_0 \end{aligned}$$

де  $\Psi_0 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  – зсув фаз між швидкістю і силою. Ми бачимо, що максимум потужності, яка підводиться до осцилятора, досягається на частоті  $\omega_0$ , оскільки при цьому максимальні і амплітуда швидкості  $v_0$ , і  $\cos \Psi_0$  ( $\Psi_0 = 0$ ). Для інших частот вимушуючої сили ця потужність швидко зменшується і прямує до нуля, як для  $\omega \rightarrow 0$ , так і для  $\omega \rightarrow \infty$ .

#### 2.4. Балістичний режим коливань

Розглянемо коливання системи, до якої прикладена довільна сила  $F(t)$ , що діє протягом проміжку часу  $\Delta t$ , який значно менший періоду власних коливань:  $\Delta t \ll T$ . Відгук системи на такий вплив буде пропорційний імпульсу діючої сили:

$$p = \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} F(t)dt. \quad (2.42)$$

Дійсно, за короткочасного впливу (протягом часу  $\Delta t$ ) маятник не встигає помітно зміститися з положення рівноваги, однак буде володіти прискоренням

$$s = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.43)$$

У записі (2.43) ми знехтували силою в'язкого тертя. Після припинення дії сили маятник набуде швидкості

$$v_0 = s = \frac{1}{T} \int_0^{\Delta t} s dt = \frac{p}{m}, \quad (2.44)$$

яка пропорційна імпульсу сили.

Далі маятник буде здійснювати власні гармонічні коливання з амплітудою

$$s_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{p}{m\omega_0}. \quad (2.45)$$

Якщо параметри  $m$  і  $\omega_0$  відомі, то можна визначити  $p$ , вимірюючи амплітуду першого коливання після впливу.

Як приклад, розглянемо процедуру вимірювання заряду, що протікає по електричному колі, з використанням балістичного гальванометра. Цей гальванометр містить рамку, яка може здійснювати крутильні коливання. Рамка має збільшений (порівняно зі звичайним гальванометром) момент інерції, що збільшує період її власних коливань до декількох секунд. Оскільки рамка знаходиться в



магнітному полі постійного магніту, то під час протікання через неї електричного струму на рамку буде діяти момент сил, що пропорційний силі струму. Під час протікання короткочасного струму рамка отримує кутову швидкість і потім, за чверть періоду коливань, відхиляється на деякий максимальний кут, що пропорційний інтегралу від струму, який протік через рамку, тобто величині заряду.

## 2.5. Усталення коливань

Ми вже відзначали, що якщо прикласти до маятника, який перебуває в стані спокою, гармонічну силу в момент часу  $t = 0$ , то маятник починає поступово розгойдуватися, як це якісно зображено на рис. 27. а. Усталення коливань пов'язане з тим фактом, що поряд із вимушеними коливаннями на частоті  $\omega$  будуть збуджуватися і

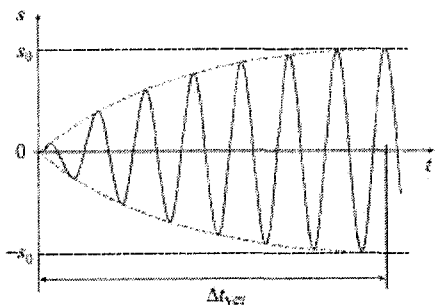


Рис. 2.7.а

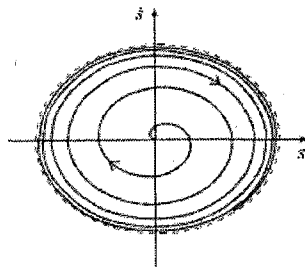


Рис. 2.7.б

власні коливання на частоті  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , які будуть, звичайно, згасати.

З математики відомо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.10) при  $\delta < \omega_0$  має вигляд:

$$s(t) = s_{0c} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_c) + s_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.50)$$

що являє собою суперпозицію власних згасаючих коливань на частоті  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  і незгасаючих вимушених коливань на частоті  $\omega$ . З (2.50) видно, що коливання усталяться тільки тоді, коли згаснуть власні коливання. Це відбудеться після проходження часу

$$\Delta t_{уст} \approx \tau = \frac{1}{\delta}. \quad (2.51)$$

За цей час у систему «закачується» енергія, оскільки до усталення коливань робота зовнішньої сили перевищує роботу сил тертя. В усталеному режимі має місце баланс енергії, що поступає і витрачається.

Зокрема, якщо  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , то (2.50) при  $s(0) = 0$ ,  $\dot{s}(0) = 0$  і  $\delta \ll \omega_0$ , має вигляд

$$s(t) = s_0 (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t - \pi/2), \quad (2.52)$$

оскільки за цих умов  $s_{0c} = s_0$ ,  $\varphi_c = -\varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}$ .

Відзначимо, що формула (2.51) визначає тільки порядок величини (часовий масштаб)  $\Delta t_{уст}$ . Для практичної мети час усталення (так само як і час згасання) коливань приймають рівним  $\Delta t_{уст} = (3 \div 5)\tau$ .

На фазовій площині (рис. 2.7) фазова траєкторія буде поступово «розкручуватися» з початку координат і прямувати до граничного циклу – еліпса, зображеного на рис. 2.7 пунктирною лінією.

## 2.6. Характеристики різних коливних систем

Цікаво співставити основні характеристики різних коливних систем (деколи їх для скорочення називають осциляторами). Прикладами таких осциляторів можуть бути механічні, електричні (коливальний контур), оптичні (електрон у атомі) та інші системи.

Звернемося спочатку до характеристик найбільш поширеного осцилятора – маятника, що являє собою тіло, підвішене на нитці.

Маятник є одним з найстаровинніших фізичних приладів. З допомогою крутильних маятників були відкриті закони гравітації та електричних взаємодій, виміряно тиск світла, виконано велику кількість інших фізичних експериментів. Останнім часом запропоновано і реалізується ряд нових експериментів для вивчення фундаментальних властивостей матерії, в яких дуже малі сили вимірюють за допомогою крутильних маятників. Чутливість таких експериментів залежить від того, наскільки ослаблені сейсмічні збурення, що діють на маятник, а також від стабільності його параметрів, наприклад пружних властивостей нитки підвісу. Однак, якщо навіть усунути всі зовнішні збурюючі впливи, залишається одне принципове джерело флуктуацій його амплітуди і фази коливань. Це хаотичний тепловий рух молекул у нитці підвісу і підвішеному тілі. Флуктуаційна сила, що діє на нього, залежить від температури і від

добротності маятника. Чим вища добротність маятника, тим повільніше згасають його коливання і дисипує його енергія, перетворюючись у тепло, тобто в хаотичний рух молекул. Це означає, що послаблюється і зворотній процес розгойдування маятника хаотичним рухом молекул, тобто зменшується флуктуаційна сила, яка діє на маятник. Для того, щоб зменшити згасання, тіло і нитку підвісу виготовляють з високоякісного плавленого кварцу – матеріалу з низькими втратами пружної енергії, а також вживають спеціальні заходи для виключення інших джерел дисипації енергії. В результаті добротність крутильних маятників досягає величини  $\sim 10^7$ .

На сьогодні в декількох країнах будують лазерні гравітаційні антени для реєстрації гравітаційного випромінювання від космічних об'єктів. Принцип дії антени ґрунтується на тому, що гравітаційна хвиля діє на вільні маси, поміщені в різні точки простору, змінюючи відстань між ними. Ця зміна пропорційна інтенсивності хвилі і відстані між масами. З цієї причини в гравітаційних антенах пробні маси розташовують у декількох кілометрах одна від одної в спеціальних вакуумних камерах, а відстань між ними вимірюють унікальним лазерним інтерферометром. Кожну пробну масу підвішують на тонких нитках, утворюючи маятник гойдання. З масами пов'язують два дзеркала, які відбивають лазерний промінь, що поширюється вздовж прямої, яка з'єднує ці маси. За зсувам інтерференційної картини, яка утворюється такою складною оптичною системою, можна «відчути» взаємне зміщення мас на величину порядку  $10^{-17}$  см, що на 7 порядків менше розміру атома! Чутливість гравітаційної антени обмежена тепловими флуктуаціями коливань такого маятника, а, отже, також визначається його добротністю. На відміну від крутильних, добротність маятників гойдання залежить не тільки від втрат у пружному елементі – нитці підвісу, але і від її натягу. За рахунок цього ефекту можна значно збільшити добротність маятника гойдання. Так, добротність маятників гойдання, що повністю виготовлені з плавленого кварцу, може перевищувати  $10^8$ , тобто час згасання їх коливань досягає декількох років. Звичайно, за такої малої дисипації енергії маятника на його добротність впливають дуже слабкі зовнішні впливи, наприклад, електричні і магнітні поля або частинки пилу, що осіли на нитці підвісу тощо.

За таких високих значень добротності і відповідному подавленні сейсмічних збурень проявляються квантові властивості маятника. В цьому випадку поведінка цілком макроскопічного об'єкта буде визначатися принципом невизначеності Гейзенберга.

Правда, необхідні умови реалізуються поки що для малих часових інтервалів (близько  $10^{-3}$  с), і для спостереження квантових особливостей поведінки маятників потрібні дуже чутливі реєструючі пристрої, однак саме такі маятники, що володіють гранично високою добротністю, пропонують використовувати в майбутніх гравітаційних антенах.

Камертон, що служить для настройки музичних інструментів, також є високодобротним осцилятором. Звук, який випромінюється вібруючими ніжками камертона, затихає за достатньо тривалий час порівняно з періодом їх коливань. Якщо, наприклад, власна частота камертона лежить у діапазоні  $\nu = 300 \div 400$  Гц, а тривалість їх звучання складає час порядку 10 с, то камертон здійснить  $\nu\tau = 3000 \div 4000$  коливань. Це означає, що добротність по порядку величини рівна  $Q \sim 10^4$ .

Як це не здається парадоксальним, електричний коливальний контур є менш добротною системою, хоча частота його власних коливань має порядок величини  $\nu \sim 10^5 \div 10^8$  Гц. Добротність контуру обмежена, головним чином, омичними втратами і має порядок величини  $Q \sim 10^2$ . Це у свою чергу, означає, що смуга пропускання  $\Delta\nu \sim 10^3 \div 10^6$  Гц.

Якщо частота у радіопередавальній станції  $\nu_c$  висока ( $\nu_c > 10^6$ ) Гц, то її перетворюють в радіоприймачах до низької (проміжної) частоти ( $\nu_n = 10^5$ ) Гц. Тоді коливальний контур радіоприймача буде мати дуже малу смугу пропускання  $\Delta\nu \sim Q\nu_n \sim 5 \cdot 10^3$  Гц. Це означає, що якщо частоти двох радіостанцій  $\nu_{1c}$  і  $\nu_{2c}$  відповідно розрізняються більше ніж на величину смуги пропускання ( $|\nu_{1c} - \nu_{2c}| > \Delta\nu$ ), то переналаштовуючи власну частоту коливального контуру приймача, можна окрема налаштуватися на кожну з цих передаючих станцій.

Оптичний електрон у атомі, здійснюючи переходи з однієї орбіти на іншу, у відповідності з постулатами Бора, випромінює квант світла з енергією  $h\nu = E_2 - E_1$ . З класичної точки зору це можна інтерпретувати таким чином, що електрон здійснює коливання на цій частоті  $\omega$ , тобто є оптичним осцилятором. Оскільки електрон втрачає енергію на випромінювання, то амплітуда його коливань повинна згаснути протягом деякого характерного часу  $\tau$ . Для ізолизованого атома (який не взаємодіє із сусідніми атомами) цей час визначається зарядом і масою електрона і залежить від частоти  $\omega$ .

Однак для всіх атомів він має один і той самий порядок величини  $\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$  с. Враховуючи, що у видимому діапазоні період коливань  $T = 2\pi/\omega \sim 10^{-15}$  с, легко підрахувати число коливань до їх згасання. Воно має порядок величини  $\frac{\tau}{T} \sim 10^6 \div 10^7$ . Тому добротність оптичного осцилятора ( $Q \sim 10^7$ ), будучи високою, все-таки менша, ніж добротність прецизійних кварцових маятників.

## 2.7. Параметричні коливання

У повсякденному житті ми стикаємося з незгасаючими коливаннями, для підтримання яких необхідно змінювати якийсь із параметрів коливної системи. Одним з яскравих прикладів є коливання гойдалки. Добре відомо, що можна підтримувати коливання тривалий час, якщо швидко присідати в момент найбільшого відхилення гойдалки і так само швидко вставати під час проходження положення рівноваги. Завдяки цьому параметр фізичного маятника (гойдалки) – відстань  $a$  між віссю обертання і центром мас – змінюється стрибкоподібно на величину  $\pm \Delta a$  ( $\Delta a \ll a$ ). Величина  $\Delta a$  повинна бути такою, щоб забезпечити баланс енергії системи: втрати енергії маятника за період повинні компенсуватися за рахунок виконання роботи, що здійснюється під час присідання і вставання.

Напишемо умову енергетичного балансу для найпростішого випадку коливань математичного маятника з довжиною нитки  $a$ , яка змінюється на величину  $\pm \Delta a$  (рис. 2.8). Це можна здійснити, якщо пропустити нитку маятника через отвір у точці Р (точці підвісу) і потім, прикладаючи зовнішню силу  $\vec{F}$  до кінця нитки, періодично змінювати її довжину.

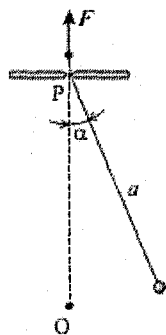


Рис. 2.8

Розглянемо усталені параметричні коливання маятника з не дуже великими амплітудами і будемо вважати, що згасання мале ( $\delta \ll \omega_0$ ). Оскільки ( $\Delta a \ll a$ ), то наближено можна вважати, що кут  $\alpha$  відхилення маятника від положення рівноваги змінюється з часом за гармонічним законом

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t, \quad (2.53)$$

де згідно з (1.42)  $\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$ , а  $\omega_0 = \sqrt{g/a}$ .

В момент найбільшого відхилення на кут  $\alpha_0$  сила натягу нитки рівна  $N_1 = mg \cos \alpha_0$ . Тому, подовжуючи нитку на величину  $\Delta a$ , зовнішня сила  $F_1 = N_1$  здійснює від'ємну роботу  $A_- = -mg \cos \alpha_0 \cdot \Delta a$ . Розкладаючи  $\cos \alpha_0$  в ряд  $\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} + \dots$ , отримаємо

$$A_- \approx -mg \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24}\right) \Delta a. \quad (2.54)$$

Під час проходження маятником положення рівноваги ( $\alpha = 0$ )  $F_2 = N_2 = mg + \frac{mv_0^2}{a}$ , де  $v_0 = \alpha_0 \omega a$ . Тому додатна робота при вкороченні нитки з точністю до членів порядку  $\alpha_0^4$  рівна:

$$A_+ = (mg + m\alpha_0^2 \omega^2 a) \Delta a \approx mg \left(1 + \alpha_0^2 - \frac{\alpha_0^4}{8}\right) \Delta a, \quad (2.55)$$

де враховано, що  $\omega_0^2 a = g$ .

Повна робота, яка виконується за період зовнішньою силою  $\vec{F}$ , буде додатною і рівною

$$A = 2(A_+ + A_-) = 3mg\alpha_0^2 \Delta a - \frac{mg\alpha_0^4}{3} \Delta a = 3mg\alpha_0^2 \Delta a \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right). \quad (2.56)$$

Втрати енергії за період чисельно рівні роботі сили тертя:

$$A_{mp} = \int_0^T F_{mp} v dt = - \int_0^T \Gamma v^2 dt, \quad (2.57)$$

де  $F_{mp} = -\Gamma v$ .

Під час гармонічних коливань (2.53) швидкість

$$v(t) = a\dot{\alpha}(t) = a\alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.58)$$

Підставляючи (2.58) у (2.57) і виконуючи інтегрування, отримуємо:

$$A_{mp} = -\Gamma a^2 \alpha_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\Gamma a^2 \alpha_0^2 \omega^2 \frac{T}{2} \approx -\Gamma \alpha_0^2 g a \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \frac{T_0}{2}, \quad (2.59)$$

оскільки  $\omega T = \omega_0 T_0 = 2\pi$ .

Отже, умова балансу енергії полягає в рівності нулю суми робіт:  $A_+ + A_- = 0$ , або

$$3mg\alpha_0^2\Delta a\left(1-\frac{\alpha_0^2}{9}\right)=\Gamma\alpha_0^2ga\frac{T_0}{2}\left(1-\frac{\alpha_0^2}{16}\right). \quad (2.60)$$

Проводячи скорочення і використовуючи визначення виразу для добротності  $Q \approx \frac{\pi}{\delta T_0}$ , отримуємо наближений вираз для амплітуди  $\alpha_0$  усталених параметричних коливань:

$$\alpha_0 \approx \frac{12}{\sqrt{7}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q(\Delta a/a)}}. \quad (2.61)$$

Відношення  $\Delta a/a$  називають **глибиною модуляції** параметра  $a$ . З (2.61) видно, що для виникнення параметричних коливань глибина модуляції повинна перевищувати деяке мінімальне (порогове) значення, яка приблизно рівне величині, оберненій до добротності:

$$\frac{\Delta a}{a} \geq \frac{1}{Q}. \quad (2.62)$$

Чим більша добротна система, тим менша порогова глибина модуляції. З підвищенням величини  $\Delta a/a$  амплітуда коливань  $\alpha_0$ , як це впливає з формули (2.61), буде збільшуватися. Однак за великих амплітуд ( $\alpha_0 > 1$ ) формула (2.16) стає непридатною, оскільки прийняті нами наближення стають незастосовні.

Слід відзначити, що параметричне збудження є істотно нелінійним ефектом. Це видно, зокрема, з рівняння (2.60): якщо знехтувати в ньому малими доданками  $\sim \alpha_0^2$ , які описують нелінійність, то  $\alpha_0$  з рівняння випадає, і отримується співвідношення  $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi}{3Q}$ . Фізично це означає, що за такого значення глибини модуляції енергетичний баланс у системі забезпечується за будь-яких амплітуд  $\alpha_0$ , що є хибним.

Відзначимо, що збудження параметричних коливань, взагалі кажучи, може відбуватися не тільки на подвоєній частоті власних коливань системи, коли параметр змінюється один раз за кожні півперіоду, але і за менш частого впливу: через один, два, три і т.д. півперіодів коливань, тобто на частотах  $2\omega/n$ , де  $n$  довільне ціле число. Збудження також можливе всередині деякої області – поблизу кожної з цих частот, однак порогові значення глибини модуляції для різних частот будуть різні.

## 2.8. Автоколивання

Спостерігаючи коливання листя на деревах, дорожніх знаків на проїжджій частині тощо ми розуміємо, що в усіх перелічених випадках незгасаючі коливання відбуваються за рахунок енергії вітру. При цьому сама коливна система здійснює відбір енергії вітру в потрібний момент часу і в кількості, необхідній для компенсації неминучих енергетичних втрат. Коливання в цих системах починаються самовільно за рахунок флуктуацій (тремтінь) предметів, що коливаються. Частота і амплітуда усталених коливань визначається як параметрами самої системи, так і параметрами її взаємодії з вітром. Такі коливання є прикладами автоколивань, а самі системи – прикладами автоколивних систем.

Класичним прикладом автоколивної системи служить механічний годинник з маятником і гирями. Цей годинник періодично «черпає» енергію під час опускання гир, підвішених до ланцюжка, перекинутого через шестерню годинникового механізму.

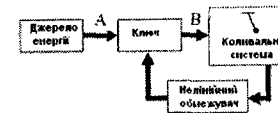


Рис. 2.9.а

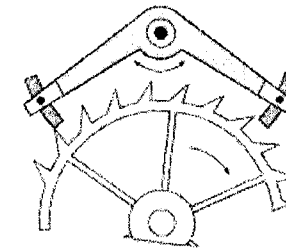


Рис. 2.9б

Принцип роботи всіх автоколивних систем можна зрозуміти, звернувшись до схеми, зображеної на рис.2.9а.

Періодичним надходженням енергії в коливну

систему від джерела енергії по каналу АВ управляє сама коливна система шляхом зворотного зв'язку. Схематично це зображено у вигляді деякого запираючого канал АВ пристрою (ключа), яким управляє сама система. Так, залежно від положення і швидкості листка, що коливається на вітрі, буде різною потужність сил аеродинамічного тиску. В конструкції годинникового механізму (рис. 2.9б) є наявний спеціальний пристрій – анкер, що виконує роль ключа. Цей анкер, який являє собою коромисло, приводить у коливання сам маятник годинника. За певних положень він «відкриває» одну з шестерень годинникового механізму. В цей момент часу шестерня повертається за рахунок моменту сил, прикладеного з боку натягнутого ланцюжка з вантажем. Вантаж при цьому опускається на невелику відстань. Кількість енергії, що

поступає в годинниковий механізм, рівна за величиною зменшенню потенціальної енергії вантажу в полі сили тяжіння.

Важливо відзначити, що будь-яка автоколивна система нелінійна. На схемі це відображено наявністю в системі зворотного зв'язку нелінійного обмежувача сигналу, який управляє ключем. Нелінійність системи проявляється в тому, що за початкового зростання амплітуди коливань, викликаного флуктуаціями, поступлення енергії в систему за кожний наступний період коливань збільшується нелінійно, тобто приріст поступаючої енергії стає все менший і менший. Природно, що амплітуда коливань досягне такої усталеної величини, за якої притік енергії і її втрати будуть рівні за величиною.

### 2.9. Маятник на валу, що обертається (маятник Фруда)

Для більш поглибленого вивчення принципу дії автоколивної системи проаналізуємо коливання маятника, підвіс якого скріплено з муфтою 1, надітою на горизонтальний вал 2 (рис.2.10).

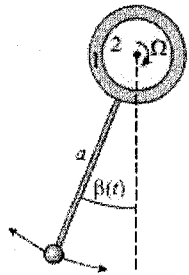


Рис. 2.10

Нехай вал обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\Omega$  за годинниковою стрілкою. Якщо кут відхилення маятника від вертикалі  $\beta(t)$  змінюється з часом, то сила сухого тертя в підвісі, що нелінійно залежить від відносної швидкості муфти і валу  $\Omega - \beta$ , також буде змінюватися з часом

( $\beta$  – кутова швидкість муфти). Момент цієї сили  $M_{тр}$  буде виявляти періодичний вплив на маятник, підтримуючи його коливання. На рис. 2.11 зображена нелінійна залежність  $M_{тр}$  від відносної кутової швидкості муфти і валу. На зображеній кривій є точка перегіну Р. Підберемо швидкість валу  $\Omega$  такою, щоб у відсутності коливань ( $\beta=0$ ) потрапити в цю точку. У цьому випадку до муфти маятника буде прикладено постійний момент сили тертя:  $M_{тр}=M_0$ . Для подальшого аналізу зручніше скористатися залежністю  $M_{тр}(\beta)$ , зображеною на рис. 2.12.

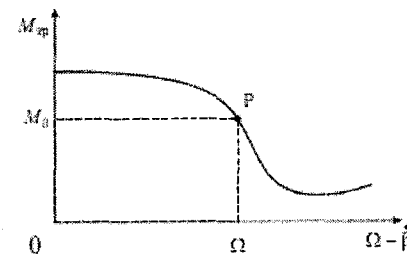


Рис. 2.11

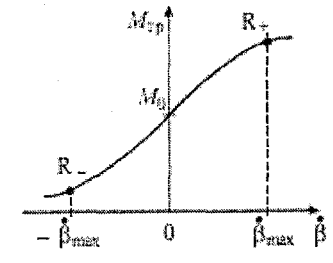


Рис. 2.12

Необхідно підкреслити, що початкове (лінійне) наростання  $M_{тр}$  з кутовою швидкістю  $\beta$  забезпечує умови для самовільного наростання коливань з флуктуації, що є еквівалентним наявності додатного зворотного зв'язку, а наступне сповільнення зростання  $M_{тр}$  за збільшення  $\beta$  є причиною нелінійного обмеження наростання коливань: амплітуда зміщення маятника (а отже і амплітуда його швидкості  $\beta_{max}$ ) досягне максимальної (усталеної) величини, що є еквівалентним наявності нелінійного обмежувача.

Відхилимо обережно маятник від вертикалі на кут  $\beta_0$  такий, щоб момент сили тертя, що діє на нерухомий маятник,  $M_0=M_{тр}(0)$ , був зрівноважений моментом сили тяжіння  $M(\beta_0) = mga \sin \beta_0$ :

$$M_{тр}(0) = M(\beta_0) \text{ або } M_0 = mga \sin \beta_0. \quad (2.63)$$

Тут  $m$  – маса маятника,  $a$  – відстань від вала до центра мас маятника.

На перший погляд може здаватися, що маятник так і залишиться висіти під кутом  $\beta_0$  до вертикалі. В дійсності ж це положення буде нестійким. Уявимо, що в результаті незначного поштовху маятник отримує невелику кутову швидкість  $\beta > 0$ . При цьому зростуть моменти сили тяжіння  $M$  і тертя  $M_{тр}$ , і умова (2.63) може порушитися. Якщо початковий нахил кривої  $M_{тр}(\beta)$  на рис. 2.12 достатньо великий (сильний додатній зворотній зв'язок), то  $M_{тр}(\beta) > M(\beta_0)$ . Це означає, що кутова швидкість  $\beta$  буде збільшуватися. Однак потім це збільшення припиниться, оскільки внаслідок нелінійного вигину кривої  $M_{тр}(\beta)$  рівність моментів знову відновиться (спрацює механізм нелінійного обмеження):

$$M_{тр}(\beta_{max}) = M(\beta). \quad (2.64)$$

Умові (2.64) відповідає точка  $R_+$  на кривій  $M_{тр}(\beta)$ . Після цього кутова швидкість почне зменшуватися, оскільки зі збільшенням кута  $\beta$  момент  $M(\beta)$  продовжує збільшуватися, а  $M_{тр}(\beta)$  – зменшуватися. Отже, маятник через деякий час зупиниться, а його кут відхилення досягне максимального значення  $\beta_{max}$ . Оскільки в цей момент  $M(\beta_{max}) > M_{тр} = M_0$ , то маятник почне рухатися у зворотному напрямку. Момент сили тяжіння почне зменшуватися, а момент сили тертя буде також зменшуватися, але швидше ніж момент сили тяжіння (знову спрацьовує додатній зворотній зв'язок). Спочатку цей рух буде прискореним, поки  $M > M_{тр}$  (до точки  $R_-$  на рис. 2.12), а потім за  $M < M_{тр}$  – сповільненим (до точки  $P$  на рис. 2.12). Зупинившись за деякого кута нахилу  $\beta_{min}$ , маятник знову рухатиметься вліво, оскільки все ще  $M < M_{тр}$ . Нарешті, він досягне стартової позиції, однак набута ним швидкість буде більшою, ніж швидкість початкового поштовху. Отже, протягом одного періоду коливань, енергія маятника збільшилася за рахунок її запозичення від пристрою, що обертає вал.

У наступні періоди коливань точки  $R_+$  і  $R_-$  на кривій  $M_{тр}(\beta)$  будуть зсуватися в різні боки, однак внаслідок нелінійності цей зсув припиниться (спрацьовує механізм нелінійного обмеження) і коливання усталяться.

Для того, щоб кількісно проаналізувати автоколивання маятника, запишемо рівняння обертового руху маятника з моментом інерції  $J$ :

$$J\ddot{\beta} = M_{mp}(\beta) - mga \sin \beta. \quad (2.65)$$

У даному рівнянні ми поки що знехтуємо силами в'язкого тертя, що діють на рухомий маятник. Момент сили сухого тертя в підвісі, що нелінійно залежить від кутової швидкості  $\dot{\beta}$  (рис.2.12), можна апроксимувати таким виразом

$$M_{тр}(\beta) = M_0 + k_1\dot{\beta} - k_2\dot{\beta}^3, \quad (2.66)$$

де  $k_1$  і  $k_2$  – розмірні коефіцієнти, які визначають зворотній зв'язок і нелінійне обмеження відповідно. Якщо коливання описувати кутом відхилення  $\alpha$  від положення нестійкої рівноваги, що задається кутом  $\beta_0$  ( $\alpha = \beta - \beta_0$ ), то

$$mga \sin \beta = mga(\sin \beta_0 \cos \alpha + \cos \beta_0 \sin \alpha). \quad (2.67)$$

Для малих кутів  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Якщо врахувати, що  $\beta = \alpha$ , то рівняння (2.65) набуде вигляду:

$$J\ddot{\alpha} + mga \cos \beta_0 \alpha = k_1\dot{\alpha} - k_2\dot{\alpha}^3. \quad (2.68)$$

Це рівняння є нелінійним диференціальним рівнянням і не має аналітичного розв'язку. В теорії коливань розвинуто методи, які дозволяють розв'язати його наближено, дослідити умови, за яких можливе самозбудження коливань, знайти амплітуду  $\alpha_0$  і частоту  $\omega$  усталених коливань:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t. \quad (2.69)$$

Ми зробимо простіше і визначимо  $\alpha_0$  з умови енергетичного балансу. Оскільки права частина (2.68) мала, то частота коливань приблизно рівна  $\omega = \sqrt{mga \cos \beta_0 / J}$ .

Підрахуємо роботу за період коливань  $T = 2\pi/\omega$ , яка виконується пристроєм (наприклад, електродвигуном), що обертає вал. Вона, очевидно, рівна:

$$A = \int_0^T M_{mp}(\beta) \Omega dt = M_0 \Omega T. \quad (2.70)$$

Тут враховано, що інтеграли по часу від  $\dot{\beta}$  і  $\dot{\beta}^3$  рівні нулю, оскільки

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.71)$$

Втрати енергії у ковзному підвісі за цей час складуть величину

$$q = \int_0^T M_{mp}(\beta) (\Omega - \dot{\beta}) dt = \left( M_0 \Omega - \frac{k_1 \alpha_0^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_0^4 \omega^4}{8} \right) T. \quad (2.72)$$

На рис. 2.13 зображені залежності  $A$  і  $q$  від амплітуди  $\alpha_0$ . Видно, що за випадкових флуктуацій, коли  $\alpha_0$  мале,  $A > q$ . Це означає, що коливання будуть наростати. Однак зі збільшенням амплітуди починають зростати втрати  $q$ . Коливання усталяться за  $A = q$  (точка  $R$  на графіку). Амплітуда усталених коливань визначиться з рівності

$$M_0 \Omega T = M_0 \Omega T - \frac{k_1 \alpha_{0уст}^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_{0уст}^4 \omega^4}{8}. \quad (2.73)$$

Звідси

### ЛЕКЦІЯ 3

$$\alpha_{0уст} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} \quad (2.74)$$

Відзначимо, що тепер ми можемо легко врахувати сили в'язкого тертя, для чого в праву частину рівняння (2.68) слід додати член  $-\Gamma\dot{\alpha}$ . Це призведе до того, що коефіцієнт  $k_1$  у (2.74) буде зменшений на величину  $\Gamma$ . Тому (2.74) зміниться:

$$\alpha_{0уст} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1 - \Gamma}{3k_2}} \quad (2.75)$$

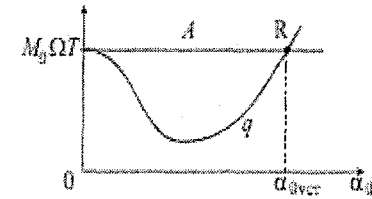


Рис. 2.13

З останнього виразу випливає, що за  $\Gamma \geq k_1$  коливання не можуть самовільно початися.

Автоколивальні системи знаходять широке застосування в техніці. Так, наприклад, духові і струнні інструменти, органні труби, генератори електромагнітного випромінювання в лініях зв'язку, оптичні квантові генератори (лазери) тощо являють собою приклади автоколивальних систем.

Однак автоколивання можуть відігравати і негативну роль, починаючи з безпечних коливань деталей кранів водопровідних систем, що «режуть» за великого тиску води, до небезпечних коливань крил літаків, які отримали назву «флаттер». У листопаді 1940 року підвісний міст через річку Такома в США був зруйнований внаслідок крутильних автоколивань, що виникли під дією вітру, який дув уздовж річки.

1. Вільні незгасаючі коливання в системах із двома ступенями вільності.
2. Методика аналізу коливань двох зв'язаних осциляторів.
3. Згасання коливань.
4. Енергія коливної системи та її дисипація.
5. Вимушені коливання.
6. Коливання систем з багатьма ступенями вільності.
7. Загальний випадок руху неперервної струни і Фур'є аналіз.

Спостерігаючи коливання маси  $m$ , підвішеної на легкій пружині з жорсткістю  $k_1$ , не можна не звернути увагу на те, що поряд з вертикальними коливаннями вантажу, виникають так звані маятникові коливання (з боку на бік) (рис. 3.1).

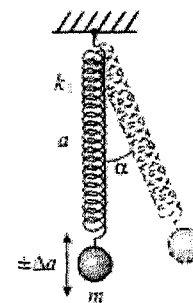


Рис. 3.1

Найбільш сильними ці маятникові коливання будуть тоді, коли частота вертикальних коливань  $\sqrt{\frac{k_1}{m}}$  дорівнюватиме

подвоєній частоті маятникових коливань  $\sqrt{\frac{g}{a}}$

( $a$  – довжина розтягнутої пружини за нерухомого вантажу). Такий результат легко зрозуміти, якщо розглядати маятникові коливання як резонансні параметричні

коливання, при цьому параметр маятника – довжина пружини  $a$  – змінюється під час вертикальних коливань на величину  $\pm \Delta a$ . Протягом деякого часу маятникові коливання можуть підсилюватися за рахунок зменшення енергії вертикальних коливань. Потім процес піде у зворотному напрямі: маятникові коливання почнуть слабшати, «повертаючи» енергію вертикальним коливанням, які підсилюються. Отже, гармонічні коливання не будуть гармонічними, що пов'язано з наявністю маятникових коливань, які відповідають збудженню другого ступеня вільності. За певних умов можуть виникати і крутильні коливання вантажу навколо вертикальної осі пружини. Дослід показує, що найбільш сильними ці коливання будуть у тому

випадку, коли їх частота  $\sqrt{\frac{k_2}{J}}$  ( $k_2$  – коефіцієнт жорсткості пружини

під час її скручування,  $J$  – момент інерції тіла відносно вертикальної осі) буде приблизно у два рази менша за частоту вертикальних коливань. В загальному випадку в такій системі можуть відбуватися чотири типи коливань, що відповідають чотирьом ступеням вільності: одне вертикальне, два маятникові у двох взаємно перпендикулярних площинах і одне крутильне.

Отже, перед нами виникає задача вивчення основних закономірностей коливань у системі з двома, трьома і більше ступенями вільності, потім можна розглянути і коливання суцільного середовища як системи з нескінченно великим числом ступенів вільності.

### 3.1. Вільні незгасаючі коливання в системах з двома ступенями вільності

На рис. 3.2. зображені три різні коливні системи з двома ступенями вільності. Перша з них (а) – це два різні пружинні маятники, зв'язані пружиною з жорсткістю  $k'$ . Друга (б) – два вантажі з масами  $m_1$  і  $m_2$ , закріплені на натягнутому деякою силою  $F$  невагомому гумовому шнурі. Третя (в) – два зв'язані пружиною  $k'$  різні маятники, кожний з яких складається з вантажу, підвішеного на невагомому стержні.

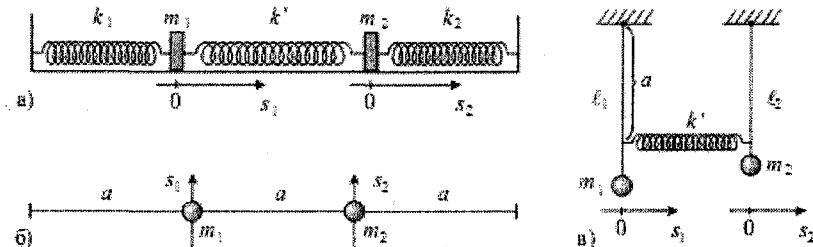


Рис. 3.2

Коливання вантажів у кожній із трьох систем описуються двома часовими залежностями їх зміщень  $s_1(t)$  і  $s_2(t)$ . Додатній напрямок зміщення  $s$  на рисунку вказано стрілками.

Досвід показує, що за довільного способу збудження коливання не будуть гармонічними: амплітуда коливань кожної з мас буде періодично змінюватися з часом. Однак можна створити такі початкові умови, за яких кожний вантаж буде здійснювати гармонічні коливання з однією і тією ж частотою  $\omega$ :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega t + \varphi) \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Частота цих коливань  $\omega$  визначається властивостями системи. Відношення

$$\zeta = \frac{s_{02}}{s_{01}} \quad (3.2)$$

також визначається параметрами системи. Ця безрозмірна алгебраїчна величина  $\zeta$  називається **коефіцієнтом розподілу амплітуд** під час гармонічного коливання. Відзначимо, що  $s_{01}$  і  $s_{02}$  можуть мати будь-який знак. Якщо  $\zeta > 0$ , то зміщення обох мас завжди відбуваються в один бік (**синфазні коливання**), а за  $\zeta < 0$  – у протилежні боки (**протифазні коливання**). Гармонічні коливання (3.1) називаються **нормальними коливаннями**, або **модами**, а частота  $\omega$  називається **нормальною частотою**. Отже, мода характеризується двома параметрами: частотою  $\omega$  і коефіцієнтом  $\zeta$ , які визначають «конфігурацію» моди.

Практика показує, що в системі з двома ступенями вільності можуть існувати синфазні гармонічні коливання з частотою  $\omega_I$  і протифазні гармонічні коливання з частотою  $\omega_{II} > \omega_I$ .

Отже, у системі можуть бути збуджені дві моди:

$$\begin{aligned} 1 \text{ мода} \quad & s_1^I(t) = s_{01}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I) \\ & s_2^I(t) = s_{02}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I) \\ & \zeta_I = \frac{s_{02}^I}{s_{01}^I} > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ мода} \quad & s_1^{II}(t) = s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}) \\ & s_2^{II}(t) = s_{02}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}) \\ & \zeta_{II} = \frac{s_{02}^{II}}{s_{01}^{II}} < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Неважко тепер зрозуміти, що будь-яке коливання зв'язаної лінійної системи з двома ступенями вільності можна представити у вигляді суперпозиції двох нормальних коливань (3.3) і (3.4):

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_1^I(t) + s_1^{II}(t) = s_{01}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I) + s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}); \\ s_2(t) &= s_2^I(t) + s_2^{II}(t) = s_{02}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I) + s_{02}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Не проводячи поки що детального математичного дослідження, проаналізуємо поведінку системи з двома ступенями



вільності, користуючись основними ідеями, розвинутими в попередніх лекціях. Представимо будь-яку із систем, зображених на рис. 3.2, як складну систему, що складається з двох парціальних систем. Ці парціальні системи, що відповідають випадку (а) рис. 3.2, показані на рис. 3.3: кожна з цих парціальних систем має власну частоту коливань, яка називається **парціальною частотою**.

Величини цих парціальних частот, відповідно, дорівнюють:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k'}{m_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k'}{m_2}}. \quad (3.6)$$

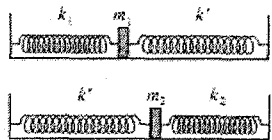


Рис. 3.3

Абсолютно очевидно, що частота  $\omega_1$  – це частота коливання маси  $m_1$  в системі двох зв'язаних маятників, коли маса  $m_2$  нерухома (зблоковано другий ступінь вільності). Аналогічно, з частотою  $\omega_2$  буде коливатися маса  $m_2$ , коли нерухома маса  $m_1$ .

Тепер перейдемо до визначення нормальних частот  $\omega_I$  і  $\omega_{II}$ . Згадаємо, що квадрат частоти гармонічних коливань дорівнює відношенню повертаючої сили до зміщення вантажу  $S$  і величини його маси  $m$ . Підберемо початкові зміщення мас  $m_1$  і  $m_2$  таким чином, щоб для обох мас ці відношення (а, отже, і частоти) були б однакові. Такий підбір легко здійснити для симетричної системи ( $m_1 = m_2 = m$ ,  $k_1 = k_2 = k$ ), (рис. 3.4), в якій парціальні частоти співпадають:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}}. \quad (3.7)$$

Якщо обидва вантажі змістити вправо на однакові відстані  $s'_{01} = s'_{02}$ , то середня пружина  $k'$  (пружина зв'язку) не буде деформована (позиція б). Після відпускання пружина буде

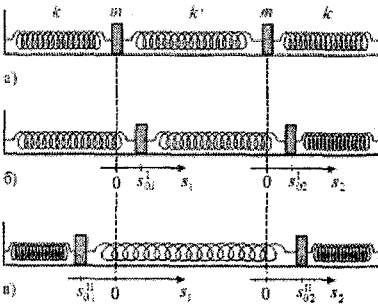


Рис. 3.4

залишатися недеформованою. Тому кожен з вантажів здійснюватиме гармонічні коливання з однією і тією ж частотою:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (3.8)$$

що і буде першою нормальною частотою. Конфігурація цього синфазного коливання (моди) задається коефіцієнтом розподілу амплітуд  $\zeta_I = +1$ .

Якщо тепер обидві маси змістити в різні боки на однакові відстані  $s''_{02} = -s''_{01}$  (позиція в), то пружина  $k'$  видовжиться на величину  $2s''_{02}$ . Тому до правої маси буде прикладена повертаюча сила, рівна  $-(ks''_{02} + 2k's''_{02})$ , а на ліву масу буде діяти в протилежному напрямі сила  $-(ks''_{01} + 2k's''_{01})$ . Після відпускання, вантажі будуть здійснювати протифазні гармонічні коливання з другою нормальною частотою

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \quad (3.9)$$

Конфігурація другої моди характеризується коефіцієнтом розподілу  $\zeta_{II} = -1$ .

