853

Р. КУРАНТ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОНТИ • ГТТИ • 1934

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

BAND III

FUNKTIONENTHEORIE

von

A. HURWITZ und R. COURANT

DRITTE AUFLAGE

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

3377
517.2
К93

Р. КУРАНТ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ПЕРЕВОД С ТРЕТЬЕГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
Ю. В. ИКОРНИКОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Н. Е. КОЧИНА

853
4446
4 НОЯ 1941
Університетська бібліотека
№ 2588
Студентський відділ
Університетська бібліотека
№ 25473
Студентський відділ
НБ ПНУС
853

Допущено Наркомпросом в качестве учебника для вузов на 1934/1935 учебный год

ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1934 МОСКВА

ОТ РЕДАКТОРА.

Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой в немецком оригинале вторую половину третьего тома немецкой серии „Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften“.

В виду того, что обе половины этого тома, написаны разными авторами и представляют каждая самостоятельное целое, взаимно дополняющее друг друга, Технико-теоретическое издательство решило издать переводы обеих частей тома отдельными книгами, первая из которых уже вышла в свет под заглавием: А. Гурвиц, Теория функций комплексной переменной и эллиптических функций.

Н. Кочин.

2-я типография ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, проспект Красных Командиров, 29.

ВВЕДЕНИЕ.

При развитии теории функций комплексной переменной можно исходить из различных точек зрения. Прежде всего, можно положить в основу простейшие явные выражения относительно z, именно, полиномы $c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, и затем, путем предельного перехода, увеличивая беспредельно степень полинома, перейти к более общим функциям, представимым „степенными рядами". На этой основе воздвиг здание теории аналитических функций Вейерштрасс, и изложению этой теории посвящен курс Гурвица, содержащий общую теорию функций [1]).

Однако, при развитии теории функций можно избрать и другой путь, в некоторых отношениях более простой. Именно, пытаются охарактеризовать аналитические функции такими свойствами, которые опираются на геометрические представления и позволяют с большей легкостью, чем степенные ряды, обозреть поведение функции в целом. Построение теории функций с такой точки зрения примыкает в основном к работам Римана, проложившим новые пути и основанным не только на геометрических, но и на физических представлениях.

Целью настоящей книги и является: дать вводный обзор этой „геометрической теории функций".

---

1) *А. Гурвиц*. Теория аналитических и эллиптических функций, перев. с 3 нем. изд., ГТТИ, 1933. В дальнейшем эту книгу будем цитировать просто Гурвиц.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ.

§ 1. Комплексные числа.

Приведем здесь без доказательства некоторые элементарные теоремы, относящиеся к основным понятиям теории функций. Эти теоремы должны быть знакомы читателю и в дальнейшем они будут предполагаться известными.

Комплексное число определяется как пара (a, b) „вещественных“ чисел a, b и обозначается также символом $z = a + bi$. Комплексное число $a + (-b)\, i$ называется *сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается символом $\bar{z}$. Геометрически комплексное число $a + bi$ обыкновенно изображают в некоторой плоскости точкой с прямоугольными координатами a и b. Часто поэтому говорят, не придавая этому существенного значения, о точке $z = a + bi$ вместо того, чтобы говорить о числе $z = a + bi$.

Под *вещественным* числом a мы будем понимать в дальнейшем пару чисел $(a, 0)$. Напротив, каждую пару чисел вида $(0, b)$ будем называть *чисто мнимым* числом и для краткости обозначать символом bi. В комплексном числе $z = a + bi$ число a называют *вещественной частью*, число b—*мнимой частью* числа z и обозначают их соответственно символами $\Re z$ и $\Im z$.

Правила сложения и умножения комплексных чисел определяются равенствами:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i\,;$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

Все обычные правила вычислений имеют место и при этих новых определениях. В частности вычитание получается как действие, обратное сложению, и деление на комплексное число, отличное от нуля,—как действие, обратное умножению.

Далее получается

$$i^2 = -1.$$

Вместо прямоугольных координат a, b точку $z = a + bi$ можно определить ее полярными координатами r, φ, где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \ (\text{при } z \neq 0),$$

причем φ определено лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π, и может быть выбираемо, например, в промежутке $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Из обратных формул

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi.$$

будем иметь, что

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Число r — „радиус-вектор“ точки z, называется *абсолютной величиной* или *модулем* числа z и обозначается через $|z|$. Число φ называется *амплитудой* или *аргументом* числа z и обозначается через $\arg z$. Величина $|z_1 - z_2|$ обозначает геометрически расстояние между точками z_1 и z_2.

Для абсолютных величин комплексных чисел имеют место формулы

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \pm z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Если a какое-нибудь комплексное число, ε положительное вещественное число, то множество всех чисел z, удовлетворяющих неравенству

$$|z - a| < \varepsilon,$$

называется *окрестностью* a. Геометрически ей соответствует внутренность круга радиуса ε с центром в точке a.

Если M какое-нибудь *множество* комплексных чисел z (геометрически точек плоскости), то точка ζ называется *точкой сгущения* этого множества M, если в каждой окрестности точки ζ лежит по крайней мере одна точка z множества M, отличная от ζ. Но тогда, в каждой окрестности точки ζ будет расположено бесконечно много точек множества M. Точка ζ сама не обязательно должна принадлежать к M.

Последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ называется *сходящейся*, если существует такое комплексное число z, что в каждой окрестности z расположены все числа z_n, за исключением конечного числа их, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ должно соответствовать такое целое положительное число N, чтобы при всяком $n \geqslant N$ имело бы место неравенство

$$|z_n - z| < \varepsilon.$$

Такое (однозначно определенное) число z называется *пределом* (или *limes*) последовательности и будет вместе с тем единственной точкой сгущения этой последовательности. В этом случае пишут

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

Бесконечный ряд

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

называется сходящимся, если последовательность частичных сумм $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$, где

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

будет сходящейся. Число $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n$ называется *суммою* ряда.

Обыкновенно пишут так:

$$s = z_1 + z_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Пусть дано множество комплексных чисел M и пусть каждому числу z этого множества соответствует каким-либо образом последовательность чисел $u_1(z), u_2(z), \ldots u_n(z) \ldots$ Такие последовательности называются *равномерно сходящимися* на данном множестве M, если они не только сходятся для каждого отдельного значения z (принадлежащего к M) к определенным числам $u = u(z)$, но если, кроме того, каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое, *независящее* от z натуральное число N, что при всяком $n \geqslant N$ будет иметь место неравенство $|u_n(z) - u(z)| < \varepsilon$, для всех z, принадлежащих к M.

Аналогично, бесконечный ряд

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$$

называется *равномерно сходящимся* на множестве M, если последовательность частичных сумм $S_1(z), S_2(z), \ldots S_n(z), \ldots$, где

$$S_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

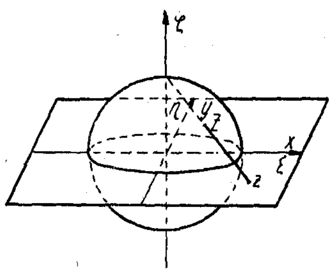
равномерно сходится на M. Например „геометрический ряд"

$$1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

равномерно сходится в круге $|z| \leqslant R$, где $0 < R < 1$, к сумме $\dfrac{1}{1-z}$.

Во многих случаях полезно другое геометрическое представление комплексных чисел — при помощи точек шаровой поверхности, получающееся *стереографической проекцией* из представления при помощи точек плоскости.

Выберем плоскость z за экваториальную плоскость шара радиуса 1, центр которого расположен в нулевой точке плоскости и будем проектировать каждую точку плоскости $z = x + iy$ из северного полюса шара на его поверхность (черт. 1) [1]). Проведем в пространстве прямоугольные координаты ξ, η, ζ так, чтобы оси ξ, η совпадали соответственно с осями x и y плоскости и направим положительную ось ζ к северному полюсу. Между координа-



Черт. 1.

[1]) Другой способ стереографической проекции, когда плоскость z касается шара в южном полюсе, тоже часто употребляется. Ср. об этом *Гурвиц*, часть I, гл. 1, § 3 (стр. 21).

тами x, y точки z и пространственными координатами ξ, η, ζ соответствующей точки сферы имеют место такие соотношения:

$$\xi = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad \eta = \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \quad \zeta = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \tag{1}$$

Единственной точкой сферы, которой не соответствует при этом представлении никакая точка плоскости, будет северный полюс. Но если точка Z сферы приближается к северному полюсу, то соответствующая точка z плоскости будет удаляться как угодно далеко от нулевой точки плоскости z. Точки плоскости поэтому часто дополняют еще идеальной „бесконечно удаленной" точкой, рассматривая при этом северный полюс сферы как изображение этой бесконечно удаленной точки и обозначая ее символом ∞.

Расстояние d между точками $Z_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $Z_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ шара, соответствующими комплексным числам $z_1 = x_1 + iy$, и $z_2 = x_2 + iy_2$, дается формулой

$$d = \sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 + (\zeta_1-\zeta_2)^2}.$$

Подставляя значения (1), после простых вычислений получаем отсюда формулу

$$d = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)}}.$$

Такое измерение расстояния между двумя точками сферы в пространстве имеет то преимущество, что оно дает конечное значение и тогда, когда одна из двух точек плоскости z будет бесконечно удаленной.

§ 2. Основные геометрические понятия [1].

Непрерывною кривой называется множество точек, координаты которых x и y заданы, как непрерывные функции

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

[1]) Вопросы типа, рассматриваемого в § 2, относятся к *топологии* или к *анализу положения* (*Analysis situs*). Развитие этой дисциплины пошло

вещественной переменной t в некотором промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Для целей геометрической теории функций комплексной переменной можно ограничиться в большинстве случаев некоторым гораздо более специальным классом кривых, что мы и будем делать. Мы будем рассматривать прежде всего *гладкие кривые*, т. е. кривые, имеющие в каждой точке (включая начальную и конечную точку) определенную касательную, направление которой меняется непрерывным образом, когда точка описывает кривую. Конечное число таких гладких кривых, соединенных последовательно друг с другом, составляют *кусочно-гладкую кривую* C. Последняя может иметь в точках соединения друг с другом двух гладких кусков угловые точки или точки возврата.

Когда будет говориться о кривой, то всегда будет подразумеваться кусочно-гладкая кривая, если не будет сделана специальная оговорка. Вместо термина „кривая" мы будем иногда употреблять выражение *путь*. Кривая C аналитически задается двумя уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi((t)$ — непрерывные вещественные функции параметра t в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, имеющие кусочно-непрерывные [1]) производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, которые нигде не обращаются одновременно в нуль. Возрастающим значениям параметра соответствует при этом определенное

в направлении все большего и большего вытеснения „наивного наглядного представления". В нашем изложении, напротив, нет надобности стремиться к полной общности и абстрактности указанной теории. Мы не будем, поэтому, отказываться от наглядных вспомогательных средств. Однако, в дальнейшем встретится необходимость еще несколько обобщить изложенные в этом параграфе топологические положения.

Полное изложение топологии находится в т. VIII немецкой серии: „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften" *B. v. Kerékjártó*, Vorlesungen über Topologie I, Berlin 1923.

[1]) Функция называется *кусочно-непрерывной* в замкнутом или открытом промежутке, если этот промежуток можно разложить на конечное число частных промежутков так, чтобы внутри каждого частного промежутка функция была бы задана и непрерывна и чтобы при приближении извнутри рассматриваемого частного промежутка к точке деления функция стремилась к конечному пределу. Начальная и конечная точки всего промежутка только тогда причисляются к этим „точкам деления", если этот промежуток замкнутый. Задавать значения функции в точках деления нет надобности.

направление обхода кривой. От только что рассмотренных кривых, имеющих начальную и конечную точки, отличают кривые, у которых эти точки или не причисляются к кривым или вообще не существуют. Такие кривые будем называть *открытыми* кривыми. Аналитически такие кривые задаются опять двумя уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции, имеющие кусочно-непрерывные и нигде не обращающиеся одновременно в нуль производные, но параметр t здесь меняется уже в *открытом* промежутке $t_1<t<t_2$. Примером такой кривой является $x=t,\ y=\sin\frac{1}{t},\ 0<t<2\pi$.

Кривая называется *замкнутой*, если ее начальная и конечная точки совпадают, т. е. если $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ и $\psi(t_1)=\psi(t_2)$. В этом случае, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ можно, очевидно, рассматривать как непрерывные периодические функции от t с одним и тем же периодом t_2-t_1 (например равным 1), так что для всех значений t будут иметь место уравнения

$$\varphi(t+1)=\varphi(t),\ \psi(t+1)=\psi(t).$$

Кривая называется *простой* или *не имеющей двойных точек*, если она сама себя не пересекает и не касается, т. е. если

$$[\varphi(t)-\varphi(t^*)]^2+[\psi(t)-\psi(t^*)]^2\neq 0,$$

как только $t-t^*$ отлично от нуля и для замкнутой кривой не равно периоду. Это определение не зависит от выбора параметра t и (для замкнутых кривых) от выбора начальной точки. Иногда требуется кусочно-гладкую кривую „аппроксимировать“ некоторой последовательностью кусочногладких кривых $C_1, C_2\ldots$ Мы будем говорить, что последовательность кривых C_n *аппроксимирует* кривую C, если для кривых C_n можно выбрать такие параметрические представления

$$x=\varphi_n(t),\quad y=\psi_n(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

чтобы было

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t),\qquad \lim_{n\to\infty}\psi_n(t)=\psi(t).$$

Уточним понятие аппроксимации, а именно, потребуем, чтобы кривые C_n, при n достаточно большом, имели направление сколь угодно близкое к направлению кривой C в соответствующих точках, т. е. в тех точках, которые соответствуют одному и тому же значению t (за исключением точек кривой C, являющихся угловыми точками или точками возврата). Аналитически это условие можно формулировать так: пусть $t=\tau_1$, $t=\tau_2, \ldots$ будут те значения t, для которых направление касательной к C перестает быть непрерывным. Выделив такие значения t промежутками $|t-\tau_\nu| < \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число, будем предполагать, что для всех остальных значений t в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ не только функции $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ равномерно приближаются к $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, когда n неограниченно растет:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \psi(t),$$

но и производные $\varphi_n'(t)$, $\psi_n'(t)$ тоже равномерно приближаются к

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(t) = \varphi'(t), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n'(t) = \psi'(t).$$

При этом последние равенства мы должны понимать таким образом, что в угловых точках кривой C_n, вместо $\varphi_n'(t)$ и $\psi_n'(t)$ можно подставить как правую, так и левую производные (число угловых точек кривой C_n может быть больше числа угловых точек кривой C и может даже неограниченно возрастать при $n\to\infty$).

При выполнении этих условий мы будем говорить, что кривые C_n *гладко аппроксимируют* кривую C.

В частности, каждую кусочно-гладкую кривую можно гладко аппроксимировать ломаными линиями. Такие аппроксимирующие ломаные линии могут быть, например, составлены из надлежащим образом выбранных отрезков касательных или хорд заданной кривой [1]). Если кривая

[1]) Отсюда следует что кривую C всегда можно гладко аппроксимировать кривыми C_n, длина которых ограничена одним и тем же числом. Но не следует думать, что, обратно, если кривые C_n гладко аппроксимируют кривую C, то длины кривых C_n ограничены в своей совокупности. Так например, если C есть отрезок оси x: $0 \leqslant x \leqslant 1$, а C

простая, то можно поставить еще дальнейшее условие, чтобы она нигде не пересекала бы аппроксимирующую ломаную линию.

После этих замечаний о кривых перейдем к более общим множествам точек. Бесконечно удаленную точку будем пока исключать из рассмотрения.

Два множества точек называются *раздельными*, если они не имеют общих точек.

Множество точек называется *замкнутым*, если к нему принадлежат все его точки сгущения, если таковые существуют. Множество точек называется *связным*, если каждые две его точки могут быть соединены такой непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Областью в плоскости называется множество точек, обладающее следующими двумя свойствами: 1) *если какая-нибудь точка принадлежит данному множеству, то и некоторая окрестность этой точки принадлежит этому множеству;* 2) *рассматриваемое множество точек должно быть связным. Граничной точкой области* называется такая точка плоскости, каждая сколь угодно малая окрестность которой содержит как точки, принадлежащие области, так и точки, не принадлежащие к ней. Множество всех граничных точек называется *контуром* или *границей* области. По определению области, данному нами выше, граничные точки области не принадлежат последней; поэтому говорят, что область есть *открытое* множество точек или еще, что область есть множество, состоящее только из *внутренних* точек. Если кривая C состоит только из граничных точек некоторой области G, то говорят, что эта область G *ограничена* кривой C. Причисляя к области ее граничные точки, будем говорить о *замкнутой области*, хотя применение здесь слова „область“ в связи с нашим определением последней представляет маленькую неточность языка.

кривая, заданная уравнениями: $y=0$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n^n\pi}$ и $\frac{1}{n\pi} \leqslant x \leqslant 1$ и $y = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{x}$ при $\frac{1}{n^n\pi} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n\pi}$, то кривые C_n гладко аппроксимируют кривую C и в то же время длина C_n превосходит $2(n^{n-1}-1)$.

(*Прим. ред.*)

Если все точки некоторой области G' принадлежат открытой или замкнутой области G, то G' называется областью *внутренней к области* G. Если же все точки некоторой замкнутой области B принадлежат к открытой или замкнутой области G, то B называется *замкнутой областью, внутренней к области* G.

Совокупность всех точек плоскости, не принадлежащих к внутренним или граничным точкам области G, называется *множеством, внешним к области* G. Область в плоскости называется *ограниченной*, если она вся целиком лежит внутри некоторого круга. Мы будем сперва рассматривать только ограниченные области.

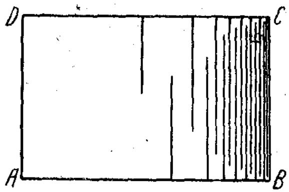
Часто бывает полезно следующее замечание. *Если C будет кусочно-гладкая (не открытая) кривая, расположенная вся внутри некоторой ограниченной области G, то существует такое положительное число d, что всякий круг радиуса d с центром в какой-либо точке этой кривой будет весь расположен внутри G. То же самое имеет место, если вместо кривой будем рассматривать какую-нибудь замкнутую область, внутреннюю к G.*

Действительно, в противном случае должна существовать такая последовательность точек $P_1, P_2, \ldots$ кривой C, что радиус наибольшего круга с центром в точке P_n, все внутренние точки которого принадлежат еще области G, будет стремиться к нулю, когда n неограниченно возрастает. Каждая точка сгущения этой последовательности будет, с одной стороны, точкой кривой C, а с другой стороны, она не может принадлежать области G, так как никакая окрестность этой точки не принадлежит G. Получилось противоречие.

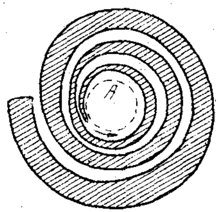
Граничные точки области могут образовать чрезвычайно сложное множество, которое не подходит под понятие кривой, определенное нами выше, и с трудом поддается наглядному представлению. Рассмотрим, например, две области, изображенные на черт. 2 и 3. На черт. 2 внутри прямоугольника $ABCD$ проведены прямолинейные разрезы попеременно от сторон AB и CD, длина которых все увеличивается по мере приближения к стороне BC и которые сгущаются к этой стороне. Областью в этом случае будет то множество точек, которое остается от прямоугольника, если из него удалить все точки, лежащие на этих разрезах, а также все точки контура прямоугольника. На черт. 3

область закручивается асимптотически около предельной кривой A.

Мы сперва не будем рассматривать области, ограниченные такими сложными контурами, а будем иметь в виду только такие области, контур которых образован конечным числом кусочно-гладких кривых. В частности, особенно важную роль будут играть те области, контуром которых служит одна единственная простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Примером такой области может служить область, образованная всеми внутренними точками круга. Далее, в случае кусочно-гладких кривых мы будем считать наглядно очевидной *теоремy Жордана* (*Jordan*).



Черт. 2.



Черт. 3.

Эта теорема состоит в следующем: *каждая простая замкнутая кривая разлагает множество всех точек плоскости, не лежащих на этой кривой, на две раздельных области, на ограниченную „внутреннюю область" и на неограниченную „внешнюю область"* [1]).

[1]) Доказательство этого предложения см. например у *B. v. Kerékjártó*, l. c. стр. 59. Наметим здесь вкратце доказательство теоремы Жордана для многоугольников. Рассмотрим простую замкнутую ломаную линию П и какое-нибудь направление r, не параллельное ни одной из ее сторон. Через каждую точку P плоскости, не лежащую на П, проведем луч, параллельный r. Если этот луч пересекает ломаную П в четном числе точек, то причислим точку P к множеству точек M_1, в противном случае к множеству точек M_2 (если точка пересечения r с П совпадает с вершиной П, то такую вершину мы причисляем к точкам пересечения только тогда, если ломаная переходит в этой вершине с одной стороны прямой r на другую). Очень легко видеть, что П разделяет оба множества точек друг от друга и что вместе с каждой точкой множества M_1 последнему принадлежат и точки некоторой ее окрестности (тоже для M_2). Граничными точками M_1 (тоже для M_2) будут поэтому только точки ломаной П, и притом все эти точки. До сих пор мы не пользовались отсутствием двойных точек у П; *следовательно, каж-*

3377.

Мы не будем в дальнейшем пользоваться этой теоремой во всей ее общности, а ограничимся применением только того частного случая, который изложен в только что приведенном примечании.

Мы будем пользоваться далее в разнообразных случаях тем обстоятельством, что многоугольную область, лежащую внутри замкнутой ломаной линии, можно разложить на конечное число треугольников [1]). Ограниченная область, контур которой состоит из кусочно-гладких кривых, называется *односвязной*, если ее граничные точки образуют одно единственное связное множество точек, например, простую замкнутую кривую. Такая односвязная область G обладает тем свойством, что многоугольная область, лежащая внутри всякой простой замкнутой ломаной линии, расположенной внутри G, также принадлежит целиком к области G. Действительно, если простая замкнутая ломаная линия Π вся расположена внутри G, то контур области G будет расположен весь или внутри или вне Π, так как он не пересекает Π. В первом случае вся внешняя для Π область будет принадлежать области G, а во втором случае вся внутренняя для Π область. Первый случай должен быть исклю-

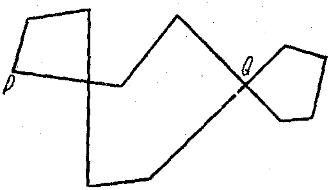
---

дая замкнутая ломаная линия ограничивает два открытых множества точек M_1 и M_2. Если M_1 (или M_2) состоит из нескольких областей, то контур каждой из них будет очевидно состоять из частей отрезков, образующих Π, и будет тоже замкнутой ломаной линией. Если же Π является простой линией, то не существует, кроме Π, другой замкнутой ломаной линии, которая составляла бы часть Π, и следовательно, каждое из множеств M_1 и M_2 может состоять только из одной области. Полученные результаты и составляют содержание теоремы Жордана для случая замкнутой ломаной линии Π.

[1]) Возможность такого разложения доказывается так. Для выпуклого многоугольника разложимость на треугольники непосредственно очевидна, ибо стоит только какую-нибудь внутреннюю его точку соединить со всеми его вершинами, чтобы получилось такое разложение. Если Π произвольная замкнутая ломаная линия, то продолжим все ее стороны до бесконечности в том и другом направлении. При этом вся плоскость разделится на конечное число многоугольных полей F, из которых одно или несколько образуют внутреннюю для Π область. Если g одна из прямых, ограничивающих поле F, и H — та, ограниченная g полуплоскость, которой принадлежит F, то поле F будет образовано множеством всех точек, которые принадлежат всем только что определенным полуплоскостям H. Так как все эти полуплоскости являются выпуклыми областями, то общее им множество точек, т. е. F, должно быть также выпуклым. Таким образом, внутренняя для Π область разложена на конечное число выпуклых многоугольных областей и следовательно теорема о разложении доказана и в общем случае.

чен, так как область G ограничена. Таким образом, многоугольная область внутри Π принадлежит области G. Доказанное только что свойство, что область внутри простой замкнутой ломаной линии Π, расположенной в области G, также принадлежит G, является внутренним свойством самой области G, не имеющим уже более отношения к контуру области. Это свойство будет единственным свойством односвязных областей, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Оно могло бы поэтому также служить определелением односвязности области. *Это новое определение распространяется при этом и на такие области, которые не ограничены кусочно-гладкими кривыми.*

Из этого свойства следует, что *в плоской односвязной области каждую замкнутую ломаную линию можно стянуть непрерывным изменением к любой из ее точек, которая остается неподвижной при этом изменении.*



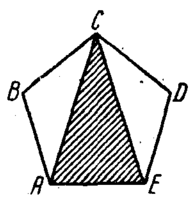
Черт. 4.

Прежде всего, каждую замкнутую ломаную линию можно разложить на простые. В этом можно убедиться, отделив простую замкнутую ломаную линию от не простой следующим образом. Если будем обходить ломаную (черт. 4) из вершины P, то найдется последняя точка Q среди тех, которые после их прохождения мы встретим еще только один раз (для простого контура многоугольника такой точкой будет сама точка P). Та часть первоначальной ломаной, которая пробегается между этими двумя прохождениями через точку Q, образует простой контур многоугольника, пробегаемый один раз. Отделяя этот контур и применяя тот же процесс в случае нужды несколько раз к оставшейся ломаной линии, придем в конце концов к простому контуру многоугольника. Таким образом, предложение достаточно доказать для простого контура многоугольника. Если Π простая замкнутая ломаная линия, расположенная в G, то внутренняя для Π область M тоже принадлежит G. Покажем, что Π можно свести в точку не выходя даже из замкнутой области M. Если M треугольник, то это очевидно. Если область M образована из n треугольников, то воспользуемся методом индукции. Пусть $n > 1$. Если от M отнять один из граничных треугольников (т. е. имеющих одну или две стороны общих с П), то останется область M', состоящая из $(n-1)$ треугольников. Ее контур П′ можно внутри области M непрерывно перевести в контур области M, так как сторону треугольника можно непрерывным образом деформировать в две другие стороны, оставаясь внутри треугольника. Обратной деформацией можно перевести П в П′. Деформированная ломаная линия П′ может оказаться не простой [1]; но она ограничивает область, состоящую меньше чем из n треугольников, и те простые части, на которые она может быть разложена, в случае когда сама не является простой, ограничивают области, состоящие из еще меньшего числа треугольников. Поэтому можно использовать основное предположение метода индукции (справедливость теоремы для областей, состоящих из числа треугольников, меньшего n). Таким образом П′, а значит и П можно свести непрерывным изменением к любой его точке.

Это свойство также можно принять за определение односвязности. Такое определение годится не только для плоских областей, но и для областей, расположенных в пространстве или на „поверхности Римана“ (ср. гл. V, § 3).

Если область односвязная и ограничена кусочно-гладкими кривыми, то под *положительным обходом* области будем понимать обход контурных кривых в таком направлении, что на всякой гладкой дуге кривой касательная, направленная по направлению обхода, после поворота в положительном направлении [2] на угол $\frac{\pi}{2}$ переходит в нормаль, направленную внутрь области. В этом случае будем также для краткости говорить, что область при обходе остается влево.

Заметим, что в случае не простых



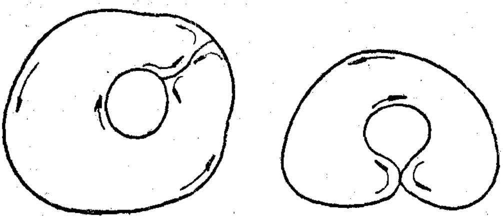
Черт. 4а.

[1]) Например в случае, если за M взять пятиугольник $ABCDE$ (черт. 4а), за выкидываемый граничный треугольник ACE и следовательно за M' совокупность треугольников ABC и CDE. *Прим. ред.*

[2]) Положительным направлением вращения будем называть такое направление вращения, при котором положительная ось X переходит кратчайшим путем в положительную ось Y.

контурных кривых также можно установить положительное направление обхода области, как показывает например черт. 5.

Ограниченную область, контуром которой служат $2, 3, \ldots, n$ замкнутых кривых, не имеющих попарно общих точек, будем называть *двусвязной*, *трехсвязной*, *n-связной* и вообще *многосвязной* областью или областью *конечно-кратной связности*. Понятия односвязности и многосвязности мы будем применять, конечно, надлежащим образом и к замкнутым областям. *Разрезом* или *сечением* произвольной области будем называть простую кусочно-гладкую кривую, начальная и конечная точка которой лежат на контуре, а все остальные точки расположены внутри области. *Разрезать* область вдоль какого-нибудь разреза значит отнять от области точки, принадлежащие этому разрезу, и рассматривать оставшееся множество точек. Односвязная область разлагается каждым разрезом на отдельные области. Проведя в n-связной области $n-1$ надлежащим образом выбранных разреза, мы можем превратить ее в односвязную область (черт. 6). Действительно, для этого достаточно какую-нибудь связную часть контура соединить разрезом с другой связной частью, эту вторую часть с третьей, и наконец $(n-1)$-ую часть соединить с n-ой частью" [1]). Новый n-ый разрез, проведенный от n-ой граничной кривой к первой, разложит полу-



Черт. 5.

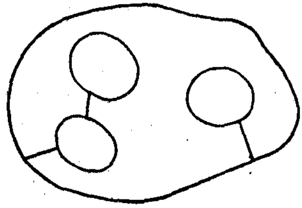
---

[1]) Эти разрезы можно построить, например, так: соединим прямолинейным отрезком какую-нибудь точку первой части контура с какой-нибудь точкой другой части контура и найдем на этом отрезке последнюю точку P, которая принадлежит еще к первой части, а также найдем первую следующую за ней точку Q, которая принадлежит второй части контура. Отрезок PQ и будет искомым разрезом от первой части контура ко второй. Этот отрезок не разлагает область. Действительно, один край этого отрезка можно соединить с другим его краем кривой, расположенной внутри области и аппроксимирующей вторую часть контура. Продолжая поступать также далее, проведем отрезок к третьей части контура, который опять не разлагает полученную нами после проведения первого разреза $(n-1)$ связную область, и т. д.

ченную область на две односвязных области. Если первоначальная область была ограничена простыми кривыми, то обе полученные односвязные области будут тоже ограничены простыми кривыми.

Каждой области, ограниченной конечным числом кусочно-гладких простых кривых C, сопоставим определенное *направление обхода* и притом будем считать это направление *положительным*, если направление касательной к каждой из граничных кривых (направленное в сторону движения) можно поворотом в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$ перевести в направление внутренней для области нормали.

Понятие области полезно несколько обобщить. В § 1 было сказано, что часто бывает удобно перейти, путем стереографической проекции, от числовой плоскости к числовой сфере и при этом центр проекций, т. е. „северный полюс" сферы обозначить как „бесконечно удаленную точку"; последней приводится в соответствие идеальный элемент числовой плоскости, также именуемый *„бесконечно удаленной точкой"*. Полезно поэтому также говорить об окрестности бесконечно удаленной точки в плоскости, подразумевая под этим совокупность тех точек плоскости, которые путем стереографической проекции переходят в окрестность северного полюса сферы. Поэтому допуская и бесконечно удаленную точку, расширим понятие области, рассматривая теперь и такие „области", которым принадлежит бесконечно удаленная точка, как, например, область, внешняя для круга.



Черт. 6.

Понятие связности без труда можно перенести и на такие (уже не ограниченные) области. Надо однако подчеркнуть, что, например, область, внешнюю для круга, надо рассматривать как односвязную или двусвязную, смотря по тому, причисляется ли к ней бесконечно удаленная точка или нет. Действительно, в последнем случае бесконечно удаленная точка образует часть контура. Доказанное выше предложение надо теперь обобщить, а именно: односвязная область вместе с простой замкнутой ломаной линией целиком содержит или область, лежащую внутри этой линии, или область, лежащую вне ее.

При таких обозначениях можно например, отрицательную вещественную ось назвать разрезом области, состоящей из всей плоскости, за исключением нулевой точки, причем бесконечно удаленную точку тоже рассматривают как граничную точку.

§ 3. Криволинейные интегралы.

Пусть кусочно-гладкая кривая C, расположенная в односвязной ограниченной области G, задана уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

и пусть $a(x, y)$ и $b(x, y)$ будут две непрерывные вещественные функции от x и y в области G.

Под *криволинейным интегралом*

$$J=\int_C \{ a dx + b dy \}$$

будем подразумевать такой определенный интеграл:

$$\int_{t_1}^{t_2} [a(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + b(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt.$$

Легко видеть, что такое определение криволинейного интеграла не зависит от выбора параметра t. Если контур области G состоит из одной простой кривой и если функции a и b непрерывны в замкнутой области G (т. е. в области G вместе с ее контуром), то данное выше определение годится и в случае, когда кривая интегрирования C совпадает с контуром области G или с его частью.

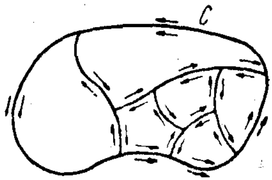
Криволинейный интеграл меняет знак, если меняется направление обхода кривой C, т. е. если параметр t изменяется от t_2 до t_1.

Если конечная точка кусочно-гладкой кривой C_1 совпадает с начальной точкой кусочно-гладкой кривой C_2, и если из этих кривых C_1 и C_2 составить, при сохранении направления обхода, например кривую C, то будем иметь соотношение

$$\int_{C_1} \{ a dx + b dy \} + \int_{C_2} \{ a dx + b dy \} = \int_C \{ a dx + b dy \},$$

если только интегралы, взятые по кривым C_1 и C_2, существуют. Такая же теорема очевидно имеет место при сложении какого угодно числа путей интегрирования.

Если область, лежащую внутри простой замкнутой кусочно-гладкой кривой C, разбить на части при помощи кусочно-гладких криволинейных отрезков, как показано на черт. 7, то интеграл, взятый в положительном направлении по кривой C, будет равен сумме интегралов, взятых в положительном направлении по замкнутым кривым $C_1, C_2, \ldots C_n$, ограничивающим отдельные части, на которые разбита вся область. Действительно, каждая из этих кривых C_k может быть разложена на конечное число частей $D_1^{(k)}$, $D_2^{(k)}$, ..., каждая из которых будет полностью принадлежать или кривой C или еще какой-нибудь одной из кривых $C_1, C_2, \ldots C_n$, кроме кривой C_k. Сумма интегралов, взятых по кривым $C_1, C_2, \ldots C_n$, будет равна сумме всех интегралов, взятых по всем криволинейным отрезкам $D_l^{(k)}$. Те из отрезков $D_l^{(k)}$, которые принадлежат кривой C, образуют снова эту кривую, проходимую в положительном направлении, и сумма соответствующих этим отрезкам интегралов даст интеграл, взятый по всей кривой C. Всякий другой криволинейный отрезок $D_l^{(k)}$ будет проходиться два раза, в двух противоположных направлениях, и соответствующие интегралы при сложении дадут нуль.



Черт. 7.

Вместо $\int\limits_C \{a\,dx + (-b)\,dy\}$ будем, для краткости, писать

$$\int\limits_C \{a\,dx - b\,dy\}.$$

Криволинейный интеграл будет, вообще говоря, изменять свое значение, если кривая C будет деформироваться, ка в случае, когда концы кривой остаются при ее неподвижными, так и в противном случае. За что значение криволинейного интеграла будет непрерывно, если кривая C деформируется н Другими словами, имеет место следующая теор *последовательность кусочно-гладких кривых $C_1, C_2, \ldots . C_n$, которые лежат в области G и длины которых равномерно ограничены в их совокупности, гладко аппроксимирует кусочно-гладкую кривую C, то интеграл*

$$J_n = \int_{C_n} \{a\,dx + b\,dy\},$$

взятый по кривой C_n, будет стремиться, при возрастании n, к интегралу

$$J = \int_{C} \{a\,dx + b\,dy\},$$

взятому по кривой C.

Доказательство этой теоремы читатель без затруднения проведет сам, воспользовавшись данным в § 2 определением гладкой аппроксимации и лежащим в основе этого определения предположением о равномерной сходимости [1]).

---

[1]) У Куранта теорема в тексте сформулирована без предположения том, что длины аппроксимирующих кривых ограничены в своей совокупности, однако в такой формулировке теорема неверна, как показывает пример, где за кривые C и C_n взяты кривые, указанные в сноске стр. 13, а за функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ приняты $a(x, y) = 0$, $b(x, y) = x \cos \frac{1}{x}$. Действительно, в этом случае $J = 0$, в то время как

$$J_n = -\int_{\frac{1}{n\pi}}^{\frac{1}{n^n\pi}} \frac{1}{nx} \cos^2 \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_{n\pi}^{n^n\pi} \frac{\cos^2 u}{u}\, du = \frac{1}{n}\int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{(n^n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin^2 v}{v-\frac{\pi}{2}}\, dv > \frac{1}{2n}\int_{(n+\frac{1}{2})\pi}^{n^n\pi} \frac{dv}{v-\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2n} \lg \frac{n^n - \frac{1}{2}}{n} > \frac{n-2}{2n} \lg n \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

В сноске Курант правильно указывает, что в данной нами выше формулировке теоремы можно даже отбросить содержащееся в понятии гладкой аппроксимации требование о том, чтобы направления касательных к аппроксимирующим кривым стремились совпасть с направлениями касательной к предельной кривой. Доказательство этого он предоставляет читателю. Это доказательство можно провести, например, так.

Особенный интерес представляет вопрос о том, при каких условиях значение криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования, если начальная и конечная точки этого пути закреплены. Так как две кривые, имеющие общими только начальную и конечную точки и больше нигде не встречающие друг друга, образуют замкнутую кривую, то наш вопрос приводится к вопросу о том, при каких условиях криволинейный интеграл, взятый по замкнутой

По предположению функция $a(x, y)$ будет непрерывна в некоторой замкнутой области $\overline{H}$, целиком содержащей кривую C и следовательно также и все кривые C_n, начиная с некоторого достаточно большого n. Поэтому, задав произвольное положительное число ε и обозначив через L общую верхнюю границу для длин всех кривых C_n и C, мы сможем найти такое число δ, чтобы было $|a(M) - a(M')| < \frac{\varepsilon}{4L}$, как только расстояние $MM' < \delta$. Разделим кривую C промежуточными точками $M_0, M_1, \ldots, M_N$ на участки, длина каждого из которых не превосходит $\frac{\delta}{2}$ (M_0 — начальная, M_N — конечная точка кривой C). В соответствии с этим и каждая кривая C_n разделится на соответствующие участки точками $M_0^{(n)}, M_1^{(n)}, \ldots, M_N^{(n)}$, причем при всех достаточно больших n и при всех $k = 0, 1, \ldots N$ расстояние $M_k M_k^{(n)}$ будет меньше $\frac{\delta}{2}$. Но тогда ясно, что

$$\left| \int\limits_C a\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} a(M_k)(x_{k+1} - x_k) \right| < \frac{\varepsilon}{4L} \cdot L = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left| \int\limits_{C_n} a\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} a(M_k)(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Обозначив максимум функции $a(x, y)$ в области $\overline{H}$ через M, выберем теперь n настолько большим, чтобы при всех $k = 0, 1, \ldots N$ выполнялось неравенство $|x_k^{(n)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{4MN}$. Тогда очевидно будет

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} a(M_k)[x_{k+1} - x_k - x_{k+1}^{(n)} + x_k^{(n)}] \right| < \frac{\varepsilon \cdot M \cdot 2N}{4MN} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствием трех полученных неравенств является

$$\left| \int\limits_C a\,dx - \int\limits_{C_n} a\,dx \right| < \varepsilon.$$

Инв. 2588

кривой, равен нулю. Этот вопрос можно формулировать еще следующим образом: при каких условиях криволинейный интеграл, взятый от постоянной начальной точки P_0 с координатами x_0, y_0, будет представлять собою такую функцию конечной точки $P(\xi, \eta)$, которая не зависит от пути, соединяющего точки P_0 и P, лишь бы этот путь лежал в области G.

Предположим, что функции a и b имеют в области G непрерывные частные производные $\frac{\partial a}{\partial y} = a_y$ и $\frac{\partial b}{\partial x} = b_x$ [1].

Докажем следующую теорему: *Если функции a, b, a_y, b_x непрерывны в односвязной ограниченной области G, то интеграл*

$$J = \int\limits_C \{ a\, dx + b\, dy \}, \tag{1}$$

взятый по какой-нибудь кусочно-гладкой кривой C, расположенной в области G, тогда и только тогда не зависит от пути интегрирования, если во всей области G имеет место равенство

$$a_y = b_x. \tag{2}$$

При этом условии интеграл при постоянной начальной точке пути интегрирования будет такой непрерывной функцией $F(\xi, \eta)$ от координат ξ, η конечной точки пути интегрирования C, которая имеет непрерывные первые частные производные, определяющиеся формулами

$$F_\xi = a, \qquad F_\eta = b. \tag{3}$$

Точно также можно доказать, что при всех достаточно больших n будет

$$\left| \int\limits_C b\, dy - \int\limits_{C_n} b\, dy \right| < \varepsilon.$$

Как видно, для доказательства достаточно предположить непрерывность функций a и b, спрямляемость кривых C_n и C, равномерную ограниченность длин этих кривых в их совокупности и равномерное аппроксимирование кривыми C_n кривой C.

Прим ред.

[1] Здесь и в дальнейшем, где это удобно, мы будем частные производные обозначать путем приставления индексов, например, a_x, a_y вместо $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$.

Докажем сперва необходимость нашего условия. Итак, предположим, что криволинейный интеграл не зависит от пути и представляет собой некоторую функцию $F(\xi, \eta)$ только конечной точки пути. Из определения криволинейного интеграла и непрерывности функций $a(x, y)$, $b(x, y)$, $\varphi(t), \psi(t)$ и кусочной непрерывности функций $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ следует, что функция $F(\xi, \eta)$ будет непрерывной. Докажем, что эта функция дифференцируема и что справедливы уравнения (3). Действительно, при достаточно малом $|h| > 0$ имеем

$$\frac{F(\xi + h, \eta) - F(\xi, \eta)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\xi}^{\xi + h} a(x, \eta)\, dx,$$

предполагая путь интегрирования, расположенный при $|h|$ достаточно малом внутри G и соединяющий точку (ξ, η) с точкой $(\xi + h, \eta)$, прямолинейным. По теореме о среднем значении, правая часть этого равенства будет равна $a(\xi + \vartheta h, \eta)$, где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Переходя к пределу, когда h стремится к нулю, получаем искомое равенство $F_\xi = a$; аналогично доказывается, что $F_\eta = b$. Дифференцируя еще раз, получаем зависимости

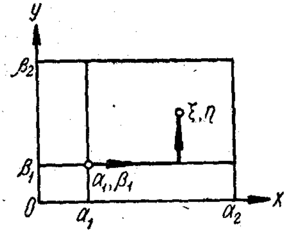
$$F_{\xi\eta} = a_\eta, \qquad F_{\eta\xi} = b_\xi.$$

По предположению a_η и b_ξ непрерывны: следовательно $F_{\xi\eta} = F_{\eta\xi}$ и поэтому $a_\eta = b_\xi$, что и доказывает необходимость условия (2).

Для того, чтобы доказать достаточность условия (2), достаточно, как выше сказано, показать, что при этом условии криволинейный интеграл $\int_C \{a\,dx + b\,dy\}$, взятый по любой *замкнутой* и целиком расположенной внутри G кривой C, равен нулю. Рассмотрим сперва частный случай, когда кривая C может быть заключена в такой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, который весь принадлежит области G. Рассмотрим например прямоугольник $\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2$ и $\beta_1 \leqslant y \leqslant \beta_2$ (черт. 8). Достаточно будет доказать существование в этом прямоугольнике такой функции F, которая удовлетворяла бы уравнениям (3).

Действительно, тогда криволинейный интеграл (1) примет вид

$$J = \int_{t_1}^{t_2} [F_x\varphi'(t) + F_y\psi'(t)]\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = F(\xi, \eta) - F(x_0, y_0),$$



Черт. 8.

где t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие начальной x_0, y_0 и конечной ξ, η точкам пути интегрирования и, в самом деле, не будет зависеть от пути интегрирования. Для построения этой функции F определим внутри и на контуре нашего прямоугольника функцию $\Phi(\xi, \eta)$ при помощи равенства

$$\Phi(\xi, \eta) = \int_{\alpha_1}^{\xi} a(x, \beta_1)\, dx + \int_{\beta_1}^{\eta} b(\xi, y)\, dy,$$

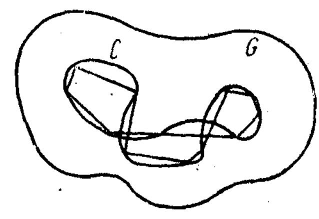
т. е. при помощи криволинейного интеграла, взятого по пути, состоящему из двух прямолинейных отрезков, соответственно параллельных координатным осям, и соединяющему нижнюю левую вершину прямоугольника α_1, β_1 с точкой ξ, η. Дифференцируя функцию $\Phi(\xi, \eta)$, получим

$$\Phi_\xi = a(\xi, \beta_1) + \int_{\beta_1}^{\eta} b_\xi(\xi, y)\, dy = a(\xi, \beta_1) + \int_{\beta_1}^{\eta} a_y(\xi, y)\, dy = a(\xi, \eta)$$

$$\Phi_\eta = b(\xi, \eta).$$

Таким образом, функция $F(\xi, \eta) = \Phi(\xi, \eta)$ и будет той функцией, которая внутри и на контуре нашего прямоугольника удовлетворяет уравнениям (3). Если криволинейный интеграл (1) взят по пути, соединяющему начальную точку x_0, y_0 и конечную точку ξ, η и нигде не выходящему из замкнутого прямоугольника, то, по доказанному выше, он не будет зависеть от пути интегрирования. Интеграл (1), взятый по какой-нибудь замкнутой кривой, принадлежащей нашему прямоугольнику, будет поэтому равен нулю, что мы и желали доказать.

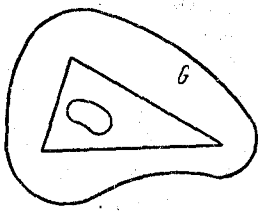
Пусть теперь C будет произвольная замкнутая кривая, расположенная в области G. Заменим кривую C такой замкнутой ломаной линией, которая вся лежит внутри G и у которой вершинами будут точки этой кривой C, и предположим еще, что ни одна сторона или часть стороны этой ломаной не пробегается дважды в том же или в противоположных направлениях. Звенья ломаной сделаем настолько малыми, чтобы часть плоскости, ограниченную каким-либо звеном ломаной и соответствующей дугой кривой C, можно было бы заключить в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, принадлежащий области G (черт. 9). По доказанному выше, интегралы, взятые по отдельным дугам кривой, можно тогда заменить интегралами, взятыми по соответствующим звеньям нашей ломаной. Теперь достаточно только доказать, что интеграл, взятый по этой замкнутой ломаной линии, будет равен нулю. Как было показано в § 2 (стр. 18), эту ломаную можно разложить на *простые* замкнутые ломаные линии. Таким образом, достаточно будет доказать теорему для простой замкнутой ломаной линии. Так как область G, по предположению, односвязна, то область, лежащая внутри простой замкнутой ломаной линии, расположенной в G, вся принадлежит области G. Так как по § 2 область, лежащую внутри простой замкнутой ломаной линии, можно разложить на треугольники, то можно ограничиться доказательством теоремы для треугольника. Действительно, сумма интегралов, взятых по контурам всех этих треугольников в положительном направлении, равна интегралу, взятому по первоначальной ломаной линии (см. стр. 22—23). Но всякий треугольник можно разложить на столь малые треугольники, чтобы каждый из них мог бы быть заключен в прямоугольник, целиком принадлежащий G. Интеграл, взятый по контуру первоначального треугольника, будет равен сумме интегралов, взятых по контурам этих малых треугольников. По доказанному, интегралы, взятые по контурам этих малых треугольников, равны нулю и следовательно будет равен нулю интеграл, взятый по первоначальной ломаной линии, а следовательно и по кривой C.



Черт. 9.

При нашем доказательстве существенную роль играло предположение об *односвязности* ограниченной области G.

Если это предположение не имеет места, то можно утверждать только, что *равен нулю интеграл, взятый по любой замкнутой ломаной линии, внутренняя область которой целиком принадлежит G, или что равен нулю интеграл, взятый по любой замкнутой кривой, которая ограничивает область, целиком принадлежащую области G.* Доказательство будет такое же, как и раньше. В случае же многосвязных областей существуют замкнутые ломаные линии, внутренняя область которых не вся принадлежит области G, как это, например, видно из черт. 10.



Черт. 10.

В этих случаях интеграл, взятый по замкнутой кривой, не всегда равен нулю. Рассмотрим, например, в круговом кольце с центром в начале координат такие функции

$$a(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad b(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

и возьмем интеграл в положительном направлении по лежащей в этом кольце окружности K радиуса r, с центром в начале координат.

В результате получим

$$\int\limits_K \{a\,dx + b\,dy\} = \int\limits_0^{2\pi} [a(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot(-r\sin\varphi) +$$

$$+ b(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cos\varphi]\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

В теории функций вещественной переменной x исходят обыкновенно сперва из самого общего понятия функции. Рассматривают некоторый промежуток I независимой переменной x и сопоставляют каждому значению x из этого промежутка I по какому-нибудь закону однозначным образом значение величины u. Тогда величина $u=f(x)$ будет называться функцией от x в этом промежутке. Такое для применений слишком общее понятие функции существенно ограничивают потом, присоединяя добавочные условия и прежде всего условие, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна или чтобы она была дифференцируемой. Только ограничиваясь такими, более узкими, классами функций, можно построить анализ в области вещественной переменной и в частности дифференциальное и интегральное исчисления. В основе теории функций комплексной переменной или, говоря точнее, теории аналитических функций лежит задача о расширении понятия функции на область комплексной переменной $z=x+iy$ и о таком ограничении этого понятия о функции комплексной переменной, чтобы в новую область функций можно было бы перенести основные операции дифференциального и интегрального исчислений.

Можно при этом исходить из следующего самого общего понятия комплексной функции $\zeta=f(z)$ от комплексной переменной z. Если G есть область в числовой плоскости и если каждой точке $z=x+iy$ этой области G сопоставлено каким-нибудь способом комплексное число $\zeta=u+iv$, то $\zeta=f(z)$ называется комплексной функцией от z в области G. Такое определение говорит только, что каждой паре вещественных чисел x, y (такой, что точка x, y принадлежит области G) соответствует пара вещественных чисел u, v, т. е. что u и v будут две определенные в G вещественные функции от двух вещественных переменных x и y.

Но мы ограничим прежде всего наше понятие функции требованием *непрерывности*, т. е. мы потребуем, чтобы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывными в области G функциями от x и y.

Мы потребуем далее, чтобы функция $\zeta = f(z)$ была дифференцируема. Как увидим впоследствии, одного этого условия достаточно для того, чтобы установить такой замкнутый в себе класс функций, в котором выполнимы все элементарные операции анализа и в частности возможно дифференцирование и интегрирование. То обстоятельство, что из условия дифференцируемости комплексной функции вытекает ее интегрируемость — и обратно — является, как мы увидим, одним из фундаментальных фактов теории. Эквивалентность этих двух условий сообщает теории функций комплексной переменной ту замкнутость и гармонию, которых часто недостает анализу в области вещественной переменной [1]).

§ 1. Условие дифференцируемости.

Аналогично определению производной вещественной функции установим здесь такое определение: *функция $f(z) = u + iv$ называется функцией от z, дифференцируемой в точке z, если для всякой, сходящейся к нулю последовательности отличных от нуля комплексных чисел h существует предел*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

не зависящий от выбора этой последовательности, т. е. не зависящий от способа, по которому точка $z+h$ при-

---

[1]) Как оказывается, есть еще третье условие, которое равносильно с условием дифференцируемости или интегрируемости и поэтому тоже может служить для определения нашего класса функций, а именно условие равномерной аппроксимации полиномами, т. е. простейшими выражениями, образованными при помощи комплексной переменной z. В этом состоит содержание теоремы, найденной *Runge* [Acta math. 6 (1885), стр. 229). Доказательство этой теоремы было бы для настоящей книги слишком длинным и поэтому не приводится.

ближается к точке z. Такой предел называется производной функции $\zeta = f(z)$ и обозначается через $\zeta' = f'(z)$. В частности, в нашем определении заключается, что производная не должна зависеть от „направления дифференцирования“, т. е. должно получаться одно и то же значение производной, по какому бы пути (проходящему через точку z) ни приближалась к z точка $z+h$.

Очевидно, что для дифференцируемости функции $f(z)$ в области G необходимо, но еще совсем недостаточно, чтобы функции u и v были бы дифференцируемыми функциями от x и y в области G. Например, если $f(z) = x = \Re z$, то при вещественном h имеем, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Если h принимает только чисто мнимые значения, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы функция $f(z) = u + iv$ была дифференцируема, функции u и v должны удовлетворять еще некоторым условиям. Для установления этих условий предположим, что приращение h принимает сперва только вещественные значения, а потом только чисто мнимые значения. В первом случае

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

во втором случае

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема, должно иметь место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

и следовательно

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Таким образом имеем следующий результат. *Для дифференцируемости функции $\zeta = f(z) = u + iv$ в некоторой области G необходимо, чтобы функции u и v удовлетворяли бы дифференциальным уравнениям (1). Если, кроме того, производная $f'(z)$ должна быть непрерывна, то функции u_x и v_x тоже должны быть непрерывны.*

Предположим теперь, наоборот, что функция $f(z)$ непрерывна и что первые частные производные от функций u и v по x и по y существуют и непрерывны[1]) в области G и докажем, что условия (1) достаточны для дифференцируемости функции $f(z)$. Для этого дадим приращению h значение $h = r + is$, где r и s вещественны. На основании известной теоремы дифференциального исчисления о среднем значении получим, что

$$Q = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =$$

$$= \frac{u(x+r, y+s) - u(x,y) + i\,[v(x+r, y+s) - v(x,y)]}{r+is} =$$

$$= \frac{ru_x(\xi, \eta) + su_y(\xi, \eta)}{r+is} + i\,\frac{rv_x(\xi', \eta') + sv_y(\xi', \eta')}{r+is},$$

где $\xi + i\eta$ и $\xi' + i\eta'$ две точки прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $z+h$.

В силу уравнений (1) выводим, что

$$Q = \frac{ru_x(\xi, \eta) + isu_x(\xi', \eta')}{r+is} + i\,\frac{rv_x(\xi', \eta') + isv_x(\xi, \eta)}{r+is} =$$

$$= u_x(\xi, \eta) + iv_x(\xi', \eta') + is\,\frac{u_x(\xi', \eta') - u_x(\xi, \eta)}{r+is} +$$

$$+ s\,\frac{v_x(\xi', \eta') - v_x(\xi, \eta)}{r+is}.$$

---

[1]) Удалось обнаружить, что предположение о непрерывности производных является излишним. Наиболее далеко идущий результат принадлежит *Looman'y*, который доказал (über Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen", Gött. Nachr. 1922 г., стр. 97–108), что кроме непрерывности функции $f(z)$ достаточно предположить существование дифференциальных уравнений (1), в то время как все остальные сделанные здесь предположения могут быть отсюда выведены.

Так как $\left|\frac{s}{r+is}\right|$ не больше 1, то в силу непрерывности частных производных будем иметь, что

$$\lim_{h\to 0} Q = u_x + iv_x = -iu_y + v_y.$$

Этот предел не зависит от выбора последовательности значений h, т. е. функция $f(z)$ будет дифференцируемой. Из последней формулы видно также, что производная $f'(z)$ тоже непрерывна. Основные для всей теории функций комплексной переменной формулы (1) называются *дифференциальными уравнениями Коши-Римана* (Cauchy-Riemann) [1]).

В основу всего дальнейшего построения теории функций комплексной переменной положим следующее определение.

Функция $\zeta = f(z) = u + iv$ называется аналитической, точнее регулярной аналитической или голоморфной функцией от $z = x + iy$ в области G, если в этой области функции u и v и их частные производные первого порядка будут непрерывными функциями от x и y и если функции u и v будут в этой области удовлетворять дифференциальным уравнениям Коши-Римана (1).

Такое определение совершенно равносильно по вышесказанному следующему: *функция $\zeta = f(z)$ называется регулярной аналитической функцией от z в области G, если в этой области ζ имеет непрерывную производную по z.*

Функция называется регулярной в некоторой точке или на некоторой кривой, если она регулярна в некоторой области, содержащей эту точку или эту кривую.

Здесь так же, как при дифференцировании вещественных функций, получается, что сумма, разность, произведение и частное функций, аналитических в области G, имеют в каждой точке этой области (если только знаменатель

---

[1]) Эти формулы встречаются в сочинении *A. L. Cauchy*", Sur les différentielles de quantités algébriques ou géometriques et sur les dérivées des fonctions de ces quantités", Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. 4, стр. 345, Paris 1847 и служат исходной точкой в знаменитой диссертации Римана: *B. Riemann*, „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse". Göttingen 1851, 2. Abdruck 1867, Ges. math. Werke, 1 u. 2 Aufl., стр. 3. Эти формулы встречаются однако уже у *Даламбера* (d'Alembert), *Эйлера* (Euler) и *Лагранжа* (Lagrange).

частного в этой точке не обращается в нуль) непрерывные производные, причем все известные правила дифференциального исчисления остаются также справедливыми. То же относится и к аналитической функции $f(\varphi)$, у которой аргумент $\varphi=\varphi(z)$ есть регулярная аналитическая функция от z в области G. При этом предполагается, что когда точка z перемещается в области G, значения $\varphi(z)$ принадлежат некоторой области плоскости φ, в которой функция $f(\varphi)$ регулярна. Таким образом *сумма, разность, произведение и частное аналитических функций, а также аналитическая функция от аналитической функции будут аналитическими функциями в соответствующих областях*. Так как z и каждая постоянная будут, очевидно, аналитическими функциями от z в любой области, то все рациональные функции от z дают примеры аналитических функций.

§ 2. Обратная функция.

В этом параграфе покажем, что установленное только что понятие функции удовлетворяет еще дальнейшему условию. *Понятие обратной функции имеет здесь смысл так же, как и для функций вещественной переменной.*

Для существования обратной функции во всяком случае должно иметь место некоторое взаимно однозначное соответствие между точками некоторой окрестности[1]) точки $z_0=x_0+iy_0$, с одной стороны, и точками некоторой окрестности точки $\varphi_0=f(z_0)$, с другой стороны. Такое соответствие можно назвать взаимно однозначным „отображением“ обеих областей друг на друга. Для этого система уравнений

$$u=u(x,y), \quad v=v(x,y)$$

должна допускать, в некоторой окрестности точки x_0, y_0 области G, однозначное решение относительно x и y.

По известной теореме дифференциального исчисления, это имеет место тогда, когда первые частные производные от u и v в точке $x=x_0$, $y=y_0$ существуют и будут непрерывными и когда определитель Якоби (Jacobi) $\Delta = u_x v_y - u_y v_x$, будет отличен от нуля в этой точке $x=x_0$,

[1]) Под окрестностью точки z понимается в данном параграфе односвязная область, содержащая точку z. *Прим. ред.*

$y=y_0$ (а в силу непрерывности и в некоторой окрестности этой точки). При выполнении этих условий функции $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ будут непрерывными и однозначными функциями от u и v в некоторой окрестности точки $u(x_0, y_0)=u_0$, $v(x_0, y_0)=v_0$ плоскости u, v. Первые частные производные этих функций будут также непрерывны и будут равны

$$x_u=\frac{v_y}{\Delta}, \quad x_v=-\frac{u}{\Delta}, \quad y_u=-\frac{v_x}{\Delta}, \quad y_v=\frac{u_x}{\Delta}.$$

Если функция $u+iv$ аналитическая, то по формулам Коши-Римана получим, что

$$\Delta=u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2=|f'(z)|^2.$$

Если $f'(z)\neq 0$, то все указанные выше условия будут выполнены и, кроме того, в силу уравнений Коши-Римана $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$, будем иметь, что

$$x_u=y_v, \; x_v=-y_u.$$

Таким образом получаем следующий результат: *Если в точке $z=z_0$ производная $f'(z)$ отлична от нуля, то некоторая достаточно малая окрестность точки z_0 отображается взаимно-однозначным образом на некоторую окрестность точки $\zeta_0=f(z_0)$, т. е. в этой окрестности точки $z=z_0$ уравнение $\zeta=f(z)$ имеет однозначное решение $z=\varphi(\zeta)$. Функция $\varphi(\zeta)$ в некоторой окрестности точки ζ_0 будет непрерывна и будет иметь там непрерывные частные производные, удовлетворяющие уравнениям Коши-Римана. Эта функция будет, поэтому, аналитической функцией от ζ. Функция $\varphi(\zeta)$ называется обратной функцией для $f(z)$. Ее производная будет равна*

$$\frac{dz}{d\zeta}=\varphi'(\zeta)=\frac{\partial x}{\partial u}+i\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{v_y-iv_x}{\Delta}=\frac{1}{v_y+iv_x}=\frac{1}{f'(z)}.$$

То обстоятельство, что аналитическая функция $f(z)$, при условии, что $f'(z_0)\neq 0$ отображает некоторую достаточно малую окрестность точки z_0 на некоторую область плоскости ζ, будем называть *теоремой об отображении областей*. В главе IV, § 1 мы увидим, что условие $f'(z_0)\neq 0$ является для теоремы об отображении областей излишним.

§ 3. Определенный интеграл аналитической функции и его основные свойства.

Как было указано уже во введении к этой главе, для теории функций комплексной переменной является фундаментальнейшим фактом то обстоятельство, что дифференцируемость функций влечет за собою возможность применения интегрального исчисления к функциям, обладающим этим свойством. В теории вещественных функций интеграл, с одной стороны, вводится как функция, определяемая действием, обратным дифференцированию („неопределенный интеграл"), а с другой стороны, как предел некоторой суммы („определенный интеграл"), и потом доказывается, что оба эти определения совпадают. Аналогично можно поступать для аналитических функций комплексной переменной. Для того чтобы в область комплексной переменной перенести понятие определенного интеграла, представим себе, что две точки z_0 и Z области G соединены некоторой кусочно-гладкой кривой C, которая вся расположена в G. Пусть функция $f(z)$ непрерывна во всей области G или хотя бы только вдоль кривой C[1]). Разложим кривую C при помощи точек $z_0, z_1, \ldots z_n = Z$, расположенных одна за другой вдоль кривой C, на n частей и составим сумму

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu^*)(z_\nu - z_{\nu-1}),$$

где z_ν^* — произвольная точка кривой, лежащая на отрезке кривой между точками $z_{\nu-1}$ и z_ν (она может совпадать и с одной из этих точек). Если число точек деления будем неограниченно увеличивать и притом так, чтобы наибольшее из расстояний $|z_\nu - z_{\nu-1}|$ стремилось к нулю, то сумма S_n будет стремиться к некоторому пределу, который не зависит от выбора точек деления $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ и от выбора точек $z_1^*, z_2^*, \ldots z_{n-1}^*$. Это можно доказать, не пользуясь вещественным интегралом, совершенно аналогично соответствующей теореме в области вещественной переменной.

---

[1]) Функция $f(z) = u + iv$ называется *непрерывной вдоль непрерывной кривой* C, если значения вещественных функций u и v на кривой C являются непрерывными функциями от параметра кривой.

Это предложение можно также следующим способом свести к вещественным криволинейным интегралам (см. главу I, § 3). Пусть

$$f(z)=f(x+iy)=u\ (x,y)+iv(x,y),$$
$$z_\nu^*=x_\nu^*+iy_\nu^*,$$
$$z_\nu-z_{\nu-1}=\Delta z_\nu=\Delta x_\nu+i\Delta y_\nu;$$

тогда будем иметь

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} f(z_\nu^*)\,\Delta z_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\left[u(x_\nu^*,y_\nu^*)\Delta x_\nu-v(x_\nu^*,y_\nu^*)\,\Delta y_\nu\right]+$$
$$+i\sum_{\nu=1}^{n}\left[u(x_\nu^*,y_\nu^*)\,\Delta y_\nu+v(x_\nu^*,y_\nu^*)\,\Delta x_\nu\right].$$

Так как при неограниченном возрастании n суммы в правой части этого равенства стремятся соответственно к вещественным криволинейным интегралам $\int\limits_C\{u\,dx-v\,dy\}$ и $\int\limits_C\{v\,dx+u\,dy\}$, то упомянутый выше предел существует.

Предел суммы S_n будем называть *определенным интегралом* функции $f(z)$ взятым вдоль кривой C, и обозначать через

$$\int\limits_{z_0}^{(C)\,Z} f(z)\,dz \text{ или } \int\limits_C f(z)\,dz.$$

Таким образом имеем, что

$$\int\limits_{z_0}^{(C)\,Z} f(z)\,dz=\int\limits_C\{u\,dx-v\,dy\}+i\int\limits_C\{v\,dx+u\,dy\}. \quad (1)$$

Если $|f(z)|$ на всем пути интегрирования не превосходит некоторого постоянного числа M и если L обозначает длину этого пути, то из определения интеграла получается важная оценка

$$\left|\int\limits_{z_0}^{(C)\,Z} f(z)\,dz\right|\leqslant ML. \quad (2)$$

Из определения определенного интеграла получаем сразу следующие правила: Если конец кусочно-гладкой кривой C_1 совпадает с началом кусочно-гладкой кривой C_2 и если C будет кривая, состоящая из этих двух кривых, а функция $f(z)$ будет непрерывна вдоль кривой C, то

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны вдоль кривой C, то

$$\int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz = \int_C \big((f(z) + g(z)\big)\,dz.$$

Если функция $f(z)$ непрерывна вдоль кривой C и если c обозначает постоянную величину, то

$$c\int_C f(z)\,dz = \int_C cf(z)\,dz.$$

Если $f(z)$ непрерывна вдоль кривой C и если C' будет та же кривая, но проходимая в обратном направлении, то

$$\int_{C'} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

§ 4. Теорема Коши.

Понятие о неопределенном интеграле также легко переносится на область комплексной переменной. Если в некоторой области с данной *аналитической* функцией $f(z)$ сопоставлена другая аналитическая функция $F(z)$ так, что $F'(z) = f(z)$, то эту функцию $F(z)$ назовем *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$ и обозначим через

$$F(z) = \int f(z)\,dz.$$

Понятие об интеграле от *аналитической* функции получает значение только потому, что определенный интеграл не зависит от пути интегрирования и что его можно одновременно рассматривать как неопределенный интеграл. В самом деле, существует следующая фундаментальная теорема, которая называется *теоремой Коши* [1]):

Пусть G будет односвязной областью в плоскости z и пусть $f(z)$ будет некоторой регулярной аналитической функцией в этой области. Пусть, далее z_0 будет постоянной точкой, а Z переменной точкой в области G и пусть C будет какая-нибудь кусочно-гладкая кривая, соединяющая z_0 с Z и расположенная в G. Тогда интеграл

$$(C)\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz = F(Z),$$

взятый по этой кривой, не будет зависеть от выбора пути интегрирования C и будет в области G такой регулярной аналитической функцией $F(z)$, производная которой определяется равенством

$$F'(z) = f(z).$$

Обыкновенно теорему Коши формулируют так: *Интеграл $\int f(z)\, dz$ от регулярной аналитической функции $f(z)$, взятый по какой-нибудь замкнутой кусочно-гладкой кривой C, целиком расположенной в односвязной области G, в которой функция $f(z)$ регулярна, равен нулю.* Докажем теорему Коши, пользуясь вещественными криволинейными интегралами. В силу уравнений Коши-Римана и на основании теоремы главы I, § 3 криволинейные интегралы в формуле (1) предыдущего параграфа не зависят от пути интегрирования C и при постоянном z_0 и переменном $Z = X + iY$ представляют собою такие непрерывные функции $U(X, Y)$ и $V(X, Y)$, производные которых по X и по Y, равные

$$\frac{\partial U}{\partial X} = u(X, Y), \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = -v(X, Y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = v(X, Y), \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = u(X, Y),$$

---

[1]) *Cauchy, A. L.*, Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris, 1825, вновь перепечатано в Darb. Bull. 7 (1874), стр. 265 и 8 (1875), стр. 43. *Гаусс* (Gauss) знал эту теорему уже в 1811 году, см. письмо к *Беселлю* (Bessel) от 18 декабря 1811 г.; *Gauss*, Werke, Bd. 8, стр. 90—92.

очевидно непрерывны и удовлетворяют уравнениям Коши-Римана. Функция $F(Z)=U+iV$ будет, поэтому, аналитической функцией от Z. Ее производная равна

$$F'(Z)=\frac{\partial U}{\partial X}+i\frac{\partial V}{\partial X}=u(X, Y)+iv(X, Y)=f(Z).$$

Таким образом, теорема Коши доказана.

Если область G ограничена простым контуром, то теорема Коши остается в силе и в том случае, когда кривая интегрирования C вся или частично совпадает с контуром области G, а функция $f(z)$, не будучи регулярной аналитической на этом контуре, является непрерывной в замкнутой области G. Теорема Коши имеет место и тогда, когда область ограничена не простым контуром, но может быть при помощи разрезов разложена на конечное число областей, ограниченных простыми контурами, в каждой из которых выполняются сделанные выше предположения. Для доказательства достаточно кривую интегрирования гладко аппроксимировать в смысле главы I, § 2 при помощи других кусочно-гладких кривых, которые целиком лежат внутри G и длины которых ограничены в их совокупности, например при помощи замкнутых ломаных линий. Действительно, теорема Коши имеет место для этих аппроксимирующих кривых, а последовательность соответствующих криволинейных интегралов сходится к криволинейному интегралу по аппроксимируемой кривой.

Кроме доказательства теоремы Коши, опирающегося на теорию вещественных криволинейных интегралов, изложенную в главе I, § 3, приведем другое доказательство, в котором прямо доказывается независимость интеграла от пути. Пусть путь интегрирования задан комплексной функцией $z=\chi(t, \alpha)$ двух вещественных переменных t и α [1]), причем t изменяется в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а α в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Каждому заданному значению α соответствует определенный путь интегрирования, который будет описан переменной точкой, когда t будет изменяться от t_1 до t_2. Начальную и конечную точки всех полученных

[1]) Под комплексной функцией вещественных переменных мы подразумеваем комплексную величину, зависящую от вещественных переменных.

таким образом путей будем считать постоянными, т. е. предположим, что функции $\chi(t_1, \alpha)$ и $\chi(t_2, \alpha)$ не зависят от α. Далее предположим, что функция $\chi(t, \alpha)$ имеет везде, за исключением некоторого конечного числа фиксированных значений t, непрерывную производную по t и такую же вторую производную по t и по α и, кроме того, при всяком заданном t имеет непрерывную производную по α. Предположим еще, что все пути, соответствующие различным значениям α, лежат в области регулярности G функции $f(z)$. Дифференцируя интеграл

$$J = \int_{\chi(t_1, \alpha)}^{\chi(t_2, \alpha)} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\chi)\chi_t\,dt$$

по α, получим:

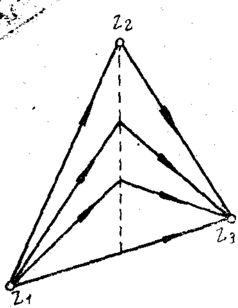
$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} (f'(\chi)\chi_\alpha \chi_t + f(\chi)\chi_{\alpha t})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{df(\chi)}{dt}\chi_\alpha + f(\chi)\chi_{t\alpha}\right) dt.$$

Если первый интеграл в правой части проинтегрировать по частям, то член $f(\chi)\chi_\alpha$ обратится в нуль на пределах интеграла и мы будем иметь, что

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} (-f(\chi)\chi_{\alpha t} + f(\chi)\ \chi_{t\alpha})\,dt = 0;$$

следовательно, J не зависит от α, т. е. интеграл не меняется при непрерывном изменении пути интегрирования указанным образом.

То же самое имеет место, если замкнутый путь интегрирования, для которого $\chi(t_1, \alpha) = \chi(t_2, \alpha)$ деформируется указанным образом внутри G, так как и в этом случае при интегрировании по частям разность значений выражения $f(\chi)\chi_\alpha$, соответствующих пределам интеграла, обращается в нуль. Для доказательства теоремы Коши в ее обычной вышеуказанной формулировке надо показать, что интеграл, взятый по произвольной замкнутой кусочно-гладкой кривой, расположенной в G, равен нулю. Такую кривую можно гладко аппроксимировать вписанными в кривую замкнутыми ломаными линиями, лежащими в G. Интегралы, взятые по этим многоугольным контурам, будут (как это непосредственно видно из самого определения интеграла) стремиться к интегралу, взятому по предельной кривой. Теорему достаточно, следовательно, доказать только для многоугольных контуров. Как и при доказательстве основной теоремы о криволинейных интегралах в главе I, § 3, можно убедиться, что теорему достаточно доказать только для треугольников. Для треугольника же с вершинами z_1, z_2, z_3 (черт. 11) легко составить, в явном виде, такую функцию $\chi(t, \alpha)$, которая переводит сторону $z_1 z_3$ треугольника (получающуюся при $\alpha = 0$) в ломаную $z_1 z_2 z_3$ (при $\alpha = 1$). Действительно, если положить



Черт. 11.

$$\chi(t, \alpha) = z_1 + t(z_3 - z_1) + \alpha t(2z_2 - z_3 - z_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\chi(t, \alpha) = z_3 + (1 - t)(z_1 - z_3) + \alpha(1 - t)(2z_2 - z_3 - z_1), \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,$$

то $\chi(t, \alpha)$ и будет такой функцией. Так как интеграл z не зависит от α, то

$$\int_{z_1}^{z_3} f(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz + \int_{z_2}^{z_3} f(z)\, dz$$

и следовательно

$$\int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_2}^{z_3} + \int_{z_2}^{z_1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Принципиальное преимущество, сравнительно с этими доказательствами теоремы Коши, имеет доказательство, данное *Гурса* (Goursat), в котором предполагается только существование производной, но в котором не пользуются ее непрерывностью. Изложим сперва два вспомогательных предложения.

Во-первых, из определения интеграла сразу видно, что интеграл $\int\limits_K 1 dz$, который можно обозначить еще коротко через $\int\limits_K dz$, взятый по какой-нибудь кривой K, имеющей начальную точку a и конечную точку b, равен $b-a$. Этот же интеграл, взятый по замкнутой кривой, будет поэтому равен нулю.

Во-вторых, по определению, интеграл $\int\limits_K z\,dz$ равен пределу суммы

$$\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu (z_\nu - z_{\nu-1})$$

и одновременно пределу суммы

$$\sum_{\nu=1}^{n} z_{\nu-1}(z_\nu - z_{\nu-1});$$

а поэтому равен пределу их среднеарифметического, т. е. суммы

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(z_\nu + z_{\nu-1})(z_\nu - z_{\nu-1})}{2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{z_\nu^2 - z_{\nu-1}^2}{2} = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}$$

и значит интеграл будет тоже равен $\frac{b^2-a^2}{2}$. Для замкнутой кривой K эта величина будет равна нулю и

$$\int\limits_K z\,dz = 0.$$

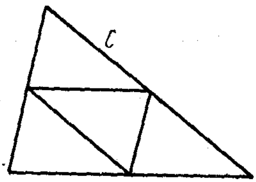
Как и выше, можно прежде всего убедиться в том, что теорему Коши достаточно доказать для треугольника C. Пусть l_0 будет периметр треугольника и пусть $l_n = \frac{l_0}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Если соединим середины сторон треугольника C попарно, то получим четыре треугольника, у которых периметр равен $l_1 = \frac{l_0}{2}$ (черт. 12).

Пусть

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| = \alpha_0.$$

Хотя бы один из этих четырех треугольников обладает тем свойством, что интеграл, взятый по его контуру C_1, удовлетворяет условию

$$\alpha_1 = \left|\int\limits_{C_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha_0}{4}.$$



Черт. 12.

Действительно интеграл, взятый по контуру треугольника C, равен сумме интегралов, взятых по контурам этих четырех треугольников, а модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых. Поступим с треугольником C_1 так же, как поступали с треугольником C, и будем так же продолжать далее. Таким образом, придем к последовательности треугольников $C = C_0, C_1, C_2, \ldots$, из которых каждый расположен внутри предыдущего. Каждый из этих треугольников C_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет периметр, равный $l_n = \frac{l_0}{2^n}$, и интеграл, взятый по его контуру, будет удовлетворять условию

$$\alpha_n = \left|\int\limits_{C_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{\alpha_0}{4^n}.$$

Так как диаметр треугольников C_n стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, то эти треугольники должны иметь одну и только одну общую внутреннюю точку γ, к которой стремятся все вершины треугольников. Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке γ, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число s, чтобы при всяком z, для которого $|z - \gamma| < s$, было бы

$$f(z) = f(\gamma) + (z - \gamma) f'(\gamma) + \sigma(z)(z - \gamma),$$

где $|\sigma(z)| < \varepsilon$.

В самом деле, ведь это равносильно тому обстоятельству, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке γ, т. е. что величина

$$\sigma(z)=\frac{f(z)-f(\gamma)}{z-\gamma}-f'(\gamma)$$

будет по модулю сколь угодно малой, если только $|z-\gamma|$ достаточно мало. Далее, можно задать такое целое положительное число N, чтобы при всяком $n \geqslant N$ наибольшее расстояние ρ_n между точкой γ и контуром C_n было меньше s. Из предыдущего равенства имеем тогда, при $n \geqslant N$,

$$\int_{C_n} f(z)\,dz=\int_{C_n} \sigma(z)(z-\gamma)\,dz+\int_{C_n} f'(\gamma)(z-\gamma)\,dz+$$

$$+\int_{C_n} f(\gamma)\,dz=\int_{C_n} \sigma(z)(z-\gamma)\,dz+f'(\gamma)\int_{C_n} z\,dz+$$

$$+(f(\gamma)-\gamma f'(\gamma))\int_{C_n} dz. \qquad (1)$$

Как мы видели, интегралы $\int_{C_n} dz$ и $\int_{C_n} z\,dz$ равны нулю; следовательно равенство (1) принимает вид

$$\int_{C_n} f(z)\,dz=\int_{C_n} \sigma(z)(z-\gamma)\,dz,$$

откуда на основании § 3, (2) выводим, что

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leqslant l_n \varepsilon \rho_n.$$

Так как $\rho_n \leqslant l_n$, то

$$\alpha_n=\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leqslant l_n^2 \varepsilon=\frac{l_0^2}{4^n}\varepsilon.$$

В силу $\alpha_n \geqslant \dfrac{\alpha_0}{4^n}$ имеем поэтому, что

$$\left|\int_{C} f(z)\,dz\right|=\alpha_0 \leqslant l_0^2 \varepsilon.$$

Так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Таким образом, теорема Коши доказана вполне. Заметим еще раз, что в этом доказательстве мы нигде не пользовались непрерывностью производной $f'(z)$. В § 7 будет показано, что, обратно, из независимости интеграла

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

от пути будет следовать аналитический характер функции $f(z)$ в рассматриваемой области. Таким образом, при определении аналитической функции, данном в § 1, можно ограничиться требованием дифференцируемости и отбросить добавочное требование непрерывности производной. Непрерывность производной сама собой получается впоследствии, как следствие ее существования, после того как будет доказана теорема Коши и обратная теорема.

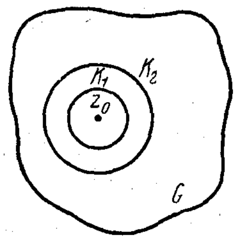
§ 5. Интегралы в многосвязных областях. Теорема Коши о вычетах.

Для справедливости теоремы Коши существенную роль играет предположение об односвязности рассматриваемой области G. Если функция $f(z)$ регулярна внутри и на контуре некоторой n-связной области G, ограниченной n простыми замкнутыми кривыми, то имеет место следующее обобщение теоремы Коши: *Если $f(z)$ регулярная аналитическая функция внутри и на контуре некоторой n-связной области G, ограниченной простыми кривыми, то интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый в положительном направлении по всему контуру области G, будет равен нулю.* Для доказательства гладко аппроксимируем каждую из n ограничивающих область G кривых при помощи замкнутых ломаных линий, целиком принадлежащих G и длины которых ограничены в их совокупности. Эти ломаные можно выбрать так, чтобы они ограничивали опять n-связную часть B области G, которую можно разложить подобно внутренней области простого многоугольного контура на треугольники. По теореме Коши интеграл, взятый по контуру каждого такого треугольника в положительном направлении, будет равен нулю. Складывая все эти интегралы, получим, что интеграл, взятый в положительном направлении по всему контуру области B, равен нулю (так как интегралы по внутренним сторонам треугольников взаимно сократятся). Переходя к пределам, можем, на основании теоремы, изложенной в главе I, § 3, утверждать, что интеграл, взятый в положительном направлении по всему контуру области G, будет равен нулю.

Если в частности область G двусвязная, то

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

где оба интеграла взяты в одинаковом направлении, т. е. так, что обе кривые C_1 и C_2 обходят области, лежащие внутри этих кривых в одинаковом направлении.



Черт. 13.

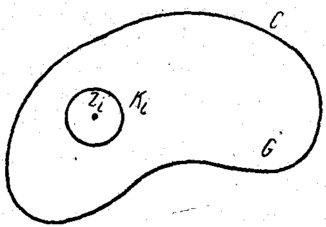
Может случиться, что функция $f(z)$ регулярна во всей области G, за исключением одной ее определенной внутренней точки z_0; о значении функции в этой точке z_0 ничего не предполагается. Пусть K_1 и K_2 будут два круга с центром в точке z_0, расположенные целиком внутри области G. Так как функция $f(z)$ регулярна внутри и на контуре двусвязной кольцевой области, расположенной между кругами K_1 и K_2 (черт. 13), то по только-что указанному частному случаю будем иметь, что

$$\int_{K_1} f(z)\,dz = \int_{K_2} f(z)\,dz,$$

где оба интеграла взяты в положительном направлении. Таким образом имеем такую теорему:

Все интегралы, взятые по достаточно малым окружностям с центром в точке z_0, имеют одну и ту же величину. Произведение этой величины, определенной вполне, если задана функция $f(z)$ и точка z_0, на $\dfrac{1}{2\pi i}$ называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0.

Пусть теперь функция $f(z)$ регулярна везде внутри односвязной области G и на всем ее контуре, за исключением конечного числа внутренних ее точек $z_1, z_2, \ldots z_r$. Опишем (черт. 14) около каждой такой точки z_i $(i=1, 2, \ldots r)$ малый круг K_i, который весь расположен внутри G и внутри которого (а также и на его окружности) не лежит никакая из точек $z_1, z_2, \ldots z_r$, кроме центра круга z_i. Кроме того, эти круги $K_1, K_2, \ldots K_r$ выберем настолько малыми, чтобы они нигде не пересекались друг с другом.



Черт. 14.

Если к $(r+1)$-связной области, которая получается из G после выкидывания этих r кругов, приложим теорему, доказанную в начале этого параграфа, то получим формулу

$$\int_C f(z)\,dz - \int_{K_1} f(z)\,dz - \int_{K_2} f(z)\,dz - \ldots - \int_{K_r} f(z)\,dz = 0,$$

где все интегралы взяты в положительном направлении и следовательно

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{K_1} f(z)\,dz + \int_{K_2} f(z)\,dz + \ldots + \int_{K_r} f(z)\,dz.$$

Так как функция $f(z)$ регулярна внутри и на контуре каждого круга K_i, за исключением его центра z_i, то слагаемые в правой части этого равенства представляют собой вычеты функции $f(z)$ в точках $z_1, z_2, \ldots z_r$, умноженные на $2\pi i$, и следовательно получаем *теорему Коши о вычетах*:

Если функция $f(z)$ регулярна везде внутри и на контуре односвязной области G, за исключением конечного числа внутренних точек $z_1, z_2, \ldots z_r$, то интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый в положительном направлении по контуру области G, равен сумме вычетов функции $f(z)$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_r$, умноженной на $2\pi i$.

На стр. 76 будет дан способ для вычисления вычета аналитической функции в данной точке, практически приложимый в большей части случаев. Тем самым теорема

Коши о вычетах приобретет всю свою плодотворность для вычисления определенных интегралов (см. главу III, § 5).

§ 6. Примеры. Элементарные функции.

Полученные нами результаты дают возможность расширить определение всех так называемых элементарных функций на область комплексной переменной. Для рациональных функций это уже сделано в § 1. Процесс дифференцирования этих функций не дает ничего нового. Интегрируя же рациональные функции, мы можем получить новые функции. Простейший и важнейший пример такого рода дает интегрирование функции $f(z)=\frac{1}{z}$.

Эта функция регулярна для всех значений z, отличных от нуля; но если z приближается к нулю, то $|f(z)|$ неограниченно возрастает, так что в точке $z=0$ функция уже не будет регулярной. Поэтому, если замкнутая кривая C окружает точку $z=0$, то теорема Коши не будет уже приложима к интегралу $\int\limits_C f(z)\,dz$. Действительно, если кривая C есть окружность радиуса ρ с центром в начале координат, то для точек кривой C

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \quad (0\leqslant\varphi<2\pi),$$
$$dz=\rho(-\sin\varphi+i\cos\varphi)\,d\varphi=i\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,d\varphi$$

и, следовательно, при положительном обходе этой окружности имеем, что

$$\int\limits_C \frac{dz}{z}=i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=2\pi i \quad (\neq 0)^{1)}.$$

На основании предыдущего параграфа равенство

$$\int\limits_C \frac{dz}{z}=2\pi i \tag{1}$$

---

1) Точнее было бы писать $\int \frac{1}{z}\,dz$ вместо $\int \frac{dz}{z}$. Такие упрощения будем себе часто позволять и в дальнейшем.

будет иметь место не только для окружности C, но и для всякой замкнутой простой кусочно-гладкой кривой, окружающей начало координат. Действительно, радиус ρ можно выбрать настолько малым, чтобы круг C был расположен весь внутри этой кривой.

Как известно, для вещественных положительных значений z имеет место равенство

$$\lg z = \int_1^z \frac{dt}{t}. \tag{2}$$

Эту формулу примем за определение логарифмической функции $\lg z$ *и при комплексных значениях* z. Но при таком определении функция $\lg z$ уже не будет однозначной. Действительно, точки 1 и z можно соединить такими двумя различными кривыми интегрирования, которые не могут непрерывно перейти друг в друга без того, чтобы не пройти через исключительную точку $z=0$. Например, это будет тогда, если две такие кривые вместе образуют простой замкнутый путь, окружающий начало координат, интеграл по которому уже не будет равен нулю, а по формуле (1) будет равен $2\pi i$.

Таким образом, логарифмическая функция $\lg z$ является в комплексной области (бесконечно) многозначной функцией от z. Для того чтобы сделать ее однозначной, разрежем плоскость комплексных чисел хотя бы вдоль отрицательной вещественной оси от 0 до ∞. Такая разрезанная плоскость представляет собою область, граница которой состоит из одной линии и внутри которой функция $\frac{1}{z}$ будет регулярной. В такой области интеграл $\zeta = \int_1^z \frac{dt}{t}$ представляет собой однозначно определенную функцию верхнего предела z, производная которой $\frac{1}{z}$ не равна нулю, если путь интегрирования расположен весь внутри области.

Определенное таким способом значение $\lg z$ называется *главным значением* логарифма. Здесь следует заметить, что главные значения $\lg z$ в точках, расположенных на противоположных краях разреза плоскости, в силу формулы (1) отличаются друг от друга на $2\pi i$.

Основное свойство логарифмической функции выражается „*теоремой сложения*"

$$\lg z_1 + \lg z_2 = \lg (z_1 z_2). \qquad (3)$$

Это равенство, в силу многозначности логарифма, следует понимать так: при заданных значениях $\lg z_1$ и $\lg z_2$ одно из значений $\lg (z_1 z_2)$ равно сумме двух первых логарифмов. Теорема сложения легко доказывается следующим преобразованием:

$$\lg z_1 + \lg z_2 = \lg z_1 + \int_1^{z_2} \frac{dt}{t} = \lg z_1 +$$

$$+ \int_1^{z_2} \frac{d(z_1 t)}{z_1 t} = \int_1^{z_1} \frac{dt}{t} + \int_{z_1}^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{z_1 z_2} \frac{dt}{t} = \lg (z_1 z_2).$$

Пусть

$$z = x + iy = \rho (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

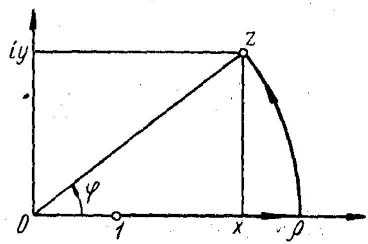
где

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \rho \geqslant 0, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Выберем путь интегрирования, состоящий, как указано на черт. 15, из отрезка вещественной оси от 1 до ρ и дуги окружности радиуса ρ. Тогда будем иметь, что

$$\lg z = \int_1^z \frac{dt}{t} = \int_1^\rho + \int_\rho^z =$$

$$= \lg \rho + i \int_0^\varphi d\psi = \lg\rho + i\varphi \qquad (4)$$



Черт. 15.

и, следовательно, логарифмическая функция при комплексном z приводится к вещественным функциям. Так как $\lg \rho$ и φ могут принимать все вещественные значения, то $\lg z$ принимает все комплексные значения.

На основании теоремы, доказанной в § 2, можно утверждать, что в окрестности каждой точки, отличной от $z=0$, существует функция, обратная функции $\zeta = \lg z$. Эта функция называется *показательной функцией* и обозначается через $z=e^{\zeta}$. Из уравнения (4) видно, что каждому значению $\zeta = \lg \rho + i\varphi$ соответствует одна и только одна, отличная от нуля, точка z, т. е. что функция e^{ζ} определяется однозначным образом во всей плоскости ζ. В частности, если $|z| = \rho = 1$, то $\lg \rho = 0$ и следовательно $\lg z = i\varphi$ или

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \tag{5}$$

В силу формулы (4), в которой z заменено на ζ, мы получаем следующее представление любого комплексного числа ζ:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \zeta = e^{\lg\zeta} = e^{\lg\rho + i\varphi}$$

и так как $\lg\zeta$ может обозначать любое комплексное число, то для произвольного z получается важное равенство

$$|e^{z}| = e^{\Re z}. \tag{6}$$

В силу многозначности логарифма, обратная ему показательная функция имеет период $2\pi i$, т. е. удовлетворяет уравнению

$$e^{\zeta + 2\pi i} = e^{\zeta}.$$

В частности имеем

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Из теоремы сложения (3) имеем зависимость

$$e^{\lg z_1} e^{\lg z_2} = e^{\lg z_1 + \lg z_2},$$

$$e^{a} e^{b} = e^{a+b}.$$

Для производной показательной функции, так же как и для вещественной переменной, получаем

$$\frac{de^{z}}{dz} = e^{z}.$$

Определив для комплексной переменной логарифм, можем теперь дать общее определение степени z^{α} при помощи равенства

$$z^{\alpha}=e^{\alpha \lg z}.$$

Определенные здесь элементарные функции будут также исследованы еще в главе IV.

§ 7. Интегральная формула Коши.

Теорема Коши и соответственно более общая теорема, изложенная на стр. 48 и относящаяся к многосвязным областям, позволяют доказать основную интегральную формулу, также принадлежащую Коши, которая дает возможность найти значение аналитической функции $f(z)$ в произвольной внутренней точке z какой-либо замкнутой области, в которой функция $f(z)$ регулярна, через значения $f(z)$ на контуре, ограничивающем область[1]).

Пусть $f(z)$ будет регулярная аналитическая функция в области G. Пусть C будет контур, составлённый из простых кусочно-гладких кривых, ограничивающий некоторую односвязную или многосвязную область, которая вся расположена внутри области G. Пусть точка z_0 расположена внутри области, ограниченной контуром C. Контур C будем проводить в положительном направлении. Если от области G отнять круг с центром в точке z_0 и достаточно малого радиуса ρ, то в оставшейся области функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ будет регулярной. Поэтому имеем, что

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int\limits_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

где окружность K, ограничивающая круг, описана в положительном направлении.

Для точек окружности K имеем, что

$$z=z_0+\rho e^{i\varphi}, \quad (0\leqslant\varphi<2\pi)$$

---

[1]) *Cauchy L. A.* Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. Turin 1831. Exerc. d'anal. et de phys. math., Bd. 2, Paris 1841.

и значит

$$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi, \quad \frac{dz}{z - z_0} = i\,d\varphi,$$

а потому

$$\int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = i \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi. \qquad (1)$$

Так как функция $f(z)$ в точке z_0 непрерывна, то имеет место неравенство

$$|f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

(где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число), справедливое при ρ достаточно малом и при всяком φ. Пользуясь неравенством (2), § 3, можем написать

$$\left| \int\limits_0^{2\pi} \left(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\right) d\varphi \right| \leqslant 2\pi\varepsilon,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi})\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} f(z_0)\,d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \left(f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)\right) d\varphi =$$
$$= 2\pi f(z_0) + 2\pi\eta,$$

где $|\eta| \leqslant \varepsilon$.

Когда ρ стремится к нулю, то правая часть равенства (1) стремится поэтому к $2\pi i f(z_0)$. Написав z вместо z_0 и обозначив через t переменную интегрирования, получим поэтому *интегральную формулу Коши*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)}{t - z}\,dt. \qquad (2)$$

Эта формула выражает значения аналитической функции внутри замкнутой области регулярности через *„граничные“* или *„контурные значения“* функции, принимаемые функцией на контуре области.

Тем же способом, как и при обобщении теоремы Коши (§ 4), можно доказать далее, что *интегральная формула Коши (2) остается справедливой и в том случае, когда функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области, ограниченной контуром C, а аналитический характер имеет только внутри области.*

Предыдущие рассуждения дают возможность просто получить некоторые принципиально важные результаты.

Докажем прежде всего, что *производная аналитической функции тоже есть функция аналитическая.*

Для этого докажем сразу следующую еще более общую теорему:

Если $\varphi(z)$ будет какая-нибудь комплексная функция, непрерывная вдоль простой, замкнутой кусочно-гладкой кривой C[1]), *то функция, определяемая равенством*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \tag{3}$$

будет, внутри кривой C, регулярной аналитической функцией, все производные которой существуют и определяются формулой

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{4}$$

Действительно, пусть z будет какая-нибудь точка, расположенная во внутренней области G, ограниченной контуром C. При произвольных, достаточно малых по модулю, отличных от нуля значениях h имеем, что

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \varphi(t)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{t-z-h}-\frac{1}{t-z}\right)-\frac{1}{(t-z)^2}\right]dt=$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{(t-z-h)(t-z)^2}\,dt. \tag{5}$$

Так как нижние пределы расстояний точек z и $z+h$ от точек контура C, при достаточно малом $|h|$, отличны от нуля, то абсолютная величина произведения $(t-z-h)(t-z)^2$ для всех достаточно малых значений $|h|$ будет больше некоторого постоянного положительного числа. Далее, функция $\varphi(t)$ по модулю ограничена на контуре C. Таким

[1]) Т. е. величина, непрерывно зависящая от длины дуги.

образом, правая часть равенства (5) стремится [в силу формулы (2) § 3] к нулю вместе с h и следовательно

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt.$$

Существование производной $f'(z)$ функции $f(z)$, таким образом, доказано. Совершенно аналогичным образом доказывается существование производных высших порядков $f''(z)$, $f'''(z)\ldots$ и справедливость формулы (4). Так как вторая производная $f''(z)$ существует, то первая производная $f'(z)$ будет непрерывной, а следовательно $f(z)$ будет аналитической функцией в G. Здесь следует особенно отметить, что функция $f(z)$, определенная равенством (3), вовсе не должна в точках контура C иметь значения, равные $\varphi(z)$ [1]). Для того чтобы такое обстоятельство имело место, комплексная функция $\varphi(z)$ должна удовлетворять некоторым вполне определенным условиям, которые будут указаны далее (глава III, § 11). Но если известно заранее, что функция $\varphi(z)$ совпадает со значениями аналитической функции $f(z)$ на контуре, то, основываясь на формуле Коши, получаем следующую теорему: *Аналитическая функция $f(z)$ имеет непрерывные производные, определяемые формулами*

$$f^{(n}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{6}$$

Таким образом, все производные аналитической функции будут опять функциями аналитическими [2]). Здесь C

---

[1]) Рассмотрим например круг радиуса 1 и пусть на его контуре C $\varphi(t)=\frac{1}{t}$. В каждой отличной от 0 точке z внутри этого круга функция, определяемая формулой (3), будет равна

$$\int\limits_C \frac{1}{t(t-z)}\,dt=\frac{1}{z}\left(\int\limits_C \frac{1}{t-z}\,dt-\int\limits_C \frac{1}{t}\,dt\right)=\frac{1}{z}(2\pi i-2\pi i),$$

т. е. 0 (таково же значение функции в точке $z=0$).

[2]) Для функций комплексной переменной имеют таким образом место существенно иные обстоятельства, чем для функций вещественной переменной, где существование и непрерывность первой производной никоим образом не влечет за собой существование производных более высоких порядков.

обозначает кривую, окружающую точку z и целиком расположенную вместе с внутреннею для нее областью внутри области регулярности функции $f(z)$. Предыдущее доказательство остается слово в слово таким же, если G обозначает область, внешнюю для кривой C, и если точка z лежит в G. Формулы (3) и (4) определяют, поэтому, аналитическую функцию и ее производные не только для области, расположенной внутри кривой C, но и для внешней по отношению к этой кривой области. Однако эти две аналитические функции не имеют между собой ничего общего. Например, пусть задана функция $f(z)$, регулярная внутри и на контуре C, и пусть $\varphi(z)$ совпадает с ее значениями на контуре, тогда для всех значений z, расположенных вне C, интеграл (3) будет равен нулю. Это непосредственно следует из теоремы Коши в силу того, что функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ будет регулярной аналитической функцией внутри C и на C, если только z_0 лежит вне контура C. Если же C простая, но не замкнутая кривая, то формулы (3) и (4) представляют аналитическую функцию, регулярную во всей плоскости, за исключением кривой C. Доказательство опять дословно то же самое. Из полученных результатов получается *теорема, обратная теореме Коши*[1]: *Если функция $f(z)$ непрерывна в области G и если интеграл функции $f(z)$, взятый по произвольной замкнутой простой кривой, целиком лежащей внутри G, равен нулю, то функция $f(z)$ будет аналитической в области G.*

Для доказательства достаточно воспользоваться соображениями, изложенными в § 3. Пусть z_0 и Z будут две точки, расположенные в области G. По условию интеграл

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$$

не зависит от пути интегрирования и при постоянном z_0 и переменном Z будет функцией $F(Z)$ от одного Z. Функция $F(Z)$ имеет непрерывные вещественную и мнимую части, частные производные от которых существуют, непрерывны и удовлетворяют уравнениям Коши-Римана (ср.

---

[1]) В литературе эта теорема называется также *теоремой Морера* (Morera).

стр. 38—39). Следовательно $F(z)$ будет аналитической функцией от z и, по только-что доказанной теореме, ее производная $f(z)$ будет тоже аналитической функцией.

Из этой теоремы видно, что для построения теории функций комплексной переменной можно было бы исходить из требования, чтобы функция была интегрируема, вместо того чтобы исходить из условия дифференцируемости функции (ср. введение к этой главе).

§ 8. Конформное отображение.

В центре дальнейших рассуждений будет находиться одно свойство аналитических функций, которое представляет собой геометрическое выражение свойства дифференцируемости, — а именно *конформное отображение.*

Если каждой точке области G плоскости z сопоставим ту точку ζ плоскости ζ, которая соответствует значению аналитической в G функции $\zeta = f(z)$, то мы получим отображение области G на некоторое множество точек плоскости ζ. Изучим ближе характер этого отображения.

Пусть z будет такая точка области G, для которой $f'(z) \neq 0$. По доказанной в § 2 теореме об отображении областей, совершаемом аналитической функцией, достаточно малая окрестность точки z отображается взаимно однозначным образом на некоторую окрестность соответствующей точки в плоскости ζ.

Проведем через точку z две кривые C_1 и C_2, снабженные определенным направлением обхода и имеющие в точке z соответственно направленные касательные t_1 и t_2. Обозначим через φ_1 и φ_2 углы, которые касательные t_1 и t_2 образуют соответственно с положительною осью x-ов, и через $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ угол, заключенный между этими касательными. Пусть $z_1 = z + h_1$ будет точка, расположенная на кривой C_1 и стремящаяся к точке z, когда h_1 стремится по модулю к нулю, а $z_2 = z + h_2$ — такая же точка на кривой C_2. Тогда имеем, что

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1} = f'(z) \tag{1}$$

и что

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{f(z+h_2) - f(z)}{h_2} = f'(z). \tag{2}$$

Примем, что h_1 и h_2 имеют одинаковый модуль r, так что

$$h_1 = re^{i\psi_1}, \; h_2 = re^{i\psi_2}, \tag{3}$$

причем аргументы ψ_1 и ψ_2 очевидно зависят от r. Из равенств (1) и (2) имеем тогда в силу $f'(z) \neq 0$

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{f(z+h_2)-f(z)}{f(z+h_1)-f(z)}\cdot\frac{h_1}{h_2}\right) = 1.$$

Так как, при надлежащем выборе ψ_1 и ψ_2 (которые по желанию можно увеличивать на величины, кратные 2π) имеем

$$\lim_{r\to 0}\psi_1 = \varphi_1, \quad \lim_{r\to 0}\psi_2 = \varphi_2,$$

то

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(z+h_2)-f(z)}{f(z+h_1)-f(z)} = e^{i\delta}.$$

Положим теперь

$$f(z+h_1)-f(z) = \rho_1 e^{i\chi_1}, \; f(z+h_2)-f(z) = \rho_2 e^{i\chi_2};$$

предыдущее равенство принимает тогда вид

$$\lim_{r\to 0}\frac{\rho_2}{\rho_1}e^{i(\chi_2-\chi_1)} = e^{i\delta}$$

и распадается на два

$$\lim_{r\to 0}\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{r\to 0}(\chi_2-\chi_1) = \delta, \tag{5}$$

причем при отсчете углов кратные 2π в случае надобности должны быть отброшены. Функция $f(z)$ отображает кривые C_1, C_2 плоскости z на кривые Γ_1, Γ_2 плоскости ζ, которые, как легко видеть, имеют касательные в точке $\zeta = f(z)$. Из самого определения углов χ_1 и χ_2 видно, что, когда r стремится к нулю, эти углы стремятся соответственно к углам, которые касательные τ_1 и τ_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке ζ образуют с положительною вещественною осью. Равенство (5) показывает поэтому, что угол между касательными τ_1 и τ_2 в плоскости ζ равен соответственному углу между касательными t_1 и t_2 в плоскости z. При этом направления касательных τ_1 и τ_2 выбраны соответственно той ориентации кривых Γ_1 и Γ_2, какая получается при отображении снабженных определенным направлением кривых C_1 и C_2. *Таким образом, если аналитическая функция* $\zeta = f(z)$ *отображает плоскость* z *на плоскость* ζ, *то углы между соответствующими кривыми и направление отсчета углов сохраняются в каждой точке, в которой* $f'(z) \neq 0$. Как говорят, отображение обладает свойством „консерватизма углов" или, иначе, является „конформным".

Итак, получили следующий результат: *аналитическая функция совершает конформное отображение или, точнее, конформное отображение с сохранением направления отсчета углов.*

Рассуждая в обратном порядке, можно доказать, что если функция $\zeta = f(z) = u + iv$ совершает конформное отображение и имеет непрерывные производные от u и от v, то такая функция будет дифференцируемой. Если еще u_x и v_x в рассматриваемой области нигде не обращаются одновременно в нуль, то и $f'(z)$ будет в этой области везде отлична от нуля.

Конформность отображения, совершаемого функцией, при соблюдении только-что упомянутых предположений эквивалентна аналитическому характеру функции при добавочном условии, что производная этой функции не обращается в нуль.

При отображении с сохранением углов, малый треугольник плоскости z должен отображаться в первом приближении на подобный треугольник плоскости ζ. Поэтому конформное отображение называют еще „подобным в бесконечно малом".

Величина
$$|f'(z)| = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = \sqrt{u_y^2 + v_y^2},$$
как видно из равенства (1), представляет собой *линейное растяжение* в точке z. Если функция $\zeta = f(z)$ отображает область G плоскости xy конформно на область Γ плоскости uv, то величина площади области Γ, получающейся при отображении, равна
$$\int\int_{\Gamma} du\,dv = \int\int_{G} (u_x v_y - u_y v_x) dx\,dy = \int\int_{G} (u_x^2 + v_x^2)\,dx\,dy =$$
$$= \int\int_{G} |f'(z)|^2 dx\,dy.$$

Эта формула получается из того соображения, что функциональный определитель функций u и v по x и по y, в силу уравнений Коши-Римана, равен $|f'(z)|^2$.

Для того, чтобы отображение было бы конформным, существенно то обстоятельство, чтобы производная была отлична от нуля. Далее увидим (глава IV, § 1 и 2), какой характер имеет отображение в тех точках, в которых производная обращается в нуль.

Кроме рассмотренных нами конформных отображений, при которых сохраняется величина и направление отсчета углов, встречаются и такие отображения, при которых величина угла сохраняется, направление же отсчета меняется на прямо противоположное. Такие отображения будем называть *конформными отображениями с изменением направления отсчета угла.* Простейшим примером такого отображения будет

$$\zeta = \bar{z},$$

где $\bar{z}$ обозначает, как обычно, комплексное число $\bar{z} = x - iy$, сопряженное с $z = x + iy$. Такое отображение с геометрической точки зрения будет зеркальным отображением в вещественной оси. Если точкам z сопоставлять значения $\bar{\zeta}$, сопряженные со значениями аналитической функции $\zeta = f(z)$, то будем иметь также конформное отображение с изменением направления отсчета углов. Так как, обратно, всякое такое соответствие между точками $\bar{\zeta}$ и z определяет аналитическую функцию $\zeta = f(z)$, то отсюда следует, что таким способом мы можем получить все конформные отображения с изменением направления отсчета углов. В качестве простого примера укажем преобразование обратными радиусами, к которому мы еще впоследствии вернемся (глава IV, § 3) и которое должно быть знакомо читателю.

Роль конформных отображений для прикладных областей математики (картографические проекции и т. д.) достаточно хорошо известна.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

СЛЕДСТВИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ КОШИ.

Прежде чем перейти к исследованиям, исходящим из понятия конформного отображения, докажем в этой главе ряд общих предложений теории функций комплексной переменной, которые все будут в большей или меньшей степени непосредственными следствиями интегральной формулы Коши.

§ 1. Теорема о среднем арифметическом. Принцип максимума и лемма Шварца.

Если функция $f(z)$ регулярна внутри и на контуре круга радиуса ρ с центром в точке z, то из интегральной формулы Коши следует формула

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi \tag{1}$$

и, следовательно, *значение функции $f(z)$ в точке z равно среднему арифметическому значений функции на окружности круга с центром в точке z.*

Если M есть верхняя граница значений $|f(z)|$ на окружности, то из формулы (1) непосредственно следует, что $|f(z)|\leqslant M$.

Эта оценка позволяет доказать следующую теорему, называемую „*принципом максимума и минимума модуля*“. *Модуль аналитической функции, регулярной в замкнутой области G, достигает своего наибольшего, а если функция внутри области G не обращается в нуль, то и своего наименьшего значения на контуре этой области G, и* *притом только на нем, если только функция $f(z)$ не является постоянной в области G.*

Заметим предварительно, что $|f(z)|$ будет постоянной величиной тогда и только тогда, когда $f(z)=u+iv$ является постоянной. Действительно, продифференцировав равенство $u^2+v^2=\text{const}$ по x и по y, в силу уравнений Коши-Римана, получим, что $uu_x+vv_x=0$ и $vu_x-uv_x=0$. Из такой системы уравнений следует, что или ее определитель u^2+v^2 равен нулю, или же $u_x=v_y=0$ и $v_x=-u_y=0$. Другое доказательство получим, рассмотрев функцию $\lg f(z)$.

Если $f(z)$ постоянна, то высказанная выше теорема очевидна. Пусть теперь $f(z)$, а следовательно и $|f(z)|$ не сохраняет постоянного значения. Предположим, что $|f(z)|$ принимает наибольшее значение M внутри области G. Тогда должна существовать внутренняя точка z^*, для которой $|f(z^*)|=M$ и в произвольно малой окрестности которой лежат такие точки, для которых $|f(z)|<M$. Но тогда около точки z^* можно описать круг радиуса ρ так, чтобы он весь лежал внутри G и чтобы на его контуре величина $|f(z)|$ нигде не была бы больше M, а на одной или нескольких частях контура была бы меньше M. Но это противоречит неравенству

$$M \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z^*+\rho e^{i\varphi})|\, d\varphi, \tag{2}$$

получаемому из равенства (1).