Якщо вантажі, зображені на рис. 3.5а, змістити на довільні відстані (наприклад, в один бік на величини  $s_{01}$  і  $s_{02}$ , як це зображено на рис. 3.5.б), то це

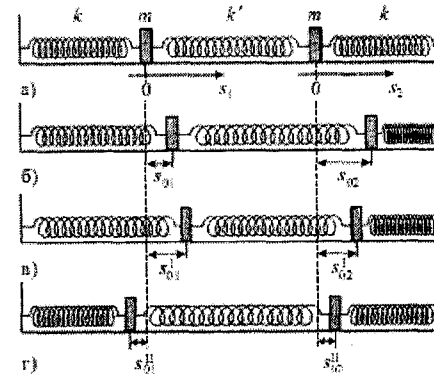


Рис. 3.5

еквівалентно суперпозиції двох типів початкових зміщень: в один бік на однакові величини (позиція в)

$$s'_{01} = s'_{02} = \frac{1}{2}(s_{01} + s_{02}); \quad (3.10)$$

і в різні боки (позиція г) на величини

$$-s''_{01} = s''_{02} = \frac{1}{2}(s_{02} - s_{01}). \quad (3.11)$$

Оскільки коливна система лінійна, то синфазні коливання, що виникають після відпускання вантажів у позиції (в), будуть відбуватися незалежно від присутності протифазних коливань, які виникають під час відпускання вантажів у позиції (г). Зміщення обох

вантажів з часом будуть описуватися формулами (3.5), в яких амплітуди визначаються рівностями (3.10) і (3.11), а початкові фази  $\varphi_I = \varphi_{II} = \frac{\pi}{2}$ .

Проаналізуємо більш детально коливання в системі, зображеній на рис. 3.5. Нехай ми зсунули ліву масу вправо на відстань  $s_{01}$ , а праву залишили в незміщеному стані ( $s_{02}=0$ ). Після відпускання обох вантажів у системі виникнуть коливання. З (3.10) і

(3.11) визначаємо амплітуди мод:  $s'_{01} = s'_{02} = \frac{s_{01}}{2}$ ;  $-s''_{01} = s''_{02} = -\frac{s_{01}}{2}$ .

Оскільки фази  $\varphi_I = \varphi_{II} = \frac{\pi}{2}$  (початкові швидкості у вантажів відсутні), то зміщення

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t + \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t; \\ s_2(t) &= \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t - \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Проводячи сумування тригонометричних функцій у (3.12), одержимо:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \cos \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t; \\ s_2(t) &= s_{01} \sin \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Часові залежності (3.13) зображені на рис. 3.6.

Видно, що коливання кожної з мас мають форму биттів. Період цих биттів рівний

$$T_6 = \frac{2\pi}{\omega_{II} - \omega_I} = \frac{2\pi}{\Omega_6}, \quad (3.14)$$

де частота биттів

$$\Omega_6 = \Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I. \quad (3.15)$$

Якщо ввести середню частоту

$$\omega_0 = \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}, \quad (3.16)$$

то з цією частотою пов'язаний період коливань  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

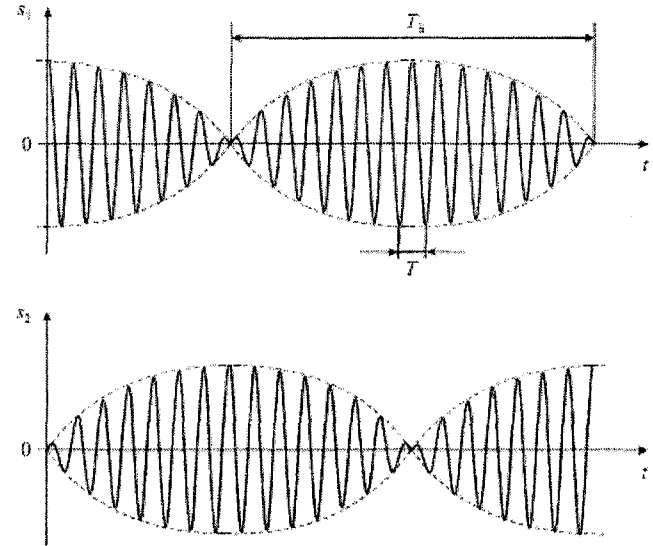


Рис. 3.6

Якщо частота биттів  $\Omega_6 \ll \omega_0$ , як це зображено на рис.3.6, то в цьому випадку коливання обох вантажів будуть майже гармонічними (квазігармонічними). Якщо переписати (3.13) з використанням середньої частоти  $\omega_0$  і частоти биттів  $\Omega_6$  у вигляді:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \cos \frac{\Omega_6}{2} t \cdot \cos \omega_0 t = A_1(t) \cos \omega_0 t; \\ s_2(t) &= s_{01} \sin \frac{\Omega_6}{2} t \cdot \sin \omega_0 t = A_2(t) \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

то за умови  $\Omega_6 \ll \omega_0$  коливання (3.17) можна трактувати як коливання з частотою  $\omega_0$  і амплітудою  $A(t)$ , що повільно змінюється з часом.

У теорії коливань і в інших розділах фізики для аналізу коливного процесу використовують спектральне представлення, або спектр коливань. Цей спектр зображають графічно: по осі абсцис вказують частоти коливань, а по осі ординат відкладають квадрати їх амплітуд. Так, зокрема, для коливань, зображених на рис.3.6 ( $s_1$  або  $s_2$ ) і які описуються формулами (3.17), легко намалювати спектр, оскільки вже відомий спектральний розклад цього коливання (представлення у вигляді суми гармонічних коливань), що задається формулами (3.12).

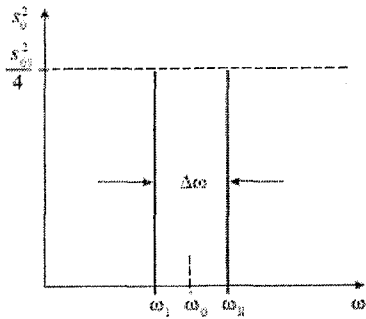


Рис. 3.7

Такий спектр зображено на рис. 3.7.

Цей спектр містить дві спектральні компоненти. Його можна охарактеризувати середньою частотою  $\omega_0$  і шириною  $\Delta\omega$ . Відповідно до формули (3.14) добуток  $\Delta\omega$  на період  $T_0$  дорівнює сталій величині:

$$\Delta\omega \cdot T_0 = 2\pi \quad (3.18)$$

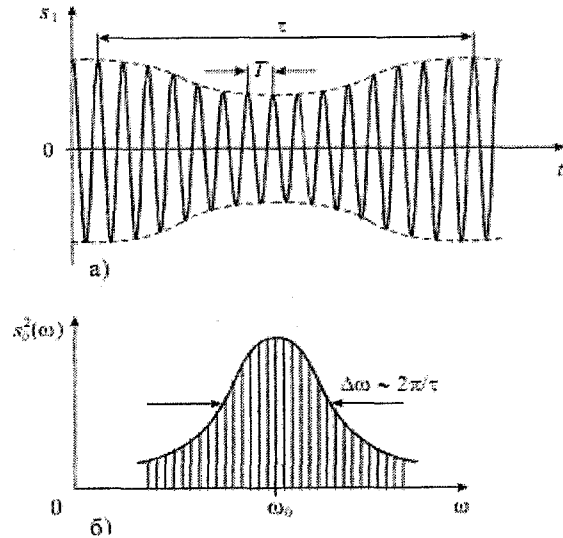


Рис. 3.8

Формула (3.18) має глибокий фізичний зміст. Так, якщо відбувається деяке квазігармонічне коливання виду

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.19)$$

для якого амплітуда  $A$  і фаза  $\varphi$  повільно змінюються на масштабі часу  $\tau$  (рис.3.8а), то спектр такого коливання може складатися з великого числа частот.

Ці частоти групуються поблизу центральної (основної) частоти  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  у межах характерного інтервалу частот  $\Delta\omega$  і обернено пропорційного часовому масштабу  $\tau$ . На рис.3.8б зображено цей спектр, де по осі ординат відкладено квадрат амплітуди  $s_0$  кожної з

гармонічних складових, причому між  $\tau$  і  $\Delta\omega$  існує зв'язок:  $\Delta\omega \cdot \tau \sim 2\pi$ .

Кількісний зв'язок між коливним процесом  $s(t)$  і його спектром можна представити (за аналогією з формулами (3.12)) у вигляді суми скінченного чи нескінченного числа гармонічних складових (у вигляді ряду або інтеграла Фур'є).

### 3.2. Методика аналізу коливань зв'язаних осциляторів

Вище ми розглянули коливання двох однакових зв'язаних пружинних маятників, не розв'язуючи рівняння їх руху. Однак, якщо жорсткості пружин і маси тіл мають довільні значення, то часто буває важко здогадатися про конфігурацію мод і їх частоти. Тому важливо озброїтися універсальним методом, що дозволяє за єдиною схемою провести послідовний аналіз будь-якої коливної системи з двома ступенями вільності, яка є системою будь-яких зв'язаних осциляторів.

Запишемо рівняння двох зв'язаних пружинних маятників у вигляді:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -k_1 s_1 - k' s_1 + k' s_2; \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -k_2 s_2 - k' s_2 + k' s_1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Розділивши перше рівняння на  $m_1$ , а друге на  $m_2$  і використавши вирази (3.6) для парціальних частот, перепишемо (3.20) наступним чином:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -\omega_1^2 s_1 - \alpha_1 s_2, \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

де  $\alpha_1 = -\frac{k'}{m_1}$ ,  $\alpha_2 = -\frac{k'}{m_2}$  – коефіцієнти, що залежать від жорсткості  $k'$  пружини зв'язку. Звернемо увагу, що рівняння (3.21) не можна розв'язувати окремо, оскільки кожне з них містить  $s_1$  і  $s_2$ . Тому доцільно перейти від зміщень  $s_1$  і  $s_2$  до нових функцій  $\xi_1$  і  $\xi_2$ , що називаються **нормальними координатами**. Зміст переходу полягає в отриманні двох незалежних рівнянь руху, які можна розв'язувати окремо.

Однак у загальному випадку ці координати знайти непросто. Тому для ілюстрації такого переходу розглянемо систему з однаковими масами ( $m_1 = m_2 = m$ ) і пружинами ( $k_1 = k_2 = k$ ). Оскільки

парціальні частоти співпадають  $\left( \omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{k+k'}{m}} \right)$ , а також

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -\frac{k'}{m}$ , то система рівнянь (3.21) стає більш простою.

Додавши обидва рівняння, отримуємо:

$$\xi_1 = -(\omega^2 + \alpha)\xi_1, \quad (3.22a)$$

де  $\xi_1 = s_1 + s_2$  – перша нормальна координата. Віднімаючи друге рівняння від першого, знаходимо:

$$\xi_2 = -(\omega^2 + \alpha)\xi_2, \quad (3.22b)$$

де  $\xi_2 = s_1 - s_2$  – друга нормальна координата. Тепер рівняння (3.22) незалежні. Перше з них описує коливання центра мас системи з частотою

$$\omega_I^2 = \omega^2 - \frac{k'}{m}, \quad (3.23)$$

яка менша за парціальну частоту  $\omega$ . Друге рівняння описує зміну відстані між двома масами з частотою

$$\omega_{II}^2 = \omega^2 + \frac{k'}{m}, \quad (3.24)$$

що перевищує парціальну частоту. Розв'язки рівнянь (3.22) очевидні:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= s_1(t) + s_2(t) = \xi_{01} \sin(\omega_I t + \varphi_I); \\ \xi_2(t) &= s_1(t) - s_2(t) = \xi_{02} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Повертаючись до функцій  $s_1$  і  $s_2$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_I t + \varphi_I) + \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}); \\ s_2(t) &= \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_I t + \varphi_I) - \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Чотири величини  $\xi_{01}$ ,  $\xi_{02}$ ,  $\varphi_I$  і  $\varphi_{II}$  визначаються з початкових умов:  $s_1(t=0)$ ,  $s_2(t=0)$ ,  $\dot{s}_1(t=0)$ ,  $\dot{s}_2(t=0)$ .

Проілюструвавши перехід до нормальних координат, повернемося до методики аналізу коливань у довільних системах, що описуються рівняннями (3.21).

Нехай у системі відбувається нормальне коливання з невідомою поки що частотою  $\omega$  і коефіцієнтом розподілу амплітуд

$$\zeta = \frac{s_{02}}{s_{01}};$$

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega t + \varphi), \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Підставимо (3.27) у систему рівнянь (3.21). Тоді отримаємо систему із двох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2)s_{01} + \alpha_1 s_{02} &= 0; \\ \alpha_2 s_{01} + (\omega_2^2 - \omega^2)s_{02} &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Система лінійних однорідних рівнянь (3.28) має відмінні від нуля розв'язки тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (3.29)$$

Це – квадратне рівняння відносно  $\omega^2$ , причому  $\omega > 0$ . Тому, розв'язуючи рівняння (3.29), можна знайти нормальні частоти  $\omega_I$  та  $\omega_{II}$ . Після знаходження частот можна розрахувати конфігурацію мод, тобто коефіцієнти розподілу амплітуд  $\zeta_I$  та  $\zeta_{II}$ . Їх можна визначити, наприклад, з першого рівняння (3.28), причому очевидно, що для кожної нормальної частоти ( $\omega_I$  або  $\omega_{II}$ ) ці коефіцієнти різні:

$$\begin{aligned} \zeta_I &= \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_I = \frac{\omega_I^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}, \\ \zeta_{II} &= \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_{II} = \frac{\omega_{II}^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отже, рівняння (3.29) та рівність (3.30) дозволяють повністю розрахувати параметри кожної з двох мод. Рух кожної з мас є суперпозицією двох нормальних коливань:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01_I} \sin(\omega_I t + \varphi_I) + s_{01_{II}} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \\ s_2(t) &= \zeta_I \cdot s_{01_I} \sin(\omega_I t + \varphi_I) + \zeta_{II} \cdot s_{01_{II}} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}), \end{aligned}$$

де амплітуди  $s_{01_I}$  і  $s_{01_{II}}$  і початкові фази  $\varphi_I$  і  $\varphi_{II}$  визначаються, як і раніше, з початкових умов:  $s_1(0)$ ,  $s_2(0)$ ,  $\dot{s}_1(0)$ ,  $\dot{s}_2(0)$ .

### 3.2.1. Співвідношення між парціальними і нормальними частотами

Для встановлення зв'язку між парціальними і нормальними частотами перепишемо (3.29) у вигляді

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \gamma \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (3.31)$$

де

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\omega_1^2 \omega_2^2} = \frac{k'^2}{(k_1 + k')(k_2 + k')}. \quad (3.32)$$

Безрозмірний коефіцієнт зв'язку  $\gamma$  між двома системами може приймати значення  $0 < \gamma < 1$ . Якщо з (3.31) визначити нормальні частоти  $\omega_I$  і  $\omega_{II}$ , то вони будуть виражатися через парціальні частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  і коефіцієнт  $\gamma$ . Ці чотири частоти будуть розташовуватись на осі частот у послідовності, зображеній на рис.3.9.



Рис. 3.9

За слабого зв'язку ( $\gamma \ll 1$ ) нормальні частоти близькі до парціальних, а за сильного ( $\gamma \leq 1$ ) різниця в частотах стає суттєвою. Це добре видно, якщо парціальні частоти співпадають ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ). Тоді (3.31) набуде вигляду:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega_0^4 = 0.$$

Звідси

$$\omega_I^2 = \omega_0^2(1 - \gamma), \quad \omega_{II}^2 = \omega_0^2(1 + \gamma). \quad (3.33)$$

### 3.3. Згасання коливань

Якщо енергія не підводиться ззовні, то коливання зв'язаних осциляторів будуть згасати. Оскільки сила в'язкого тертя пропорційна до швидкості, то рівняння (3.21) із врахуванням згасання набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1(t) &= -\omega_1^2 s_1 - 2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2, \\ \ddot{s}_2(t) &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Тут  $\delta_1 = \frac{\Gamma_1}{2m_1}$  і  $\delta_2 = \frac{\Gamma_2}{2m_2}$  – коефіцієнти згасання для першого і

другого осциляторів. Якщо шукати розв'язок цієї системи у вигляді нормальних згасаючих коливань:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} e^{-\alpha} \sin(\omega t + \varphi), \\ s_2(t) &= s_{02} e^{-\alpha} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (3.35)$$

то після підстановки (3.35) у (3.34) можна знайти нормальну частоту  $\omega$ , коефіцієнт згасання  $\delta$  і конфігурацію  $\zeta$  кожної з двох мод. Опускаючи проміжні викладки, відзначимо, що при  $\omega_1 \gg \delta_1$  і  $\omega_2 \gg \delta_2$  (слабке згасання) нормальні частоти і розподіл амплітуд у модах

будуть близькими до тих, що і за відсутності згасання. Для коефіцієнта згасання  $\delta$  одержуємо вираз:

$$\delta = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)\delta_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)\delta_2}{(\omega_1^2 - \omega^2) + (\omega_2^2 - \omega^2)}. \quad (3.36)$$

Можна бачити, що при довільному співвідношенні між  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\delta_1$  і  $\delta_2$  коефіцієнти згасання мод  $\delta_I$  і  $\delta_{II}$ , що отримуються з (3.36), коли  $\omega = \omega_I$  і  $\omega = \omega_{II}$ , будуть різними.

Якщо парціальні частоти співпадають ( $\omega_1 = \omega_2$ ), то

$$\delta_I = \delta_{II} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2). \quad (3.37)$$

Якщо  $\omega_1 \neq \omega_2$ , а  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , то

$$\delta_I = \delta_{II} = \delta. \quad (3.38)$$

Останнім результатом ми скористаємося під час розгляду дисипації енергії у зв'язаній коливній системі.

### 3.4. Енергія коливної системи та її дисипація

Розглянемо коливання двох однакових мас (рис.3.10а), закріплених на розтягнутому легкому гумовому шнурі.

Якщо один з вантажів відтягнути на відстань  $2s_0$  (б) і потім одночасно відпустити обидві маси, то їх коливання будуть мати вигляд биттів. З іншого боку, за цих початкових умов будуть збуджені дві моди (в і г) з однаковими амплітудами коливань обох мас, що рівні  $s_0$ . Енергія, яка є в першій моді, дорівнює сумі кінетичних енергій обох мас під час проходження ними положення рівноваги зі швидкістю  $v_0^I = s_0 \omega_I$ , тобто:

$$E_0^I = 2 \frac{m}{2} (v_0^I)^2 = m s_0^2 \omega_I^2, \quad (3.39 \text{ а})$$

а енергія другої моди, аналогічно, рівна

$$E_0^{II} = 2 \frac{m}{2} (v_0^{II})^2 = m s_0^2 \omega_{II}^2. \quad (3.39 \text{ б})$$

Важливо відзначити, що енергообмін між модами відсутній, а повна енергія системи дорівнює сумі енергій її мод. У той же час, у процесі биттів енергія першого осцилятора за час, рівний половині періоду биттів, «перетікає» до іншого осцилятора і потім за такий самий час повертається назад. Повний енергообмін між осциляторами можливий тільки тоді, коли обидві маси однакові і відношення

$\frac{(\omega_I + \omega_{II})}{(\omega_{II} - \omega_I)}$  дорівнює цілому числу  $n$ , тобто:

$$\frac{(\omega_I + \omega_{II})}{(\omega_{II} - \omega_I)} = \frac{2\omega_0}{\Omega_0} = n. \quad (3.40)$$

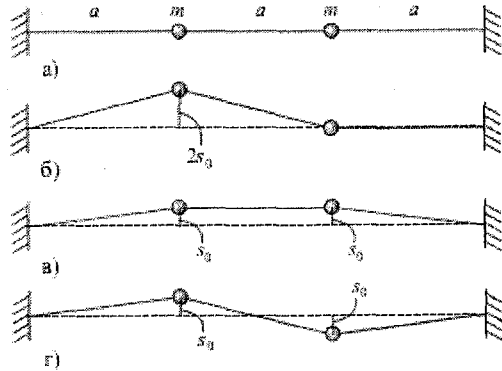


Рис. 3.10

Отже, частота  $\omega_0$  повинна бути кратною до частоти биттів. Дійсно, за виконання умови (3.40) кожна з мас буде періодично зупинятися в положенні рівноваги (як це впливає з формул (3.17)). З часом коливання будуть згасати, і буде експоненціально зменшуватися енергія в модах:

$$\begin{aligned} E^I(t) &= ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_I^2 = E_0^I e^{-2\delta t}, \\ E^{II}(t) &= ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_{II}^2 = E_0^{II} e^{-2\delta t}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Важливо підкреслити, що за час  $\tau_E = \frac{1}{2\delta}$  енергія кожної з мод зменшиться в  $e$  разів, при цьому протифазна мода «втратить» більше енергії, ніж синфазна, оскільки початкова енергія  $E_0^{II}$  в неї була більша, ніж  $E_0^I$  (див.(3.39)).

### 3.5. Вимушені коливання

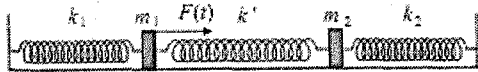


Рис. 3.11

Розглянемо основні закономірності вимушених усталених коливань у системі, зображеній на рис.3.11, якщо на ліву масу  $m_1$  діє сила

$F(t) = F_0 \sin \omega t$ . Рівняння руху в цьому випадку будуть відрізнятися від (3.34) наявністю цієї сили в правій частині першого рівняння:

$$\ddot{s}_1 = -\omega_1^2 s_1 = -2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2 + \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t, \quad (3.42)$$

$$\ddot{s}_2 = -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2.$$

Неважко здогадатися, що розв'язками цієї системи в усталеному режимі є гармонічні функції

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega t + \varphi_1), \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.43)$$

які відображають той факт, що обидві маси коливаються на частоті вимушуючої сили. Підставляючи (3.43) у (3.42), можна розрахувати амплітуди і фази вимушених коливань. Ми обмежимося лише обговоренням результатів.

На рис.3.12 зображена АЧХ для першого осцилятора, до якого прикладена сила. Звертає на себе увагу наявність двох резонансів, які за наявності малого згасання спостерігаються на нормальних частотах  $\omega_I$  і  $\omega_{II}$ .

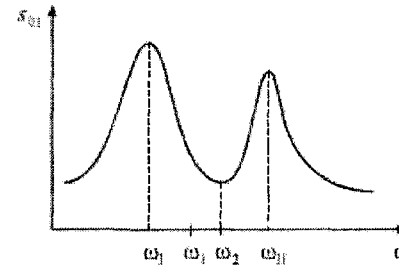


Рис. 3.12.

Рис. 3.12

Коли частота  $\omega$  змінюється від  $\omega_I$  до  $\omega_{II}$  амплітуда  $s_{01}$  зменшується і досягає мінімуму на другій парціальній частоті  $\omega_2$ , при цьому зі зменшенням згасання амплітуда на цій частоті прямує до нуля.

Цю обставину використовують для подавлення відгуку системи на дію зовнішньої сили. В радіотехніці, де використовують зв'язані коливальні контури, їх застосовують як фільтри і демпфери.

Два резонанси мають місце і для зміщення  $s_2$  другої маси.

Якщо проаналізувати відношення амплітуд  $\frac{s_{02}}{s_{01}}$  залежно від частоти  $\omega$ , то виявляється, що це відношення поблизу частоти  $\omega_I$  дорівнює коефіцієнту розподілу амплітуд  $\zeta_I$  для першої моди, а поблизу частоти  $\omega_{II}$  – коефіцієнту розподілу амплітуд  $\zeta_{II}$  для другої моди. Це

використовується для визначення цих коефіцієнтів, оскільки у випадку вимушених коливань це зробити легше ніж для власних.

### 3.6. Коливання систем з багатьма ступенями вільності

Основні ідеї, сформульовані під час розгляду коливань систем з двома ступенями вільності, тепер можна успішно застосувати для аналізу коливань систем з трьома, чотирма, ... ,  $N$  ступенями вільності, і в границі, за  $N \rightarrow \infty$ , для аналізу коливань у суцільних середовищах, тобто, хвиль.

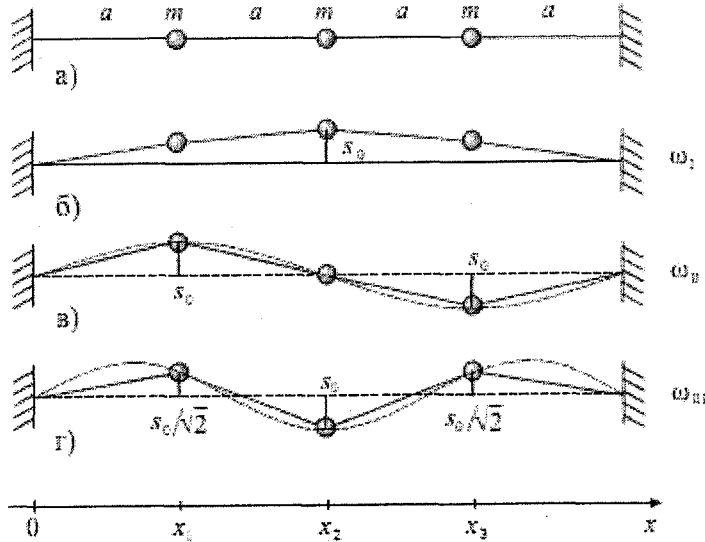


Рис. 3.13

Звернемося спочатку до коливань трьох однакових мас  $m$ , закріплених на рівних відстанях  $a$  на натягнутому легкому гумовому шнурі (як показано на рис. 3.13а). Будь-яке коливання такої системи може бути представлено як суперпозиція трьох нормальних коливань з частотами  $\omega_I$ ,  $\omega_{II}$ ,  $\omega_{III}$ . Опускаючи поки що питання про величину частот, знайдемо конфігурацію цих мод. Візьмемо до уваги, що квадрат частоти коливань кожної маси в даній моді повинен бути однаковий. Цього можна добитися у випадку, коли відношення повертаючої сили до величини маси  $m$  та її зміщенню  $s$  у всіх вантажів будуть однакові. Такі умови реалізуються за умови зміщення мас трьома способами (б, в і г на рис. 3.13). Під час відпусканні вантажів з положення (б) в системі буде відбуватися

перше нормальне коливання на частоті  $\omega_I$ ; з положення (в) – друге на частоті  $\omega_{II}$ ; з положення (г) – третє, на частоті  $\omega_{III}$ . Очевидно, що  $\omega_{III} > \omega_{II} > \omega_I$ .

Конфігурація кожної з мод може бути описана з допомогою двох коефіцієнтів розподілу амплітуд. Забігаючи наперед, відзначимо, що для чотирьох мас таких коефіцієнтів повинно бути три і т.д.

Однак, ситуація може бути спрощена, якщо звернути увагу, що розташування мас у позиціях (б), (в) і (г) на рис.3.13 нагадує синусоїдальне (пунктиром зображено фрагмент функції  $\sin kx$ ), де  $k$  – деякий параметр, що характеризує період цієї функції. Тоді конфігурація першої моди буде описана наступним чином:

$$s_0^I(x) = s_0 \sin k_I x; \quad k_I = \frac{\pi}{4a}. \quad (3.44a)$$

Для другої моди

$$s_0^{II}(x) = s_0 \sin k_{II} x; \quad k_{II} = 2k_I. \quad (3.44б)$$

Для третьої моди:

$$s_0^{III}(x) = s_0 \sin k_{III} x; \quad k_{III} = 3k_I. \quad (3.44в)$$

Роль безрозмірних коефіцієнтів  $\zeta$  виконує функція  $\sin k_p x$  ( $p = I, II, III$ ), розрахована в точках  $x = x_1 = a$ ,  $x = x_2 = 2a$ ,  $x = x_3 = 3a$ .

Іншими прикладами зв'язаних осциляторів є атоми в молекулах  $CO_2$ ,  $H_2O$  та інших. На рис. 3.14 зображені конфігурації мод і наведені значення частот нормальних коливань молекул. Звернемо увагу, що ці частоти мають порядок величини  $(10^{13} \div 10^{14}) c^{-1}$  і значно перевищують (на декілька порядків) частоти механічних коливань макроскопічних систем. Резонансні коливання цих (та інших) молекул можна збудити внаслідок взаємодії різноманітних заряджених іонів, що складають ці молекули, з електричним полем світлової електромагнітної хвилі інфрачервоного (ІЧ) діапазону, що має близьку частоту.

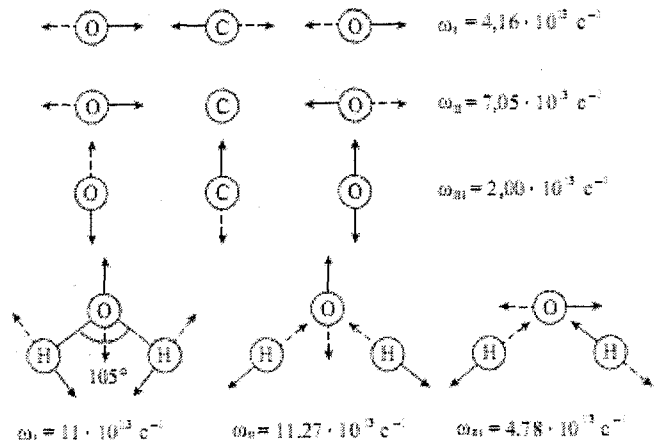


Рис. 3.14

В курсі «Оптика» ви знайомилися з такою взаємодією, що призводить, зокрема, до послаблення (поглинання) енергії світлової хвилі та її розсіювання в середовищі з молекулами, які здійснюють коливання (комбінаційне розсіювання).

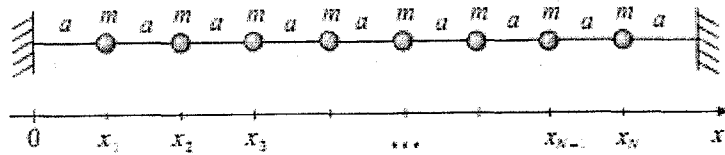


Рис. 3.15

Будемо збільшувати число мас, закріплених на шнурі через

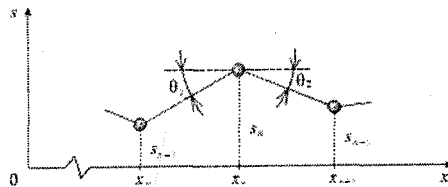


Рис. 3.16

рівні проміжки  $a$ . Якщо  $N$  – число цих мас, то повна довжина шнура рівна  $l = a(N + 1)$  (рис.3.15). Розрахуємо нормальні частоти всіх мод і їх конфігурації. Будемо вважати, що невагомий шнур натягнуто з силою  $F$ , і за малих відхилень мас від положення

рівноваги  $s \ll l$  ця сила не змінюється. Кожна маса зазнає дії сил натягу шнура по обидва боки від неї.

На рис. 3.16 показано миттєве положення фрагмента шнура і трьох мас. Якщо кути  $\theta_1$  і  $\theta_2$  малі, то повертаюча сила, що діє на середню масу, рівна:

$$f = -F \cdot (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \approx -F(\theta_1 + \theta_2). \quad (3.45)$$

Величини кутів  $\theta_1$  і  $\theta_2$  визначаються взаємним розташуванням мас:

$$\theta_1 \approx \frac{s_n - s_{n-1}}{a};$$

$$\theta_2 \approx \frac{s_n - s_{n+1}}{a}. \quad (3.46)$$

Із врахуванням (3.45) і (3.46) рівняння руху середньої маси набуде вигляду:

$$m\ddot{s}_n = -F \left( \frac{s_n - s_{n-1}}{a} + \frac{s_n - s_{n+1}}{a} \right). \quad (3.47)$$

Якщо коливання є нормальними, то

$$s_{n-1}(t) = s_{0,n-1} \sin \omega t$$

$$s_n(t) = s_{0,n} \sin \omega t$$

$$s_{n+1}(t) = s_{0,n+1} \sin \omega t, \quad (3.48)$$

де частоту  $\omega$  і розподіл амплітуд потрібно визначити.

Підставляючи (3.48) у (3.47), отримаємо

$$-s_{0,n-1} + \left( 2 - \frac{ma\omega^2}{F} \right) s_{0,n} - s_{0,n+1} = 0. \quad (3.49)$$

Оскільки  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ , то (3.49) являє собою  $N$  лінійних однорідних рівнянь. З умови рівності нулю її визначника можна розрахувати всі  $N$  нормальних частот, а потім для кожної з цих частот визначити розподіл амплітуд у кожній моді, кількість яких, очевидно, буде  $N$ .

Ми ж використаємо вже описаний раніше легкий шлях і будемо шукати конфігурацію кожної моди у вигляді «синусоїдальної» конфігурації:

$$s_0(x) = s_0 \sin kx, \text{ або } s_{0n} = s_0(x_n), \quad (3.50)$$

де  $x_1 = a, x_2 = 2a, \dots, x_n = na, x_N = Na$ .



Переконаємося, що конфігурація (3.50) задовольняє рівняння (3.49), яке перепишемо у вигляді:

$$\frac{s_{0,n+1} + s_{0,n-1}}{s_{0,n}} = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}, \quad (3.51)$$

де  $\Omega^2 = \frac{F}{ma}$ .

Підставимо (3.50) у ліву частину (3.51):

$$\frac{\sin k(n+1)a + \sin k(n-1)a}{\sin kna} = 2 \cos ka = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}. \quad (3.52)$$

Очевидно, що (3.50) задовольняє рівняння (3.49), якщо підібрати для даного  $k$  відповідну частоту  $\omega$ .

Параметр  $k$  називається хвильовим числом. Цей параметр повинен бути таким, щоб на кінцях закріпленого шнура виконувалися граничні умови. Якщо  $x = 0$ , ці умови виконуються:  $\sin(k \cdot 0) = 0$ . На другому кінці, де  $x = a(N+1)$ , покладемо умову, щоб

$$\sin ka(N+1) = 0, \quad (3.53)$$

звідки отримуємо:

$$k_p a(N+1) = p \cdot \pi \quad \text{або} \quad k_p = \frac{p\pi}{a(N+1)}, \quad (3.54)$$

де ціле число  $p = I, II, \dots, N$  характеризує номер моди (кількість мод, як було сказано раніше, дорівнює  $N$ ). Кожній  $p$ -тій моді відповідає своя частота, яку легко знайти з рівняння (3.52):

$$\omega_p^2 = 2\Omega^2(1 - \cos k_p a) = 2\Omega^2 \left(1 - \cos \frac{p\pi}{N+1}\right). \quad (3.55)$$

Знаючи хвильові числа  $k_p$  і нормальні частоти  $\omega_p$ , можна записати вирази для зміщення всіх мас, як функцій часу. Для  $p$ -ої моди можна записати:

$$s_p(x_n, t) = s_{0p} \sin k_p x_n \cdot \sin(\omega_p t + \varphi_p), \quad (3.56)$$

тут  $x_n = na$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Амплітуда  $s_{0p}$  і початкова фаза  $\varphi_p$  визначаються з початкових умов, а  $k_p$  і  $\omega_p$  – властивостями самої системи (формули (3.45) і (3.55)).

В силу лінійності коливної системи в загальному випадку коливань отримуємо для зміщення всіх частинок вираз:

$$s(x_n, t) = \sum_p s_p(x_n, t), \quad (3.57)$$

де сумування проводиться тільки по тих модах, які «беруть участь» у коливаннях.

Так, наприклад, утримуючи весь час середню масу в положенні рівноваги, ми не можемо збудити моди з непарними номерами  $p = I, III, \dots$ , оскільки ці моди «вимагають» зміщення центральної маси.

Користуючись формулою (3.55), легко розрахувати нормальні частоти мас, що коливаються на шнурі.

На рис. 3.17 зображені моди коливань у системі з однією, двома і трьома масами і для кожної моди вказані величини нормальних частот.

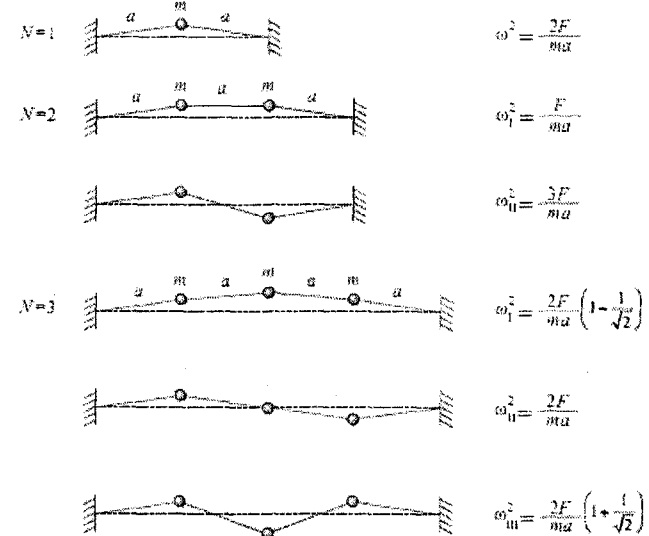


Рис. 3.17

Зв'язок типу (3.55) між частотою  $\omega$  і хвильовим числом  $k$  називається дисперсійним співвідношенням. Це співвідношення широко використовують під час аналізу поширення хвиль у періодичних структурах.

### 3.7. Загальний випадок руху неперервної струни і Фур'є-аналіз

Найбільш загальний рух неперервної струни (із закріпленими кінцями, що здійснює поперечні коливання вздовж осі  $x$ ) буде суперпозицією всіх мод  $1, 2, 3, \dots$  з амплітудами  $a_1, a_2, a_3, \dots$  і фазовими константами  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ :

$$s(z, t) = a_1 \sin k_1 z \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin k_2 z \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots,$$

де  $k$  вибрані так, щоб задовольнити граничні умови при  $z=0$  і  $z=l$ , а частота  $\omega_n$  пов'язана з хвильовим числом  $k_n$  дисперсійним співвідношенням  $\omega(k)$ . Амплітуди  $a_n$  і фази  $\varphi_n$ , які визначають рух для всіх положень  $z$  і моментів часу  $t$ , знаходимо з початкових умов, тобто за зміщенням  $s(z,t)$  і швидкості  $v(z,t) = \frac{\partial s(z,t)}{\partial t}$  для кожної точки в момент часу  $t=0$ .

### 3.7.1. Рух струни, закріпленої на кінцях

Припустимо, що в момент часу  $t < 0$  за допомогою шаблону струні була надана певна форма  $f(z)$ . Потім, у момент часу  $t=0$ , забираємо шаблон, дозволяючи струні рухатися. При  $t=0$  кожний елемент струни має своє зміщення  $s(z,t)$ , що дорівнює  $f(z)$ , і швидкість, що дорівнює нулю;  $n$ -й член у виразі для швидкості пропорційний  $\sin(\omega_n t + \varphi_n)$  або  $\sin \varphi_n$  для  $t=0$ . Отже, рівність  $v(z,0)=0$  для всіх  $z$ , коли кожна фазова константа  $\varphi_n$  рівна  $0$  або  $\pi$ . Однак вибір фазової константи, наприклад,  $\varphi_1 = \pi$  рівносильний зміні знаку перед  $a_1$ , тому покладемо всі фазові константи рівними нулю, зауваживши, що амплітуди  $a_1, a_2, a_3, \dots$  можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення. Тоді для нульової початкової швидкості  $v(z,0)=0$  маємо:

$$s(z,t) = a_1 \sin k_1 z \cos \omega_1 t + a_2 \sin k_2 z \cos \omega_2 t + \dots$$

і при  $t=0$

$$s(z,t) = f(z) = a_1 \sin k_1 z + a_2 \sin k_2 z + \dots \quad (3.58)$$

Останнє рівняння визначає амплітуди  $a_1, a_2, a_3, \dots$

### 3.7.2. Ряди Фур'є для функцій з нулями на кінцях

Функція  $f(z)$  може бути довільною загальною функцією від  $z$ . Єдине обмеження, що накладається на  $f(z)$ , те, що вона перетворюється в нуль на кінцях, тобто  $f(z)=0$  при  $z=0$  і  $z=L$ . Покладемо також вимогу, щоб ця функція була достатньо гладкою, тобто, щоб струна підкорялася диференціальному рівнянню, отриманому з допомогою «неперервного» наближення. Отже, будь-яку функцію  $f(z)$ , яка перетворюється в нуль у точках  $z=0$  і  $z=L$ , можна представити як суму синусоїдальних коливань. Вираз (3.58) називається **рядом Фур'є** або **розкладом Фур'є**. Відзначимо, що

$\sin k_1 z$  періодичний відносно  $z$  з періодом  $\lambda_1$ . Це означає, що значення  $\sin k_1 z$  за будь-якого заданого  $z$  і при  $z + \lambda_1$  співпадають. Легко бачити, що функція  $\sin 2k_1 z$  також періодична по  $z$  з періодом  $\lambda_1$ . Вона здійснює два цикли на довжині  $\lambda_1$ , тому вона періодична і з вдвічі меншим періодом  $\frac{1}{2}\lambda_1$ . Більше того, всі синусоїдальні функції в (3.58) періодичні по  $z$  з періодом  $\lambda_1$ . Іншими словами, всі періодичні функції  $F(z)$  з періодом  $\lambda_1$ , які дорівнюють нулю при  $z=0$  і  $z = \frac{\lambda_1}{2}$ , можуть бути розкладені в ряд Фур'є, що має вигляд (3.58).

Фур'є-аналіз періодичної функції від  $z$  рівняння (3.58) відповідає функціям, які періодичні з періодом  $\lambda_1$  і дорівнюють нулю в  $z=0$  і  $z = \frac{\lambda_1}{2}$ . Однак перетворення в нуль функції в цих точках є результатом граничних умов, які полягають в тому, що струна закріплена на обох кінцях. Без таких граничних умов ми б отримали розв'язок коливань струни, який включав би в себе не тільки члени  $\sin k_1 z$ , але й члени  $\cos k_1 z$ . Ці функції також періодичні на  $z$  з періодом  $\lambda_1$ , але не дорівнюють нулю при  $z=0$  і  $z = \frac{\lambda_1}{2}$ . Вони відповідають коливанням струни з одним або двома вільними кінцями. Включаючи в ряд Фур'є і ці функції, ми приходимо до загального класу функцій, для яких може бути записаний ряд Фур'є: **всі періодичні функції  $F(z)$  з періодом  $\lambda_1$ , тобто функції, що задовольняють умову  $F(z + \lambda_1) = F(z)$  для всіх  $z$ , можна розкласти в ряд Фур'є, що має вигляд:**

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + b_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] = \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin n \frac{2\pi}{\lambda_1} z + b_n \cos n \frac{2\pi}{\lambda_1} z \right] = \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nk_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nk_1 z. \end{aligned} \quad (3.59)$$

### 3.7.3. Розрахунок коефіцієнтів ряду Фур'є.

Процес знаходження амплітуд, або коефіцієнтів Фур'є  $b_0, a_n, b_n$  (для всіх  $n$ ), для заданої періодичної функції називається **Фур'є-аналізом**.

Для знаходження  $b_0$  проінтегруємо обидві частини (3.59) від  $z = z_1$  до  $z = z_2$ , де  $z_1$  – будь-яке значення  $z$ , а  $z_2 = z_1 + \lambda_1$ . Ми припускаємо, що функція  $F(z)$  відома, тому інтеграл від  $z_1$  до  $z_2$  для лівої частини рівняння (3.59) можна знайти. Розглянемо тепер інтеграл від правої частини (3.59). Вона містить нескінченну кількість членів, і тому потрібно розглянути нескінченну кількість інтегралів.

Перший член справа рівний  $b_0$ ; під час інтегрування від  $z_1$  до  $z_2$  одержимо:

$$\int_{z_1}^{z_2} b_0 dz = b_0(z_2 - z_1) = b_0 \lambda_1 \quad (3.60)$$

Решта членів під час інтегруванні по періоду дадуть нуль. Дійсно, протягом періоду функції  $\sin nk_1 z$  і  $\cos nk_1 z$  однакове число разів від'ємні і додатні, тому

$$\int_{z_1}^{z_2} \sin nk_1 z dz = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} \cos nk_1 z dz = 0.$$

Отже, коефіцієнт  $b_0$  визначений. Він дорівнює:

$$b_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz.$$

Тепер покажемо, як знайти коефіцієнт  $a_m$ , де  $m$  – деяке часткове значення коефіцієнта  $n$ . Помножимо обидві частини рівняння (3.59) на  $\sin mk_1 z$  і проінтегруємо праву і ліву частини по періоду функції  $F(z)$ . Інтеграл у лівій частині можна знайти, оскільки функція  $F(z)$  відома. Розглянемо інтеграл у правій частині. Перший член – це інтеграл від добутку  $b_0$  на  $\sin mk_1 z$ . Він дорівнює нулю, оскільки включає  $m$  повних періодів  $\sin mk_1 z$ . Залишилося обчислити інтеграли від добутків  $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$  і  $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$  для  $n = 1, 2, \dots$

Розглянемо член, для якого  $n = m$ . Середнє значення квадрата  $\sin^2 mk_1 z$  на одному періоді довжиною  $\lambda_1$  дорівнює  $\frac{1}{2}$  ( $\lambda_1$  містить  $m$  повних періодів функції  $\sin mk_1 z$ ). Отже, під час інтегрування правої

частини (3.59) з'являється член  $\frac{1}{2} a_m \lambda_1$ . Усі решта членів при цьому рівні нулю. Це видно, наприклад, з наступного. Розглянемо інтеграл від  $\sin nk_1 z \sin mk_1 z$ , коли  $m \neq n$ . Підінтегральна функція може бути записана у вигляді

$$\sin nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \cos(n-m)k_1 z - \frac{1}{2} \cos(n+m)k_1 z, \quad (3.61)$$

оскільки  $(n-m)$  і  $(n+m)$  – цілі числа, то кожен із двох членів стільки разів додатній на періоді  $\lambda_1$ , скільки ж і від'ємний. Тому інтеграл від цього добутку дорівнює нулю (за винятком випадку, коли  $n = m$ ). Аналогічно, інтеграл від добутку  $\cos nk_1 z \sin mk_1 z$  буде дорівнювати нулю, оскільки

$$\cos nk_1 z \sin mk_1 z = \frac{1}{2} \sin(m+n)k_1 z + \frac{1}{2} \sin(m-n)k_1 z.$$

Отже,

$$\frac{1}{2} a_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \sin mk_1 z F(z) dz, \quad (3.62)$$

помноживши обидві частини виразу (3.59) на  $\cos mk_1 z$  і проінтегрувавши на періоді  $\lambda_1$ , одержимо вираз для  $b_m$ :

$$\frac{1}{2} b_m \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_2} \cos mk_1 z F(z) dz. \quad (3.63)$$

Тепер випишемо отримані результати (3.59 – 3.63)

$$F(z) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mk_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos mk_1 z$$

$$b_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz \quad 3.64$$

$$a_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin mk_1 z dz$$

$$b_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos mk_1 z dz.$$

У цих співвідношеннях  $z_1$  – довільне значення  $z$ . Вирази (3.64) носять назву **коефіцієнтів Фур'є** і показують, як довільну періодичну функцію від  $z$  з періодом  $\lambda_1$  представити у вигляді ряду Фур'є.

## ЛЕКЦІЯ 4

1. Поширення збурень у системі з великим числом ступенів вільності. Швидкість поширення.
2. Збудження хвиль. Група хвиль та її швидкість.
3. Хвильове рівняння.
4. Хвилі в суцільному шнурі. Відбивання хвиль.
5. Збудження стоячих хвиль у шнурі. Моді коливань.
6. Хвилі в пружних тілах. Поперечні хвилі. Енергія, що переноситься хвилею.
7. Поздовжні хвилі. Швидкість хвиль у тонкому стержні. Швидкість хвиль у товстому стержні.
8. Явища на межі поділу двох середовищ.

### 4.1. Поширення збурень у системі з великим числом ступенів вільності

Розглянемо коливання  $N \gg 1$  мас на гумовому шнурі (рис.4.1а). Відхилимо декілька мас на середині шнура від положення рівноваги (рис.4.1.б) і потім відпустимо їх у момент часу  $t = 0$ . Як показує дослід,

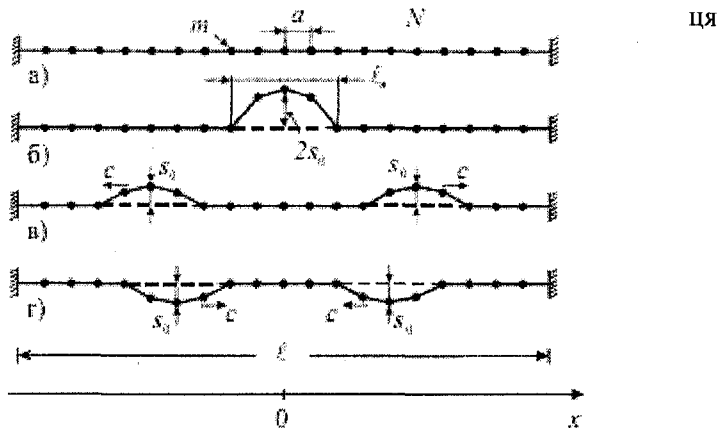


Рис. 4.1

початкова конфігурація, що являє собою за формою імпульс, з часом трансформується у два однакових імпульси, які побіжать у різні боки з деякою скінченною швидкістю  $c$  (рис.4.1.в). Ці імпульси добіжать

до кінців шнура, змінять свою полярність під час відбивання і побіжать у зворотному напрямі (рис.4.1.г). Після зустрічі на середині шнура вони відіб'ються ще раз, відновлять вихідну полярність і через час  $\Delta t = \frac{2l}{c}$  знову зустрінуться на середині, сформувавши вихідний

імпульс. Потім цей процес з періодом  $\Delta t$  будуть повторюватися доти, доки імпульси не згаснуть внаслідок дисипації енергії.

З точки зору повсякденного досвіду в цьому немає нічого дивного, оскільки зміщення групи мас призводить до виникнення пружних сил, що намагаються повернути цю групу в положення рівноваги і одночасно вивести сусідні частинки з положення рівноваги.

З точки зору опису коливань «на мові мод» також зрозуміло, що відхиливши, а потім відпустивши групу частинок, ми збуджуємо багато мод. Коливання всіх  $N$  частинок відбуваються одночасно на декількох нормальних частотах  $\omega_p$ . Усі ці частоти різні, і сума нормальних коливань являють собою биття. Оскільки через проміжок часу, що рівний періоду биттів, коливання групи частинок у центрі шнура відновляться, то очевидно, що період биттів дорівнює часу

$$\Delta t = \frac{2l}{c}.$$

Визначимо швидкість  $c$ , виходячи з уявлення про биття як суперпозиції нормальних коливань. Для цього спочатку перепишемо дисперсійне співвідношення (3.55) у вигляді

$$\omega_p = 2\Omega \sin \frac{k_p a}{2} = 2\Omega \sin \frac{1}{2} \left( \frac{p\pi}{N+1} \right). \quad (4.1)$$

Строго кажучи, за наявності багатьох частот у спектрі коливань, що задається формулою (4.1), биття не будуть періодичними – початкова конфігурація не повторюється. Візуально це буде виявлятися у спотворенні форми біжучих імпульсів, якщо довжина імпульсів  $l_i \geq a$  (імпульс «накриває» мало частинок), а шнур достатньо довгий. Кажуть, що спотворення імпульсу пов'язане з дисперсією «середовища» (шнура з масами), по якому імпульс поширюється.

Це спотворення буде малим, якщо  $l_i \gg a$  (група складається з великого числа мас, що коливаються). Так, зазвичай, і відбувається під час поширення збурень у твердому тілі, де  $a \sim 10^{-10}$  м (відстань між вузлами кристалічної ґратки, навколо яких коливаються атоми).

Якщо  $l_i \gg a$ , то в спектрі коливань домінують нижчі моди, які характеризуються хвильовими числами  $k_p$ , де  $p = I, II, III \dots \ll N$ . Частоти цих мод отримують з формули (4.1):

$$\omega_p = \Omega a k_p = \frac{\Omega \pi}{N+1} \cdot p; \quad p = I, II, III, \dots \quad (4.2)$$

Тут використано наближення  $\sin x \approx x$ , коли  $x \ll 1$ . Ця залежність  $\omega_p(k_p)$  зображена на рис.4.2.

Звернемо увагу, що нижчі частоти розташовуються еквідистантно:  $\Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I = \omega_{III} - \omega_{II} = \dots$  Тому період биттів (див. також формулу (3.14)) виявляється рівним:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2(N+1)}{\Omega} \quad (4.3)$$

Якщо врахувати, що довжина шнура  $l = a(N+1)$ , то швидкість руху імпульсу в середовищі без дисперсії рівна

$$c_0 = \frac{2l}{\Delta t} = a\Omega = \sqrt{\frac{Fa}{m}} \quad (4.4)$$

Якщо будемо збільшувати число мас  $N$  на шнурі фіксованої довжини, тим самим зменшуючи відстань  $a$ , то ми здійснимо граничний перехід до неперервного розподілу мас, тобто до однорідного шнура, що має масу, при цьому

$$\rho_1 = \frac{m}{a} \quad (4.5)$$

є масою одиниці довжини однорідного шнура (деколи використовують термін «густина одиниці

довжини»). Тому для швидкості поширення імпульсу довільної форми по шнуру масмо:

$$c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}} \quad (4.6)$$

Наприклад, у випадку тонкого гумового шланга з лінійною густиною  $\rho_1 \sim 0,1$  кг/м, натягнутого з силою  $F \sim 10^2$  Н, швидкість руху імпульсу рівна  $c_0 \sim 30$  м/с. Така порівняно невелика величина

швидкості дозволяє легко спостерігати поширення і відбивання імпульсу.

Отже, підведемо деякі підсумки:

1. Якщо знехтувати періодичною структурою середовища, то швидкість  $c_0$  поширення імпульсу не залежить від його форми, а сам імпульс під час поширення не спотворюється (немає дисперсії).

2. Якщо вісь  $x$  напрямити вздовж шнура і задати початкове збурення (в момент  $t=0$ ) у вигляді  $s(x)$ , то з часом збурення шнура матиме вигляд:

$$\frac{1}{2}s(x-c_0t) + \frac{1}{2}s(x+c_0t) \quad (4.7)$$

Перший доданок описує збурення, що поширюється зі швидкістю  $c_0$  в додатному напрямі осі  $x$ , вказаному на рис. 4.1, а другий – відповідає імпульсу, що поширюється в протилежному напрямі.

3. На кінцях невагомго шнура з масами обидва імпульси відбиваються. Відбитий імпульс має протилежну полярність (напрямок зміщення  $s$ ) порівняно з падаючим.

Аналогічні граничні умови реалізуються для суцільного масивного шнура із закріпленими кінцями (рис.4.3).

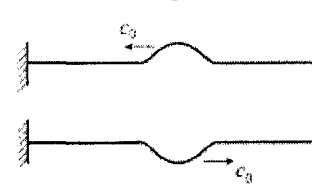


Рис. 4.3

4. В області перекриття біжучих імпульсів утворюється коливання, що називається стоячою хвилею. Так ми приходимо до поняття біжучих і стоячих хвиль, при цьому стояча хвиля може розглядатися як суперпозиція хвиль, які поширюються в протилежних напрямках.

## 4.2. Збудження хвиль

Розглянемо коливання невагомго шнура з вантажами, правий кінець якого закріплений, а лівий, під дією зовнішньої сили в момент часу  $t=0$ , починає зміщуватися за гармонічним законом:

$$s(t) = s_0 \sin \omega t \quad (4.8)$$

Під дією цієї сили вантажі, зв'язані один з одним відрізками натягнутого шнура, рано чи пізно почнуть здійснювати гармонічні коливання з частотою  $\omega$ . Природно, що систему вантажів (за аналогією із системою з двома вантажами) можна помітно розгойдати

тільки у випадку резонансу, коли частота  $\omega$  співпадає з однією з нормальних частот  $\omega_p$ .

Спочатку почнуть рухатися вантажі поблизу лівого рухомого кінця шнура, а з часом у коливання будуть включатися все нові вантажі. Такі коливання являють собою хвильовий процес (хвилю), що поширюється «зліва направо» з деякою швидкістю  $c_p$ . На рис.4.4 зображено положення мас, що коливаються, в деякий момент часу  $t_0$ . Оскільки вантажі коливаються в «поперечному» напрямі до напрямку поширення (осі  $Ox$ ), то хвиля називається поперечною. Ця хвиля добіжить до правого закріпленого кінця шнура і відіб'ється. Після

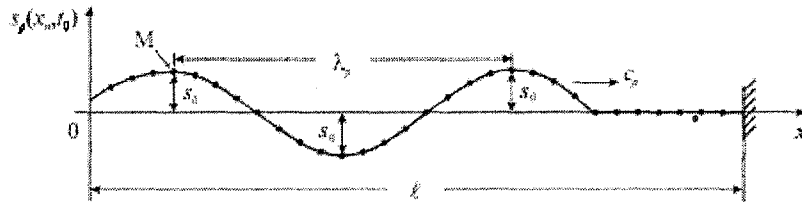


Рис. 4.4

цього будуть існувати дві хвилі: вихідна біжуча (інколи її називають падаючою хвилею) і відбита хвиля, яка біжить назустріч падаючій. Через  $\Delta t = \frac{2l}{c_p}$  відбита хвиля досягне лівого кінця, знову відіб'ється, і «сформується» мода коливань. Конфігурація цієї моди задається хвильовим числом  $k_p$  (співвідношення (4.1)).

Розглянемо детальніше падаючу хвилю з цим  $k_p$ . Просторовий період  $\lambda_p$ , зображений на рис.4.4 як мінімальна відстань між масами, що коливаються у фазі, називається **довжиною хвилі**. Довжина хвилі пов'язана з хвильовим числом  $k_p$  співвідношенням:

$$k_p = \frac{2\pi}{\lambda_p}. \quad (4.9)$$

Якщо сили в'язкого тертя, прикладені до кожного з вантажів, малі, то амплітуди коливань усіх вантажів будуть однакові і рівні  $s_0$ . Тепер ми можемо записати рівняння біжучої хвилі – рівняння, що описує зміщення будь-якої з мас у довільний момент часу. Для частоти  $\omega_p$ , хвильового числа  $k_p$  і амплітуди  $s_0$  воно має вигляд:

$$s_p(x_n, t) = s_0 \sin(\omega_p t - k_p x_n), \quad (4.10)$$

$$x_n = a; 2a; \dots; na; \dots; Na.$$

Вираз  $\varphi = \omega_p t - k_p x_n$  називається фазою хвилі. Рівняння (4.10) відображає той факт, що всі маси коливаються з однаковою частотою  $\omega_p$ , мають однакову амплітуду  $s_0$ , однак ці коливання відрізняються за фазою  $\varphi$ .

Визначимо тепер швидкість  $c_p$  руху цієї хвилі. Для цього прослідкуємо за рухом гребеня хвилі, вершина якої в деякий момент часу знаходиться в точці М. Нехай за час  $\Delta t$  цей гребінь зміститься на відстань  $\Delta x_n \gg a$ . Оскільки на вершині гребеня маси мають максимальне додатне зміщення, то фаза їх коливань стала і дорівнює

$$\omega_p t - k_p x_n = \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

Тому

$$\omega_p \Delta t - k_p \Delta x_n = 0. \quad (4.12)$$

Звідси швидкість  $c_p$  рівна

$$c_p = \frac{\Delta x_n}{\Delta t} = \frac{\omega_p}{k_p} = v_p \cdot \lambda_p. \quad (4.13)$$

Швидкість  $c_p$  називається фазовою швидкістю гармонічної хвилі з частотою  $\omega_p = 2\pi\nu_p$ . Проаналізуємо залежність цієї швидкості від хвильового числа, користуючись дисперсійним співвідношенням (4.1). Для цього перепишемо його з урахуванням (4.4) у вигляді:

$$\omega_p = c_0 k_p \cdot \left( \frac{\sin \frac{k_p a}{2}}{\frac{k_p a}{2}} \right). \quad (4.14)$$

Графік залежності (4.14) називається дисперсійною кривою і зображений на рис.4.5а.

На цій кривій точками відмічені значення частот  $\omega_p$  і хвильових чисел  $k_p$ . Пунктиром зображена пряма  $\omega_p = c_0 k_p$ . Її можна отримати з (4.14) граничним переходом  $a \rightarrow 0$  (неперервне середовище).

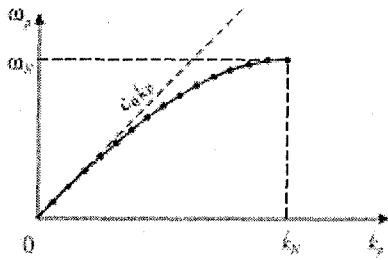


Рис. 4.5.а

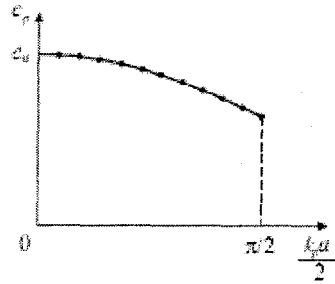


Рис. 4.5.б

З формули (4.14) або з рис.4.5а можна зробити ряд принципово важливих висновків.

1. З нелінійної залежності  $\omega_p = \omega(k_p)$ , яка описується формулою (4.14), випливає, що фазова швидкість гармонічної хвилі  $c_p = \frac{\omega_p}{k_p}$  залежить від  $k_p$  (або від  $\omega_p$ ):

$$c_p = c_0 \cdot \left( \frac{\sin \frac{k_p a}{2}}{\frac{k_p a}{2}} \right) \quad (4.15)$$

Залежність (4.15) зображена на рис. 4.5б.

Це явище носить назву **дисперсії середовища** по відношенню до хвилі, що в ньому поширюється. Еквівалентним є вираз «дисперсія хвилі в середовищі». Якщо фазова швидкість хвилі не залежить від  $k_p$ , як, наприклад, у випадку неперервного середовища, то кажуть, що дисперсія відсутня.

2. Для малих хвильових чисел ( $k_p a \ll 1$  або  $\lambda_p \gg a$ ) дисперсія мала. Швидкість таких «довгих хвиль»  $c_p \approx c_0$ , і середовище можна вважати суцільним.

3. Із збільшенням хвильового числа  $k_p$  (а, отже, і  $\omega_p$ ) швидкість  $c_p$ , як це випливає з (4.15), зменшується. Така поведінка швидкості називається нормальною дисперсією. Слід відзначити, що в оптиці, крім цієї, реалізується ще й інша ситуація, коли фазова швидкість світла в деякому діапазоні частот може зростати зі збільшенням частоти. В цьому випадку дисперсія називається аномальною.

4. Дисперсійна крива закінчується, коли хвильове число і частота досягають максимальних значень  $k_N$  і  $\omega_N$ . Їх можна отримати з (4.14) і (4.1), коли  $N \gg 1$ :

$$k_N = \frac{\pi}{a}; \quad \omega_N = 2\Omega.$$

Це означає, що хвилі з частотою  $\omega > \omega_N$  у такому середовищі поширюватися не можуть. Дійсно, коли частота  $\omega = \omega_N$ , довжина хвилі  $\lambda_N = \frac{2\pi}{k_N} = 2a$ . Хвилі з меншою довжиною хвилі не можуть існувати, оскільки на довжині поширення хвилі повинно знаходитися не менше двох вантажів, що коливаються.

Відзначимо, що в деяких випадках, наприклад, під час поширення електромагнітних хвиль у твердому тілі і в плазмі, крива дисперсії може починатися з деякої точки на осі частот  $\omega(0)$ . У таких середовищах можуть поширюватися електромагнітні хвилі тільки з частотами  $\omega$ , що знаходяться всередині інтервалу  $\omega(0) < \omega < \omega_N$ .

Як приклад, вкажемо, що для кристалів величина  $\frac{F}{a} \sim 15$  Н/м ( $F$  – пружна сила, величина якої визначається міжатомною взаємодією). Якщо прийняти масу іона рівною  $m \sim 6 \cdot 10^{-26}$  кг, то  $\omega_N = 2\sqrt{\frac{F}{ma}} \sim 6 \cdot 10^{13}$  с<sup>-1</sup>. Ця частота, як і частоти коливань молекул  $CO_2$  і  $H_2O$ , лежить у інфрачервоній області спектра. Тому під час поширення ІЧ-випромінювання в кристалах іони можуть здійснювати резонансні коливання. В цьому частотному оптичному діапазоні може існувати сильна дисперсія світла.

Відзначимо, що під час поширення хвиль у протяжних середовищах проблеми «настройки» частоти  $\omega$  зовнішнього впливу, який породжує хвилю, на частоту  $\omega_p$  однієї з мод середовища не існує. Будь-який вплив зовнішньої хвилі, навіть як завгодно близької до гармонічної, в дійсності завжди буде квазігармонічним, який характеризується вузьким інтервалом частот  $\Delta\omega \ll \omega$ . З іншого боку, для протяжного середовища до частоти  $\omega$  будуть близькі частоти  $\omega_p$  мод з великими номерами  $p$  ( $p \gg 1$ ). Різниця частот двох сусідніх мод  $\Delta\omega_p = \omega_{p+1} - \omega_p$ , як це легко бачити з рис. 4.5, буде настільки малою, що  $\Delta\omega_p \ll \Delta\omega$ . Отже, для будь-якої частоти  $\omega$

зовнішнього впливу, прикладеної до межі середовища, по ньому побіжить хвиля, яку в ряді випадків можна наближено вважати гармонічною:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx). \quad (4.16)$$

#### 4.2.1. Група хвиль та її швидкість

Як і зовнішній вплив, хвиля, що виникає в середовищі, буде, строго кажучи, квазігармонічною, оскільки  $\Delta\omega_p \ll \Delta\omega$ . Тому замість (4.16) слід записати рівняння хвилі в більш ускладненому вигляді:

$$s(x, t) = s_0(x, t) \sin[\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0(x, t)]. \quad (4.17)$$

Тут амплітуда  $s_0(x, t)$  і фаза  $\varphi_0(x, t)$  є функціями часу, що повільно змінюються на деякому масштабі часу  $\tau$ . Така хвиля являє собою групу гармонічних хвиль, частоти яких розташовані поблизу основної частоти  $\omega_0$  в межах інтервалу  $\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}$ . Кожна з хвиль групи в середовищі з дисперсією має власну фазову швидкість. У середовищі з нормальною дисперсією хвилі, що мають більшу частоту, будуть рухатися повільніше ніж хвилі з меншою частотою. Виникає питання: що є швидкістю групи хвиль і якщо така швидкість існує, то як її розрахувати? Який фізичний зміст має ця швидкість і в чому її відмінність від фазової швидкості?

Щоб дати відповідь на ці запитання, розглянемо для спрощення групу із двох хвиль з однаковими амплітудами  $s_0$  і з близькими частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , що рухаються в додатному напрямі осі  $x$ . Будемо вважати, що  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Задамо дисперсійні властивості середовища дисперсійним співвідношенням  $\omega = \omega(k)$ . З його допомогою розрахуємо значення  $k_1$  і  $k_2$  двох хвильових чисел, що відповідають частотам  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Тоді рівняння групи хвиль набуде вигляду:

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + s_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \sin(\omega_0 t - k_0 x) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{Тут } \Delta k = k_2 - k_1, \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

На рис. 4.6 зображена група із двох хвиль у деякий фіксований

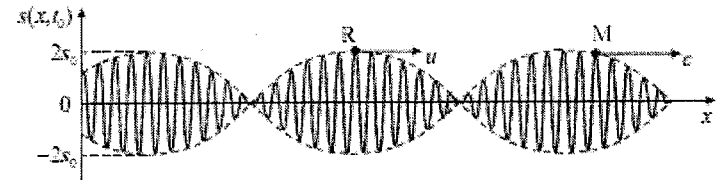


Рис. 4.6

момент часу  $t_0$ . Виділимо дві точки: М і R. Перша з них відповідає фіксованому значенню фази  $\varphi_M = \omega_0 t - k_0 x_M$ , при якій  $\sin \varphi_M = 1$ . Очевидно, що швидкість цієї точки, яка визначається з умови  $d\varphi_M = \omega_0 dt - k_0 dx_M = 0$ , рівна

$$c = \frac{dx_M}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (4.19)$$

і співпадає з фазовою швидкістю хвилі з частотою  $\omega_0$ .

Амплітуда квазігармонічної хвилі (4.18) визначається як

$$s_0(x, t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \quad (4.20)$$

і її розподіл на рис. 4.6 зображено пунктиром у вигляді огинаючої хвилі основної частоти  $\omega_0$ , що повільно змінюється вздовж  $x$ . Точка R на вершині цієї огинаючої рухатиметься зі швидкістю, відмінною від  $c$ . Дійсно, для координати  $x_R$  цієї точки, як це впливає з (4.20), можемо записати умову

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_R = \text{const}. \quad (4.21)$$

За час  $dt$  вона зміститься на відстань  $dx_R$ , яку можна знайти з рівності:

$$\frac{\Delta\omega}{2} dt - \frac{\Delta k}{2} dx_R = 0. \quad (4.22)$$

Отже, швидкість руху вершини обвідної буде рівна

$$u = \frac{dx_R}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (4.23)$$

Ця швидкість характеризує рух групи хвиль і називається груповою швидкістю. Її зміст стане ще зрозумілішим, якщо в межах



інтервалу  $\Delta\omega$  в групі будуть знаходитися хвилі з близько розташованими частотами, як, наприклад, зображено на рис.4.7а.

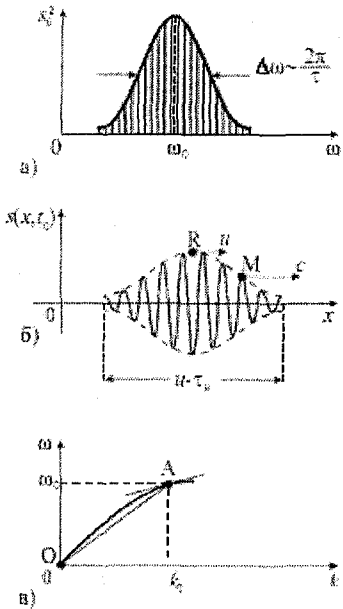


Рис. 4.7

Сама група матиме вигляд одного імпульсу тривалістю  $\tau_i$ , що поширюється вздовж осі  $x$  (рис. 4.7б). Імпульс рухатиметься з груповою швидкістю  $u = \frac{d\omega}{dk}$ . На дисперсійній кривій (рис 4.7в) ця швидкість дорівнює кутковому коефіцієнту дотичної в точці А. «Синусоїда» всередині імпульсу буде його обганяти і рухатися з фазовою швидкістю  $c = \frac{\omega_0}{k_0}$ . Чисельно ця швидкість рівна кутковому коефіцієнту відрізка ОА. В середовищі без дисперсії дисперсійна крива буде прямою  $\omega = ck$ . Тому

$$c = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u, \quad (4.24)$$

тобто фазова і групова швидкості співпадають. У середовищі з нормальною дисперсією, як це видно з рис.4.7в,  $u < c$ . У середовищі з аномальною дисперсією крива  $\omega = \omega(k)$  повинна загинатися вгору і, формально,  $u > c$ . Однак, зазвичай, ця залежність настільки нелінійна, що поняття групової швидкості втрачає зміст.

Дійсно, коли імпульс, зображений на рис. 4.7б, пройде дуже велику відстань у диспергуючому середовищі, то форма його спотвориться, і він розтягнеться в просторі. У середовищі із сильною аномальною дисперсією це спотворення має місце вже на малих відстанях, тому говорити про поширення імпульсу (як цілого з груповою швидкістю  $u$ ) некоректно.

Дисперсійне уширення імпульсів негативно впливає, наприклад, на швидкість передачі інформації (кількість біт за одиницю часу) з допомогою коротких світлових імпульсів, що біжать по волоконно-оптичним лініям зв'язку, довжина яких досягає декількох тисяч кілометрів. Два сусідні імпульси можуть розширитися настільки, що

зіллються в один (стануть нерозділеними). Природно, що приймач, встановлений у кінці лінії, «сприйме» два імпульси як один, і частина інформації буде втрачена.

### 4.3. Хвильове рівняння

Рівняння біжучої гармонічної хвилі в однорідному шнурі, де дисперсія відсутня ( $\omega = c_0 k$ ), за аналогією з (4.16) має вигляд:

$$s(x,t) = s_0 \sin(\omega t \mp kx) = s_0 \sin \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{c_0} \right) \right]. \quad (4.25)$$

Знак «-» відповідає хвилі, яка рухається в додатному напрямі по осі ОХ, а знак «+» – у від'ємному.

В більш загальному випадку поширення довільного імпульсу (групи хвиль), що рухається з тією ж швидкістю  $c_0$ , рівняння хвилі можна записати у вигляді:

$$s(x,t) = s \left( t \mp \frac{x}{c_0} \right) = s(\theta), \quad (4.26)$$

де  $s(\theta)$  – довільна функція свого аргументу  $\theta = t \mp \frac{x}{c_0}$ .

Покажемо, що закон руху шнура (4.26) і, звичайно, його частковий випадок (4.25) є розв'язками деякого рівняння руху, яке називається хвильовим рівнянням. Це хвильове рівняння можна отримати граничним переходом з рівняння (3.47).

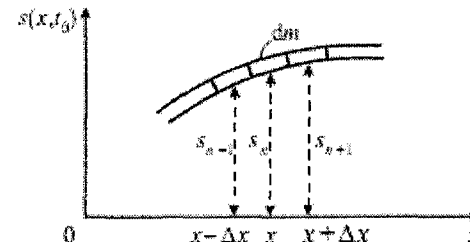


Рис. 4.8

На рис. 4.8 показано фрагмент шнура, що коливається. На цьому фрагменті зображені три відрізки шнура довжиною  $\Delta x$  і масою  $dm$  кожний. Зміщення цих відрізків у деякий довільний момент часу рівні  $s_{n-1} = s(x - \Delta x, t)$ ,  $s_n = s(x, t)$ ,  $s_{n+1} = s(x + \Delta x, t)$ . Прискорення центрального відрізка  $s_n = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}$ . Воно записане у вигляді другої частинної похідної функції  $s(x, t)$  по часу. Врахуємо далі, що

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{s_{n+1} - s_n}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x, t) - s(x, t)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \frac{dx}{2}}, \quad (4.27a)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{s_n - s_{n-1}}{a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x, t) - s(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \frac{dx}{2}}. \quad (4.27b)$$

Звернемо увагу, що сила  $F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \frac{dx}{2}}$  є проекцією на напрям зміщення  $s$  сили  $F$ , прикладеної до центрального елемента справа (в точці  $x + \frac{dx}{2}$ ). Аналогічно, зліва (в точці  $x - \frac{dx}{2}$ ) проекція цієї сили рівна  $-F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \frac{dx}{2}}$ . Рівнодійна цих сил, очевидно, визначається приростом першої похідної на довжині нескінченно малого елемента  $dx$ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{dm} \left( \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \frac{dx}{2}} - \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \frac{dx}{2}} \right). \quad (4.28)$$

Якщо тепер врахувати, що  $dm = \rho_1 dx$  ( $\rho_1$  – густина одиниці довжини, або лінійна густина шнура), то (4.28) набуде вигляду хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_1} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.29)$$

Це хвильове рівняння є математичним виразом другого закону Ньютона, в якому прискорення одиниці довжини шнура і діюча на нього сила записані у вигляді других частинних похідних зміщення  $s$  по часу і координаті відповідно. З математичної точки зору воно є лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку. Його розв'язок добре відомий: ним може бути довільна функція  $s(\theta)$ , аргумент якої «сконструйовано» у вигляді (4.26), а

швидкість  $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}}$ . Переконаємося в справедливості цього твердження. Для цього знайдемо другі похідні у відповідності з правилами диференціювання функції зі складним аргументом  $\theta = t \mp \frac{x}{c_0}$ :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \left( \mp \frac{1}{c_0} \right); \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2} \cdot \left( \mp \frac{1}{c_0} \right)^2. \quad (4.31)$$

Підставляючи другі похідні з (4.31) у (4.29), приходимо до висновку, що за  $c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho_1}}$  рівняння (4.29) задовольняється тотожно, тобто, функція  $s(\theta)$  дійсно є його розв'язком.

Хвильове рівняння є одним з фундаментальних рівнянь. У різних областях фізики це рівняння отримується як результат застосування відповідних законів, що описують поведінку систем різної природи (механічних, електромагнітних та ін.). В загальному випадку воно описує поширення хвиль у тривимірному просторі і має більш складний вигляд:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (4.32)$$

Під  $s$  може бути будь-яка величина, яка здійснює коливання: зміщення, швидкість, густина, тиск, електричний струм, електрична напруга, напруженість електричного й індукція магнітного полів та ін. Важливо підкреслити, що якщо нам вдається отримати хвильове рівняння (вивести його) для якого-небудь процесу, то множник, що стоїть перед другими просторовими похідними, зразу визначає квадрат швидкості поширення хвиль різної природи.

#### 4.4. Хвилі в суцільному шнурі. Відбивання хвиль

Ми вже згадували на початку лекції, що хвиля, досягнувши кінця шнура, відіб'ється. Характер цього відбивання залежить від умов закріплення кінця шнура (граничних умов).

Розглянемо спочатку більш детально процес відбивання імпульсу від закріпленого кінця шнура.

На рис.4.9 показано послідовні стадії відбивання імпульсу трикутної форми, де пунктиром зображені «падаючий» і «відбитий» імпульси. Якщо тривалість імпульсу рівна  $\tau_i$ , то його «довжина» вздовж струни рівна  $c_0 \tau_i$ . Нехай у момент часу  $t = 0$  він добіжить до кінця струни. В наступні моменти шнур буде діяти на кронштейн, до якого закріплено його кінець, зі змінною силою в напрямі, перпендикулярному до напрямку руху імпульсу.

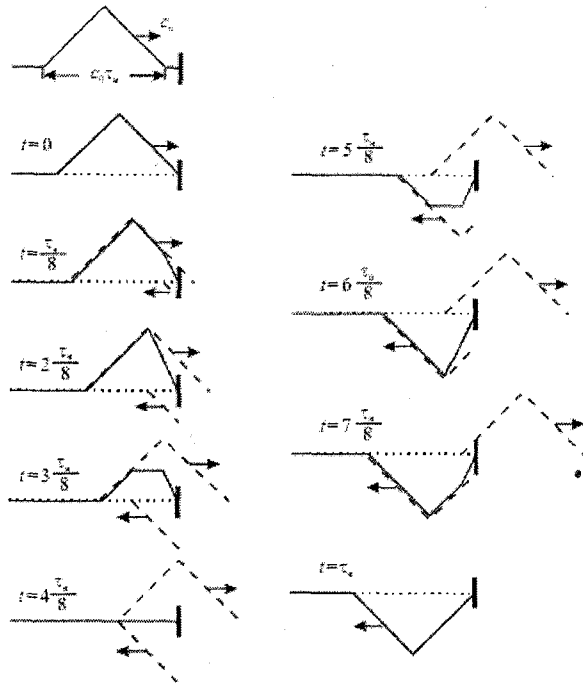


Рис. 4.9

Ця сила в момент часу  $t > 0$  починає тягнути кронштейн вгору. Протягом часу  $0 < t < \frac{\tau_i}{2}$  вона залишається сталою і в момент часу  $t = \frac{\tau_i}{2}$  стає рівною нулю. Згідно з третім законом Ньютона з такою ж силою кронштейн діє на кінець шнура. В момент часу  $t = \frac{\tau_i}{2}$  шнур стає прямим. Однак частина шнура довжиною  $\frac{ct_i}{2}$  продовжує рухатися вниз за інерцією. Коли  $t > \frac{\tau_i}{2}$  шнур тягне кронштейн вниз, і ця дія припиняється, коли  $t = \tau_i$ . Зрозуміло, що кронштейн діє на кінець шнура із силою, направленою вгору, гальмуючи рух його елементів вниз. Остаточню поперечна дія шнура на кронштейн припиниться, коли  $t > \tau_i$ , коли сформується відбитий імпульс, що має протилежну (по відношенню до падаючого) полярність.

Якщо по шнуру біжить гармонічна хвиля, то при досягненні закріпленого кінця шнура виникає обернена відбита хвиля. Щоб врахувати зміну її полярності, в аргумент рівняння відбитої хвилі додають фазовий зсув

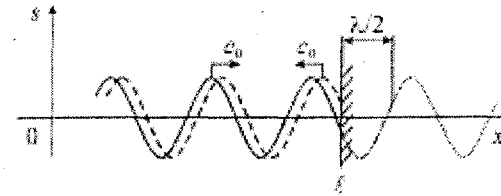


Рис. 4.10

додають фазовий зсув  $\varphi_{\text{відб}} = \pi$ . Тому кажуть, що в цьому випадку під час відбивання фаза стрибком змінюється на  $\pi$ , або «втрачається півхвиля». В загальному випадку за довільних

граничних умов зсув фази  $\varphi_{\text{відб}}$  може змінюватися в інтервалі  $0 \leq \varphi_{\text{відб}} \leq \pi$ . Пояснимо сказане простим розрахунком.

Нехай по шнуру біжить гармонічна хвиля. Досягнувши кінця шнура при  $x = l$ , вона буде відбиватися (рис.4.10). Зміщення будь-якої ділянки, що має координату  $x \leq l$ , визначається як суперпозиція біжучої і відбитої хвиль:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx) + s_0 \sin(\omega t - k(2l - x) + \varphi_{\text{відб}}). \quad (4.33)$$

У (4.33) враховано, що відбита хвиля, по-перше, проходить відстань «туди» і «назад», яка рівна  $l + (l - x) = 2l - x$ , і, по-друге, отримує зсув фази  $\varphi_{\text{відб}}$  під час її відбивання. Проведемо сумування в (4.33) і отримаємо:

$$s(x, t) = 2s_0 \cos\left[k(l - x) + \frac{\varphi_{\text{відб}}}{2}\right] \sin\left[\omega t - kl + \frac{\varphi_{\text{відб}}}{2}\right]. \quad (4.34)$$

Припускаємо, що амплітуда хвилі  $s_0$  залишається малою під час поширення і не змінюється під час відбивання.

Цей вираз є рівнянням стоячої хвилі. Основні її характеристики можна звести до наступних:

1. У стоячій хвилі всі ділянки шнура коливаються з однаковою частотою  $\omega$  і у фазі, однак амплітуда цих коливань змінюється вздовж шнура, тобто стояча хвиля є модою коливань.

2. Амплітуда коливань у стоячій хвилі отримується з (4.34) рівною:

$$A(x) = 2s_0 \cos\left[k(l - x) + \frac{\varphi_{\text{відб}}}{2}\right]. \quad (4.35)$$

З цього виразу бачимо, що деякі ділянки шнура коливаються з

амплітудою, рівною  $2s_0$ . Це так звані «пучності» стоячої хвилі. З іншого боку, існують ділянки, які залишаються нерухомими, оскільки для них амплітуда  $A=0$ . Це так звані «вузли» стоячої

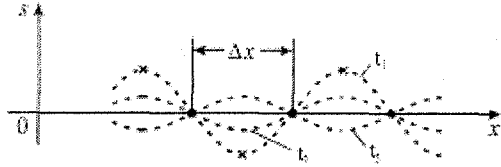


Рис. 4.11

хвилі.