Если функция $f(z)$ не обращается в нуль внутри G, то, прилагая только-что доказанную теорему к регулярной в области G функции $\frac{1}{f(z)}$, докажем, что $|f(z)|$ достигает своего наименьшего значения тоже на контуре области G.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает так называемая *лемма Шварца* (*Schwarz*):

Пусть $f(z)$ будет аналитическая функция, регулярная в единичном круге $|z|<1$, причем $f(0)=0$, и пусть $|f(z)|\leqslant 1$ при $|z|<1$.

Лемма Шварца утверждает, что *при* $|z|<1$, *будет даже*

$$|f(z)| \leqslant |z|,$$

причем, если знак равенства имеет место хотя бы в одной точке z с $|z| < 1$, то он имеет место при всех z и в этом случае функция $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = e^{i\gamma} z \quad (\gamma \text{ вещественное}).$$

Для доказательства рассмотрим функцию $\frac{f(z)}{z}$. Разложив $f(z)$ в ряд по степеням z и разделив на z, мы увидим, что функция $\frac{f(z)}{z}$ является регулярной при $|z| < 1$, в частности и в нулевой точке [1]). В каждом круге $|z| \leqslant R$, где $R < 1$ модуль этой функции принимает наибольшее значение на контуре и следовательно, принимая во внимание условия леммы, получим, что

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leqslant \frac{1}{R}.$$

Совершая предельный переход $R \to 1$, докажем предложение. Если знак равенства имеет место хотя бы в одной точке, то везде при $|z| < 1$ должно быть $\frac{|f(z)|}{|z|} = 1$, так как тогда функция $\frac{|f(z)|}{|z|}$ принимает наибольшее значение во внутренней точке. Но тогда и $\frac{f(z)}{z}$ должно быть постоянным и значит $f(z) = e^{i\gamma} z$, где γ — вещественное число.

---

[1]) См. § 4. Регулярность $\frac{f(z)}{z}$ в любом круге $|z| < R$, где $R < 1$ (а следовательно и в круге $|z| < 1$) можно также доказать, непосредственно исходя из интегральной формулы Коши:

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{z(t-z)}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{t(t-z)}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{tz}\, dt,$$

где C_R есть окружность $|z| = R$. Первый интеграл справа есть регулярная функция в круге $|z| < R$ согласно теоремы главы II, § 7 [в формуле (3) этого параграфа надо положить $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$]. Второй же интеграл равен нулю, ибо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(0) = 0.$$

Прим. ред.

§ 2. Некоторые неравенства. Теорема Лиувилля.

Из интегральной формулы (6) главы II, § 7, легко вывести неравенства для производных аналитической функции, справедливые внутри области регулярности функции. Пусть C будет простая замкнутая кривая длины L, расположенная вся вместе с ограниченною ею внутреннею областью внутри той области, где функция $f(z)$ регулярна.

Пусть, далее, M будет верхней границей значений $|f(z)|$ на кривой C и z — точка, расположенная внутри C, причем расстояние точки z от кривой C не меньше δ.

Из формулы (2) главы II, § 7, вытекает оценка

$$|f(z)| \leqslant \frac{ML}{2\pi\delta} \tag{1}$$

и соответственно из формулы (6), главы II, § 7, оценка

$$|f^{n}(z)| \leqslant \frac{n! \cdot ML}{2\pi\delta^{n+1}} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{2}$$

содержащая в себе при $n=0$ предыдущую оценку.

Если кривая C есть окружность радиуса ρ с центром в точке z, то

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!M}{\rho^{n}} \qquad (n=0, 1, 2 \ldots). \tag{3}$$

Формула (3) при $n=1$ принимает вид

$$|f'(z)| \leqslant \frac{M}{\rho}, \tag{4}$$

откуда получается *теорема Лиувилля* (*Liouville*): *Если функция регулярна и ограничена во всей плоскости, то она равна постоянной.* Действительно, так как радиус ρ можно выбрать в этом случае сколь угодно большим, то из неравенства (4) следует, что $f'(z)$ тождественно равна нулю.

§ 3. Равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса.

Обратимся теперь от исследования отдельных аналитических функций к рассмотрению множеств функций и прежде всего займемся вопросом о сходимости последовательности функций. Вспомним для этого понятие равномерной сходимости (глава I, § 1). Последовательность функций $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$, определенная на некотором множестве точек M, называется *равномерно сходящейся* на M, если она сходится в каждой точке z этого множества и притом для всех этих точек „одинаково хорошо", в следующем точном смысле: если $f(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$ будет предельная функция, определенная на M, то каждому заданному числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое целое положительное число N, чтобы при всех $n \geqslant N$ имело место неравенство

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

справедливое одновременно для всех точек z, принадлежащих множеству M. Если G есть некоторая область или C — некоторая непрерывная кривая в плоскости z и если функции $f_n(z)$ непрерывны в области G или вдоль кривой C, то и предельная функция $f(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$ будет непрерывной в области G или вдоль кривой C; это доказывается совершенно так же как соответствующее предложение в области вещественной переменной.

Если функции $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$ непрерывны вдоль некоторой кусочно-гладкой кривой C и если последовательность этих функций сходится равномерно на кривой C, то для предельной функции $f(z)$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

Действительно, из вышесказанного следует, прежде всего, непрерывность, а потому и интегрируемость функции $f(z)$.

Так как далее

$$\left| \int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_C (f_n(z) - f(z))\,dz \right|,$$

то из равномерной оценки $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ и из оценки интеграла, данной в главе II, § 3 (2), сразу получается наша теорема, совершенно так же, как аналогичная теорема в вещественной области. Эту теорему можно кратко формулировать так: *для равномерно сходящейся последовательности знаки интеграла и предела можно переставить.* Среди более глубоких теорем о сходящихся последовательностях функций на первом месте стоит следующая теорема Вейерштрасса (Weierstrass):

Если последовательность функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$, регулярных внутри и на контуре некоторой односвязной области G, ограниченной контуром C, будет равномерно сходиться на контуре, то она будет равномерно сходиться и внутри контура. Предельная функция $f(z)$ будет аналитической функцией, регулярной в G, и ее производные будут предельными функциями последовательностей соответствующих производных от $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$

Равномерная сходимость нашей последовательности внутри G непосредственно следует из принципа максимума и минимума, так как модуль разности $f_n(z) - f_m(z)$ достигает своего наибольшего значения на контуре C. Последовательность функций $\frac{f_\nu(t)}{t-z}$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ сходится, очевидно, вдоль кривой C *равномерно*, также как и последовательность функций $f_\nu(t)$. В равенстве

$$f(z) = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu(z) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_\nu(t)}{t-z} dt,$$

на основании предыдущей вспомогательной теоремы, можно, следовательно, переставить знаки интеграла и предела и поэтому предельную функцию $f(z)$ можно представить, внутри G посредством интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Отсюда непосредственно следует, как это было показано в главе II, § 7, существование непрерывной производной предельной функции внутри G и, следовательно, аналитический характер последней. На основании того же параграфа имеем формулу для производной предельной функции

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt.$$

Из этой формулы, пользуясь равномерной сходимостью (которая очевидна) последовательности функций $\frac{f_\nu(t)}{(t-z)^2}$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$), опять найдем

$$f'(z) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_\nu(t)}{(t-z)^2} dt = \lim_{\nu \to \infty} f'_\nu(z).$$

Таким же путем найдем формулу для производной n-го порядка

$$f^{(n)}(z) = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu^{(n)}(z).$$

Иногда бывает полезно понятие равномерной сходимости заменить другим, равносильным ему, понятием. Такое понятие доставляется следующим определением:

Последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \ldots$, определенных в области G, называется *непрерывно сходящейся* к функции $f(z)$, если выполнено следующее условие: какова бы ни была точка z области G, последовательность $f_n(z_n)$, ($n = 1, 2, 3, \ldots$) сходится к $f(z)$ независимо от выбора точек z_n, если только точки $z_1, z_2, z_3, \ldots$ принадлежащие G, образуют последовательность, сходящуюся к точке z.

В частности, все z_n могут совпадать с z. Таким образом, из непрерывной сходимости получается сходимость в обыкновенном смысле.

Пусть B будет ограниченной замкнутой областью. Последовательность непрерывных функций $f_1(z), f_2(z), \ldots$ тогда и только тогда равномерно сходится в B, если она сходится там непрерывно.

Легко показать, что из равномерной сходимости следует непрерывная сходимость. Действительно, пусть $\lim_{n \to \infty} z_n = z$, причем z_n и z принадлежат B. Первый член в правой части неравенства

$$|f_n(z_n) - f(z)| \leqslant |f_n(z_n) - f(z_n)| + |f(z_n) - f(z)|$$

в силу равномерной сходимости будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ заданное число, как только например $n \geqslant N(\varepsilon)$. Так как, кроме того, функция $f(z)$ как предельная функция равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, будет непрерывна в B, то при N достаточно большом и при $n \geqslant N$ будем иметь, что $|f(z_n) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и следовательно

$$|f_n(z_n) - f(z)| < \varepsilon,$$

что и доказывает непрерывную сходимость.

Обратно, предположим теперь, что последовательность $f_n(z)$ сходится непрерывно. Пусть $N_1, N_2, N_3, \ldots$ будет неограниченно возрастающая последовательность целых чисел. Если бы сходимость последовательности $f_n(z)$ не была равномерной, то существовало бы некоторое число $\alpha > 0$ и некоторая последовательность точек $z_1, z_2, z_3, \ldots$, расположенных в G, обладающая тем свойством, что при каждом $k = 1, 2, 3, \ldots$ и некотором соответствующем ему подходящем $n = n(k) \geqslant N_k$ имеет место неравенство

$$|f_n(z_k) - f(z_k)| > \alpha. \qquad (1)$$

При каждом постоянном k последовательность $f_1(z_k)$, $f_2(z_k), \ldots$ сходится к пределу $f(z_k)$. В силу неравенства (1), каждому значению k должно поэтому соответствовать такое число m (которое можно выбрать превосходящим n), чтобы имело место неравенство

$$|f_n(z_k) - f_m(z_k)| > \alpha. \qquad (2)$$

Так как область B замкнута и ограничена, то последовательность точек z_k должна иметь хотя бы одну принадлежащую B точку сгущения z. Не нарушая общности, можно предположить, что $z = \lim\limits_{k \to \infty} z_k$. Если в неравенстве (2) число k, а вместе с тем и числа n и m неограниченно увеличивать, то в силу непрерывной (по предположению) сходимости нашей последовательности функций будем иметь, что

$$|f(z) - f(z)| \geqslant \alpha.$$

Таким образом имеем противоречие, так что предположение о неравномерной сходимости отпадает.

Из этой теоремы непосредственно видно, что последовательность функций, непрерывных в некоторой ограниченной *открытой* области, тогда и только тогда будет непрерывно сходящейся в этой области, если она равномерно сходится в каждой замкнутой ее части.

§ 4. Ряды Тэйлора и Лорана.

Интегральная формула Коши дает возможность разложить аналитическую функцию в степенной ряд и тем установить связь с построением теории функций, данным Вейерштрассом. Приведем здесь вкратце эти рассуждения.

Пусть z_0 — заданная точка, расположенная внутри кривой C. Из интегральной формулы Коши имеем, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}dt, \qquad (1)$$

где z — какая нибудь точка внутри кривой C.

Второй множитель подинтегральной функции можно разложить в геометрический ряд

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\ldots,$$

если абсолютная величина отношения $\frac{z-z_0}{t-z_0}$ меньше 1. Это наверное будет иметь место, если точка z расположена внутри такого круга K, с центром в точке z_0, который весь вместе с его периферией расположен внутри C. Геометрический ряд будет тогда сходиться равномерно относительно t. Такой ряд, умноженный на $\frac{f(t)}{t-z_0}$, можно на основании § 3 почленно проинтегрировать и, пользуясь формулами (6) главы II, § 7, можно получить из формулы (1) следующее разложение:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \qquad (2)$$

Разложение (2) будет справедливо для всех значений z, лежащих внутри круга K с центром z_0. По аналогии с известным рядом, встречающимся в элементарном дифференциальном исчислении, такой ряд называют *рядом Тэйлора*

(Taylor) для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0, а полученный результат называют *теоремой Тэйлора.*

Ряд Тэйлора (2) равномерно сходится в каждом круге около точки z_0, который весь вместе со своей периферией расположен внутри области регулярности функции $f(z)$. По теореме Вейерштрасса из § 3 сумма этого ряда будет там аналитической функцией, совпадающей в окрестности точки z_0 с данной функцией $f(z)$.

В связи с рядом Тэйлора, введем следующее определение. Если в точке $z=z_0$ функция $f(z)$ и все ее производные $f'(z), \ldots f^{(n-1)}(z)$ до порядка $(n-1)$ равны нулю, а $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, т. е. если в окрестности точки z_0 разложение функции $f(z)$ в ряд Тэйлора имеет вид

$$f(z)=(z-z_0)^n(a+b(z-z_0)+\ldots) \quad (a \neq 0),$$

то точка z_0 называется *n-кратной нулевой точкой* или *n-кратным нулем* или *n-кратным корнем* функции $f(z.)$

Из разложения в ряд Тэйлора можно вывести вжаное следствие, которым часто будем пользоваться. Пусть функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z=z_0$ и разлагается там в степенной ряд

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Предположим, что этот ряд имеет хотя бы один отличный от нуля коэффициент. Пусть c_k $(k \geqslant 0)$ будет первый из необращающихся в нуль коэффициентов. Функция

$$g(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$$

в окрестности точки $z=z_0$, за исключением самой этой точки, будет определена и регулярна. Вместе с тем она может быть разложена в этой области в степенной ряд

$$g(z)=c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\ldots$$

поэтому если положить еще $g(z_0)=c_k$, то функция $g(z)$ будет регулярной везде в окрестности z_0 и будет удовлетворять условию

$$(z-z_0)^k g(z)=f(z), \tag{3}$$

причем только в случае $k=0$ надо считать, что значение $(z-z_0)^k$ при $z=z_0$ также равно 1. Так как функция $g(z)$

в точке z_0 имеет значение c_k, отличное от нуля, то в силу ее непрерывности можно отграничить такую окрестность z_0, в которой везде $g(z) \neq 0$. Из равенства (3) видно, что везде в этой окрестности, за исключением только самой точки z_0, функция $f(z) \neq 0$.

Таким образом имеем теорему:

Если функция $f(z)$ в точке $z = z_0$ регулярна и в окрестности этой точки не равна тождественно нулю, то точка z_0 не может быть точкой сгущения нулей функции $f(z)$.

Пользуясь теоремой Тэйлора, легко видеть, что известные разложения в бесконечные ряды функций e^z, $\lg(1+z)$, $(1+z)^a$ будут справедливы и для комплексных значений z. На основании сделанного выше замечания о сходимости ряда (2) эти разложения будут иметь место во всей плоскости или соответственно внутри единичного круга $|z| < 1$.

Обобщением ряда Тэйлора (2), при выводе которого предполагалась регулярность функции $f(z)$ в некотором круге K около z_0, будет *ряд Лорана* (Laurent). Пусть функция $f(z)$ будет регулярна внутри и на границах кольцевой области, ограниченной двумя окружностями K_1 и K_2, с центром в точке z_0. Если точка z расположена внутри кольца, то интегральная формула Коши принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_1} \frac{f(t)}{t-z}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_2} \frac{f(t)}{t-z}\, dt,$$

где интегралы по окружностям K_1 и K_2 взяты в таком направлении, чтобы ограниченная ими кольцевая область была расположена слева.

Для внешнего круга K_2 имеем, что

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-z_0}{t-z_0}} = \frac{1}{t-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$$

и для внутреннего круга K_1

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{t-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n.$$

Интегрируя почленно, получим разложение

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1}f(t)(t-z_0)^n dt, \tag{4}$$

где оба интегрирования как по кругу K_1, так и по кругу K_2 совершаются в одном и том же (положительном) направлении, или еще

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{5}$$

где кривая интегрирования C есть произвольная простая замкнутая кривая, окружающая точку z_0 и расположенная внутри кольца. Полученный результат называют *теоремой Лорана*. Разложения (4) или (5) называются *рядом Лорана* для функции $f(z)$. Эти разложения полезны в том случае, когда функция $f(z)$ регулярна во всех точках окрестности z_0, за исключением самой точки z_0. В этом случае разложение (5) будет справедливо везде внутри некоторого круга, описанного около точки z_0, за исключением самой точки z_0.

Если за кривую C взять окружность с центром в точке z_0 и радиусом ρ и если M будет верхней границей значений $|f(z)|$ на кривой C, то из формулы (5) будем иметь неравенства для коэффициентов c_n ряда Лорана

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n}, \qquad (n=\ldots,-1,\,0,\,1,\,2,\ldots). \tag{6}$$

Далее, коэффициент c_{-1} равен

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}f(t)\,dt.$$

Коэффициент c_{-1} является таким образом (в смысле § 5, главы II) *вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0. Докажем такую теорему:

Если выражение $(z-z_0)f(z)$ *имеет предел, когда* z *стремится к* z_0, *то этот предел равен вычету функции* $f(z)$ *в точке* z_0.

Действительно, так как функция $(z-z_0)f(z)$, в силу предположения, ограничена в окрестности z_0, то в разложении этой функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 коэффициенты всех членов с отрицательными показателями должны равняться нулю. Это видно из того, что в формуле (6) можно брать ρ сколь угодно малым. Из разложения же

$$(z-z_0)f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots$$

имеем

$$f(z)=\frac{c_0}{z-z_0}+c_1+c_2(z-z_0)+\dots,$$

и следовательно вычет функции $f(z)$ в точке z_0 будет равен $c_0=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. Если в разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 входит только конечное число членов, но не меньше одного, с отрицательными степенями и не равными нулю коэффициентами, то точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$. Если $\frac{c}{(z-z_0)^n}$, $(n\geqslant 1, c\neq 0)$ будет членом этого разложения с самой низкой степенью, то точка z_0 называется *полюсом n-го порядка* или *n-кратным полюсом*.

Около каждого полюса функции $f(z)$ можно отграничить такую окрестность, в которой эта функция везде, за исключением ее центра, будет по модулю больше заданного наперед положительного постоянного числа C. Действительно, пусть ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+\dots \qquad (c_{-n}\neq 0, n\geqslant 1)$$

Функция

$$g(z) = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z - z_0) + \ldots) +$$
$$+ c_0 (z - z_0)^n + c_1 (z - z_0)^{n+1} + \ldots \qquad (7)$$

в некоторой окрестности точки z_0 будет регулярна и во всех ее точках, за исключением центра, будет равна $(z - z_0)^n f(z)$. Имеем далее $g(z_0) = c_{-n}$. В силу непрерывности $g(z)$ должна существовать такая окрестность z_0, в которой везде

$$|g(z)| > \frac{1}{2} |c_{-n}| > 0.$$

Выберем, кроме того, эту окрестность настолько малой, чтобы в ней везде было

$$|z - z_0|^n < \frac{|c_{-n}|}{2C};$$

тогда будет

$$|z - z_0|^n < \frac{|g(z)|}{C} = \frac{|z - z_0|^n |f(z)|}{C}.$$

Таким образом, во всех точках этой окрестности за исключением ее центра z_0, будем иметь, что

$$|f(z)| > C.$$

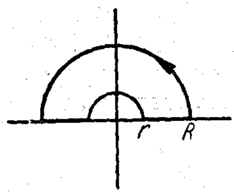
В частности, полюс никогда не может быть точкой сгущения нулей функции.

Изложенное в этом параграфе устанавливает связь с точкой зрения Вейерштрасса на теорию функций комплексной переменной. *Класс функций, определенных при помощи степенных рядов, вполне тождествен с классом функций, имеющих непрерывные производные и названных нами аналитическими.*

§ 5. Приложения теоремы Коши и теоремы о вычетах.

Теорема Коши (глава II, § 4) и ее обобщение, теорема о вычетах (глава II, § 5) имеют не только бесчисленные приложения в теории функций, но и для других математических дисциплин являются часто важным вспомогательным средством. Мы дадим сейчас несколько примеров из вещественного анализа.

Обе теоремы часто с пользой употребляются в анализе при вычислении (путем перехода в комплексную область) несобственных вещественных интегралов с бесконечными пределами, с трудом поддающихся или вовсе не поддающихся вычислению в вещественной области. Последующие примеры приводятся в этом параграфе, а не ранее, только потому, что при приложении теоремы о вычетах надо будет воспользоваться одной теоремой предыдущего параграфа.



Черт. 16.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$J = \int \frac{e^{iz}}{z}\, dz,$$

взятый по контуру области, указанной на черт. 16, в положительном направлении. Подинтегральная функция регулярна внутри и на контуре этой области. Разлагая путь интегрирования на части, можно следующим образом представить J как сумму интегралов с вещественными пределами интегрирования:

$$J = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi}\, i d\varphi + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\, dx +$$

$$+ \int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi + ir\cos\varphi}\, i d\varphi. \qquad (1)$$

Пусть r стремится к нулю, а R неограниченно возрастает независимо от r. Второй член в правой части равенства (1) стремится тогда к нулю, так как

$$\left| e^{-R\sin\varphi + iR\cos\varphi} \right| = e^{-R\sin\varphi}$$

есть величина, монотонная в каждом из промежутков $0, \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, π и везде в этих промежутках, за исключением концов 0 и π, стремится к нулю. Четвертый интеграл стремится к

$$\int_{\pi}^{0} i d\varphi = -\pi i.$$

Наконец, сумма первого и третьего интегралов равна в силу главы II, § 6 (5)

$$\int_{r}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x} dx.$$

С другой стороны, по теореме Коши, значение интеграла J равно нулю. Переходя к пределу, получаем поэтому, что

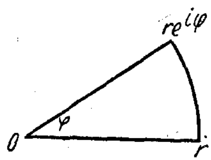
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим интеграл

$$J = \int e^{-z^2} dz,$$

взятый в положительном направлении по контуру кругового сектора, имеющего вершины в точках 0, r, $re^{i\varphi}$ и центр в точке 0, причем $r > 0$, $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ (черт. 17). По теореме Коши значение интеграла J равно 0. Вдоль дуги круга имеем

$$z^2 = (re^{i\alpha})^2 = r^2 e^{2i\alpha} = r^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha), \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi),$$



Черт. 17.

и, следовательно, в силу главы II, § 6, (6)

$$\left| e^{-z^2} \right| = e^{-r^2 \cos 2\alpha};$$

отсюда получается для интеграла, взятого по дуге, оценка

$$\left| \int_{r}^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz \right| \leqslant r \int_{0}^{\varphi} e^{-r^2 \cos 2\alpha} d\alpha.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю, когда r неограниченно возрастает. Это очевидно, если $\varphi < \frac{\pi}{4}$; в случае же $\varphi = \frac{\pi}{4}$ доказывается особым рассуждением, относящимся к вещественному анализу [1]). Таким образом, интеграл, взятый по дуге круга, стремится к нулю при $r \to \infty$. Но тогда, очевидно, теорема Коши приводит к равенству

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = \lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-z^2} dz, \tag{2}$$

если только один из этих пределов существует. Правый предел действительно существует, так как из вещественного анализа известно, что несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

сходится и равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Так как при всяком r

$$\int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = e^{i\varphi} \int_0^r e^{-e^{2i\varphi} z^2} dz,$$

$$e^{-i\varphi} \int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = \int_0^r e^{-(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) z^2} dz,$$

---

[1]) Если

$$0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$$

и

$$A = r \int_\gamma^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \cos 2\alpha} d\alpha, \quad A < \frac{1}{\sin 2\gamma} \int_\gamma^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \cos 2\alpha} r \sin 2\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{1 - e^{-r^2 \cos 2\gamma}}{2r \sin 2\gamma}$$

и следовательно $\lim_{r \to \infty} A = 0$. *Прим. ред.*

то, переходя в последнем равенстве к пределу при $r \to \infty$, пользуясь равенством (2) и сравнивая вещественные и мнимые части, получаем формулы

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\varphi} \cos(x^2 \sin 2\varphi)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\varphi,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\varphi} \sin(x^2 \sin 2\varphi)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\varphi.$$

В частности, при $\varphi = \frac{\pi}{4}$, имеем формулу

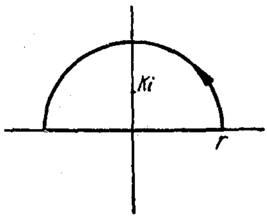
$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

[*интегралы Френеля* (Fresnel)].

В качестве приложения теоремы о вычетах, рассмотрим интеграл

$$\int \frac{ze^{iz}}{z^2+k^2} dz,$$ (k — вещественное и положительное),

взятый в положительном направлении по всему контуру C полукруга, изображенного на черт. 18.



Черт. 18.

Этот интеграл равен произведению суммы соответствующих вычетов на $2\pi i$. Так как единственная особая точка, расположенная внутри этой области, будет ki и так как соответствующий вычет, по § 4, равен

$$\lim_{z \to ki} (z - ki)\frac{ze^{iz}}{z^2+k^2} = \lim_{z \to ki} \frac{ze^{iz}}{z+ki} = \frac{kie^{-k}}{2ki} = \frac{e^{-k}}{2},$$

то

$$\int_C \frac{ze^{iz}}{z^2+k^2} dz = \pi i e^{-k}.$$

Интеграл, взятый по диаметру полукруга от $-r$ до $+r$, в силу формулы (5) главы II, § 6, равен

$$\int_{-r}^{r} \frac{xe^{ix}dx}{x^2+k^2} = \int_{0}^{r} \frac{x(e^{ix}-e^{-ix})}{x^2+k^2} dx = 2i \int_{0}^{r} \frac{x \sin x}{x^2+k^2} dx.$$

Интеграл, взятый по полуокружности, по абсолютной величине, равен

$$\left| \int_{0}^{\pi} \frac{re^{i\varphi} e^{-r \sin \varphi + ir \cos \varphi} . ire^{i\varphi}}{r^2 e^{2i\varphi} + k^2} d\varphi \right| \leqslant \frac{r^2}{r^2 - k^2} \int_{0}^{\pi} e^{-r \sin \varphi} d\varphi$$

и, следовательно, при неограниченном возрастании r стремится к нулю. Таким образом, переходя к пределу при $r \to \infty$, получаем:

$$2i \int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+k^2} dx = \pi i e^{-k},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+k^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-k}.$$

Обобщением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ будет несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ax\, dx,$$

где a — вещественное. Для вычисления этого интеграла полезно следующее соображение. Пусть $c = r + is$ будет произвольное не вещественное число и пусть $\alpha > 0$.

Интеграл

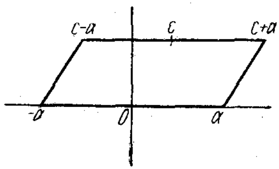
$$\int_{P} e^{-z^2} dz,$$

взятый по контуру параллелограмма P с вершинами $\pm \alpha$ и $c \pm \alpha$ (черт. 19) будет, по теореме Коши, равен нулю. При постоянном c и неограниченно возрастающем α длина не горизонтальных сторон параллелограмма остается без изменения, в то время как модуль подинтегральной функции на этих сторонах будет равен

$$\left|e^{-z^2}\right| = e^{\Re(-z^2)} = e^{(\Im z)^2-(\Re z)^2} = e^{(ts)^2-(tr\pm a)^2} (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

и, следовательно, остается меньше некоторой величины, которая стремится к нулю, когда a неограниченно возрастает. Переходя к пределу, при $a \to \infty$, будем поэтому иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+c)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$



Черт. 19.

Полагая $c = i\frac{a}{2}$, найдем

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+i\frac{a}{2}\right)^2} dx = e^{\frac{a^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-iax} dx;$$

наконец, сравнивая вещественные части, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ax\, dx = e^{-\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Следующая теорема дает возможность вычислить очень общий класс интегралов:

Пусть функция $f(z)$ *регулярна во всей верхней полуплоскости* $\Im z > 0$, *за исключением конечного числа особых точек* $z_1, z_2, z_3, \ldots,$ *и пусть функция* $f(z)$ *регулярна всюду на вещественной оси. Далее, пусть существует три таких положительных числа* r, C и ε, *чтобы при* $|z| \geqslant r$ *везде в верхней полуплоскости имело бы место неравенство*

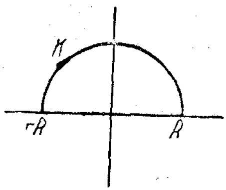
$$|f(z)| < \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}}. \tag{3}$$

При этих условиях несобственный, вещественный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

существует и равен сумме вычетов функции $f(z)$, соответствующих особым точкам z_ν, умноженной на $2\pi i$.

Доказательство. Существование интеграла непосредственно видно из того обстоятельства, что при больших $|x|$ для функции $f(x)$ существует усиливающая функция $\frac{C}{|x|^{1+\varepsilon}}$ и что интеграл $\int_1^\infty \frac{C}{|x|^{1+\varepsilon}}\,dx$ сходится.



Черт. 20.

Можно представить себе, что в равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

число R неограниченно растет и при том так, что верхняя половина круга $|z|=R$ никогда не проходит через особую точку функции $f(z)$. Если K будет полукруг, проходимый от точки $-R$ до точки $+R$ (черт. 20), то на основании теоремы о вычетах имеем равенство

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_K f(z)\,dz + 2\pi i \sum r_\nu,$$

где r_ν обозначает вычет функции $f(z)$ в точке z_ν и сумма распространена на все значения ν, для которых точки z_ν расположены внутри полукруга. При $R > r$, по формуле (2) главы II, § 3 имеем, что

$$\left|\int_K f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{C}{R^{1+\varepsilon}}\pi R = \frac{\pi C}{R^\varepsilon}.$$

Интеграл, взятый по полукругу, следовательно, стремится к нулю, когда R неограниченно возрастает.

Переходя к пределу $R \to \infty$, имеем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum r_\nu,$$

где знак суммы распространен на *все* значения ν [1]).

Пример. Функция

$$f(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c},$$

---

[1]) У Куранта теорема сформулирована сразу как для конечного, так и для бесконечного числа особых точек функции $f(z)$, лежащих в верхней полуплоскости. Однако, в виду допущенных Курантом в этом последнем случае неточностей, мы позволяем себе несколько уточнить формулировку теоремы.

Пусть $f(z)$ функция, регулярная в верхней полуплоскости $\Im z > 0$ за исключением бесконечного, но исчислимого множества особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots$, не имеющего точек сгущения на конечном расстоянии, так что эти точки могут быть расположены в порядке возрастания их модулей $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant |z_3| \leqslant \ldots$ На вещественной оси функция $f(z)$ пусть будет всюду регулярна.

Пусть наконец существует последовательность простых контуров K_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, опирающихся на вещественную ось, лежащих в верхней полуплоскости, заключающих начало координат и n особых точек $z_1, z_2, \ldots z_3$, но не заключающих других особых точек и таких, что если R_n есть минимальное расстояние от контура K_n до начала координат (причем $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = \infty$), а L_n есть длина контура K_n, то $L_n < AR_n$, а функция $f(z)$ удовлетворяет на контуре K_n неравенству

$$|f(z)| < \frac{C}{R_n^{1+\varepsilon}},$$

и на вещественной оси при $|z| \geqslant r$ неравенству

$$|f(z)| < \frac{C}{|z|^{1+\varepsilon}},$$

где A, C, r, ε некоторые положительные числа, не зависящие от n.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *существует и равен $2\pi i$-кратной сумме вычетов функции $f(z)$ относительно точек z_ν:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} r_\nu.$$

Доказательство, очевидно, совершенно аналогично вышеприведенному, только вместо контура K надо взять последовательность контуров K_n.

Прим. ред.

где коэффициенты a, b, c вещественны и удовлетворяют условию

$$b^2 - 4ac < 0,$$

будет регулярна во всей верхней полуплоскости $\mathfrak{J} z \geqslant 0$, за исключением точки $z = \frac{1}{2a}\left(-b + i\sqrt{4ac - b^2}\right) = z_1$, где у квадратного корня надо выбрать знак тот же, что и знак числа a. Для достаточно больших значений $|z|$ эта функция будет удовлетворять условию (3) при $\varepsilon = 1$ и при подходящем C. Вычет функции $f(z)$ в особой точке $z = z_1$ будет равен

$$\lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{az^2 + bz + c} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{a\,(z - z_1)\,(z - \bar{z}_1)} =$$
$$= \frac{1}{a(z_1 - \bar{z}_1)} = \frac{1}{i\sqrt{4ac - b^2}}.$$

По доказанной только-что теореме получаем поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Здесь можно только упомянуть о большом значении, какое имеет теорема Коши и теорема о вычетах для аналитической теории чисел. Для нас же важно одно приложение теоремы о вычетах к теории функций. Речь идет о подсчете числа нулей и полюсов аналитической функции. Пусть функция $f(z)$ регулярна внутри простой замкнутой кривой C везде, за исключением конечного числа *полюсов* $a_1, a_2 \ldots a_r$. Вдоль самой кривой C функция $f(z)$ пусть тоже будет регулярна и отлична от нуля. Пусть $b_1, b_2, \ldots b_s$ будут нули функции $f(z)$, расположенные внутри кривой C. Число их должно быть конечно, так как в противном случае они имели бы хоть одну точку сгущения, расположенную внутри или на кривой C, а по § 4 точка сгущения нулей функции не может быть ни регулярной точкой функции, ни ее полюсом.

Функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ очевидно регулярна как на кривой C, так и внутри этой кривой, за исключением точек $a_1, a_2, \ldots a_r$,

$b_1, \ b_2, \ldots b_s$. Если в окрестности точки z_0 функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

где k — положительное или отрицательное целое число и $g(z)$ — регулярная и не обращающаяся в нуль в точке $z = z_0$ функция, то

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z) = (z - z_0)^{k-1} h(z),$$

где функция

$$h(z) = kg(z) + (z - z_0) g'(z)$$

также регулярна и отлична от нуля в точке $z = z_0$. Поэтому будет

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{h(z)}{g(z)}.$$

В точке $z = z_0$ функция $\dfrac{h(z)}{g(z)}$ равна k и, следовательно, может быть разложена в окрестности этой точки в такой ряд:

$$\frac{h(z)}{g(z)} = k + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \ldots,$$

но тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + c_1 + c_2 (z - z_0) + \ldots.$$

Таким образом, точка $z = z_0$ будет полюсом функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ и число k — соответствующим вычетом. Если k — *положительное* число, то z_0 будет нулем k-го порядка функции $f(z)$. Если же k *отрицательное*, то z_0 будет полюсом порядка $-k$ этой функции. Теорема о вычетах дает теперь (глава II, § 5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (k_1 + k_2 + \ldots + k_s) - (h_1 + h_2 + \ldots + h_r),$$

где $k_1, \ k_2, \ldots k_s$ кратности нулей $b_1, \ b_2, \ldots b_s$, а $h_1, \ h_2, \ldots h_r$ кратности полюсов $a_1, \ a_2, \ldots a_r$ функции $f(z)$ и интеграл взят по C в положительном направлении. Если каждый нуль и каждый полюс считать столько раз, какова его кратность, то сумма $k_1+k_2+\ldots+k_s$ дает полное число нулей, а сумма $h_1+h_2+\ldots+h_r$ число полюсов функции $f(z)$ внутри кривой C. Итак: *если N число нулей, а P число полюсов функции $f(z)$, расположенных внутри кривой C, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P,$$

причем интеграл берется по C в положительном направлении. Подобным же образом можно вывести следующее более общее предложение:

Если $\lambda \geqslant 0$ целое число, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^\lambda \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{s} b_k^\lambda - \sum_{k=1}^{r} a_k^\lambda, \tag{5}$$

где опять $a_1, a_2, \ldots a_r$ полюса, а $b_1, b_2, \ldots b_s$ нули функции $f(z)$, лежащие внутри кривой C.

§ 6. Принцип сходимости для аналитических функций.

Результаты § 2 позволяют доказать одно глубокое общее предложение, которое с общей точки зрения освещает ряд различных на первый взгляд вопросов теории функций. На этом основании мы приведем здесь это доказательство, хотя дальнейшие наши рассуждения будут проведены независимо от этого предложения.

Многие рассуждения и доказательства анализа основываются на элементарной теореме Вейерштрасса о существовании точки сгущения: каждое множество чисел, состоящее из бесконечного числа элементов и расположенное в ограниченной области, имеет по крайней мере одну точку сгущения. Многие трудности, встречающиеся при доказательствах анализа, в особенности при доказательствах существования, зависят часто от того, что не всегда возможно установить соответствующее предложение для множеств других математических объектов. Так например, является неправильным утверждение, что из всякого бесконечного множества вещественных функций, заданных и непрерывных в определенном интервале и ограниченных в нем в своей совокупности (так что абсолютное значение всех функций не превосходит в этом интервале заданной величины), можно выбрать частичную последовательность функций, сходящуюся во всем интервале к предельной функции.

Для теории аналитических функций комплексной переменной имеет большое значение то обстоятельство, что здесь существует в широком смысле принцип сгущения. Существование такого принципа естественно обусловливается тем, что понятие аналитической функции комплексной переменной гораздо ýже понятия непрерывной вещественной функции вещественной переменной.

Мы сформулируем принцип сходимости следующим образом[1]). *Если дана бесконечная последовательность аналитических функций $f_1(z), f_2(z), \ldots$ регулярных в области G, и если их модули равномерно*[2]) *ограничены в G, то из этой последовательности можно выбрать такую частичную последовательность функций, которая в каждой замкнутой области, расположенной целиком внутри G, равномерно сходится к некоторой предельной регулярной аналитической функции.*

Мы разобьем доказательство этой теоремы на несколько частей. Прежде всего докажем, что если B есть замкнутая и ограниченная простой кусочно-гладкой кривой часть области G, то все функции $f_n(z)$ равномерно непрерывны в B в своей совокупности, т. е. докажем, что каждому числу $d>0$ соответствует некоторое положительное, не зависящее от n и стремящееся к нулю вместе с d число $\delta=\delta(d)$, такое, что неравенство $|f_n(z_1)-f_n(z_2)|<\delta(d)$ имеет место при всяком n для всяких двух точек z_1 и z_2, лежащих в B, если только $|z_1-z_2|<d$. Для доказательства обозначим через ρ такую положительную величину, чтобы каждый круг радиуса ρ с центром в любой точке B весь принадлежал G. Тогда, на основании неравенства (4), § 2 этой главы, для любой точки z области B имеет место неравенство

$$|f_n'(z)| \leqslant \frac{M}{\rho},$$

[1]) Об этой теореме, ее обобщениях и приложениях см. например работы *Монтеля* (Montel) и *Жюлья* (Julia) (*Montel*: Ann. Ec. Norm. sup. 1912, 1916; *Julia*: Journ. d. math. 1918 и Ann. Ec. Norm. sup. 1919, 1920).

[2]) Т. е. существует верхняя граница, общая для модулей всех этих функций.

где M — верхняя граница для модулей всех функций $f_n(z)$. Если точки z_1 и z_2 области B соединить кривой длины l, которая вся расположена в B, то, интегрируя вдоль такой кривой, найдем, что

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)| = \left| \int_{z_2}^{z_1} f'_n(z)\,dz \right| \leqslant \frac{Ml}{\rho}.$$

Но если расстояние d между точками z_1 и z_2 можно выбирать произвольно малым, то и длину l этой кривой можно сделать зависящей только от d и притом вместе с d сколь угодно малой[1]).

Теперь докажем следующее предложение: Если последовательность функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$, аналитических и равномерно ограниченных в области G, сходится в замкнутой части B этой области или даже только на некотором точечном множестве, повсюду плотном в B, то она сходится равномерно во всей области B. Воспользуемся доказательством от противного.

Действительно, если равномерная сходимость не имеет места, то должно существовать такое положительное число α, такая бесконечная последовательность точек $z_1, z_2, \ldots$, расположенных в B, и такие целые числа $p=p(m)$ и $q=q(m)$, неограниченно растущие вместе с m, что

$$|\varphi_p(z_m)-\varphi_q(z_m)| > \alpha > 0 \qquad (m=1, 2, \ldots).$$

По теореме Вейерштрасса о точках сгущения последовательность точек z_m должна иметь хотя бы одну точку сгущения z в B. Можно принять, опуская, если нужно некоторые точки и меняя порядок нумерации, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

По условию существует сколь угодно близко от точки z такая точка t, для которой последовательность функций $\varphi_n(z)$

---

[1]) Действительно, в противном случае в B существовала бы последовательность пар таких точек, расстояние между которыми стремится к нулю и которые нельзя соединить в B кривою, длиною меньше некоторого положительного числа α. Эти пары точек должны иметь точку сгущения, принадлежащую B. Так как точки каждой пары, принадлежащей B и лежащей в достаточно малой окрестности этой точки сгущения, можно соединить кривой, расположенной в B, длина которой сколь угодно мала, то получаем противоречие.

сходится (может оказаться, что такая сходимость имеет место в самой точке z).

По только что доказанному, точку t можно выбрать настолько близко от точки z, чтобы при всяком n было бы

$$|\varphi_n(z)-\varphi_n(t)|<\frac{\varepsilon}{8},$$

где ε — заданное произвольно малое положительное число.

С другой стороны, при m достаточно большом имеем, что

$$|\varphi_p(z_m)-\varphi_p(z)|<\frac{\varepsilon}{8} \quad \text{и} \quad |\varphi_q(z_m)-\varphi_q(z)|<\frac{\varepsilon}{8}$$

и, следовательно,

$$|\varphi_p(z_m)-\varphi_q(z_m)|<|\varphi_p(z)-\varphi_q(z)|+\frac{\varepsilon}{4}<|\varphi_p(t)-\varphi_q(t)|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как по условию последовательность функций φ_n сходится в точке t и p и q неограниченно растут вместе с m, то при m достаточно большом будем иметь

$$|\varphi_p(t)-\varphi_q(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и следовательно

$$|\varphi_p(z_m)-\varphi_q(z_m)|<\varepsilon,$$

что противоречит предположению, если принять $\varepsilon<\alpha$.

Теорема будет теперь доказана, если только из множества функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... мы выделим такую частичную последовательность, которая сходится на некотором исчислимом, повсюду плотном в G, множестве точек. Таким множеством точек, например, является совокупность всех принадлежащих G точек с рациональными координатами. Обозначим точки этого множества через t_1, t_2, t_3, ... Так как значения функций $f_n(t_1)$ ограничены в своей совокупности, то, по теореме Вейерштрасса о точке сгущения из множества функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... можно выбрать такую частичную последовательность функций $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, ..., значения которых в точке $z=t_1$, т. е. $\psi_n(t_1)$ имеют определенный предел. Из последовательности функций $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, ... аналогично можно выбрать частичную последовательность функций $\chi_1(z)$, $\chi_2(z)$, $\chi_3(z)$, ...

так, чтобы последовательность значений $\chi_n(t_2)$ имела определенный предел. Так же из последовательности функций $\chi_n(z)$ можно выделить такую частичную последовательность $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, $\omega_3(z), \ldots$, чтобы последовательность значений $\omega_n(t_3)$ имела определенный предел и т. д. Если составим теперь „диагональную последовательность" $\varphi_1(z) = \psi_1(z)$, $\varphi_2(z) = \chi_2(z)$, $\varphi_3(z) = \omega_3(z), \ldots$, то такая последовательность будет очевидно сходиться во всех точках t_ν. Так как в каждой замкнутой части области G множество точек t_ν будет повсюду плотным, то, по вышедоказанному, эта диагональная последовательность будет частичной последовательностью, выделенной из первоначальной последовательности функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ и обладающей тем свойством сходимости, о котором идет речь в теореме. Непосредственным приложением этой теоремы является *теорема Витали* (*Vitali*): *Последовательность аналитических функций $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$, равномерно ограниченных в области G, сходится в этой области равномерно, если она сходится на некотором множестве точек M, которое имеет точку сгущения ζ, принадлежащую G.* Пусть последовательность точек z_1, z_2, $z_3, \ldots$, принадлежащих M, сходится к точке ζ. Так как последовательность функций $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$ равномерно ограничена в G, то по предыдущей теореме из нее можно выделить такую частичную последовательность $g_1(z)$, $g_2(z), \ldots$, равномерно сходящуюся в каждой замкнутой части области G, которая сходится в G к регулярной в этой области функции $g(z)$. Эта предельная функция совпадает в точках z_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ с существующими там пределами

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(z_n) = f(z_n).$$

Если из последовательности $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ выделим какую-нибудь другую частичную последовательность $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_3(z), \ldots$ тоже сходящуюся равномерно в каждой замкнутой части области G, то эта последовательность будет тоже сходиться в G к регулярной там функции $h(z)$, которая удовлетворяет условиям $h(z_n) = f(z_n)$. Разность $h(z) - g(z)$ будет следовательно регулярной в G функцией, равной нулю в точках z_1, z_2, $z_3, \ldots$. По § 4 этой главы (стр. 72) эта разность будет равна нулю во всей области G, т. е. $g(z) = h(z)$ для всех значений z в области G.

Таким образом, все частичные последовательности, равномерно сходящиеся в каждой замкнутой части области G, выделенные из данной последовательности функций, стремятся в области G к одной и той же предельной функции. Поэтому, первоначальная последовательность $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ имеет в G только *одну* функцию сгущения и, следовательно, будет сходящейся в этой области и притом равномерно в каждой замкнутой ее части.

§ 7. Связь с теорией потенциала.

В главе II, § 7, было доказано, что аналитическую функцию можно неограниченное число раз дифференцировать в той области, где она регулярна. Отсюда непосредственно следует, что вещественную и мнимую части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ аналитической функции от $z = x + iy$ тоже можно неограниченное число раз дифференцировать по x и по y; в частности, дифференциальные уравнения Коши-Римана также можно продифференцировать по x и по y. Так как при этом производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ непрерывны и поэтому не зависят от порядка дифференцирования, то легко получаются следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции будут решениями дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$\Delta\varphi = 0,$$

где для сокращения положено

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

Это дифференциальное уравнение играет большую роль в многочисленных приложениях и называется *„уравнением Лапласа“*, а его решения называются *гармоническими функциями* или *потенциалами*. Гармоническая функция называется *регулярной* в области G, если она вместе со своими частными производными первого и второго порядка непрерывна в этой области. *Таким образом, вещественная и мнимая части аналитической функции будут регулярными гармоническими функциями.* Функция v, связанная с регулярной гармонической функцией u уравнениями Коши-Римана, будет тоже регулярной гармонической функцией и называется гармонической функцией, *сопряженной* с u. Сопряженная гармоническая функция определяется при помощи u однозначно с точностью до постоянного слагаемого. По этому определению функция u будет сопряженной с гармонической функцией $-v$.

Если v сопряженная с u гармоническая функция, то каждая кривая семейства $u(x, y) = \text{const.}$ пересекает каждую кривую семейства $v(x, y) = \text{const.}$ под прямым углом, за исключением тех точек, в которых $u_x = u_y = 0$. Это следует непосредственно из общего свойства конформного отображения, так как эти кривые будут отображениями взаимно перпендикулярных прямых $u = \text{const.}$ и $v = \text{const.}$ плоскости uv [1]).

Мы можем исходить не из аналитической функции $f(z)$, а из какой-нибудь регулярной гармонической функции $u(x, y)$; тогда, при помощи дифференциальных уравнений Коши-Римана, можно составить сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x, y)$ и затем построить аналитическую функцию $f = u + iv$. Таким образом, *теория регулярных гармонических функций эквивалентна с теорией аналитических функций* [2]). В то время, как до сих пор при исследовании аналитических функций вещественная и мнимая части по существу не разделялись, дальнейшие части этой главы будут излагаться больше с точки зрения теории гармонических функций.

---

[1]) Впрочем, это непосредственно видно и из равенства

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0.$$

[2]) В связи с этим находится следующая теорема: *Если $p(x, y)$ регулярная гармоническая функция в области G плоскости xy и $u + iv = f(z) = f(x + iy)$ аналитическая функция от z, регулярная в этой области и отображающая область G на некоторую область Γ плоскости uv, то функция $p(x, y)$ перейдет, при введении новых независимых переменных u, v, в некоторую регулярную гармоническую в области Γ функцию $p^*(u, v) = p(x, y)$.* Действительно, если $q(x, y)$ будет сопряженная с p гармоническая функция, то $p + iq$ будет аналитическая в G функция от z и, следовательно, аналитическая функция от $\zeta = u + iv$ в Γ. Введение новых переменных u, v вместо x, y будем называть *переносом* гармонической функции p из G в Γ.

§ 8. Представление аналитических и гармонических функций интегралом Пуассона.

Пусть функция $f(z)=u+iv$ будет регулярна внутри и на контуре круга K радиуса R, с центром хотя бы в начале координат. Для произвольной точки $z=x+yi=re^{i\psi}$, лежащей внутри K, в силу интегральной формулы Коши имеет место равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{Re^{\varphi i}}{Re^{i\varphi}-re^{i\psi}}\,d\varphi. \quad (1)$$

Если же мы рассмотрим какую-нибудь точку z^*, расположенную вне K, например точку

$$z^*=\frac{R^2}{\bar{z}}=\frac{R^2}{r}e^{i\psi},$$

то функция $\frac{f(z)}{z-z^*}$ будет регулярной внутри и на контуре круга K и поэтому будем иметь равенство

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(t)}{t-z^*}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}-Re^{i\psi}}\,d\varphi. \quad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим, что

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi})\left(\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\psi}-re^{i\psi}}-\frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}-Re^{i\psi}}\right)d\varphi$$

или

$$f(z)=u+iv=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi.$$

Сравнивая вещественные части в этом равенстве, найдем формулу

$$u(r,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi, \quad (3)$$

которая называется *интегральной формулой Пуассона*. Так как каждую регулярную гармоническую функцию можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции, то эта формула выражает значение любой гармонической функции внутри круга, через ее граничные значения. Заметим еще, что частные производные от u по r и по ψ (или по x и по y) для внутренней точки круга получаются из формулы (3) дифференцированием под знаком интеграла.

Особенно простой вид формула (3) принимает при $r=0$; тогда оказывается

$$u(0)=u(0,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

Таким образом *значение регулярной гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на контуре этого круга.*

Понятно, что имеет место и аналогичная формула, получающаяся путем замены u сопряженной гармонической функцией. Функцию v, сопряженную с u, можно также выразить, с точностью до постоянного слагаемого, через значения функции u на контуре круга. Для этого сложим оба равенства (1) и (2); тогда получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\left(\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}-re^{i\psi}}+\frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}-Re^{i\psi}}\right)d\varphi$$

или

$$f(z)=u+iv=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bigl(u(R,\varphi)+$$

$$+iv(R,\varphi)\bigr)\left(1+i\frac{2Rr\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\right)d\varphi.$$

Сравнивая в этом равенстве мнимые части и замечая, что по формуле (4) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R,\varphi)\,d\varphi=v(0)$, выводим формулу

$$v(r,\psi)=v(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\frac{Rr\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi, \tag{5}$$

дающую искомое выражение.

Путем соединения этого равенства с равенством (3) получим для функции $f(z)=f(re^{i\psi})=u+iv$

$$f(z)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{R^2-r^2+2iRr\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}d\varphi$$

$$=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{R^2-r^2+Rr\left(e^{i(\psi-\varphi)}-e^{-i(\psi-\varphi)}\right)}{R^2+r^2-Rr\left(e^{i(\psi-\varphi)}+e^{-i(\psi-\varphi)}\right)}d\varphi$$

$$=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{Re^{i\varphi}+re^{i\psi}}{Re^{i\varphi}-re^{i\psi}}d\varphi$$

$$=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\frac{t+z}{t-z}d\varphi.$$

Разлагая дробь $\frac{t+z}{t-z}$ в геометрический ряд

$$\frac{t+z}{t-z}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\psi-\varphi)},$$

умножая на $u(R,\varphi)$ и интегрируя почленно, что здесь возможно, получим:

$$f(z)=iv(0)+\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\alpha_n e^{in\psi}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{7}$$

или

$$u(r,\psi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\psi+b_n\sin n\psi), \tag{8}$$

$$v(r,\psi)=v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\psi+a_n\sin n\psi), \tag{9}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\ (R, \varphi)\cos n\varphi\ d\varphi,\ (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\ (R, \varphi)\sin n\varphi\, d\varphi,\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как каждый член в формуле (8) или (9) сам по себе представляет гармоническую функцию, (например $r^n \cos n\psi$ есть вещественная часть аналитической функции z^n), то в формулах (8) и (9) мы имеем перед собой разложение произвольной регулярной гармонической функции u и сопряженной с ней гармонической функции v в сходящиеся ряды по особенно простым гармоническим функциям.

Заменяя в формулах (3) и (5) функцию $u\ (R, \varphi)$ какою-нибудь произвольною непрерывною или только кусочно-непрерывною [1]) на контуре круга функциею $g\ (\varphi)$, получим две функции, определенные формулами

$$u\ (r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\ (\varphi)\ \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\ d\varphi \quad (10$$

и

$$v\ (r, \psi) = v\ (0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g\ (\varphi)\ \frac{Rr\ \sin\ (\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\varphi. \quad (11)$$

Эти функции тоже будут внутри круга гармоническими функциями. Действительно, мы можем составить выражения Δu и Δv, дифференцируя под знаком интеграла, причем получим тождественно нуль, так как множители при $g\ (\varphi)$ сами являются гармоническими функциями. В § 10 мы увидим, что определенная формулою (10) функция u имеет граничные значения, равные как раз $g\ (\varphi)$, но предварительно выведем из полученных результатов некоторые следствия.

---

[1]) Ср. стр. 11 сноску.

§ 9. Следствия.

Из предыдущего можно вывести ряд следствий, которые соответствуют результатам, полученным выше из интегральной формулы Коши.

Из формулы (4) § 8, дающей значение гармонической функции в центре круга, вытекает *теорема о максимуме и минимуме гармонической функции:*

Гармоническая функция, регулярная внутри и на контуре области G, принимает свое наибольшее и наименьшее значения на этом контуре. Если же такая функция принимает экстремальное значение внутри контура, то она является постоянной. Доказательство совершенно аналогично доказательству § 1 теоремы о максимуме и минимуме модуля аналитической функции. Вместо модуля $|f(z)|$ надо рассматривать гармоническую функцию, причем формула, аналогичная формуле (2) § 1, имеет место даже со знаком равенства.

Точно также теорема Вейерштрасса о сходимости из § 3 может быть перенесена на гармонические функции в следующей форме („теорема Harnack'a"): *Пусть дана последовательность гармонических функций* $u_1(r,\psi), u_2(r,\psi), u_3(r,\psi), \ldots$ *регулярных внутри и на контуре круга K, и пусть последовательность граничных значений этих функций* $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$, $g_3(\varphi)$, ... *равномерно сходится к непрерывной функции* $g(\varphi)$. *Тогда последовательность гармонических функций* u_n *равномерно сходится во всем круге K к гармонической регулярной функции и с граничными значениями* $g(\varphi)$.

Эта теорема доказывается также, как и теорема Вейерштрасса из § 3.

Разность $|u_n - u_m|$ принимает наибольшее значение на контуре, где, по условию, разность $|g_n - g_m|$ сколь угодно мала при достаточно большом n и всех $m > n$, притом равномерно относительно φ. Последовательность функций u_n сходится, поэтому, равномерно во всем круге K к непрерывной предельной функции u, имеющей граничные значения $g(\varphi)$. Функцию u можно выразить интегралом Пуассона (3) § 8, так как в силу равномерной сходимости последовательности u_n возможен переход к пределу под знаком интеграла. Но, как было замечено выше, такой интеграл представляет собой гармоническую функцию, регулярную внутри K.

Дальнейшим следствием результатов предыдущего параграфа является следующая теорема о сходимости последовательности аналитических функций, которой мы воспользуемся в дальнейшем (глава VI, § 2):

Если в одной точке области G, например в точке $z=0$, последовательность аналитических в G функций $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, $\omega_3(z)$, ... стремится к нулю и если вещественные части этих функций сходятся к нулю равномерно во всей области G, то последовательность функций $\omega_n(z)$ стремится к нулю равномерно в каждой замкнутой области, принадлежащей G.

Действительно, пусть G^* будет какая-нибудь замкнутая область, принадлежащая G; обозначим через R такое положительное число, что каждый круг радиуса R с центром в любой точке G^* весь вместе со своим контуром лежит в области G (ср. главу I, § 2, стр. 15). Произвольную точку P из G^* возьмем за центр круга радиуса R, к которому приложим формулу (3) § 8; продифференцировав последнюю по r и положив $r=0$, получим:

$$\frac{\partial u_n(0, \psi)}{\partial r}=\frac{1}{R\pi}\int_0^{2\pi} u_n(R, \varphi) \cos(\psi-\varphi)\, d\varphi.$$

Отсюда следует, что если во всей области G вещественные части u_n удовлетворяют неравенствам $|u_n|\leqslant M_n$, то в каждой точке P, принадлежащей G^*, будет

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|\leqslant\frac{2M_n}{R} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\leqslant\frac{2M_n}{R}\ ^{1)}.$$

В силу же дифференциальных уравнений Коши-Римана частные производные от мнимых частей v_n не превосходят по абсолютному значению того же числа и, следовательно,

---

1) В силу того, что в точке P $\frac{\partial u_n}{\partial x}=\frac{\partial u_n(0,0)}{\partial r}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}=\frac{\partial u_n\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\partial r}$

Прим. ред.

колебание функции v_n в замкнутой области G^* [1]) стремится к нулю [2]), что и доказывает нашу теорему.

Далее, формулы (10) и (11) § 8 позволяют указать точные границы для вещественной и мнимой частей функции $f(z)=u+iv$, регулярной внутри и на контуре круга $|z|\leqslant R$. При этом мы предполагаем, что граничные значения $g(\varphi)$ вещественной части функции на периферии круга по абсолютной величине не превосходят 1.

Предположим сначала, что оба выражения

$$u(r, \psi)-u(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\frac{Rr\cos(\psi-\varphi)-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi, \tag{1}$$

$$v(r, \psi)-v(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,\frac{Rr\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,d\varphi \tag{2}$$

положительны. Они приобретают наибольшее абсолютное значение, при условии, что $|g(\varphi)|\leqslant 1$ в том случае, если принять $g(\varphi)=1$, там, где второй множитель подинтегральной функцией положителен, а в остальных точках принять $g(\varphi)=-1$.

Так как всегда $R^2+r^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)\geqslant 0$, то остается рассмотреть только числители указанных множителей. Таким образом, в равенстве (1) надо принять

$$g(\varphi)=1, \text{ если } \cos(\psi-\varphi)>\frac{r}{R},$$

$$g(\varphi)=-1, \text{ если } \cos(\psi-\varphi)\leqslant\frac{r}{R}.$$

Точно также получаем граничные значения, которые надо принять в равенстве (2)

$$g(\varphi)=1, \text{ если } 0<\psi-\varphi<\pi,$$
$$g(\varphi)=-1, \text{ если } \pi\leqslant\psi-\varphi\leqslant 2\pi.$$

Если какое-либо из выражений (1), (2) отрицательно, то для оценки их абсолютного значения надо принять значе-

1) Т. е. наибольшее из абсолютных значений разности двух значений функции.

2) Так как по предположению $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=0$. *Прим. ред.*

ния функции $g(\varphi)=1$ и $g(\varphi)=-1$, противоположные по знаку вышеуказанным.

При этих предположениях относительно $g(\varphi)$ оба интеграла могут быть вычислены непосредственно и мы получаем:

$$|u(r, \psi)-u(0)| \leqslant \frac{4}{\pi} \arcsin \frac{r}{R}, \tag{3}$$

$$|v(r, \psi)-v(0)| \leqslant \frac{2}{\pi} \lg \frac{R+r}{R-r}. \tag{4}$$

Первая из этих оценок называется еще „arcsinus"-формулой Шварца"[1]).

§ 10. Решение предельной задачи теории потенциала для круга.

До сих пор интеграл Пуассона служил нам для представления гармонической функции, считающейся заранее известной. Однако значение этого интеграла, как уже упоминалось, гораздо шире. В самом деле, имеет место следующая теорема.

Если $g(\varphi)$ произвольная вещественная непрерывная функция вещественной переменной φ, имеющая период 2π, то интеграл

$$u(r, \psi)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\psi-\varphi)+r^2} d\varphi, \tag{1}$$

который может также быть разложен в бесконечный ряд

$$u(r, \psi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}(a_\nu \cos \nu\psi+b_\nu \sin \nu\psi),$$

где

$$a_\nu=\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos \nu\varphi\, d\varphi,\quad b_\nu=\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin \nu\varphi\, d\varphi \ (\nu=0,1,2\ldots)$$

---

[1]) Подробные исследования в подобном направлении читатель найдет у *P. Koebe*, Über das Schwarzsche Lemma ..., Math. Zeitschr. Bd. 6 (1920), S. 52—84.

представляет собою внутри круга радиуса R с центром в начале координат регулярную гармоническую функцию, принимающую на контуре круга значения $g(\varphi)$.

Иными словами, эту теорему выражают, говоря, что *интеграл Пуассона решает для круга предельную задачу теории потенциала* [1]).

Для доказательства равномерно аппроксимируем, что по известной теореме Fejér'а всегда возможно [2]), непрерывную функцию $g(\varphi)$ последовательностью тригонометрических полиномов вида

$$g_n(\varphi)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu\varphi+b_\nu^{(n)}\sin\nu\varphi).$$

Регулярные гармонические функции

$$u_n(r,\psi)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}(a_\nu^{(n)}\cos\nu\psi+b_\nu^{(n)}\sin\nu\psi),$$

имеют очевидно граничные значения $g_n(\varphi)$. В силу известных „условий ортогональности тригонометрических функций“ значения интегралов

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g_n(\varphi)\cos\nu\varphi\,d\varphi\quad(\nu=0,1,2,\ldots),\\&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g_n(\varphi)\sin\nu\varphi\,d\varphi\quad(\nu=1,2,\ldots)\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

равны $a_\nu^{(n)}$ и соответственно $b_\nu^{(n)}$ при $\nu=0,1,\ldots,n$ и нулю при $\nu>n$. Если выражения (2) обозначить при *всяком*

---

[1]) Точнее, *первую предельную задачу теории потенциала* или, как еще ее называют иначе, *задачу Дирихле*. *Прим. ред.*

[2]) Теорему Fejér'а можно доказать следующим образом. Пусть $f(x)$ будет непрерывная функция с периодом 2π; пусть далее

$$a_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\,e^{-i\nu\vartheta}\,d\vartheta\qquad(\nu=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots)$$

$\nu \geqslant 0$ через $a_\nu^{(n)}$ и $b_\nu^{(n)}$, то при $\nu > n$ будем всегда иметь, что $a_\nu^{(n)} = b_\nu^{(n)} = 0$, и поэтому можно написать

$$u_n(r, \psi) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^\nu (a_\nu^{(n)} \cos \nu\psi + b_\nu^{(n)} \sin \nu\psi), \tag{3}$$

где теперь сумма продолжена до бесконечности. По первой теореме сходимости из § 9 последовательность функций

и

$$s_n = \sum_{\nu=-n}^{n} \alpha_\nu e^{i\nu x}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Имеем, сперва,

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sum_{\nu=-n}^{n} e^{-i\nu(\vartheta - x)} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) e^{in(\vartheta - x)} \frac{1 - e^{-i(2n+1)(\vartheta - x)}}{1 - e^{-i(\vartheta - x)}} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}(\vartheta - x)} - e^{-i\frac{2n+1}{2}(\vartheta - x)}}{e^{i\frac{\vartheta - x}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta - x}{2}}} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \frac{\left(e^{i(n+1)(\vartheta - x)} + e^{-i(n+1)(\vartheta - x)}\right) - \left(e^{in(\vartheta - x)} + e^{-in(\vartheta - x)}\right)}{\left(e^{i\frac{\vartheta - x}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta - x}{2}}\right)^2} d\vartheta,$$

следовательно,

$$f_{n-1}(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \frac{e^{in(\vartheta - x)} - 2 + e^{-in(\vartheta - x)}}{\left(e^{i\frac{\vartheta - x}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta - x}{2}}\right)^2} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \left(\frac{\sin \frac{n(\vartheta - x)}{2}}{\sin \frac{\vartheta - x}{2}}\right)^2 d\vartheta = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} f(\vartheta + x) \left(\frac{\sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta.$$

u_n сходится при возрастающем n к регулярной гармонической функции u с контурными значениями $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\varphi) = g(\varphi)$.

В неравенствах

$$\left|\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos\nu\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} g_n(\varphi)\cos\nu\varphi d\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |g(\varphi) - g_n(\varphi)|\, d\varphi,$$

$$\left|\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin\nu\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} g_n(\varphi)\sin\nu\varphi d\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |g(\varphi) - g_n(\varphi)|\, d\varphi$$

В частности при $f(x) = 1$ имеет место равенство

$$1 = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta, \tag{*}$$

а потому в общем случае будет:

$$f_{n-1}(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\left(f(\vartheta + x) - f(x)\right)\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta\,.$$

Разложим промежуток $0,\ 2\pi$ на промежутки $0,\ \delta$; $\delta,\ 2\pi - \delta$; $2\pi - \delta,\ 2\pi$, где δ — некоторое число из промежутка $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

При заданном $\varepsilon > 0$ можно в силу равномерной непрерывности и периодичности функции $f(x)$ выбрать число $\delta = \delta(\varepsilon)$ настолько малым, чтобы для всех значений ϑ в первом и третьем промежутках и для всех x имело место неравенство

$$\left|f(\vartheta + x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Так как для другого множителя подинтегральной функции имеет место формула (*), то

$$\frac{1}{2\pi n}\left|\int_0^{\delta}\left(f(\vartheta + x) - f(x)\right)\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta + \right.$$

$$\left. + \int_{2\pi - \delta}^{2\pi}\left(f(\vartheta + x) - f(x)\right)\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

правые части не зависят от ν и при возрастании n стремятся к нулю, так как $g_n(\varphi)$ равномерно сходятся к $g(\varphi)$. Поэтому имеют место равномерно относительно значка ν равенства

$$\lim_{n\to\infty} a_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos\nu\varphi\, d\varphi,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin\nu\varphi\, d\varphi.$$

В силу равномерного стремления $a_\nu^{(n)}$ и $b_\nu^{(n)}$ к пределам в равенстве (3) можно в бесконечной сумме произвести почленный переход к пределу при $n\to\infty$, и в результате получить для функции u как раз тот ряд, который фигурирует в теореме. Что этот ряд равен интегралу (1), находят совершенно аналогично разложению § 8, в которое входила гармоническая функция $u(R, \varphi)$ вместо $g(\varphi)$.

Другие доказательства этой теоремы читатель найдет в конце следующего параграфа и в главе IV, § 3.

Заметим наконец еще, что интеграл Пуассона решает предельную задачу и при еще более общем предположении, что контурная функция $g(\varphi)$ только кусочно-непрерывна. В этом случае представленная интегралом Пуассона гармоническая функция имеет во всех точках непрерывности функции $g(\varphi)$ заданные контурные значения, а при приближении к точке разрыва φ_0 принимает значения, имеющие определенные точки сгущения, лежащие между $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(\varphi_0+\varepsilon)$

Зафиксировав δ, можно выбрать затем число $N = N(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы при любом $n \geqslant N$ было бы

$$\frac{1}{2\pi n}\left|\int_\delta^{2\pi-\delta} [f(\vartheta+x)-f(x)]\left(\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 d\vartheta\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, при $n \geqslant N(\varepsilon)$, при всяком x имеем, что

$$|f_{n-1}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Вещественные тригонометрические полиномы $f_n(x)$ сходятся следовательно равномерно к функции $f(x)$.

и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(\varphi_0 - \varepsilon)$. Мы опускаем здесь простое доказательство этого предложения, так как оно будет получено дальше (глава VI, § 6) в более общем виде.

§ 11. Граничные значения аналитической функции.

Граничные значения, которые функция, аналитическая в односвязной замкнутой области, принимает на контуре этой области, нельзя конечно задавать произвольно. Это непосредственно видно из теоремы о максимуме и минимуме гармонической функции. Действительно, если заданы граничные значения функции u, — вещественной части аналитической функции — то этим вещественная часть определена однозначно. В самом деле, разность двух гармонических функций u_1 и u_2, имеющих одинаковые граничные значения, будет гармоническая функция, на контуре равная нулю, а потому, по теореме максимума и минимума, будет тождественно равна нулю во всей замкнутой области. Но, зная вещественную часть, можно однозначно, до произвольной аддитивной постоянной, определить мнимую часть и ее граничные значения. Эти граничные значения не могут поэтому задаваться произвольно наряду с граничными значениями вещественной части.

Эти рассуждения показывают нам, что степень произвола, имеющего место при построении аналитической функции, может зависеть только от произвольного выбора непрерывных граничных значений ее вещественной части (и одной чисто мнимой постоянной). С другой стороны, как показывает результат предыдущего параграфа, для частного случая круговой области эта степень произвола как раз имеет место. Только позднее (глава VI, § 5 и 6), решив предельную задачу теории потенциала для случая односвязной области, подчиненной очень общим условиям, мы получим этот результат во всей его общности. Но мы уже теперь в состоянии указать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять граничные значения функции, аналитической в односвязной области, которую мы предположим, для простоты, ограниченной одной единственной кривой C, имеющей непрерывную кривизну.

Мы будем исходить из формулы (3) главы II, § 7, которая определяет функцию, аналитическую в каждой области, в которой нет точек кривой C. Если кривую C разбить на несколько частей, то каждой такой части будет соответствовать функция, определяемая интегрированием вдоль этой части. Эта функция будет аналитической функцией, регулярной во всей плоскости за исключением точек рассматриваемой части кривой. Складывая такие отдельные функции, отвечающие всем частям кривой C, получим первоначально рассмотренную функцию. Дальнейшие рассуждения не будут зависеть от того, будем ли мы иметь дело с кривой замкнутой или нет.

В дальнейшем нам понадобится важное понятие *главного значения Коши* некоторого интеграла. Пусть $g(x)$ будет функция вещественной переменной x, непрерывная вместе со своими первой и второй производными, в замкнутом промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть x_0 будет точка внутри этого промежутка.

Тогда выражение $\int\limits_a^b \frac{g(x)}{x-x_0}\,dx$ по обычному определению интеграла не имеет, вообще говоря, смысла. Напротив, существует следующий предел

$$H(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x)}{x-x_0}\,dx + \int\limits_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x)}{x-x_0}\,dx\right),$$

который и называется *главным значением Коши* интеграла. Здесь существенно симметричное и одновременное приближение с обеих сторон к особенной точке x_0. Для доказательства существования этого предела достаточно заметить, что при наших предположениях функцию $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\ h(x, x_0),$$

где $h(x, x_0)$ — непрерывная функция от переменных x и x_0 в замкнутой области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Таким образом, надо только доказать существование главного значения Коши для $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-x_0}$, что впрочем непосредственно видно. Вместе с тем видно, что в каждом замкнутом промежутке, лежащем целиком внутри промежутка a, b, главное значение Коши $H(x_0)$ является непрерывной функцией от x_0.

Это понятие о главном значении интеграла легко переносится на комплексную область. Пусть C будет кривая в комплексной плоскости, обладающая непрерывной кривизной. Точки этой кривой обозначим при помощи комплексной переменной $t=\xi+i\eta$. Если s обозначает длину дуги кривой, то t будет комплексной функцией от s, имеющей непрерывные первую и вторую производные, причем $|t'(s)|=1$. Пусть теперь $\varphi(t)$ будет функция комплексной переменной t, изменяющейся вдоль кривой C, которая при замене t на $t(s)$ имеет непрерывные первую и вторую производные по s [1]). Обозначая через t_0 произвольную внутреннюю точку на кривой C, определим главное значение Коши интеграла $\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt$ как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{s_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,t'ds+\int\limits_{s_0+\varepsilon}^{b}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,t'ds\right),$$

где a и b — значения s в начале и в конце дуги C и $t_0=t(s_0)$. Существование такого главного значения легко доказывается сведением к главному значению в области вещественной переменной.

Действительно, имеем, что

$$t-t_0=(s-s_0)\,t'(s_0)\Big((1+(s-s_0)\,\alpha_1(s,s_0)\Big)$$

и, следовательно, если только $|s-s_0|$ достаточно мал,

$$\frac{1}{t-t_0}=\frac{1}{\Big((s-s_0)\,t'(s_0)\Big)}\Big((1+(s-s_0)\,\alpha_2(s,s_0)\Big),$$

где функции $\alpha_1(s,s_0)$ и $\alpha_2(s,s_0)$, так же как и встречающиеся дальше функции α_3 и α_4, непрерывны для всех принадлежащих C значений s и s_0. Точно также

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+(s-s_0)\,\alpha_3(s,s_0).$$

[1]) При этом следует подчеркнуть, что переменная t изменяется исключительно вдоль кривой, так что существование производных не влечет еще за собой аналитического характера функции $\varphi(t)$.

Таким образом, подинтегральная функция принимает вид $\dfrac{\dfrac{\varphi(t_0)}{t'(s_0)}t'(s)}{s-s_0}+\alpha_4(s, s_0)$ и, следовательно, достигнуто сведение к главному значению вещественных интегралов. Главное значение опять будет непрерывной функцией от s_0, если только соответствующая s_0 точка кривой лежит на внутренней замкнутой части дуги C. Определим теперь функцию $f(z)$ формулой

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt,$$

где z — какая-нибудь точка, не лежащая на кривой C. Для точки $z=t_0$ на этой кривой будем понимать выражение в правой части равенства как главное значение интеграла и будем это главное значение обозначать через $h(t_0)$.

Обозначим через $f^+(t_0)$ и $f^-(t_0)$ предельные значения функции $f(z)$ (если они существуют), к которым эта функция стремится, когда точка z приближается к точке t_0, перемещаясь по „положительной" или „отрицательной" нормали к кривой C, проведенной в точке t_0. При этом под положительной нормалью мы понимаем ту, которая при положительном обходе кривой направлена влево.

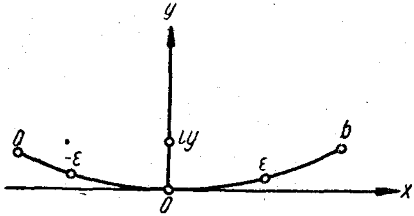
Нашей целью является доказательство следующей теоремы: *Предельные значения $f^+(t_0)$ и $f^-(t_0)$ существуют и связаны с величинами $\varphi(t_0)$ и $h(t_0)$ уравнениями*

$$\left.\begin{array}{c} f^+(t_0)-\dfrac{1}{2}\varphi(t_0)=h(t_0),\; f^-(t_0)+\dfrac{1}{2}\varphi(t_0)=h(t_0) \\ f^+(t_0)-f^-(t_0)=\varphi(t_0). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

При доказательстве можно очевидно предположить, что кривая интегрирования C состоит из произвольно малого куска, охватывающего точку t_0, так как интеграл, взятый по какой-нибудь другой дуге, представляет собою в окрестности точки t_0 регулярную и следовательно непрерывную функцию от z. Выберем координатные оси так, чтобы $t_0=0$ и чтобы кривая C касалась в этой точке оси x-ов (черт. 21), причем направление обхода кривой C в нулевой точке должно совпадать с направлением положительной оси x-ов. При отыскании предела $f^+(0)$ надо приближать точку $z=iy$ к нулевой точке по мнимой оси и притом с положительной ее стороны. Длину дуги s будем отсчитывать от нулевой точки. На основании вышеприведенного замечания длину всей дуги кривой C можно считать настолько малой, чтобы ее направление нигде не отклонялось от оси x-ов более чем на $30°$. Исследуемое выражение

$$2\pi i f(z)=2\pi i f(iy)=$$

$$=\int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-iy}t'ds \qquad (y\neq 0)$$



Черт. 21.

разобьем на два слагаемых $G(\varepsilon, y)$ и $H(\varepsilon, y)$, где

$$G(\varepsilon, y)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-iy}\,t'ds,$$

понимая под ε достаточно малое положительное число. В силу нашего предположения о наклоне касательной имеем, что на всей кривой C $|t-iy|\geqslant c|s|$, где c обозначает положительную, не зависящую от s постоянную ($c\leqslant\cos 30°$); в частности при $|s|>\varepsilon$ имеем $|t-iy|>c\varepsilon$. Отсюда при произвольных вещественных y_1 и y_2 получаем оценку

$$|H(\varepsilon,y_1)-H(\varepsilon,y_2)|<\int_a^b \frac{|\varphi(t)|}{c^2\varepsilon^2}|y_1-y_2|ds<c_1\frac{|y_1-y_2|}{\varepsilon^2}, \quad (2)$$

где c_1 — некоторая постоянная.

Вдоль кривой C будет

$$\varphi(t)=\varphi(0)+s\beta_1(s),\ t=s+s^2\beta_2(s),\ t'=1+s\beta_3(s),$$

где $\beta_1(s)$, $\beta_2(s), \ldots$ означают непрерывные функции от s. А поэтому

$$G(\varepsilon, y)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(0)+s\beta_1(s)}{s-iy+s^2\beta_2(s)}\left(1+s\beta_3\right)(s)ds=$$

$$=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(0)ds}{s-iy}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(s-iy)s\beta_4(s)+s^2\beta_5(s)}{\left((s-iy)(s-iy+s^2\beta_2(s)\right)}ds.$$

Свяжем теперь величины ε и y зависимостью $|y| = \varepsilon^3$. Положив в неравенстве (2) $|y_1| = \varepsilon^3$ и $y_2 = 0$, устремим $|y|$ и, следовательно, ε к нулю. Величина $H(\varepsilon, y)$ будет тогда стремиться к главному значению $2\pi i h(0)$. Вторая часть интеграла $G(\varepsilon, y)$ стремится при этом к нулю.

Действительно, в силу имеющих место на кривой C оценок

$$|s - iy + s^2\beta_2(s)| = |t - iy| \geqslant c|s| \quad \text{и} \quad \left|\frac{s}{s - iy}\right| \leqslant 1$$

модуль подинтегральной функции не превосходит некоторого конечного, не зависящего от y числа, в то время как путь интегрирования стягивается к точке $s = 0$.

Первый член $G(\varepsilon, y)$ будет равен в пределе

$$\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{ds}{s \mp i\varepsilon^3},$$

причем знак при $i\varepsilon^3$ надо взять отрицательным при отыскании f^+ и положительным при отыскании f^-.

Вводя новую переменную интегрирования σ соотношением $s = \varepsilon^3\sigma$, получим

$$\varphi(0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon^{-2}}^{\varepsilon^{-2}} \frac{d\sigma}{\sigma \mp i}.$$

Но этот предел равен $\pm \pi i \varphi(0)$, что и доказывает окончательно теорему.

Пусть $\varphi(t)$ будет функция, заданная на контуре, состоящем из кривых, обладающих кусочно-непрерывной кривизной, и ограничивающем замкнутую односвязную область. Из доказанной теоремы легко вывести условие для того, чтобы значения функции $\varphi(t)$ были граничными значениями регулярной аналитической функции $\varphi(z)$. Действительно, такую аналитическую функцию можно представить внутри области по формуле Коши интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

который для точек z, лежащих вне контура, должен тождественно равняться нулю. Если в предыдущей теореме отождествить $f^+(t_0)$ с $\varphi(t_0)$ и принять $f^-(t_0)=0$, то для контурных значений $\varphi(t)$ в точках, лежащих на внутренней части какой-либо замкнутой, имеющей непрерывную кривизну, дуги кривой C, получится условие

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt, \tag{3}$$

где в правой части подразумевается главное значение интеграла. Условие (3) имеет вид так называемого *интегрального уравнения*. Это условие необходимо и, как показывает подстановка в формулу (1), достаточно[1] для того, чтобы функция $\varphi(t)$ представляла контурные значения аналитической функции $\varphi(z)$, определенной во внутренней по отношению к контуру области при помощи функции $\varphi(t)$.

Если кривая C есть окружность, то легко из наших результатов получить новое доказательство того, что интеграл Пуассона действительно решает предельную задачу[2]).

Согласно § 8 напишем его в виде

$$u(r, \psi)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)}{t-z^*}\,dt, \tag{4}$$

где $z^*=\frac{R^2}{\bar{z}}$, а через $\varphi(t)$ обозначены заданные (вещественные) контурные значения на окружности. Если точка z приближается к какой-нибудь точке t_0 окружности изнутри, то точка z^* будет приближаться к той же точке извне. Из последней из формул (1) тогда видно, что предельным значением разности (4) будет действительно $\varphi(t_0)$.

---

[1]) Здесь следует заметить, что можно опустить сделанное выше предположение о том, что точка z приближается к контуру, перемещаясь по *нормали*. Предельные значения f^+ и f^-, а следовательно и формулы (1), сохраняют свои значения и тогда, когда точка приближается к точке контура произвольным образом. В этом легко убедиться, заметив, что все наши оценки имеют место равномерно для всех точек любой внутренней замкнутой части дуги C.

[2] Наше доказательство, основанное на рассуждениях текста, годится только для радиального стремления к контуру; предыдущее замечание доказывает его пригодность и для произвольного стремления к контуру.

§ 12. Потоки.

Теория потенциала тесно связана с физическими представлениями. Так как эти представления понадобятся нам в дальнейшем, как эвристическое вспомогательное средство, то коснемся их здесь вкратце: полный разбор приложений теории потенциала выходит из рамок настоящей книги. Рассмотрим плоское *векторное поле* в области G плоскости xy, т. е. систему двух функций

$$\mathfrak{v}_x = p(x, y), \quad \mathfrak{v}_y = q(x, y),$$

определенных и непрерывных в области G, которые мы будем рассматривать, как составляющие вектора $\mathfrak{v}$. Такое векторное поле можно наглядно представить себе как поле распределения скоростей *стационарного плоского потока однородной несжимаемой жидкости*[1]).

Предположим теперь, что область G односвязна и что поток *„свободен от источников"*, т. е. что через контур каждой области, принадлежащей G, столько же жидкости втекает, сколько вытекает. Это предположение приводит к некоторому условию, которому должен удовлетворять вектор скорости $\mathfrak{v}$. Рассмотрим в G простую замкнутую кусочно-гладкую кривую C, длину дуги которой обозначим через s. Обозначим через $\mathfrak{v}_n$ нормальную к кривой C составляющую вектора $\mathfrak{v}$, причем положительное направление нормали должно быть направлено внутрь области, ограниченной кривой.

Выражение

$$\int\limits_C \mathfrak{v}_n ds$$

будет тогда пропорционально притоку жидкости в единицу времени в ту часть области G, которая ограничена контуром C. В силу предположения об отсутствии источников,

[1]) Материальную природу текущей жидкости можно ближе не рассматривать. Математическое представление годится как для течения электричества в тонких пластинках, так и для течения тепла или течения жидкости или воздуха. Существенно лишь, чтобы все эти течения можно было рассматривать как перенос некоторой субстанции, о количестве которой может итти речь.

этот интеграл должен равняться нулю, какова бы ни была кривая C. Но[1]

$$\mathfrak{v}_n = p\cos(n,\ x) + q\cos(n,\ y) = -p\frac{dy}{ds} + q\frac{dx}{ds};$$

поэтому получаем условие

$$\int\limits_C \left(q\frac{dx}{ds} - p\frac{dy}{ds}\right) ds = \int\limits_C \{q\,dx - p\,dy\} = 0.$$

Если, как мы в дальнейшем будем предполагать, первые частные производные функций p и q существуют и непрерывны, то отсюда, на основании главы I, § 3, следует: *необходимое и достаточное условие для отсутствия источников в нашем потоке состоит в том, чтобы*

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}. \qquad (1)$$

Пусть $\mathfrak{v}_s$ обозначает составляющую вектора скорости $\mathfrak{v}$ по направлению касательной к простой замкнутой кусочно-гладкой кривой C, лежащей в G. Интеграл

$$\int\limits_C \mathfrak{v}_s ds$$

называется *циркуляцией* вдоль кривой C. Длину дуги при этом следует отсчитывать так, чтобы ограниченная кривой C область обходилась в положительном направлении при возрастании s. Поток называется *безвихревым*, если циркуляция вдоль каждой простой замкнутой кривой C, лежащей внутри G, равна нулю. Так как[2]

$$\mathfrak{v}_s = p\cos(s,\ x) + q\cos(s,\ y) = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds},$$

то из равенства

$$\int\limits_C \left(p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds}\right) ds = \int\limits_C \{p\,dx + q\,dy\} = 0$$

---

[1]) $(n,\ x)$ и $(n,\ y)$ обозначают углы, образованные положительной нормалью с осями x-ов и y-ов.

[2]) $(s,\ x)$ и $(s,\ y)$ — углы, образованные положительной касательной с осями координат.

получаем следующее условие для безвихревого потока: *поток тогда и только тогда безвихревой, если компоненты скорости удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) совпадают с дифференциальными уравнениями Коши-Римана.

Из результатов главы I, § 3, следует, что для безвихревого потока в односвязной области компоненты скорости p и q будут частными производными некоторой функции от x и y, которую обозначим например через $-u(x, y)$:

$$p=-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad q=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3}$$

Функция $u(x, y)$ называется *потенциалом скорости потока*. Сама скорость равна $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$. Если, кроме того, поток свободен от источников, то из равенств (1) и (3) следует уравнение

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{4}$$

Каждый безвихревой и свободный от источников поток имеет потенциал скорости $u(x, y)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа (4).

Кривые $u=\text{const.}$ называются *линиями уровня* или *эквипотенциальными линиями*. Вдоль этих кривых жидкость не движется, напротив, она всюду течет перпендикулярно к ним. Действительно, для составляющей скорости $\mathfrak{v}_s$ в каком-нибудь направлении s имеем

$$\mathfrak{v}_s=p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}$$

и в силу уравнений (3) будет

$$\mathfrak{v}_s=-\frac{du}{ds}; \tag{5}$$

отсюда видно, что составляющая скорости вдоль кривой $u = \text{const.}$ равняется нулю.

Пусть v гармоническая функция, сопряженная с функцией u. Эта функция называется *функцией тока*, а кривые $v = \text{const.}$ называются *линиями тока*. Если v рассматривать как потенциал скорости некоторого потока, а $-u$ как соответствующую функцию тока, то этот поток будет называться „сопряженным“ с первоначальным.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.

§ 1. Особые точки и точки скрещивания.

Элементарные функции были определены явными выражениями для всех значений z за исключением только некоторых точек. Как раз эти точки и поведение функции в их окрестности имеют решающее значение для выяснения общего хода изменения функции. Такие точки называются *особыми точками*. Столь же важны и те точки, в которых отображение перестает быть конформным, где следовательно производная функции обращается в нуль. Такие точки назовем *точками скрещивания*. Далее будет показано, что точка скрещивания определяет особую точку обратной функции.

В этой главе мы рассмотрим на основе типических примеров простейшие явления такого рода. В следующей же главе будет развита общая теория особых точек. Предпошлем сначала замечание о так называемых *устранимых точках разрыва*.

Если регулярная аналитическая функция $f(z)$ определена во всех точках некоторой односвязной области, например круга, за исключением одной точки, например центра круга $z=0$ и если, кроме того, значения функции всюду по модулю меньше некоторого постоянного числа M, то в исключительной точке $z=0$ можно задать такое значение функции $f(0)$, чтобы функция $f(z)$ во всей области была регулярной. Это можно сделать, например, разложив функцию $f(z)$, в окрестности точки $z=0$, в ряд Лорана; легко видеть, что коэффициенты всех членов с отрицательными показателями будут равны нулю, так как в неравенствах (6) главы III, § 4 число ρ можно выбрать сколь угодно малым [1]). Таким образом, функция $f(z)$ в окрестности точки $z=0$ представляется регулярным степенным рядом, значение которого при $z=0$ и должно принять за определение функции $f(0)$. Особую точку такого типа, не имеющую важного значения, будем называть *устранимой точкой разрыва* или *устранимой точкой неопределенности* и будем считать их раз навсегда устраненными при помощи указанного приема.

Рассмотрим теперь особые точки $z=z_0$ следующего рода: можно указать окрестность точки z_0 такую, что функция $f(z)$ будет однозначно определена во всех точках этой окрестности, кроме $z=z_0$, и будет там регулярной аналитической функцией. В окрестности такой *изолированной особой точки* функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана. Такую особую точку, как в главе III, § 4, будем называть *полюсом*, если в это разложение входит только конечное число членов с отрицательными показателями. В противном случае такую точку называют *существенно особой точкой* [2]). Таким образом, в окрестности полюса функция может быть представлена следующим образом:

$$f(z)=g(z)+h\left(\frac{1}{z-z_0}\right),$$

где h — целая рациональная функция своего аргумента, степень которой, в согласии с главой III, § 4, называется *порядком* полюса, а $g(z)$ регулярная функция в окрестности точки z_0. Полюс можно также характеризовать каждым из следующих свойств: функция $f(z)$ может быть представлена в виде $\frac{1}{(z-z_0)^n}\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ регулярна при $z=z_0$; или: полюс есть изолированная особая точка однозначности (в окрестности которой функция однозначна) при приближении к которой по любому пути модуль функции неограниченно растет [3]) или полюс n-го порядка функции $f(z)$ есть такая точка $z=z_0$, которая будет нулем n-го порядка

---

[1]) См. аналогичное заключение в главе III, § 4 (стр. 76).

[2]) По *Вейерштрассу* всякая особая точка, не являющаяся полюсом, называется *существенно особой*.

[3]) Ср. главу III, § 4.

функции $\frac{1}{f(z)}$, если устранить неопределенность последней в точке $z=z_0$ указанным выше способом. Для изолированной существенно особой точки однозначности z_0 имеет место *теорема Вейерштрасса*, по которой в окрестности такой точки значения функции $f(z)$ подходят как угодно близко к каждому произвольно заданному числу a. Доказательство непосредственно следует из того обстоятельства, что $\frac{1}{f(z)-a}$ не может быть ограниченной в окрестности z_0. Действительно, в противном случае функция $g(z)=\frac{1}{f(z)-a}$ была бы регулярной в точке z_0 и следовательно функция $f(z)=a+\frac{1}{g(z)}$ была бы в точке z_0 или регулярной или имела бы там полюс, что противоречит условию теоремы.

Возможность совершенно другого поведения вблизи особой точки показывает функция $f(z)=\lg z$ при $z=0$. Здесь уже нельзя однозначным образом определить функцию в окрестности точки $z=0$ (ср. главу II, § 6). Точку $z=0$ назовем *логарифмической точкой разветвления*.

Функция $f(z)=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$ также имеет особую точку $z=0$, в окрестности которой эта функция не может быть однозначно определена.

Точка, в которой $f'(z)$ обращается в нуль, где следовательно отображение, совершаемое функцией $f(z)$, перестает быть конформным, называется *точкой скрещивания*. Точка скрещивания называется *n-кратной*, если в этой точке равны нулю все производные до порядка n включительно, производная же порядка $(n+1)$ отлична от нуля. Таким образом, разложение функции $f(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности n-кратной точки скрещивания z_0 функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z_0)\left(1+a(z-z_0)+\ldots\right)$$

$$\left(f^{(n+1)}(z_0)\neq 0\right). \qquad (1)$$

Функция $f(z)-f(z_0)$ имеет, следовательно, в точке $z=z_0$ нуль $(n+1)$-ой кратности.

Отображение в окрестности точки скрещивания характеризуется следующей теоремой: *Угол между двумя кривыми, проходящими через n-кратную точку скрещивания z_0 плоскости z, при отображении на плоскость ζ увеличивается в $n+1$ раз.*

Действительно, пусть

$$z_1 = z_0 + r_1 e^{i\varphi_1}; \quad z_2 = z_0 + r_2 e^{i\varphi_2}$$

будут две точки, близкие к z_0, расположенные соответственно на двух кривых плоскости z, проходящих через точку z_0, а

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad \zeta_2 = \zeta_0 + \rho_2 e^{i\vartheta_2}$$

пусть будут отображения этих точек на плоскость ζ. Из формулы (1) получается, что углы ϑ_1 и ϑ_2 стремятся к определенным пределам, если φ_1 и φ_2 стремятся к пределам, и далее, что

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\zeta_2 - \zeta_0} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} =$$

$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} e^{(n+1)i(\varphi_1 - \varphi_2)} \frac{1 + ar_1 e^{i\varphi_1} + \ldots}{1 + ar_2 e^{i\varphi_2} + \ldots},$$

откуда

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} e^{i[(n+1)(\varphi_1 - \varphi_2) - (\vartheta_1 - \vartheta_2)]} \frac{1 + ar_1 e^{i\varphi_1} + \ldots}{1 + ar_2 e^{i\varphi_2} + \ldots} = 1.$$

Если r_1 и r_2 устремить к нулю, то получим

$$\lim \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$$

и при подходящем выборе кратного 2π

$$\lim(\vartheta_1 - \vartheta_2) = (n+1)\lim(\varphi_1 - \varphi_2),$$

откуда и видно, что угол между отображенными кривыми в плоскости ζ, проходящими через точку ζ_0, как раз в $n+1$ раз больше соответствующего угла в плоскости z. Можно высказать еще такую теорему: *В окрестности n-кратной точки скрещивания z_0 функции $f(z)$ функция*

$$\sqrt[n+1]{f(z) - f(z_0)} = \varphi(z)$$

с точностью до множителя, равного корню $n+1$-ой степени из единицы, определена однозначным образом и регулярна.

Это доказывается на основании равенства

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(1+g(z))\,(f^{(n+1)}(z_0)\neq 0),$$

где $g(z)$ регулярна и обращается в нуль при $z=z_0$.

Действительно, в окрестности $z=z_0$ функция $\sqrt[n+1]{1+g(z)}$ определяется хотя бы при помощи биномиального ряда с точностью до множителя, равного корню степени $n+1$ из 1, как однозначная регулярная функция, откуда непосредственно следует доказываемое предложение.

Так как

$$(\varphi(z))^{n+1}=f(z)-f(z_0),$$

то функция $\varphi(z)$ в точке $z=z_0$ имеет нуль первого порядка. Производная $\varphi'(z)$ будет следовательно в этой точке отлична от нуля и при отображении функцией $\varphi(z)$ окрестность z_0 перейдет в некоторую область (глава II, § 2). Так как при отображении $Z_1=Z^{n+1}$ область опять переходит в область, то ясно, что окрестность точки скрещивания отображается опять на некоторую область, хотя уже не взаимно однозначным образом. Таким образом, теорему об отображении областей, изложенную в главе II, § 2, можно освободить от сделанного там ограничительного предположения.

Введение понятия бесконечно удаленной точки (глава I, § 1 и 2) позволяет сделать следующие обобщения. Положим $z=\frac{1}{z^*}$; вместо того, чтобы рассматривать функцию $f(z)$ в окрестности $z=\infty$, будем рассматривать функцию $g(z^*)=$ $=f\left(\frac{1}{z^*}\right)$ в окрестности точки $z^*=0$. Если функция $g(z^*)$ будет регулярной в точке $z^*=0$ (точнее: имеет только устранимую точку неопределенности), то будем говорить, что функция $f(z)$ будет регулярной в точке $z=\infty$. Также если функция $g(z^*)$ имеет полюс n-го порядка или другую особую точку или n-кратную точку скрещивания в точке $z^*=0$, то будем говорить то же самое о функции $f(z)$ в точке $z=\infty$. Если функция $f(z)$ регулярна в бесконечно удаленной точке, то производная $g'(z^*)$ в точке $z^*=0$ должна существовать и быть непрерывной. Но это значит, что величина

$$g'(z^*)=-f'\left(\frac{1}{z^*}\right)\cdot\frac{1}{z^{*2}}=-z^2f'(z)$$

должна иметь конечный предел при $z\to\infty$. Следовательно, *производная функции $f(z)$, регулярной при $z=\infty$, должна быть бесконечно малой величиной не ниже второго порядка для бесконечно больших значений z.*

Функция, однозначно определенная во всей плоскости и имеющая особую точку разве лишь на бесконечности, называется *целой* функцией. Если при этом точка $z=\infty$ будет только полюсом, то функция называется *целой рациональной*; если же, напротив, точка $z=\infty$ будет существенно особой, то функция называется *целой трансцендентной*. Однозначная функция, регулярная в любой конечной части плоскости всюду кроме полюсов, называется *мероморфной*.

§ 2. Наглядное представление простейших особых точек и точек скрещивания.

Для того, чтобы наглядно представить поведение аналитической функции вблизи ее исключительных точек, пользуясь образом текущей жидкости, лучше всего начать с рассмотрения логарифмической особой точки. В силу равенства $\zeta=\lg z=\lg r+i\varphi=u+iv$ при отображении функцией $\lg z$ плоскости z на плоскость ζ, система полярных координат r,φ плоскости z переходит в систему прямоугольных прямолинейных координат u, v плоскости ζ. Кривым $u=\text{const}$ соответствуют концентрические окружности $\lg r=\text{const}$, с центром в нулевой точке, кривым $v=\text{const}$ соответствуют лучи $\varphi=\text{const}$, исходящие из нулевой точки. Если функцию $\lg r$ рассматривать как потенциал скорости некоторого течения жидкости в плоскости z, у которого линии уровня будут $\lg r=\text{const}$, а линии тока $\varphi=\text{const}$, то скорость течения — $\mathfrak{v}_r$, направленная радиально внутрь, будет по формуле (5) главы III, § 12, равна

$$-\mathfrak{v}_r=\frac{\partial \lg r}{\partial r}=\frac{1}{r}.$$

В таком потоке количество жидкости Q, входящей в единицу времени в круг C радиуса r, пропорционально интегралу (глава III, § 12)

$$Q = -\int_C \mathfrak{v}_r\, ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\varphi = 2\pi,$$

взятому по контуру этого круга. Присутствие логарифмической особой точки $z = 0$ вводит следовательно в наше поле течения источники; эта точка, как говорят, представляет собою *сток мощностью* 2π. Жидкость протекает из бесконечно удаленной точки, где надо представлять себе *источник мощностью* 2π, радиально к нулевой точке, где она опять исчезает. Представим себе для лучшего уяснения соотношений, что бесконечно удаленная точка отображена линейным преобразованием [1])

$$z^* = \frac{z}{z-1}, \quad z = \frac{z^*}{z^*-1}$$

в конечную точку, тогда получим

$$\zeta = \lg z = \lg z^* - \lg (z^* - 1).$$

Так же как здесь, каждой аналитической функции $f(z)$ можно сопоставить некоторый поток в плоскости z, рассматривая вещественную часть функции $f(z)$, как потенциал скорости. Если мы рассмотрим функцию вида

$$\zeta = \lg (z - z_1) - \lg (z - z_2) = u + iv \qquad (z_1 \neq z_2),$$

то точка z_1 будет стоком, а точка z_2 источником мощноностью 2π. Действительно, если положить

$$z - z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$$

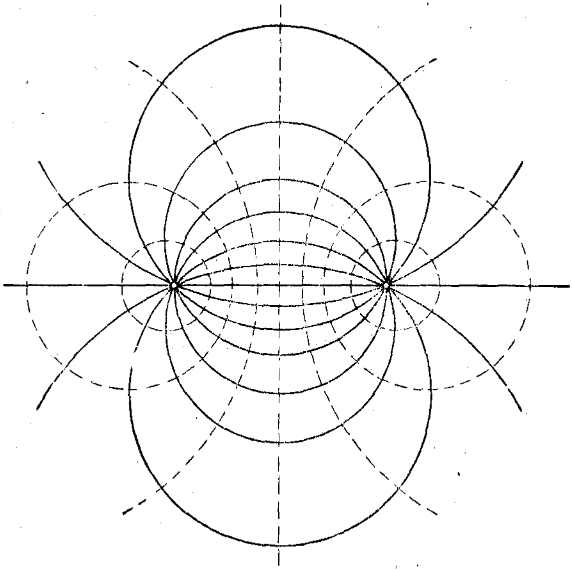
то будет

$$u = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad v = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Линии тока $v = \text{const.}$ образуют (по теореме элементарной геометрии о вписанных в окружность углах) пучок K окружностей, проходящих через точки z_1 и z_2, а линии уровня $u = \text{const}$ образуют пучок K' окружностей, ортого-

[1]) Ср. § 3.

нальных к первой системе. Это наглядно изображено на черт. 22, который мы еще раз будем обсуждать в § 3. Вместо того, чтобы кривые $v = \text{const}$ рассматривать как линии тока, а кривые $u = \text{const}$ как линии уровня, можно, обратно, заставить жидкость течь вдоль окружностей системы K'. При такой интерпретации точки z_1 и z_2 являются „вихревыми точками“, коим соответствуют циркуляции, отличающиеся только знаком и численно равные 2π.



Черт. 22.

Из логарифмических особых точек предельным переходом получаются полюса. Рассмотрим функцию

$$\zeta = \frac{\lg (z+h) - \lg z}{h} \qquad (h > 0);$$

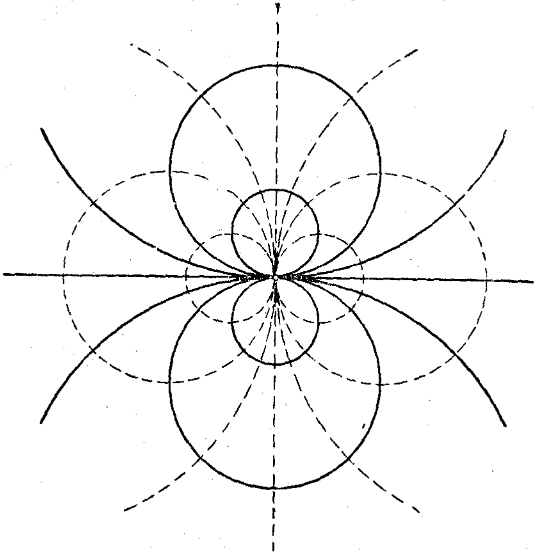
отвечающий ей поток имеет сток в точке $z = -h$ и источник в точке $z = 0$ мощностью $\frac{2\pi}{h}$. При $\lim h = 0$ получаем функцию $\zeta = \frac{1}{z}$, обладающую в точке $z = 0$ полюсом первого порядка. Его можно рассматривать как соединение источника и стока с „одинаковой бесконечно большой мощностью“. Говорят поэтому также о *двойном источнике* (который в физике называется также *диполем*).

Слияние нескольких двойных источников дает полюса высших порядков или кратные полюса. Чтобы получить геометрическое изображение линий тока $v = \text{const}$ и линий уровня $u = \text{const}$ в окрестности полюса n-го порядка $z = z_0$, достаточно рассмотреть, если ограничиться достаточно малой окрестностью z_0, только член

$$\frac{a_n}{(z - z_0)^n} = \frac{a_n}{r^n} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi), \qquad (z = z_0 + re^{i\varphi}).$$

ряда Лорана.

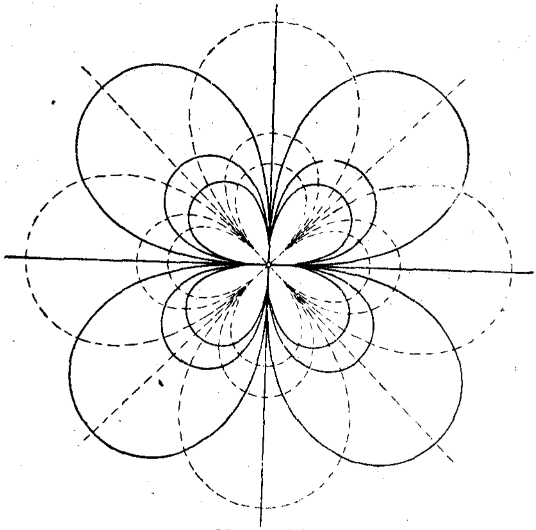
В окрестности простого полюса получается в существенных чертах картина черт. 23, с двумя пучками взаимно



Черт. 23.

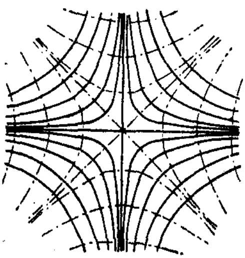
ортогональных окружностей, каждый из которых имеет общую касательную в полюсе. Для полюсов более высоких порядков получаются аналогичные, только более сложные фигуры, например изображенная на черт. 24 для $n = 2$.

Точке скрещивания порядка n, в случаях $n=1$ и $n=2$, соответствуют черт. 25, 26. В достаточно малой окрестности

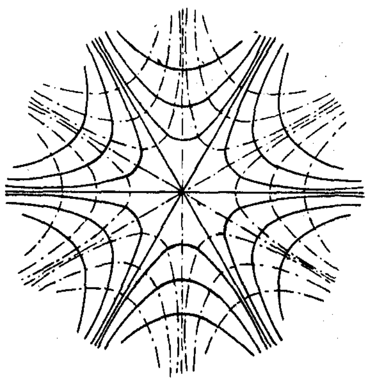


Черт. 24.

точки скрещивания z_0 функция $f(z)$ будет типа функции $(z-z_0)^{n+1}$, откуда, например, видно, что при $n=1$ кривые $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ будут приближенно равнобочными гиперболами. Вообще в n-кратной точке скрещивания кривые $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ не будут перпендикулярны одна к другой (для $n>1$), но будут делить окрест-



Черт. 25.



Черт. 26.

ность точки скрещивания на $2(n+1)$ равных угла. Если эти кривые рассматривать как линии уровня и линии тока некоторого движения жидкости, то жидкость будет течь в одних направлениях к точке скрещивания, в других от нее. В самой точке скрещивания скорость будет равна нулю.

§ 3. Линейные функции.

Перейдем теперь к более детальному ознакомлению с простейшими функциями и начнем с изучения *линейной функции*

$$\zeta = \frac{az+b}{cz-d}, \tag{1}$$

где a, b, c, d — четыре комплексных постоянных числа, причем $ad - bc \neq 0$. Такую зависимость называют также линейным *преобразованием* или линейной *подстановкой*. Функция $\zeta(z)$ будет регулярной для всех значений z, которые не обращают в нуль знаменателя $cz+d$. При $c=0$ знаменатель вообще нигде в нуль не обращается, а при $c \neq 0$ обращается в нуль только в точке $z = -\frac{d}{c}$. Линейная функция ζ будет поэтому регулярной во всех точках плоскости, за исключением самое большое одной точки. Из уравнения (1) имеем, что, обратно,

$$z = \frac{d\zeta - b}{-c\zeta + a}; \tag{2}$$

следовательно z будет также однозначной и регулярной функцией от ζ во всех точках, за исключением при $c \neq 0$ одной точки $\zeta = \frac{a}{c}$.

Названные исключительные точки будут соответственно простыми полюсами линейной функции $\zeta(z)$ и обратной ей функции. Если $c=0$, то такими полюсами будут бесконечно удаленные точки плоскостей z и ζ. Во всяком случае, причисляя бесконечно удаленную точку к соответствующей плоскости, можно утверждать, что *каждой точке плоскости z соответствует одна и только одна точка плоскости ζ и обратно.*

Это свойство будет *характерным* для линейной функции, т. е. существует теорема: *Если функция $f(z)$ отображает полную плоскость z, т. е. всю плоскость z, включая точку $z=\infty$, взаимно однозначным образом и конформно на полную плоскость ζ, то функция $f(z)$ будет линейной функцией.*

При доказательстве можно предположить, подвергая в случае надобности z вспомогательному линейному преобразованию, что точки $z=\infty$ и $\zeta=\infty$ соответствуют друг другу, и что точки $z=0$ и $\zeta=0$ тоже соответствуют друг другу. Функция $f(z)$ должна быть тогда целой функцией от z, а так как точка $z=\infty$ является полюсом функции, то $f(z)$ будет целой рациональной функцией. Если бы степень ее была больше 1, то ее производная $f'(z)$ имела бы нулевую точку z_0. Точка z_0 была бы тогда точкой скрещивания функции $f(z)$ и окрестность точки z_0 не отображалась бы взаимно однозначным образом на окрестность точки $\zeta_0=f(z_0)$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, теорема доказана. Для более подробного изучения конформного отображения, совершаемого функцией (1), рассмотрим окружности плоскости z, причем прямые будем рассматривать как окружности бесконечно большого радиуса. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 будут четыре отличных друг от друга точки, расположенные в порядке их нумеров на некоторой окружности плоскости z, и пусть α и β будут углы между векторами z_3z_1, z_3z_2 и z_4z_1, z_4z_2 соответственно, измеряемые так, чтобы поворот в положительном направлении на угол α (соответственно β) переводил бы направление вектора z_3z_1 (соответственно z_4z_1) в направление вектора z_3z_2 (соответственно z_4z_2) и чтобы было $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. Обозначим еще для краткости

$$|z_h-z_k|=r_{hk} \qquad (h, k=1, 2, 3, 4).$$

Тогда будет

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{r_{31}}{r_{32}}e^{-i\alpha}, \quad \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{r_{41}}{r_{42}}e^{-i\beta}$$

и так как $\alpha=\beta$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), то „двойное отношение“

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{r_{31}\cdot r_{42}}{r_{32}\cdot r_{41}}$$

будет числом вещественным и положительным. Легко доказать, что это двойное отношение, в силу преобразования (1), равно двойному отношению

$$\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} : \frac{\zeta_4-\zeta_1}{\zeta_4-\zeta_2}.$$

Таким образом последнее двойное отношение будет тоже числом вещественным и положительным и следовательно на основании теоремы, обратной теореме о вписанных углах, можно утверждать, что точки ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 также расположены на некоторой окружности плоскости ζ. Таким образом, имеем теорему: *При отображении, совершаемом линейной функцией (1), все окружности плоскости z переходят в окружности плоскости ζ и обратно.*

Говорят поэтому коротко, что линейное преобразование обладает *круговым свойством*. Часто бывает удобно изображать значения функции ζ не точками другой плоскости, а точками той же самой плоскости независимой переменной z. Особое значение при этом имеют те точки, которые при преобразовании (1) остаются без изменения, так называемые „*неподвижные точки*" преобразования. Чтобы точка z была неподвижной, должно быть

$$z=\frac{az+b}{cz+d};$$

это дает для z квадратное уравнение

$$cz^2+(d-a)z-b=0. \tag{3}$$

Если $a=d$, $b=0$, $c=0$, то имеем тождественное преобразование $\zeta=z$. В этом случае каждая точка плоскости является неподвижной. Если исключить этот тривиальный случай, уравнение (3) будет иметь или два простых корня или один двойной корень. Если $c=0$, то $z=\infty$ следует также считать корнем уравнения (3).