На рис. 4.11 зображені зміщення фрагмента струни для трьох послідовних моментів часу  $t_1$ ,  $t_2$  і  $t_3$ . Неважко показати, що відстань між двома сусідніми вузлами, вказані точками, дорівнює відстані між двома сусідніми пучностями, відмічені хрестиками, і складає величину  $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$ .

3. Усі частини шнура, що лежать між двома сусідніми вузлами, здійснюють коливання у фазі. Під час переходу через вузол фаза коливань стрибком змінюється на  $\pi$ , що відповідає зміні знака  $A(x)$ .

4. На кінці шнура ( $x=l$ ) амплітуда

$$A(l) = 2s_0 \cos \frac{\varphi_{\text{відб}}}{2}. \quad (4.36)$$

Для закріпленого кінця шнура  $A(l) = 0$  і  $\varphi_{\text{відб}} = \pi$ . На рис. 4.10 показана ділянка у півхвилі, яка «губиться» під час такого відбивання. Розташована правіше цієї ділянки частина хвилі, зображена пунктиром у області  $x > l$ , після повороту напрямку поширення якраз і буде хвилею, відбитою в закріпленій точці  $x=l$ .

Звернемося тепер до відбивання хвилі від вільного кінця шнура. Технічно це можна реалізувати, якщо кінець шнура прив'язати до тонкої і легкої нитки, яка служить тільки для створення натягу шнура із силою  $F$ .

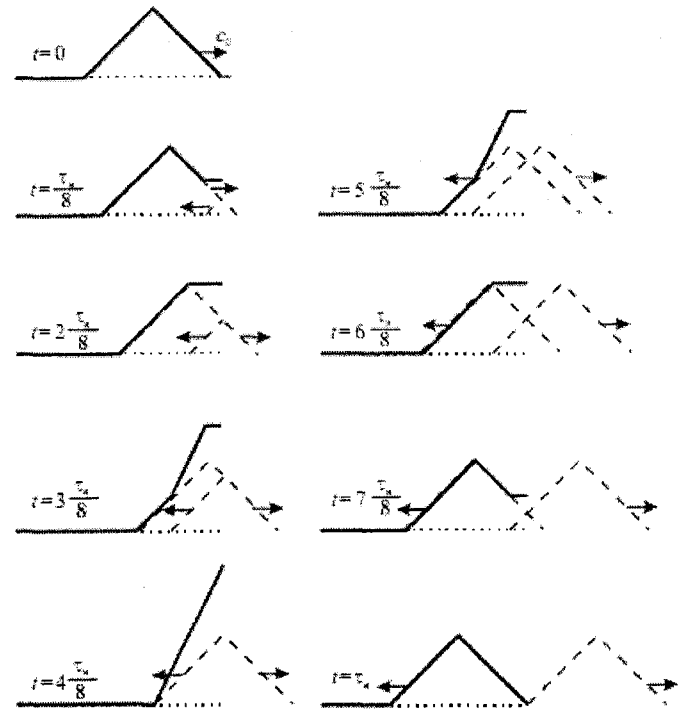


Рис. 4.12

Процес відбивання трикутного імпульсу від вільного кінця шнура показаний на рис.4.12. Звертають на себе увагу дві обставини:

1. Відбитий імпульс зберігає ту саму полярність, що і падаючий. Це пов'язано з тим, що під час руху вільний кінець буде тягнути вгору ділянки шнура, які прилягають до нього зліва, і, в результаті, буде збуджений відбитий імпульс, в якому елементи шнура також зміщені вгору. У випадку гармонічної хвилі відбита хвиля знаходиться у фазі з падаючою. Утворена стояча хвиля буде описуватися рівнянням (4.34), в якому  $\varphi_{\text{відб}} = 0$ .

2. Кінець шнура здійснює «змах», величина якого вдвічі перевищує амплітуду імпульсу в його середині. Для гармонічної хвилі на кінці шнура ( $x=l$ ) утворюється пучність стоячої хвилі. Це впливає з формули (4.36), у якій слід покласти  $\varphi_{\text{відб}} = 0$ .

#### 4.5. Збудження стоячих хвиль у шнурі. Моді коливань

Нехай кронштейн, до якого прив'язано лівий кінець шнура, здійснює гармонічні коливання  $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$ , де  $\xi_0$  – дуже мала амплітуда. Тому лівий кінець шнура можна вважати закріпленим. По шнуру побіжить гармонічна хвиля (рис.4.13), яка після відбивання від правого закріпленого кінця отримає зсув фази, рівний  $\pi$ . Досягнувши лівого кінця, вона ще раз відіб'ється, а зсув фази стане рівним  $2\pi$ .

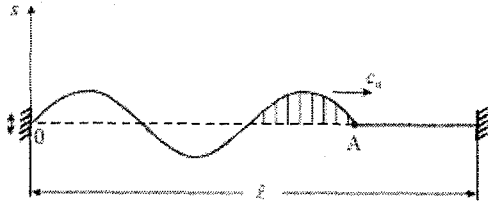


Рис. 4.13

Двічі відбита хвиля накладеться на постійно біжучу праворуч гармонічну хвилю. Якщо зсув фази коливань у цих хвиль буде кратним величині  $2\pi$ , то результатом накладання буде хвиля, амплітуда якої перевищує амплітуду  $\xi_0$  вихідної біжучої хвилі. Отже, біжуча хвиля підсилиться. Якщо б не було втрат енергії, то наростання амплітуди за багатократного відбивання було б необмеженим. Однак втрати, як це не раз було показано, також збільшаться зі зростанням амплітуди. Тому коливання усталяться: в систему буде закачано деяку кількість енергії, а подальший її притік буде рівний дисипації.

Визначимо частоту зовнішнього впливу  $\omega$ , з якою слід рухати лівий кронштейн, щоб забезпечити максимальне підсилення хвилі. Оскільки біжуча гармонічна хвиля може розглядатися як набір імпульсів різної полярності, що слідують один за одним зі швидкістю  $c_0$ , то ми прослідкуємо за підсиленням будь-якого з них (наприклад, заштрихованого на рис.4.13). Час руху імпульсу (для певної точки А в його початку) по шнуру туди і назад рівний  $\Delta t = \frac{2l}{c_0}$ . Врахуємо далі,

що після двох відбиттів цей імпульс двічі обернеться. Для його підсилення необхідно, щоб у момент  $t = \Delta t$  лівий кінець шнура проходив положення рівноваги і рухався при цьому вгору:

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \xi_0 \sin(\omega \Delta t) = 0, \\ \dot{s}(\Delta t) &= \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = +\xi_0 \omega. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Тому частота  $\omega$  повинна задовольняти умову

$$\omega_p \Delta t = 2\pi p, \quad (4.38)$$

де  $p = I, II, III, \dots$

Звідси

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{l} p. \quad (4.39)$$

Конфігурацію струни, що коливається на частотах (4.39) можна легко намалювати, коли амплітуди біжучої і відбитої хвиль не змінюються вздовж шнура і рівні між собою. Очевидно, що це будуть стоячі хвилі, розглянуті нами вище і які відповідають однаковим граничним умовам: на обох кінцях шнура повинні бути вузли зміщення.

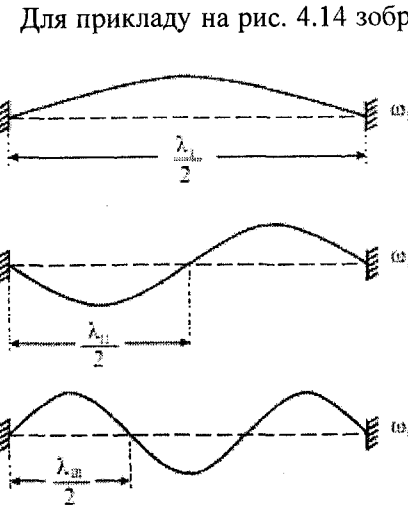


Рис. 4.14

Для прикладу на рис. 4.14 зображені три можливі конфігурації шнура в момент часу, коли зміщення його елементів максимальні. Коливання, що відповідають цим конфігураціям, є нормальними коливаннями (модами), а частоти  $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$  – нормальними частотами. Якщо дія зовнішньої сили припиниться, то ці коливання будуть тривати як власні, поки не згаснуть.

$$\lambda_p = \frac{2\pi c_0}{\omega_p}.$$

$$l = p \frac{\lambda_p}{2}. \quad (4.40)$$

Умову (4.39) можна переписати в більш наочному вигляді, якщо перейти від частоти  $\omega_p$  до довжини хвилі

Ця умова означає, що під час нормальних коливань на довжині шнура повинно вкладатися ціле число півхвиль. Легко тепер бачити, що кожна з мод може бути збуджена, якщо прикладати силу потрібної частоти до будь-якої ділянки шнура, за винятком тих, які співпадають з вузлами даної моди.

Видозмінимо граничні умови і зробимо обидва кінці шнура вільними (прив'яжемо їх до натягнутих легких ниток). Підрахуємо частоти вимушуючої сили, на яких збуджуються стоячі хвилі (моди). Врахуємо, що після двох відбивань імпульс не змінює свою полярність, тому умова (4.40) залишається тією самою.

На рис.4.15 показано конфігурації мод для шнура з вільними кінцями. Видно, що у випадку нормальних коливань на довжині шнура також повинно вкладатися ціле число півхвиль, але таким чином, щоб на кінцях шнура були пучності.

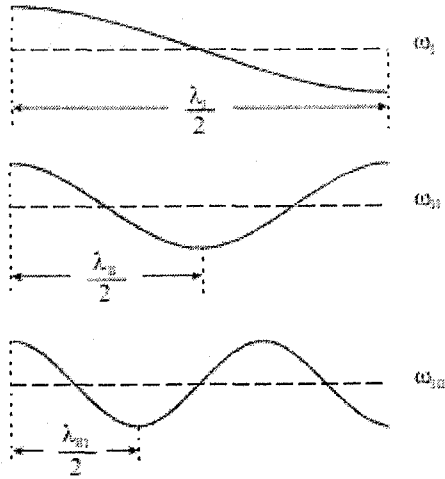


Рис. 4.15

$$s(\Delta t) = \xi_0 \sin(\omega \Delta t) = 0, \quad (4.41)$$

$$\dot{s}(\Delta t) = \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = -\xi_0 \omega.$$

Тому частота  $\omega$  повинна задовольняти умову

$$\omega_p \Delta t = (2p - 1)\pi, \quad (4.42)$$

де  $p = I, II, III, \dots$

Звідси

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{2l} (2p - 1). \quad (4.43)$$

Остання умова стає більш наочною, якщо перейти до довжини хвилі  $\lambda_p$ :

$$l = (2p - 1) \frac{\lambda_p}{4}, \quad (4.44)$$

де  $p = I, II, III, \dots$

Закріпимо тепер тільки лівий кінець шнура і будемо рухати кронштейн з малою амплітудою  $\xi_0$ . Умова оптимального збудження стоячих хвиль (мод) одержується з тих міркувань, що імпульс обертається тільки під час відбивання від лівого кінця шнура. Для підсилення імпульсу необхідно, щоб лівий кінець у момент часу  $t = \Delta t$  рухався вниз, проходячи положення рівноваги:

Відповідні три нижчі моди зображені на рис.4.16. Очевидно, що це будуть стоячі хвилі, які відповідають різним граничним умовам: на лівому кінці повинен бути вузол, а на правому – пучність. На довжині шнура при цьому вкладається непарне число чвертей довжин хвиль.

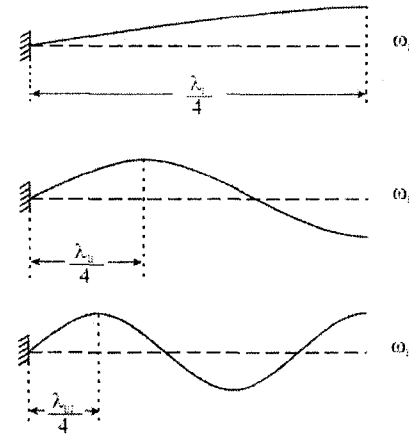


Рис.4.16

Зауваження. Під час збудження моди ми задавали закон руху закріпленого кінця шнура у вигляді  $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$ , що може викликати деяке здивування – як може рухатись закріплений кінець? Однак амплітуда коливань  $\xi_0$ , зазвичай, набагато менша за амплітуду коливань у пучностях, тому кінець шнура, який злегка вібрує, може розглядатися як нерухомий.

## 4.6. Хвилі в пружних тілах

Як ми побачили, сили взаємодії між сусідніми елементами шнура, що здійснюють коливання, забезпечують поширення в ньому хвиль. У пружних тілах такі сили зводяться до дотичних і нормальних напруг, що виникають під час деформацій зсуву і розтягу (стиску). Цим деформаціям відповідають 2 типи хвиль: поперечні і поздовжні.

### 4.6.1. Поперечні хвилі

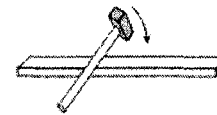


Рис. 4.17

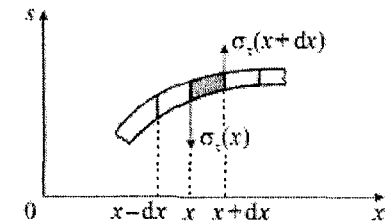


Рис. 4.18

Якщо по стержню, виготовленому з пружного матеріалу, вдарити молотком у його середній частині (рис.4.17), то до його кінців побіжать імпульси, як це мало місце в шнурі з вантажами, зображеному на рис.4.1. Однак поперечні зміщення частинок стержня будуть непомітні для ока, тому для реєстрації біжучих по стержню збурень потрібні спеціальні методи.

Оскільки дисперсія хвиль механічної природи в суцільному середовищі відсутня, то швидкість їх поширення можна розрахувати за допомогою хвильового рівняння.

На рис.4.18 показано фрагмент стержня, що коливається. На середній елемент довжиною  $dx$  діють дотичні напруги (зліва  $\sigma_\tau(x)$ ) і справа  $\sigma_\tau(x+dx)$ ), величини яких пропорційні деформаціям зсуву сусідніх елементів:

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(x) &= Gtg\gamma(x) = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x, \\ \sigma_\tau(x+dx) &= Gtg\gamma(x+dx) = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx}\end{aligned}\quad (4.45)$$

Тут  $G$  – модуль зсуву,  $\gamma$  – кут зсуву.

Якщо площа поперечного перерізу стержня рівна  $S$ , то маса елемента  $dm = \rho dx$ , ( $\rho$  – густина матеріалу). Отже, рівняння його руху може бути записано у вигляді:

$$\rho dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = G \left( \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x \right) S. \quad (4.46)$$

Поділивши обидві частини (4.46) на  $S \rho$  і  $dx$ , отримуємо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.47)$$

Його розв'язком, як вже зазначалося раніше, є будь-яка функція аргументу  $\theta = t \mp \frac{x}{c}$ :

$$s(x, t) = s(\theta) = s\left(t \mp \frac{x}{c}\right), \quad (4.48)$$

а швидкість поширення хвилі

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (4.49)$$

Процеси поширення і відбивання поперечних хвиль у стержні повністю аналогічні процесам у однорідному натягнутому шнурі, тому їх ми розглядати не будемо. Сконцентруємо увагу на закономірностях перенесення механічної енергії біжучою хвилею.

#### 4.6.2. Енергія, що переноситься хвилею

Під час деформації зсуву в одиниці об'єму тіла запасється потенціальна енергія

$$w_\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2, \quad (4.50)$$

що називається **об'ємною густиною енергії деформації зсуву**. В (4.50) ми поклали  $\gamma \approx tg\gamma = \frac{\partial s}{\partial x}$ .

Крім цього, одиниця об'єму з масою, рівною  $\rho$ , і коливною швидкістю  $v = \frac{\partial s}{\partial t}$  має кінетичну енергію

$$w_v = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2. \quad (4.51)$$

Повна енергія одиниці об'єму дорівнює

$$w = w_\gamma + w_v = \frac{1}{2} \left[ G \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (4.52)$$

Покажемо, що в біжучій хвилі (4.48)  $w_\gamma = w_v$ . Для цього розрахуємо похідні:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \left( \mp \frac{1}{c} \right) \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \cdot 1.\end{aligned}\quad (4.53)$$

З (4.53) одержуємо

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial s}{\partial t}, \text{ або } \gamma = \mp \frac{v}{c}. \quad (4.54)$$

Відзначимо, що в біжучій хвилі деформації  $\gamma$  будь-якого елемента пропорційні його коливній швидкості  $v$ .

Підносячи до квадрата ліву рівність (4.54), ділячи його пополам і враховуючи, що  $c^2 = \frac{G}{\rho}$ , одержуємо

$$\frac{1}{2}G\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2, \text{ або } w_\gamma = w_v. \quad (4.55)$$

Рівність величин  $w_\gamma$  і  $w_v$  дозволяє записати повну густину енергії  $w$  у вигляді:

$$w = 2w_\gamma = 2w_v. \quad (4.56)$$

Оскільки хвиля рухається, то вона здійснює перенесення механічної енергії.

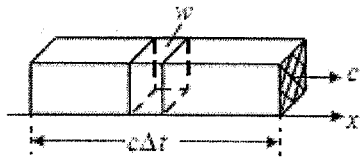


Рис. 4.19

Так, наприклад, за час  $\Delta t$  через площадку одиничної площі, заштрихованої на рис.4.19, буде перенесена енергія, що рівна

$$\Delta W = wc\Delta t. \quad (4.57)$$

У фізиці використовують

поняття густини потоку енергії, що визначається кількістю енергії, яка переноситься хвилиною за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі. Згідно з (4.57) ця густина рівна

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta t} = wc \quad (4.58)$$

і має розмірність  $[J] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

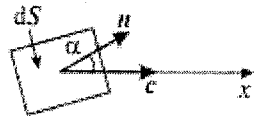


Рис. 4.20

Якщо площадка має площу  $dS$ , а її нормаль  $n$  складає з напрямком поширення хвилі (віссю  $Ox$ ) кут  $\alpha$  (рис.4.20), то кількість енергії, що переноситься хвилиною через цю площадку за одиницю часу (потік енергії), дорівнює

$$d\Phi = wc \cdot dS \cos \alpha. \quad (4.59)$$

Професором Московського університету Н.А.Умовим 1874 року був введений вектор густини потоку енергії

$$\vec{J} = wc, \quad (4.60)$$

що отримав назву вектора Умова. З його використанням потік  $d\Phi$  може бути записаний у вигляді

$$d\Phi = \vec{J} \cdot d\vec{S} = JdS \cos \alpha, \quad (4.61)$$

де  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ .

Зручність вектора Умова стає особливо відчутною, коли хвиля поширюється у тривимірному просторі. Тоді потік енергії через

довільну поверхню  $S$  виражається у вигляді інтеграла по цій поверхні:

$$\vec{\Phi} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.62)$$

Підрозуміємо середнє за період значення вектора Умова для біжучої вздовж стержня поперечної гармонічної хвилі

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx). \quad (4.63)$$

Об'ємна густина енергії (сума потенціальної і кінетичної енергії) рівна

$$w = \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \rho s_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (4.64)$$

У деякий момент часу вона розподілена вздовж стержня так, як показано на рис.4.21. З бігом часу цей розподіл зміщується вздовж осі  $Ox$  з швидкістю  $c$ . Густина потоку енергії через будь-який переріз  $x = \text{const}$  буде періодично

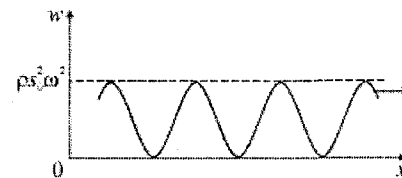


Рис. 4.21

зростати від нуля до максимальної величини  $\rho s_0^2 \omega^2$ . Тому зручно користуватися середнім значенням  $J$  за період  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Ця величина називається інтенсивністю біжучої хвилі і дорівнює

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2. \quad (4.65)$$

Важливо відзначити, що інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди.

У стоячій хвилі немає переносу енергії, оскільки вона є суперпозицією двох біжучих хвиль, що переносять однакову кількість енергії в протилежних напрямках. Однак локальний рух енергії в обмеженому просторі між сусідніми вузлами все ж відбувається. Дійсно, запишемо рівняння стоячої хвилі (4.34), опустивши в ньому

сталі фазові добавки  $\frac{\varphi_{відб}}{2}$  і  $kl$ :

$$s(x, t) = 2s_0 \cos kx \sin \omega t. \quad (4.66)$$

Об'ємна густина енергії деформації зсуву рівна:



$$w_y = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = 2s_0^2 \omega^2 \rho \cos^2 kx \cos^2 \omega t =$$

$$= 2s_0^2 k^2 G \cos^2 kx \cos^2 \omega t, \quad (4.68)$$

оскільки  $c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{G}{\rho}$ .

Локальний рух енергії наочно демонструє рис.4.22, на якому показаний фрагмент стоячої хвилі в моменти часу  $t_1 = 0$  і  $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$  (а) і відповідні розподіли  $w_y$  (б) і  $w_v$  (в).

Видно, що за  $t = t_1$ , коли елементи стержня проходять положення рівноваги і мають максимальні швидкості, деформація відсутня ( $w_y = 0$ ), а вся енергія зосереджена у вигляді кінетичної енергії  $w_v$  і локалізована поблизу пучності. Однак через чверть періоду коливаний частинки стержня змістяться на максимальні відстані і зупиняться ( $w_v = 0$ ). Енергія буде зосереджена у вигляді потенціальної енергії  $w_y$  і локалізована поблизу вузлів. Це означає, що енергія з області поблизу пучності за чверть періоду коливаний перетікає в обидві сторони в напрямку вузлів. Потім вона рухається у зворотному напрямі, і цей процес повторюється багатократно. Потік енергії через вузли відсутній. Середнє за період значення потоку енергії через будь-який переріз  $x = const$  буде рівне нулю ( $I = 0$ ).

#### 4.7. Поздовжні хвилі

Такі хвилі можуть бути збуджені ударом молотка по одному з

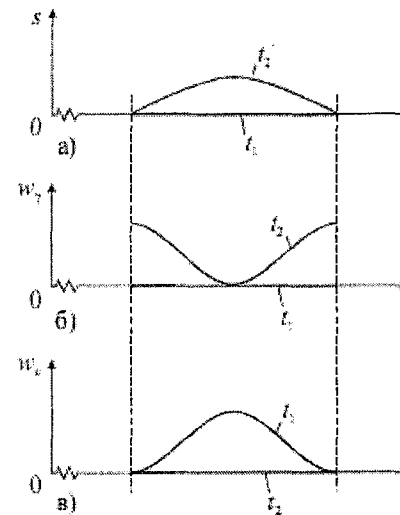


Рис. 4.22

Добігши до правого кінця пружини, він відіб'ється, при цьому, якщо кінець закріплений (рис.4.23б), то відбитий імпульс буде також імпульсом стиску. Якщо правий кінець вільний, то відбитий імпульс

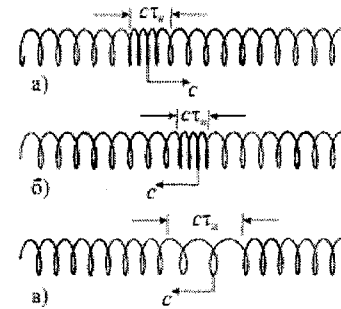


Рис. 4.23

буде імпульсом розтягу (рис.4.23в). Він виникає в момент зміщення праворуч вільного кінця пружини, коли до нього добіжить імпульс стиску. Ця ситуація нагадує зміщення вільного кінця шнура. Відзначимо, що в розглянутому випадку зміщення витків пружини відбувається вздовж напрямку поширення хвилі, тому хвиля називається поздовжньою.

Розглянемо тепер поширення імпульсів стиску і розтягу в стержні.

Подумки розіб'ємо стержень на ряд елементів довжиною  $dx$  кожний. Під час поширення поздовжньої хвилі кінці кожного елемента, відмічені на рис.4.24 суцільними лініями, будуть зміщені в нові положення, відмічені пунктиром. Ці зміщення  $s$

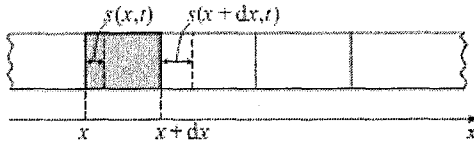


Рис. 4.24

будемо вважати додатними, якщо вони відбуваються в додатному напрямі осі  $Ox$ , і від'ємними – в протилежному випадку.

Нехай лівий кінець деякого елемента, що має координату  $x$ , змістився в даний момент часу  $t$  на відстань  $s(x,t)$ , а правий кінець – на  $s(x+dx,t)$ . Деформація розтягу (стиску) визначається відносним видовженням елемента  $dx$ :

$$\varepsilon(x,t) = \frac{s(x+dx,t) - s(x,t)}{dx} = \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (4.69)$$

Відзначимо, що деформації розтягу відповідає  $\varepsilon > 0$ , а стиску –  $\varepsilon < 0$ .

На відміну від поперечної хвилі, у випадку розтягу (стиску) зменшується (збільшується) густина середовища  $\rho$ . Її можна представити у вигляді

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad |\delta\rho| \ll \rho_0. \quad (4.70)$$

Тут  $\delta\rho$  – мала добавка до рівноважної густини  $\rho_0$ , причому  $\delta\rho$  може бути як додатною, так і від'ємною. Із врахуванням сталості маси елемента  $dx$ , що деформується, можемо записати:

$$\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)[dx + s(x+dx,t) - s(x,t)] = (\rho_0 + \delta\rho)dx(1 + \varepsilon). \quad (4.71)$$

Розкриваючи дужки і нехтуючи малою величиною  $\varepsilon \cdot \delta\rho$ , знаходимо

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\varepsilon. \quad (4.72)$$

Через деякий час  $t$  після удару по торцю стержня (чи після різкого відтягування цього торця) розподіл зміщень  $s$ , деформацій  $\varepsilon$  і збурень густини  $\delta\rho$  у біжучих імпульсах стиску і розтягу будуть мати вигляд, показаний на рис.4.25. Пунктиром показані розподіли всіх величин в один з наступних моментів часу.

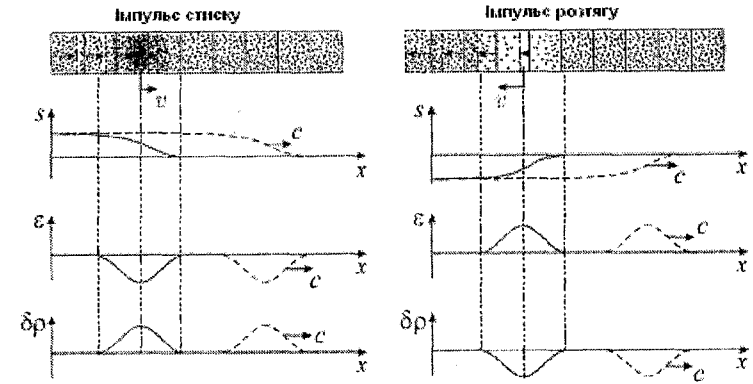


Рис. 4.25

Рівняння хвилі, що біжить уздовж осі  $Ox$ , в обох випадках має вигляд  $s(x,t) = s\left(t - \frac{x}{c}\right)$ . За аналогією з (4.54) деформація  $\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$  і

коливна швидкість  $v = \frac{\partial s}{\partial t}$  елемента пов'язана співвідношенням

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \text{або} \quad \varepsilon = -\frac{v}{c}. \quad (4.73)$$

Підкреслимо, що в імпульсі стиску ( $\varepsilon < 0$ ) швидкість  $v$  співпадає за напрямом зі швидкістю  $c$ , а в імпульсі розтягу вони мають протилежні напрями.

Розрахуємо швидкість поширення поздовжніх хвиль. На рис.4.26 зображено фрагмент стержня і показано його елемент  $dx$ , до кінців якого прикладені нормальні напруги  $\sigma_n$ . Рівняння руху елемента з поперечним перерізом рівним  $S$  має вигляд:

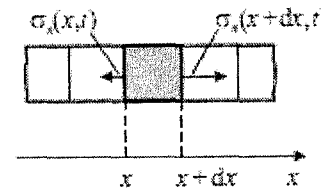


Рис. 4.26

$$dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = S[\sigma_n(x+dx,t) - \sigma_n(x,t)], \quad (4.74)$$

де  $dm = \rho_0 S dx$ . Щоб (4.74) перетворити до хвильового рівняння, необхідно пов'язати напруги  $\sigma_n$  з деформаціями елементів стержня. Найбільш просто це можна зробити для тонкого стержня.

#### 4.7.1. Швидкість хвиль у тонкому стержні

Якщо стержень тонкий, то деформації і напруги вздовж координати  $x$  пов'язані відомим законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, t) &= E \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_x \\ \sigma_n(x + dx, t) &= E \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x+dx}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

де  $E$  – модуль Юнга.

Підставляючи (4.75) у (4.74) і поділивши на  $\rho_0 S dx$ , одержуємо хвильове рівняння:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (4.76)$$

Швидкість поздовжніх хвиль одержується рівною

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (4.77)$$

Ця швидкість перевищує швидкість поперечних хвиль (див. формулу (4.49)), оскільки  $E \gg G$ . За порядком величини обидві швидкості співпадають і для різних матеріалів переважно лежать у діапазоні  $c \sim (10^3 \div 10^4) \text{ м/с}$ .

#### 4.7.2. Швидкість хвиль у товстому стержні

Нехай уздовж осі товстого стержня (осі  $x$ ) поширюється поздовжня хвиля, при цьому коливаються елементи стержня, що знаходяться поблизу його осі.

Один з таких елементів показано на рис. 4.27. Під дією нормальної напруги  $\sigma_1$  відносно видовження  $\varepsilon_1$  визначається першим рівнянням (1.27):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)\mu}{E}. \quad (4.78)$$

Це рівняння відображає той факт, що під час видовження елемента  $dx$ , зображеного на рис. 4.27, площа його поперечного перерізу зменшується (зв'язок поздовжньої і поперечної деформацій визна-

чається коефіцієнтом Пуассона  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ ). Цей елемент потягне до осі стержня оточуючі його елементи, розвиваючи напругу  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Ці елементи (що лежать між площинами  $x = \text{const}$  і  $x + dx = \text{const}$ ) почнуть рухатися: спочатку ті, що знаходяться поблизу осі стержня, а потім елементи, близькі до поверхні. Через час  $\Delta t = \frac{L/2}{c}$  ( $L$  – поперечний розмір стержня,  $c$  – швидкість поширення збурення) всі елементи змістяться, і напруги  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  зникнуть.

Якщо тривалість  $\tau_i$  імпульсу, що поширюється вздовж осі стержня, велика, так, що  $\tau_i \gg \frac{L}{2c}$ , то в (4.78) можна не враховувати  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Швидкість такого довгого імпульсу буде визначатися формулою (4.77). Такий режим можна реалізувати, якщо

$$L \ll c\tau_i. \quad (4.79)$$

Умова (4.79) означає, що поперечний розмір стержня  $L$  значно менший за довжину імпульсу. Такий стержень можна вважати тонким. Якщо мова йде про гармонічну хвилю, що поширюється вздовж стержня, то умова (4.79) має вигляд

$$L \ll \lambda, \quad (4.80)$$

де  $\lambda = cT$  – довжина хвилі,  $E$  – період коливань. Так, наприклад, для сталевого стержня

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 5000 \text{ м/с}. \quad \text{За}$$

частоти  $\nu = 5000 \text{ Гц}$ ,  $\lambda = \frac{c}{\nu} \sim 1 \text{ м}$ , тому стержні з поперечним розміром  $L \sim 1 \text{ см}$  можуть вважатися тонкими.

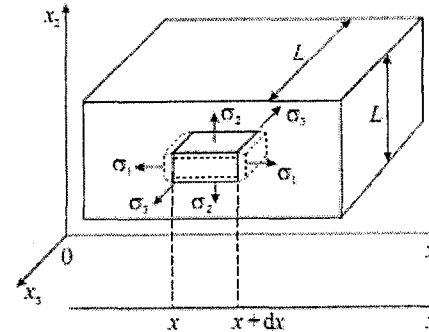


Рис. 4.27

Якщо тривалості імпульсу  $\tau_i \ll \Delta t = \frac{L}{2c}$  (стержень товстий), то в (4.78) слід врахувати  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Щоб знайти зв'язок  $\varepsilon_1$  і  $\sigma_1$ , разом з рівнянням (4.78) запишемо аналогічні для  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  і додамо всі три рівняння:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\mu)}{E}. \quad (4.81)$$

Для спрощення введемо середні значення

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Тоді (4.81) перепишеться у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1 - 2\mu)}{E}. \quad (4.82)$$

Із врахуванням (4.82) рівняння (4.78) видозмінюється:

$$\varepsilon_1 + \frac{3\mu\varepsilon}{1 - 2\mu} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_1. \quad (4.83)$$

Якщо покласти в товстому стержні  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ , то  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{3}$  і шуканий зв'язок одержиться у вигляді:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Ef(\mu)} = \frac{\sigma_1(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)}. \quad (4.84)$$

У цьому випадку зв'язок деформації і напруги визначається як модулем Юнга  $E$ , так і наступною функцією коефіцієнта Пуассона

$$f(\mu) = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (4.85)$$

Легко переконатися, що за будь-яких можливих значень коефіцієнта Пуассона  $f(\mu) > 1$ . Тому швидкість поздовжньої хвилі в цьому випадку

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} f(\mu)} \quad (4.86)$$

перевищує швидкість хвилі в тонкому стержні. Величину  $E \cdot f(\mu)$  зазвичай, називають «модулем одностороннього розтягу».

Відзначимо, що найбільш складний аналіз для проміжного випадку, коли  $L \sim \lambda$ . Для хвиль з такою довжиною хвилі має місце дисперсія (фазова швидкість гармонічної хвилі залежить від її частоти). Розподіл амплітуди хвилі в поперечному перерізі стержня

вздовж осей  $x_2$  і  $x_3$  аналогічний розподілу амплітуди для шнура довжиною  $L$  з вільними кінцями під час нормального коливання. Стержень у цьому випадку виконує роль хвилеводу. Під час його плавного вигину хвиля поширюється вздовж його осі.

Поздовжні хвилі переносять енергію, і для них справедливі всі міркування і висновки, отримані для поперечних хвиль. Формально в усі вирази для густини енергії  $w$ , вектора Умова  $\vec{J}$  та ін. слід замість модуля зсуву  $G$  підкласти модуль Юнга  $E$  або  $E \cdot f(\mu)$ .

#### 4.8. Явища на межі розділу двох середовищ

Розглянемо детальніше проходження поздовжньої хвилі через межу розділу двох пружних середовищ у випадку нормального падіння хвилі на цю границю.

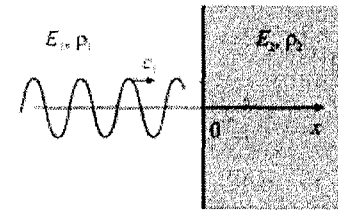


Рис.4.28

Нехай поздовжня хвиля поширюється зі швидкістю  $c_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}$  в середовищі з модулем Юнга  $E_1$  і рівноважною густиною  $\rho_1$  (рис.4.28).

Досвід показує, що ця хвиля на межі розділу двох середовищ ( $x=0$  на рисунку) частково відбивається і частково переходить у друге середовище, яке характеризується параметрами  $E_2$  і  $\rho_2$ . Отже, можемо записати

1-е середовище  
(падаюча+відбита хвиля)

$$s_1(x, t) = s_{01} \sin(\omega t - k_1 x) + s'_{01} \sin(\omega t - k_1 x)$$

2-е середовище  
(заломлена хвиля)

$$s_2(x, t) = s_{02} \sin(\omega t - k_2 x). \quad (4.87)$$

Тут  $\omega$  – частота,  $s_{01}, s'_{01}$  і  $s_{02}$  – амплітуди падаючої, відбитої і заломленої хвиль, відповідно,  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  і  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  – відповідні хвильові числа.

Щоб знайти співвідношення між амплітудами трьох хвиль, що визначають відбиваючу і пропускну здатність («прозорість») границі поділу, запишемо дві умови, які повинні виконуватися на межі поділу при  $x=0$ .

Перше – це умова нерозривності речовини:

$$s_1(0, t) = s_2(0, t). \quad (4.88)$$

Друге – рівність напруг:

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t), \text{ або } E_1 \varepsilon_1(0, t) = E_2 \varepsilon_2(0, t) \quad (4.89)$$

Із врахуванням (4.87) з цих умов одержуємо:

$$\begin{aligned} s_{01} + s'_{01} &= s_{02}, \\ -s_{01} E_1 k_1 + s'_{01} E_1 k_1 &= -s_{02} E_2 k_2. \end{aligned} \quad (4.90)$$

В акустиці фундаментальним є поняття імпедансу, або питомого хвильового (акустичного) опору матеріалу. Ця величина  $z$  визначається як:

$$z = \frac{\text{стискаюча напруга}}{\text{коливна швидкість}} = \frac{-\sigma}{v}. \quad (4.91)$$

Імпеданс можна легко виразити через характеристики матеріалу, скориставшись формулою (4.73):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{v}{c}. \quad (4.92)$$

Звідси

$$z = \frac{-\sigma}{v} = \frac{E}{c} = \rho c. \quad (4.93)$$

З використанням цієї величини і виразів для  $k_1$  і  $k_2$  умови (4.90) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} s_{01} + s'_{01} &= s_{02}, \\ -s_{01} z_1 + s'_{01} z_1 &= -s_{02} z_2. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Звідси одержуємо шуканий зв'язок між амплітудами хвиль:

$$\begin{aligned} s'_{01} &= \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} s_{01}, \\ s_{02} &= \frac{2}{1 + z_2/z_1} s_{01}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Для практичної мети користуються коефіцієнтами відбивання  $R$  і пропускання  $T$ , що характеризують відношення інтенсивностей відбитої і заломленої хвиль до інтенсивності падаючої хвилі. Ці коефіцієнти одержують з (4.95) із врахуванням (4.65):

$$\begin{aligned} R &= \frac{I'}{I_1} = \left( \frac{s'_{01}}{s_{01}} \right)^2 = \left( \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} \right)^2; \\ T &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_2}{z_1} \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)^2 = \frac{4(z_2/z_1)}{(1 + z_2/z_1)^2}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

де використана та обставина, що інтенсивність біжучої хвилі (див. формулу (4.65))

$$I = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2 = \frac{1}{2} z \omega^2 s_0^2 \quad (4.97)$$

залежить не тільки від амплітуди  $s_0$  і частоти  $\omega$ , але й пропорційна акустичному опору  $z$ . Слід відзначити, що формули (4.96) справедливі і для поперечних коливань.

З рис. 4.29, на якому зображені залежності (4.96), видно, що якщо  $z_1 = z_2$ , відбивання відбувається.

Тому на практиці, коли потрібно зменшити відбивання, стараються узгодити (зробити практично однаковими) хвильові опори двох середовищ.

Відзначимо також, що при  $z_2 \ll z_1$ , як і у випадку вільного кінця стержня ( $z_2$  – опір повітря), або  $z_2 \gg z_1$  (закріплений кінець),  $R \sim 1$ , тобто відбувається практично повне відбивання хвилі, що і використовувалося раніше під час розгляду відбивання в цих граничних випадках.

Відзначимо також, що при  $z_2 \ll z_1$ , як і у випадку вільного кінця стержня ( $z_2$  – опір повітря), або  $z_2 \gg z_1$  (закріплений кінець),  $R \sim 1$ , тобто відбувається практично повне відбивання хвилі, що і використовувалося раніше під час розгляду відбивання в цих граничних випадках.

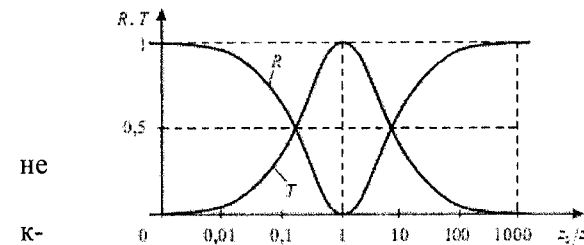


Рис. 4.29

## ЛЕКЦІЯ 5

1. Теплові коливання кристалічної ґратки твердих тіл. Акустичні фонони.
2. Об'ємні сейсмічні хвилі.
3. Поверхневі сейсмічні хвилі.
4. Хвилі в рідинах і газах.
5. Енергія, що переноситься звуковою хвилею. Поглинання звуку. Випромінювачі звуку.
6. Застосування акустичних методів. Основні характеристики звуку.
7. Закон Вебера-Фехнера. Діаграма слуху.
8. Акустичні резонатори. Деякі відомості про музичні інструменти.
9. Ефект Допплера і бінауральний ефект.
10. Інтерференція і дифракція хвиль.

### 5.1. Теплові коливання кристалічної ґратки твердих тіл. Акустичні фонони.

У твердому тілі іони здійснюють теплові коливання навколо положень рівноваги у вузлах кристалічної ґратки. Оскільки вони взаємодіють один з одним, то систему іонів потрібно розглядати як сукупність зв'язаних осциляторів. Такі теплові коливання іонів можна представити у вигляді суперпозиції стоячих звукових хвиль, частоти яких  $\omega$  лежать у діапазоні  $0 < \omega \leq \omega_N$ , де  $\omega_N$  – максимальна частота коливань, зумовлена дискретністю середовища.