Предположим сперва, что корни z_1 и z_2 уравнения (3) конечны и различны. В этом случае каждая окружность, проходящая через точки z_1 и z_2, переходит при преобразовании (1) в некоторую окружность, проходящую через те же точки, и следовательно все семейство окружностей K, проходящих через точки z_1 и z_2, переходит самое в себя. Так как отображение, совершаемое функцией (1), конформно, то семейство K' окружностей, ортогональных к окружностям семейства K, тоже должно переходить самое в себя (см. опять черт. 22, стр. 125). Здесь следует различать три возможных случая, из которых два первых можно рассматривать как частные случаи третьего.

1) *Каждая окружность семейства K переходит в самое себя.* В этом случае отображения точек пересечения какой-нибудь фиксированной окружности системы K с окружностями K' лежат опять на этой же окружности. Таким образом, окружности K можно рассматривать как те пути, по которым точки плоскости перемещаются к своим отображениям. В этом случае преобразование (1) называется *гиперболическим.*

2) *Каждая окружность семейства K' переходит в самое себя.* В этом случае окружности K' можно рассматривать как траектории точек плоскости. Мы говорим в этом случае об *эллиптическом* преобразовании.

3) *Ни одна окружность системы K и ни одна окружность системы K' не переходит в самое себя.* Соответствующее преобразование называется *локсодромическим.*

Выведем теперь нормальные формы для линейного преобразования в этих трех случаях. Пусть z_3 и z будут две точки, лежащие на какой-нибудь окружности, проходящей через неподвижные точки z_1 и z_2 и пусть, ζ_3 и ζ будут отображения точек z_3 и z. Отображения ζ_1 и ζ_2 неподвижных точек z_1 и z_2 совпадают с этими точками. Поэтому, по вышесказанному о двойном отношении, имеет место равенство

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2} : \frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2} = \frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2} : \frac{\zeta_3-z_1}{\zeta_3-z_2}. \quad (4)$$

В случае гиперболического преобразования точки z_1, z_2, z_3, ζ_3 лежат на одной и той же окружности и следовательно двойное отношение этих точек $\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \dfrac{\zeta_3-z_1}{\zeta_3-z_2}$ будет равно вещественной постоянной $\alpha \neq 0$. Из равенства (4) получаем поэтому

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha\,\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2} \quad (\alpha \text{ вещественно и } \neq 0). \quad (5)$$

Обратно, из равенства (5) видно, что отображение ζ точки z находится на окружности, проходящей через точки z_1, z_2, z.

Таким образом, формула (5), вычисление по которой дает ζ, как линейную функцию от z, определяет гиперболическое преобразование.

Если мы имеем дело с эллиптическим преобразованием, то на основании известной из элементарной геометрии теоремы Аполлония (Apollonius), можем написать равенство

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \left|\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2}\right| \tag{6}$$

или

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2}, \qquad (|\alpha|=1,\ \alpha\neq 1). \tag{7}$$

Если, обратно, дано преобразование (7), то в силу равенства (6) можно утверждать, что точки ζ и z лежат на окружности, ортогональной к системе окружностей, проходящих через точки z_1 и z_2. Преобразование (7) будет следовательно эллиптическим [1]).

Наконец в случае локсодромического преобразования из равенства (4) имеем

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2} \quad (\alpha \text{ не вещественно и } |\alpha|\neq 1). \tag{8}$$

Равенства (5), (7) *и* (8) *представляют нормальные формы гиперболического, эллиптического и локсодромического преобразований.*

Если одна из неподвижных точек, например z_2, уходит в бесконечность, то переписав преобразование в виде

$$z-z_1 = \alpha(\zeta-z_1)\frac{z-z_2}{\zeta-z_2}$$

и заставляя в нем z_2 неограниченно расти по модулю, получим

$$z-z_1 = \alpha(\zeta-z_1).$$

Смотря по значению, какое имеет α, мы имеем здесь нормальную форму гиперболического, эллиптического или

---

[1]) Таким образом существуют преобразования, являющиеся одновременно гиперболическими и эллиптическими. Их нормальной формой является:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} = -\frac{\zeta-z_1}{\zeta-z_2}.$$

локсодромического преобразования с одной бесконечно удаленной неподвижной точкой.

В первом случае имеем *преобразование подобия* с центром в точке z_1. Каждая прямая, проходящая через точку z_1, переходит сама в себя и система концентрических окружностей с центром в точке z_1 тоже переходит сама в себя. Во втором случае имеем *вращение* плоскости около точки z_1, причем каждая из концентрических окружностей переходит сама в себя, и пучок прямых, проходящих через точку z_1, тоже переходит сам в себя. В третьем случае имеем преобразование, составленное из вращения и преобразования подобия. При этом преобразовании система логарифмических спиралей с асимптотической точкой z_1 переходит сама в себя. Так как такие кривые называются также локсодромиями, то отсюда понятно название локсодромического преобразования.

Наконец, если обе неподвижные точки z_1 и z_2 совпадают в одну z_1, то говорят о *параболическом* преобразовании. Если неподвижная точка z_1 лежит на конечном расстоянии, то нормальная форма такого преобразования будет

$$\frac{1}{z-z_1}=\frac{1}{\zeta-z_1}+\beta, \qquad (\beta\neq 0). \tag{9}$$

Действительно, если точки z и ζ связаны параболическим преобразованием, то точки $z-z_1$ и $\zeta-z_1$ должны также быть связаны преобразованием вида (1), для которого уравнение (3) имеет двойной корень, равный нулю; отсюда непосредственно следует формула (9). Все рассуждение можно проделать в обратном порядке; следовательно (9) дает действительно нормальную форму параболической подстановки с конечной неподвижной точкой z_1. Если же $z_1=\infty$, то нормальная форма параболического преобразования будет иметь вид

$$z=\zeta+\gamma, \qquad (\gamma\neq 0). \tag{10}$$

Параболическое преобразование можно рассматривать как предельный случай рассмотренных выше преобразований с двумя неподвижными точками, достаточно лишь перемещать точку z_1 по прямой до совпадения с точкой z_2. Система окружностей K, проходящих через точки z_1 и z_2, перейдет при этом в систему окружностей, касающихся друг друга в точке z_2, и система окружностей K' в систему окружностей, ортогональных к первой системе в точке z_2 (черт. 23, стр. 126). В случае $z_2 = \infty$, K будет системой параллельных прямых, K' ортогональной к ней системой прямых, а преобразование в силу (10) будет преобразованием переноса.

В равенство (1) входят, по существу, только три постоянных, ибо, не меняя значений линейной функции (1), можно очевидно умножить коэффициенты a, b, c, d на один и тот же отличный от нуля множитель. Таким образом, общее линейное преобразование зависит от трех произвольных постоянных. Можно потребовать, чтобы преобразование (1) переводило три различные произвольно заданные точки плоскости z в другие три различные произвольно заданные точки плоскости ζ. Это дает три линейных однородных уравнения с неизвестными a, b, c, d, которые, как известно, всегда могут быть разрешены. Так как три точки определяют окружность, то при помощи линейной функции можно отобразить произвольный круг плоскости z на произвольный круг плоскости ζ. Прежде чем приводить примеры на это, введем некоторые обозначения и докажем одну вспомогательную теорему.

Пусть K будет окружность радиуса r с центром в точке M. *Под точкой, симметричной с точкой P относительно окружности K*, или, иначе, под *зеркальным изображением точки P в окружности K* будем понимать такую точку P' луча MP, для которой

$$MP \cdot MP' = r^2.$$

Если точка P совпадает с M, то P' будет бесконечно удаленной точкой. Обратно, если точка P будет бесконечно удаленная точка, то точка P' будет совпадать с M. Тот же способ выражения мы будем употреблять и тогда, когда окружность K вырождается в прямую, а точки P и P' будут симметричны относительно этой прямой. Процесс зеркального изображения в окружности, который иначе называется *преобразованием обратными радиусами* или *инверсией в окружности*, можно аналитически представить следующим образом. Предполагая для простоты, что изображение совершается в окружности радиуса 1 с центром в начале координат, сопоставим каждой точке $z = re^{i\varphi}$ точку

$$\zeta = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} e^{i\varphi}.$$

В силу $\bar{\zeta} = \frac{1}{z}$ и на основании замечания в конце § 8 главы II можно утверждать, что *преобразование обратными радиусами есть конформное отображение с изменением направления отсчета углов.*

Для этого преобразования имеет место следующая теорема: *Если точки z и z' взаимно симметричны относительно окружности K, а точки ζ и ζ' будут отображениями точек z и z', полученными при каком-нибудь линейном преобразовании, то точки ζ и ζ' будут взаимно симметричны относительно окружности* К, *являющейся отображением окружности K.* Действительно, как известно из элементарной геометрии, все окружности, проходящие через точки z и z', будут ортогональны к K. Обратно, если все окружности, проходящие через точки ζ и ζ', будут ортогональны к окружности К, то эти точки будут взаимно симметричными относительно К. Линейное преобразование отображает систему окружностей проходящих через точки z и z' и ортогональных к K в систему окружностей, проходящих через точки ζ и ζ' и ортогональных к К. Поэтому, точки ζ и ζ' будут взаимно симметричными относительно К, что и требовалось доказать.

В качестве первого примера отображения круга плоскости z на круг плоскости ζ найдем общий вид линейных функций, отображающих верхнюю полуплоскость $\Im z > 0$ на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$. Если функция

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$$

производит искомое отображение, то коэффициент c не должен равняться нулю, так как в противном случае эта функция отображала бы прямую $\Im z = 0$ в прямую, а не в окружность. Точка $\zeta = \infty$ будет поэтому отображением конечной точки $z = -\frac{d}{c}$. По предыдущей теореме, отображением взаимно симметричных относительно окружности $|\zeta|=1$ точек $\zeta=\infty$ и $\zeta=0$ $\left(\text{т. е. точки } z=-\dfrac{d}{c} \text{ и } z=-\dfrac{b}{a}\right)$, должны быть взаимно симметричны относительно вещественной оси $\Im z=0$. Таким образом, числа $z=-\dfrac{d}{c}$ и $z=-\dfrac{b}{a}$ должны быть комплексными сопряженными. Мы можем поэтому положить

$$-\frac{b}{a}=\beta, \qquad -\frac{d}{c}=\bar{\beta},$$

$$\zeta=\frac{a(z-\beta)}{c(z-\bar{\beta})}, \qquad (a\neq 0, \ \ \beta \text{ не вещественно}).$$

Так как вещественная точка $z=0$ должна отображаться в точку, лежащую на окружности $|\zeta|=1$, то

$$\left|\frac{a}{c}\cdot\frac{-\beta}{-\bar{\beta}}\right|=\left|\frac{a}{c}\right|=1, \qquad \frac{a}{c}=e^{i\tau} \qquad (\tau \text{ вещественно}),$$

и, следовательно,

$$\zeta=e^{i\tau}\,\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}. \tag{11}$$

Так как точка $z=\beta$ преобразуется в точку $\zeta=0$ и верхняя полуплоскость должна перейти во внутренность единичного круга, то мнимая часть числа β должна быть положительной. При условии $\Im\beta>0$ функция (11) при произвольном вещественном τ совершает требуемое отображение. Прежде всего из равенства (11) видно, что для вещественных значений z

$$|\zeta|=\left|\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}\right|=1,$$

так что вещественная ось z преобразуется в контур круга $|\zeta|=1$. Далее, точка β верхней полуплоскости переходит во внутреннюю точку этого круга (в точку $\zeta=0$) и, следовательно, в силу непрерывности, вся верхняя полуплоскость отобразится на всю внутреннюю область единичного круга. (Если τ вещественно и $\Im\beta < 0$, то (11) отображает верхнюю полуплоскость на область, внешнюю по отношению к единичному кругу.) То, что в формуле (11) три вещественных постоянных τ, $\Re\beta$, $\Im\beta$ произвольны, соответствует тому факту, что можно трем произвольным различным точкам вещественной оси z сопоставить три произвольные различные точки на окружности круга $|\zeta| = 1$. Например, функция

$$\zeta = -\frac{z-i}{z+i} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

так отображает верхнюю полуплоскость $\Im z > 0$ на внутренность единичного круга $|\zeta| = 1$, что при этом точки $z = 0$, 1, ∞ переходят соответственно в точки $\zeta = 1$, $i, -1$. Точка $\zeta = 0$ соответствует точке $z = i$. Обратная функция будет

$$z = i\,\frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \frac{1}{i}\,\frac{\zeta-1}{\zeta+1}.$$

В качестве второго примера найдем все линейные преобразования единичного круга в самого себя. Взаимно симметричным точкам $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ должны соответствовать взаимно симметричные точки $z = \alpha$ и $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$, откуда видно, что искомое преобразование должно иметь вид

$$\zeta = \gamma\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1},$$

где γ постоянное.

При $z = 1$ должно быть $|\zeta| = 1$ и следовательно

$$\left|\gamma\,\frac{1-\alpha}{\bar{\alpha}-1}\right| = |\gamma| = 1, \quad \gamma = e^{i\tau} \qquad (\tau \text{ вещественно}),$$

$$\zeta = e^{i\tau}\,\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}. \tag{12}$$

Но если внутренность круга $|z| < 1$ отображается на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$, то точка $z = 0$ должна переходить в некоторую точку ζ, для которой $|\zeta| < 1$. Отсюда получаем условие $|\alpha| < 1$.

Обратно, при этом условии формула (12), при любом вещественном τ, представляет, как легко видеть, искомое преобразование, причем произвольно выбираемая точка $z = a$ преобразуется в нулевую точку $\zeta = 0$. Заметим в частности, что единичный круг можно так отобразить на самого себя, чтобы при этом заданная точка переходила в нулевую точку и заданное направление в данной точке переходило бы в направление положительной вещественной оси.

В качестве последнего примера приведем без доказательства аналитическое представление вращений шара. Представим себе, что плоскость z стереографически спроектирована на сферу радиуса 1 (ср. главу I, § 1), что эта сфера повернута на некоторый угол вокруг одного из ее диаметров и после этого опять стереографически спроектирована на плоскость ζ. Легко доказать, что соответствующее отображение плоскости z на плоскость ζ доставляется линейной функцией вида

$$\zeta = \frac{pz + q}{\bar{q}z - \bar{p}}$$

и что, обратно, всякой линейной функции такого вида соответствует вращение сферы.

Прибавим еще две следующие задачи.

1. Доказать, следующим образом, теорему о том, что интеграл Пуассона решает предельную задачу теории потенциала для круга. Отобразив круг на верхнюю полуплоскость, дадим интегралу Пуассона вид

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi.$$

Здесь точка x, y будет точкой верхней полуплоскости, получающейся при отображении из точки r, ψ круга. Пусть теперь $f(\xi)$ будет произвольная вещественная, непрерывная, ограниченная функция вещественной переменной ξ в промежутке $-\infty < \xi < \infty$. Тогда надо доказать, что определенная этим интегралом функция $u(x, y)$ будет такая регулярная в верхней полуплоскости гармоническая функция, которая принимает на вещественной оси граничные значения $f(\xi)$. Итак, пусть точка x, y верхней полуплоскости стремится к точке контура $\xi_0, 0$. Разложим интеграл иа три интеграла

$$\int_{-\infty}^{\xi_0 - \delta} + \int_{\xi_0 - \delta}^{\xi_0 + \delta} + \int_{\xi_0 + \delta}^{\infty},$$

из которых средний соответствует некоторой окрестности рассматриваемой точки контура ξ_0. Если например $x=\xi_0$ и если выбрать $y=\delta^3$, то интеграл в пределах от $\xi_0-\delta$ до $\xi_0+\delta$, в силу непрерывности $f(\xi)$, будет, при y достаточно малом, сколь угодно мало отличаться от $f(\xi_0)$, а два другие интеграла будут сколь угодно малы.

2. Исследовать, что происходит в пределе с конформным отображением круга в себя, при котором центр круга переходит в точку α, в том случае, когда эта точка α приближается к какой-нибудь точке контура круга.

Исследовать также поведение линейного преобразования, переводящего три фиксированные точки круга в три другие точки того же круга, в том случае, когда две из них или все три сливаются в одну.

§ 4. Функция $\zeta=z^n$.

Примером функции, имеющей точку скрещивания, является функция

$$\zeta=z^n \text{ при } n=2,\ 3,\ldots$$

Так как уже в случае $n=2$ видны все существенные свойства такой функции, то ограничимся сначала рассмотрением функции

$$\zeta=z^2.$$

Установим, как отображается сеть полярных координат с полюсом в нулевой точке плоскости xy на плоскость uv. Если положить

$$z=re^{i\varphi},\quad \zeta=\rho e^{i\vartheta},$$

то при подходящем нормировании угла будем иметь

$$\rho=r^2,\quad \vartheta=2\varphi.$$

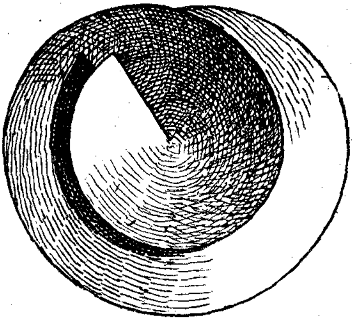
Система концентрических окружностей $r=\text{const}$ переходит, следовательно, в систему концентрических окружностей $\rho=\text{const}$ и углы φ удваиваются. Если при постоянном $r>0$ угол φ изменяется от 0 до 2π, то угол ϑ изменяется монотонно от 0 до 4π и отображенная точка ζ описывает окружность $\rho=\text{const}$ два раза, в то время как точка z пробегает окружность $r=\text{const}$ лишь один раз.

Таким образом каждому значению ζ соответствуют два значения z, т. е. функция

$$z = \sqrt{\zeta},$$

обратная нашей функции $\zeta = z^2$, будет „двузначной“ функцией от ζ.

Для того чтобы все эти соотношения сделать наглядными, представим себе плоскость ζ в двух экземплярах, двух „листах“, наложенных один на другой. Проведем в обоих листах конгруэнтные разрезы от $\zeta = 0$ до $\zeta = \infty$, хотя бы вдоль положительной вещественной оси. Образовавшиеся при этих разрезах четыре края представим себе склеенными попарно крест-накрест, так что получается взаимное пронизывание обоих листов (черт. 27). В области, составленной таким способом, окружность плоскости ζ, пробегаемая дважды, превращается в пробегаемую лишь один раз кривую, состоящую из двух, соединенных вместе в точках разреза, конгруэнтных окружностей, расположенных на верхнем и нижнем листах. Отображения точек $z = re^{i\varphi}$ и $-z = re^{i(\varphi + \pi)}$ будут теперь представляться точками различных листов. Нулевые точки обоих листов мы не считаем разъединенными.



Черт. 27.

Наша двулистная область представляет собой простой пример *Римановой поверхности*. Совершаемое функцией $\zeta = z^2$ отображение плоскости z на эту Риманову поверхность будет взаимно однозначным, тогда как этого не будет при отображении на обыкновенную „однолистную“ плоскость ζ. Точку $\zeta = 0$, которая будет отображением точки скрещивания $z = 0$, называют *точкой разветвления* (или *точкой закручивания*) *первого порядка* Римановой поверхности функции $z = \sqrt{\zeta}$. Так как невозможно в окрестности этой точки функцию $z = \sqrt{\zeta}$ определить однозначным и непрерывным образом, то точка $\zeta = 0$ будет особой точкой функции $z(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ [1]). Эта функция может

[1]) Точка $\zeta = \infty$ также есть точка разветвления функции $z = \sqrt{\zeta}$.

быть сделана однозначной только на поверхности Римана.

Исследование степенной функции $\zeta = z^n$ при целом и положительном показателе n и обратной ей функции $z = \sqrt[n]{\zeta}$ производится аналогичным образом. Соответствующая поверхность Римана состоит из n листов и имеет в точке $\zeta = 0$ *„точку разветвления* $(n-1)$*-го порядка"* или *„*$(n-1)$*-кратную точку разветвления"*. Функция $\zeta = z^n$ имеет в точке $z = 0$ $(n-1)$-кратную точку скрещивания.

Представляет также интерес рассмотреть конформное отображение, совершаемое функцией $\zeta = z^2$, исходя из прямоугольной координатной системы плоскости ζ или соответственно плоскости z. Сравнивая вещественные и мнимые части, получаем

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

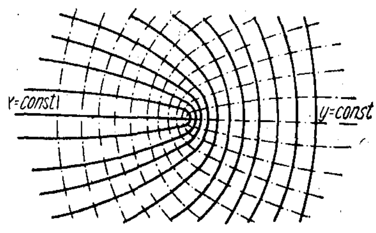
Отсюда видно, что прямым $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ соответствуют две системы равнобочных гипербол

$$x^2 - y^2 = \text{const}; \quad 2xy = \text{const}.$$

Эти две системы (см. черт. 25, стр. 127) всюду ортогональны друг к другу, исключая нулевой точки, в которой эти кривые пересекаются между собой под углом в 45°, в соответствии с тем фактом, что точка $z = 0$ есть простая точка скрещивания. Если, с другой стороны, положить $x = c$ или $y = c$, то получим

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u) \quad \text{или}$$
$$v^2 = 4c^2(c^2 + u).$$

Прямым $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ плоскости xy соответствуют в плоскости uv две взаимно ортогональные системы софокусных парабол, открытых в левую или в правую стороны соответственно (черт. 28).



Черт. 28.

Рекомендуем читателю исследовать, как отображается система полярных координат с полюсом в точке $\zeta = 1$ на плоскость z. Концентрические окружности переходят при этом в софокусные лемнискаты с фокусами в точках $z = -1$

и $z=1$; лучи, исходящие из точки $\zeta=1$, переходят в равнобочные гиперболы, проходящие через точки $z=\pm 1$.

§ 5. Функция $\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

Если положить $z=re^{i\varphi}$, то для вещественной и мнимой части функции

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=u+iv$$

получатся равенства

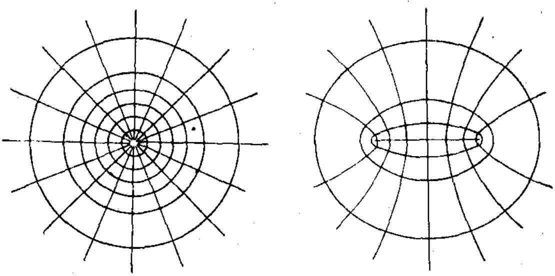
$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Отсюда следует

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

Таким образом, при отображении плоскости z на плоскость ζ концентрические окружности $r=\text{const}$ переходят в софокусные эллипсы, линейный эксцентриситет которых равен 1, а полуоси равны $\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$. Если r будет монотонно возрастать от 0 до 1, то эти полуоси будут монотонно убывать от очень больших значений и эллипсы будут все более и более сжиматься, пока, наконец, при $r=1$ эллипс не обратится в отрезок прямой $-1\leqslant\zeta\leqslant 1$ между фокусами, который точка ζ пробегает дважды. Если r продолжает возрастать от 1, то обе оси будут снова возрастать и вновь появится каждый, полученный уже раньше эллипс. Каждый луч $\varphi=\text{const}$ плоскости z переходит в гиперболу $\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1$, ортогональную к нашим эллипсам и софокусную с ними (черт. 29). Если плоскость ζ разрежем вдоль отрезка $-1\leqslant\zeta\leqslant 1$, то как внутренняя область единичного круга плоскости z, так и его внешняя область будут отображаться на всю „надрезанную“ плоскость ζ.

Для того чтобы установить взаимно однозначное соответствие между точками этих областей, воспользуемся опять поверхностью Римана. Наложим два экземпляра плоскости ζ один на другой, разрежем оба листа вдоль отрезка $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$ и четыре образовавшиеся при этом края склеем попарно крест-на-крест. Таким образом, получим двулистную поверхность Римана, у которой один лист конформно отображается на внутреннюю область единичного круга плоскости z, а другой лист — на область, внешнюю для этого круга. Между точками плоскости z и точками этой поверхности Римана будет существовать взаимно однозначное соответствие. Обратная функция $z = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ на такой поверхности определена одно-



Черт. 29.

значным образом, тогда как на однолистной плоскости ζ такая функция будет двузначна. В точках $z = \pm 1$ первая производная

$$\zeta' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

обращается в нуль, а вторая производная

$$\zeta'' = \frac{1}{z^3}$$

отлична от нуля; следовательно эти точки будут простыми точками скрещивания, а их отображения $\zeta = \pm 1$ будут простыми точками разветвления Римановой поверхности для функции $z(\zeta)$.

Формула

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2$$

указывает на тесную связь изученного отображения с простым отображением при помощи квадратного корня.

§ 6. Логарифмическая и показательная функции.

Для того чтобы при помощи поверхности Римана сделать наглядным общий ход функции $\zeta = \lg z$ (ср. главу II, § 6), представим себе, что на плоскость z наложен второй экземпляр этой плоскости, так же как и первый разрезанный вдоль отрицательной вещественной оси. Точкам первого листа сопоставим главные значения логарифма, а точкам второго сопоставим главные значения, увеличенные на $2\pi i$. На основании главы II, § 6, значения функции $\lg z$ в точках нижнего края разреза второго листа совпадают с ее значениями в соответственных точках верхнего края разреза первого листа. Соединим поэтому верхний край разреза первого листа с нижним краем разреза второго листа и аналогично соединим верхний край разреза второго листа и нижний край разреза третьего листа и т. д. до бесконечности. Далее соединим нижний край разреза первого листа с верхним краем разреза того листа, который лежит под первым листом и точкам которого соответствуют главные значения функции, уменьшенные на $2\pi i$. В результате образуется область, состоящая из бесконечного числа листов, которая называется *„поверхностью Римана для логарифма“*. На такой поверхности логарифм будет однозначной функцией ее точек. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ будут *точками разветвления* или *точками закручивания бесконечно большого порядка*, так как в этих точках связано бесконечно много листов.

Из равенств

$$\zeta = u + iv = \lg r + i\varphi,$$

$$u = \lg r, \quad v = \varphi, \qquad (z = re^{i\varphi})$$

(см. главу II, § 6) следует, что тот лист Римановой поверхности, который при вышеуказанном построении являлся первым, отображается функцией $\lg z$ взаимно однозначным образом на бесконечную полосу $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$ плоскости ζ; при этом нижний и верхний края разреза соответствуют ограничивающим полосу параллельным прямым $v = -\pi$ и

$v=\pi$ [1]). Вся Риманова поверхность, состоящая из бесконечного числа листов, будет следовательно отображаться взаимно-однозначным образом на всю плоскость ζ, причем точки поверхности, лежащие одна над другой, будут переходить в такие точки плоскости ζ, которые лежат на одной прямой, параллельной оси v, и отстоят друг от друга на расстоянии, кратном 2π. Так как нулевая точка $z=0$ плоскости z переходит в бесконечно удаленную точку плоскости ζ, то обратная функция $z=e^{\zeta}$ не обращается в нуль ни при каком конечном значени ζ. *Показательная функция есть, следовательно, отличная от постоянной целая функция, не имеющая нулей* [2]).

§ 7. Тригонометрические функции.

Равенства

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{\operatorname{tg} z},$$

определяют четыре такие функции, которые при вещественных значениях переменной совпадают с обыкновенными тригонометрическими функциями [3]), и поэтому называются тригонометрическими функциями и при комплексном значении переменной. Рассмотрим здесь только отображение, при помощи функции $\zeta=\operatorname{tg} z$, плоскости z на плоскость ζ. Для этого заменим равенство

$$\zeta=\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

---

[1]) Здесь рассматривается отображение разрезанной плоскости вместе с ее контуром.

[2]) Эта функция будет даже в известном смысле простейшей функцией такого рода. Действительно, если $h(\zeta)$ целая функция без нулевых точек, то $g(\zeta)=\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}$ тоже должна быть целой функцией. Но отсюда следует, что $h(\zeta)$ должна быть вида

$$h(\zeta)=e^{\int g(\zeta)d\zeta}=e^{g_1(\zeta)},$$

где $g_1(\zeta)$ функция целая.

[3]) Ср. главу II, § 6 (5).

следующими тремя равенствами

$$t = 2iz, \tag{1}$$

$$\omega = e^t, \tag{2}$$

$$\zeta = \frac{1}{i}\frac{\omega - 1}{\omega + 1}. \tag{3}$$

Функции (1) соответствует преобразование подобия относительно начала координат с коэффициентом подобия равным 2, соединенное с вращением плоскости z вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$. При помощи функции (2) плоскость t отображается конформно на поверхность Римана для логарифма, т. е. полоса плоскости t, параллельная вещественной оси, шириною 2π, отображается на всю разрезанную плоскость ω. Линейное преобразование (3) знакомо нам из § 3. Посредством этого преобразования, единичный круг плоскости ω отображается на верхнюю полуплоскость плоскости ζ, причем точки $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ переходят в точки $\zeta = i$ и $\zeta = -i$. Таким образом, получаем Риманову поверхность для функции $z = \operatorname{arctg} \zeta$, обратной для $\zeta = \operatorname{tg} z$. Эта поверхность, подобно поверхности Римана для логарифма, имеет две точки разветвления бесконечно большого порядка, а именно, точки $\zeta = i$ и $\zeta = -i$. Это обстоятельство заставляет предполагать, что функция $\operatorname{arctg} \zeta$ сродни логарифму. Действительно из равенств (1), (2) и (3) следует, что

$$z = \operatorname{arctg} \zeta = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Совершенно аналогичным образом можно исследовать отображения, совершаемые остальными тригонометрическими функциями.

§ 8. Степенная функция с произвольным показателем степени. Круговые двуугольники.

Общая степенная функция

$$\zeta = z^{\alpha},$$

при произвольном вещественном или комплексном показателе α была определена в главе II, § 4, равенством

$$\zeta = e^{\alpha \lg z}.$$

Функция $\zeta = z^\alpha$ будет следовательно однозначной функцией от $\lg z$. Ее можно представить в параметрической форме равенствами

$$\zeta = e^{\alpha t}, \quad z = e^t,$$

или, как говорят, униформизировать однозначными функциями.

Если α не рационально, то функция $z^\alpha = e^{\alpha \lg z}$, так же как и логарифм, будет бесконечно многозначной функцией. Действительно, если точка z обойдет точку $z = 0$ в положительном направлении один раз, то значение функции умножится на $e^{2\pi i \alpha}$, а при n-кратном обходе умножится на $e^{2\pi i n \alpha}$ и для двух различных значений n эти множители будут всегда различными. На поверхности Римана для логарифма, имеющей точки разветвления бесконечно большого порядка при $z = 0$ и $z = \infty$, функция z^α будет однозначной.

Напротив, если $\alpha = \frac{p}{q}$ число рациональное (p, q не имеют общего делителя, $q > 0$), то после q-кратного обхода точки z вокруг $z = 0$ функция в первый раз возвращается к своему первоначальному значению; поэтому вместо поверхности Римана с бесконечным числом листов можно в этом случае построить q-листную поверхность Римана, подобно той, какая рассматривалась в § 4. На этой поверхности z^α будет однозначной функцией точки.

Рассмотрим еще конформное отображение, совершаемое общей степенной функцией. Если $\alpha \neq 0$ число вещественное, то система концентрических окружностей с центром в начале координат и система лучей, исходящих из начала, переходят сами в себя; угол между двумя отдельными лучами умножается при этом на α. Если точки z и ζ подвергнуть такому линейному преобразованию (ср. § 3), при котором точки 0 и ∞ плоскости z (соответственно плоскости ζ) переходят в произвольные различные точки z_1, z_2 (соответственно ζ_1, ζ_2), то мы увидим, что преобразование

$$\pm \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2} = \left(\pm \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^\alpha$$

отображает область плоскости z, ограниченную дугами двух окружностей, пересекающихся в точках z_1 и z_2 под углом λ, так называемый *круговой двуугольник* с вершинами z_1 и z_2 и с углом λ на такую же область плоскости ζ, ограниченную дугами двух окружностей, пересекающихся в точках ζ_1 и ζ_2 под углом $\alpha\lambda$, т. е. на круговой двуугольник с вершинами ζ_1 и ζ_2 и с углом $\alpha\lambda$.

Например, любой круговой двуугольник можно всегда преобразовать в некоторый полукруг. Для этого надо α выбрать так, чтобы было $\alpha\lambda=\frac{\pi}{2}$. Например, при преобразовании

$$\frac{\zeta}{1-\zeta}=\sqrt{\frac{z}{1-z}}$$

верхняя полуплоскость, которую можно рассматривать как область, ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающимися в точках $z=0$ и $z=1$ под углом π, перейдет в полукруг плоскости ζ, построенный на отрезке между точками $\zeta=0$ и $\zeta=1$.

Совершенно иначе обстоит дело, если α чисто мнимое число. Пусть например $\alpha=i$ и следовательно

$$\zeta=z^i.$$

Рассмотрим конформное отображение верхней полуплоскости $\Im z\geqslant 0$. Для этого положим

$$z=re^{i\varphi},\quad \zeta=\rho e^{i\vartheta}$$

тогда

$$\rho=e^{-\varphi},\quad \vartheta=\lg r.$$

Прямолинейным лучам $\varphi=\text{const}=c$ плоскости z будут соответствовать концентрические окружности $\rho=e^{-c}$ плоскости ζ и окружностям $r=\text{const}=c$ плоскости z будут соответствовать прямолинейные лучи $\vartheta=\lg c$ плоскости ζ. В частности, полупрямым $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, ограничивающим полуплоскость $\Im z\geqslant 0$ снизу, будут соответствовать окружности $\rho=1$ и $\rho=e^{-\pi}$, которые точка ζ пробегает неограниченное число раз в обоих направлениях. В нулевой и в бесконечно удаленной точках плоскости z функция ζ будет неопределенной. Таким образом, отображением верхней полуплоскости z будет круговая полоса, которая неограниченное число раз покрывает круговое кольцо $e^{-\pi} \leqslant \rho \leqslant 1$ плоскости ζ.

Предоставляем читателю исследовать отображение, совершаемое функцией $\zeta = z^{\alpha}$ при произвольном комплексном α. Вместо радиусов и окружностей плоскости z здесь появляются две системы пересекающихся ортогонально логарифмических спиралей.

§ 9. Добавление. Геометрическое значение в пространстве линейных подстановок.

В этом параграфе мы изложим геометрическое представление линейных подстановок комплексной переменной z, сущность которого состоит в том, что кроме точек, лежащих на поверхности шара K, рассматриваются также и точки того трехмерного пространства R, в котором расположен шар. Уравнение сферы K, радиус которой примем равным хотя бы 1 и центр которой лежит в начале прямоугольной системы координат, имеет вид

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \tag{1}$$

Приняв плоскость $Z = 0$ за плоскость z $(z = X + iY)$ и проектируя ее стереографически из точки $X = Y = 0$, $Z = 1$ на сферу, перенесем на последнюю значения z. Между координатами X, Y, Z точки сферы и соответствующим значением z будут тогда (глава 1, § 1) иметь место соотношения

$$X = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \quad Y = -i\frac{z - \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \quad Z = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}. \tag{2}$$

Так как пространство R мы будем рассматривать с точки зрения проективной геометрии, то перейдем к однородным координатам, полагая

$$X = \frac{X_1}{X_4}, \quad Y = \frac{X_2}{X_4}, \quad Z = \frac{X_3}{X_4}.$$

Формулы (1) и (2) тогда принимают вид

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2 = 0 \tag{3}$$

и

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = (z + \bar{z}) : \frac{z - \bar{z}}{i} : (z\bar{z} - 1) : (z\bar{z} + 1). \tag{4}$$

Последнее соотношение можно переписать еще в виде

$$(X_1+iX_2):(X_1-iX_2):(X_3+X_4):(X_4-X_3)=z:\bar{z}:z\bar{z}:1. \quad (5)$$

Точку пространства R будем называть вещественной, если отношения ее координат будут вещественны. Коллинеацию

$$X_i'=\sum_{k=1}^{4} a_{ik}X_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4) \quad (6)$$

назовем вещественной, если она переводит каждую вещественную точку опять в вещественную точку.

Это имеет место тогда и только тогда, если содержащийся в a_{ik} произвольный множитель пропорциональности можно выбрать так, чтобы все a_{ik} были бы вещественны. В дальнейшем при вещественных коллинеациях мы будем всегда считать a_{ik} вещественными. Вещественные коллинеации распадаются на два рода. К первому роду относятся те, коэффициенты которых a_{ik} могут быть непрерывным изменением при сохранении вещественных значений переведены в коэффициенты

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1 \text{ при } i=k\\ 0 \text{ при } i\neq k\end{cases}$$

тождественной коллинеации и притом так, чтобы коллинеация во время этого изменения не вырождалась, т. е. чтобы ее определитель $|a_{ik}|$ не обращался бы в нуль. Для коллинеаций второго рода это невозможно. Для коллинеаций первого рода определитель преобразования $|a_{ik}|$ будет поэтому положителен, а для коллинеаций второго рода — отрицателен. Коллинеации первого рода преобразуют всякую правую систему координат в правую же систему, а коллинеации второго рода всякую правую систему координат преобразуют в левую.

После этих замечаний сформулируем теорему, доказательство которой составляет главную цель этого параграфа, следующим образом: *Каждой линейной подстановке комплексной переменной z соответствует одна и только одна вещественная коллинеация первого рода пространства R, которая преобразует сферу K в себя так, что изменения* *положений отдельных ее точек будут те же как при коллинеации, так и при линейной подстановке. Обратно, каждой вещественной каллинеации первого рода, преобразующей K в себя, соответствует одна и только одна линейная подстановка комплексной переменной z, которая преобразует точки сферы K друг в друга таким же точно образом, как и эта коллинеация.*

Существенно при доказательстве, что мы будем рассматривать действие коллинеации и на комплексные точки сферы K. Если причислить к сфере и ее комплексные точки, то на ней будут лежать две системы прямолинейных производящих и притом так, что через каждую точку сферы проходит одна и только одна производящая каждой системы и что каждая производящая содержит одну и только одну вещественную точку [1]). Это дает нам возможность характеризовать производящие каждого семейства посредством значений λ и соответственно μ. Каждой производящей первого семейства сопоставим такое значение λ, которое равно значению переменной z в вещественной точке производящей (т. е. в некоторой вещественной точке сферы). Производящей другого семейства сопоставим комплексное значение μ, сопряженное со значением z в ее вещественной точке. Произвольную вещественную или комплексную точку сферы можно тогда, как точку пересечения некоторой производящей первой системы с некоторой производящей второй системы, определять заданием двух чисел λ и μ.

---

[1]) Существование таких производящих и их важнейшие свойства легко вывести из уравнения сферы (3). Действительно, переписав его в виде

$$(X_1 + iX_2)(X_1 - iX_2) - (X_3 + X_4)(X_4 - X_3) = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворяться, если или одновременно

$$X_1 + iX_2 = \lambda (X_4 - X_3), \quad X_3 + X_4 = \lambda (X_1 - iX_2) \qquad (*)$$

или одновременно

$$X_1 - iX_2 = \mu (X_4 - X_3), \quad X_3 + X_4 = \mu (X_1 + iX_2), \qquad (**)$$

где λ и μ произвольные комплексные числа (допустимы и значения $\lambda = \infty = \frac{1}{0}$ и $\mu = \infty = \frac{1}{0}$). Но при заданном λ или μ уравнения (*) или (**) представляют прямые линии, которые следовательно на всем их протяжении принадлежат сфере K. Параметры λ и μ в этих уравнениях выбраны как раз так, как указано в тексте.

В частности, вещественные точки сферы характеризуются тем, что для них λ и μ будут комплексными сопряженными числами.

Докажем сперва вторую часть нашей теоремы и для этого заметим, что заданная по условию вещественная коллинеация первого рода C преобразует не только каждую вещественную точку сферы в вещественную же точку сферы, но и вообще каждую точку сферы в некоторую точку сферы. Так как C, как коллинеация, всякую прямую преобразует опять в некоторую прямую, то всякая прямолинейная производящая сферы перейдет при коллинеации C опять в прямолинейную производящую. При этом две производящие одной и той же системы перейдут в производящие одной и той же системы. Действительно, каждая производящая не пересекает никакой другой из производящих той системы, к которой принадлежит она сама и, напротив, пересекает всякую производящую другой системы, а свойство пересечения двух прямых сохраняется при коллинеациях. Поэтому коллинеация C или переставляет между собой обе системы производящих или производит только перестановку прямых внутри каждой системы. Первое предположение невозможно. Действительно, то или иное различение двух систем производящих как первой и второй равносильно заданию направления обхода на вещественной поверхности шара [1]), и так как коллинеация C, по предположению, первого рода, то она сохраняет это направление обхода.

Пусть теперь P будет произвольная вещественная точка сферы, g_1, g_2 — две производящих, проходящих через эту точку, и t_1, t_2 — две произвольные вещественные, касательные к сфере в точке P. Коллинеация C преобразует точку P в некоторую вещественную точку P' сферы; g_1, g_2 при этом перейдут в производящие g_1' и g_2', проходящие через точку P', причем g_1 и g_1' (соответственно g_2 и g_2') будут принадлежать одной и той же системе производящих и t_1, t_2 перейдут в вещественные касательные t_1', t_2' к сфере, проходящие через точку P'. По правилам

[1]) Это следует из выражения угла через логарифм двойного отношения, которым сейчас же воспользуемся в тексте.

проективного мероопределения угол [1]) между t_1 и t_2 определяется равенством

$$\sphericalangle t_1\, t_2 = \frac{i}{2} \lg D(t_1,\ t_2,\ g_1,\ g_2),$$

где через D обозначено для краткости двойное отношение четырех, стоящих в скобках, прямых. Точно так же угол между t_1' и t_2', отсчитываемый в том же направлении, будет равен

$$\sphericalangle t_1' t_2' = \frac{i}{2} \lg D(t_1',\ t_2',\ g_1',\ g_2').$$

Так как двойное отношение при проективных преобразованиях остается без изменения, то

$$\sphericalangle t_1 t_2 = \sphericalangle t_1' t_2'.$$

Из соображений непрерывности далее ясно, что угол между двумя касательными t_1, t_2, обладающими каждая определенным направлением, измеренный по mod 2π, равен углу между касательными t_1', t_2', обладающими соответствующими направлениями и тоже измеренному по mod 2π. Таким образом имеем, что *коллинеация C представляет взаимно однозначное отображение веществен ой поверхности шара K на самое себя, при котором во всех точках сохраняются углы*, но, как мы видели в § 3, такое отображение совершается линейной функцией от z.

Первую часть теоремы можно было бы доказать такими же геометрическими рассуждениями, как и вторую. Для краткости проведем доказательство путем вычисления. Вместо координат X_1, X_2, X_3, X_4 введем новые координаты Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3, Ξ_4 при помощи таких формул

$$\Xi_1 : \Xi_2 : \Xi_3 : \Xi_4 = (X_1 + iX_2) : (X_1 - iX_2) : (X_3 + X_4) : (X_4 - X_3).$$

Уравнение сферы тогда примет вид

$$\Xi_1\, \Xi_2 - \Xi_3\, \Xi_4 = 0$$

---

[1]) Вспомним о том, что рассматриваемый в учении о проективном мероопределении угол между двумя прямыми есть величина, определенная только до целого кратного π, а не до целого кратного 2π.

и зависимость, выражаемая формулой (5), между координатами Ξ вещественной точки сферы и значением переменной z примет простой вид

$$\Xi_1 : \Xi_2 : \Xi_3 : \Xi_4 = z : \bar{z} : z\bar{z} : 1. \tag{7}$$

Пусть

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{8}$$

будет данное линейное преобразование.

Если $\Xi_1' : \Xi_2' : \Xi_3' : \Xi_4'$ будет отношение координат точки сферы, соответствующей значению z', то в силу равенств (7) и (8) имеем зависимости

$$\left.\begin{aligned}
\rho\Xi_1' &= a\bar{d}\,\Xi_1 + b\bar{c}\,\Xi_2 + \bar{a}c\,\Xi_3 + b\bar{d}\,\Xi_4 \\
\rho\Xi_2' &= \bar{b}c\,\Xi_1 + \bar{a}d\,\Xi_2 + \bar{a}c\,\Xi_3 + \bar{b}d\,\Xi_4 \\
\rho\Xi_3' &= a\bar{b}\,\Xi_1 + \bar{a}b\,\Xi_2 + a\bar{a}\,\Xi_3 + b\bar{b}\,\Xi_4 \\
\rho\Xi_4' &= c\bar{d}\,\Xi_1 + \bar{c}d\,\Xi_2 + c\bar{c}\,\Xi_3 + d\bar{d}\,\Xi_4
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где ρ обозначает произвольный, отличный от нуля множитель пропорциональности.

Если (9) будем рассматривать как преобразование произвольных точек пространства, а не только вещественных точек сферы, то будем иметь коллинеацию, относительно которой легко доказать, что она будет вещественной и первого рода.

Выскажем наконец нашу теорему на языке неэвклидовой геометрии. Взяв сферу K за основную поверхность, установим проективное мероопределение. Вещественные коллинеации первого рода в пространстве, преобразующие сферу K в себя, будут тогда представлять совокупность неэвклидовых движений и поэтому можно сказать, что *неэвклидовы движения пространства R и линейные преобразования комплексной переменной z соответствуют друг другу взаимно однозначным образом.*

Легко составить теперь наглядное представление различных типов линейных преобразований (гиперболических, эллиптических, параболических и локсодромических). Оставляя сперва в стороне параболические преобразования, мы знаем об остальных, что они имеют две неподвижные точки, которые мы обозначим через F_1 и F_2.

Коллинеация, у которой две точки остаются без изменения, преобразует и всю соединяющую их прямую в самое себя. Прямая g, соединяющая неподвижные точки, имеет сопряженную относительно сферы K поляру g', а так как коллинеация преобразует как прямую g, так и сферу K в самих себя и соотношение полярности инвариантно относительно коллинеации, то g' переходит тоже сама в себя. Далее, каждая плоскость, проходящая через g (соответственно g'), переходит опять в плоскость, проходящую через g (соответственно g'). Пучок плоскостей, проходящих через g, вырезает из сферы K пучок окружностей, проходящих через точки F_1 и F_2, а пучок плоскостей, проходящих через g', перпендикулярных, в неэвклидовом смысле, к плоскостям первого пучка, вырезает из K окружности, ортогональные к первому пучку окружностей. Принимая во внимание результаты § 3, мы получаем поэтому, что:

эллиптическому преобразованию соответствует неэвклидово движение, при котором точки прямой g и плоскости, проходящие через прямую g', остаются без изменения, а точки прямой g' перемещаются по ней и плоскости, проходящие через g, вращаются вокруг этой прямой. В неэвклидовом движении, соответствующем гиперболическому преобразованию, наоборот, точки прямой g' и плоскости, проходящие через прямую g остаются без изменения, а точки прямой g перемещаются по ней и плоскости, проходящие через прямую g', вращаются вокруг этой прямой.

Это можно кратко высказать еще так: *эллиптическому преобразованию соответствует неэвклидово вращение вокруг прямой g, а гиперболическому преобразованию соответствует неэвклидов перенос вдоль прямой g.* При локсодромическом преобразовании очевидно комбинируются оба рода неэвклидовых движений. Произвольная точка пространства будет при этом двигаться по пространственной кривой, закрученной наподобие винтовой линии, которую можно назвать локсодромией.

Наконец параболические преобразования можно получить как предельный случай для эллиптических и гиперболических. Если обе точки F_1 и F_2 будем сближать вдоль гладкой кривой на K к одной точке F, то прямая g перейдет в касательную к шару в точке F, а прямая g' перейдет в касательную к шару в точке F, перпендикулярную к g. В этом случае эвклидово и неэвклидово аначения слова „перпендикулярный“ совпадают. Самое общее параболическое преобразование, имеющее неизменяемую точку F, соответствует опять комбинации неэвклидова вращения вокруг оси g с вращением вокруг оси g'. Такое двойное вращение может быть всегда заменено простым вращением вокруг некоторой касательной g'' к шару, проходящей через F.

Подобно тому как линейным преобразованиям

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

соответствуют неэвклидовы движения, так линейным преобразованиям

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

с изменением отсчета углов соответствуют неэвклидовы отражения. Это будут такие преобразования, при которых пространственные фигуры переходят в конгруэнтные в неэвклидовом смесле зеркальные изображения. В частности, преобразованию обратными радиусами относительно окружности на сфере K соответствует неэвклидово зеркальное отражение в плоскости, вырезающей этот круг из K. Понятие неэвклидова зеркального отражения определяется так же, как и понятие эвклидового. Для того чтобы найти для некоторой точки P ее зеркальное отражение в некоторой плоскости $\mathfrak{E}$, опустим из P неэвклидов перпендикуляр на $\mathfrak{E}$, т. е. соединим точку P с полюсом плоскости $\mathfrak{E}$ относительно K и определим на перпендикуляре такую точку P', которая расположена с противоположной от P стороны плоскости $\mathfrak{E}$ и отстоит от $\mathfrak{E}$ на таком же неэвклидовом расстоянии, как и точка P. В силу этой пространственной интерпретации преобразования обратными радиусами теорема, доказанная в § 3 (стр. 135), становится очевидной.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ПОВЕРХНОСТИ РИМАНА.

Рассмотренные до сих пор аналитические функции были заданы такими аналитическими выражениями, которые давали возможность проследить весь ход изменения функции. В общей же теории мы должны исходить из того, что функция задана сперва только в данной ограниченной области G_0 плоскости z, например, задана степенным рядом в его круге сходимости. Тогда возникает проблема *аналитического продолжения*, т. е. вопрос о том, можно ли и, если можно, то как, расширить первоначальную область определения функции G_0. С этой точки зрения функцию, определенную в некоторой заданной области, мы будем называть „*элементом функции*“.

§ 1. Понятие аналитического продолжения.

Пусть $f(z)$ будет элемент функции, определенный в данной области G_0. Первым шагом к аналитическому продолжению $f(z)$ является *продолжение при помощи расширения области*:

Если в области G_0', содержащей область G_0, определена аналитическая функция $\varphi(z)$, которая в области G_0 совпадает с $f(z)$, то функция $\varphi(z)$ называется *аналитическим продолжением* $f(z)$ *в область* G_0'.

Такое аналитическое продолжение возможно, если оно вообще возможно, только единственным образом. Действительно, пусть $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ будут две функции, регулярные в области G_0' и совпадающие с $f(z)$ в области G_0.

Разность $\varphi_1(z) - \varphi_2(z)$ будет регулярной функцией в области G_0' и будет наверно равняться нулю в области G_0. Пусть G^* будет множество всех точек области G_0', для которых разность $\varphi_1 - \varphi_2$ равна нулю. Если множество G^* не совпадает с областью G'_0, то в G'_0 найдется точка P, являющаяся точкой сгущения G^*, притом такая, что некоторый круг с центром P, целиком принадлежащий G'_0, будет содержать также и точки, не принадлежащие G^* (быть может самую точку P)[1].

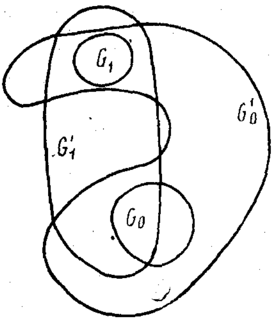
В этом круге разность $\varphi_1 - \varphi_2$ может быть разложена в степенной ряд. Так как точка P является точкой сгущения множества G^*, то по теореме, изложенной в главе III, § 4, все коэффициенты этого ряда должны равняться нулю и разность $\varphi_1 - \varphi_2$, следовательно, должна равняться нулю во всем круге. Так как в этом круге лежат и такие точки, которые не принадлежат к множеству G^*, то получаем противоречие.

Расширяя таким образом область, в которой определена функция, мы всегда получаем такие области плоскости z, в которых функция определена однозначным образом. Для того, чтобы с помощью аналитического продолжения понять сущность многозначных функций и соответствующих им Римановых поверхностей, обобщим наши понятия следующим образом. Пусть, как выше, регулярная функция $f(z)$ определена в некоторой области G_0 и пусть эта функция аналитически продолжена в область G_0', охватывающую область G_0. Это аналитическое продолжение обозначим (в силу однозначности этого процесса) также через $f(z)$. Пусть G_1 будет область, принадлежащая G_0', и пусть G_1' будет произвольная область, содержащая область G_1 (черт. 30). Если можно найти такую регулярную в области G_1' функцию $f_1(z)$, которая в области G_1 совпадала бы с функ-

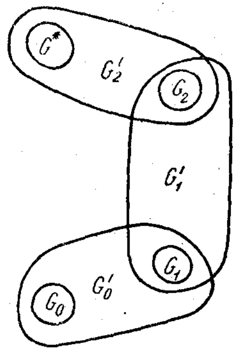
---

[1]) Такую точку P можно получить, например, следующим образом. Соединим точку a области G_0 с точкой b области G_0', не принадлежащей G^*, ломаной линией, целиком лежащей внутри G_0'. Пробегая эту линию от a к b, возьмем за P ближайшую к a точку, не принадлежащую G^*, если таких точек на ломаной линии конечное число; если же таких точек бесконечно много, то найдем их точки сгущения и ближайшую из них к a и возьмем за точку P. *Прим. ред.*

цией $f(z)$, то будем называть эту функцию $f_1(z)$ аналитическим продолжением функции $f(z)$ в область G_1. При этом может, конечно, случиться, что области G_1 и G_0 будут иметь общие части, в которых функции $f(z)$ и $f_1(z)$ будут различны. Вообще, функцию $f^*(z)$, регулярную в области G^*, будем называть *аналитическим продолжением функции* $f(z)$ *в область* G^*, если возможно составить такую конечную последовательность областей G_0, G'_0, G_1, $G'_1 \ldots G_k$, G'_k, G^*



Черт. 30.



Черт. 31.

(черт. 31), которая обладала бы следующими двумя свойствами:

1) G_0 принадлежит области G'_0; G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots k)$ принадлежит как области $G'_{\nu-1}$, так и области G'_ν; G^* принадлежит области G'_k.

2) В каждой из областей G'_ν существует такая регулярная функция $f_\nu(z)$, которая при $\nu = 0, 1, \ldots k-1$ совпадает в области $G_{\nu+1}$ с функцией $f_{\nu+1}(z)$; далее, в области G_0 имеет место равенство $f(z) = f_0(z)$ и в области G^* $f_k(z) = f^*(z)$.

Такую последовательность областей будем называть *„цепью областей"* и будем говорить, что *„функция* $f(z)$ *продолжена при помощи этой цепи областей"*. Соответствующие функции $f_\nu(z)$ будем называть *цепью элементов функции*.

Как и в начале параграфа, можно показать, что если при помощи такого процесса возможно аналитическое продолжение для заданной цепи областей, то только одним способом.

Выбрав в каждой области G_ν ($\nu=0, 1, 2, 3, \ldots k$) некоторую точку z_ν и в области G^* точку $z^*=z_{k+1}$ и соединив точки z_ν и $z_{\nu+1}$ ($\nu=0, 1, 2, 3 \ldots k$) непрерывной кривой, которая вся лежит внутри области G'_ν, будем говорить, что функция $f^*(z)$ получена посредством аналитического продолжения $f(z)$ *вдоль кривой* $z_0, z_1, \ldots z_{k+1}$. Обратно, если дана непрерывная кривая C, соединяющая начальную точку z_0 с конечной точкой z^*, то функция $f(z)$ аналитически продолжима вдоль кривой C в том случае, если можно так разложить кривую C на части $z_0 z_1$, $z_1 z_2$, $z_2 z_3, \ldots, z_k z_{k+1}$ ($z_{k+1}=z^*$), заключить каждую дугу $z_\nu z_{\nu+1}$ в область G'_ν, а каждую точку z_ν — в область G_ν, принадлежащую как области $G'_{\nu-1}$, так и области G'_ν [1]), что для полученной цепи областей окажется возможным найти цепь элементов $f_\nu(z)$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots k$), так, чтобы $f_\nu(z)$ была регулярна в G'_ν и чтобы в области G_0 было $f_0(z)= =f(z)$, а в области $G_{\nu+1}$ было бы $f_{\nu+1}(z)=f_\nu(z)$ ($\nu=0$, $1, 2, 3 \ldots . k-1$).

Из вышеприведенных рассуждений легко видеть, что если аналитическое продолжение вдоль данной кривой возможно, то оно возможно только единственным способом [2]).

Если функцию можно аналитически продолжить вдоль двух кривых, соединяющих точки z_0 и z_{k+1}, при помощи одной и той же цепи областей, то результат продолжения начального элемента будет один и тот же, так как продолжение вполне определяется заданием цепи областей. Отсюда следует, что *аналитическое продолжение вдоль каждой кривой C^*, достаточно близкой* [3]) *к кривой C и соединяющей те же точки, возможно, если оно воз-*

[1]) G'_{-1} обозначает то же самое, что G'_0.

[2]) Конечно только тогда, если задана наперед та область, в которую функция должна быть аналитически продолжена. Это тривиальное требование в дальнейшем мы не будем высказывать в явной форме.

[3]) Т. е. достаточно точно аппроксимирующей в смысле главы I, § 2.

можно вдоль кривой C, и приводит к тому же результату. Таким образом, можно еще сказать, что, *если кривая C, вдоль которой совершается аналитическое продолжение, непрерывно меняется, причем ее начальная точка z_0 и конечная точка z^* остаются неизменными, а аналитическое продолжение вдоль C все время остается возможным, то результат продолжения не изменяется, т. е. всегда получается один и тот же элемент функции в конечной точке.*

В принципе аналитическое продолжение можно осуществить следующим образом [1]): пусть, при сохранении прежних обозначений, d будет кратчайшее расстояние дуги $z_\nu z_{\nu+1}$ от контура области G'_ν. Разделим эту дугу точками $z_{\nu,0} = z_\nu$, $z_{\nu,1} \ldots z_{\nu,l} = z_{\nu+1}$ на такие части, чтобы диаметр [2]) каждой из них был меньше d и около каждой точки деления опишем круг радиуса d. В каждом таком круге будет лежать тогда также и следующая точка деления; поэтому степенной ряд, в который разлагается функция $f_\nu(z)$ в окрестности точки $z_{\nu,\lambda+1}$, можно получить путем преобразования ряда, соответствующего точке $z_{\nu,\lambda}$ [3]). Применяя этот процесс ко всем дугам $z_\nu z_{\nu+1}$, можем сказать, что каждый элемент аналитического продолжения функции $f(z)$ получается из некоторого определенного элемента путем повторного преобразования ряда.

Из предыдущего легко вывести следующую теорему („*теорема монодромии*“): *Если функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в односвязной области G вдоль всякой непрерывной кривой, то эта функция будет в области G однозначна, т. е. если ее продолжим вдоль*

---

[1]) Этот способ практически мало удобен из-за своей громоздкости. В § 3 будет дан способ, во многих случаях быстро ведущий к цели.

[2]) Под „*диаметром*“ кривой подразумевается наибольшее расстояние между двумя ее точками.

[3]) „Преобразование“ ряда, расположенного по степеням $z-a$ в ряд по степеням $z-b$, где b — точка внутри круга сходимости K первого ряда, получим, заменив в первом ряде $z-a$ на $(b-a)+(z-b)$ и формально разложив его по возрастающим степеням $z-b$. Легко доказать, что полученный ряд будет сходящимся внутри любого круга, с центром в точке b, который весь лежит внутри K и будет иметь там те же значения, что и первоначальный ряд (ср. *Гурвиц*, часть I, глава 2, § 6).

любой замкнутой непрерывной кривой C, лежащей в области G, то придем опять к ее первоначальному значению.

Доказательство. Кривую C можно аппроксимировать замкнутым многоугольным контуром Π так, чтобы аналитическое продолжение вдоль Π приводило бы к тому же, результату, что и продолжение вдоль кривой C. По теореме изложенной в главе I, § 2, каждый замкнутый многоугольный контур, лежащий внутри односвязной области G, может быть сведен непрерывным изменением к одной из его точек, например, P. По доказанному выше, продолжение начального элемента вдоль Π дает тот же результат, что и продолжение вдоль кривой, лежащей как угодно близко к начальной точке и, следовательно, в частности, вдоль такой кривой, которая вся расположена внутри той области, где начальный элемент определен однозначно.

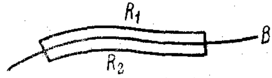
§ 2. Принцип непрерывности и принцип симметрии.

Прежде чем выводить общие следствия из установленных нами понятий, ознакомимся с одним важным обстоятельством, касающимся аналитического продолжения и дающим возможность еще иначе характеризовать этот процесс, не пользуясь цепью налегающих друг на друга областей. Сверх того, мы получим при этом простой и наглядный способ, позволяющий на самом деле выполнить процесс аналитического продолжения. Этот способ приложим правда только к определенному классу специальных случаев, но зато в этих случаях оказывается очень могущественным.

Докажем прежде всего такую теорему. *Пусть две области G_1 и G_2 граничат друг с другом вдоль некоторой гладкой кривой B. Пусть внутри области G_1 задана регулярная функция $f_1(z)$, а внутри области G_2 задана регулярная функция $f_2(z)$. Предположим еще, что при стремлении к кривой B эти функции стремятся к предельным значениям, непрерывным на кривой B, причем предельные значения обеих функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на B равны между собой. При этих условиях, каждая из функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ будет аналитическим продолжением другой.*

Коротко говоря, это значит, что непрерывное продолжение будет всегда аналитическим продолжением. Эта теорема позволяет следовательно осуществить аналитическое продолжение функции, пользуясь цепью неналегающих друг на друга, а только граничащих друг с другом вдоль гладкой кривой областей.

Для доказательства этой теоремы построим криволинейный четырехугольник R, который кривая B разделяет на две части R_1 и R_2, принадлежащие соответственно областям G_1 и G_2 (черт. 32). В этом четырехугольнике определим функцию $f(z)$ так, чтобы она совпадал в части R_1 с функцией $f_1(z)$, в части R_2 — с функцией $f_2(z)$, а на отрезке кривой B, лежащем в R, — с общими предельными значениями функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. По доказанному в главе II, § 7 (см. особенно замечание на стр. 57) интеграл



Черт. 32.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},$$

взятый по контуру области R_1 в положительном направлении, равен $f(z)$ для всех точек z, лежащих внутри R_1, и равен нулю для точек, лежащих вне R_1, и, в частности, для точек z, лежащих внутри R_2. Точно также интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

равен $f(z)$ внутри области R_2 и равен нулю внутри R_1.

Если сложим оба интеграла, то части их, соответствующие дуге B, сократятся. Поэтому интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$$

будет равен $f(z)$ как внутри области R_1, так и внутри области R_2. Этот интеграл будет аналитической функцией (глава II, § 7, стр. 57 и след.) от z внутри всего криволинейного четырехугольника R и следовательно теорема доказана.

В качестве важнейшего следствия из этой теоремы, докажем следующий, установленный Риманом и Шварцем

„принцип симметрии". Пусть частью контура области G является прямолинейный отрезок или, общее, дуга окружности B, и пусть функция $\zeta=f(z)$ будет регулярна внутри G и стремится при приближении к B к предельным значениям, непрерывным вдоль B [1]) и лежащим в плоскости ζ также на прямой линии или на дуге окружности L.

Если область G^* симметрична с G относительно B и если точке z^*, симметричной с z относительно B, привести в соответствие значение ζ^*, симметричное с $\zeta=f(z)$ относительно L, то построенная таким образом функция $\zeta^*=f^*(z^*)$, будет регулярна в G^* и будет аналитическим продолжением функции $f(z)$.

При доказательстве можно предполагать, что речь идет о симметрии относительно прямых. Действительно, всегда можно подобрать такое линейное преобразование, которое преобразует дугу окружности в отрезок прямой, причем точки, симметричные относительно дуги окружности, преобразуются в точки, симметричные относительно этого отрезка (глава IV, § 3, стр. 135). Функция f^* будет аналитической в области G^*, так как она очевидно имеет там непрерывные производные. Эта функция принимает на B те же самые значения, что и функция $f(z)$, и по принципу непрерывности будет поэтому аналитическим продолжением $f(z)$.

Пользуясь полученными результатами, можно исследовать также и общий случай, когда часть контура области G и соответствующая часть контура отображенной области Γ будут кривые аналитические [2]).

А именно, имеет место следующая теорема: *Пусть функция $\zeta=f(z)$ регулярна в области G и непрерывна при стремлении к аналитической дуге B контура этой области и пусть дуге B соответствует аналитическая*

---

[1]) Как мы увидим позднее (ср. гл. VI, § 4) мы могли бы отбросить предположение о непрерывности предельных значений.

[2]) Кривая, заданная уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, называется *„аналитической"*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ будут аналитическими функциями вещественной переменной t, т. е. если они могут быть разложены в ряды по степеням t. Тогда независимую переменную t можно рассматривать и как величину комплексную, меняющуюся в некоторой области. Точка кривой, для которой производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, при надлежащем выборе параметра, не обращаются в нуль одновременно, называется *„регулярной"* точкой.

дуга B' плоскости ζ. Тогда функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить через дугу B.

Доказательство основывается на следующем предложении. Если z_0 — некоторая регулярная точка аналитической дуги B, расположенной в плоскости z, то окрестность точки z_0 можно отобразить взаимно однозначным образом и конформно на некоторую область плоскости t и притом так, чтобы дуга B переходила в отрезок вещественной оси. Действительно, пусть кривая B задана параметрическим уравнением $z = x + iy$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (t — вещественное) и $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — вещественные аналитические функции. Пусть значению $t = 0$ соответствует точка z_0, так что $z_0 = \varphi(0) + i\psi(0)$. Если z_0 регулярная точка, то $\varphi'(0) \neq 0$ или $\psi'(0) \neq 0$. Если функцию $z = \varphi(t) + i\psi(t) = \omega(t)$ рассматривать как функцию комплексной переменной t, то ее можно разложить в окрестности точки $t = 0$ в сходящийся степенной ряд. Эта функция будет следовательно аналитической в этой окрестности и будет поэтому отображать некоторую окрестность точки $t = 0$ на некоторую окрестность $z = z_0$ и притом так, что вещественным значениям t будут соответствовать точки дуги B. Так как $\varphi'(0) + i\psi'(0) \neq 0$, то такое отображение можно однозначно обратить в окрестности $z = z_0$, что и дает требуемое отображение. Отобразим теперь окрестность регулярной точки z_0 дуги B при помощи функции $t = \Omega(z)$ на окрестность нулевой точки плоскости t и притом так, чтобы дуга B перешла в отрезок вещественной оси. Отобразим также окрестность точки $\zeta_0 = f(z_0)$ при помощи функции $\tau = \Lambda(\zeta)$ на окрестность нулевой точки плоскости τ и притом так, чтобы дуга B' перешла в отрезок вещественной оси. Пусть $z = \omega(t)$ и $\zeta = \lambda(\tau)$ будут функции, обратные функциям Ω и Λ соответственно. Функция $\tau = \Lambda\left(f(\omega(t))\right) = \chi(t)$ будет тогда регулярной, с одной стороны вещественной оси, а на самой вещественной оси будет вещественной и непрерывной; поэтому, по принципу симметрии Римана — Шварца, она может быть продолжена через вещественную ось: Функция $\zeta = \lambda(\chi(\Omega(z)))$ будет, поэтому, регулярной в окрестности $z = z_0$ и будет совпадать в G с функцией $f(z)$.

Только-что рассмотренный принцип аналитического продолжения через данную дугу кривой называется *„принципом симметрии для аналитической кривой"*.

Если кривая B алгебраическая, т. е. задана уравнением вида

$$F(x, y) = 0,$$

где F — полином с двумя переменными, то бывает иногда полезно следующее аналитическое представление преобразования симметрии в этой кривой [1]. Пусть опять $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, (t — вещественное) будут параметрические уравнения дуги кривой B. В некоторой определенной области комплексной переменной t будем иметь тождественно

$$F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) = 0. \tag{1}$$

Произвольную точку z, близкую к B, можно представить в виде

$$z = \varphi(t) + i\psi(t),$$

где t вообще не будет вещественным, если точка z не лежит на самой кривой. Симметричной с z относительно B точкой будет

$$z^* = \varphi(\bar{t}) + i\psi(\bar{t}).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{z^*} = \varphi(t) - i\psi(t)$$

и значит

$$\varphi(t) = \frac{z + \overline{z^*}}{2}, \qquad \psi(t) = \frac{z - \overline{z^*}}{2i}.$$

Подставляя в равенство (1), имеем, что

$$F\left(\frac{z + \overline{z^*}}{2}, \frac{z - \overline{z^*}}{2i}\right) = 0.$$

Из этого уравнения можно определить $\overline{z^*}$ как аналитическую функцию от z; зная $\overline{z^*}$, определим симметричную с z точку z^*.

Заметим наконец, что из первой теоремы этого параграфа вытекает следующая важная теорема: *если функция, аналитическая в области G, имеет на гладкой дуге контура предельные значения, равные нулю, то она равна нулю тождественно.*

---

[1] Указанием на него я обязан устному сообщению *C. Carathèodory*.

Действительно, функцию $f(z)$ можно непрерывно продолжить через дугу при помощи функции $f_1(z) \equiv 0$. Но это продолжение является аналитическим, а так как аналитическая функция, равная нулю в произвольно малой области, должна всюду равняться нулю, то $f(z)$ равна нулю тождественно.

Эту теорему можно формулировать еще и так. *Две различные в области G аналитические функции не могут иметь одинаковых граничных значений на какой-нибудь гладкой дуге контура.*

§ 3. Римановы поверхности аналитических функций [1]).

Возвращаясь к общим соображениям, поставим вопрос, каким образом можно исследовать все возможные аналитические продолжения данного элемента функции, чтобы вместе с тем установить в общем виде понятия о всем ходе изменения аналитической функции, ее особых точках и ее Римановой поверхности. Заметим уже здесь, что поверхность Римана будет при этом иметь, по существу, более глубокое значение, чем простое средство для наглядного представления изменения многозначной функции, как это было в ранее разобранных примерах.

Напомним общее понятие *элемента функции*; это есть регулярная функция, однозначно определенная в некоторой области G, причем, конечно, может оказаться, что области G принадлежит бесконечно удаленная точка. В этом случае выгодно перейти от числовой плоскости к числовой сфере. Далее будем говорить, что элемент функции „*лежит над точкой* z_0“, если точка z_0 принадлежит той области G, в которой определен элемент функции; этот элемент функции будет лежать следовательно над каждой точкой некоторой достаточно малой окрестности z_0. Два элемента функции, лежащие над одной и той же точкой, будут называться „*эквивалентными*“, если они совпадают в достаточно малой окрестности этой точки. Следовательно, оба элемента будут представлены в окрестности этой точки одним и тем же степенным рядом [2]). Будем

---

[1]) В связи с изложенной здесь теорией (в которой нет абсолютной необходимости для первого понимания дальнейшего) ср. *H. Weyl,* Die Idee der Riemannschen Fläche; 2. Aufl., Leipzig und Berlin, 1923.

[2]) По Вейерштрассу элемент функции часто отождествляется с этим степенным рядом.

исходить из точки z_0, принадлежащей области G, и элемента функции $f(z)$, лежащего над точкой z_0. Если точку z_0 соединим в плоскости z с некоторой точкой z_1, такой непрерывной кривой, вдоль которой исходный элемент функции $f(z)$ может быть продолжен в другой элемент, лежащий над точкой z_1, то будем говорить, что точка z_1 вместе с лежащим над ней элементом функции [1]) есть *„точка Римановой поверхности функции $f(z)$"* и именно точка Римановой поверхности, *„лежащая над точкой z_1 плоскости z"*. Если элементы функции, лежащие над одной и той же точкой z_1, эквивалентны, то будем говорить, что эти элементы вместе с точкой z_1 определяют *одну и ту же точку Римановой поверхности, лежащую над точкой z_1*.

Множество всех точек, определенных таким способом, т. е. значениями z и соответствующими элементами функции, которые получаются аналитическим продолжением из одного начального элемента $f(z)$ [2]), назовем *поверхностью Римана для функции $f(z)$*. В дальнейшем понятие Римановой поверхности будет несколько расширено. Для того чтобы сделать наглядной поверхность Римана, рассмотрим область G, в которой определен какой-нибудь элемент функции $f(z)$. Точки z_1 и z_2, лежащие в G, вместе с расположенным над ними элементом функции определяют две точки Римановой поверхности функции $f(z)$ (лежащие соответственно над точками z_1 и z_2 плоскости z), которые мы будем считать лежащими в одном и том же *„листе"*. Другими словами, точки одного и того же листа находятся во взаимно однозначном соответствии с точками некоторой области плоскости z [3]). Надо подчеркнуть, что такое определение листа совсем еще не дает возможности вполне определенно разложить всю поверхность Римана на отдельные листы; напротив, при таком разбиении остается еще очень много места для произвола.

Над одной и той же точкой плоскости z может быть расположено несколько „листов" поверхности Римана. Предположим опять, что элемент функции, лежащий над точкой z_1 и опреде-

---

[1]) Этот элемент, согласно § 1, можем опять обозначить через $f(z)$.

[2]) Само собой понятно, что это множество не зависит от специального выбора начального элемента.

[3]) Функцию, представленную одним листом поверхности Римана, т. е. элемент функции, будем также называть, как это принято в литературе, *„ветвью"* функции.

ленный в области G_1, получен аналитическим продолжением в точку z_1 начального элемента $f(z)$, лежащего над точкой z_0. Может случиться, что, продолжая аналитически тот же самый начальный элемент вдоль другой кривой, соединяющей те же точки z_0 и z_1, получим другой элемент, лежащий над точкой z_1, не эквивалентный полученному прежде и определенный например в области G_1'. Этот второй элемент функции, вместе с точкой z_1, определяет другую точку Римановой поверхности, лежащую над точкой z_1 плоскости z. Пусть G_1^* будет область, состоящая из общих точек областей G_1 и G_1' и содержащая точку z_1, тогда все точки Римановой поверхности, которые определяются точками области G_1^* и вторым элементом функции, будем причислять ко второму „листу" Римановой поверхности, лежащему над точкой z_1.

Таким образом, можем получить в некоторых случаях сколько угодно листов, лежащих над одной и той же точкой. Надо заметить, что множество точек Римановой поверхности, лежащих над одной и той же точкой z плоскости, самое бóльшее, может быть *исчислимым* бесконечным множеством. Действительно, всякая точка Римановой поверхности определяется непрерывной кривой, соединяющей точки z_0 и z_1 в плоскости z. Рассмотрим сперва только точки z_1 с рациональными координатами. Кривую, соединяющую точки z_0 и z_1, можно заменить ломаной, вершины которой лежат в рациональных точках, так чтобы при аналитическом продолжении вдоль ломаной получался тот же самый элемент над точкой z_1, что и при продолжении вдоль первоначальной кривой. Так как множество рациональных чисел исчислимо, то таким путем можно получить только исчислимое множество элементов. А так как каждый элемент функции, определяющий точку Римановой поверхности, лежит хотя бы над одной рациональной точкой, то предложение доказано.

Название „*поверхности*" для только что определенного образования оправдывается тем обстоятельством, что для Римановой поверхности можно определить понятие окрестности и понятие связности, а также тем, что точки такой окрестности непосредственно [1]) соответствуют тем точкам области плоскости z, над которыми они лежат.

[1]) И притом взаимно однозначно и непрерывно в том смысле, как будет сейчас определено.

Будем говорить, что точка Q Римановой поверхности, лежащая над точкой z_2 плоскости z, принадлежит *„окрестности"*, точнее „ρ-окрестности" ($\rho > 0$) точки P Римановой поверхности, лежащей над точкой z_1 плоскости z, если $|z_2 - z_1| < \rho$ и если точки P и Q принадлежат одному и тому же листу, покрывающему круг $|z - z_1| < \rho$.

Понятие предельной точки на Римановой поверхности можно теперь, на основе понятия окрестности, определить следующим образом. Последовательность точек $P_1, P_2, P_3 \ldots$ поверхности Римана сходится к предельной точке P, если в каждой окрестности P лежат все точки P_n, за исключением конечного числа их. Вместе с тем получается и определение непрерывности на поверхности Римана. Непрерывной кривой на поверхности Римана будем называть множество точек $P(t)$ этой поверхности, непрерывно зависящих от одного параметра t, т. е. так, что при $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t$ точка $P(t_n)$ стремится к предельной точке $P(t)$. Соответствующие этим точкам значения z образуют тогда непрерывную функцию того же параметра t.

Для определения понятия области в плоскости z, достаточно было иметь только понятие окрестности и понятие связности (см. главу I, § 2). Определив теперь оба эти понятия для Римановой поверхности, можем следующим образом дословно перенести определение области на любую Риманову поверхность.

Множество точек называется областью, если окрестность каждой точки множества также принадлежит этому множеству и если это множество связное. Поэтому, начиная отсюда, для обозначения нашего первоначального понятия области плоскости z будем явно пользоваться термином *„однолистная"* область.

Если поверхность Римана некоторой функции $f(z)$ имеет над точкой z_0 только один единственный лист, то функция $f(z)$ называется *однозначной в точке* z_0. Аналитическая функция называется *„однозначной"* просто, если она однозначна во всех точках, для которых она определена. Ее Риманова поверхность будет тогда „однолистной" областью. Каждая аналитическая функция будет однозначной функцией на своей Римановой поверхности даже и тогда, когда она многозначна в плоскости z.

Аналитическая функция совершает *„непрерывное ото-*

бражение" своей поверхности Римана на другую Риманову поверхность. При этом однозначное отображение одной Римановой поверхности на другую называется непрерывным, если отображения точек некоторой сходящейся последовательности сходятся к точке, которая будет отображением предельной точки этой последовательности. Так например, функция $\zeta = f(z)$ непрерывно отображает свою поверхность Римана на однолистную Риманову поверхность, лежащую над плоскостью ζ. Такое отображение, однако, не всегда будет взаимно однозначным, как показывает пример функции $\zeta = z^2$. Если же рассматривать обратную функцию $z = \varphi(\zeta)$ и ее Риманову поверхность, то точки обеих Римановых поверхностей будут находиться во взаимно однозначном соответствии, если исключить точки скрещивания функции $f(z)$, т. е. нули $f'(z)$, и соответственно точки скрещивания функции $\varphi(\zeta)$.

Имея в виду такие исключительные точки, мы сейчас же еще несколько расширим понятие Римановой поверхности, но предварительно займемся изучением понятия „*особой точки*" функции.

Ограничимся сперва однозначными функциями. Поверхностью Римана для такой функции будет следовательно некоторая область G плоскости z. Особые точки такой функции нужно относить к границе этой области G.

Рассмотрим поэтому граничные точки однолистной области и прежде всего рассмотрим „достижимые" граничные точки. „*Достижимой граничной точкой*" области будем называть всякую, не принадлежащую G точку Q, которую можно соединить с некоторой точкой P области G непрерывной кривой, целиком, за исключением точки Q, лежащей внутри G. Но может случиться, что к точке Q можно подойти несколькими (существенно) различными путями, как например в надрезанном круге можно подойти с двух сторон к точке, лежащей на разрезе. Для того, чтобы в этом случае можно было говорить о нескольких различных граничных точках, а не об одной „кратной" граничной точке, мы должны несколько обернуть определение достижимой граничной точки. Мы не будем теперь говорить, что достижимая граничная точка „*есть*" точка Q плоскости z, но будем о п р е д е л я т ь „*достижимую граничную точку, лежащую над точкой Q плоскости z*", при помощи непрерывной кривой, целиком, за исключением ее конца, лежащей в G. Две различные кривые C_1 и C_2, соединяющие точку P с точкой Q, тогда и только тогда определяют *одну и ту же*, лежащую над Q граничную точку, когда возможно внутри произвольно малого круга с центром в Q соединить некоторую точку кривой C_1 с какой-нибудь точкой кривой C_2 такой непрерывной кривой, которая вся лежит внутри G.

Каждую достижимую граничную точку области G будем теперь называть особой точкой функции.

Надо обратить внимание на то, что по этому определению не каждая граничная точка области существования однозначной функции будет особой точкой этой функции, а только каждая достижимая граничная точка. Пусть например область существования образована всеми внутренними точками квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ $(z = x + iy)$ за исключением точек, лежащих на отрезках $x = \frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ $0 < y \leqslant \frac{1}{2}$ (черт. 33). Точки $x = 0$, $0 \leqslant y < \frac{1}{2}$ не будут достижимыми граничными точками и поэтому не будут особыми точками. Это связано с тем, что функцию нельзя продолжить сколь угодно близко к одной из этих точек, без того, чтобы одновременно не подойти сколь угодно близко к другим точкам, например, к точке $z = \frac{1}{2} i$.

Черт. 33.

Нашему определению особой точки легко придать такую форму, которая легко обобщается на случай многозначной функции. Предположим, что точку z_0, лежащую в области, где функция $f(z)$ определена, можно соединить с некоторой точкой a плоскости z непрерывной кривою так, чтобы начальный элемент, лежащий над точкой z_0, можно было продолжить вдоль всей этой кривой, за исключением одной только точки a. *Такая кривая определяет тогда особую точку функции, лежащую над точкой a.* Две различные кривые C_1 и C_2, соединяющие точку z_0 с точкой a и обладающие только что указанным свойством, тогда и только тогда определяют одну и ту же лежащую над точкой a особую точку, когда выполняется следующее условие: если z_1 и z_2 будут две точки, лежащие соответственно на кривых C_1 и C_2, и если $|z_1 - a| < \rho$ и $|z_2 - a| < \rho$ $(\rho > 0)$, то два элемента, полученные продолжением вдоль кривых C_1 и C_2 и лежащие соответственно над точками z_1 и z_2, могут быть аналитически продолжены друг в друга вдоль такой кривой, которая лежит сколь угодно близко к a, как только ρ выбрано достаточно малым [1]).

Так как в этом определении никоим образом не упоминается об однозначности или многозначности функции, то его можно принять за определение особой точки и для многозначной функции.

Чтобы получить естественное обобщение понятия Римановой поверхности, рассмотрим теперь несколько ближе простейший класс особенностей, а именно так называемые „*изолированные*" особые точки. Особая точка S, лежащая над точкой a и определенная кривой C, называется *изолированной*, если связный отрезок C_1 кривой C, начинающийся в точке a, можно заключить в такой круг K с центром в a, чтобы исходя из какого-нибудь элемента функции, лежащего над некоторой точкой отрезка C_1, можно было бы функцию продолжить вдоль каждого пути, лежащего внутри круга K с выключенным центром (т. е. не проходящего через центр K). (Само собой разумеется, что над точкой a или над произвольно близкой точкой могут лежать другие регулярные или особые точки, но только, конечно не достижимые при помощи продолжения внутри круга K). Внутри круга K с исключенным центром функция $f(z)$ может следовательно быть неограниченно продолжаема. Если при всех этих продолжениях получается только конечное число элементов функции, лежащих над некоторой точкой z_0 круга K и не эквивалентных между собой, то это число будет конечно и одинаково для всех точек $z_0 \neq a$. Действительно, если аналитически продолжить те различные между собой элементы функции, лежащие над точкой z_0, о которых только-что шла речь, в другую точку $z_1 \neq a$ круга K, то над точкой z_1 получим тоже только различные между собой листы, так как в противном случае исходные элементы не могли бы быть все различны между собой. Пусть k будет число

---

[1]) Это определение особой точки в существенных чертах примыкает к определению *L. Bieberbach'a*: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften II C 4, стр. 401—404; Lehrbuch der Funktionentheorie I, Leipzig und Berlin 1921, стр. 213—217.

элементов, лежащих над каждой точкой $z_0 \neq a$. Если каждое из этих k определений функции $f(z)$ при приближении точки z к точке a стремится к одному и тому же конечному или бесконечному пределу, то точка S называется *алгебраической особой точкой* (так как особые точки такого рода суть единственные особые точки, которые могут встречаться у алгебраических функций; см. § 4). Пусть r будет радиус круга K с центром в a и положим

$$\frac{z-a}{r}=e^{u}.$$

Функция $f(z)=f(a+re^{u})=\varphi(u)$ в полуплоскости $\Re u<0$ может быть неограничено продолжаема и поэтому (так как полуплоскость односвязна), по теореме монодромии будет однозначной функцией, как только зафиксирован начальный элемент. Кроме того, значениям $u+2n\pi i$ соответствует одно и то же значение z. Так как каждому значению z соответствуют только k элементов функции $f(z)$, то для некоторого целого и положительного числа l должно существовать равенство $\varphi(u+2l\pi i)=\varphi(u)$. Если l будет наименьшее число такого рода, то точке z будут соответствовать l различных элементов функции

$$f(z)=\varphi(u+2\nu\pi i), \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2, \ldots l-1).$$

Таким образом, $l=k$, т. е. функция $f(z)$ возвращается к первоначальному значению, после того как точка z окружила k раз точку $z=a$. Внутри круга $|z-a|<r$ функция будет поэтому однозначной функцией от $v=(z-a)^{\frac{1}{k}}$, имеющей, по предположению, при $v=0$ конечный или бесконечный предел. Такая функция в окрестности точки $v=0$ может быть разложена в ряд по степеням v, содержащий самое большее конечное число отрицательных степеней (глава IV, § 1). Для функции $f(z)$ имеет следовательно место разложение

$$f(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty} c_{\nu}(z-a)^{\frac{\nu}{k}} \qquad (n \gtrless 0)\ ^{1)}. \qquad (1)$$

---

[1]) Из равенства (1) видно, что сумма, разность, произведение и частное двух функций, имеющих в точке a самое большее алгебраическую особенность, будут в этой точке тоже иметь самое большее алгебраическую особенность (то же относится и к производной такой функции).

Между рассмотренными особыми точками находятся также полюса. Для полюса $k=1$ и $n<0$. Распространение изложенного на тот случай, когда вместо точки a стоит бесконечно удаленная точка, не требует особенного исследования.

Введем теперь, на основе вышесказанного, следующее расширение понятия поверхности Римана. Прежде всего будем понимать под элементом функции и такие функции, заданные в области G, которые имеют полюса в этой области. Еще общее будем допускать в качестве элементов функции также и функции в окрестности произвольной алгебраической особенности т. е. функции, представимые рядом вида (1) и переходящие при подстановке $v=(z-a)^{\frac{1}{k}}$ в обыкновенные элементы функции в плоскости v. Такой элемент функции определяет „$(k-1)$-*кратную точку разветвления*“ над соответствующей точкой плоскости. Эту точку отнесем тоже к Римановой поверхности. Поверхность Римана в окрестности такой точки разветвления можно представить состоящей из k листов, наложенных на плоскость z и связанных между собою в точке разветвления так, как показано в примерах главы IV, § 4.

На основе этих понятий получаем окончательное определение поверхности Римана аналитической функции.

Следует еще заметить, что поверхность Римана может быть построена несколько иным способом. Действительно, к исходной области можно, на основании доказанного в начале предыдущего параграфа принципа непрерывности, присоединить такие новые области, в которые начальный элемент функции может быть аналитически продолжен. Такой процесс можно повторять подходящим образом вообще говоря неограниченное число раз. Полученные таким способом области могут покрыть несколько раз плоскость z (всю или только ее часть) и повести к образованию многолистной поверхности Римана.

Эта точка зрения позволяет сделать важное обобщение интегральной теоремы Коши. Заметим сперва, что всякую функцию $\varphi(z)$ можно рассматривать как функцию точки Римановой поверхности, принадлежащей некоторой функции $f(z)$, если эта поверхность Римана покрывает область существования функции $\varphi(z)$. Может случиться, что эта функция $\varphi(z)$ будет однозначно определена в некоторой области B поверхности Римана даже и в том случае, если она многозначна в плоскости z. Пусть, например, B будет область Римановой поверхности, состоящая из конечного числа листов, ограниченная кусочно-гладкими кривыми и не простирающаяся в бесконечность. Предположим далее, что в этой области нет точек разветвления и что функция $\varphi(z)$ однозначна и регулярна в ней (включая и границы). Такая область B может быть разбита на конечное число однолистных областей, ограниченных кусочно-гладкими кривыми. Так как для таких областей справедлива теорема Коши (и соответственно, ее обобщение, данное в главе II, § 5), то, складывая отдельные интегралы, найдем, что эта теорема будет справедлива и для многозначной функции от z, если только путь интегрирования охватывает область, обладающую только что указанными свойствами.

Но теорема Коши остается справедливой также и для всякой конечной, лежащей на поверхности Римана области, состоящей из конечного числа листов и ограниченной кусочно-гладкими кривыми, если только функция регулярна и однозначна во всей этой области, включая и ее границы. Установим прежде всего такое определение: функция, однозначная в области B Римановой поверхности, называется *регулярной в точке разветвления*, если в окрестности точки разветвления она будет регулярна и ограничена [1]) и, следовательно, при конформном отображении окрестности точки разветвления на некоторую однолистную область, переходит в функцию, регулярную в этой однолистной области [2]). Справедливость теоремы Коши можно доказать теперь следующим образом: вырежем из области B круговые окрестности точек разветвления; к оставшейся области приложим приведенное выше доказательство теоремы Коши и, наконец, заставим радиусы вырезанных кругов стремиться к нулю.

В предыдущих рассуждениях поверхность Римана принадлежала некоторой заранее данной функции и служила для представления общего хода этой функции. Для того чтобы дать понятию Римановой поверхности чисто гео-

---

[1]) Если функция в точке разветвления обращается в бесконечность, то будем говорить, что она в этой точке имеет *полюс*.

[2]) Это определение находится только в кажущемся противоречии с тем, что сказано было в главе IV, § 1, где точка разветвления рассматривалась всегда как особая точка. Там функция рассматривалась как многозначная функция в плоскости, здесь же она рассматривается как однозначная функция на поверхности Римана.

метрический смысл, введем такое определение тождественности: Римановы поверхности, принадлежащие двум функциям, называются „*тождественными*“, если между точками этих поверхностей можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы две соответствующие точки лежали всегда над одной и той же точкой плоскости и чтобы обе эти точки были одновременно или простыми точками или точками разветвления одинаковой кратности. Ясно, каким образом можно теперь расширить определение поверхности Римана, не привлекая уже аналитических функций в общее геометрическое определение. Глубочайшее значение поверхностей Римана основывается на том обстоятельстве, что здесь получается только к а ж у щ е е с я расширение понятия, что в действительности „Римановой поверхности“ $\mathfrak{F}$, определенной независимо от какой-либо функции, всегда соответствует такая аналитическая функция, для которой поверхность Римана как раз и есть поверхность $\mathfrak{F}$. Другими словами, *множество всех однозначных и многозначных аналитических функций доставляется множеством всех, определенных чисто геометрически „поверхностей Римана“*. Доказательство этого предложения тесно связано с проблемой конформного отображения поверхности Римана на определенные области простого вида. Исследование этих вопросов составит главное содержание дальнейшей главы (см. главу VIII).

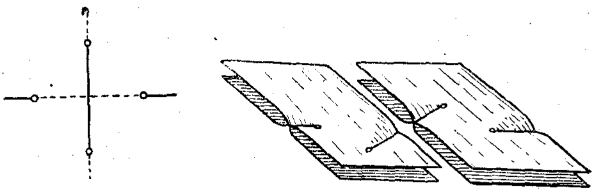
В направлении только-что указанного геометрического толкования, при котором поверхность Римана задается раньше функции, естественно сделать еще один шаг дальше, освободив эту поверхность и от ее связи с плоскостью z и заменив ее например кривою поверхностью в пространстве, или, более общим образом, некоторым абстрактным многообразием. Как это можно сделать, будет изложено дальше (глава IX, § 7).

§ 4. Алгебраические функции.

Общие соображения предыдущего параграфа можно наглядным образом проследить на алгебраических функциях и их Римановых поверхностях.

Алгебраическою функциею будем называть такую многозначную функцию с конечным числом значений $f(z)$, которая имеет только алгебраические особенности и притом в конечном числе. Если особые точки функции $f(z)$ лежат над точками $z_1, z_2, \ldots z_r$, то функция $f(z)$ может быть неограниченно продолжаема по всем путям, обходящим эти точки. Если над какой-нибудь точкой z_0, отличной от особых точек, лежит ровно n различных листов, то путем аналитического продолжения можно каждый из них распространить над любой не особой точкой z и получить там n различных элементов функции (так как в противном случае начальные элементы не могли бы быть все различными). Таким образом, над каждой не особой точкой z будет лежать то же самое число n различных листов Римановой поверхности функции $f(z)$.

Поверхность Римана алгебраической функции можно, поэтому, представить себе состоящей из n экземпляров



Черт. 34.

полной плоскости z или сферы z, лежащих друг над другом, соединенных между собой в точках разветвления и взаимно пронизывающих друг друга вдоль разрезов, выбранных подходящим образом и соединяющих точки разветвления; каждый из этих экземпляров может быть назван листом Римановой поверхности. Такую поверхность Римана называют также *„замкнутой"* поверхностью. Например функция $\sqrt{R(z)}$, где R — целая рациональная функция от z, будет алгебраической функцией, имеющей двулистную поверхность Римана[1]). На черт. 34 и 35 наглядно представлен случай $R(z) = 1 - z^4$ при двух различных системах разрезов, соединяющих точки разветвления.

Если число листов $n = 1$, т. е. функция однозначна, то, как было уже замечено в § 3, особые точки z_ν будут

---

[1]) Если степень целой рациональной функции $R(z)$ равна 3 или 4 и $R(z)$ не имеет кратных корней, то соответствующую поверхность Римана называют *„эллиптической"*. Если степень $R(z)$ больше 4, то двулистная поверхность Римана называется *„гиперэллиптической"*.

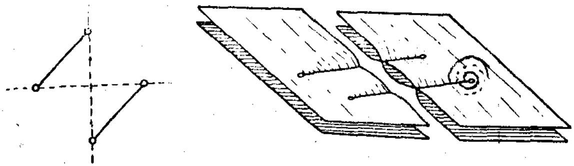
полюсами. В окрестности каждого из полюсов имеет место разложение

$$f(z) = g_\nu\left(\frac{1}{z - z_\nu}\right) + \mathfrak{P}_\nu(z - z_\nu)$$

и, соответственно, при $z_\nu = \infty$

$$f(z) = g_\nu(z) + \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{z}\right),$$

где g_ν — целая рациональная функция, $\mathfrak{P}_\nu$ — степенной ряд. Если вычтем сумму всех „главных частей" $g_\nu\left(\frac{1}{z - z_\nu}\right)$, соответственно $g_\nu(z)$, из $f(z)$, то получим функцию, регулярную



Черт. 35.

во всякой конечной части плоскости и ограниченную на бесконечности; но такая функция будет постоянной. *Однозначная функция, имеющая только алгебраические особенности, будет поэтому рациональной функцией.*

Пусть теперь $n > 1$. Построим основные симметрические функции от n значений функции $f(z) = \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, соответствующих обыкновенной точке z, а именно:

$$\varphi_1(z) = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n,$$
$$\varphi_2(z) = \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \ldots + \zeta_{n-1}\zeta_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(z) = \zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_n.$$

Эти функции могут быть неограниченно продолжаемы вдоль путей, обходящих особые точки. Так как при продолжении вдоль какой-нибудь замкнутой кривой плоскости z значения $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ могут только оказаться переставленными между собой, то функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ будут однозначны. Далее, эти функции будут функции алгебраические, так как они составлены из алгебраических функций ζ_1, $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ только при помощи действий сложения и умножения (см. стр. 174 в частности примечание 1). По только-что доказанному, эти функции будут следовательно рациональными. Но значения $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ удовлетворяют уравнению

$$(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)\ldots(\zeta-\zeta_n)=\zeta^n-\varphi_1(z)\zeta^{n-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^n\varphi_n(z)=0.$$

Помножив это уравнение на общий знаменатель рациональных функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$, будем иметь такую теорему: *Значения алгебраической функции удовлетворяют алгебраическому уравнению*

$$F(z, \zeta)=p_0(z)\zeta^n+p_1(z)\zeta^{n-1}+\ldots+p_n(z)=0, \quad (1)$$

где $p_0(z), p_1(z)\ldots p_n(z)$ полиномы, не имеющие общего делителя.

Покажем теперь, что уравнение (1) *неприводимо*, т. е. что $F(z, \zeta)$ не разлагается на произведение двух целых рациональных функций $F_1(z, \zeta)$ и $F_2(z, \zeta)$ от z и ζ, каждая из которых отлична от постоянной. В самом деле, пусть z_0, ζ_0 — некоторая точка нашей Римановой поверхности и ζ — соответствующий этой точке элемент функции. Из уравнения $F_1(z, \zeta)F_2(z, \zeta)=0$ видно, что хотя бы один из множителей $F_1(z, \zeta)$, $F_2(z, \zeta)$, например $F_1(z, \zeta)$, в окрестности точки z_0, ζ_0 должен бесконечное число раз обращаться в нуль; следовательно, этот множитель тождественно равен нулю на поверхности Римана, т. е. уравнение $F_1(z, \zeta)=0$ при произвольном z должно удовлетворяться n значениями $\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots \zeta_n(z)$. Функция $F_1(z, \zeta)$ будет поэтому степени n относительно ζ, так как она, будучи множителем $F(z, \zeta)$, не может тождественно равняться нулю относительно обеих переменных. Функция $F_2(z, \zeta)$ должна, поэтому, быть нулевой степени относительно ζ, а так как полиномы $p_0(z), p_1(z), \ldots p_n(z)$ не имеют общих множителей, то эта функция не может быть функцией от z какой-либо целой и положительной степени. Таким образом неприводимость функции $F(z, \zeta)$ доказана.

Докажем теперь обратное предложение: *Корни $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ неприводимого алгебраического уравнения (1) представляют собой ветви некоторой алгебраической функции.* При всяком z, не совпадающем с корнем полинома $p_0(z)$, уравнение (1) имеет n корней. Среди этих корней будут равные тогда и только тогда, когда будет равен нулю дискриминант уравнения (1), который представляет собой некоторый полином $D(z)$. Так как по предположению, функция $F(z, \zeta)$ не приводима, то $D(z)$ не может тождественно равняться нулю[1]); поэтому во всей плоскости z, за исключением конечного числа ее точек, уравнение будет иметь n различных конечных корней. Надо показать, что эти корни будут ветвями одной и той же аналитической функции от z. Итак, пусть z_0 будет точка плоскости z, отличная от этих исключительных точек, и пусть $\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \ldots \zeta_n^{(0)}$ будут ее отображения на плоскость ζ. Около каждой из этих точек $\zeta_\nu^{(0)}$ опишем такой круг K_ν, который не содержит ни одной из точек $\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}$, кроме точки $\zeta_\nu^{(0)}$. На основании формулы (4), главы III, § 5, имеем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_\nu} \frac{F'_\zeta(z_0, \zeta)}{F(z_0, \zeta)}\,d\zeta = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Если z лежит внутри круга $|z - z_0| < \rho$, где ρ — достаточно малое положительное число, то функция $F(z, \zeta)$ не обращается в нуль (как функция от ζ) на контуре круга K_ν; поэтому интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_\nu} \frac{F'_\zeta(z, \zeta)}{F(z, \zeta)}\,d\zeta \tag{3}$$

будет непрерывная функция от z, для всех значений z внутри круга $|z - z_0| < \rho$. С другой стороны, этот интеграл равен числу нулей функции $F(z, \zeta)$, лежащих внутри круга K_ν, т. е. во всяком случае равен целому числу. Если же непрерывная функция может принимать только целые значения, то она равна постоянному; поэтому при достаточно близком к z_0 значении z уравнение $F(z, \zeta) = 0$ имеет в каждом круге K_ν один и только один корень ζ_ν.

---

[1]) Доказательство см. например у *H. Weber*, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I (Braunschweig 1898), стр. 168.

Этот корень можно выразить через интеграл (глава III, § 5, (5))

$$\zeta_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_\nu}\frac{\zeta F_\zeta(z,\zeta)}{F(z,\zeta)}\,d\zeta,$$

откуда одновременно видно, что этот корень будет аналитической функцией от z.

Функции $\zeta_\nu(z)$ могут быть аналитически продолжены в каждую точку плоскости z, за исключением конечного числа ранее указанных исключительных точек. В окрестности такой исключительной точки z_μ, которую мы простоты ради предположим лежащей на конечном расстоянии[1]), эти функции могут иметь, самое большее, n значений. Для того чтобы доказать, что эти функции в точках z_μ не могут иметь никаких других особенностей, кроме алгебраических, достаточно показать, что произведение функций ζ_ν на некоторую степень $(z-z_\mu)^k$ стремится к нулю, когда z стремится к z_μ. Действительно, тогда эти функции можно рассматривать как частное двух функций, которые в точке z_μ имеют, самое большее, алгебраические особенности и следовательно сами имеют, самое большее, алгебраическую особенность в точке z_μ.

Из уравнения (1) видно, что значения

$$\eta_\nu=\zeta_\nu(z-z_\mu)^k$$

удовлетворяют уравнению

$$\eta^n+\frac{(z-z_\mu)^k p_1}{p_0}\eta^{n-1}+\ldots+\frac{(z-z_\mu)^{nk}p_n}{p_0}=0.$$

При достаточно большом k все коэффициенты уравнения, кроме первого, стремятся к нулю, когда z стремится к z_μ. Но тогда и корни η_ν стремятся к нулю. Действительно, пусть η_ν удовлетворяет уравнению

$$f(\eta)=\eta^n+a_1\eta^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{4}$$

---

[1]) Если точка $z=\infty$ принадлежит к числу исключительных точек, то для нее можно провести совершенно аналогичные рассуждения.

и пусть

$$\sum_{\mu=1}^{n} |a_\mu| < 1, \tag{5}$$

тогда из уравнения (4) имеем такие неравенства:

$$|\eta_\nu|^n \leqslant |\eta_\nu|^{n-1} \sum |a_\mu| \quad \text{при } |\eta_\nu| \geqslant 1,$$

$$|\eta_\nu|^n \leqslant \sum |a_\mu| \quad \text{при } |\eta_\nu| \leqslant 1,$$

из которых, в силу (5), в обоих случаях имеем

$$|\eta_\nu| \leqslant \sqrt[n]{\sum |a_\mu|}.$$

Таким образом, все корни η_ν стремятся к нулю вместе с коэффициентами a_ν.

Функции $\zeta_\nu(z)$ будут поэтому конечно-многозначными аналитическими функциями, имеющими только алгебраические особенности и притом в конечном числе, т. е. будут алгебраическими функциями. Остается еще только доказать, что они будут ветвями одной и той же алгебраической функции. Действительно, если бы путем аналитического продолжения можно было перейти от функции ζ_1 только к функциям $\zeta_2, \ldots \zeta_m$, где $m < n$, то согласно с тем, что было доказано на стр. 180, функция ζ_1 удовлетворяла бы уже уравнению степени m

$$F^*(z, \zeta) = p_0^*(z)\zeta^m + p_1^*(z)\zeta^{m-1} + \ldots + p_m^*(z) = 0$$

и функция $F^*(z, \zeta)$ была бы не тривиальным делителем функции $F(z, \zeta)$, что противоречит предположению о неприводимости $F(z, \zeta)$.

Вернемся к рассмотрению n-листной поверхности Римана, принадлежащей какой-нибудь алгебраической функции $\zeta = \zeta(z)$. Каждое выражение $R(z, \zeta)$, рациональное относительно z и ζ, будет на такой поверхности очевидно однозначной функцией, регулярной всюду, кроме конечного числа полюсов.

Докажем справедливость обратного предложения: *Каждая аналитическая функция $w(z)$, однозначная на данной поверхности и регулярная на ней всюду, за исключением* *конечного числа полюсов, может быть представлена, как рациональная функция от z и от ζ.*

Для доказательства, пользуясь n-ветвями (одинаковыми или различными) $w_1, w_2, \ldots w_n$ функции w, составим n уравнений

$$\left.\begin{array}{r} w_1 + w_2 + \ldots + w_n = \varphi_0(z), \\ w_1\zeta_1 + w_2\zeta_2 + \ldots + w_n\zeta_n = \varphi_1(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1\zeta_1^{n-1} + w_2\zeta_2^{n-1} + \ldots + w_n\zeta_n^{n-1} = \varphi_{n-1}(z), \end{array}\right\} \quad (6)$$

где $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ означают соответствующие (различные между собой) ветви функции ζ. Как и раньше, можно доказать, что $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z), \ldots \varphi_{n-1}(z)$ будут **рациональные** функции от z. Определитель системы (6) равен квадратному корню из дискриминанта уравнения $F(z, \zeta) = 0$, которому удовлетворяет функция ζ, и следовательно не равен тождественно нулю[1]). Мы можем поэтому хотя бы w_1 представить как отношение двух определителей, т. е. представить в виде рациональной функции от z, $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$, которая, кроме того, будет симметричной относительно $\zeta_2 \ldots \zeta_n$. Но рациональные симметричные от $\zeta_2 \ldots \zeta_n$ функции могут быть рационально выражены через коэффициенты уравнения $(n-1)$-ой степени

$$\frac{F(z, \zeta)}{(\zeta - \zeta_1)} = 0,$$

которому удовлетворяют $\zeta_2, \ldots \zeta_n$, т. е. могут быть выражены рационально через z и ζ_1. Таким образом w_1 может быть тоже выражено рационально через z и ζ_1, например $w_1 = R(z, \zeta_1)$. Но тогда на всей поверхности Римана будем иметь $w = R(z, \zeta)$, что и требовалось доказать.

Соответственно тем общим замечаниям, какие были сделаны в конце предыдущего параграфа, мы обратим впоследствии (глава IX) полученные здесь выводы в том смысле, что, задав чисто геометрически *„алгебраическую поверхность Римана“* (т. е. замкнутую поверхность, покрывающую n раз всю плоскость или сферу и имеющую конечное число точек разветвления), поставим вопрос о том, возможно ли и если возможно, то как, построить „соответствующую“ этой поверхности алгебраическую функцию.

[1]) См. примечание на стр. 181.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ОБЛАСТЕЙ.

В конце § 3 предыдущей главы была поставлена проблема: охарактеризовать аналитические функции геометрическими свойствами. К этому вопросу мы и хотим теперь обратиться. В главе II, § 8, было доказано, что функция, аналитическая в некоторой области, отображает эту область конформно на некоторую другую область. Можно поставить обратный вопрос: даны две области G и Γ в плоскости z; найти такую аналитическую функцию, которая конформно отображает область G на область Γ.

В этой главе мы рассмотрим только простейший случай, когда обе области будут односвязными и однолистными. Можно еще предположить, что одна из этих областей, например Γ, будет единичным кругом. Действительно, если задача будет решена для этого частного случая, то отображение двух произвольных областей друг на друга можно будет получить, отобразив каждую из них на вспомогательный круг. При этих предположениях имеет место следующая теорема, которая называется „*теоремой Римана о конформном отображении*" и принадлежит к важнейшим теоремам теории функций:

Всякую односвязную область G, которая отлична от всей плоскости z и от плоскости z с одной выключенной точкой, можно взаимно однозначным образом и конформно отобразить при помощи некоторой аналитической функции на внутренность единичного круга (центр которого лежит в начале координат, а радиус равен единице) и притом так, чтобы некоторой определенной *точке в области G и некоторому определенному направлению в этой точке соответствовали начало координат и направление вещественной положительной оси.*

В дополнение к этой теореме мы докажем, что функция, нормированная только что указанным образом, определяется конформным отображением, совершаемым этой функцией, *однозначным образом.*

Таким образом, теорема Римана дает геометрический принцип для построения аналитических функций, осуществление которого мы рассмотрим в следующей главе. Только в главе VIII мы обобщим, уже на другой основе, эту теорему возможно широким образом. В рассматриваемом здесь частном случае мы дополним наши результаты тем, что проследим отображение вплоть до контура области и, кроме того, рассмотрим проблему конформного отображения с точки зрения теории потенциала. Мы начнем с доказательства теоремы Римана о конформном отображении.