Під час нагрівання кристала енергія теплових коливань збільшується. Природно, що інформацію про ці коливання можна отримати, вимірюючи теплоємність кристалів.

Якщо кожний іон розглядати як класичний осцилятор, що коливається в трьох взаємно перпендикулярних напрямках, то, у відповідності з теоремою про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності, він володів би енергією  $\varepsilon = \frac{6kT}{2}$ , де  $k$  – стала Больцмана, а  $T$  – абсолютна температура. Тут враховано, що іон, який коливається, володіє середньою кінетичною і рівною їй середньою потенціальною енергією  $\frac{kT}{2}$  по кожному з трьох ступенів вільності.

Оскільки енергія кристала, що складається з  $N$  атомів,  $U = N\varepsilon_1 = 3NkT$ , то його теплоємність за сталого об'єму рівна:

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3Nk \quad (5.1)$$

і не залежить від температури (закон Дюлонга і Пті).

Однак формула (5.1) узгоджується з експериментом лише за високих температур, а при наближенні температури до абсолютного нуля, як показує досвід,  $c_V \sim T^3$ .

Щоб пояснити таку поведінку теплоємності, А. Ейнштейн запропонував розглядати іони як незалежні осцилятори, що володіють дискретним набором значень енергії. Раніше подібна ідея була запропонована М. Планком при виведенні формули для теплового випромінювання твердого тіла. Однак Ейнштейну не вдалося отримати закон  $T^3$ .

Дійсно, як вже говорилося, теплові коливання іонів можна представити як суперпозицію нормальних коливань, або мод системи зв'язаних осциляторів. Кожна мода частоти  $\omega$  володіє енергією  $\hbar\omega$ ,

де  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h = 6,67 \cdot 10^{-34}$  Дж/с – стала Планка).

Якщо взяти до уваги, що у твердому тілі можливе поширення поздовжньої хвилі з частотою  $\omega$  і двох поперечних хвиль тієї ж частоти, що мають два різних взаємоперпендикулярних напрямки зміщення атомів (дві різних поляризації), то з урахуванням розмірів кристала і його дискретної структури можна підрахувати число мод у кристалі. Такий підрахунок було вперше здійснено П. Дебаєм, і тому ці хвилі отримали назву дебаєвських.

Слід підкреслити, що на відміну від класичного представлення, під час розрахунку енергії кристалу мода представлена як квантовий об'єкт, що володіє дискретним набором значення енергії (набором енергетичних рівнів)

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega, \quad (5.2)$$

де  $n$  – ціле число.

За термодинамічної рівноваги імовірність  $P_n$  збудження моди зменшується зі збільшенням її енергії  $\varepsilon_n$  (або числа  $n$ ) у відповідності з розподілом Больцмана:  $P_n \sim e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$ . Під час нагрівання кристалу імовірність  $P_n$  зростає, отже, збільшується і енергія кристалу. Під час підрахування останньої Дебаєм була введена

характеристична температура (температура Дебая)  $\theta_D$ , з допомогою рівності

$$k\theta_D = \hbar\omega_N \quad (5.3)$$

Зазвичай  $\theta_D$  лежить у інтервалі  $(10^2 \div 10^3) \text{К}$ . За  $T \gg \theta_D$  справедливий закон Дюлонга і Пті, а за  $T \ll \theta_D$  теплоємність  $c_V \sim T^3$ .

Співвідношення (5.2) для енергії коливань у моді частоти  $\omega$  аналогічне до виразу для енергії фотонів (квантів світла). Це дозволяє розглядати моду як квазічастинку, яку називають тепловим фононом. Введення цього нового поняття є досить корисним і, з математичної точки зору, значно полегшує аналіз теплових коливань кристалічної ґратки. Уявлення про фононний газ у твердому тілі широко використовують під час опису таких властивостей, як теплоємність, теплопровідність, теплове розширення, електричний опір та ін. У фізиці використовують й інші квазічастинки: плазмон (хвиля електронної густини), магنون (хвиля перемагнічування), полярон (електрон + пружна деформація), екситон (хвиля поляризації середовища). Ці квазічастинки є модами відповідних коливань.

## 5.2. Об'ємні сейсмічні хвилі

Важливим прикладом хвиль у пружному середовищі є сейсмічні хвилі, що виникають у обмеженій області простору (епіцентрі) розміром у декілька кілометрів і поширюються на величезні відстані під поверхнею Землі. Ці хвилі бувають поперечними (хвилі зсуву) і поздовжніми (стиску і розтягу) і можуть пронизувати всю планету. Це дозволяє (аналогічно рентгенівському аналізу) досліджувати внутрішню будову Землі. Цим займається окрема наука, що називається сейсмологією. Тривалий час сейсмологія, одним із засновників якої є російський фізик Б.Б. Голіцин, була наукою про землетруси і сейсмічні хвилі. На сьогодні сейсмологія займається аналізом різноманітних рухів у товщі Землі.

Швидкість поздовжніх хвиль приблизно в 1,7 рази більша за швидкість поперечних, тому ці хвилі реєструються на сейсмограмах послідовно: спочатку приходять більш швидкі поздовжні (первинні), які називаються  $P$ -хвилями, а потім поперечні (вторинні), що називаються  $S$ -хвилями. Крім того, сейсмографи реєструють і помітний фон, або шуми, пов'язані як з роботою промислових установок і транспорту, так і з сейсмічними хвилями (мікросеймами), що генеруються штормами і хвилюванням у океані.

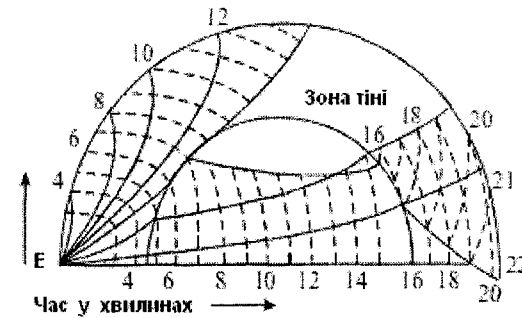


Рис.5.1

Якщо б швидкості  $P$ - і  $S$ -хвиль у Землі не змінювалися з глибиною, то хвилі поширювалися б по прямих лініях (прямих сейсмічних променях). У дійсності швидкості поздовжньої  $c_p$  і поперечної  $c_s$  хвиль зростають із заглибленням у надра Землі, за виключенням невеликої зони на глибинах 50-250 км. Тому сейсмічні хвилі викривлюються. В сейсмології експериментально визначають годограф – час  $\tau$  пробігу сейсмічних хвиль як функцію епіцентральної відстані  $\Delta$  (відстані в градусах або кілометрах по дузі великого кола між епіцентром і приймачем хвиль;  $1^\circ = 111 \text{ км}$ ). Зрозуміло, що функція  $\tau = \tau(\Delta)$  пов'язана з розподілом швидкості хвилі  $c(l)$  ( $l$  – глибина), і пошук цього розподілу викликає інтерес під час дослідження внутрішньої будови Землі.

На рис. 5.1 показано шляхи  $P$ -хвиль і вказано час їх поширення в надрах Землі від епіцентра  $E$  до встановленого на поверхні приймача. Пунктирні лінії (ізохрони) вказують час приходу  $P$ -хвиль у різні точки земної поверхні. Внаслідок викривлення променів хвилі не потрапляють у чималу зону тіні.

Дослідження залежності швидкостей  $c_p(l)$  і  $c_s(l)$  від глибини дозволило зробити висновок, що Земля поділяється на три основні частини: кору, мантію і ядро. Кора відділена від мантії різкою сейсмічною межею, на якій стрибкоподібно зростає густина  $\rho$  та швидкості  $c_p$  і  $c_s$ . Ця межа була відкрита 1909 року югославським сейсмологом Мохоровичем і носить назву границі  $M$ . Товщина земної кори, що лежить вище границі  $M$ , змінюється від величини  $\approx 10 \text{ км}$  (під шаром води в океанічних областях) до декількох десятків кілометрів у гірських районах континентальних областей. Нижче кори в інтервалі до глибин  $\sim 2900 \text{ км}$  розташована силікатна оболонка, або мантія Землі. Існування ядра з густиною, що перевищує середню

густину Землі  $\sim 5,5 \text{ г/см}^3$ , впливає з того факту, що густина земної кори (від  $\sim 2,8 \text{ г/см}^3$  у гранітів до  $\sim 3,0 \text{ г/см}^3$  у базальтів) істотно менша цієї середньої густини.

На рис.5.2 показані глибинні залежності швидкостей  $p$  – і

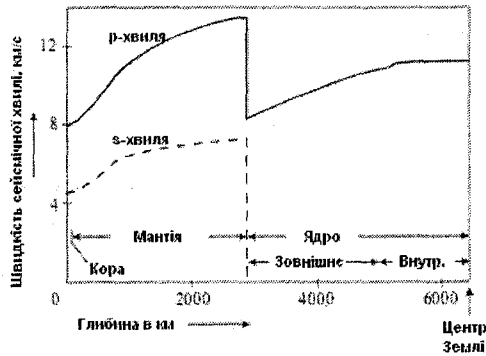


Рис.5.2

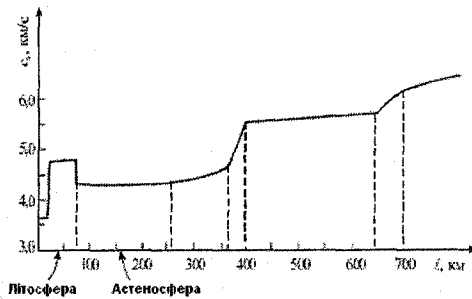


Рис.5.3

швидкості  $p$  – хвиль під час переходу з мантиї в ядро є наслідком того, що зовнішня частина ядра рідка. Ядро складається в основному із заліза і невеликої домішки легких елементів. У зовнішньому ядрі плавне зростання швидкості  $c_p$  пов'язане зі збільшенням тиску в напрямку до центра Землі. У внутрішньому ядрі швидкість  $p$  – хвиль не змінюється, оскільки тиск у напрямку до центра Землі зростає мало. Природно, що поперечні  $s$  – хвилі у зовнішній (рідкій) частині ядра поширюватися не можуть.

В останні роки була виявлена детальна структура мантиї Землі. На рис. 5.3 наведений розподіл швидкості  $c_s(l)$  у мантиї, з якого можна зробити висновок про її структуру. Земна кора і верхній шар мантиї до глибини  $l \sim 70$  км утворюють зовнішню зону – літосферу, або літосферну плиту. Ця жорстка плита розколота приблизно на 10 великих плит, по границях якої розташовано більшість джерел землетрусів. Під жорсткою літосферною плитою на глибинах  $70 < l < 250$  км розташований шар підвищеної текучості, що

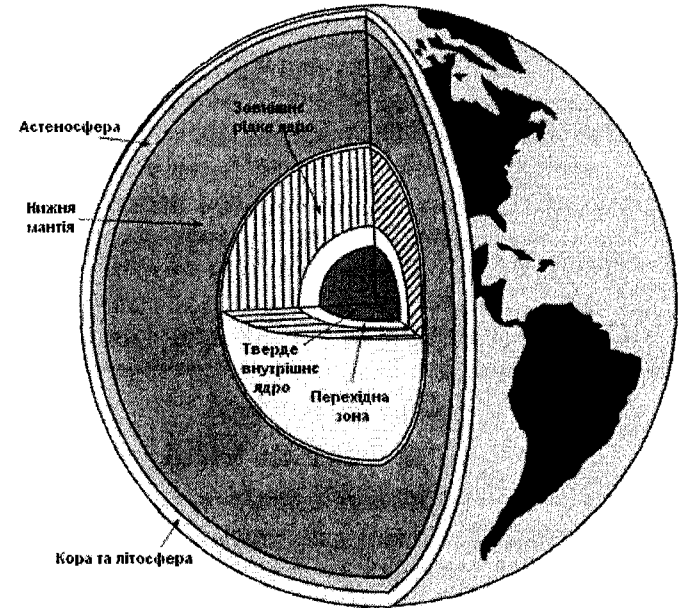


Рис. 5.4

називається астеносферою. Внаслідок її малої в'язкості ( $\mu \approx 10^{20} \div 10^{21} \text{ Пуаз}$ ) літосферні плити наче плавають у «астеносферному океані» Землі. В астеносфері, де температура речовини близька до температури плавлення, швидкості хвиль понижені. Починаючи з  $l \approx 250$  км, швидкості зростають внаслідок збільшення тиску. При  $l \approx 400$  км зростання швидкості є результатом фазових переходів (мінерали олівіни переходять у шпінельну модифікацію), а на глибинах  $400 < l < 650$  км швидкість зростає через зростання тиску. На глибинах  $650 < l < 700$  км розташована друга зона фазових



переходів, однак залишається відкритим питання про те, які конкретно переходи відповідальні за сильне зростання швидкості.

На рис. 5.4 зображено розріз Землі, побудований у відповідності з сучасними сейсмічними даними.

Під час поширення об'ємної сейсмічної хвилі в тривимірному випадку амплітуда зменшується з відстанню  $r$ , пройденою хвилею від точкового джерела. Рівняння такої хвилі, що називається сферичною, має вигляд:

$$s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{-\alpha r} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (5.4)$$

З цього рівняння видно, що амплітуда хвилі зменшується, поперше, внаслідок геометричного розходження в усі боки від епіцентра; це зменшення обернено пропорційне до пройденої хвилею відстані  $r$ . По-друге, амплітуда хвилі зменшується внаслідок переходу частини енергії в тепло внаслідок неідеальної пружності земних надр. Це послаблення характеризується коефіцієнтом згасання  $\alpha$ . Коефіцієнт  $\alpha$  пропорційний до частоти сейсмічної хвилі, тому короткі хвилі згасають швидше ніж довгі. Розрахунок показує, що для коефіцієнтів згасання  $S$  – і  $P$  – хвиль можуть бути записані співвідношення:

$$\alpha_s (\text{км}^{-1}) \approx 1 \cdot 10^{-3} \nu (\text{Гц})$$

$$\alpha_p (\text{км}^{-1}) \approx 0.25 \cdot 10^{-3} \nu (\text{Гц}).$$

Частоти об'ємних сейсмічних хвиль лежать у інфразвуковому діапазоні  $0.1 < \nu < 10 \text{ Гц}$ . Отже, для хвиль з частотою  $\nu \sim 1 \text{ Гц}$  зменшення амплітуди в  $e$  разів у поперечної хвилі відбувається на шляху  $\sim 1000 \text{ км}$ , а в поздовжньої хвилі – на шляху  $\sim 4000 \text{ км}$ .

Крім біжучих хвиль, в об'ємі Землі можуть спостерігатися і стоячі хвилі, коли вся Земля коливається як єдине ціле з різними частотами, що відповідають різним модам коливань. Конфігурації цих мод належать до двох основних типів: сфероїдальні коливання (найбільший період  $\sim 55$  хв., частота  $\sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ) та торсіонні (крутильні) коливання (найбільший період  $\sim 44$  хв., частота  $\sim 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ). В даний час спектр цих коливань нараховує декілька тисяч експериментально виявлених частот.

### 5.3. Поверхневі сейсмічні хвилі

Поряд з об'ємними, по Землі можуть поширюватися і поверхневі хвилі. Ці хвилі бувають двох типів і називаються хвилями Релея і Лява. Вони були теоретично передбачені Дж. Релеєм 1855 р. і Лявом 1911 р. В Релеєвській хвилі частинки ґрунту зміщуються у вертикальній площині, що орієнтована вздовж напрямку поширення хвиль, а траєкторії їх руху являють собою еліпси. У хвилі Лява частинки рухаються в горизонтальній площині в напрямі, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі.

Довжини поверхневих хвиль  $\lambda$ , що збуджуються під час землетрусів, лежать у інтервалі від десятків до багатьох сотень кілометрів. У поверхневих хвилях амплітуда зменшується з глибиною, і на глибині  $l > \lambda$  коливання мантиї малі. Тому з допомогою таких хвиль можна досліджувати тільки поверхневі шари Землі.

Внаслідок двовимірного поширення, амплітуда поверхневих хвиль зменшується повільніше (обернено пропорційно  $\sqrt{r}$ ) ніж у об'ємних хвиль. Тому такі хвилі можуть по декілька разів проходити навколо земної кулі. Швидкість поверхневих хвиль залежить від частоти, тобто вони володіють дисперсією.

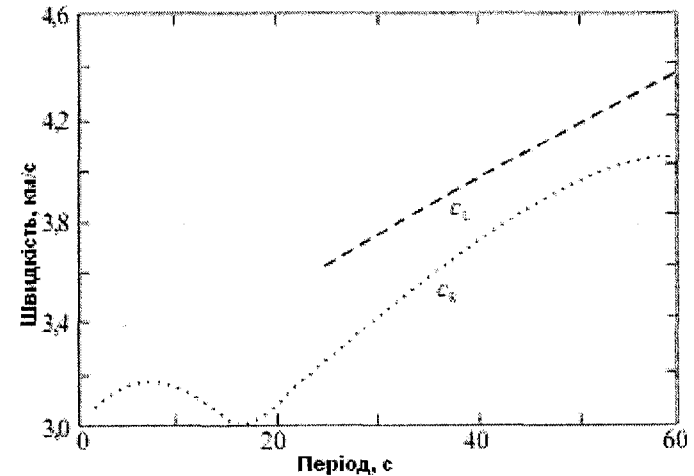


Рис. 5.5

На рис.5.5 показані залежності групових швидкостей хвиль Релея  $c_R$  і Лява  $c_L$  від періоду коливання хвилі. Легко бачити, що хвилі Лява поширюються швидше ніж хвилі Релея. Відзначимо, що

на рис.5.5 показані  $c_R$  і  $c_L$  тільки для хвиль, амплітуди яких певним чином зменшуються з глибиною. Можливі поверхневі хвилі з іншими розподілами амплітуд з глибиною.

Сейсмічні хвилі можна викликати за допомогою вибуху. Не великі вибухи використовують у інженерній сейсмології для проведення розвідки корисних копалин (нафти, руди, газу тощо). Підземні ядерні вибухи створюють інтенсивні хвилі, які можна реєструвати на будь-яких відстанях. Це дає можливість надійно проводити контроль над підземними ядерними випробуваннями.

#### 5.4. Хвилі в рідинах і газах

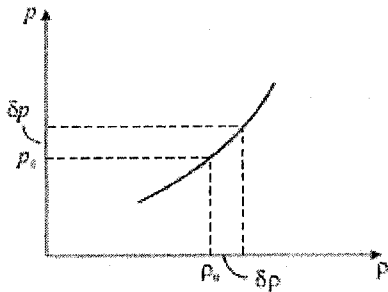


Рис. 5.6

У рідинах і газах можливі лише деформації стиску і розтягу, тому в них можуть поширюватися тільки поздовжні хвилі. Хоча ми раніше і розраховували швидкість поширення збурень у газі, проте не менше розрахуємо швидкість поширення поздовжніх хвиль з використанням хвильового рівняння. Останнє можна отримати з

(4.74), в якому  $\sigma_n$  слід замінити величиною  $-\delta p = p_0 - p$ , де  $p$  – тиск у хвилі,  $p_0$  – рівноважний тиск у середовищі,  $\delta p$  – збурення тиску. Тому ми можемо записати

$$dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = [-\delta p(x + dx, t) + \delta p(x, t)]S. \quad (5.5)$$

Щоб з (5.5) отримати хвильове рівняння, необхідно знати матеріальне рівняння середовища

$$p = p(\rho). \quad (5.6)$$

Якісно ця залежність зображена на рис.5.6. За дуже малих збурень густини  $|\delta p| \ll p_0$  з (5.6) отримуємо:

$$\delta p = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} \cdot \delta \rho = c^2 \delta \rho, \quad (5.7)$$

де введено позначення

$$c = \sqrt{\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}}. \quad (5.8)$$

З урахуванням (4.69) і (4.72) збурення густини  $\delta \rho$  в (5.7) пов'язані зі зміщенням  $s$  співвідношенням:

$$\delta \rho = -\varepsilon \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (5.9)$$

Отже, (5.7) набуває вигляду:

$$\delta \rho = -\rho_0 c^2 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (5.10)$$

Підставляючи (5.10) у (5.5), записуючи  $dm = \rho_0 S dx$  і переходячи до границі при  $dx \rightarrow 0$ , отримаємо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (5.11)$$

з якого видно, що швидкість хвилі задається виразом (5.8) і не залежить від частоти (дисперсія відсутня). Природно, що з такою швидкістю поширюються хвилі з довжиною хвилі  $\lambda$ , що перевищує довжину вільного пробігу молекул у газі або міжатомні відстані в рідинах  $l$ . У цьому випадку рідину і газ можна розглядати як суцільні середовища. Для хвиль високих частот, коли  $\lambda \sim l$ , виникає дисперсія, а хвилі з довжиною  $\lambda < l$  взагалі поширюватися не можуть.

Пружні хвилі в рідинах і газах, як і у твердих тілах, називаються акустичними, а розділ фізики, що їх вивчає – акустикою. Частоти цих хвиль лежать у діапазоні від частин герца (інфразвук) до  $10^{13}$  Гц (гіперзвук). Цим частотам відповідають довжини хвиль  $\lambda$  від десятків кілометрів до декількох ангстрем. Значення швидкостей (фазових і групових) для різних середовищ лежать у діапазоні від долей до десятків км/с.

Для повітря матеріальне рівняння (5.6) є рівнянням адиабати і в акустиці, зазвичай, записується у вигляді:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (5.12)$$

де  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – показник адиабати.

Тоді з (5.8) швидкість хвилі (в акустиці використовують термін «швидкість звуку») в газі буде рівна

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \quad (5.13)$$

де  $\mu$  – молярна маса газу.

Швидкість звуку залежить, отже, від роду газу і за порядком величини співпадає з середньою швидкістю теплового руху молекул.

Для рідини матеріальним рівнянням є напівемпіричне рівняння Тага:

$$p = p_{\text{ат}} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma - 1 \right], \quad (5.14)$$

де  $p_{\text{ат}}$  – характерний внутрішній тиск, зумовлений міжмолекулярною взаємодією (він складає для більшості рідин без бульбашок і різних включень декілька тисяч атмосфер). Параметр  $\Gamma$  має порядок кількох одиниць (наприклад, для води  $\Gamma=7$ ).

У таблиці наведені значення швидкості звуку, виміряні в деяких газах (за температури  $t = 0^\circ \text{C}$ ) і рідинах.

Гази	Швидкість звуку, м/с	Рідини	Швидкість звуку, м/с
Водень	1265	Вода ( $t = 20^\circ \text{C}$ )	1490
Гелій	965	Етиловий спирт ( $t = 20^\circ \text{C}$ )	1180
Азот	334	Водень ( $t = -252^\circ \text{C}$ )	1127
Повітря	331	Кисень ( $t = -183^\circ \text{C}$ )	911
Кисень	316	Азот ( $t = -196^\circ \text{C}$ )	867
Вуглекислий газ	216	Гелій ( $t = -269^\circ \text{C}$ )	180

### 5.5. Енергія, що переноситься звуковою хвилею.

Інтенсивність звуку задається формулою (4.65)

$$I = \frac{1}{2} c \rho_0 \omega^2 s_0^2 \quad (5.15)$$

і пропорційна квадрату частоти. Тому, під час переходу в область високих частот, полегшується завдання отримання великих інтенсивностей, необхідних, наприклад для спостереження нелінійних ефектів. Залежно від вирішуваної задачі в акустиці використовують хвилі з інтенсивністю від  $10^{-8}$  Вт/см<sup>2</sup> до  $10^6$  Вт/см<sup>2</sup>.

Для практичної мети інтенсивність  $I$  виражають через збуджуючий тиск  $\delta p$ , який називають також «звуковим тиском». Найпростіше таку залежність можна отримати з (5.15) із врахуванням, що амплітуда швидкості коливання частинок  $v_0 = \omega s_0$ . З іншого боку, у відповідності з акустичним законом Ома ця швидкість рівна

$$v_0 = \frac{(\delta p)_0}{\rho_0 c}, \quad (5.16)$$

де  $(\delta p)_0$  – амплітуда коливань збудрень тиску  $\delta p$ . Тому

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}. \quad (6.17)$$

Виконаємо деякі прості оцінки.

1. Поблизу потоку газу, що витікає із сопла реактивного двигуна літака, амплітуда коливань звукового тиску  $(\delta p)_0 = 300$  Па (згадаємо, що  $p_0 = 10^5$  Па і  $(\delta p)_0 \ll p_0$ . Такий тиск знаходиться на порозі болювого відчуття.) Оскільки акустичний хвильовий опір повітря  $z = \rho_0 c = 41$  см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>, то  $v_0 = 73$  см/с. Якщо прийняти, що частота  $\nu = 10^3$  Гц (хоча з турбіни випромінюється багаточастотний шум), то амплітуда зміщення  $s_0 = \frac{v_0}{2\pi\nu} = 0.01$  см. Отже, зміщення частинок повітря навіть за такого сильного звуку виявляється малим.

Звуки на межі чутності на частоті  $\nu = 10^3$  Гц (вухо людини дуже чутливе до цієї частоти) мають амплітуду звукового тиску  $(\delta p)_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па, а зміщення частинок повітря  $s_0 = 0,8 \cdot 10^{-9}$  см. Доцільно відзначити, що сучасні методи вимірювання зміщень у принципі дають можливість зареєструвати коливання з амплітудою  $s_0 \sim 10^{-16}$  см.

В ультразвукових хвилях з частотами порядку декількох мегагерц інтенсивності можуть досягати декількох сотень Вт/см<sup>2</sup>, а з використанням фокуруючих пристроїв – навіть більше десятка кВт/см<sup>2</sup>. Це призводить до появи величезних прискорень частинок середовища, в якому поширюється ультразвукова хвиля. Наприклад, під час поширення у воді хвилі з частотою  $\nu = 10^6$  Гц та інтенсивністю  $I = 100$  Вт/см<sup>2</sup> амплітуда прискорення  $a_0 = \omega^2 s_0$ , згідно з (5.15), рівна

$$a_0 = \omega \sqrt{\frac{2I}{c\rho_0}} = 6,3 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \sim 10^5 g, \quad (5.18)$$

що на п'ять порядків перевищує прискорення вільного падіння  $g$ . Врахування появи таких величезних прискорень особливо важливе в біологічних дослідженнях з використанням ультразвуку.

### 5.5.1. Поглинання звуку

Наявність в'язкості і теплопровідності середовища призводить до втрати енергії звукової хвилі, і ця енергія витрачається на нагрівання середовища. Хвиля тиску  $\delta p(r, t)$ , а також хвилі зміщення  $s(r, t)$  і швидкості  $v(r, t) = \frac{\partial s}{\partial t}$  з поширенням згасають. Тут  $r$  – радіус-вектор, що задає положення точки в тривимірному просторі, в якій фіксуються збурення тиску, зміщення частинок та їх швидкість. У випадку гармонічної хвилі, що поширюється в одному напрямі (вздовж осі  $Ox$ ), збурення тиску записують у вигляді

$$\delta p(x, t) = (\delta p)_0 e^{-\alpha x} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad (5.19)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт згасання. Це рівняння характеризує плоску хвилю (збурення  $\delta p$  у площині  $x = \text{const}$  однакове). В цьому випадку відсутнє геометричне розходження хвилі. Амплітуда цієї хвилі  $(\delta p)_0 e^{-\alpha x}$  експоненціально зменшується з пройденою відстанню. У відповідності з (5.17) інтенсивність хвилі рівна

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c} e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-2\alpha x}, \quad (5.20)$$

де  $I_0 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}$  – початкова інтенсивність хвилі. Якщо знехтувати втратами, пов'язаними з теплопровідністю, то коефіцієнт  $\alpha$ , згідно з гідродинамікою, рівний

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3} \mu, \quad (5.21)$$

де  $\mu$  – в'язкість рідини або газу. Важливо значить, що  $\alpha \sim \omega^2$ . Цим пояснюється той факт, що різкий звук пострілу, в спектрі якого присутній широкий набір частот, в міру поширення трансформується в більш м'який, оскільки в спектрі залишаються переважно низькі частоти. Відзначимо, що поглинання звуку у воді помітно менше ніж у повітрі, а в твердих тілах ще менше ніж у воді. Дуже низьким поглинанням звуку вирізняються такі кристали як сапфір, топаз, берил, ніобат літію та інші.

Відзначимо також, що поглинання звуку є головною перешкодою, яка обмежує застосування багатьох речовин на високих частотах.

### 5.5.2. Випромінювачі звуку

Випромінювачі пружних хвиль, що застосовують у акустиці, можна виділити у дві великі групи.

До першої належать випромінювачі-генератори; коливання в них збуджуються через наявність перешкоди на шляху сталого потоку газу чи рідини (сирени, свистки, генератори Гартмана). Такі генератори застосовують у основному в діапазоні частот до 30–40 кГц. Вони відзначаються високим коефіцієнтом перетворення кінетичної енергії потоку в акустичну (до 50%), простотою конструкції та експлуатації, дешевизною. Інтенсивність звуку безпосередньо поблизу від випромінювача може досягати 10 Вт/см<sup>2</sup>. Недоліками цих випромінювачів є широкий спектр випромінюючих частот, нестабільність випромінюючої потужності, неможливість отримання звукових коливань заданої форми.

Іншу групу випромінювачів складають електроакустичні перетворювачі. Свою назву вони отримали тому, що перетворюють електричні коливання в механічні коливання якого-небудь твердого тіла, яке і випромінює в навколишнє середовище акустичні хвилі. Найбільш поширені електроакустичні перетворювачі, такі як електродинамічні випромінювачі, магнітострикційні і п'єзоелектричні перетворювачі, являють собою лінійні пристрої, завдяки чому вони збуджують акустичну хвилю тієї ж форми, що і електричний сигнал. Крім того, ці пристрої оборотні, тобто можуть працювати і як випромінювачі, і як приймачі звуку.

В діапазоні чутних частот широке розповсюдження отримали електродинамічні випромінювачі, принцип дії яких ґрунтується на взаємодії змінного електричного струму з магнітним полем (телефони, гучномовці). В магнітострикційних перетворювачах використовують ефект магнітострикції – деформації твердого тіла в магнітному полі.

В ультразвуковому і гіперзвуковому діапазонах (до 10<sup>10</sup> Гц) найбільш широко використовують п'єзоелектричні перетворювачі, принцип дії яких ґрунтується на зворотному п'єзоелекті – деформації тіла під дією електричного поля.

На рис. 5.7 схематично показаний найпростіший перетворювач, основу якого складає п'єзопластинка, вирізана спеціальним

чином з монокристалу кварцу, ніобату літію ( $LiNbO_3$ ) або іншого матеріалу.

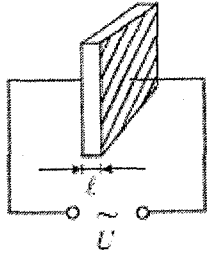


Рис.5.7

До протилежних поверхонь пластинки (звичай, металізованих або покритих металевими електродами) прикладають змінну напругу  $U$  з частотою  $\nu$ . Товщина пластинки  $l$  буде при цьому періодично змінюватися з тією ж частотою, причому ця зміна не перевищує декількох мікрон. Вібруючі поверхні пластинки приводять у рух повітря, що з ними стикається. Найбільша амплітуда коливань буде за резонансу, коли на товщині

$l$  вкладається непарне число півхвиль:

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}; n = 1, 3, 5 \dots \quad (5.22)$$

Відзначимо, що за парного  $n$  на електродах виникали б електричні заряди одного знака, що неможливо. Резонансні частоти рівні

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l} \quad (5.23)$$

Наприклад, для п'єзокварцу за швидкості поздовжніх хвиль  $c = 5700$  м/с і товщині пластинки  $l = 1$  мм резонансні частоти рівні

$$\nu_n = n \cdot 2850 \text{ кГц.} \quad (5.24)$$

Найбільшу частоту коливань має хвиля основної частоти ( $n=1$ ), тому п'єзовипромінювачі використовують, як правило, на основній частоті.

На частотах до декількох мегагерц широке використання отримали перетворювачі з п'єзокераміки. П'єзокераміка являє собою полікристалічний сегнетоелектричний матеріал (тверді розчини на основі  $BaTiO_3 - CaTiO_3, PbTiO_3 - PbZnO_3$  та інші), що володіють після поляризації в електричному полі стійкими і сильними п'єзоелектричними властивостями. З п'єзокераміки можна виготовляти випромінювачі найрізноманітнішої форми (у вигляді пластин, стержнів, кілець тощо). З допомогою перетворювачів сферичної або циліндричної форми отримують сфокусований ультразвуковий пучок, у фокусі якого інтенсивність звуку досягає  $10^5 - 10^6$  Вт/см<sup>2</sup>.

На частотах порядку десятків і сотень мегагерц товщина  $l$  стає настільки малою, що виготовити перетворювач можна тільки в жорсткому з'єднанні зі звукопроводом – масивним шматком звуко-

провідного матеріалу. В цьому випадку на добре відполіровану поверхню звукопроводу напилують металеву плівку (один електрод), до якої приварюють товстці (порядку 1 мм) пластинку п'єзоелектрика. Потім цю пластинку зішліфовують до потрібної товщини  $l$ , після чого на неї наносять другий електрод.

На частотах порядку 1 ГГц товщина п'єзоперетворювача складає  $l \sim 1$  мкм. Виготовлення таких перетворювачів являє собою складну технологічну проблему. В цьому частотному діапазоні застосовують плівкові перетворювачі, що отримують напиленням на торець звукопроводу п'єзоелектричних плівок з таких матеріалів як  $CdS, ZnS, ZnO$  та інші. Сучасні технології дозволяють створювати перетворювачі з коефіцієнтом перетворення електричної енергії в акустичну до 90% і потужність хвилі, що досягає декількох ват.

## 5.6. Застосування акустичних методів

Для сучасного рівня розвитку акустики характерне надзвичайно широке застосування акустичних методів для розв'язку різноманітних задач не тільки у фізиці, а також у вимірювальній та інформаційній техніці, промисловості, медицині, біології, військовій справі і т.д.

Перший (в порядку історичного становлення) важливий прикладний напрямок у акустиці пов'язаний з отриманням, за допомогою акустичних хвиль, інформації про будову і властивості речовини, про процеси, що в ній відбуваються. Методи, які використовують у цих випадках, ґрунтуються на вимірюванні швидкості поширення і коефіцієнта поглинання ультразвуку на різних частотах ( $10^4 - 10^5$  Гц у газах і  $10^5 - 10^{10}$  Гц у рідинах і твердих тілах). Такі дослідження дозволяють отримати інформацію про пружні та міцнісні характеристики матеріалів, про ступінь чистоти і наявність домішок, про розміри неоднорідностей, що викликають розсіювання і поглинання хвиль, і т.д. Велика група методів ґрунтується на ефектах відбивання і розсіювання пружних хвиль на границі між різними середовищами, що дозволяє виявляти присутність сторонніх тіл і їх місцезонашування. Ці методи лежать в основі таких напрямків як гідролокація, неруйнівний контроль виробів і матеріалів, медична діагностика. Застосування акустичної локації в гідроакустиці має виняткове значення, оскільки звукові хвилі є єдиним видом хвиль, що поширюються на великі відстані в природному водному середовищі. Як різновид дефектоскопії, яку широко застосовують у промисловості, можна розглядати ультразвукову діагностику в медицині.

Навіть за невеликої щільності біологічних тканин відбувається відбивання ультразвуку. Тому ультразвукова діагностика дозволяє виявляти утворення, що не виявляються за допомогою рентгенівських променів. У такій діагностиці використовують частоти ультразвуку порядку  $10^7$  Гц; інтенсивність звуку при цьому не перевищує  $0,5 \text{ мВт/см}^2$ , що вважається цілком безпечним для організму. На сьогодні розвиток дефектоскопії призвів до створення акустичної томографії. В цьому методі з допомогою набору приймачів ультразвуку або одного скануючого приймача реєструють пружні хвилі, що розсіюються в різних напрямках, а потім з використанням комп'ютерної обробки сигналів на екрані дисплею формують об'ємне зображення внутрішньої структури досліджуваного об'єкта.

Іншим важливим напрямком акустики є активний вплив ультразвуку на речовину. Такий вплив широко використовують у промисловій технології для поверхневої обробки деталей, зварки, інтенсифікації хімічних процесів тощо. В рідинах основну роль за такого впливу відіграє кавітація – утворення в інтенсивній звуковій хвилі пульсуючих бульбашок. Зляскування бульбашок супроводжується потужним гідродинамічним збуренням і сильним локальним розігріванням речовини, в результаті чого руйнується поверхня твердого тіла, що знаходиться в області кавітації. Застосування ультразвуку для впливу на живий організм у медицині ґрунтується на ефектах, що виникають у біологічних тканинах під час проходження через них акустичних хвиль. За помірної інтенсивності звуку (до  $1 \text{ Вт/см}^2$ ) коливання частинок середовища викликають мікротравми тканин, а поглинання звуку – локальне розігрівання, що застосовують в ультразвуковій терапії. При великих інтенсивностях сильне нагрівання і кавітація викликають руйнування тканин. Для хірургічних операцій використовують сфокусований ультразвуковий пучок, який дозволяє провадити локальні руйнування в глибинних структурах (наприклад, мозку чи нирці) без ушкодження навколишніх тканин. У хірургії застосовують ультразвук з частотами  $0,5\text{--}5 \text{ МГц}$ , інтенсивність якого у фокусі досягає  $10^3 \text{ Вт/см}^2$ .

### 5.6.1. Основні характеристики звука

Пружні хвилі в повітрі, що мають частоту в межах від 20 Гц до 20 кГц, викликають у людини відчуття звука. У вузькому розумінні пружні хвилі в будь-якому середовищі, що мають частоту в цьому інтервалі, називаються чутними звуковими хвилями, або просто звуком. Хвилі з частотами  $\nu < 20$  Гц називаються інфразвуком, а з

частотами  $\nu > 20$  кГц – ультразвуком. Інфразвук і ультразвук людське вухо не сприймає.

В дійсності, найбільш низькі і найбільш високі частоти інтервалу чутних звуків доступні, як правило, тільки дуже молодим людям. З віком цей інтервал звужується, причому чоловіки починають втрачати чутливість до високих частот раніше, ніж жінки. Після 50 років люди частіше всього втрачають здатність до сприйняття звуків з частотами  $\nu > 12$  кГц.

Звуки розрізняються за висотою, тембром і гучністю.

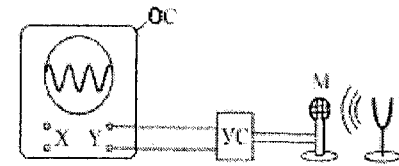


Рис. 5.8

Будь-який реальний звук, як правило, являє собою не просте гармонічне коливання, а є накладанням коливань з певним набором частот. Щоб переконатися в цьому, підключимо мікрофон М через підсилювач УС до входу Y осцилографа ОС (рис.5.8) і будемо реєструвати осцилограми різних джерел звуку. Найбільш близькими до гармонічного є звук камертона К – осцилограма за своїм виглядом дуже близька до синусоїди.

Із звуків, що вимовляються, найбільше подібні до гармонічних голосні звуки. Однак уже тут помітна відмінність осцилограм від синусоїди, що вказує на складний характер голосних звуків. Значно складніший вигляд характерний для осцилограм приголосних звуків. Принципово, можливо, використовуючи набір резонаторів або комп'ютерну обробку осцилограм, здійснити гармонічний аналіз звуку, тобто встановити той набір частот, який присутній у даному звуці. Вимірюючи інтенсивність кожної з гармонік, можна отримати акустичний спектр.

Якщо в результаті такого аналізу виявиться, що звук складається з коливань із дискретними частотами  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  і так далі, то спектр називається лінійчатим. На рис. 5.9а показано приклад такого спектра, де по осі ординат відкладені інтенсивності  $I$  простих (гармонічних) звуків. Може бути й інша ситуація, коли у звуці присутні коливання всіх частот у деякому інтервалі  $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$ . Такий спектр, зображений на рис. 5.9б, називається суцільним.

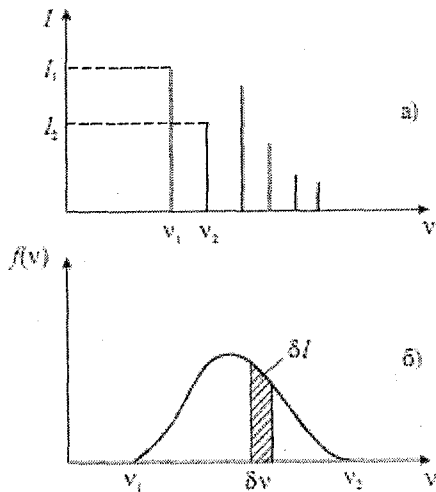


Рис. 5.9

площі під кривою  $f(\nu)$ . Суцільним спектром, зазвичай, володіють шуми.

Коливання з лінійчатим спектром викликають відчуття звуку з більш-менш певною висотою. Такий звук називається тональним. Висота тонального звуку визначається основною (найменшою) частотою  $\nu_1$ . Коливання з частотами  $\nu_2, \nu_3$  і так далі називаються обертонами. Співвідношення інтенсивностей основного тону  $I_1$  і обертонів  $I_2, I_3, \dots$  визначають тембр звуку, надають йому певне забарвлення. У відсутності обертонів тональний звук називають чистим тоном. Камертони дають чистий тон і їх використовують під час настройки музичних інструментів.