§ 1. Предварительные замечания и вспомогательные теоремы.

Пусть Γ будет единичный круг плоскости ζ. Прежде всего мы должны надлежащим нормированием исключить произвол, остающийся при отображении некоторой области плоскости z на единичный круг. Действительно, как следует из главы IV, § 3, единичный круг можно помощью линейного преобразования отобразить на самого себя так, чтобы при этом два заданных линейных элемента (линейный элемент — точка и направление, проведенное через эту точку) соответствовали друг другу. Поэтому, если только вообще возможно область G отобразить на единичный круг, то отображающую функцию наверно можно так нормировать, чтобы заданный линейный элемент области G переходил в центр единичного круга и в направление вещественной положительной оси. Не нарушая общности, можем предположить, что область G так расположена в плоскости z, что заданный линейный элемент совпадает с началом координат плоскости z и с направлением вещественной положительной оси; тогда вышеуказанная нормировка накладывает на функцию $\zeta = f(z)$, отображающую область G в круг, условия: $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

Докажем теперь, что если область G есть вся плоскость

z или вся плоскость за исключением одной ее точки, то она *не может* быть отображена конформно на внутренность единичного круга. Для этого предположим, что функция $\zeta = f(z)$ отображает взаимно однозначным образом и конформно всю плоскость z за исключением быть может одной ее точки, которую, без ограничения общности, можем считать точкой $z = \infty$ (так как в противном случае можно сперва применить такую линейную подстановку, которая эту исключительную точку преобразует в точку $z = \infty$) на внутренность единичного круга плоскости ζ. Эта функция $\zeta = f(z)$ должна быть целой функцией; с другой стороны, она ограничена. Такая функция, по теореме *Лиувилля* (глава III, § 2) должна быть постоянной, что невозможно [1]).

Будем поэтому с самого начала предполагать, что отображаемая область G имеет хотя бы две различные граничные точки и следовательно в силу того, что область односвязна, имеет также связное множество граничных точек, соединяющих эти две точки. Если a и b — две различные граничные точки области G, лежащие на конечном расстоянии, то преобразование

$$z^* = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$$

отображает область G в некоторую область G^*, которая не покрывает некоторой части плоскости z^*. Действительно, по теореме монодромии, можно определить z^* как однозначную внутри области G функцию; если последняя при-

[1]) Упомянем еще следующую, несколько более общую теорему: *всякая функция $f(z)$, которая взаимно однозначно и конформно отображает всю плоскость z за исключением быть может одной точки (или конечного числа их) на однолистную область и которая нигде в конечной части плоскости не делается бесконечно большой, есть целая линейная функция.* Действительно, так как $f(z)$ нигде в конечной части плоскости не делается бесконечно большой, то лежащие на конечном расстоянии исключительные точки должны быть устранимыми точками разрыва. Поэтому $\zeta = f(z)$ есть целая функция; в силу предположения о взаимной однозначности отображения $f(z)$ не может быть целой рациональной функцией степени выше первой; но $f(z)$ не может быть также и целой трансцендентной функцией, так как в противном случае, по теореме Вейерштрасса (ср. главу IV, § 1) при надлежащем стремлении точки z к граничной точке $z = \infty$, можно было бы сколь угодно близко подойти к любой точке плоскости ζ.

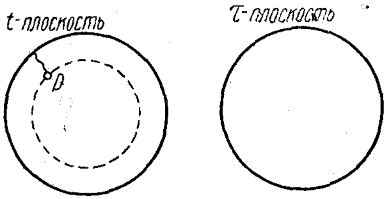
нимает некоторое отличное от 0 значение z^* и смежные с ним значения, то она не может принять значения $-z^*$ и смежных значений, так как оба значения z^* и $-z^*$ соответствуют одному и тому же значению z. Пусть точке α плоскости z^* и некоторая ее окрестность лежат вне области G^*. Функция $\zeta = \frac{1}{z^* - \alpha}$ отобразит тогда область G^* в некоторую новую область, которая вся будет расположена внутри некоторого круга конечного радиуса. Эту новую область параллельным переносом круга и преобразованием подобия можно преобразовать в область, лежащую внутри единичного круга, и содержащую внутри себя нулевую точку. Мы ограничимся поэтому в следующем параграфе рассмотрением таких областей, которые лежат внутри единичного круга и содержат внутри себя начало координат.

Для доказательства теоремы Римана надо еще ознакомиться со свойствами некоторой простой вспомогательной функции, которая конформно отображает двулистный единичный круг с эксцентрически расположенной точкой разветвления в однолистный единичный круг. Для построения этой вспомогательной функции представим себе, что круг радиуса 1 с центром в начале координат плоскости t. разрезан от точки P, отстоящей от центра на расстоянии μ, где $0 < \mu < 1$, до некоторой точки на его окружности и что два наложенных друг на друга экземпляра такого круга соединены между собой обычным способом вдоль этого разреза (черт. 36, 37). Этот двулистный круг можно конформно отобразить на единичный круг плоскости τ при помощи некоторой определенной функции $\tau = \psi(t) = \psi_\mu(t)$ (и притом так, чтобы для одного листа было $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) > 0$).

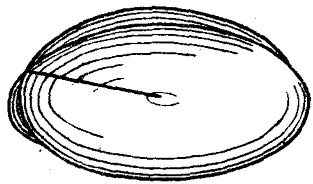
Нет надобности искать явное выражение этой функции. Ее можно построить, преобразуя сперва точку разветвления P в начало координат при помощи линейного преобразования, преобразующего круг в себя, извлекая затем квадратный корень и устанавливая, наконец, при помощи другого линейного преобразования заданное соответствие между линейными элементами в нулевых точках.

Пусть функция, обратная функции $\psi_\mu(t)$, будет $t = \chi(\tau)$; она однозначна и регулярна в круге $|\tau| \leqslant 1$. Функция $\frac{\chi(\tau)}{\tau}$

будет, очевидно, тоже однозначна и регулярна в этом круге. Так как $\left|\frac{\chi(\tau)}{\tau}\right|$ на контуре этого круга равен 1, то внутри всего круга, по принципу максимума модуля (гл. III, § 1) должно быть $\left|\frac{\chi(\tau)}{\tau}\right| < 1$, причем должен стоять именно знак $<$, потому что эта функция не постоянна. Другими словами, между величинами t и τ всегда существует зависимость $|\tau| > |t|$, как только $|t| < 1$. Таким образом при рассматриваемом отображении каждая точка внутри круга $|t| < 1$ переходит в точку круга $|\tau| < 1$, более удаленную от начала координат.



Черт. 36.



Черт. 37.

Это смещение точек можно точнее характеризовать, если ограничиться точками некоторого замкнутого концентрического круга плоскости t, например всеми точками круга $|t| \leqslant \mu$. Всем этим точкам $|t| \leqslant \mu$ будет соответствовать некоторое постоянное положительное число $q(\mu) > 1$ такое, что

$$|\tau| \geqslant q(\mu)\,|t|.$$

Действительно, достаточно за такое число q выбрать наименьшее значение, какое величина $\left|\frac{\tau}{t}\right|$ принимает в круге $|t| \leqslant \mu$. По предыдущему, такое наименьшее значение будет больше 1.

Если в единичном круге $|t| < 1$ лежит некоторая однолистная область K, такая, что точка P находится на ее контуре (или вне этой области), то функция

$$\tau = \psi(t)$$

отображает эту область K взаимно однозначным образом на некоторую область К, принадлежащую кругу $|\tau| < 1$, и всякая точка области К будет находиться на большем расстоянии от начала координат, чем соответствующая точка области K. Если в области K лежит начало координат, то область K при этом отображении имеет определенную тенденцию распространиться на весь круг $(\tau) < 1$. При этом отображении K на К нулевая точка и направление вещественной положительной оси в ней остаются без изменения.

Если K содержит круг $|t| < \rho \leqslant \mu$, то К содержит круг $|\tau| < \rho^*$, где $\rho^* = q\ (\mu)\rho > \rho$.

Докажем еще одну вспомогательную теорему. *Если последовательность функций $f_1\ (z)$, $f_2\ (z), \ldots$, определенная в некоторой области G, в каждой замкнутой области, принадлежащей G, сходится равномерно к некоторой функции $f(z)$, которая не равна постоянной, и если каждая функция $f_n(z)$ этой последовательности отображает область G взаимно однозначным образом в некоторую однолистную область* (так что $f_n\ (z)$ в двух различных точках области G принимает всегда два различных значения), *то и функция $f\ (z)$ тоже отображает область G в некоторую однолистную область.* Для доказательства рассмотрим некоторую точку $z = z_0$ внутри области G. Около этой точки опишем достаточно малый круг, лежащий весь вместе с его контуром $\varkappa$ внутри области G и такой, что в этом круге (за исключением его центра z_0) и на его окружности $\varkappa$ функция $f\ (z)$ не принимает значения равного $f(z_0) = a$, что в силу предположения о непостоянстве $f\ (z)$ возможно. Тогда имеем, что [глава III, § 5, (4)]

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa} \frac{f'(z)}{f\ (z) - a}\ dz = \nu\,,$$

где ν целое положительное число, равное кратности корня $z = z_0$ уравнения $f(z) - a = 0$. Так как последовательность $f_n(z)$ сходится к функции $f(z)$ равномерно, то последовательность $f'_n\ (z)$ тоже сходится равномерно к $f'\ (z)$ (ср. главу III, § 3) и следовательно интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varkappa} \frac{f'_n(z)}{f_n\ (z) - a}\ dz$$

при n достаточно большом будет сколь угодно мало отличаться от предыдущего интеграла. Так как этот интеграл может иметь только целые и положительные значения $0, 1, 2, 3, \ldots$, то он должен *равняться* предыдущему интегралу. Но так как уравнение $f_n(z) - a = 0$, внутри окружности $\varkappa$, может иметь только один корень и притом простой, то $\nu = 1$ и следовательно уравнение $f(z) - a = 0$, внутри окружности $\varkappa$, имеет только простой корень $z = z_0$ и поэтому $f'(z_0) \neq 0$. Пусть $\varkappa'$ будет окружность такого круга, лежащего в G, вне которого расположена точка z_0, и пусть на этой окружности функция $f(z)$ не принимает значения, равного a. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\text{K}} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz$$

должен равняться нулю, так как в противном случае и функция $f_n(z)$ при любом достаточно большом n принимала бы где-нибудь внутри круга $\varkappa'$ значение, равное a; так как то же самое имеет место и для окружности $\varkappa$, которую можно взять сколь-угодно близкой к точке z_0, то функция $f_n(z)$, при n достаточно большом, принимала бы в области G не меньше двух раз значение, равное a, что противоречит условию теоремы. Таким образом, функция $f(z)$ нигде, кроме точки $z = z_0$, не принимает значения, равного a.

§ 2. Доказательство теоремы Римана о конформном отображении.

При доказательстве теоремы Римана можно принять согласно с тем, что было сказано в § 1, что область G лежит внутри круга $|z| < 1$ и содержит начало координат. Искомую отображающую функцию $f(z)$ нормируем условиями $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех функций $\varphi(z)$, уовлетворяющих условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ и конформно отображающих область G в какую-либо однолистную область, принадлежащую единичному кругу.

Доказательство теоремы Римана мы будем вести двумя различными способами, из которых первый опирается на принцип сходимости из главы III, § 6 и быстро ведет к цели. Идея этого доказательства состоит в том, чтобы искомую отображающую функцию $\zeta = f(z)$ характеризовать некоторым максимальным свойством.

Именно, поставим следующую задачу: пусть a будет произвольно заданная, отличная от нулевой точка области G; требуется отыскать такую функцию $\varphi(z) = f(z)$ нашего множества функций $\mathfrak{M}$, для которой отображенная точка $\alpha = f(a)$ отстояла бы как можно дальше от нулевой точки отображенной области. Другими словами, величина $|\alpha| = |f(a)|$ должна быть не меньше такой же величины $|\varphi(a)|$ для всякой другой функции $\varphi(z)$ множества $\mathfrak{M}$. Пользуясь принципом сходимости, убедимся сперва в том, что эта максимальная задача имеет решение $f(z)$, а затем при помощи вспомогательной функции, рассмотренной в § 1, докажем, что эта функция $f(z)$ действительно осуществляет искомое отображение.

Для доказательства существования решения $f(z)$ нашей максимальной задачи заметим, что множество всех чисел $|\varphi(a)|$ [$\varphi(z)$ — любая функция множества $\mathfrak{M}$] имеет точную верхнюю границу α; поэтому существует последовательность функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z) \ldots$; принадлежащих нашему множеству функций, для которой

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n(a)| = \alpha.$$

Так как все эти функции в области G по модулю меньше 1, то по принципу сходимости можно из последовательности этих функций выбрать такую частичную последовательность $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Phi_3(z)$, ..., которая сходилась бы к некоторой аналитической функции $\zeta = f(z)$ и притом равномерно в каждой замкнутой области, целиком лежащей внутри G. Таким образом имеем, что

$$|f(a)| = \lim_{n \to \infty} |\Phi_n(a)| = \alpha.$$

Так как $\Phi_n(0) = 0$ и $\Phi'_n(0) > 0$, то наверно и $f(0) = 0$ и $f'(0) \geqslant 0$. Следовательно, предельная функция $\zeta = f(z)$ не может быть постоянной (α отлично от нуля) и по последней лемме § 1 отобразит область G на однолистную область H, которая вся принадлежит замкнутому единичному кругу $|\zeta| \leqslant 1$, а в силу свойства области даже внутренности этого единичного круга $|\zeta| < 1$.

Если бы $f'(0)=0$, то окрестность $z=0$ не могла бы отображаться в окрестность $\zeta=0$ взаимно однозначным образом (по главе IV, § 1); поэтому, $f'(0)>0$ и следовательно функция $f(z)$ принадлежит тому множеству функций $\mathfrak{M}$, которое было выше определено. Таким образом, функция $f(z)$ дает решение нашей максимальной задачи.

Теперь легко видеть, что эта функция $\zeta=f(z)$ действительно отображает область G на полный круг $|\zeta|<1$. Если бы это было не так, то внутри единичного круга $|\zeta|<1$ существовала бы точка P, не принадлежащая отображенной области H, например граничная точка этой области H, лежащая внутри единичного круга $|\zeta|<1$. Для такой точки P, расстояние которой от начала пусть будет μ, построим вспомогательную функцию $\zeta^*=\psi_\mu(\zeta)$, определенную в § 1, с заменой t на ζ, а τ на ζ^*. Такая функция отобразит область H на некоторую область H^*, лежащую в круге $|\zeta^*|<1$, и для всех точек области H будем иметь неравенство

$$|\zeta^*|>|\zeta|.$$

Функция

$$\zeta^*=\psi(\zeta)=\psi(f(z))=F(z)$$

принадлежит очевидно также нашему классу функций $\mathfrak{M}$; действительно, она отображает область G на область, принадлежащую единичному кругу, причем $F(0)=0$ и $F'(0)=$ $=\psi'(0)\,f'(0)>0$.

Но если точка ζ совпадает с α, то для этой функции имеем

$$|\alpha^*|=|\psi(\alpha)|=|F(a)|>|\alpha|,$$

что противоречит тому обстоятельству, что $|\alpha|$ является наибольшим модулем $|\varphi(a)|$ для всего нашего множества функций $\varphi(z)$. Таким образом, предположив, что в единичном круге $|\zeta|<1$ существует точка P, не принадлежащая области H, приходим к противоречию; следовательно, область H тождественна с единичным кругом $|\zeta|<1$ и теорема Римана доказана.

Приведенное доказательство получает свою краткость за счет того, что оно представляет собою чистое доказательство существования и не стремится открыть путь для теоретического построения отображающей функции $f(z)$. В этом отношении имеет преимущество следующая модификация доказательства, которая не опирается на принцип сходимости.

Рассмотрим какую-либо функцию $\varphi(z)$, принадлежащую к множеству $\mathfrak{M}$ и отображающую область G конформно на некоторую область H, принадлежащую единичному кругу. Обозначим через ρ радиус того наибольшего круга с центром в нулевой точке, внутренность которого вся принадлежит H. Мы утверждаем, что существует последовательность функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$, удовлетворяющих условиям $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n'(0)>0$ и для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 1$[1]. Другими словами, область G можно конформно отобразить на область, сколь-угодно близко аппроксимирующую изнутри единичный круг. Действительно, допустим противное и пусть верхняя граница μ всех чисел ρ меньше 1. Рассмотрим какую-нибудь область H, внутри которой расположен круг радиуса $\rho=\mu-\varepsilon>0$, где ε — достаточно малое положительное число, которое определим дальше. В единичном круге должна тогда существовать точка P, не принадлежащая H, расстояние которой от центра круга равно μ. Обозначим через t комплексную переменную в области H и рассмотрим отвечающую точке P функцию $\tau=\psi(t)=\psi_\mu(t)$, определенную в § 1. Одна из ветвей этой функции отображает область H в область H^*, лежащую внутри единичного круга плоскости τ, причем H^* целиком содержит внутреннюю область круга радиуса $(\mu-\varepsilon)\ q\ (\mu)$.

Отображение G на H^*, составленное из двух предыдущих отображений, удовлетворяет двум указанным выше условиям нормализации. Так как $q(\mu)>1$, то ε можно выбрать настолько малым, чтобы было $(\mu-\varepsilon)\ q\ (\mu)>\mu$, что противоречит предположению, что μ есть верхняя граница значений ρ. Таким образом, $\mu=1$ и существует следовательно последовательность функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$, обладающая указанным свойством[2].

---

[1]) Эти функции имеют поэтому в окрестности $z=0$ разложение вида $\varphi_n(z)=a_1 z+\ldots$, где $a_1>0$.

[2]) Вместо того, чтобы доказывать существование последовательности функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z), \cdots$, отображающих область G на области $H_1, H_2, \ldots$, сходящиеся к кругу, путем доказательства существования верхней границы, можно было бы прямо построить такую последовательность, переходя от каждой области K_ν $(K_1=G)$ к последующей

Остается доказать, что при возрастании n функции $\varphi_n(z)$ стремятся к искомой отображающей функции. Для этого рассмотрим отношение $\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)}$; эта функция во всей области G регулярна и отлична от нуля. Поэтому, ее модуль лежит между верхней и нижней границами контурных значений модуля и следовательно во всей области G

$$\rho_n \leqslant \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)} \right| \leqslant \frac{1}{\rho_m}, \tag{1}$$

а значит мы имеем равномерно в области G, что

$$\lim_{m,n \to \infty} \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)} \right| = 1; \tag{2}$$

кроме того, отношение $\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)}$ при $z=0$ будет вещественным.

Рассмотрим функцию

$$\omega_k(z) = \lg \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)} = \lg \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)} \right| + i\psi,$$

регулярную во всей области (где k обозначает хотя бы наименьшее из чисел n и m, а другое число считается зависящим от k) и совершим предельный переход $k \to \infty$. Вещественная часть функций ω_k, в силу (2), будет стремиться к нулю равномерно во всей области G, а в точке $z=0$ будем иметь, что $\lim\limits_{k \to \infty} \omega_k(0) = 0$. Из теоремы, изложенной в главе III, § 9 (стр. 99), следует, что в каждой замкнутой области, принадлежащей G, будет равномерно $\lim\limits_{k \to \infty} \omega_k(z) = 0$, т. е. $\lim\limits_{n,m \to \infty} \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_m(z)} = 1$, откуда непосредственно видно, что

$$\lim_{n,m \to \infty} [\varphi_n(z) - \varphi_m(z)] = 0.$$

$K_{\nu+1}$ при помощи ветви функции $\psi_{\rho_\nu}(t)$. В том, что такая последовательность областей сходится к единичному кругу, можно убедиться совершенно подобно тому, как это сделано выше.

Таким образом, последовательность функций $\varphi_n(z)$, в каждой замкнутой области, принадлежащей G, сходится равномерно к некоторой предельной функции

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(z),$$

для которой $f(0) = 0$, $f'(0) \geqslant 0$. Модуль значений этой функции $f(z)$ на контуре области G равен 1. Действительно, если в неравенствах (1) перейдем к пределу при $n \to \infty$ и при постоянном m, то получим

$$1 \leqslant \left| \frac{f(z)}{\varphi_m(z)} \right| \leqslant \frac{1}{\rho_m}.$$

Так как функция $|\varphi_m(z)|$ при достаточно большом m и для достаточно близких к контуру области G значений z будет сколь угодно мало отличаться от 1, а величина $\frac{1}{\rho_m}$ будет тоже при m достаточно большом сколь угодно близка к 1, то отсюда непосредственно вытекает наше утверждение о контурных значениях $f(z)$. Так как, кроме того, $f(0) = 0$, то функция $f(z)$ не будет постоянной. По лемме § 1 имеем следовательно, что функция $f(z)$ отображает область G на некоторую однолистную область; откуда в частности следует, что $f'(0)$ должна быть > 0, а не только $\geqslant 0$. Эта отображенная область будет вся лежать внутри единичного круга, так как из $|\varphi_n(z)| < 1$ слёдует, что $|f(z)| \leqslant 1$. Так как, по доказанному выше, все точки контура отображенной области должны лежать на окружности единичного круга, то отображенная область совпадает с внутренней областью этого круга.

Этим доказана *теорема Римана о конформном отображении*, которую можно формулировать так:

Каждую односвязную область G, за исключением всей плоскости z и плоскости z, из которой выделена одна точка, можно взаимно однозначным образом и конформно отобразить на внутреннюю область единичного круга (радиуса 1 с центром в начале) и при том так, чтобы произвольной точке области G и произвольному направлению в этой точке соответствовали нулевая точка единичного круга и направление вещественной положительной оси в ней.

Если желаем эту теорему сформулировать, не упоминая об исключительных случаях, то следует только заметить, что за область Г можно было бы принять также и внешнюю часть круга. Таким образом, можно сказать, что *всякую односвязную область, имеющую хотя бы одну граничную точку, можно отобразить при помощи некоторой аналитической функции на область, внешнюю для круга.* При этом отдельную точку надо рассматривать как предельный случай круга.

§ 3. Теорема однозначности.

Доказав в теореме Римана существование отображающей функции, убедимся теперь в том, что функция, совершающая данное отображение, может быть только о д н а.

Установим поэтому, следующую теорему однозначности: *функция* $\zeta = f(z)$, *которая конформно отображает односвязную область* G *плоскости* z, *содержащую точку* $z = 0$, *на единичный круг плоскости* ζ *так, что* $f(0) = 0$ *и* $f'(0) > 0$ *определяется этими условиями однозначно.* Действительно, если бы существовали две таких функции $\zeta = f(z)$ и $\zeta^* = f^*(z)$, то можно было бы при помощи этих соотношений выразить ζ^* как аналитическую функцию от ζ, например $\varphi(\zeta)$. Эта функция $\zeta^* = \varphi(\zeta)$ отображает единичный круг на самого себя взаимно однозначным образом и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, и $\varphi'(0) > 0$.

Надо доказать, что $\zeta^* = \varphi(\zeta) = \zeta$. Действительно, функция $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$ в точке $\zeta = 0$ положительна, нигде внутри единичного круга не обращается в нуль и на контуре имеет значения, равные по модулю 1. Но тогда, по принципу максимума и минимума, модуль функции $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}$ всюду равен 1 и поэтому функция тождественно равна 1, что и доказывает теорему однозначности [1]).

---

[1]) Для уточнения доказательства лучше воспользоваться леммой Шварца (глава III, § 1, стр. 65), на основании которой имеем $\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\right| \leqslant 1$ и $\left|\frac{\zeta}{\varphi(\zeta)}\right| \leqslant 1$, следовательно $\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\right| = 1$. *Прим. ред.*

Этой теореме можно дать другое доказательство, которое дает возможность сформулировать теорему однозначности существенно более общим образом, а именно, отбрасывая предположение об односвязности области. Для того чтобы убедиться, что данную область можно только одним способом отобразить на другую данную область, достаточно доказать, что отображение области в себя, при поставленных выше условиях нормализации, должно быть тождественным отображением. Докажем поэтому следующую теорему. *Если функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям $f(0)=0, f'(0)>0$, конформно и взаимно однозначно отображает лежащую в конечной части плоскости z и содержащую точку $z=0$ область G на себя, то $f(z)=z$.*

Для доказательства можно предположить, что $f'(0)\geqslant 1$. Действительно, если бы было $f'(0)<1$, то надо было бы только рассматривать вместо $f(z)$ функцию ей обратную. Заметим далее, что вместе с $f_1(z)=f(z)$ все функции $f_2(z)=f(f_1(z))$, $f_3(z)=f(f_2(z)),\ldots$ отображают область G на себя и удовлетворяют условиям $f_n(0)=0, f_n'(0)>0$. Функция $f(z)$, по условию, в окрестности $z=0$ разлагается в ряд вида

$$f(z)=az+bz^{\nu}+\ldots,$$

где $\nu\geqslant 2$, $a\geqslant 1$.

Разложение в ряд функции $f_n(z)$ будет очевидно иметь вид $f_n(z)=a^n z+\ldots$ Если бы было $a>1$, то при n достаточно большом производная $f_n'(0)=a^n$ было бы больше произвольно заданного числа A. Пусть M обозначает радиус такого круга с центром в $z=0$, внутри которого целиком лежит вся область G, так что всюду в области G $|f_n(z)|<M$. Пусть далее ρ будет радиус такого круга с центром в $z=0$, который весь лежит внутри G. Тогда по главе III, § 2 имеем, что

$$a^n=f_n'(0)\leqslant\frac{M}{\rho}\cdot$$

Так как это неравенство должно иметь место при всяком n, то a не может быть больше 1, а должно равняться 1. Таким образом, или

$$f(z)=z$$

или

$$f(z)=z+bz^{\nu}+\ldots \qquad (b\neq 0,\ \nu\geqslant 2).$$

При втором предположении имеем, что [1])

$$f_2(z)=z+2bz^{\nu}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(z)=z+nbz^{\nu}+\ldots$$

В силу неравенств (3) главы III, § 2 будем теперь иметь

$$|f_n^{\nu}(0)|\leqslant \nu!\,\frac{M}{\rho^{\nu}}$$

или

$$n\,|b|\leqslant \frac{M}{\rho^{\nu}}\,.$$

Так как правая часть не зависит от n, а это неравенство должно иметь место при всяком n, то должно быть $b=0$, что противоречит предположению $b\neq 0$ и следовательно $f(z)$ должна равняться z.

§ 4. Соответствие между контурами при конформном отображении.

Соответственно с тем, что граничные точки не причисляются к области G, мы не принимали в соображение эти точки при доказательствах § 2, относящихся к конформному отображению. Покажем теперь, что отображающие функции устанавливают взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками контуров двух областей, если только эти контуры удовлетворяют определенным весьма общим условиям [2]).

---

[1]) В связи с этим ср. указанную на стр. 217 работу *Бибербаха* (*Bieberdach*).

[2]) Само собою разумеется, что контуры двух конформно отображенных друг на друга областей G и Γ соответствуют друг другу в том смысле, что отображение точки P, лежащей в G, приближается к контуру отображенной области Γ, когда точка P приближается к контуру области G; это приближение отображенной точки происходит даже *равномерно*, т. е. каждому $\varepsilon>0$ будет соответствовать такое, зависящее только от ε число $\delta=\delta(\varepsilon)$, стремящееся к нулю вместе с ε, что отображение каждой точки P, отстоящей от контура области G на расстоянии, меньшем чем ε, будет находиться от контура отображенной области Γ

В самом простом и наглядном случае [1]) имеем следующую теорему. *Пусть область G плоскости z ограничена простой замкнутой кусочно-гладкой кривой S и пусть функция $\zeta = f(z)$ отображает эту область взаимно однозначным образом и конформно на такую же область Γ плоскости ζ, ограниченную контуром Σ. Тогда функция $\zeta = f(z)$ устанавливает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между точками контуров S и Σ.*

Эта теорема позволяет опустить сделанное раньше (глава V, § 2) в вопросе об аналитическом продолжении отображающей функции при помощи инверсии в окружности или в аналитической кривой предположение о непрерывности отображающей функции на контуре. В частности мы получаем следующую теорему. *Всякая функция, которая отображает односвязную область, ограниченную дугами аналитических кривых, взаимно однозначным образом на такую же область, может быть продолжена через эти дуги.*

Для доказательства приведенной выше теоремы достаточно убедиться, что отображающая функция $f(z)$ равномерно непрерывна во всей области G (соответственно, обратная ей функция в Γ). Действительно, тогда функцию

на расстоянии, меньшем δ. Действительно, если бы это было не так, то в области G существовала бы такая последовательность точек P_1, P_2, $P_3, \ldots$, имеющая точки сгущения на контуре области G, для которой все соответствующие отображенные точки Q_1, Q_2, $Q_3, \ldots$ находились бы от контура отображенной области Γ на расстояниях, бо́льших некоторого постоянного положительного числа α. Пользуясь теоремой Вейерштрасса о существовании точки сгущения и опуская, если нужно, некоторые точки множеств P_n и Q_n, можем принять, что точки P_n имеют только одну точку сгущения P, также как и точки Q_n только одну точку сгущения Q. Точка Q должна находиться от контура области Γ на расстоянии не меньшем чем α, т. е. должна быть внутренней точкой области Γ; но при конформном отображении окрестности такой точки Q должна соответствовать окрестность некоторой внутренней точки области G, что несовместимо с тем обстоятельством, что точка сгущения P точек P_n лежит на контуре области G.
В дальнейшем, говоря о *„соответствии“* между частями двух контуров, будем подразумевать под этим, что каждой последовательности точек первой области, сходящейся к некоторой точке на рассматриваемой части первого контура, будет соответствовать в другой области такая последовательность точек, у которой все точки сгущения расположены на части другого контура и обратно.

[1]) Дальнейшие рассуждения остаются справедливыми и для конечно-кратно связных областей, на чем однако мы не хотим останавливаться.

$f(z)$ (соответственно, обратную ей функцию) можно однозначным образом непрерывно продолжить на контур, сопоставляя каждой данной точке контура то однозначно определенное значение функции, которое получается как предел значений $f(z)$, соответствующих точкам z некоторой последовательности, сходящейся к этой точке контура (этот предел очевидно не зависит от выбора последовательности точек z, сходящихся к данной точке контура).

Если бы функция $f(z)$ не была равномерно непрерывной в G, то в этой области существовала бы такая последовательность пар точек z_n', z_n'' $(n=1, 2, 3, \ldots, z_n' \neq z_n'')$, для которой

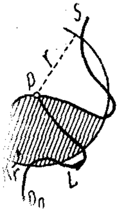
$$\lim_{n \to \infty} |z_n' - z_n''| = 0,$$

в то время как расстояние

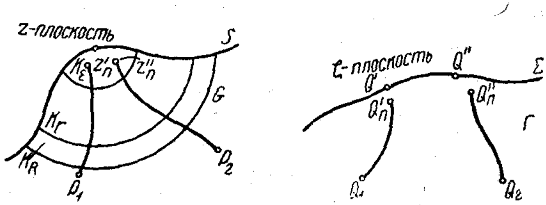
$$|\zeta_n' - \zeta_n''| = |f(z_n') - f(z_n'')|$$

остается больше некоторого постоянного положительного числа α. На основании теоремы Вейерштрасса (опуская, если нужно, некоторые пары точек) можно считать, что эти пары точек z_n', z_n'' имеют одну точку сгущения P, в то время как отображенные точки ζ_n', ζ_n'' (которые мы обозначим через Q_n', Q_n'') имеют две точки сгущения Q' и Q'', расстояние между которыми будет не меньше α. Так как функция $f(z)$ непрерывна в каждой внутренней точке области G, то точка P должна лежать на контуре этой области. Точки Q' и Q'' тоже должны лежать на контуре области Γ. В самом деле, если бы, например, точка Q' была расположена внутри области Γ, то в силу непрерывности обратной функции $z = \varphi(\zeta)$ в области Γ последовательность точек $z_n' = \varphi(\zeta_n')$ сходилась бы к внутренней точке области G, тогда как она сходится к точке P, лежащей на контуре этой области.

Введем полярные координаты r и ϑ, принимая точку P за полюс. Определим для точки P последовательность односвязных областей K_r, принадлежащих области G так, чтобы каждая из них была расположена внутри предыдущей. Для этого поступим следующим образом. Пусть P_0 будет какая-нибудь определенная точка внутри G (хотя бы точка $z=0$); соединим эту точку с точкой P непрерывной кривой L, лежащей в G (черт. 38). Пусть A будет число, меньшее расстояния между точками P_0 и P. Кривая L, соединяющая точки P_0 и P, пересечет где-нибудь в последний раз окружность радиуса r с центром в P, если только $0 < r < A$. От точки пересечения пойдём вдоль этой окружности в обе стороны до первых точек встречи с контуром S области G и обозначим через K_r ту часть области G, которая ограничена полученной дугой окружности радиуса r и тем отрезком контура S, на котором лежит точка P. Тогда, если $0 < r_1 < r_2 < A$, то область K_{r_1} будет частью области K_{r_2}. Если r стремится к нулю, то области K_r будут стремиться к точке P. Если $\varepsilon < A$ будет некоторое заданное положи-



Черт. 38.



Черт. 39.

тельное число, то точки z_n' и z_n'' при достаточно большом n должны быть внутренними точками области K_ε.

Пусть Q_1 и Q_2 будут две различные точки, заданные произвольно внутри области Γ, которым в области G соответствуют точки P_1 и P_2. Соединим точку Q_1 с точкой Q_n', а точку Q_2 с точкой Q_n'' соответственно кривыми C_n' и C_n'' (черт. 39), целиком лежащими в области Γ и не пересекающими друг друга.

Эти кривые можно выбрать так, чтобы кратчайшее расстояние между ними при всяком достаточно большом n было бы больше некоторого положительного числа β, которое зависит только от α (и от положения точек Q', Q'', Q_1, Q_2).

Пусть R такое число, что точки P_1 и P_2 расположены вне области K_R. Тогда отображения кривых C_n' и C_n'', при n достаточно большом и при всяком r, удовлетворяющем неравенствам $\varepsilon \leqslant r \leqslant R$, должны пересечь дугу круга, ограничивающую область K_r, так как эти отображения соединяют точки z_n' и z_n'' с точками P_1 и P_2 соответственно. Разность двух значений функции $f(z)$, соответствующих этим точкам пересечения z_1 и z_2, будет по модулю больше постоянного числа β для всех таких дуг. Для точек z_1 и z_2 следовательно имеем, что

$$\beta \leqslant |f(z_2)-f(z_1)| = \left|\int_{z_1}^{z} f'(z)\,dz\right| \leqslant \int |f'(z)|\,rd\vartheta,$$

где интеграл взят по соответствующей дуге окружности радиуса r. Пользуясь неравенством Шварца [1]), получим

$$\beta^2 \leqslant \left(\int |f'(z)|\,rd\vartheta\right)^2 \leqslant 2\pi \int |f'(z)|^2 r^2 d\vartheta$$

или

$$\frac{\beta^2}{r} \leqslant 2\pi \int |f'(z)|^2 rd\vartheta\,.$$

Интегрируя это неравенство по r от $r=\varepsilon$ до $r=R$, найдем

$$\beta^2 \lg\frac{R}{\varepsilon} \leqslant 2\pi \int\int |f'(z)|^2 rdrd\vartheta < 2\pi \int\int_{K_R} |f'(z)|^2 rdrd\vartheta,$$

где последний интеграл распространен на всю область K_R.

Так как этот интеграл измеряет площадь той области, в которую отображена область K_R, то он будет меньше некоторого постоянного числа (меньше площади всей области Γ) и следовательно величина $\beta^2\lg\frac{R}{\varepsilon}$ будет тоже меньше некоторого постоянного числа. С этим результатом

---

[1]) *„Неравенством Шварца"* называется следующее важное неравенство: если g и h две вещественные функции, определенные в области G (одномерной или многомерной) и df элемент области то

$$\left(\int ghdf\right)^2 \leqslant \int g^2df \cdot \int h^2df\,.$$

Это неравенство получается из того соображения, что при вещественных параметрах λ и μ однородное квадратичное выражение

$$\int (\lambda g+\mu h)^2 df$$

не может быть отрицательным.

несовместно предположение, что β не стремится к нулю одновременно с ε. Поэтому, каждой последовательности точек в G, имеющей точку сгущения P на контуре S, наверно соответствует в области Γ последовательность точек, имеющая только одну точку сгущения, притом лежащую на контуре Σ.

Так как такое же рассуждение можно провести и для обратного отображения области Γ на область G, то тем самым доказано, что точки на контурах этих областей находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии.

Только что проведенные рассуждения о соответствии контуров при конформном отображении внутренних областей в сущности не связаны с предположением о том, что эти контуры образованы кусочно-гладкими или простыми кривыми. Для перехода к общему случаю, припомним соображения, изложенные в главе V, § 3 относительно граничных точек некоторой области.

Каждая достижимая граничная точка, лежащая над точкой Q, была определена непрерывной кривой, которая вся за исключением ее конца Q расположена внутри области G.

Две различные достижимые граничные точки R_1 и R_2 обладают таким свойством: если C_1 и C_2 какие-нибудь две кривые, определяющие эти точки, и P_1 соответственно P_2 точки, лежащие на этих кривых и удаленные от границ области меньше чем на h, где h — произвольно-малое число, то диаметр [1] всякой непрерывной кривой, соединяющей точки P_1 и P_2 и расположенной в G, при достаточно малом h, не может быть меньше некоторой положительной величины l, которая не зависит от выбора кривых C_1 и C_2. Верхнюю точную границу значений таких величин можно назвать „расстоянием“ между двумя граничными точками [2].

В выводах, полученных выше, существенную роль играло построение областей K_r, принадлежащих к точке P контура. Аналогичное построение можно теперь провести для каждой достижимой граничной точки области G. Кривая C, определяющая граничную точку P, должна где-нибудь, в по-

[1]) Диаметром кривой называется наибольшее из расстояний между какими-нибудь двумя точками кривой.

[2]) Заметим, что при нашем определении „расстояние“ между двумя „противоположными“ точками на краях какого-нибудь прямолинейного сечения равно только половине длины пути, соединяющего их вокруг сечения.

следний раз, пересечь окружность круга радиуса r, с центром в точке P, если только r достаточно малое число. Из этой точки пересечения пойдем вдоль окружности в обе стороны до первых точек встречи с контуром области, что при достаточно малом r должно иметь место, если только P не есть изолированная граничная точка [1]).

Полученная таким способом дуга круга определяет вполне область K_r. Все сделанные раньше выводы остаются без изменения, если области G и Γ имеют только достижимые граничные точки. Таким образом имеем теорему: *Если контуры областей G и Γ состоят исключительно из достижимых граничных точек, то при конформном отображении внутренних областей друг на друга, контуры этих областей будут тоже находиться во взаимно однозначном и непрерывном соответствии.* Теорема о равномерной непрерывности отображающей функции в каждой из этих областей тоже остается справедливой. При этом понятие о непрерывности следует построить на вышеприведенном обобщенном понятии о расстоянии между точками.

Мы не останавливаемся на теоретико-множественных исследованиях о недостижимых точках контура [2]).

Удовольствуемся указанием на примеры, представленные черт. 2, 3 и 23 (стр. 16 и 126), где недостижимые граничные точки составляют отрезок BC, окружность A и соответственно отрезок $0, \frac{i}{2}$. Эти чертежи показывают нам (на чем подробно останавливаться не будем), что недостижимые граничные точки могут быть соединены в простейшие, неразложимые уже более сечениями части контура, так называемые „*простые концы*". Каждая из только что названных линий представляет собой такой простой конец, который не имеет ни одной, за исключением точки $\frac{i}{2}$ на черт. 23, достижимой граничной точки. Тем же методом, как и для достижимых граничных точек, можно показать, что простые концы области, при конформном отображении

---

[1]) Этот тривиальный исключительный случай в дальнейшем не рассматриваем.

[2]) Ср. *Carathéodory*. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. Bd. 73 (1913), стр. 323—370 и *Kerékjártó*, l. c. 3. Abschnitt, § 2.

одной области на другую, будут находиться во взаимно-однозначном соответствии с простыми концами отображенной области, причем достижимые граничные точки тоже надо причислять к числу простых концов [1]).

Заметим еще в заключение этого параграфа, что теорема о конформном отображении и теорема о соответствии контуров решают также вопрос о существовании таких аналитических функций, Римановы поверхности которых тождественны с данной областью G, другими словами, решают вопрос о существовании таких функций, которые регулярны всюду в области G, но не могут быть продолжены за эту область. Действительно, известны такие регулярные в единичном круге функции, которые не могут быть продолжены за этот круг, так как в окрестности каждой точки его контура они принимают сколь угодно большие значения [2]). Если единичный круг отобразить на область G, то эти аналитические функции перейдут в такие функции, у которых Риманова поверхность будет тождественна с G. В самом деле, такая функция в окрестности каждой граничной точки области G будет принимать произвольно большое значения и следовательно эта функция не может быть продолжена за область G.

---

[1]) Простые концы односвязной области G можно как раз определить при помощи конформного отображения G на круг, рассматривая все последовательности точек круга, сходящиеся к некоторой точке R его контура и называя принадлежащими простому концу точки сгущения всех соответствующих последовательностей отображенных точек в области G.

[2]) Такую функцию представляет например степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Действительно, такой ряд внутри единичного круга очевидно сходится. Если z приближается по радиусу к корню из 1, равному $e^{\frac{2\pi i p}{q}}$ (p, q — целые и не имеют общего делителя, $q > 0$), то сумма ряда стремится к бесконечности, так как ($|z| = \rho$)

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}\right| \geqslant -\left|\sum_{n=0}^{q-1} z^{n!}\right| + \left|\sum_{n=q}^{\infty} z^{n!}\right| \geqslant -q + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}$$

Так как корни из 1 на окружности круга лежат повсюду плотно, то и всякая другая точка этой линии будет особенной.

Функция Грина и предельная задача теории потенциала.

Пусть аналитическая функция $\zeta = f(z) = u + iv$ отображает конформно на единичный круг плоскости ζ односвязную область G плоскости z, содержащую точку $z_0 = x_0 + iy_0$ и ограниченную одной кусочно-гладкой кривой, притом так, что $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$[1]). Вещественная часть $g(x, y;\ x_0, y_0)$ функции $\lg f(z)$ называется тогда *функцией Грина для области* G *с полюсом* x_0, y_0. Функция Грина есть гармоническая функция, которая в окрестности точки x_0, y_0 имеет вид $\lg r + \gamma(x, y;\ x_0, y_0)$, где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и $\gamma(x, y;\ x_0, y_0)$ — регулярная в окрестности полюса гармоническая функция. В остальной части области G функция g будет регулярной гармонической функцией, обращающейся в нуль на контуре. Эти свойства однозначно определяют функцию Грина, так как разность двух таких функций на контуре равна нулю, а внутри контура регулярна и следовательно равна нулю тождественно.

Таким образом, функцию Грина можно получить через решение следующей предельной задачи: требуется найти такую гармоническую, регулярную в области G функцию $\gamma(x, y;\ x_0, y_0)$, которая на контуре области имеет те же граничные значения, что и функция $-\lg r$. Функция Грина получится прибавлением $\lg r$ к этой функции. При конформном отображении области G на другую такую область G^*, функция Грина переходит в функцию Грина для отображенной области. Действительно, если функция $z = h(z^*)$ отображает обратно область G^* в область G, то нормированная функция $F(z^*)$, отображающая область G^* на единичный круг, получается из функции $f(h(z^*))$ простым вращением вокруг начала координат; поэтому $\lg F(z^*)$ и $\lg f(h(z^*)) = \lg f(z)$ имеют одинаковые вещественные части.

Функция Грина имеет простое наглядное физическое значение. Кривые $g = \text{const}$ можно рассматривать как линии уровня некоторого, получающегося следующим образом, потока: пусть верхняя и нижняя стороны области

---

[1]) В предыдущих параграфах простоты ради мы брали $z_0 = 0$.

G покрыты проводящими слоями, изолированными друг от друга всюду, кроме контура, и пусть в точке z_0 находятся на верхней и нижней сторонах области источники мощностью -2π и $+2\pi$ соответственно, наличием которых и обусловливается поток. Если же кривые $g=\text{const}$ будем рассматривать как линии тока, то мы получим вихрь, окружающий точку z_0 так, что одна из линий тока совпадает с контуром области G.

Подобно тому как из отображающей функции $f(z)$ получается функция Грина $g(x, y;\ x_0, y_0)$, можно, обратно, зная функцию Грина, составить отображающую функцию; для этого надо, обозначая через h сопряженную с g гармоническую функцию, положить $f(z)=e^{g+ih}$. Входящее в h произвольное постоянное слагаемое должно при этом быть определено из нормирующего условия $f'(z_0)>0$. Хотя построение функции Грина равносильно решению только некоторой специальной предельной задачи, однако из этого решения можно получить *решение самой общей предельной задачи*, т. е. решение следующей задачи: *на контуре области G заданы непрерывные граничные значения функции; требуется найти такую гармоническую функцию $u(x, y)$, регулярную в G, которая на контуре принимала бы эти значения*. Действительно, достаточно только отобразить область G конформно на единичный круг, что возможно сделать, если известна отображающая функция или, что эквивалентно, если известна функция Грина. При этом, по теореме о соответствии контуров, значения на контуре перейдут в непрерывные значения на окружности круга. Зная эти контурные значения, можно при помощи интеграла Пуассона решить предельную задачу для круга (ср. главу III, § 10). Построенная таким способом гармоническая функция, если ее рассматривать, как функцию, заданную в G, и будет решением $u(x, y)$ поставленной предельной задачи.

Мимоходом укажем на следующее предложение, доказательство которого предоставляем читателю. Функция Грина для единичного круга имеет вид

$$g(x, y;\ x_0, y_0)=\lg r-\lg r_1+\lg\sqrt{x_0^2+y_0^2},$$

где

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$r_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

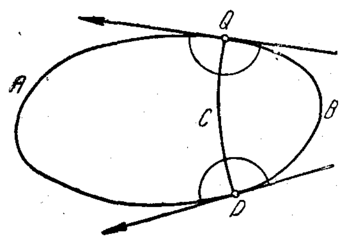
x_0, y_0 — точка внутри круга (полюс), точка x_1, y_1 симметричная ей точка относительно контура круга. Интеграл Пуассона можно представить в виде

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int \varphi(s)\frac{\partial g(x, y; x_0, y_0)}{\partial n}ds,$$

где через $\varphi(s)$ обозначены граничные значения, рассматриваемые как функция от длины дуги s, через $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали и точка x, y описывает окружность круга. При конформном отображении на область G эта формула остается без изменения и дает решение предельной задачи для области G, если только там $\frac{\partial g}{\partial n}$ будет непрерывной функцией длины дуги. Наши рассуждения о предельной задаче естественно наводят на мысль — нельзя ли, обратно, попытаться получить теорему Римана о конформном отображении, доказав сперва существование решения предельной задачи теории потенциала для области G или же существование функции Грина. В следующем параграфе мы покажем вкратце, каким образом это можно сделать, пользуясь „*знакопеременной методой*“ Шварца.

§ 6. Знакопеременная метода Шварца. Свойства непрерывности отображающих функций.

Докажем сперва следующую лемму. Пусть G будет односвязная область в плоскости z, ограниченная одной кусочно-гладкой кривой, C — кусочно-гладкое сечение этой области, соединяющее точки P и Q контура, причем в точках P и Q оно не касается контура (черт. 40). Предположим для простоты, что направления касательных к контуру области G в точках P и Q будут непрерывны. Пусть A и B будут те части контура, на которые он разложен точками P и Q. Предположим далее, что мы можем решить предельную задачу теории потенциала для области G при



Черт. 40.

непрерывных или кусочно-непрерывных [1]) граничных значениях [2]).

Если w — гармоническая функция, регулярная в G, имеющая на дуге A контура значения, равные нулю, а на дуге B — значе́ния, по модулю не превосходящие некоторого постоянного числа M, то существует такое постоянное положительное число $q < 1$, зависящее только от геометрической конфигурации, но не зависящее от выбора граничных значений w на дуге B и числа M, что на дуге C имеет место неравенство

$$|w| \leqslant qM.$$

При доказательстве можно ограничиться предположением, что $M = 1$, так как в противном случае можно было бы рассматривать функцию $\frac{w}{M}$. Пусть W будет такая гармоническая функция, регулярная в G, которая на дуге A обращается в нуль, а на дуге B имеет постоянное значение, равное 1, и поэтому всюду в области G, а в частности, во всех внутренних точках кривой C, будет положительной и меньше 1.

По теореме о максимуме и минимуме всюду в области G будет $-W \leqslant w \leqslant W$. Наша лемма будет поэтому доказана, если убедимся в том, что при приближении к граничным точкам P или Q вдоль кривой C функция W стремится к пределам, меньшим 1. Рассмотрим для этого систему полярных координат, начало которых расположено например в точке P. Угол φ в этой системе будем отсчитывать от того направления на касательной в P, которое направлено в сторону дуги A (черт. 40). Каждой точке контура области G сопоставим соответствующее ей в этой системе координат значение угла φ, меняющееся непрерывно от нуля, если мы обходим контур, выходя из точки P и двигаясь сперва вдоль дуги A, причем положительный отсчет угла φ выбираем так, чтобы значения φ при приближении к точке P со стороны дуги B стремились к $+\pi$, а не к $-\pi$. Внутренним точкам G сопоставим такие

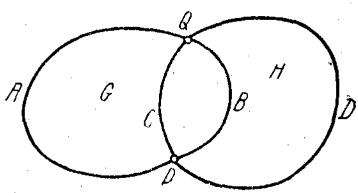
---

[1]) Ср. примечание к стр. 11.

[2]) В последнем случае от решения задачи мы требуем, чтобы при приближении к точкам, где заданная на контуре функция терпит разрыв, значения решения имели бы точки сгущения, лежащие между двумя предельными значениями контурной функции в точке разрыва (р. стр. 107).

значения φ, которые непрерывно переходят в значения φ на контуре. Функция φ будет тогда гармонической, регулярной во всей области G функцией и ее значения на контуре будут непрерывными всюду, кроме точки P, где они совершают скачок, равный π. Но тогда гармоническая, регулярная в G функция $W - \frac{\varphi}{\pi}$ имеет на контуре значения, непрерывные в точке P, и равна нулю в этой точке[1]). Эта функция непрерывным образом переходит от значений внутри области к значению на контуре в точке P, равному нулю. Так как в окрестности P угол φ для точек кривой C отличен от 0 и от π, то при приближении вдоль кривой C к точке P функция W будет стремиться к такому граничному значению, которое лежит между 0 и 1, с исключением этих границ. Так как то же самое относится и к точке Q, то функция W на кривой C будет всюду оставаться меньше некоторого положительного числа q, которое меньше 1. Таким образом, лемма доказана.

„*Знакопеременная метода*" Шварца позволяет теперь решить предельную задачу теории потенциала для области K, составленной из двух таких областей G и H, для каждой из которых эта задача уже может быть решена. Области G и H предположим односвязными и ограниченными кусочно-гладкими кривыми, состоящими из гладких кусков (черт. 41).



Черт. 41.

Пусть эти области имеют общую односвязную часть, ограниченную дугой контура G и дугой контура H. Область K состоит из всех точек, которые принадлежат хотя бы одной из областей G или H. Назовем через B дугу контура области G, лежащую в H, а оставшуюся часть этого контура обозначим через A; соответствующие дуги контура области H обозначим через C и D. Дуги B и C пусть пе-

[1]) Укажем здесь на то, что этот искусственный прием позволяет считать доказанной возможность решения предельной задачи при кусочно-непрерывных граничных значениях, как только эта возможность доказана для непрерывных граничных значений. Действительно, прибавлением функций вышеуказанного типа кусочно-непрерывные граничные значения можно превратить в непрерывные.

ресекаются между собой под углом, отличным от 0 и от π. Предположим для простоты, что в точках пересечения P и Q направления касательных к контурам областей G и H непрерывны.

Предположим, что вдоль всего контура области K заданы какие-нибудь непрерывные граничные значения, меньшие по абсолютной величине постоянного числа M. Эти значения дополним какими нибудь произвольными значениями, распределенными непрерывно вдоль дуги B, однако так, чтобы вдоль всего контура области G граничные значения были непрерывны и чтобы все эти значения были по абсолютной величине меньше M. Решая теперь предельную задачу для области G с этими граничными значениями, найдем некоторую регулярную гармоническую функцию u_1. Всюду в области G будем иметь, что $|u_1| < M$. Значения функции u_1 на дуге C вместе с заданными раньше значениями на дуге D образуют на контуре области H непрерывную граничную функцию, абсолютная величина которой меньше M. Пользуясь этой функцией, решим предельную задачу для области H при помощи гармонической функции v_1, регулярной в H; абсолютные значения этой функции в H будут тоже меньше M, а значения функции v_1 вдоль дуги B будут опять непрерывны. Эти последние значения вместе с заданными раньше значениями, распределенными вдоль дуги A, определяют в области G новую гармоническую функцию u_2. Таким способом мы составим бесконечную последовательность функций u_1, v_1 u_2, $v_2 \ldots$ Мы утверждаем, что последовательности u_n и v_n равномерно сходятся соответственно в областях G и H и что предельная функция в области K будет решением предельной задачи для заданных первоначально значений на контуре этой области.

Для доказательства обозначим через v_0 первоначально выбранные значения на дуге B. Функция $u_2 - u_1$ на дуге A принимает граничные значения, равные нулю, а на дуге B — значения, равные $v_1 - v_0$, т. е. меньшие по абсолютной величине числа $2M$. На основании нашей леммы, вдоль дуги C будем иметь, что

$$|u_2 - u_1| < 2qM,$$

где q обозначает положительную правильную дробь, зависящую только от геометрической конфигурации. Точно также граничные значения разности $v_2 - v_1$ вдоль кривой D равняются нулю, а вдоль кривой C равны $u_2 - u_1$ и следовательно будут меньше по абсолютному значению числа $2qM$. Поэтому вдоль кривой B имеем, что

$$|v_2 - v_1| < 2qq'M,$$

где q' — другая правильная положительная дробь.