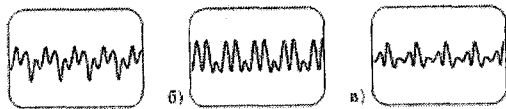


Рис. 5.10

По осі ординат тут відкладена так звана спектральна густина інтенсивності звуку

$$f(\nu) = \frac{dI}{d\nu}$$

У цьому випадку можна говорити про інтенсивність  $dI = f(\nu)d\nu$  звуку, що займає вузький частотний інтервал  $d\nu$ . Ця інтенсивність чисельно рівна площі, заштрихованій на рисунку. Природно, що повна інтенсивність  $I$  складного звуку із суцільним спектром буде рівна

З кожного музичного інструмента добувають звуки з характерним набором гармонік. Це дозволяє на слух розрізнити звуки одного тону (з однаковою основною частотою  $\nu_1$ ), що добувають з флейти, труби, роялю та ін. На рис. 5.10 показані осцилограми для тональних звуків з частотою  $\nu_1 = 440$  Гц (нота «ля» першої октави) флейти (а), голосу (б) і труби (в). Всі осцилограми мають однаковий період повторення  $T = 1/440$  с, однак сильно відрізняються за своїм виглядом. Це вказує на те, що основні частоти  $\nu_1 = 1/T$  у всіх звуків співпадають, однак звуки розрізняються своїм спектральним складом.

На рис.5.11 зображена клавіатура роялю із вказанням

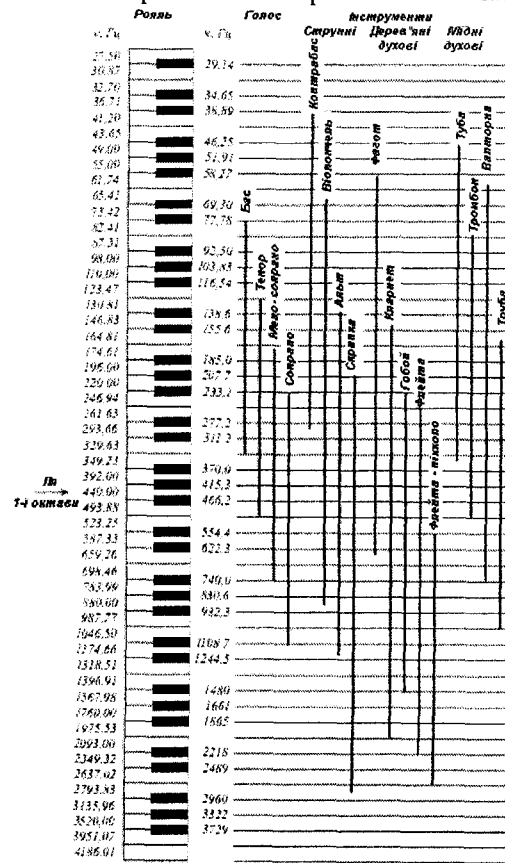


Рис. 5.11

основних частот клавіш, а також наближені діапазони основних частот для інших інструментів і голосів.

### 5.6.2. Закон Вебера-Фехнера. Діаграма слуху

Визначення гучності звуку ґрунтується на психофізичному законі, встановленому 1846 року У.-Г.Вебером, який заклав основи «психометрії», тобто кількісних вимірювань відчуттів. Оскільки відчуття є суб'єктивним процесом, то абсолютні вимірювання сили відчуттів неможливі. Вебер переніс проблему в область вимірювання відносних величин і шукав мінімальні відмінності у відчуттях, які можна

зафіксувати.

Суть закону Вебера полягає в тому, що мінімальна зміна інтенсивності звуку  $\Delta I$ , яку розрізняє людське вухо, не залежить від

інтенсивності звука  $I$  чутного звука і складає приблизно 10% від її величини:

$$\frac{\Delta I}{I} = 10^{-1}. \quad (5.22)$$

Крім слухових відчуттів, Вебер вивчав також дотик і зір і встановив, що для дотику мінімальна різниця у відчуттях ваги вантажу не залежить від величини цього вантажу і складає  $\sim 1/30$ , а для зору мінімальна сприймаюча різниця в інтенсивності світла також не залежить від інтенсивності і складає  $\sim 1/100$ .

Виходячи із закону Вебера, можна побудувати шкалу рівня відчуття звука, або шкалу гучності  $\beta$ , записавши таке співвідношення:

$$\frac{\Delta I}{I} = A d\beta, \quad (5.26)$$

де  $d\beta$  – приріст гучності, зумовлений приростом інтенсивності,  $A$  – коефіцієнт, що визначає масштаб шкали. Інтегруючи (5.26), отримуємо:

$$\ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} = A\beta. \quad (5.27)$$

Для того, щоб викликати звукове відчуття, хвиля повинна володіти деякою мінімальною інтенсивністю  $I_{\text{пор}}$  і відповідно деяким мінімальним звуковим тиском  $\delta p_{\text{пор}}$ , який називають порогом чутності. Природно, що при  $I = I_{\text{пор}}$  гучність  $\beta = 0$ . Отже,

$$\beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (5.28)$$

Якщо вибрати  $A = \ln 10 \approx 2,301$ , то (5.28) переписеться у вигляді

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (5.29)$$

Це співвідношення називається законом Вебера-Фехнера і відображає той факт, що чутливість вуха людини до звука змінюється як логарифм інтенсивності звука. Аналогічні до (5.29) співвідношення були встановлені Е.-Г. Вебером і Г.-Т. Фехнером і для інших відчуттів, що мають органами чуттів людини, - дотику і зору (Фехнеру належить більша кількість робіт до «психофізики», яку він означав як «точну науку про функціональні залежності між тілом і

душею, спільне – між матеріальним і духовним, фізичним і психічним світом»).

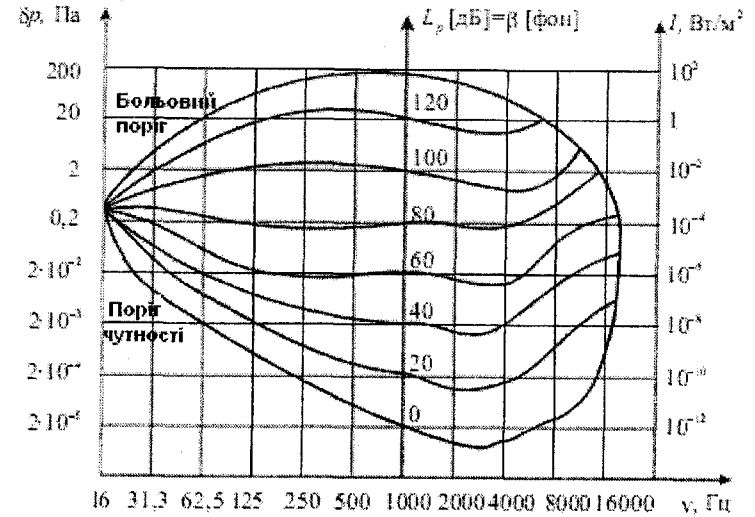


Рис. 5.12

На рис.5.12 зображена «діаграма слуху», на якій показано області частот і звукових тисків, а також рівні інтенсивності звуків, що сприймає людське вухо. Нормальне вухо чує тільки ті звуки, які лежать усередині цієї області. Нижня границя області характеризує залежність порогу чутності від частоти, а верхня – поріг больового відчуття, коли хвиля перестає сприйматися як звук, викликаючи у вусі відчуття болю і тиску. Відзначимо, що людське вухо є унікальним приймачем акустичних хвиль, який сприймає звуки, що різняться за інтенсивністю на 12-15 порядків у області частот близько 1 кГц, де діаграма слуху має найбільший вертикальний переріз. З діаграми видно, що за однакового звукового тиску і однакової інтенсивності звуку різної частоти можуть сприйматися, як звуки різної гучності  $\beta$ . Тому в акустиці, крім суб'єктивної величини – гучності звука  $\beta$ , що оцінюється на слух, використовують і об'єктивні характеристики звука, які можуть бути безпосередньо виміряні, – рівень звукового тиску  $L_p$  і рівний йому рівень інтенсивності. Оскільки згідно з (5.17) інтенсивність пропорційна квадрату звукового тиску, обидві ці характеристики визначаються формулою:



$$L_p = 2 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{нор}}} = \lg \frac{I}{I_{\text{нор}}} \quad (5.30)$$

У принципі,  $L_p$  – величина безрозмірна, однак для числового значення логарифма використовують назву «бел» (на честь винахідника телефону Г. Белла). На практиці, зазвичай, використовують одиницю в 10 разів меншу – «децибел», так що (5.30) набуде вигляду:

$$L_p [\text{дБ}] = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{нор}}} = 10 \lg \frac{I}{I_{\text{нор}}} \quad (5.30a)$$

У визначенні  $L_p$  прийнято використовувати стандартний поріг чутності  $\delta p_{\text{нор}} = 2 \cdot 10^{-5}$  Па, а відповідне йому значення мінімальної інтенсивності  $I_{\text{нор}}$  залежить, згідно з (5.17), від середовища, в якому поширюється звук, і для повітря при нормальних умовах складає  $I_{\text{нор}} = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>.

Для гучності звука  $\beta$  використовують одиницю під назвою «фон». Гучність тону у фонах для будь-якої частоти дорівнює рівню звукового тиску в децибелах для тону з частотою  $\nu = 1$  кГц, що сприймається як звук тієї ж гучності.

На рис.5.12 зображені також криві для рівнів однакової гучності за різних рівнів звукового тиску та інтенсивності, з яких видно, що при  $\nu = 1$  кГц  $\beta = L_p$ , а для інших частот, що сприймає вухо  $L_p$  і  $\beta$  можуть помітно відрізнятись.

## 5.8. Акустичні резонатори

В ряді випадків виникає необхідність виділення гармонічних складових зі складних звукових коливань. З такою задачею доводиться стикатися під час спектрального аналізу складних звуків, створюючи вузькосмугові приймачі звука, чутливі до певної частоти, музичні інструменти та ін. Для такої мети використовують акустичний резонатор – пристрій, що володіє однією чи декількома власними частотами.

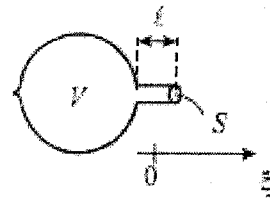


Рис. 5.13

Типовим прикладом акустичної системи, що реагує тільки на одну частоту, є посудина сферичної форми з вузькою горловиною (рис.5.13), яка називається резонатором Гельмгольца. В задній частині резонатора є ще один маленький отвір у вигляді сопла, що служить для виявлення коливань. Повітря в горловині є масою, що коливається. Під час зміщення цієї маси, наприклад, у бік сферичного об'єму  $V$ , повітря в цьому об'ємі злегка стискається, і сила надлишкового тиску, що виникає, відіграє роль повертаючої сили. Якщо площа горловини рівна  $S$ , а її довжина –  $l$ , то маса стовпа, що коливається, рівна  $m = \rho_0 l S$ , де  $\rho_0$  – густина незбуреного повітря. Під час зміщення маси  $m$  на відстань  $\xi \ll l$  (додатній напрям осі  $O\xi$  показано на рисунку) густина повітря змінюється на величину  $\delta \rho$ , що задовольняє рівність

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} = - \frac{S \cdot \xi}{V} \quad (5.31)$$

Згідно з (5.7) надлишковий тиск рівний

$$\delta p = c^2 \delta \rho = - \frac{\rho_0 c^2 S}{V} \xi \quad (5.32)$$

Отже, рівняння руху стовпа повітря набуде вигляду:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \delta p \cdot S$$

або

$$\rho_0 S l \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \frac{\rho_0 c^2 S^2}{V} \xi \quad (5.33)$$

Звідси знаходимо, що власна частота коливань стовпа повітря в горловині, або частота резонатора Гельмгольца, рівна

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{S}{Vl}} \quad (5.34)$$

Коли об'єм резонатора  $V = 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, площа отвору горловини  $S = 1$  см<sup>2</sup> і її довжина  $l = 1$  см, швидкість звука  $c = 334$  м/с, для частоти  $\nu_0$  одержимо величину

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{334}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}} \approx 168 \text{ Гц}, \quad (5.35)$$

що відповідає діапазону звукових частот, який сприймає людське вухо.

Залежність власної частоти коливань резонатора від його параметрів і перш за все від об'єму  $V$  ефективно демонструється наступним дослідом (рис.5.14). Перед динаміком  $D$ , що підключений до генератора звукової частоти  $\Gamma$ , встановлюється декілька резонаторів, які відрізняються своїми розмірами. Коло заднього отвору кожного з резонаторів поміщується легкий паперовий пропелер-вертушка, що може обертатися навколо вертикальної осі. Під час плавного збільшення частоти звукового генератора буде зростати частота акустичної хвилі, що випромінюється динаміком у напрямку резонаторів і відіграє роль гармонічної вимушуючої сили.

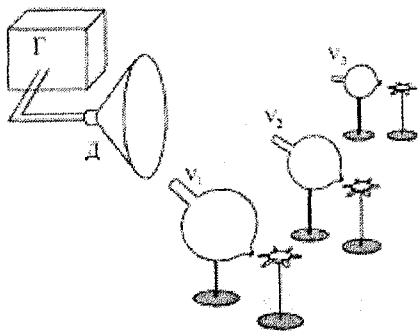


Рис. 5.14

При послідовному співпадінні частоти цієї хвилі  $V$  з власними частотами  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  і  $\nu_3$  резонаторів тиск повітря в їх об'ємах буде коливатися з максимальною (резонансною) амплітудою. Із задніх отворів резонаторів битимуть сильні струмені повітря, що фіксується за початком обертання вертушок спочатку у великого, потім у середнього і, нарешті, у найменшого резонатора,

який має найбільшу власну частоту  $\nu_3$ .

Доцільно відзначити, що за частоти резонатора  $\nu_0 \sim 10^2$  Гц довжина збуджуючої його хвилі  $\lambda = \frac{c}{\nu_0} \approx 3,3$  м. Ця довжина значно

більша за характерні розміри резонатора:  $\lambda \gg V^{\frac{1}{3}}$ . Отже, не може бути й мови про стоячу акустичну хвилю частоти  $\nu_0$  в самій сферичній порожнині.

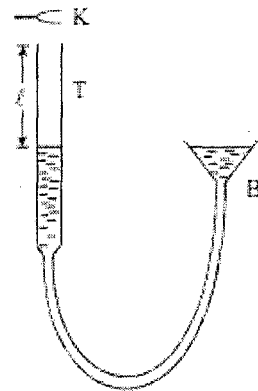


Рис. 5.15

Однак і в самій порожнині можна збудити стоячі хвилі з довжиною  $\lambda \leq V^{\frac{1}{3}}$  і частотою  $\nu = \frac{c}{\lambda} \geq \frac{c}{V^{\frac{1}{3}}}$ . Якщо харак-

терний розмір резонатора  $V^{\frac{1}{3}} \sim 10$  см, то частота цих хвиль  $\nu > 3000$  Гц. Такий резонатор буде володіти великою кількістю власних частот у кілогерцовому діапазоні.

Найбільш простим у виготовленні акустичним резонатором є дерев'яний ящик чи труба, відкриті або з одного, або з двох протилежних боків.

Виконаємо наступний дослід. Заповнимо водою нижню частину вертикальної трубки  $T$ , використовуючи систему сполучених посудин, і піднесемо до її верхнього кінця камертон  $K$ , що звучить на частоті  $\nu$  (рис.5.15). Переміщуючи лійку  $B$  вгору, можна добитися підсилення тонального звука, що створюється системою «камертон+частина труби, заповнена повітрям». Це підсилення буде спостерігатися під час співпадіння частоти  $V$  з однією з власних частот  $\nu_p$  резонатора – труби з повітрям довжиною  $l$ , «закритої» біля нижнього кінця. Власні частоти стоячих хвиль у такому резонаторі легко підрахувати, якщо врахувати, що на нижньому кінці повинен бути вузол зміщень, а на верхньому – пучність. Це можливо тільки для хвиль  $\lambda_p$ , що задовольняють умову:

$$l = (2p - 1) \frac{\lambda_p}{4}, \quad p = I, II, III, \dots,$$

коли на довжині труби вкладається непарна кількість чвертей довжин хвиль. Відповідно частоти коливань будуть рівні

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{4l} (2p - 1). \quad (5.36)$$

Хоча підсилення звука можливе для декількох довжинах повітряного стовпа  $l$ , однак найбільш ефективним воно буде для  $\nu = \nu_1$

$$\text{або } l = \frac{c}{4\nu}.$$

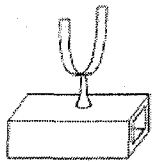


Рис. 5.16

Особливо підкреслимо, що резонатор створює більш сприятливі умови для звучання камертона, дозволяючи перерозподілити, а отже і підсилити звук у певних напрямках. Саме тому в дослідах камертони встановлюють на дерев'яний ящик, відкритий з одного кінця і налаштований на частоту камертона (рис.5.16).

### 5.8.1. Деякі відомості про музичні інструменти

Дерев'яні деки музичних інструментів виконують функції резонаторів, забезпечуючи хороші умови звучання. Частоти струнних інструментів не залежать від резонатора. Основна частота звука  $\nu_1$  і частоти обертонів залежать тільки від маси, натягу і довжини струни. Однак тембр звука залежить від способу збудження і від реакції резонатора, а також ефективності, з якою резонатор «підтримує» ці частоти і посиляє відповідні хвилі в оточуючий простір.

У духових інструментах формування звука пов'язане з наявністю автоколивань і залежить як від конструкції інструменту, так і від способу, з допомогою якого повітря вдувається в нього. Як ілюстрацію, якісно розглянемо виникнення коливань у органній трубі, розріз якої зображено на рис.5.17а.

Повітря, яке рівномірно поступає в мундштук М (рис.5.17б), проходить через вузьку щілину Щ, за якою утворюється турбулентний потік. Вихрова доріжка, що утворюється за такого потоку, є джерелом «щілинного» тону, основна частота якого обернено пропорційна до періоду слідування вихорів. По суті система «мундштук + щілина» являє собою складну автоколивну систему, теоретичний опис якої – серйозна проблема.

Вихори, що виходять із щілини, почергово проходять ліворуч і праворуч від язичка Я, викликаючи його вібрацію. Язичок виявляє періодичний вплив на стовп повітря в трубі. Імпульси стиску, що виникають у стовпі, добігши до відкритого кінця труби, відбиваються у вигляді імпульсів розрідження і повертаються до щілини через час  $T = \frac{2l}{c}$  ( $l$  – довжина

труби,  $c$  – швидкість звука в повітрі), управляючи потраплянням повітря через щілину. Отже, основна частота  $\nu_1 = \frac{1}{T}$  формується резонаторною системою. Однак можна вдувати повітря так, щоб у трубі одночасно існували імпульси стиску, і ми почуємо звучання труби на частоті першого обертону (подвоєній частоті).

Органні труби, зазвичай, конструюють для звучання на основній частоті. В духових інструментах збуджуючим вібратором (аналогом язичка Я в органній трубі) можна управляти, щоб посилати в трубу один або більше імпульсів, перш ніж перший відіб'ється від відкритого кінця духового інструмента.

Звуки, які вимовляє людина, пов'язані з тим, що голосові зв'язки гортані вібрують під тиском рухомого повітря, а гортань є об'ємним резонатором. Як правило, у чоловіків об'єм гортані більший, ніж у жінок, тому у відповідності з формулою (5.34) в чоловічого голосу більш низькі частоти.

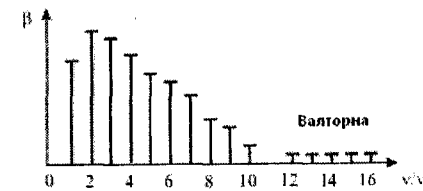
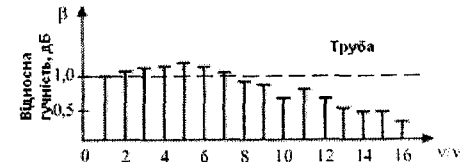


Рис.5.18

На рис.5.18 показані спектри звуків, що добуваються на трубі і валторні з однаковою основною частотою  $\nu_0 = 440$  Гц. По осі ординат відкладена гучність  $\beta$  (нормована на гучність хвилі основної частоти). У спектрі звука валторни відсутні частоти  $\nu > 10$  кГц, тому її звук більш приглушений, ніж звук труби.

Закінчуючи опис основних принципів дії джерел звука і музичних інструментів, доцільно згадати про два акустичні ефекти, з проявом яких ми практично зустрічаємося щодня.

### 5.9. Ефект Доплера

Спостерігаючи за рухомим поїздом чи автомобілем, ми помічаємо, що висота тону їх звукового сигналу постійно змінюється. Це є одним із проявів ефекту Доплера, якщо полягає в зміні частоти

звука під час відносного руху джерела і приймача. Розглянемо це явище дещо детальніше.

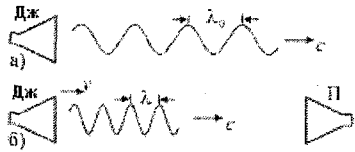


Рис.5.19

Нехай джерело ДЖ (рис.5.19а) випромінює монохроматичну акустичну хвилю з частотою  $\nu_0$ . Тоді довжина цієї хвилі, що поширюється в повітрі зі швидкістю  $c$ , буде рівна:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}. \quad (5.37)$$

Якщо тепер джерело рухатиметься зі швидкістю  $v < c$  у напрямку поширення хвилі, то хвиля буде «відриватися» від джерела зі швидкістю  $c - v$ , і її довжина зменшиться (рис.5.19б):

$$\lambda = \frac{c - v}{\nu_0}. \quad (5.38)$$

Досягнувши нерухомого приймача П, ця хвиля діятиме на нього з частотою

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \nu_0 \frac{c}{c - v} = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (5.39)$$

яка буде більшою за вихідну частоту  $\nu_0$ . Під час руху джерела в протилежному напрямі, ця частота зменшиться. Саме цю зміну частоти тону сигналу ми фіксуємо під час наближення і наступного віддалення поїзда чи автомобіля.

Зміна частоти матиме місце також і під час руху приймача П, однак фізична причина цієї зміни полягає в тому, що хвиля з довжиною  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$  буде потрапляти в приймач зі швидкістю  $c + v$  (якщо приймач рухається назустріч хвилі). Отже, частота впливу на приймач буде рівна

$$\nu = \frac{c + v}{\lambda_0} = \nu_0 \frac{c + v}{c} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (5.40)$$

і перевищуватиме вихідну частоту.

В силу відмінності фізичних причин, що призводять до зміни частоти під час руху джерела і приймача, відрізняються і формули (5.39) і (5.40). Однак при  $v \ll c$ , як неважко переконалися, з

точністю до членів порядку  $\left(\frac{v}{c}\right)^2$  формула (5.39) може бути записана у вигляді (5.40).

Під час одночасного руху назустріч одне одному джерела зі швидкістю  $\nu_{дж}$  і приймача зі швидкістю  $\nu_n$  обидві формули можна об'єднати в одну

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{\nu_n}{c}}{1 - \frac{\nu_{дж}}{c}}. \quad (5.41)$$

При віддаленні джерела чи приймача у формулі (5.41) слід змінити знак за відповідної швидкості.

Коли швидкості  $\nu > c$ , то формуються ударні хвилі, і формули, що описують зміну частоти, стають несправедливими.

### 5.9.1. Бінауральний ефект

Цей ефект являє собою психофізіологічне явище, що полягає в злитному сприйнятті звуків, які приймаються правим і лівим вухом. Він дає можливість визначити напрямок на джерело звука і відіграє суттєву роль у музичній акустиці (стереофонія).

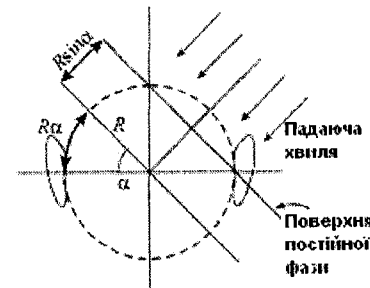


Рис.5.20

Рисунок 5.20 ілюструє цей ефект. Якщо хвиля падає під кутом до лінії, що сполучає обидва вуха (пунктиром зображений контур радіуса  $R$ , який імітує голову людини), то хвиля досягне лівого вуха пізніше ніж правого, а час затримки складе величину

$$\Delta t = \frac{R \sin \alpha + R \alpha}{c}, \quad (5.42)$$

де  $R \alpha$  – криволінійний шлях, що проходить звукова хвиля під час огинання голови людини за рахунок дифракції.

Крім того, оскільки голова частково екранує звук, то амплітуда хвилі, що досягає лівого вуха, дещо зменшується. Спільна дія цих двох факторів дає людині можливість визначити напрям на джерело

звуку. Якщо період коливань звукової хвилі співмірний з часом затримки:

$$\Delta t \leq \frac{T}{2}, \quad (5.43)$$

то хвилі, що падають під кутом, викликають коливання барабаних перетинок лівого і правого вуха зі зсувом фаз  $0 \leq \Delta\varphi \leq \pi$ , за яким людина і визначає напрям приходу хвилі.

Якщо покласти  $R=10$  см,  $\sin \alpha \approx 1$ , то для хвиль з періодом  $T < 10^{-3}$  с ( $\nu \geq 1$  кГц) умова (5.43) не виконується, і визначити напрям за зсувом фази стає проблематичним. Однак залишається можливість порівняти амплітуди хвиль, що досягають обох вух, і тим самим визначити кут  $\alpha$ .

### 5.10. Інтерференція хвиль

У попередній лекції ми отримали рівняння стоячої хвилі (4.34), що описує коливання шнура (або іншого середовища), по якому назустріч один одному поширюються дві гармонічні хвилі однакової частоти  $\omega$  і амплітуди  $s_0$ . В результаті накладання хвиль відбувається перерозподіл у просторі об'ємної густини енергії коливань. У вузлах, де хвилі зустрічаються у протифазі, ця енергія рівна нулю. В пучностях, навпаки, хвилі додаються в фазі, і енергія максимальна. Явище накладання хвиль, що призводить до перерозподілу в просторі об'ємної густини енергії коливань, носить назву інтерференції.

Інтерференція є одним із фундаментальних явищ, притаманних хвилям різної природи (акустичним, електромагнітним, хвилям на поверхні рідини, акустичним та ін.). Вона була добре відома ще за часів Ньютона, який здійснив чудовий дослід, що призвів до відкриття закономірностей інтерференційної картини і отримав назву «кільця Ньютона». Ці закономірності легко прослідковуються в дослідах з інтерференції капілярних хвиль на поверхні рідини. В наступній лекції буде дано опис характеру руху частинок рідини в таких хвилях і буде встановлено зв'язок між частотою, довжиною хвилі і швидкістю її поширення.

Один з таких дослідів виглядає так (рис.5.21). У неглибоку кювету К з великою площею основи наливають воду. Хвилі на її поверхні збуджують за допомогою вібратора В, що приводить у періодичний рух дві маленькі кульки  $O_1$  і  $O_2$ , які є точковими джерелами хвиль. Ці кульки злегка занурені у воду і здійснюють

синхронні коливання з частотою  $\nu \sim 10^2$  Гц у напрямку, перпендикулярному до поверхні води. Від кожного з точкових джерел поширюється хвиля з довжиною  $\lambda \sim 3$  мм і швидкістю  $c \sim 40$  см/с. Гребені цих хвиль у фіксований момент часу зображені на рисунку пунктиром. В результаті накладання хвиль утворюється інтерференційна картина, яку зручно спостерігати в стробоскопічному освітленні (освітлюючи її спалахами світла з частотою  $\nu \sim 10^2$  Гц). За такого освітлення хвилі будуть здаватися практично нерухомими.

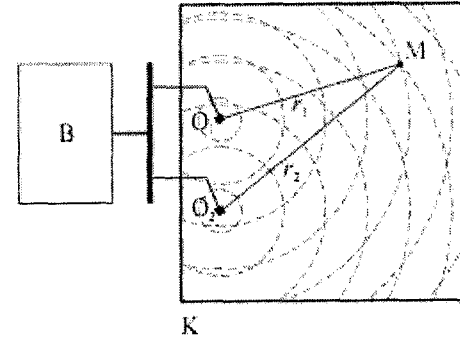


Рис. 5.21

Найбільш сильні збурення поверхні будуть спостерігатися в тих місцях, де хвилі додаються у фазі. Кажуть, що тут розташовуються інтерференційні максимуми. В місцях, куди хвилі приходять у протифазі, поверхня буде практично незбурена: тут знаходяться інтерференційні мінімуми. Збурення по-

верхні в довільній точці М залежить від різниці ходу  $\Delta r = r_2 - r_1$ , де  $r_1$  і  $r_2$  – відстані від точки М до відповідного точкового джерела. Дійсно, зміщення  $s$  поверхні рідини в точці М можна розглядати як результат накладання двох синусоїдальних (тобто монохроматичних) хвиль, що пройшли відстані  $r_1$  і  $r_2$ :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t - kr_1 - \varphi_1) + s_0 \sin(\omega t - kr_2 - \varphi_2). \quad (5.44)$$

Тут припускається, що обидві хвилі в точці М мають однакові амплітуди (хоча це і не зовсім вірно) і постійні фазові добавки  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , так що їх різниця  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  не залежить від часу.

Виконуючи в (5.44) сумування, одержуємо:

$$s(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (5.45)$$

Якщо покласти для спрощення  $\Delta\varphi = 0$ , то положення інтерференційних максимумів визначається з умови

$$\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right) = \pm 1. \quad (5.46)$$

Оскільки  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то останній умові відповідає різниця ходу

$$\Delta r = r_2 - r_1 = m\lambda, \quad (5.47)$$

де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Кожному максимуму прийнято присвоювати порядковий номер, що визначається відповідним числом  $m$  (максимум нульового, першого, мінус першого і т.д. порядку). Інтерференційні мінімуми розташовуються в тих місцях, де

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (5.48)$$

і так само нумеруються ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Розглянута інтерференційна картина відповідає ідеалізованій ситуації. Реальні хвилі навіть у кращому випадку є квазімонохроматичними. Для таких хвиль амплітуди  $s_0$  і фази  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  є функціями часу, що повільно змінюються (помітні зміни цих функцій відбуваються за час  $\tau \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$ ). Однак, якщо обидві кульки приводяться в коливальний рух одним вібратором, різниця фаз  $\Delta\varphi$  у (5.45) залишається сталою, положення інтерференційних максимумів задається формулою (5.47) і не залежить від часу.

У практично важливих випадках джерела інтерферуючих хвиль можуть бути незалежні. В нашому досліді це можна здійснити, якщо використати два вібратори, до кожного з яких прикріплено маленьку кульку. Тоді різниця фаз  $\Delta\varphi$  буде також змінюватися на масштабі часу  $\tau$ , і її можна записати у вигляді

$$\Delta\varphi(t) = \overline{\Delta\varphi} + \delta(t), \quad (5.49)$$

де  $\overline{\Delta\varphi}$  – середнє за часом значення різниці фаз,  $\delta(t)$  – знакозмінна функція. Вважаючи для простоти в (5.45)  $s_0 = const$ , приходимо до висновку, що інтерференційна картина (як єдине ціле) буде достатньо хаотично зміщуватися в різні боки. Якщо таку картину знімати на кіноплівку з часом експозиції кадру  $\Delta t \gg \tau$ , то на кожному кадрі буде зафіксована усереднена за час  $\Delta t$  «розмазана» картина. Вона може стати зовсім нерозрізною, якщо інтерференційні максимуми будуть зміщуватися на величини, рівні або більші за відстань між сусідніми максимумами. Така ситуація доволі часто зустрічається під час інтерференції світлових хвиль. Щоб повного «змазування» картини не відбулося, очевидно, необхідним є виконання наступної умови:

$$|\delta(t)| \ll 2\pi. \quad (5.50)$$

Чим краще виконується ця нерівність, тим вища якість картини. Так, наприклад, для світлових хвиль  $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-12}$  с і за візуального спостереження (для органів зору  $\Delta\tau \sim 0,1$  с) ми завжди реєструємо «розмазану» інтерференційну картину.

З якістю картини напряму пов'язане поняття когерентності інтерферуючих хвиль. Когерентність характеризується безрозмірним коефіцієнтом  $\gamma$  (ступенем когерентності), який може змінюватися в межах  $0 < \gamma < 1$ . Чим вища якість картини, тим більший ступінь когерентності. Для монохроматичних хвиль  $\gamma = 1$ .

### 5.10.1. Дифракція хвиль

У спрощеному розумінні під дифракцією розуміють коло явищ, в яких проявляється відступ від прямолінійного поширення хвиль. Таке розуміння, взагалі кажучи, неправильне, оскільки прямолінійне поширення хвиль є тільки певним наближенням. Дійсно, специфіка будь-якого хвильового руху проявляється в тому, що цей рух, виникнувши спочатку в обмеженій області, намагається поширитися однаковою мірою в усі боки. Вибором спеціальної форми цієї області можна добитися того, що хвиля побіжить, переважно, в деяких напрямках. Уздовж одного з таких напрямів побіжить фрагмент хвилі, який з певною точністю можна вважати таким, що рухається прямолінійно.

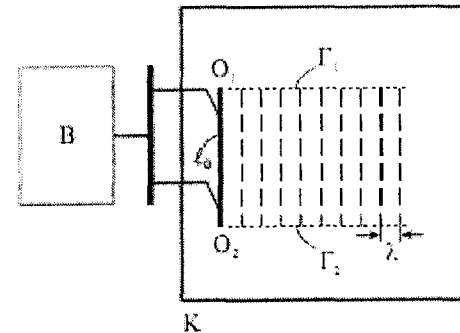


Рис. 5.22

Для спостереження основних закономірностей дифракції видозмінимо характер збудження хвиль на поверхні води в описаному раніше досліді. В якості джерела хвилі замість кульок будемо використовувати пластину  $O_1O_2$ , довжина якої  $l_0 = (3 \div 5)$  см, тобто значно перевищує дов-

жину хвилі  $\lambda \sim 3$  мм (рис.5.22). В результаті по поверхні води побіжить «плоска» хвиля в напрямі, перпендикулярному до пластини. Чітко спостерігаються дві прямолінійні границі  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ , що відділяють збудрену хвилю і гладку поверхню води. Для цієї останньої частини

можна застосувати запозичений з оптики термін: «область геометричної тіні». Саму воду часто називають хвильовим пучком, або променем. У цьому експерименті можна вважати, що хвиля поширюється прямолінійно і не заходить у область тіні. Це пов'язано з тим, що розмір її хвильового фронту  $l_0 \gg \lambda$ .

Зменшимо тепер цей розмір. Це найпростіше здійснити, якщо паралельно до пластини  $O_1O_2$  встановити дві вертикальні стінки  $C_1$  і  $C_2$ , відстань  $l$  між якими можна змінювати (рис.5.23).

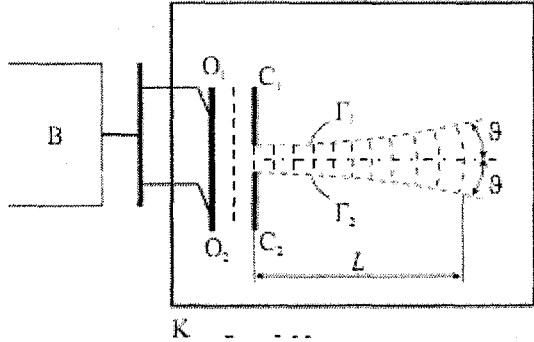


Рис. 5.23

Якщо зробити  $l \leq 5\lambda \approx 15$  мм, то хвиля почне поступово заходити в область тіні, а її фронт почне викривлюватися. На деякій характерній відстані  $L$  хвильовий пучок отримає помітне кутове розходження і далі буде поширюватися по частинах поверхні,

обмеженої кутом  $2\theta$ . При зменшенні отвору  $l$  між стінками кут  $2\theta$  збільшиться, а відстань  $L$  зменшиться. Це відхилення від прямолінійного поширення є результатом дифракції і особливо проявляється тоді, коли  $l \sim \lambda$ .

Оцінимо величини  $\theta$  і  $L$ , використовуючи підхід, запропонований французьким ученим О. Френелем у XIX столітті для пояснення дифракції світлових хвиль. Згідно з Френелем, ділянку фронту падаючої хвилі в отворі між стінками можна розглядати як ланцюжок з  $N \gg 1$  близько розташованих однакових точкових джерел  $O_1, O_2, \dots, O_N$  (рис. 5.24).

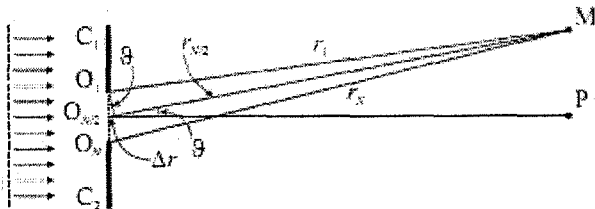


Рис. 5.24

Збурення в будь-якій точці  $M$  поверхні води є результат інтерференції  $N$  хвиль від цих, так званих «вторинних» джерел і залежить від різниці ходу всіх інтерферуючих хвиль. У практично важливих випадках відстані  $r_1, r_2, \dots, r_N \gg l$ , тому відрізки  $O_1M, O_2M, \dots, O_NM$  можна вважати паралельними. Зрозуміло, що в точку  $P$ , яка лежить на осі хвильового пучка, хвилі, що інтерферують, приходять у фазі, і збурення поверхні в ній буде максимальним. Навпаки, в точці  $M$  хвилі можуть погасити одна одну, якщо різниця ходу  $\Delta r = r_N - r_1$  між

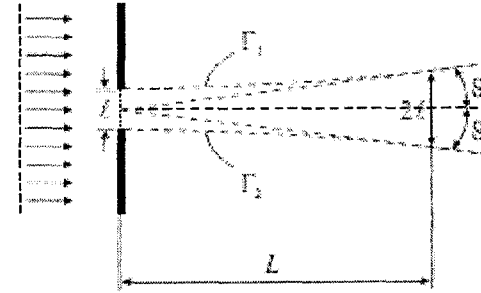


Рис. 5.25

хвилями крайнього джерела  $O_1$  і середнього  $O_{\frac{N}{2}}$  буде рівна  $\frac{\lambda}{2}$ . Оскільки ця різниця, як видно з рис. 5.24, рівна  $\frac{l}{2} \sin \theta$ , то

$$\Delta r = \frac{l}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}. \quad (5.51)$$

Аналогічно, у протифазі будуть приходити хвилі і від інших пар джерел  $(O_2, O_{\frac{N}{2}+1}; O_3, O_{\frac{N}{2}+2}; \dots; O_{\frac{N}{2}-1}, O_N)$ . Кажуть, що в точці  $M$  буде спостерігатися перший максимум дифракційної картини. Неважко написати умову, подібну до (5.51), і для інших мінімумів. Однак, як показує строгий аналіз, більш як 90% всієї енергії переноситься хвилею в межах кута  $2\theta$ . Тому на рис. 5.23 границі  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  досить умовні і окреслюють тільки основну, найбільш енергомістку частину пучка.

Для оцінки дифракційної розбіжності хвильових пучків використовується кут  $\theta$ , який при  $l \gg \lambda$  оцінюється згідно з (5.51) за формулою

$$\theta \approx \frac{\lambda}{L}. \quad (5.52)$$

Таку розбіжність пучок отримує на деякій характерній відстані  $L$ . Її можна легко оцінити з рис.5.25, на якому пунктиром зображені асимптоти до границь  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ . Будемо умовно вважати, що на відстані  $L$  поперечний розмір пучка подвоївся і став рівним  $2l$ . Тоді, врахувавши (5.52), можна записати:

$$g = \frac{l}{L} = \frac{\lambda}{l}. \quad (5.53)$$

Звідси

$$L = \frac{l^2}{\lambda}. \quad (5.54)$$

Величина  $L$  називається дифракційною довжиною пучка з довжиною хвилі  $\lambda$  і поперечним розміром  $l$ . Вона визначає масштаб відстаней, на яких розвивається помітна дифракція пучка.

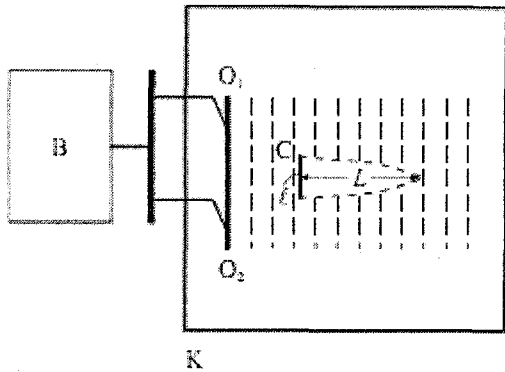


Рис. 5.26

Зробимо деякі оцінки. У досліді, зображеному на рис.5.22,  $l=5\text{ см}$ ,  $\lambda=3\text{ мм}$  і  $L\sim 80\text{ см}$ . Це означає, що в кюветі дифракція просто не встигає помітно

розвинути. За зменшення  $l$  (рис.5.23) до величини  $l=5\lambda=15\text{ мм}$  дифракційна довжина пучка  $L=7,5\text{ см}$ , і дифракція стає чітко спостережувана.

Якщо на шляху хвильового пучка помістити перешкоду – стінку С (рис.5.26), то зразу за стінкою буде тінь, однак хвиля,

пройшовши відстань  $\sim L = \frac{l^2}{\lambda}$ , обігне перешкоду. Ілюстрацією до

сказаного є, наприклад, можливість почути звуковий сигнал автомобіля, знаходячись позаду невеликої будови. Однак за багатоповерховий будинок звук практично не проникає.

## ЛЕКЦІЯ 6

1. Хвилі на поверхні рідини. Гравітаційні хвилі.
2. Капілярні хвилі.
3. Хвилі цунамі.
4. Внутрішні гравітаційні хвилі.
5. Поширення акустичних хвиль скінченної амплітуди.
6. Лінійний і нелінійний режими поширення.
7. Відокремлені хвилі (солітони).

### 6.1. Хвилі на поверхні рідини. Гравітаційні хвилі

Багато хто з нас можуть довго милуватися поверхнею моря чи ріки, по якій перекочуються хвилі. Народжені вітром, вони поширюються потім за рахунок сили тяжіння. Такі хвилі називаються гравітаційними. Частинки води здійснюють в них рух по колових і еліптичних траєкторіях («вгору-вниз» і «вперед-назад» одночасно), тому такі хвилі (як і хвилі Лява) не можна віднести ні до поздовжніх ні до поперечних. Гравітаційні хвилі володіють низкою дивовижних властивостей, до аналізу яких ми і приступимо.

Нехай по поверхні водойми глибиною  $H$  поширюється вздовж осі  $Ox$  поверхнева гармонічна хвиля

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx), \quad (6.1)$$

де  $s$  – зміщення поверхні води вгору від рівноважного горизонтального положення, відміченого на рис.6.1 пунктиром. Будемо вважати, що  $|s| \ll H$ .

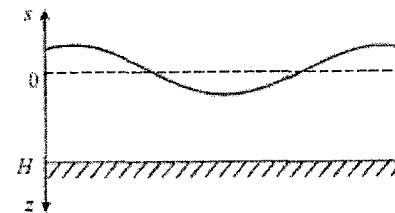


Рис. 6.1

Припустимо, що тиск рідини на глибині  $z$  рівний:

$$p(z, x, t) = \rho g z + \delta p(z, x, t), \quad (6.2)$$

де  $\delta p$  – добавка до гідростатичного тиску  $\rho g z$ , зумовлена хвильовим рухом поверхні. Зробимо також припущення, що

$$\delta p(z, x, t) = f(z) \rho g s(x, t). \quad (6.3)$$

Вираз (6.3) записаний у наближенні, що збурення тиску поблизу поверхні ( $z \rightarrow 0$ ) визначається додатковим гідростатичним



тиском  $\rho g s$ , пов'язаним зі зміною рівня рідини під час поширення хвилі:

$$\delta p(0, x, t) = \rho g s(x, t), \quad (6.4)$$

причому з глибиною це збурення повинно зменшуватися. Отже, функція  $f(z)$  зі збільшенням  $z$  також повинна спадати, при цьому  $f(0) = 1$ . Пізніше ми покажемо, що представлення збурення у вигляді (6.3) виправдане.

Для опису хвильового руху рідини нам необхідно, по-перше, для заданої частоти  $\omega$  знайти  $k$ , тобто встановити дисперсійну залежність  $\omega = \omega(k)$  і, по-друге, визначити вигляд функції  $f(z)$ . Це можна зробити, якщо з врахуванням (6.2) записати рівняння Ейлера для руху нестисливої і нев'язкої рідини в площині  $XYZ$ :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Записуючи, (6.5) ми припускали, що рух частинок уздовж осі

$Oy$  відсутній. Врахуємо далі, що членами  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ ,  $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ ,  $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}$  і  $v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$ , в силу їх малості, можна знехтувати. Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ці рівняння доповнимо умовою нестисливості:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (6.7)$$

Рівняння (6.6) і (6.7) для заданих граничних умов дають можливість розрахувати  $v_z, v_x$  і  $\delta p$  і, тим самим, отримати розв'язок задачі про рух рідини, включаючи рух її поверхні.

Продиференціюємо перше з рівнянь (6.6) по  $x$ , а друге – по  $z$ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2}; \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

У лівих частинах цієї системи рівнянь змінено порядок диференціювання.

Додамо тепер рівняння (6.8). Тоді, з урахуванням (6.7), можемо записати:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \left( \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Рівняння

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} = 0 \quad (6.10)$$

є знаменитим рівнянням Лапласа.

На поверхні водойми при  $z = 0$  граничною умовою є рівність (6.4), а на дні при  $z = H$  повинна виконуватись умова  $v_z = 0$ , з якого, з урахуванням другого рівняння (6.6), одержуємо:

$$\left. \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (6.11)$$

Підставимо далі (6.3) в (6.10) і врахуємо, що  $\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = -k^2 \delta p$ .

Тоді (6.10) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0. \quad (6.12)$$

Використовуючи підстановку  $f(z) = Ae^{\lambda z}$ , одержуємо характеристичне рівняння  $\lambda^2 - k^2 = 0$ , звідки  $\lambda_{1,2} = \pm k$ , і загальний розв'язок (6.12) може бути записаний у вигляді функції:

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (6.13)$$

При цьому граничні умови для  $f(z)$  такі:

$$f(0) = 1; \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=H} = 0. \quad (6.14)$$

Підставляючи (6.13) у (6.14), отримуємо:

$$\begin{aligned} A + B &= 1; \\ Ae^{kH} - Be^{-kH} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Звідси

$$f(z) = \frac{ch[k(z-H)]}{ch(kH)}, \quad (6.16)$$

де функція  $ch \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$  – гіперболічний косинус.

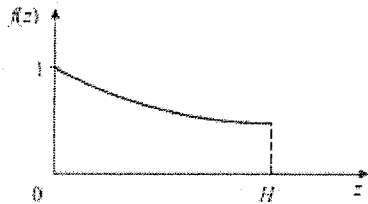


Рис. 6.2

Графік функції  $f(z)$  зображений на рис.6.2. Тепер залишилося тільки визначити хвильове число  $k$ , що входить у (6.1) і (6.3). Це можна зробити, якщо спочатку з (6.1) знайти вертикальне прискорення частинки на поверхні рідини. При цьому потрібно врахувати, що додатні значення  $v_z$  відповідають

зменшенню  $s$ :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = s_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx) = \omega^2 s(x, t). \quad (6.17)$$

Підставимо (6.17) у ліву частину другого рівняння (6.6), а праву частину цього рівняння запишемо, використовуючи представлення (6.3). Тоді отримаємо

$$\rho \omega^2 s = -\rho g s \frac{df}{dz} \Big|_{z=0} = \rho g s k \operatorname{th}(kH). \quad (6.18)$$

У (6.18) враховано, що  $(c h \alpha)' = s h \alpha$ ,  $\operatorname{th} \alpha = \frac{s h \alpha}{c h \alpha}$ . Тому дисперсійне співвідношення одержуємо у вигляді:

$$\omega = \sqrt{gH} \cdot k \cdot \left( \frac{\operatorname{th}(kH)}{kH} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.19)$$

Позначимо  $c_0 = \sqrt{gH}$ . Тоді

$$\omega = c_0 \cdot k \cdot \left( \frac{\operatorname{th}(kH)}{kH} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.20)$$

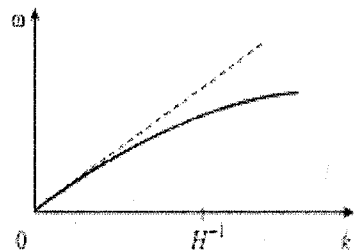


Рис. 6.3

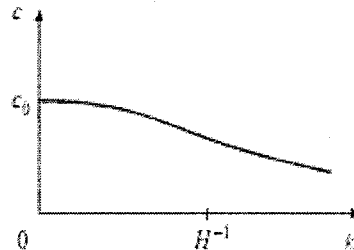


Рис. 6.4

На рис.6.3 ця залежність зображена суцільною лінією, а пунктиром показана пряма  $\omega = c_0 k$ . Фазова швидкість хвилі  $c = \frac{\omega}{k}$  як функція хвильового числа показана на рис.6.4.

Отже, поверхневі гравітаційні хвилі володіють сильною дисперсією. Ефект дисперсії яскраво виражений в океанських хвилях, що зароджуються у віддалених штормових районах. Оскільки довгі хвилі (з меншим  $k$ ) рухаються швидше ніж короткі, то вони досягають берегів швидше ніж короткі на 1-2 дні.

Ефект дисперсії може використовуватися для визначення місця виникнення хвилях, що пройшли до точки спостереження дуже великі відстані. Відстань від штормового району до місця, де хвилі фіксують, розраховують, як різницю часу прибуття хвилях різної довжини і, отже, різної частоти. Переважаюча частота прибулих хвилях зростає з часом, а довжина пройденого шляху знаходиться за швидкістю зміни частоти. Так, за оцінкою, один з пакетів хвилях, що спостерігався у північній частині Тихого океану, пройшов половину кола земної кулі від Індійського океану по дузі великого кола, що проходить південніше Австралії.

Реальні хвилі, як вже зазначалося раніше, являють собою суперпозицію хвилях, або хвильові пакети, які рухаються з груповою швидкістю  $u = \frac{d\omega}{dk}$ . Швидкість  $u$  групи менша, ніж швидкості  $c = \frac{\omega}{k}$  кожної з хвилях у групі. Якщо розглядати окрему хвилю, то можна бачити, що вона переміщується швидше, ніж група. Досягнувши фронт групи, вона згасає, а її місце займають хвилі, що доганяють групу.

Фазова швидкість хвилі  $c$ , як це випливає з (6.20), залежить від параметра  $kH = \frac{2\pi H}{\lambda}$ . Тому розрізняють хвилі глибокої і мілкої води.

### 6.1.1. Хвилі глибокої води

Якщо  $kH \gg 1$  ( $H \gg \lambda$ ), то такі хвилі називають хвилями глибокої води. Збурення  $\delta p$  зосереджені в приповерхневому шарі товщиною  $\lambda$  і не «відчувають» присутності дна. Для таких хвилях, з урахуванням наближення  $\operatorname{th}(kH) \approx 1$ , дисперсійне співвідношення (6.19) набуде вигляду:

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (6.21)$$

Таким чином, ці хвилі володіють сильною дисперсією.

Зробимо деякі оцінки. В океані переважають хвилі з періодом коливань  $T \sim 10$ с. Згідно з (6.21) довжина хвилі  $\lambda = \frac{2\pi}{k} \sim 150$  м, а фазова швидкість  $c \sim 15$ м/с. Така швидкість є типовою, оскільки вона співпадає з характерною швидкістю вітру поблизу поверхні, що генерує хвилі глибокої води.

Якщо проаналізувати розподіл збурень тиску з глибиною, що описується функцією  $f(z)$  (див.(6.16)), то можна показати, що  $f = e^{-1}$  при  $z = \frac{\lambda}{6} = 25$  м. Отже, наближення глибокої води справедливе в тих місцях, де глибина  $H \geq 25$  м.

### 6.1.2. Хвилі мілкої води

З наближенням до берега глибина  $H$  зменшується, і реалізується умова  $kH < 1$  ( $2\pi H < \lambda$ ). Хоча частота хвилі залишається тією самою, однак дисперсійне співвідношення набуде іншого вигляду:

$$\omega = k\sqrt{gk} = kc_0, \quad (6.22)$$

з якого випливає, що на мілкій воді дисперсія хвиль відсутня. Швидкість хвиль  $c_0 = \sqrt{gH}$  зменшується з глибиною, і на глибині  $H=1$ м швидкість  $c_0 \sim 3$ м/с, а довжина хвилі за  $T \sim 10$ с дорівнює  $\lambda = c_0 T \sim 30$  м.

Безпосередньо коло берега, де глибина  $H$  співмірна з амплітудою хвилі  $s_0$ , хвиля спотворюється – з'являються круті гребені, які рухаються швидше за саму хвилю і потім перекидаються. Це відбувається тому, що глибина під гребенем дорівнює  $H + s_0$  і перевищує глибину під впадиною  $H - s_0$ . В результаті коливання частинок хвилі отримують складний характер. За аналогією зі звуками музичних інструментів, можна сказати, що коливання частинок води є суперпозицією коливань багатьох частот, причому в міру наближення до берега ширина частотного спектра збільшується. З подібним спотворенням акустичних хвиль ми зустрінемося дещо пізніше, коли розглядатимемо нелінійне поширення хвиль скінченної амплітуди. З наведеної вище класифікації гравітаційних хвиль випливає, що для океану з глибиною  $H=5$  км хвилі глибокої води повинні мати  $\lambda < 2\pi H \sim 30$  км. Згідно з (6.21) їх період коливань

$T = \frac{2\pi}{\omega} \geq 2$  хв., а швидкість  $c = \frac{\lambda}{T} \leq 250$  м/с. Для континентального шельфу  $H \sim 50$  м, тому хвилями глибокої води будуть хвилі з  $\lambda \leq 300$  м,  $T \leq 15$  с і  $c \leq 20$ м/с.

З іншого боку, на глибині  $H \sim 5$  км хвилі з довжинами хвиль  $\lambda \geq 30$  км будуть хвилями мілкої води. Ці хвилі мають період коливань  $T \geq 2$  хв, а їх швидкість  $c \geq 250$  м/с. Такі хвилі рухаються зі швидкістю реактивного літака і можуть перетнути Атлантичний океан приблизно за 7 годин.

### 6.1.3. Характер руху частинок рідини

Розрахуємо швидкості частинок  $v_x$  і  $v_z$  як функції координат  $x, z$  і часу  $t$ . Це легко зробити з рівнянь (6.6) з урахуванням (6.3), (6.1) і (6.16):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \delta p = f(z) \rho g k s_0 \cos(\omega t - kx), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \delta p = -\frac{df}{dz} \rho g k s_0 \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Звідси

$$\begin{aligned} v_x &= f(z) g \frac{k}{\omega} s_0 \sin(\omega t - kx), \\ v_z &= \frac{df}{dz} \frac{g}{\omega} s_0 \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (6.24)$$

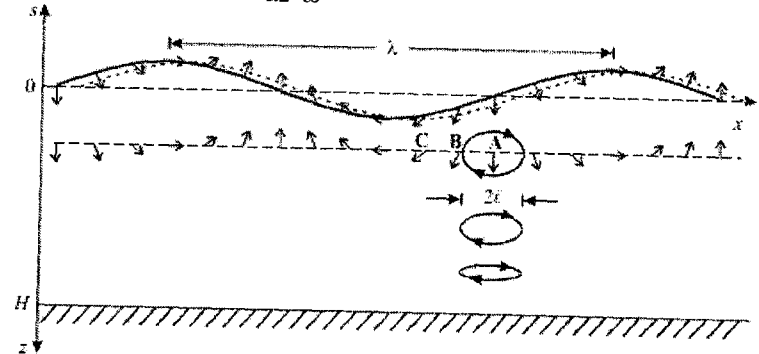


Рис. 6.5

На рис.6.5 показані вектори швидкості частинок на глибині  $z$  і на поверхні у фіксований момент часу. Пунктиром зображено положення хвилі через малий проміжок часу. Під гребенем хвилі частинки

мають складову швидкості  $v_x > 0$ , а під впадиною  $v_x < 0$ . Швидкість деякої частинки А напрямлена вниз і з часом буде змінюватися. Легко зрозуміти, що в наступний момент швидкість частинки А буде такою, як у частинки В на даний момент, потім – як у частинки С в даний момент, і так далі. Тому траєкторія частинки А буде еліптичною. Із збільшенням координати  $z$  (глибини занурення)  $v_z \rightarrow 0$ , еліпси сплющуються, і при  $z \geq \lambda$  частинки рідини коливаються практично вздовж осі Ох.

Розмір  $l$  великої півосі еліпса можна оцінити з умови

$$l = (v_x)_{\max} T = g \frac{k}{\omega} s_0 T. \quad (6.25)$$

Порівняємо  $l$  з довжиною хвилі  $\lambda$ :

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{g}{\lambda} \frac{k}{\omega} s_0 T. \quad (6.26)$$

Врахуємо, що  $\frac{\omega}{k} = c$ ,  $\lambda = cT$ ,  $c_0 = \sqrt{gH}$  – швидкість мілкої води. Тоді

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{c_0^2}{c^2} \frac{s_0}{H}. \quad (6.27)$$

Для мілкої води  $c = c_0$ , і

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{s_0}{H} \ll 1. \quad (6.28)$$

Оскільки в цьому випадку  $\lambda \sim H$ , то  $l \sim s_0$ , тобто зростає зі збільшенням амплітуди хвилі  $s_0$ . Але, оскільки  $s_0 \ll H$ , то амплітуда горизонтальних коливань  $l \ll \lambda$ .

Частинки на поверхні глибокої рідини рухаються по траєкторіях, близьких до колових. По таких же траєкторіях буде рухатися і невелике тіло, що плаває на поверхні, наприклад, притоплений поплавок.

До цього часу ми припускали, що профіль хвилі є синусоїдальним, а це можливе тільки в тому випадку, коли амплітуда хвилі дуже мала, порівняно з її довжиною. В природі таким профілем реально володіють тільки припливні хвилі, довжина яких дуже велика, порівняно з їх висотою. Звичайні вітрові хвилі мають більш складний вигляд. Як показують розрахунки, частинки рідини в них рухаються по колах, радіус яких експоненційно зменшується з глибиною (див. рис.6.6). Суцільними лініями на рисунку показані лінії

однакового тиску, кожна з яких може відповідати поверхні води за певної амплітуди хвилі.

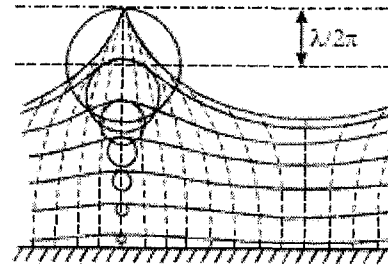


Рис. 6.6

ної гармонічної хвилі, що задається формулою (6.1). Дуже близькими до трохойдальних є хвилі після настання на морі штилю. Це так званий мертвий зиб. В окремому випадку, коли радіус орбіти частинки, що знаходиться на поверхні води, дорівнює  $\frac{\lambda}{2\pi}$ , профіль хвилі має вигляд циклоїди (верхня крива на рис.6.6). Однак досвід показує, що циклоїдальна форма поверхні води може спостерігатися тільки в стоячих хвилях.

Дослідним шляхом також встановлено, що в біжучих трохойдальних хвилях кут між дотичною до поверхні води і горизонтом не перевищує  $\sim 30^\circ$ . Якщо кут скату в гребеня хвилі перевищує це значення, що відповідає відношенню амплітуди трохойдальної хвилі до її довжини  $\frac{s_0}{\lambda} \approx \frac{1}{4\pi} \approx 0,08$ , то хвиля втрачає стійкість. Це явище відіграє велику роль у процесі зародження і розвитку хвилях, що можна помітити, спостерігаючи за ними в присутності вітру. Високі хвилі з гострими гребнями не можуть продовжувати свій біг, оскільки їх гребені перекидаються і руйнуються, і хвилі зменшуються у висоті.

## 6.2. Капілярні хвилі

Аналізуючи залежність швидкості від хвильового числа, зображеної на рис.6.4, виникає питання: до якої величини падає швидкість  $c$  при збільшенні хвильового числа  $k$  (чи зменшенні довжини хвилі). Досвід показує, що зі зменшенням довжини хвилі швидкість досягає мінімуму, а потім починає зростати. Це пов'язано з тим, що за малого радіуса  $R$  кривизни поверхні ( $R \approx \lambda$ ) починають відігравати помітну роль сили поверхневого натягу. Під їх дією поверхня

Ці лінії є трохойдами – траєкторіями точок, розташованих на радіусі між центром і ободом колеса, що котиться під горизонтальною прямою, розташованою на висоті  $\frac{\lambda}{2\pi}$  над рівнем незбуреної поверхні води. Тому така хвиля називається трохойдальною і відрізняється від синусоїдальної

води намагається зменшити свою площу. Ситуація нагадує розглянуту раніше у випадку з натягнутим гумовим шнуром. Такі хвилі називаються капілярними. Якщо під час збільшення натягу шнура швидкість поширення по ньому хвиль зростала, то при підсиленні ролі поверхневого натягу (зменшенні  $R \approx \lambda$ ) швидкість капілярних хвиль повинна також збільшуватися. Відомо, що тиск під викривленою циліндричною поверхнею  $p \sim \frac{\sigma}{R}$ , де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу. Якщо наближено вважати, що  $\lambda = 2\pi R$ , то за аналогією з формулою для швидкості звука в газі (при  $\gamma = 1$ ) можна оцінити фазову швидкість таких хвиль:

$$c_k = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k. \quad (6.29)$$

Розрахунок показує, що формула (6.29) для капілярних хвиль глибокої води виявляється точною. Врахування скінченності глибини водойми дає для цих хвиль результат, аналогічний отриманому вище для гравітаційних хвиль: у формулі (6.29) під коренем додатково з'являється множник  $th(kH)$ .

Капілярні хвилі також зазнають дисперсії, однак, на відміну від гравітаційних, їх фазова швидкість зростає зі збільшенням хвильового числа  $k$ , тобто зі зменшенням  $\lambda$ . Корисно записати дисперсійне співвідношення (6.29) у вигляді:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3. \quad (6.30)$$

Як впливає з цього співвідношення, групова швидкість  $u_k$  капілярних хвиль глибокої води більша за їх фазову швидкість  $c_k$  у

півтора рази:  $u_{kap} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = \frac{3}{2} c_{kap}$ , тоді як для гравітаційних

хвиль (див. (6.21))  $u_{gp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_{gp}$ , тобто групова швидкість удвічі

менша за фазову. Відмінність групової і фазової швидкостей капілярних хвиль добре помітна на поверхні води під час поривів вітру: видно, що дрібні хвильки всередині групи хвиль рухаються повільніше ніж весь хвильовий пакет.

Якщо, розглядаючи поверхневі хвилі, враховувати як дію сили тяжіння, так і поверхневий натяг, то можна отримати єдине диспер-

сійне співвідношення, з якого формули (6.21) і (6.30) одержують з граничних переходів у області малих і великих  $k$ .

Для хвильових чисел  $k \gg H^{-1}$  можна об'єднати (6.21) і (6.30) наступним чином:

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}. \quad (6.31)$$

Звідси швидкість гравітаційно-капілярних хвиль глибокої води отримуємо рівною

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k}. \quad (6.32)$$

Для хвильових чисел  $k \ll H^{-1}$  (хвилі мілкої води) у відповідності з (6.22) швидкість прямує до значення  $c_0 = \sqrt{gH}$ , а для довільних значень  $k$  у відповідності з (6.20) можна записати вираз для швидкості хвиль наступним чином:

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k\right) th(kH)}. \quad (6.33)$$

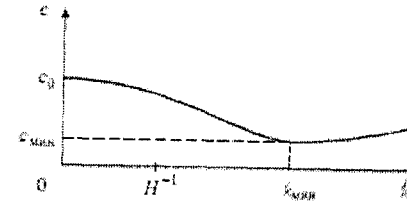


Рис.6.7

Залежність (6.33) швидкості  $c$  від хвильового числа  $k$  показана на рис. 6.7. Видно, що швидкість досягає мінімальної величини. У відповідності з (6.32)

це відбувається за  $\frac{g}{k_{min}} = \frac{\sigma k_{min}}{\rho}$ ,

звідки  $k_{min} = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}$ . Отже,

$$c_{min} = \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}} \cdot \sqrt{2}. \quad (6.34)$$

Для води  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $c_{min} \approx 23,2$  см/с,  $\lambda_{min} = \frac{2\pi}{k_{min}} \approx 1,73$  см.

Таким чином, на поверхні води не можуть існувати хвилі, що поширюються зі швидкістю меншою, ніж 23 см/с.

Капілярні хвилі часто використовують для визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідин.

### 6.3. Хвилі цунамі

Крім хвиль, що генеруються вітром, існують дуже довгі хвилі, які виникають під час підводних землетрусів чи моретрусів. Часто такі землетруси відбуваються на дні Тихого океану, вздовж довгих ланцюгів Курильських і Японських островів. Величезні хвилі, що виникають під час потужного поштовху, мають висоту  $s_0 \sim 10\text{--}15\text{ м}$  і  $\lambda \sim 10^3$  км. Досягнувши берега, вони змивають не тільки міста і селища, але й рослинність разом із ґрунтом. Великого лиха вони завдають населенню Японії, яке дало їм назву «цунамі» (по-японськи – «велика хвиля в гавані»).

Цікаві відомості про величини деформацій дна океану під час землетрусів. 1922 року японські гідрографи зробили проміри глибин у затоці Сагамі, неподалік від Токіо, а через рік – 1 вересня 1923 року – там відбувся катастрофічний землетрус. Повторний промір глибин після землетрусу показав, що зміна рельєфу дна відбулася на площі близько  $150\text{ км}^2$ , при цьому одні частини дна піднялися місцями на 230 м, а інші опустилися до 400 м. Частина дна, що піднялася, виштовхнула величезний об'єм води, який за оцінками склав величину  $V \sim 23\text{ км}^3$ . У результаті такого поштовху утворився величезний водяний пагорб (відокремлена хвиля), який, поширюючись, викликав підняття рівня води біля берегів Японії в різних місцях від 3,3 до 10 м.

### 6.4. Внутрішні гравітаційні та інші хвилі

Поряд з поверхневими гравітаційними і капілярними хвилями в океані існує велика кількість інших видів хвиль, які відіграють важливу роль у динаміці океану. Океан, на відміну від ідеальної рідини, стратифікований – його води не є однорідними, а змінюються за густиною з глибиною. Цей розподіл зумовлений потоками енергії (теплоти) і речовини. У спрощеному вигляді океан можна уявити таким, що складається з двох шарів води: зверху лежить більш легка (тепла або менш солена), знизу – більш щільна (більш солена або холодна). Подібно до того, як поверхневі хвилі існують на межі вода-повітря, на межі розділу води різної щільності будуть існувати внутрішні гравітаційні хвилі. Амплітуда хвиль цього типу в океані може досягати сотні метрів, довжина хвилі – багато кілометрів, однак коливання водної поверхні при цьому малі. Внутрішні хвилі проявляються на поверхні океану, впливаючи на характеристики поверхневих хвиль, перерозподіляючи поверхнево-активні речовини.

За цими проявами вони і можуть бути виявлені на поверхні океану. Оскільки поверхневі гравітаційно-капілярні хвилі і поверхнево-активні речовини сильно впливають на коефіцієнт відбивання електромагнітних, у тому числі світлових хвиль, внутрішні хвилі добре виявляються дистанційними методами, наприклад, їх видно з космосу. Внутрішні хвилі, порівняно зі звичайними поверхневими гравітаційними хвилями, володіють низкою дивовижних властивостей. Наприклад, групова швидкість внутрішніх хвиль перпендикулярна до фазової, кут відбивання внутрішніх хвиль від відкосу не дорівнює куту падіння.

Розглядаючи великомасштабні явища у Світовому океані, необхідно враховувати ефекти обертання Землі, зміни глибини і наявність бічних меж. Сила Коріоліса є причиною виникнення інерційних, або гіроскопічних хвиль. Зміни потенціальної завихреності внаслідок зміни географічної широти зумовлюють виникнення планетарних хвиль Росбі. Бічні границі і зміни глибини на шельфі призводять до існування декількох типів берегових захоплених хвиль – шельфових, крайових, Кельвіна, топографічних хвиль Росбі.

Великомасштабні хвилі типу хвиль Росбі, Кельвіна та ін. виявляють суттєвий вплив на термодинаміку океану, взаємодію атмосфери і океану, клімат і погоду. Властивості багатьох із цих хвиль істотно відрізняються від властивостей поверхневих гравітаційних хвиль. Наприклад, хвилі Кельвіна локалізовані у вузькій шельфовій зоні, поширюються у північній півкулі вздовж берега проти годинникової стрілки. Екваторіальні хвилі Росбі, маючи просторові масштаби в сотні кілометрів, локалізуються вздовж екватора і проявляються не в зміні рівня, а перш за все у формі вихрових течій.

### 6.5. Поширення акустичних хвиль скінченної амплітуди

Якщо збурення густини  $\delta\rho$  і тиску  $\delta p$  в акустичній хвилі не є дуже малими, порівняно з рівноважними значеннями  $\rho_0$  і  $p_0$ , то кажуть, що хвиля має скінченну амплітуду. Зазвичай такі хвилі володіють високою інтенсивністю, і для опису їх поширення необхідно розв'язувати нелінійні рівняння гідродинаміки. Аналізом поширення хвиль скінченної амплітуди займається окрема наука, що називається нелінійною акустикою. Ми обмежимося тільки невеликим об'ємом відомостей з нелінійної акустики.

Нехай у газі вздовж осі  $Ox$  поширюється потужна акустична хвиля. Якщо знехтувати в'язкістю газу, то одновимірний рух части-

нок уздовж цієї осі буде описуватися рівнянням Ейлера і рівнянням неперервності:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Складність розв'язку цієї системи рівнянь полягає в тому, що в їх лівих частинах містяться нелінійні члени. Зазвичай цю нелінійність називають кінематичною нелінійністю. Оскільки рівняння (6.35) містять три невідомі функції  $\rho(x, t)$ ,  $p(x, t)$  і  $v(x, t)$ , то необхідно їх доповнити третім рівнянням, що пов'язує  $p$  і  $\rho$ . Для газу – це рівняння адіабати:

$$p = p(\rho) = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (6.36)$$

Покажемо  $p$  і  $\rho$  у вигляді:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p; \\ \rho &= \rho_0 + \delta \rho. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Потім підставимо (6.37) у (6.36):

$$p_0 + \delta p = p_0 \left( 1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (6.38)$$

Вважаючи, що  $\left| \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right| \ll 1$ , розкладемо праву частину (6.38) у ряд:

$$p_0 + \delta p = p_0 \left[ 1 + \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (6.39)$$

Нехтуючи членами, що мають порядок  $\left( \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^3$  і вище, запишемо рівняння адіабати у вигляді:

$$\delta p = c_0^2 \delta \rho + c_0^2 \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\delta \rho)^2}{\rho_0}, \quad (6.40)$$

де  $c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$ .

Другий член у правій частині (6.40) починає давати помітний вклад за сильного стиску (розрідження), тому зв'язок між збуреннями тиску  $\delta p$  і густини  $\delta \rho$  стає нелінійним. Ця нелінійність зумовлена

нелінійністю сил міжмолекулярної взаємодії і називається фізичною нелінійністю. Вона разом з кінематичною нелінійністю може кардинально вплинути на характер поширення інтенсивних акустичних хвиль.

Перейдемо тепер до встановлення основних закономірностей такого поширення. Для цього підставимо (6.37) у рівняння (6.35). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \delta \rho) \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \delta \rho) v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\rho_0 + \delta \rho)v] &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Перш ніж перейти до аналізу системи нелінійних рівнянь, покажемо спочатку, як з цих рівнянь можна легко отримати хвильове рівняння, що описує лінійний режим поширення хвиль.

## 6.6. Лінійний і нелінійний режими поширення.

### 6.6.1. Лінійний режим ( $|\delta \rho| \ll \rho_0, |\delta p| \ll p_0$ )

Залишимо в рівняннях (6.41) тільки лінійні члени. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \delta p &= c_0^2 \delta \rho. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Виключимо дві невідомі функції, наприклад,  $\delta \rho$  і  $\delta p$ . Для цього продиференціюємо перше рівняння за часом  $t$ , а друге домножимо на  $c_0^2$  і продиференціюємо по координаті  $x$ , а потім віднімемо від одного рівняння друге. Із врахуванням третього рівняння члени, які містять  $\delta \rho$  і  $\delta p$ , скоротяться, і ми отримаємо відоме хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (6.43)$$

що описує поширення без спотворень уздовж осі  $Ox$  з швидкістю  $c_0$  хвилі гідродинамічної швидкості.

Аналогічним чином можна отримати хвильові рівняння для збурення тиску  $\delta p$  і густини  $\delta \rho$ . Перейдемо тепер до нелінійного режиму поширення хвиль скінченної амплітуди.

### 6.6.2. Нелінійний режим ( $|\delta \rho| < \rho_0$ , $|\delta p| < p_0$ )

Спочатку спробуємо якісно описати основні риси нелінійного поширення хвиль, не застосовуючи математику. Найпростіше це зробити, якщо звернутися до впливу нелінійності (формула 6.36).

Якщо згадати, що швидкість звука  $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ , то легко зрозуміти, що різні частини хвилі можуть рухатися з різними швидкостями.

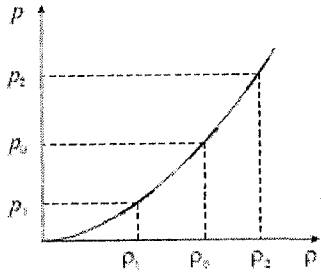


Рис. 6.8

На рис. 6.8 зображена залежність (6.36) і для трьох значень густини  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  і  $\rho_2$  проведені дотичні до графіка функції  $p = p(\rho)$ , кутові коефіцієнти яких рівні квадрату швидкості поширення хвилі. З цього графіку можна зробити якісний висновок про те, що чим вища густина ділянки хвилі, тим більша її швидкість.

Якщо, наприклад, гармонічна хвиля (хвиля густини) поширюється вздовж осі  $Ox$  (рис.6.9), то внаслідок відмінності швидкостей її різних частин вона буде поступово змінювати свою форму. На рисунку для спрощення показано

тільки три швидкості  $c_1 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_1}$ ,  $c_0 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0}$  і  $c_2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_2}$ .

Як показує досвід, поширення хвилі можна охарактеризувати трьома етапами.

На I етапі хвиля трансформується в пилкоподібну, що володіє стрибком густини  $\rho$  (а також тиску  $p$  і швидкості  $v$ ). Ця пилкоподібна хвиля отримує ударний фронт, ширина якого  $\Delta x_\phi$  з поширенням зменшується і досягає величини порядку довжини вільного пробігу молекул.

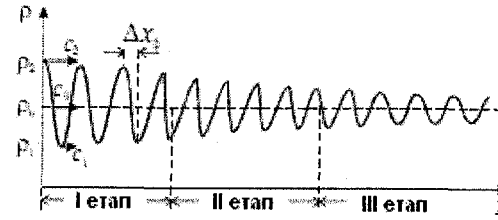


Рис. 6.9

тичної енергії молекул, що володіють гідродинамічними швидкостями  $v$ . Ці молекули під дією перепадів тиску на довжині вільного пробігу отримують кінетичну енергію, яка потім переходить у тепло під час непружних зіткнень. Простий розрахунок показує, що енергія, яка перейшла в тепло, буде значно більшою, ніж на I етапі, коли на ширині  $\Delta x_\phi$  відбувалися численні зіткнення. Природно, що ця тепла енергія запозичується у хвилі, яка поширюється.

III етап пов'язаний зі зростаючим впливом в'язкості і теплопровідності, які особливо сильні в областях великих перепадів швидкості і температури (внаслідок локального адіабатичного нагрівання або охолодження під час коливань газу). Різкі перепади швидкості призводять до зростання сил в'язкості, а перепади температури на масштабах порядку довжини хвилі тягнуть за собою відтік теплоти з більш нагрітих областей у менш нагріті. Внаслідок цих причин частина енергії хвилі переходить у тепло, її амплітуда зменшується. Оскільки поглинання звука пропорційне квадрату частоти, швидше згасають хвилі високих частот, і хвиля трансформується в гармонічну хвилю з вихідною (початковою) частотою.

Міркування, наведені вище, мають якісний характер. Для кількісного опису нелінійного поширення хвиль ми використаємо найбільш спрощений підхід до аналізу системи нелінійних рівнянь (6.40)-(6.41). Зауважимо зразу, що оскільки рівняння Ейлера описують поведінку нев'язкого середовища, то ми зможемо проаналізувати поширення хвилі тільки на перших двох етапах.

Перепишемо рівняння (6.41) у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= -\delta \rho \frac{dv}{dt} - \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \rho \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (v \cdot \delta \rho), \end{aligned} \quad (6.44)$$

На II етапі відбувається нелінійне згасання хвилі навіть за дуже малій в'язкості і теплопровідності середовища. Цей, на перший погляд, неочікуваний ефект пов'язаний з переходом у теплоту частини кінетичної енергії молекул, що володіють гідродинамічними швидкостями  $v$ . Ці молекули під дією перепадів тиску на довжині вільного пробігу отримують кінетичну енергію, яка потім переходить у тепло під час непружних зіткнень. Простий розрахунок показує, що енергія, яка перейшла в тепло, буде значно більшою, ніж на I етапі, коли на ширині  $\Delta x_\phi$  відбувалися численні зіткнення. Природно, що ця тепла енергія запозичується у хвилі, яка поширюється.

III етап пов'язаний зі зростаючим впливом в'язкості і теплопровідності, які особливо сильні в областях великих перепадів швидкості і температури (внаслідок локального адіабатичного нагрівання або охолодження під час коливань газу). Різкі перепади швидкості призводять до зростання сил в'язкості, а перепади температури на масштабах порядку довжини хвилі тягнуть за собою відтік теплоти з більш нагрітих областей у менш нагріті. Внаслідок цих причин частина енергії хвилі переходить у тепло, її амплітуда зменшується. Оскільки поглинання звука пропорційне квадрату частоти, швидше згасають хвилі високих частот, і хвиля трансформується в гармонічну хвилю з вихідною (початковою) частотою.

Міркування, наведені вище, мають якісний характер. Для кількісного опису нелінійного поширення хвиль ми використаємо найбільш спрощений підхід до аналізу системи нелінійних рівнянь (6.40)-(6.41). Зауважимо зразу, що оскільки рівняння Ейлера описують поведінку нев'язкого середовища, то ми зможемо проаналізувати поширення хвилі тільки на перших двох етапах.

Перепишемо рівняння (6.41) у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} &= -\delta \rho \frac{dv}{dt} - \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \rho \cdot v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} (v \cdot \delta \rho), \end{aligned} \quad (6.44)$$



де всі нелінійні члени, за порядком величини менші за лінійні, перенесені в праві частини рівнянь.

Із врахуванням малості нелінійних членів для цих рівнянь у нелінійній акустиці розроблені наближені методи розв'язування, зміст яких полягає в отриманні значно простіших рівнянь, що мають в ряді випадків нескладні аналітичні розв'язки. Одне з таких рівнянь ми зараз і отримаємо, однак зробимо все дуже просто. Для цього, поперше, ми обмежимося спочатку тільки кінематичною нелінійністю, а по-друге, будемо припускати, що між швидкістю  $v$  і збуренням  $\delta\rho$  існує такий же зв'язок, як і в лінійному режимі:

$$-\varepsilon = \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{v}{c_0}, \quad (6.45)$$

де  $\varepsilon$  – відносна деформація елементарного об'єму газу ( $\varepsilon < 0$  під час стиску і  $\varepsilon > 0$  під час розрідження). Цей зв'язок дозволяє нам обмежитися одним із двох рівнянь гідродинаміки. Скористаємося більш простим рівнянням неперервності. Підставляючи в друге рівняння (6.44) збурення густини  $\delta\rho$ , пропорційного, згідно з (6.45), гідродинамічній швидкості  $v$ , отримуємо нелінійне рівняння:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -2v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.46)$$

Відзначимо, що в лінійному режимі, коли права частина рівняння дорівнює нулю, його розв'язком буде довільна функція виду:

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0}\right), \quad (6.47)$$

яка описує біжучу акустичну хвилю, що рухається без спотворень уздовж осі  $Ox$  зі швидкістю  $c_0$ .

В нелінійному режимі ситуація ускладнюється. Дійсно, перепишемо рівняння (6.46) у вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + 2v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6.48)$$

Звідси видно, що швидкість ділянки хвилі рівна

$$c = c_0 + 2v \quad (6.49)$$

і залежить від гідродинамічної швидкості частинок.

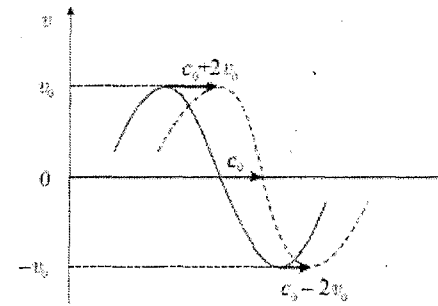


Рис. 6.10

Для фрагмента гармонічної хвилі гідродинамічної швидкості, зображеного на рис.6.10, це означає, що синусоїдальне поширення швидкості вздовж осі  $Ox$  трансформується в пілкоподібне. Отже, обидва механізми нелінійності сприяють трансформації гармонічної хвилі в пілкоподібну.

Якщо б ми із самого початку врахували дію обох механізмів нелінійності, то з рівнянь (6.44) і (6.40) отримали б рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \beta v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (6.50)$$

де  $\beta = \frac{\gamma+1}{2}$  – нелінійний параметр, що відображає дію обох механізмів нелінійності. Відзначимо, що формула (6.49) не є точною, оскільки за відсутності фізичної нелінійності ( $\gamma=1$ ) нелінійний параметр  $\beta=1$ , і в дійсності  $c=c_0+v$ . Це пов'язано з тим, що ми використали зв'язок у вигляді (6.45), який для хвиль скінченної амплітуди не є вірним.

За аналогією з (6.47) ми можемо записати розв'язок рівняння (6.50) у вигляді:

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v}\right). \quad (6.51)$$

Цей розв'язок описує еволюцію простих (ріманових) хвиль. Опишемо кількісно трансформацію гармонічної хвилі в пілкоподібну.

Нехай на вході в середовище (при  $x=0$ )

$$v(0, t) = f(t) = v_0 \sin \omega t. \quad (6.52)$$

Тоді на відстані  $x$

$$v = v_0 \sin \left[ \omega \left( \tau + \frac{\beta}{c_0^2} x \cdot v \right) \right]. \quad (6.53)$$

Тут  $\tau = \frac{x}{c_0}$  так званий локальний час, який відлічується спостерігачем, що знаходиться на відстані  $x$  від початку координат, від моменту часу  $\frac{x}{c_0}$ .

Для побудови графіка залежності (6.53) перепишемо в її явному вигляді

$$\omega\tau = \arcsin \frac{v}{v_0} - \frac{x}{l_{nl}} \cdot \frac{v}{v_0}, \quad (6.54)$$

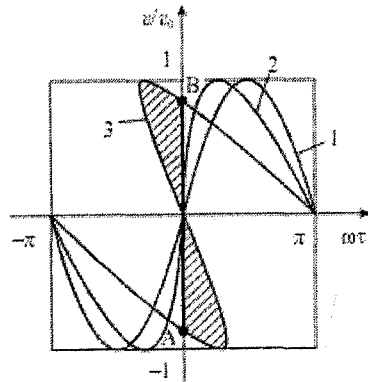
де

$$l_{nl} = \frac{c_0^2}{\omega v_0 \beta} \quad (6.55)$$

характерна відстань, на якій розвивається значне нелінійне спотворення хвилі. Ця відстань скорочується з ростом амплітуди  $v_0$  вихідної хвилі і нелінійного параметра.

На рис.6.11 зображені розподіли швидкості в межах одного періоду коливань для хвилі на відстанях  $x=0$  (1);  $x < l_{nl}$  (2);  $x > l_{nl}$  (3). З цих кривих видно, що синусоїдальна хвиля поступово перетворюється в пілкоподібну, а при  $x > l_{nl}$  у профілі хвилі з'являється неоднозначність.

має



до  
В).

від

Рис.6.11

Ця неоднозначність не фізичного змісту і виникла тільки внаслідок знехтування в'язкістю газу. В дійсності при  $\omega\tau = 0$  швидкість має стрибок, або розрив (від величини швидкості в точці А величини швидкості в точці В). Положення ударного фронту задається лінією АВ, яку проводять так, щоб заштриховані площі зверху і знизу АВ були б однакові (в розглядуваному випадку АВ

співпадає з віссю  $Oy$ ). Такою побудовою автоматично враховується нелінійне згасання хвилі. Відстань  $l_{nl}$  є відстанню, на якій у хвилі з'являються розриви швидкості  $v$ , густини  $\rho$  і тиску  $\delta p$ . На жаль,

без врахування в'язкості ширина ударного фронту виявилася рівною нулю. В реальній ситуації вона скінченна і зростає зі збільшенням в'язкості.

Говорячи про утворення ударного фронту в кінці I етапу і наступному нелінійному згасанні на II етапі, ми не повинні забувати про наявність звичайного (лінійного) поглинання хвилі за рахунок в'язкості середовища. Це поглинання характеризується коефіцієнтом  $\alpha$  (див.формулу (5.19)) і залежить від частоти. Амплітуда хвиль під час лінійного поглинання зменшується за експоненціальним законом

вже на I етапі:  $v_0(x) = v_0 e^{-\frac{x}{l_3}}$ , де  $l_3 = \alpha^{-1}$  характерна відстань, що характеризує поглинання звука. Природно, що зменшення амплітуди  $v_0$  «гальмує» процес спотворення профілю хвилі. Якщо поглинання таке, що  $l_3 < l_{nl}$ , то нелінійне спотворення може не проявитися взагалі.

В акустиці співвідношення

$$Re = \frac{l_3}{l_{nl}} \quad (6.56)$$

називають акустичним числом Рейнольдса. Якщо  $Re > 10$ , то хвиля вважається потужною, і для неї має місце нелінійне спотворення. При  $Re < 10$  хвиля слабка, і нелінійне спотворення подавлюється звичайним лінійним поглинанням.

Якщо врахувати далі, що амплітуда швидкості  $v_0$  пов'язана з амплітудою збурення тиску  $(\delta p)_0$  акустичним законом Ома, то нелінійна довжина буде обернено пропорційна величині  $(\delta p)_0$ :

$$l_{nl} = \frac{\rho c_0^3}{2\pi\beta v (\delta p)_0}. \quad (6.57)$$

Отже, вираз для акустичного числа Рейнольдса набуде вигляду:

$$Re = \frac{l_3}{l_{nl}} = \frac{2\pi l_3 \beta v (\delta p)_0}{\rho c_0^3} = \frac{D(\delta p)_0}{v}. \quad (6.58)$$

Тут враховано, що у відповідності з формулою (5.21)  $l_3 = \alpha^{-1} \sim v^{-2}$ ,  $D$  – константа, яка характеризує нелінійні і в'язкі властивості середовища

В якості прикладу виконаємо деякі оцінки, що ілюструють кількісні характеристики поширення звукової хвилі у воді, де  $D=300(\text{Па}\cdot\text{с})^{-1}$ . За частоти ультразвука  $\nu=1$  МГц відстань  $l_3=50\text{м}$ , і

умова  $Re \gg 10$  виконується, згідно з (6.58), для хвиль з амплітудою звукового тиску  $(\delta p)_0 > 3 \cdot 10^4$  Па, або інтенсивністю

$$I > \frac{(\delta p)_0^2}{2\rho c_0} = 300 \text{ Вт/м}^2. \quad (6.59)$$

Відповідний рівень звукового тиску  $L_p > 180$  дБ. Для хвиль з

такими інтенсивностями  $l_{ин} < \frac{l_3}{10} = 5$  м, тому вже на перших метрах свого поширення ультразвукова хвиля буде перетворюватися в пилкоподібну, і потім при  $x > l_{ин}$  почнеться її нелінійне згасання.

Як показує аналіз формули (6.54) з врахуванням побудови положення ударного фронту, зображеного на рис.6.11, амплітуда пилкоподібної хвилі при  $Re \gg 1$  спадає з пройденою відстанню  $x$  за законом

$$\delta p(x > l_{ин}) = \frac{(\delta p)_0}{1 + \frac{x}{l_{ин}}}. \quad (6.60)$$

З допомогою цієї формули можна зробити важливий висновок про те, що величина  $\delta p$  не може перевищувати деяке граничне значення, як би ми не збільшували амплітуду гармонічної хвилі  $(\delta p)_0$ . Дійсно, при збільшенні  $(\delta p)_0$  величина  $l_{ин} \sim 1/(\delta p)_0$  зменшується, і  $\delta p$  прямує до  $\delta p_{max}$ . Величина  $\delta p_{max}$  може бути коректно підрахована за одночасного врахування лінійного поглинання і нелінійного згасання і виявляється рівною

$$\delta p_{max} = \frac{4\nu}{D} e^{-\frac{x}{l_3}}. \quad (6.61)$$

Оцінимо максимальне значення інтенсивності  $I_{max}$ , яка може бути передана у воді ультразвуковим променем з частотою  $\nu = 1$  МГц на відстань  $x = 2l_3 = 100$  м:

$$I_{max} = \frac{\delta p_{max}^2}{2\rho c_0} = \frac{8\nu^2}{\rho c_0 D^2} e^{-\frac{2x}{l_3}} = 1 \text{ Вт/м}^2. \quad (6.62)$$

Отже, в умовах, найкращих для збудження потужних ультразвукових хвиль у воді, на відстань  $x = 100$  м через площу перерізу  $1 \text{ м}^2$  можна передати енергію, достатню тільки для свічення лампочки від кишенькового ліхтарика. Це не йде ні в яке порівняння з тією енергією, яку посилають ультразвукові гармати, що використовують

герої науково-фантастичного роману Г. Адамова «Тасмниці двох океанів», де ультразвуковим променем наче б то пошкоджують кораблі і ракети.

У зв'язку зі сказаним вище виникає природне питання – а як же пояснити руйнівну дію вибухових ударних хвиль на великій відстані від місця вибуху? Відповідь на це питання полягає в тому, що вибухова ударна хвиля являє собою одиничний імпульс, і його амплітуда  $\delta p$  зменшується з відстанню  $x$  більш повільно, ніж у гармонічної хвилі:

$$\delta p(x > l_{ин}) = \frac{(\delta p)_0}{\left(1 + \frac{x}{l_{ин}}\right)^2}. \quad (6.63)$$

Під час зростання в епіцентрі вибуху амплітуди імпульсу  $(\delta p)_0$  буде необмежено збільшуватися і величина  $\delta p$ , яка за великої потужності заряду виявиться достатньою для руйнування перешкоди.

Слід відзначити, однак що нелінійне згасання не обмежує широке застосування ультразвука в лабораторних умовах, оскільки  $l_{ин}$ , зазвичай, одного порядку величини з розмірами лабораторних акустичних систем або перевищує їх.

До цього часу ми говорили про поширення тільки однієї хвилі. Однак, якщо поширюються, наприклад, дві хвилі з частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , то нелінійна взаємодія між ними призводить до появи хвиль з іншими частотами. Серед них хвилі з кратними частотами  $n_1\omega_1$  і  $n_2\omega_2$  (гармоніки) і хвилі з комбінаційними частотами  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  ( $n_1$  і  $n_2$  - цілі числа). В акустиці, де дисперсія відсутня, всі ці хвилі рухаються з однаковою швидкістю, тому вони можуть ефективно взаємодіяти між собою, проходячи великі відстані.

Генерація гармонік і хвиль з комбінаційними частотами має широке застосування. Проілюструємо сказане на двох прикладах.

Під час дослідженні пружних і міцнісних властивостей твердих матеріалів їх, зазвичай, піддають великим навантаженням з допомогою спеціальних пресів, що розвивають тиски, близькі до границі міцності цих матеріалів або перевищують їх, тобто десятки тисяч атмосфер. Замість цієї громіздкої і дорогої апаратури використовують методи нелінійної акустики. Для цього до одного торця зразка досліджуваного матеріалу приклеюють п'єзоелектричний випромінювач потужної акустичної хвилі частоти  $\omega$ .

На іншому кінці зразка поміщують такий же п'єзоелектричний перетворювач (приймач звука), на виході якого реєструють і потім обробляють електричний сигнал. Останній являє собою суперпозицію коливань на частотах  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  і т.д. Кажуть, що сигнал складається з основної, другої, третьої і т.д. гармонік. Сигнал на основній частоті несе інформацію про лінійний модуль Юнга, оскільки згідно із законом Гука деформації пропорційні прикладеним напругам. В області великих напруг, внаслідок пластичності і текучості матеріалу, зв'язок деформацій і напруг описують з використанням нелінійних модулів. Інформацію про такі модулі несе вже амплітуда сигналу з частотою  $2\omega$  (друга гармоніка) і т.д.

Другим яскравим прикладом використання методів нелінійної акустики є генерація у воді вузьконапрямлених пучків акустичних хвиль з довжиною  $\lambda$ . Це здійснюється за допомогою так званих параметричних антен. Розглядаючи явище дифракції хвиль, ми відзначили, що кутове розходження  $\vartheta$  звукового пучка тим менше, чим більший розмір  $l$  передавального випромінювача (антени). Проблемі виготовлення величезних випромінюючих антен з розмірами в десятки метрів можна обійти, використовуючи нелінійну взаємодію у воді двох потужних звукових хвиль, що паралельно поширюються і мають близькі частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Ці хвилі випромінюються горизонтально зануреним у воду одним п'єзовипромінювачем розміром  $l \sim 10^3$  м. В цій протяжній області зароджується хвиля низької (різницевої) частоти  $\omega = \omega_2 - \omega_1$ , яка згасає значно слабше і може пройти дуже великі відстані. Отже, виділений об'єм води з малим поперечним розміром  $l$  і великим поздовжнім розміром  $L$  являє собою велетенську природну антену, що випромінює звуковий пучок різницевої частоти вздовж самої витягнутої антени. Однак, розходження  $\vartheta$  цього пучка вже буде задаватися виразом

$$\vartheta = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.64)$$

За частоти  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 1 \text{кГц}$ ,  $\lambda \sim 1 \text{м}$  і за  $L \sim 10^3$  м отримуємо  $\vartheta \sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 1,8^\circ$ . Таке надзвичайно мале розходження пучка різницевої частоти дозволяє з великою точністю проводити морські дослідження: вивчати рельєф дна, займатися археологічними дослідженнями в придонних шарах ґрунту, в замулених озерах, виявляти скупчення риби біля поверхні і дна моря, на мілководді – там, де звичайні гідролокатори неефективні, і т.д.

## 6.7. Відокремлені хвилі (солітони)

1834 року шотландський інженер-кораблебудівник і вчений Дж. Рассел, спостерігаючи за рухом баржі по каналу, яку тягнула пара коней, звернув увагу на дивовижне явище. Під час раптової зупинці судна маса води навколо баржі у вузькому каналі не зупинилася, а зібралася навколо носа судна, і потім відірвалася від нього і у вигляді великого відокремленого водяного пагорба стала рухатися зі швидкістю близько 8 миль за годину. Дивно, що форма пагорба в процесі його руху практично не змінювалася. Рассел назвав це утворення, яке рухалося по поверхні води «great solitary wave», що в перекладі означає «велика відокремлена хвиля».

Теоретичне пояснення відокремлені хвилі отримали пізніше в роботах Ж.В. де Буссінеска і англійського фізика Дж. Релея. Вони математично обґрунтували можливість існування відокремлених хвиль у мілководних каналах.

Після смерті Рассела 1895 року голландський фізик Д. Кортвег і його учень Г. де Фріс вивели рівняння, що описує відокремлені хвилі. Це рівняння отримало назву рівняння Кортвега-де Фріса (рівняння КДФ) і має вигляд

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c_0 \left( \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \right) = 0. \quad (6.65)$$

Воно описує поширення поверхневих гравітаційних хвиль на мілкій воді. Тут  $c_0 = \sqrt{gH}$  – швидкість хвиль мілкої води,  $H$  – глибина водойми. Відзначимо зразу, що за виглядом рівняння КДФ відрізняється від нелінійного рівняння (6.50) наявністю додаткового

члена  $\frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3}$ , що відповідає за дисперсію гравітаційних хвиль (хоча і невелику на мілкій воді).

Розглянемо дещо детальніше вплив нелінійності і дисперсії на поширення поверхневих гравітаційних хвиль. За аналогією з нелінійними акустичними хвилями зразу можемо сказати, що швидкість різних ділянок поверхневої хвилі буде різна:

$$c = c_0 \left( 1 + \frac{3s}{2H} \right). \quad (6.66)$$

Внаслідок відмінності швидкостей (гребінь хвилі рухається швидше, ніж впадина) відбувається перетворення гармонічної хвилі в пілкоподібну. Крутий фронт під дією сили тяжіння перекидається, і

на поверхні води з'являються піняві гребінці. Перекидування фронту легко спостерігати під час русу хвилі по мілководдю поблизу берега (рис.6.12).

Однак у ряді випадків нелінійне спотворення хвилі може компенсуватися дисперсією. Дійсно, пилкоподібна хвиля являє собою набір гармонічних хвиль з різними частотами.

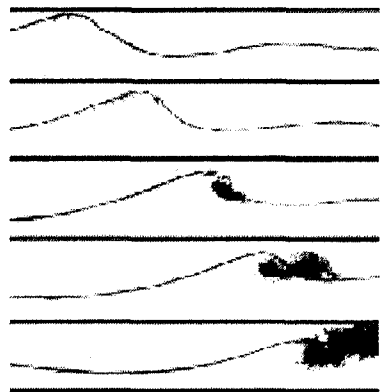


Рис.6.12

Внаслідок дисперсії ці хвилі рухаються з різними швидкостями, і тому пилкоподібний фрагмент хвилі, подібно імпульсу, намагається розширитися. За певної форми фрагмента обидва конкуруючі механізми можуть компенсувати один одного, і тоді по поверхні води побіжить стійка структура у вигляді відокремленої хвилі (солітону). Вияснимо деякі властивості цієї відокремленої хвилі.

Припустимо, що солітон має амплітуду  $s_0$ , протяжність уздовж осі  $Ox$ , яка дорівнює  $l$  і являє собою деякий горбик, зображений на рисунку 6.13.

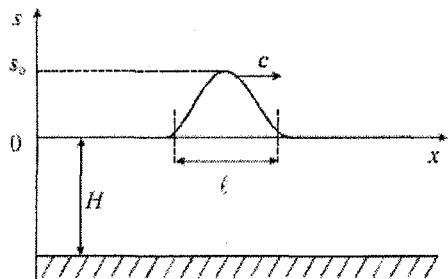


Рис. 6.13

Оцінимо величини нелінійного і дисперсійного членів у рівнянні КДФ:

$$\frac{3}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} \sim \frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{l};$$

$$\frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \sim -H^2 \frac{s_0}{l^3}. \quad (6.67)$$

У (6.67) враховано, що на передньому і задньому фронтах горбика  $\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} < 0$ .

Природно, що обидва механізми будуть компенсувати один одного за умови

$$\frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{l} - H^2 \frac{s_0}{l^3} \approx 0. \quad (6.68)$$

Остання умова накладає в'язь на амплітуду  $s_0$  і довжину солітону  $l$ :

$$l^2 \approx \frac{H^3}{s_0}. \quad (6.69)$$

Отже, чим більша амплітуда солітону  $s_0$ , тим меншою повинна бути його довжина  $l$ . Швидкість солітону  $c$  зростає зі зростанням амплітуди, що є характерним для нелінійного поширення хвиль. Точний розв'язок рівняння КДФ, який описує солітон, має вигляд

$$s(t, x) = \frac{s_0}{ch^2\left(\frac{x-ct}{l}\right)}. \quad (6.70)$$

При цьому довжина солітону  $l$  пов'язана з амплітудою  $s_0$  співвідношенням

$$l^2 = \frac{4H^3}{3s_0}, \quad (6.71)$$

а швидкість

$$c = c_0 \left(1 + \frac{s_0}{2H}\right). \quad (6.72)$$

Якщо  $s_0 \ll H$ , то останній вираз можна переписати у вигляді

$$c = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_0}{H}\right) \approx \sqrt{g(H+s_0)}. \quad (6.73)$$

Цю формулу ми вже записували під час якісного обговорення поведінки гравітаційних хвиль при наближенні їх до берега.

Важливо підкреслити, що солітон є стійкою структурою. Якщо спочатку співвідношення (6.71) не виконується і амплітуда  $s_0$  надто велика, то водяний горб розпадається на декілька менших горбиків, з яких і формуються солітони. Навпаки, якщо  $s_0$  надто мала, то такий низький горб розповзеться внаслідок дисперсії.

Згідно із сучасними уявленнями, більшість хвиль цунамі утворюються, коли достатньо великий, але безпечний в океані солітон викидається на берег. Підходячи до берега, він стає вищим і коротшим, і його висота стає співмірною з глибиною океану поблизу берега.

Накінець відзначимо, що на даний час виявлені солітони для хвиль різної природи. Так, наприклад, існують солітони під час поширення акустичних хвиль у кристалах, світлових імпульсів у волоконних світловодах, іонно-звукових хвиль у плазмі та ін. В усіх

випадках існування солітонів зумовлене взаємною компенсацією нелінійних і дисперсійних ефектів. Природно, що енергія, яка переноситься відокремленою хвилею будь-якої природи, буде дисипувати в теплоту, тому з поширенням амплітуда солітона буде намагатися зменшитися, що, природно, рано чи пізно призведе до його зникнення.

## ДОДАТОК

1. Задача про апроксимацію функцій тригонометричними поліномами.
2. Теорема Фур'є.
3. Історичні зауваження до поняття функції.
4. Клас функцій, що розкладаються в ряд Фур'є.
5. Метод комплексних величин: коли можна і коли не можна його застосовувати.
6. Ряд Фур'є в комплексній формі.
7. Явище Гіббса.

У цьому розділі ми звернемо увагу на деякі математичні прийоми, що широко використовують у теорії коливань – використання комплексних величин.

Запишемо

$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$  відомі формули:

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$$

$$\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

Ці формули дозволяють виразити синусоїдальні коливання через комплексні експоненціальні функції.

Будь-яку комплексну величину  $a + ib$  можна представити у вигляді  $Ae^{i\varphi}$ , де  $A$  і  $\varphi$  – дійсні величини, причому

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Під час множення комплексних величин фази їх просто додаються, що є досить зручною властивістю такого представлення.

Часто ми маємо справу з величинами виду

$$\xi = (a + ib)e^{i\omega t}. \quad (Д1)$$

Дійсна частина цього виразу дорівнює

$$(a + ib)e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi).$$

І шукана дійсна частина становить

$$A \cos(\omega t + \varphi).$$

Якщо коливання задано у вигляді (Д1), то добуток  $\xi \xi^*$  величини  $\xi$  на спряжену їй величину  $\xi^* = (a - ib)e^{-i\omega t}$

Дає квадрат амплітуди дійсної частини  $\xi$ :

$$\xi\xi^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = A^2 \quad (D2)$$

Для того, щоб знайти квадрат амплітуди, немає потреби переходити від виразу (D1) до його дійсної частини.

Розглянемо оптичну задачу про дифракційну ґратку, що ілюструє перевагу використання комплексних величин.

Коливання, що йдуть від сусідніх щілин ґратки, мають, внаслідок різниці шляхів, різницю фаз  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ .

У фокусі лінзи відбувається додавання  $m$  когерентних коливань ( $m$  – число щілин ґратки). Результуюче коливання в точці спостереження буде:

$$\cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \dots + \cos[\omega t + (m-1)\varphi]. \quad (D3)$$

Безпосередньо додати ці  $m$  членів не так просто. Скористаємося, однак, комплексним представленням: перший член суми є дійсною частиною від  $e^{i\omega t}$ , другий – дійсною частиною від  $e^{i(\omega t + \varphi)}$  і т.д.

Як відомо, дійсна частина суми комплексних величин є сумою дійсних частин доданків. Таку суму знайти доволі просто: вона рівна сумі геометричної прогресії з показником  $e^{i\varphi}$  і дорівнює

$$\xi = e^{i\omega t} \frac{e^{im\varphi} - 1}{e^i - 1} \quad (D4)$$

Сума (D3) дорівнює дійсній частині виразу (D4). Однак часто нас цікавить тільки квадрат амплітуди коливань (D3), тобто квадрат амплітуди  $A$  дійсної частини комплексного виразу (D4). Згідно (D2)

$$A^2 = \xi\xi^* = \frac{1 - \cos m\varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{\sin^2 \frac{m\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Розглянемо ще одну властивість комплексних величин, яка також відіграє важливу роль у тому, чому вони так часто використовуються в теорії коливань.

Нехай задана комплексна функція часу

$$f(t) + ig(t).$$

Її похідна

$$\dot{f} + i\dot{g}.$$

Тобто дійсна частина від похідної комплексної функції за дійсним аргументом є похідна від дійсної частини функції.

Нехай у нас є диференціальне рівняння

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = \cos \omega t. \quad (D5)$$

Можна знайти частинний розв'язок цього рівняння, працюючи з косинусом і синусом, однак простіше зробити так. Напишемо інше диференціальне рівняння:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

і будемо шукати розв'язок нового рівняння в комплексній формі:

$$y = Ae^{i\omega t}. \quad (D6)$$

Тоді для  $A$  отримаємо просте рівняння

$$A(-\omega^2 + i\omega k + \omega_0^2)e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

Дійсна частина отриманого таким шляхом виразу (D6) буде задовольняти диференціальне рівняння (D5). Це можливо тільки тому, що, підставляючи (D6) у диференціальне рівняння, ми тільки диференціювали і додавали. Однак таким прийомом слід користуватися з обережністю, оскільки такі дії не завжди правомірні. Нехай, наприклад,

$$y\dot{y} = \cos \omega t.$$

Чи можна розв'язувати дане рівняння, замінивши праву частину на  $e^{i\omega t}$ ? Не можна, і ця заміна нічого не дасть, тому що дійсна частина добутку не дорівнює добутку дійсних частин.

Отже, комплексні величини дуже зручні під час опису коливань і хвильових процесів, однак потрібно з обережністю ставитися до використання нелінійних операцій.

Перейдемо тепер до розгляду функцій періодичних, але не гармонічних, – до рядів Фур'є. Вся теорія цих рядів виникла з фізики – з питання про коливання струни.

Припустимо, що ми маємо періодичну функцію  $f(x)$  з періодом  $2\pi$  (звідси легко перейти до функції з будь-яким періодом). Постає питання, чи можна апроксимувати  $f(x)$  іншими періодичними функціями  $\varphi(x)$ , тобто замінимо  $f(x)$  іншими періодичними функціями так, щоб похибка під час заміни була дуже малою.

Як оцінку похибки виберемо середнє квадратичне відхилення:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx. \quad (D7)$$

Функцію  $\varphi(x)$  виберемо у вигляді

$$S_n = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \quad (Д8)$$

З тим самим періодом  $2\pi$ , що й вихідна функція  $f(x)$ . Питання ставиться так: потрібно вибрати  $(2n+1)$  коефіцієнтів  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$  таким чином, щоб середня квадратична похибка (Д7) була якомога меншою. Підставимо (Д8) у (Д7):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[ \alpha_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx. \end{aligned} \quad (Д9)$$

Далі введемо величини:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx \end{aligned} \quad (Д10)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, n)$

Які називаються коефіцієнтами Фур'є функції  $f(x)$ .

Гармонічні функції володіють такими властивостями:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin lxdx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lxdx &= \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lxdx &= \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases} \end{aligned} \quad (Д11)$$

$(k, l = 0, 1, 2, \dots)$

Скориставшись формулами (Д10) і (Д11), після перетворень, одержуємо з (Д9):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx + \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2] - \\ &- \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

У цьому виразі  $\alpha_k$  і  $\beta_k$  змінні. Їх вибирають таким чином, щоб  $\bar{\Delta}^2$  було найменшим. Це буде тоді, коли члени, що залежать від  $\alpha_k$  і  $\beta_k$  дорівнюватимуть нулю, тобто, коли коефіцієнти при косинусах і синусах у функції (Д8) дорівнюють відповідним коефіцієнтам Фур'є.

Похибка за такої апроксимації дорівнює

$$\bar{\Delta}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) dx - \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (Д12)$$

Тут необхідно відзначити дві чудові обставини.

Припустимо, що ми додаємо до замінуючої функції (Д8) ще один член з  $k = n+1$ . Тоді виявляється, що за найкращої апроксимації коефіцієнти при попередніх членах залишаться такими ж, як і раніше. В даному випадку найкраща апроксимація  $n$  членами не залежить від подальшого покращення апроксимації: перші члени непотрібно переглядати під час додавання нових. Це пояснюється тією властивістю синусів і косинусів, що інтеграл за період  $2\pi$  від добутку будь-яких двох різних функцій із сукупності  $\cos kx, \sin kx$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) дорівнює нулю (формули (Д11)). Функції, що володіють такою властивістю, називаються **ортогональними** функціями.

Сукупність функцій

$\cos t, \cos 2t, \cos 3t, \dots$

$\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots$

є прикладом сукупності ортогональних функцій в інтервалі  $(-\pi, +\pi)$ .

Перейдемо до другої чудової обставини. Виникає питання: чи є система функцій

$$\cos kx, \sin kx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (Д13)$$

замкнутою, тобто чи існує періодична функція з періодом  $2\pi$ , яка була б ортогональною до всіх цих функцій. Виявляється, що за  $n = \infty$  всяка функція, ортогональна до всіх функцій (Д13), тотожно дорівнює нулю, тобто, за  $n = \infty$  система (Д13) – замкнута.

Повернемося до виразу (Д12) для середньої квадратичної похибки. Чим більше береться членів у замінуючій функції (Д8), тим



похибка менша. Теорема Фур'є полягає в наступному: за деяких умов нескінченний ряд

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (Д14)$$

збігається і являє собою функцію  $f(x)$ .

Дуже важливо встановити, чи всяку періодичну функцію можна представити у вигляді ряду Фур'є (Д14). У зв'язку з цим цікаво прослідкувати історію задачі, представляючи функції рядами Фур'є. Першим питанням, яке тут виникло, було загальне питання про те, що таке функція.

Ейлер вважав, що існують аналітичні і геометричні функції. Ми одержуємо, казав він, аналітичні функції, беручи такі вирази як  $x$ ,  $x^2$ ,  $\sin x$  і т.д. Ми одержуємо геометричну функцію, якщо опишемо «вільною рукою» довільну криву. Дані погляди не зовсім відповідають сучасному визначенню функції:  $Y$  є функцією від  $x$ , якщо кожному значенню  $x$  відповідає певне значення  $Y$ .

Бернуллі, отримавши розв'язок у вигляді тригонометричного ряду (тобто за Ейлером, у вигляді «аналітичної функції»), стверджував, що ним отримано загальний розв'язок, що таким чином можна представити будь-яку функцію.

Це здавалося неймовірним. Адже коефіцієнти ряду  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  утворюють зліченну множину, в той час як «число» значень функції значно більше, множина цих значень більш потужна. Однак, Фур'є мав сміливість заявити, що абсолютно довільна (графічно задана) неперервна функція може бути представлена у вигляді тригонометричного ряду. І це вірно, тому що (як тепер відомо) неперервні функції зовсім не такі різноманітні, як це здається на перший погляд. Достатньо задати неперервну функцію в раціональних точках, щоб визначити її повністю. Іншими словами, неперервні функції задаються сукупністю своїх значень у раціональних точках. Однак ці точки складають множину такої ж потужності, як і коефіцієнти розкладу (зліченна множина).

Теорема Фур'є справедлива за певних обмежень (достатні умови того, що функція може бути представлена рядом Фур'є, були вказані Діріхле); рядом Фур'є можуть бути представлені не всі неперервні функції. З іншого боку, у вигляді рядів Фур'є може бути представлений певний клас розривних функцій, що мають тільки розриви першого роду (тобто такі, що і ліворуч, і праворуч від розриву функція має певне значення). Для того, щоб функція могла

бути представлена рядом Фур'є, вона повинна мати скінченне число розривів і не повинна мати нескінченне число максимумів і мінімумів. Наприклад, неперервну функцію  $\sin \frac{1}{x}$ , яка за  $x \rightarrow 0$  має нескінченно густі максимуми, не можна розкласти в ряд Фур'є.

Як швидко спадають коефіцієнти Фур'є? Ряд (Д14) збігається тим швидше, чим більш гладкою є функція  $f(x)$ . Якщо  $h$  – порядок розриву (тобто порядок найнижчої похідної, що терпить розрив), то асимптотично, за достатньо великих  $k$ , коефіцієнти спадають як  $\frac{1}{k^{h+1}}$ .

Синуси і косинуси – не єдина система ортогональних функцій, за якими можна розкладати довільну функцію. Існує нескінченна множина таких систем. Однак розклад за синусами і косинусами, тобто за гармонічними коливаннями, відіграв важливу роль у розвитку загальної теорії розкладу за ортогональними функціями. Проте розклад Фур'є відіграє величезну роль у розвитку теорії коливань.

Вище ми припускали, що функція  $f(x)$  періодична з періодом  $2\pi$ . Якщо вихідна функція має період  $\tau \neq 2\pi$ , то здійснивши заміну  $\frac{2\pi}{\tau}y = x$  приходимо до функції  $f\left(\frac{2\pi}{\tau}y\right) = g(y)$ . Розклад у ряд матиме вигляд:

$$\varphi(y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right) \right),$$

де

$$a_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \varphi(y) \cos\left(k \frac{2\pi y}{\tau}\right) dy$$

$$b_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \varphi(y) \sin\left(k \frac{2\pi y}{\tau}\right) dy.$$

Розглянемо випадок написання дійсного ряду Фур'є в комплексній формі.

Нехай дійсна функція  $f(x)$  має період  $2\pi$ . Замість  $a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Можна записати

$$\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}$$

Позначимо:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{ikx} dx$$

( $c_k$  і  $c_{-k}$  – комплексно спряжені). Тоді

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Останній запис являє собою комплексну форму звичайного ряду Фур'є, що представляє дійсну функцію.

Як було сказано вище, для того, щоб функцію  $f(x)$  можна було розкласти в ряд Фур'є, повинні виконуватись деякі обмеження. Така функція  $f(x)$  може бути розривною, але в неї повинно бути скінченне число розривів і вона не повинна мати нескінченно великого числа максимумів і мінімумів.

Що означає, якщо функція  $f(x)$  може бути розкладена в ряд Фур'є? Це означає, що для кожного значення  $x$  сума нескінченного ряду в правій частині (Д14) дорівнює відповідному значенню  $f(x)$ . Однак у місці розриву  $f(x)$  має два значення. Чому ж у даному випадку дорівнює ряд Фур'є? Ось результат математичного дослідження: в точках розриву  $x = a$  ряд Фур'є дає середнє арифметичне значень  $f(x)$  ліворуч і праворуч від точки розриву:

$$\frac{f(a+0) + f(a-0)}{2}$$

Отже, рядом Фур'є задається функція, визначена в усіх точках.

Існує ряд приладів, що дозволяють здійснити розклад за Фур'є. Якщо накреслити функцію, яка періодично повторюється, то певні прилади (типу планіметра) дозволяють послідовно визначити її коефіцієнти Фур'є. З допомогою таких приладів не можна розрахувати нескінченне число членів, однак для застосування завжди достатньо скінченного числа. Існують, наприклад, прилади, що розраховують 6 коефіцієнтів. Прилад Майкельсона дає 120 коефіцієнтів: 60 при синусах і 60 при косинусах. Він дозволяє проробити і

зворотну операцію: просумувати функцію за заданими коефіцієнтами розкладу Фур'є. Прилад Майкельсона дає суму Фур'є  $S_{60}$ . Це наближення, і йому відповідає неперервна крива. На сьогодні розроблені потужні комп'ютерні програми, що дозволяють здійснити аналіз складних коливних процесів, наприклад, спектри фононних коливань у твердих тілах, взаємодії фононів із зовнішньою ультразвуковою хвилею і т.п. Однак основні принципи побудови таких розкладів залишаються незмінними.

Коли проводиться сумування скінченного числа членів розкладу Фур'є розривної функції, можна очікувати, що буде отримана крива, яка всюди буде мало відрізнятися від кривої  $f(x)$ . В

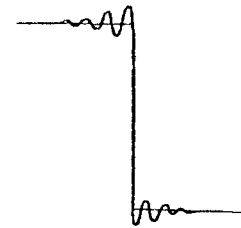


Рис.Д1.

дійсності отримуємо інакший результат: апроксимуюча крива добре збігається з кривою  $f(x)$  всюди, крім околу місць розриву; там воно утворює «хвости» чи осциляції (рис.Д1), висота яких не зменшується зі збільшенням числа членів розкладу, що сумуються (вона досягає приблизно  $1/10$  величини стрибка), однак у яких зі збільшенням цього числа осциляції згущуються і стискаються до точок розриву.

Можна припустити, що поява «хвостів» викликана дефектом приладу, однак це невірно. Як показав Гіббс, це – експериментальне підтвердження суто математичного факту: нерівномірну збіжність ряду Фур'є в точках розриву  $f(x)$ . Наявність осцилюючих «хвостів» у скінченних сум Фур'є в околі точок розриву функції, що розкладається, отримало назву явища Гіббса.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Элементарный учебник физики. 5-е изд. М., Наука. – Т.3: Колебания и волны, оптика, строение атома / Под ред. Г.С. Ландсберга. – 1967. – 532 с.
2. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики Т.1. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. Изд 6-е перераб. Учеб. Пособие для втузов. – М.: Наука, – 1974. – 335 с.
3. Леденев А.Н. Физика: Учеб. Пособие в 5 кн. 4. Колебания и волны. Оптика. – М.: Физматлит., 2005. – 256 с.
4. Кернер Б.С., Осипов В.В. Локализ. сильнонеравновес. области в однород. диссипатив. системах. – М.: Наука, 1991. – 197 с.
5. Лем Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. Н.Т. Пашенка; Под ред. В.Е. Захарова. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
6. В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев. Университетский курс общей физики. Колебания и волны. – М.: Физический факультет МГУ, 2001. – 121 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1988. – 215 с.
8. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэхндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.1. вып.3-4, Излучение. Волны. Кванты. Кинетика. Теплота. Звук., 1976. – 496 с.
9. Брэгг У. Мир света. Мир звука. Перевод с англ. Под ред. И.В.Обреимова. – М.: Наука, 1967. – 335с.
10. Вуд А. Звуковые волны и их применение. Изд 2-е испр. – М.: Ком. Книга, 2006. –144 с.
11. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М.: Наука, 1991. – 414 с.
12. Шевьев Ю.П., Чабанов В.Е. Некоторые вопросы диагностики материалов акустическими методами. – Л.: Изд. Ленингр. ун-та, 1977. – 149 с.

## Зміст

Лекція 1.....	5
1.1. Незгасаючі гармонічні коливання з одним ступенем вільності .	7
1.1.1. Коливання математичного маятника.....	8
1.2. Метод векторних діаграм.....	15
1.3. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	17
1.4. Фазовий портрет коливної системи.....	20
1.5. Негармонічні коливання математичного маятника.....	24
1.6. Вільні коливання в дисипативних системах з в'язким тертям .	26
1.7. Згасання коливань у системах із сухим тертям.....	32
Лекція 2.....	34
2.1. Вимушені коливання під дією гармонічної сили.....	35
2.2. Режими повільних, швидких і резонансних коливань.....	37
2.2.1. Повільні коливання.....	37
2.2.2. Швидкі коливання.....	37
2.2.3. Резонансний режим.....	38
2.3. Амплітудно-частотні і фазово-частотні характеристики.....	40
2.3.1. Метод комплексних амплітуд.....	40
2.3.2. Вимушені коливання з довільною частотою.....	40
2.4. Балістичний режим коливань.....	45
2.5. Усталення коливань.....	46
2.6. Характеристики різних коливних систем.....	47
2.7. Параметричні коливання.....	50
2.8. Автоколивання.....	53
2.9. Маятник на валу, що обертається (маятник Фруда).....	54
Лекція 3.....	59
3.1. Вільні незгасаючі коливання в системах з двома ступенями вільності.....	60
3.2. Методика аналізу коливань зв'язаних осциляторів.....	67
3.2.1. Співвідношення між парціальними і нормальними частотами.....	69
3.3. Згасання коливань.....	70
3.4. Енергія коливної системи та її дисипація.....	71
3.5. Вимушені коливання.....	72
3.6. Коливання систем з багатьма ступенями вільності.....	74
3.7. Загальний випадок руху неперервної струни і Фур'є-аналіз...	79
3.7.1. Рух струни, закріпленої на кінцях.....	80

3.7.2. Ряди Фур'є для функції з нулями на кінцях.....	80
3.7.3. Розрахунок коефіцієнтів ряду Фур'є.....	82
Лекція 4.....	84
4.1. Поширення збурень у системі з великим числом ступенів вільності.....	84
4.2. Збудження хвиль.....	87
4.2.1. Група хвиль та її швидкість.....	92
4.3. Хвильове рівняння.....	95
4.4. Хвилі в суцільному шнурі. Відбивання хвиль.....	97
4.5. Збудження стоячих хвиль у шнурі. Моді коливань.....	102
4.6. Хвилі в пружних тілах.....	105
4.6.1. Поперечні хвилі.....	105
4.6.2. Енергія, що переноситься хвилею.....	107
4.7. Поздовжні хвилі.....	111
4.7.1. Швидкість хвиль у тонкому стержні.....	114
4.7.2. Швидкість хвиль у товстому стержні.....	114
4.8. Явища на межі розділу двох середовищ.....	117
Лекція 5.....	120
5.1. Теплові коливання кристалічної ґратки твердих тіл. Акустичні фонони.....	120
5.2. Об'ємні сейсмічні хвилі.....	122
5.3. Поверхневі сейсмічні хвилі.....	127
5.4. Хвилі в рідинах і газах.....	128
5.5. Енергія, що переноситься звуковою хвилею.....	130
5.5.1. Поглинання звуку.....	132
5.5.2. Випромінювачі звуку.....	133
5.6. Застосування акустичних методів.....	135
5.6.1. Основні характеристики звуку.....	136
5.6.2. Закон Вебера-Фехнера. Діаграма слуху.....	139
5.8. Акустичні резонатори.....	142
5.8.1. Деякі відомості про музичні інструменти.....	146
5.9. Ефект Допплера.....	147
5.9.1. Бінауральний ефект.....	149
5.10. Інтерференція хвиль.....	150
5.10.1. Дифракція хвиль.....	153
Лекція 6.....	157
6.1. Хвилі на поверхні рідини. Гравітаційні хвилі.....	157
6.1.1. Хвилі глибокої води.....	161
6.1.2. Хвилі мілкої води.....	162
6.1.3. Характер руху частинок рідини.....	163
6.2. Капілярні хвилі.....	165

6.3. Хвилі цунамі.....	168
6.4. Внутрішні гравітаційні та інші хвилі.....	168
6.5. Поширення акустичних хвиль скінченної амплітуди.....	169
6.6. Лінійний і нелінійний режими поширення.....	171
6.6.1. Лінійний режим ( $ \delta\rho  \ll \rho_0,  \delta p  \ll p_0$ ).....	171
6.6.2. Нелінійний режим ( $ \delta\rho  \sim \rho_0,  \delta p  \sim p_0$ ).....	172
6.7. Відокремлені хвилі (солітони).....	181
Додаток.....	185
Використана література.....	194

Навчальний посібник

**Остафійчук Богдан Костянтинович**  
**Гасюк Іван Михайлович**  
**Кайкан Лариса Степанівна**

## **КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ**

**Курс лекцій**

В авторській редакції

НБ ПНУС



787330

Головний редактор *Василь Головчак*

ISBN 978-966-640-321-9

Підп. до друку 31.10.2011.  
Формат 60x84/16. Папір офсет. Гарнітура "Times New Roman".  
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 24,1.  
Наклад 300 пр. Зам. № 1.

Видавець і виготовлювач  
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника  
76025, м. Івано-Франківськ,  
вул. С. Бандери, 1, тел.: 71-56-22  
E-mail: [vdvcit@pu.if.ua](mailto:vdvcit@pu.if.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2718 від 12.12.2006