Рассуждая также далее, получаем на дуге C

$$|u_{n+1} - u_n| < 2q^n q'^{n-1} M$$

и соответственно на дуге B

$$|v_{n+1} - v_n| < 2(qq')^n M.$$

Обозначая через q_0 наибольшее из чисел q и q', перепишем эти неравенства так:

$$|u_{n+1} - u_n| < 2q_0^{2n-1}M, \quad |v_{n+1} - v_n| < 2q_0^{2n}M.$$

Но отсюда непосредственно следует равномерная сходимость последовательности функций u_n в области G и последовательности функций v_n в области H, а также и совпадение обеих предельных функций в общей части областей G и H. Эта предельная функция следовательно и будет той гармонической, регулярной в области K функцией, которая решает предельную задачу.

Мы воспользуемся теперь этой „знакопеременной методой", причем будем исходить из круговых областей. Так как предельная задача для круга уже решена при помощи интеграла Пуассона, то отсюда следует возможность ее решения для области, образованной двумя частично налегающими друг на друга кругами[1]), а также для области, образованной несколькими кругами (если только три из окружностей этих кругов не проходят через одну точку или две из них не касаются друг друга). В частности, следовательно, доказано существование функции Грина для каждой из таких областей.

Для построения функции Грина в произвольной односвязной области требуется совершить еще один предельный переход. Мы имеем в виду доказать следующее предло-

---

[1]) В главе IV, § 8, был уже получен простым способом этот результат для кругового двуугольника.

жение. Пусть G_1, G_2, $G_3, \ldots$ будет последовательность односвязных областей, содержащих нулевую точку, лежащих в данной области G и сходящихся к области G; это значит, что при любом достаточно большом n каждая точка контура области G_n находится от контура области G на произвольно малом расстоянии, т. е., что то же, что любая точка области G при всех достаточно больших n будет лежать внутри G_n (и поэтому каждая точка контура области G находится на произвольно малом расстоянии от контура области G_n). Пусть $f_n(z)$ будет функция, равная нулю при $z=0$, имеющая в этой точке положительную производную и отображающая область G_n конформно на единичный круг плоскости ζ. *При этих условиях, в области G существует функция*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z),$$

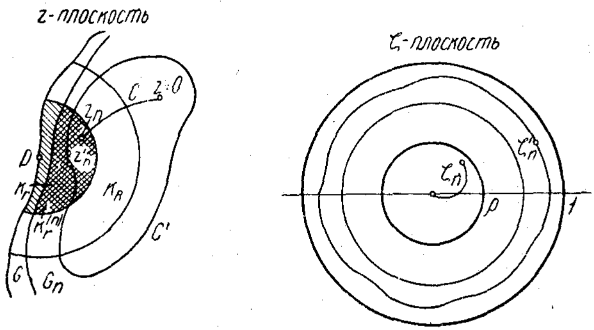
которая отображает эту область на единичный круг так, что $f(0)=0$, $f'(0)>0$.

Эта теорема позволяет утверждать существование отображающей функции для предельной области G, если известно существование таких функций для аппроксимирующих областей. Так как каждую односвязную область G можно рассматривать как предельную область последовательности таких областей G_n, каждая из которых лежит в G и образована конечным числом кругов [1]), то из этой теоремы и из существования функции Грина для каждой такой круговой области вытекает существование отобра-

[1]) Такие области G_n можно получить так: покроем всю плоскость сеткой квадратов, стороны которых параллельны координатным осям, и будем стороны этих квадратов неограниченно делить пополам, так что будут получаться квадраты со сторонами $1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots$ Представим себе, что около каждого из этих квадратов описан круг; за область G_n, начиная с некоторого n, возьмем наибольшую область, лежащую в G, содержащую нулевую точку и образованную кругами, соответствующими квадратам со стороной $\frac{1}{2^n}$. Для того чтобы были выполнены предположения, сделанные выше при изложении знакопеременной методы Шварца, надо подвергнуть эти круги предварительно некоторому преобразованию подобия (хотя бы в масштабе 1 : 1,1) относительно их центров.

жающей функции, а вместе с тем и функции Грина также и для области G.

Доказательству нашей теоремы предпошлем некоторое более общее предложение. Пусть G_n, G и $f_n(z)$ будут определенные выше области и функции, тогда каждому произвольно малому положительному числу h будет соответствовать такое, зависящее только от h, но не зависящее от n и стремящееся к нулю вместе с h число $\delta(h)$, что отображенные точки $f_n(z)$ каждой точки z области G_n будут находиться от окружности единичного круга на расстоянии не большем чем $\delta(h)$, если точка z находится от контура области G_n на расстоянии не большем h.



Черт. 42.

Проведем доказательство, опираясь на изложенное в § 4 о соответствии контуров. Если бы наше утверждение было неверным, то существовала бы такая последовательность точек z_n (где z_n — точка области G_n), сходящаяся к некоторой граничной точке P области G (мы опускаем, в случае нужды, некоторые аппроксимирующие области), что значения функций $\zeta_n = f_n(z_n)$ лежали бы внутри круга радиуса $\rho < 1$ с центром в нулевой точке плоскости ζ (черт. 42). Соединим точку ζ_n с точкой $\zeta = 0$ какой-нибудь непрерывной кривой, лежащей в круге $|\zeta| < \rho$. Кривая C, ее отображение в области G_n, будет соединять точку z_n с точкой $z = 0$.

С другой стороны, при каждом достаточно большом n, можно выбрать в области G_n такую точку z'_n, которая настолько близко расположена к контуру области G_n, что соответствующая точка $\zeta_n' = f_n(z_n')$ находится на сколь угодно малом расстоянии от окружности единичного круга; например, лежит вне круга

$$|\zeta| = \frac{1+\rho}{2}.$$

При этом точки z_n' можно выбрать лежащими настолько близко к соответствующим точкам z_n, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} (z_n - z_n') = 0$$

и следовательно чтобы последовательность точек ζ_n' сходилась к точке P. Проведем вне круга

$$|\zeta| = \frac{1+\rho}{2}$$

такую замкнутую кривую, проходящую через точку z_n', которая окружает точку $\zeta = 0$. Этой кривой соответствует в области G_n некоторая кривая C', проходящая через точку z_n' и окружающая точку $z = 0$. Пусть будет K_r определенная нами в § 4 часть области G, содержащая на своем контуре точку P. Кривой L, при помощи которой была построена такая область в § 4, здесь может быть совершенно произвольная кривая, проходящая внутри G и оканчивающаяся в точке P. Пусть $K_r^{(n)}$ будет та часть области K_r, которая принадлежит G_n, и пусть R такое положительное постоянное число, что точка $z = 0$ лежит вне круга K_R. Точки z_n и z_n' будут тогда лежать в $K_r^{(n)}$, если только r не меньше некоторой величины $\varepsilon = \varepsilon(n)$, которая стремится к нулю, когда n возрастает до бесконечности. Для всех достаточно больших значений n будем иметь, что $\varepsilon(n) < R$. Если $\varepsilon(n) \leqslant r \leqslant R$, то кривые C и C' будут пересекать дугу окружности, ограничивающую $K_r^{(n)}$. На этой дуге окружности колебание функции $f_n(z)$ будет, следовательно, больше чем $\frac{1-\rho}{2}$. Тем же способом, как и в § 4, можно показать, что это противоречит допущению $\rho < 1$. Таким образом, требуемое свойство равномерности доказано.

Из этой теоремы можно следующим образом вывести указанное выше свойство непрерывности отображающих функций. Рассмотрим лежащую внутри G наибольшую область G', содержащую нулевую точку и такую, что все ее точки находятся от контура области G на расстояниях, больших некоторого достаточно малого положительного числа h. Число h выберем настолько малым, чтобы построенная выше величина $\delta(h)$ была бы меньше 1. Если m и n достаточно большие числа, то область G' вместе со своим контуром будет целиком находиться внутри областей G_m и G_n. Величины $|f_n(z)|$ и $|f_m(z)|$ на контуре области G' будут находиться между 1 (исключительно) и $1-\delta(h)$ (включительно). Отношение $\frac{f_n(z)}{f_m(z)}$ нигде в G' не будет обращаться в нуль. При n и m достаточно больших, на основании теоремы о максимуме и минимуме, будем поэтому иметь равномерно во всей области G', что

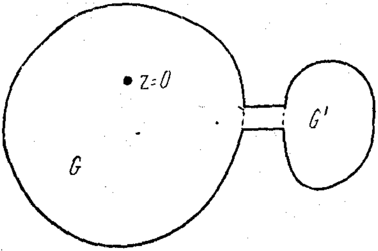
$$1-\delta(h) \leqslant \left|\frac{f_n(z)}{f_m(z)}\right| \leqslant \frac{1}{1-\delta(h)}.$$

Так как h можно выбрать сколь угодно малым, то отсюда видно, что в каждой замкнутой области, лежащей внутри G, величина $\left|\frac{f_n(z)}{f_m(z)}\right|$ будет равномерно стремиться к 1. Сходимость последовательности функций $f_n(z)$ к некоторой предельной функции $f(z)$, для которой $f(0)=0$, $f'(0)>0$ и которая отображает область G на единичный круг, доказывается дальше так же, как и в § 2[1]).

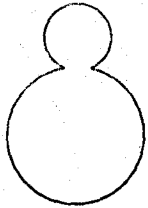
Вопрос о непрерывной зависимости отображающей функции от области, имевший решающее значение в последних рассуждениях, можно исследовать, пользуясь указанными методами, значительно дальше. Рассмотрим например последовательность областей, полученных от соединения областей G и G' перекладной шириною $\frac{1}{n}$ (черт. 43) в одну

[1]) Укажем здесь еще на другой метод доказательства свойств непрерывности, в котором существенную роль играет принцип сходимости, примененный как к функциям $f_n(z)$, так и к функциям им обратным. Ср. *L. Bieberbech*, Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten 1913, S. 552—560.

область G_n. Будем затем увеличивать число n до бесконечности. Если точка $z=0$ расположена внутри G, то последовательность отображающих функций $f_n(z)$ будет сходиться в области G к функции $f(z)$, которая отображает область G на единичный круг (причем $f(0)=0$, $f'(0)>0$).



Черт. 43.



Черт. 44.

В области же G' функции будут сходиться к постоянной величине. Доказательство этого предложения и его обобщений предоставляем читателю[1]).

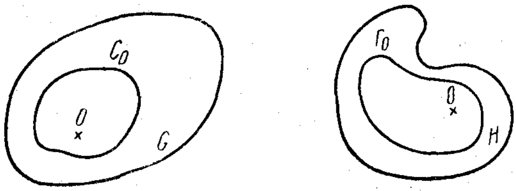
§ 7. Теоремы искажения.

С геометрической точки зрения *лемму Шварца* из главы III, § 1, можно сформулировать так: если функция $\zeta=f(z)$, определенная в круге $|z|<1$, конформно отображает этот круг на некоторую область, целиком лежащую внутри круга $|\zeta|<1$ и притом так, что точке $z=0$ соответствует точка $\zeta=0$, то расстояние отображаемой точки ζ от точки $\zeta=0$ не больше расстояния отображаемой точки z от точки $z=0$. Равенство этих расстояний имеет место тогда и только тогда, если отображение состоит из простого вращения вокруг точки $z=0$. Это предложение налагает определенное ограничение на „*искажения*", получаемые при конформном отображении, производимом функцией $\zeta=f(z)$. Это ограничение имеет место равномерно для целого класса функций, причем указанные границы достигаются на самом деле некоторыми вполне определенными функциями этого

[1]) Полезно проследить этот процесс в явной форме для конформного отображения кругового двуугольника, изображенного на черт. 44, когда угловые точки стремятся сблизиться друг с другом.

класса[1]). Обратно, если точки z_0 и ζ_0 лежат внутри единичного круга и если $|\zeta_0| \leqslant |z_0|$, то существует всегда функция из нашего класса, которая точку z_0 преобразует в точку ζ_0; это достигается уже подходящими вращением и преобразованием подобия относительно точки $z=0$.

Лемма Шварца выражает таким образом то обстоятельство, что преобразования, принадлежащие к совокупности тех конформных отображений $\zeta=f(z)$, которые единичный круг плоскости z преобразуют в область, лежащую внутри единичного круга плоскости ζ, оставляя точку $z=0$ неподвижной, могут отобразить данную точку z_0 в любую точку круга $|\zeta| \leqslant |z_0|$ и только в точку такого круга.



Черт. 45.

Комбинируя этот результат с общей теоремой Римана, непосредственно приходим к обобщению, данному Lindelöf'ом, которое имеет многочисленные приложения. Пусть G будет односвязная область в плоскости z и H — такая же область в плоскости ζ (черт. 45). Пусть обе области содержат точки $z=0$ и $\zeta=0$ соответственно. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех функций $\zeta=f(z)$, регулярных в области G, обращающихся в нуль при $z=0$ и отображающих каждую точку области G в некоторую точку области H. Представим себе, что в областях G и H

[1]) Уже представление производных от функции $f(z)$ при помощи интеграла, в который входят граничные значения $f(z)$ [глава II, § 7, (16)] показывает, что должны иметь место теоремы, дающие такие ограничения. Из этого представления следует, что если контурные значения ограничены по модулю числом M, то величины $|f'(z)|$, $\mathfrak{R}f'(z)$, $\mathfrak{J}f'(z)$ будут во всякой замкнутой области, лежащей целиком внутри рассматриваемой области, ограничены числами, зависящими только от M; отсюда, в свою очередь, могут быть найдены границы для искажений, получающихся при отображении такой замкнутой области какой-либо функцией из нашего множества функций.

около точек $z=0$ и $\zeta=0$ соответственно проведены линии уровня функций Грина этих областей для нулевых точек, т. е. проведены такие кривые, которые при отображении областей G и H на единичный круг плоскости t (при том так, что точки $z=0$ и $\zeta=0$ переходят в точку $t=0$) соответствуют концентрическим окружностям $|t|=\text{const}<1$. Через каждую точку области G и через каждую точку области H проходит одна и только одна такая линия уровня. Линии уровня в области H соответствуют взаимно однозначным образом линиям уровня в области G, причем соответствующие линии уровня отвечают той же самой окружности $|t|=\text{const}$.

Докажем теперь следующую теорему.

Пусть z_0 какая-нибудь точка области G и C_0 — линия уровня функции Грина, проходящая через эту точку. Пусть далее Γ_0 линия уровня области H, соответствующая линии C_0. Всякая функция $\zeta=f(z)$, принадлежащая множеству $\mathfrak{M}$, преобразует точку z_0 в такую точку области H, которая лежит внутри или на кривой Γ_0. При заданной линии C_0 совокупность всех значений, которые может принимать $f(z_0)$, когда точка z_0 лежит где-либо на кривой C_0, а $f(z)$ есть произвольная функция из множества $\mathfrak{M}$, совпадает с замкнутой областью, ограниченной кривой Γ_0.

Доказательство этой теоремы сразу получится, если мы отобразим область G на единичный круг $|t|<1$, так что точка $z=0$ переходит в точку $t=0$, а область H отобразим таким же образом на единичный круг $|\tau|<1$. При этом отображении функция $\zeta=f(z)$ перейдет в функцию $\tau=\varphi(t)$, которая все точки круга $|t|<1$ преобразует в точки круга $|\tau|<1$ и удовлетворяет условию $\varphi(0)=0$. Прилагая к этой функции лемму Шварца и перенося содержание последней на области G и H, легко получаем высказанную выше теорему.

Из приложений этого „*принципа Lindelöf*'а“ укажем на два особо важных, подробное исследование которых предоставляем читателю.

1) Если $f(z)$ регулярная при $|z|<1$ функция и $\Re f(z)<a$, где a — постоянное, то при помощи принципа Lindelöf'а можно получить некоторую оценку для $|f(z)|$ в круге $|z|\leqslant\rho$, где $0<\rho<1$ (*неравенство Carathédory*).

2) Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant R$

и $-1 \leqslant \Re f(z) \leqslant 1$, то, пользуясь принципом Lindelöf'а, можно получить формулы (3) и (4) из главы III, § 9[1]).

Из дальнейших приложений укажем еще на применение этого принципа при доказательствах теорем Schottky, Landau и Picard'а, которые будут даны нами в главе VII, § 6.

Несколько иного типа будут следующие предложения искажения, которые в существенных чертах принадлежат Koebe. Пусть в плоскости z расположен единичный круг (радиуса 1 с центром в начале координат). Пусть G будет соответствующая однолистная отображенная область в плоскости ζ, содержащая точку $\zeta = 0$. Отображающую функцию $\zeta = f(z)$ нормируем условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Предположим даже, что $f'(0) = 1$, что очевидно не ограничивает общности рассуждений. Функция $f(z)$ будет тогда иметь вид

$$\zeta = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

При этих условиях[2]) докажем следующие предложения искажения. *Если $r < 1$ и $|z| = r$, то имеет место оценка*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant f'(z) \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{2}$$

и для $f(z)$

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}; \tag{3}$$

отсюда, переходя к пределу $\lim r = 1$, *видим, что отображенная область G всегда содержит круг $|\zeta| < \frac{1}{4}$. В обеих*

---

[1]) Как раз таким способом протекало старое доказательство Koebe в работе, цитированной на стр. 102, примечание 1.

[2]) Если не брать нормирующего условия $f'(0) = 1$, то в формулу (2) вместо *абсолютного* множителя искажения $|f'(z)|$ войдет *отношение* искажений $\left|\frac{f'(z)}{f'(0)}\right|$.

формулах знак равенства имеет место только для функции вида

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}, \tag{4}$$

(α — вещественное)[1].

Формуле (2) соответствует для аргумента $f'(z)$ так называемая *„теорема вращения"*

$$\left| \arg f'(z) \right| \leqslant 2 \lg \frac{1+r}{1-r}. \tag{5}$$

Доказательству этих предложений[2] предпошлем следующую лемму (*„теорему площадей"*). Если положить

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots, \tag{6}$$

где, как легко вычислить

$$b_0 = -a_2, \quad b_1 = a_2^2 - a_3,$$

---

[1]) При $\alpha = 0$ эта функция отображает единичный круг на плоскость ζ, разрезанную вдоль вещественной положительной оси от точки $z = \frac{1}{4}$. Если среди функций вида (1), подчиненных условию, чтобы они отображали единичный круг на однолистную область, искать такую функцию, которая дает наибольшее или наименьшее искажение, то решение такой задачи будет дано функцией, удовлетворяющей еще как раз тому условию, чтобы при некоторых произвольно малых вариациях она не давала больше однолистного отображения. Это соответствует некоторому общему принципу, относящемуся к учению о maxima и minima при добавочных условиях: если эти добавочные условия имеют форму неравенств, то эти неравенства или не имеют влияния на решение или решение должно быть таким, чтобы в тех неравенствах, которые оказывают влияние на решение, имел бы место знак равенства.

[2]) Предложенное здесь доказательство этих теорем опирается в главной своей части на работу *R. Nevanlinna*: Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises (Oeversikt av Finska Vetensk.-Soc. Förh. Bd. 62 Avd. A., Nr. 7), где указана и дальнейшая литература. Если отказаться от явного задания границ для $|f'(z)|$ и $|f(z)|$, т. е. удовольствоваться только тем, что существуют границы, зависящие только от r, то доказать эти теоремы искажения можно очень просто, опираясь на принцип сходимости (глава III, § 6). В таком виде Koebe впервые высказал эти теоремы и, использовав одно соображение Carathéodory, доказал их, как вспомогательное средство при исследовании общих проблем конформного отображения. Однако нам в исследованиях следующей главы не нужно будет пользоваться теоремами искажения Koebe. Теорему вращения впервые нашел и доказал *Bieberbach*.

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leqslant 1. \qquad (7)$$

Эта теорема, как увидим, выражает то обстоятельство, что функция $\frac{1}{f(z)}$ отображает единичный круг на однолистную область B, содержащую внутри себя точку $z=\infty$.

Для доказательства рассмотрим круговое кольцо $\rho<|z|<1$, где $0<\rho<1$. Функция $\frac{1}{f(z)}=\xi$ отображает это кольцо на некоторую область B_ρ плоскости ξ, ограниченную, с одной стороны, контуром области B, с другой стороны, некоторой кривой

$$\xi=\frac{1}{\rho e^{\varphi i}}+b_0+b_1\rho e^{i\varphi}+\rho^2\omega(\rho,\ \varphi), \qquad (8)$$

заданной в функции параметра φ, где $\omega(\rho,\ \varphi)$ ограничена при переменных ρ и φ. Так как уравнение

$$\xi e^{-i\frac{\psi}{2}}=\frac{1}{\rho}e^{-i\left(\varphi+\frac{\psi}{2}\right)}+|b_1|\,\rho e^{i\left(\varphi+\frac{\psi}{2}\right)}, \quad (\psi=\arg b_1),$$

изображает эллипс с полуосями $\frac{1}{\rho}+|b_1|\,\rho$, и $\frac{1}{\rho}-|b_1|\,\rho$, то площадь F области, лежащей внутри кривой (8), будет отличаться от $\frac{\pi}{\rho^2}$ меньше чем на некоторое ограниченное число, умноженное на ρ. Площадь области B_ρ равна

$$\int\limits_\rho^1\int\limits_0^{2\pi}|\xi'|^2\,r\,dr\,d\varphi=\pi\left\{\frac{1}{\rho^2}-1+\sum_{n=1}^{\infty}n\,|b_n|^2-\sum_{n=1}^{\infty}n\,|b_n|^2\rho^{2n}\right\},$$

как показывает простое вычисление. Если эту величину вычтем из $\frac{\pi}{\rho^2}$ и заставим потом ρ стремиться к нулю, то получим величину площади той части плоскости ξ, которая расположена вне области B. Так как эта величина не может быть отрицательной, то отсюда непосредственно и получается формула (7).

Воспользуемся теперь формулой (7) для того, чтобы получить некоторую оценку для коэффициента a_2. Прежде всего, мы утверждаем, что

$$|a_2| \leqslant 2, \tag{9}$$

и что знак равенства имеет место только для функции

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2} \quad (\alpha \text{ — вещественное}).$$

Для доказательства воспользуемся следующим искусственным приемом. Функция

$$\sqrt{\frac{1}{f(z^2)}} = \frac{1}{z} + \beta_1 z + \ldots, \beta_1 = \frac{b_0}{2},$$

как легко видеть, отображает единичный круг $|z| \leqslant 1$ тоже на однолистную область. Так как эта функция очевидно равна 1, деленной на некоторую функцию вида (1), то по теореме площадей

$$|\beta_1|^2 = \frac{|b_0|^2}{4} \leqslant 1;$$

откуда и получается оценка (9), так как $b_0 = -a_2$.

В силу формулы (7) равенство $|\beta_1| = 1$ может иметь место только тогда, когда $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = 0$. Следовательно, $|a_2| = 2$ тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\frac{1}{f(z^2)}} = \frac{1}{z} + e^{i\alpha} z \quad (\alpha \text{ — вещественное})$$

или

$$\frac{1}{f(z)} = \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + e^{i\alpha} \sqrt{z}\right)^2,$$

т. е.

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}.$$

Исследуем теперь заданную функцию $f(z)$ в какой-нибудь внутренней точке z_0 единичного круга. Так как отображение однолистное, то $f'(z_0) \neq 0$. Подстановка

$$\xi = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

преобразует круг $|z| < 1$ в круг $|\xi| < 1$ и отображает точку z_0 в точку $\xi = 0$. Имеем

$$z = \frac{\xi + z_0}{1 + \bar{z}_0 \xi}.$$

Положим

$$f^*(\xi) = f\left(\frac{\xi + z_0}{1 + \bar{z}_0 \xi}\right) - f(z_0).$$

Функция $f^*(\xi)$ отображает круг $|\xi| < 1$ на однолистную область, оставляя нулевую точку неподвижной. По формуле Тэйлора имеем

$$f^*(\xi) = (1 - |z_0|^2) f'(z_0) \xi +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)[f''(z_0)(1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 f'(z_0)] \xi^2 + \ldots$$

Таким образом, функция

$$\frac{f^*(\xi)}{(1 - |z_0|)^2 f'(z_0)}$$

регулярна в круге $|\xi| < 1$ и удовлетворяет тем условиям, при которых мы доказали неравенство $|a_2| \leqslant 2$. Поэтому имеем, что

$$\left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leqslant 4.$$

В каждой точке круга $|z| = r$ $(r < 1)$ имеем таким образом

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leqslant \frac{4r}{1 - r^2}$$

и поэтому

$$-\frac{4r - 2r^2}{1 - r^2} \leqslant \Re\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \leqslant \frac{4r + 2r^2}{1 - r^2},$$

$$\left| \Im\left(z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \right| \leqslant \frac{4r}{1 - r^2}.$$

Но

$$\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\lg|f'(z)|,\quad \Im\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)=r\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z),$$

откуда

$$-\frac{4-2r}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\lg|f'(z)|\leqslant\frac{4+2r}{1-r^2}$$

$$-\frac{4}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(z)\leqslant\frac{4}{1-r^2}.$$

Интегрируя от 0 до r, получаем

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

и соответственно

$$|\arg f'(z)|\leqslant 2\lg\frac{1+r}{1-r},$$

что и доказывает теорему искажения (2) и теорему вращения (5).

Формула (3) без труда получается из формулы (2) при помощи еще одного интегрирования [1]).

В связи с теоремами Koebe укажем еще, что получается группа еще более общих теорем искажения, если отказаться от предположения однолистности функции $f(z)$ в единичном круге. Особую роль в этом круге вопросов играет теорема Bloch'а, которую приведем без доказательства.

Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|\leqslant 1$ и пусть $f'(0)=1$. Поверхность Римана, на которую функция $f(z)$ отображает единичный круг плоскости z, в одном из своих листов содержит открытую круговую область радиуса B, где B — некоторая абсолютная положительная постоянная. Например теорема верна при $B=\frac{1}{8}$.

---

[1]) Для того, чтобы доказать левую часть неравенства (3), надо интегрировать в круге $|z|<1$ по такому пути, который соответствует прямолинейному отрезку плоскости ζ, соединяющему точку $\zeta=0$ с ближайшей к ней точкой кривой, являющейся отображением окружности $|z|=r$ в плоскости ζ.

§ 8. Приложения принципа максимума.

Принцип максимума утверждает (гл. III, § 1), что модуль функции, аналитической в замкнутой области, будет в этой области меньше постоянного числа M, если значения функции на контуре ограничены по модулю этим числом. Для некоторых приложений таких оценок важно наличие возможности сделать подобный вывод в одном очень общем случае и тогда, когда о значениях функции на контуре делаются более слабые предположения, а именно когда для одной отдельной точки контура отбрасывается требование регулярности и ограниченности функции. Особенно просто можно формулировать такую теорему по Phragmén'y и Lindelöf'y [1]), если за замкнутую область взять вертикальную „полуполосу", а за исключительную точку принять бесконечно удаленную точку этой полуполосы, что, по теореме Римана, всегда возможно сделать при помощи подходящего преобразования. Имеем тогда следующую теорему, которая часто встречается в новейших исследованиях.

Пусть в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ *определена неравенствами*

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y \geqslant y_0 (> 0)$$

(черт. 46) *полуполоса* H. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в* H *и на контуре* H *ограничена*:

$$|f(z)| \leqslant c, \text{ при } \begin{cases} x = x_1, \ y \geqslant y_0 \\ x = x_2, \ y \geqslant y_0 \\ y = y_0, \ x_1 \leqslant x \leqslant x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть наконец существуют две такие независящие от x *постоянные величины* C *и* γ, *что в* H *имеет место неравенство*

$$|f(z)| \leqslant Ce^{\gamma y};$$

тогда внутри области H *тоже будет иметь место неравенство*

$$|f(z)| \leqslant c.$$

---

[1]) Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier". Acta math. 31 (1908), стр. 381.

Доказательство. При заданном $\varepsilon > 0$ функция

$$g(z) = e^{\varepsilon z^2} f(z)$$

будет тоже регулярной в H. В этой области H мы очевидно имеем, что

$$|g(z)| = e^{\varepsilon \Re(z^2)} |f(z)| = e^{\varepsilon(x^2-y^2)} |f(z)| \leqslant e^{\varepsilon(a-y^2)} |f(z)|,$$

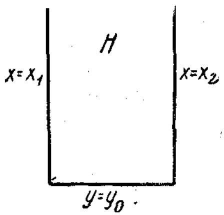
где a обозначает наибольшее из чисел x_1^2 и x_2^2. На контуре области имеем поэтому, что

$$|g(z)| \leqslant e^{\varepsilon a} c;$$

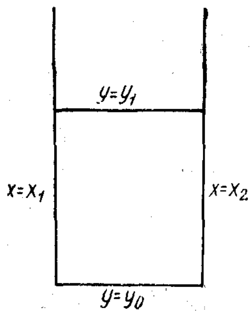
а внутри и на контуре будем иметь, что

$$|g(z)| \leqslant e^{\varepsilon(a-y^2)} Ce^{\gamma y} = Ce^{-\varepsilon y^2 + \gamma y + \varepsilon a}. \tag{2}$$

Так как в квадратном выражении $-\varepsilon y^2 + \gamma y + \varepsilon a$, при достаточно большом $|y|$, первый член является преобладающим, то независящая от x правая часть неравенства (2) будет стремиться к нулю, когда y



Черт. 46.



Черт. 47.

неограниченно возрастает. Таким образом, при достаточно большом y_1, на „поперечном отрезке"

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y = y_1$$

будем иметь оценку (черт. 47)

$$|g(z)| \leqslant ce^{\varepsilon a}. \tag{3}$$

Так как это неравенство очевидно будет справедливо и на остальной части контура прямоугольника $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, то по принципу максимума неравенство (3) будет справедливо всюду внутри этого прямоугольника и следовательно

$$|f(z)| \leqslant ce^{\varepsilon a} e^{\varepsilon (y^2 - x^2)} \leqslant ce^{\varepsilon (a + y^2)}. \tag{4}$$

Так как всякая заданная точка $z = x + iy$ полуполосы H будет принадлежать прямоугольнику $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, если только y_1 выбрано достаточно большим, то неравенство (4) будет справедливо во *всей* полуполосе H и притом при всяком положительном ε. Оставляя z из H без изменения и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$|f(z)| \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} ce^{\varepsilon (a + y^2)} = c,$$

что и доказывает теорему.

Подобный же характер имеет и другое приложение принципа максимума, *теорема Hadamard'а о трех кругах.*

Пусть функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$ или во всей плоскости и не равна тождественно нулю. Пусть при всяком r, где $0 < r < R$ (соответственно, при всяком $r > 0$, если функция целая) $M(r)$ обозначает наибольшее значение $\lg |f(z)|$ внутри и на контуре круга $|z| \leqslant r$. Тогда $M(r)$ есть „выпуклая" функция от $\lg r$; т. е. при $0 < r_1 < r_2 < r_3 (< R)$ всегда имеет место неравенство

$$M(r_2) \leqslant M(r_1) \frac{\lg r_3 - \lg r_2}{\lg r_3 - \lg r_1} + M(r_3) \frac{\lg r_2 - \lg r_1}{\lg r_3 - \lg r_1}.$$

Для доказательства положим

$$u(x, y) = \lg |f(x + iy)|.$$

Обозначим через M_k наибольшее значение $M(r_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ функции $u(x, y)$ на окружности радиуса r_k. Составим гармоническую функцию от x и y

$$u(x, y) + (M_1 - M_3) \frac{\lg r - \lg r_1}{\lg r_3 - \lg r_1},$$

где r обозначает $|x + iy|$. Эта функция на окружности круга r_1 имеет значение $u(x, y)$ и наибольшее ее значение на этой окружности будет очевидно M_1; на окружности круга r_3 эта функция имеет значение $u(x, y) + M_1 - M_3$ и следовательно наибольшее ее значение будет опять M_1

$(=M_3+M_1-M_3)$. Наибольшее ее значение на окружности круга $|z|=r_2$ равно

$$M_2+(M_1-M_3)\frac{\lg r_2-\lg r_1}{\lg r_3-\lg r_1}.$$

Прилагая принцип максимума к круговому кольцу, ограниченному окружностями r_1 и r_3, получим следовательно

$$M_2+(M_1-M_3)\frac{\lg r_2-\lg r_1}{\lg r_3-\lg r_1}\leqslant M_1,$$

$$M_2\leqslant M_1\frac{\lg r_3-\lg r_2}{\lg r_3-\lg r_1}+M_3\frac{\lg r_2-\lg r_1}{\lg r_3-\lg r_1}.$$

Но это и есть то неравенство Hadamard'a, которое мы хотели доказать.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.

Хотя в теореме Римана о конформном отображении мы имеем принцип для образования аналитических функций, а именно: каждой, произвольным образом геометрически определенной, односвязной, однолистной области мы можем сопоставить некоторую отображающую функцию, но об этой функции, за исключением разве лишь ее существования, мы мало что можем сказать. Но если в качестве области, в которую переходит при отображении единичный круг (или, что здесь будет удобнее, верхняя полуплоскость), выбрать достаточно простые геометрические фигуры, а именно области, ограниченные прямолинейными отрезками или дугами окружностей, то получается большой класс важных специальных отображающих функций, для которых при помощи принципа симметрии можно вывести ряд их характерных свойств непосредственно из геометрических свойств отображенных областей. Можно даже дать более или менее явное выражение для таких функций. Настоящая глава посвящена исследованию этого класса функций.

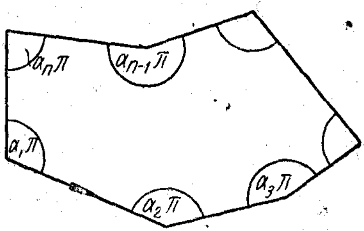
§ 1. Отображение произвольного многоугольника.

Займемся сперва разысканием явного выражения такой функции $z=\varphi(\zeta)$, которая верхнюю полуплоскость ζ отображает конформно на внутренность прямолинейного многоугольника, расположенного в плоскости z. Пусть Π будет такой n-угольник в плоскости z и пусть $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots \alpha_n\pi$ $(0<\alpha_k<2, \alpha_k\neq 1)$ будут его углы, так что $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n-2$ (черт. 48). Вершинами Π пусть будут точки $z=b_1, \ldots z=b_n$.

Для того чтобы найти явное выражение отображающей функции $z=\varphi(\zeta)$, заметим, что наш многоугольник при параллельном переносе и при вращении переходит в конгруэнтную фигуру, в то время как, с другой стороны, выражение $\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}$ остается инвариантным относительно всех преобразований вида

$$z^*=\varphi^*=\alpha\varphi+\beta=\alpha z+\beta,$$

где α, β—произвольные комплексные постоянные ($\alpha\neq 0$), т. е. $\frac{\varphi^{*''}}{\varphi^{*'}}=\frac{\varphi''}{\varphi'}$, если φ^* и φ связаны между собой преобразованием такого вида. Обозначим через $a_1, a_2, \ldots a_n$ n точек вещественной оси плоскости ζ, которые соответствуют n вершинам многоугольника Π. Конформное отображение (на плоскость ζ) многоугольника Π продолжим по принципу симметрии в нижнюю полуплоскость. Зеркальному изображению многоугольника Π в одной из его сторон соответствует переход от верхней полуплоскости ζ к нижней полуплоскости ζ.



Черт. 48.

Новое зеркальное отражение Π в одной из его сторон приводит дважды перевернутый многоугольник в такое положение, которое получается из первоначального вращением и последующим параллельным переносом. Одновременно переходим в плоскости ζ опять в верхнюю полуплоскость, т. е. возвращаемся к первоначальным значениям ζ. Таким образом, четное число инверсий многоугольника в его сторонах приводит всегда опять к тем же самым значениям ζ, в то время как для функции $z=\varphi(\zeta)$ получается целое линейное преобразование $z^*=\alpha z+\beta$, где $\alpha\neq 0$ и даже $|\alpha|=1$. Но при таком преобразовании выражение $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ остается инвариантным и будет следовательно однозначной функцией во всей плоскости ζ. Так как φ' и φ'' во всех точках, отличных от $\zeta=a_1$, $\zeta=a_2, \ldots, \zeta=a_n$, регулярны и кроме того φ' может обращаться в нуль только в точках, являющихся отображениями вершин многоугольника, т. е. опять-таки лишь в точках $\zeta = a_1, \ldots, \zeta = a_n$, то функция $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ только в этих точках может иметь особые точки. Для того чтобы определить природу таких особых точек, предположим сначала, что эти точки отличны от точки $\zeta = \infty$ и рассмотрим одну из них: $\zeta = a_k$. В точке $\zeta = \infty$ функция $\varphi(\zeta)$ будет тогда регулярной. Докажем, что $\zeta = a_k$ будет простым полюсом функции $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ [1]). Введем для этого новую переменную $t = (z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Углу, равному π, с вершиною в точке $t = 0$ (обе стороны которого, являясь продолжением одна другой, образуют прямую линию), соответствует тогда угол, равный $\alpha_k \pi$, с вершиной в точке $z = b_k$, т. е. опять угол, равный π, в точке $\zeta = a_k$. Зеркальному отражению полуплоскости ζ в вещественной оси соответствует такое же отражение полуплоскости t и обратно, так что t будет в окрестности точки $t = 0$ взаимно однозначной функцией от ζ, которая в точке $\zeta = a_k$ (в силу того, что $\lim\limits_{\zeta \to a_k} z = b_k$) должна иметь простой (в силу взаимной однозначности) нуль. Таким образом, в окрестности точки $\zeta = a_k$ имеет место разложение вида

$$t = (z - b_k)^{\frac{1}{\alpha_k}} = c(\zeta - a_k)\ \{1 + c_1(\zeta - a_k) + \ldots\},$$

где $c \neq 0$; отсюда следует

$$z - b_k = c^*(\zeta - a_k)^{\alpha_k}\ \{1 + c_1^*(\zeta - a_k) + \ldots\}\quad (c^* \neq 0).$$

Наконец, для $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ будет иметь место равенство

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \frac{\alpha_k \dot{-} 1}{\zeta - a_k} + \mathfrak{P}(\zeta - a_k), \tag{1}$$

где $\mathfrak{P}(\zeta - a_k)$ обозначает регулярный в точке a_k степенной ряд. Аналогичное разложение имеет место для каждой из остальных точек $a_1, a_2, \ldots a_n$ (которые предполагаем сперва отличными от ∞), так что $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ будет однозначная функция, регулярная всюду в плоскости ζ, за исключением

[1]) Чем еще раз будет доказана однозначность $\frac{\varphi''}{\varphi'}$.

конечного числа полюсов. По теореме из главы V, § 4 эта функция будет *рациональной* функцией от ζ и будет следовательно в силу равенства (1) иметь вид [1])

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}=\frac{z''}{z'}=\frac{\alpha_1-1}{\zeta-a_1}+\frac{\alpha_2-1}{\zeta-a_2}+\ldots+\frac{\alpha_n-1}{\zeta-a_n}.$$

Отсюда, интегрируя, получаем для искомой отображающей функции многоугольника

$$z=\varphi(\zeta)=c\int_0^{\zeta}(t-a_1)^{\alpha_1-1}(t-a_2)^{\alpha_2-1}\ldots(t-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt+c', \quad (2)$$

где c, c' — произвольные комплексные постоянные.

Поставленное выше ограничение, состоящее в том, что все точки a_k предполагаются отличными от точки $\zeta=\infty$, можно легко устранить при помощи линейного преобразования. Преобразуем, например, точку a_n в бесконечно удаленную точку, заменив ζ на $a_n-\frac{1}{\zeta}$ и соответственно вводя в интеграле новую переменную τ соотношением $t=-\frac{1}{\tau}+a_n$. Пользуясь равенством $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n-2$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
z=c\int_0^{\zeta}\left(a_n-a_1-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_1-1}\left(a_n-a_2-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_2-1}\ldots\\
\ldots\left(-\frac{1}{\tau}\right)^{\alpha_n-1}\frac{d\tau}{\tau^2}+c_1'=c_1\int_0^{\zeta}(\tau-a_1')^{\alpha_1-1}(\tau-a_2')^{\alpha_2-1}\ldots\\
\ldots(\tau-a_{n-1}')^{\alpha_{n-1}-1}\,d\tau+c_1',
\end{aligned}\right\}(3)$$

[1]) Так как $\varphi(\zeta)$ предполагается на бесконечности регулярной, то в окрестности точки $\zeta=\infty$ возможно разложение по степеням $\frac{1}{\zeta}$. Если $\frac{c_\nu}{\zeta_\nu}$ будет первый, отличный от нуля член с положительным ν, то в $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ от этого члена войдет слагаемое $-\frac{\nu+1}{\zeta}$. Таким образом, отношение $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ обращается на бесконечности в нуль, так что в приведенном выше выражении для $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ не нужно добавлять никакой отличной от нуля постоянной.

где $a_1', a_2', \ldots, a_{n-1}'$ означают некоторые постоянные. Заменяя τ новой переменной $a\tau + b$ $(a \neq 0)$, мы сможем двум из постоянных $a_1', \ldots, a_{n-1}'$ придать произвольные, отличные друг от друга, значения.

Пользуясь линейным преобразованием, можно перейти от верхней полуплоскости к единичному кругу, как к отображенной области. Так например, для отображения правильного n-угольника плоскости z с центром в точке $z=0$ $(n \geqslant 3)$ на единичный круг получаем функцию.

$$z = \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[n]{(1-t^n)^2}}.$$

Заметим далее, что так же легко осуществить конформное отображение области *внешней* для многоугольника на полуплоскость или на единичный круг. В качестве примера, разобрать который также можно предоставить читателю, укажем на функцию

$$z = \int_1^\zeta \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\, dt,$$

которая область, внешнюю для квадрата в плоскости z, отображает конформно на внутреннюю область единичного круга и при том так, что точке $z = \infty$ соответствует точка $\zeta = 0$ [1]).

§ 2. Функции прямолинейного треугольника.

Как первый частный случай конформного отображения произвольного многоугольника, рассмотрим функцию, отображающую прямолинейный треугольник. По формуле (3) § 1 получим отображающую функцию в виде

$$z = c \int_0^\zeta t^{\alpha_1 - 1} (1-t)^{\alpha_2 - 1}\, dt + c', \tag{1}$$

если примем, что $a_1' = 0$, $a_2' = 1$.

---

1) Ср. *H. A. Schwarz*. Uber einige Abbildungsaufgaben. Ges. Math. Abh. Bd. II, стр. 65—83.

Функцию (1) продолжим аналитически, пользуясь принципом симметрии. Если мы отразим верхнюю полуплоскость ζ в одном из отрезков 01 или 1∞ или $\infty 0$, то треугольник плоскости z отразится в соответствующей одному из этих отрезков стороне треугольника и мы получим новый треугольник, примыкающий к одной из сторон первоначального треугольника. Этот двойной треугольник будет отображаться на всю плоскость ζ, разрезанную вдоль некоторой части вещественной оси. Применяя неограниченное число раз принцип симметрии, мы получим поверхность Римана функции $z=z(\zeta)$, состоящую из неограниченного числа листов, покрывающих всю плоскость ζ и имеющую в точках $0, 1, \infty$ точки разветвления. Покрытие плоскости z двойными треугольниками, вообще говоря, не будет однократным, а, напротив, приводит к многолистной сложно разветвленной поверхности Римана для функции $\zeta=\zeta(z)$. Это покрытие плоскости z тогда и только тогда будет однократным, когда в каждой вершине ряд примыкающих друг к другу двойных треугольников замкнется, т. е. когда 2π будет нацело делиться на величину соответствующего угла двойного треугольника. Но так как углы двойных треугольников равны соответственно $2\alpha_1\pi$, $2\alpha_2\pi$, $2\alpha_3\pi$, то условие для однократного покрытия плоскости двойными треугольниками будет состоять в том, чтобы

$$\frac{2\pi}{2\alpha_1\pi}=\frac{1}{\alpha_1}=r_1, \quad \frac{1}{\alpha_2}=r_2, \quad \frac{1}{\alpha_3}=r_3$$

были бы целыми числами. Так как, кроме того, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, то эти числа должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=1. \tag{2}$$

Для теории функций этот вопрос имеет значение потому, что в случае однократного покрытия плоскости z обратная функция $\zeta=\zeta(z)$ будет однозначной во всей плоскости z; в противном же случае вершины треугольника и все происшедшие из них путем отражения точки будут точками разветвления конечного или бесконечно большого порядка.

Все случаи, в которых имеет место это взаимно однозначное соответствие, можно легко получить, исследуя

Диофантово уравнение (2), в котором по симметрии мы можем предположить, что $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$. Первое решение будет $r_1 = r_2 = r_3 = 3$; в каждом из остальных решений одно из этих чисел, а следовательно и r_1, должно быть меньше 3. Если $r_1 = 1$, то необходимо чтобы $\frac{1}{r_2} = 0$ и $\frac{1}{r_3} = 0$, что невозможно, если r_2 и r_3 целые. Хотя наши рассуждения, приведшие к уравнению (2), в этом случае теряют силу, все-таки мы будем случай $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = \infty$ рассматривать как предельный случай. Этому случаю отвечает отображение полуплоскости на такой прямолинейный треугольник, у которого две вершины лежат в бесконечно удаленной точке, так что им можно приписать углы 0, 0, в то время как угол при третьей вершине, лежащей на конечном расстоянии, равен π. Такой треугольник представляет собой бесконечную параллельную полосу.

Если $r_1 = 2$, то $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}$, т. е. или $r_2 = r_3 = 4$ или $r_2 = 3$, $r_3 = 6$ или, наконец, как предельный случай, $r_2 = 2$, $r_3 = \infty$. Эти различные случаи представлены в следующей таблице:

	r_1	r_2	r_3
1	3	3	3
2	1	∞	∞
3	2	4	4
4	2	3	6
5	2	2	∞

В предельном случае (2) отображающая функция при надлежащем выборе обеих постоянных в формуле (1) будет

$$z = \int_0^{\zeta} \frac{dt}{1-t} = \lg \frac{1}{1-\zeta},$$

что совпадает с выводом, полученным в главе IV, § 6.

Предельный случай (5) дает отображение на треугольник, у которого углы равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, т. е. на половину полосы. Отображающая функция при надлежащем выборе постоянных будет иметь вид

$$z=\int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}-\frac{\pi}{2}.$$

Эта функция, как легко убедиться простым дифференцированием, будет функция обратная синусу, т. е.

$$z=\arcsin(2\zeta-1)$$ [1].

Случаи 1, 3, 4 выводят нас из области элементарных функций. В этих случаях имеем отображения полуплоскости на равносторонний, равнобедренный прямоугольный треугольники и на прямоугольный треугольник, получающийся делением пополам равностороннего треугольника. Соответствующие отображающие функции при надлежащем выборе постоянных будут

$$z=\int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}},\quad z=\int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[4]{t^2(1-t)^3}},\quad z=\int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[6]{t^3(1-t)^4}}.$$

В следующем параграфе мы увидим, что функции, обратные этим функциям, будут „двояко-периодические“ функции. Здесь поэтому уместно привести некоторые простые основные понятия из теории „периодических“ функций. Аналитическая функция $f(z)$ называется имеющей *период* ω, если в каждой регулярной точке имеет место равенство

$$f(z+\omega)=f(z).$$

Если при этом $\omega\neq 0$, то функция $f(z)$ называется *периодической*. Два периода одной и той же функции называются *зависимыми*, если их отношение вещественно, в противном случае они называются *независимыми*. Как можно показать [2], однозначная аналитическая функция не может иметь больше двух независимых периодов. Если все периоды периодической функции зависимы между собой, то функция называется *простопериодической*. В этом случае система

---

[1]) Свойства конформного отображения в предельных случаях 2 и 5 могут быть непосредственно получены из приведенных формул.

[2]) См. здесь и для дальнейшего напр. *Гурвиц*, часть II, гл. 1, § 2.

всех периодов будет системой всех целых кратных одного из них. Если функция $f(z)$ имеет два независимых между собой периода, то она называется *двоякопериодической*. В этом случае могут быть определены (бесконечным числом способов) два „основных периода" ω_1 и ω_2 так, что все периоды будут представляться числами

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2,$$

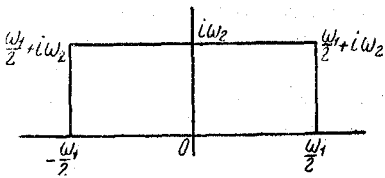
где m_1 и m_2 — целые числа. Каждый параллелограмм, вершины которого лежат в точках u, $u+\omega_1$, $u+\omega_1+\omega_2$, $u+\omega_2$, где u — какое-либо комплексное число, называется *параллелограммом периодов* функции $f(z)$.

§ 3. Отображение прямоугольника. Эллиптические функции.

Следующим частным случаем отображения многоугольника будет конформное отображение прямоугольника плоскости z на верхнюю полуплоскость ζ.

Предположим, что вершины прямоугольника лежат в точках

$$\frac{\omega_1}{2},\ \frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,\ -\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2,\ -\frac{\omega_1}{2}$$



Черт. 49.

(черт. 49), где ω_1 и ω_2 — произвольные, вещественные положительные числа. Мы хотим этот прямоугольник отобразить на верхнюю полуплоскость ζ так, чтобы точке $z=0$ соответствовала бы точка $\zeta=0$ и точке $z=\frac{\omega_1}{2}$ соответствовала бы точка $\zeta=1$. Нормируем наше отображение так, чтобы точка $z=-\frac{\omega_1}{2}$ перешла бы в точку $\zeta=-1$. Для этого отобразим правую половину нашего прямоугольника, лежащую в квадранте $\Re z \geqslant 0$, $\Im z \geqslant 0$, на четверть плоскости ζ, $\Re\zeta \geqslant 0$, $\Im\zeta \geqslant 0$, так, чтобы точки $z=0$ и $\zeta=0$, $z=\frac{\omega_1}{2}$ и $\zeta=1$, $z=i\omega_2$ и $\zeta=\infty$ соответствовали бы друг другу. При помощи отражения в мнимых осях получим отображение полного четырехугольника на верхнюю полуплоскость. При этом вершина $z=\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ перейдет в некоторую точку вещественной оси ζ, расположенную справа от 1, например в точку $\zeta=\frac{1}{\varkappa}$ $(0<\varkappa<1)$. Точка $z=-\frac{\omega_1}{2}+i\omega_2$ перейдет тогда в симметричную относительно мнимой оси точку $\zeta=-\frac{1}{\varkappa}$. Искомая отображающая функция, по формуле (2) § 1, будет тогда иметь вид:

$$z=c\int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)\left(t^2-\frac{1}{\varkappa^2}\right)}},$$

где c — некоторая вещественная постоянная, или, если опять обозначить $\varkappa c$ через c,

$$z=c\int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}. \tag{1}$$

Если принять, что при $t=0$ корень имеет знак $+$, то постоянная c будет этим вполне определена и притом будет положительной. Этот интеграл называется *интегралом Лежандра первого рода.*

Величина $\varkappa$ определяется отношением сторон

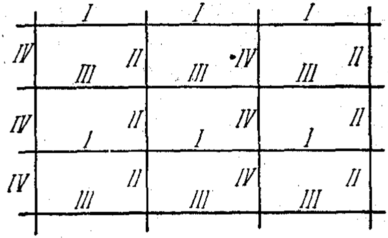
$$\frac{\omega_1}{2}=c\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}},\quad i\omega_2=c\int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}} \tag{2}$$

половины прямоугольника, тогда как величина c характеризует абсолютную величину прямоугольника.

Если, обратно, мы можем распоряжаться двумя вещественными положительными числами c и $\varkappa<1$, то при помощи выражения вида (1) мы можем осуществить конформное отображение верхней полуплоскости на любой прямоугольник полуплоскости z, расположенный как указано выше. Действительно, если $\varkappa$ изменяется между 0 и 1, то отношение сторон, определяемое формулами (2), изменяется от 0 до ∞, тогда как значением c определяется величина прямоугольника.

Для того чтобы ближе выяснить общий ход изменения аналитической функции, заданной выражением (1), применим принцип симметрии.

Обозначим, как на черт. 50, стороны прямоугольника через I, II, III, IV, а соответствующие им отрезки вещественной оси плоскости ζ через I′, II′, III′, IV′. Отразим сперва прямоугольник в отрезке I. Тогда мы получим в плоскости z два конгруэнтных прямоугольника, соприкасающихся друг с другом вдоль стороны I, а в плоскости ζ получим полные верхнюю и нижнюю полуплоскости, примыкающие друг к другу вдоль отрезка I′. Если, с другой стороны, мы отразим прямоугольник в его



Черт. 50.

сторонах II, III или IV, то получим каждый раз новый прямоугольник, соединенный с первоначальным вдоль стороны II, III или IV соответственно. При этом над плоскостью ζ получим три нижние полуплоскости, соединенные с верхней полуплоскостью соответственно вдоль сторон II′, III′ или IV′. Будем теперь новые прямоугольники отражать далее в их свободных сторонах и будем так продолжать до бесконечности, пока вся плоскость z не окажется без пропусков и при том ровно один раз покрыта этими прямоугольниками. В плоскости ζ будет соответственно получаться бесконечно много новых верхних и нижних полуплоскостей, соединенных вдоль одного из отрезков I′, II′, III′ или IV′. Точки ζ образуют поэтому бесконечно многолистную поверхность Римана F, которая разветвляется над точками ± 1, $\pm \frac{1}{x}$ (но не так, как поверхность для логарифма, ибо здесь бесконечно много точек разветвления первого порядка расположено друг над другом). Проще всего представить способ соединения листов поверхности, если рассматривать фигуру, образованную прямоугольниками. Двум каким-нибудь прямоугольникам, имеющим общую сторону, соответствует полный экземпляр плоскости ζ. Если прямоугольник отражен в одной из его сторон и если при этом точка z_1 перешла в точку z_2, то соответствующие этим точкам значения функции будут комплексными сопряженными величинами. Но геометрически очевидно, что какая-нибудь точка z_0 может перейти сама в себя после некоторого числа последовательных отражений только тогда, когда число этих отражений *четное*. Таким образом, функция $\zeta(z)$ будет однозначной во всей плоскости z [1]). Если прямоугольник R отразим два раза в одном и том же направлении, например в направлении вещественной положительной оси, то получим такой новый прямоугольник R_1, который может быть получен из прямоугольника R также параллельным переносом на величину $2\omega_1$. Точно также двукратному отражению прямоугольника в направлении положительной мнимой оси соответствует параллельный перенос его точек на величину $2i\omega_2$. В плоскости ζ при таком двукратном отражении мы получаем опять прежние значения. Таким образом, для обратной функции $\zeta(z)$ должны иметь место равенства

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z+2\omega_2 i)=\zeta(z)$$

или вообще

$$\zeta(z+2h_1\omega_1+2h_2\omega_2 i)=\zeta(z) \quad (h_1,\ h_2=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Как видим, обратная функция $\zeta(z)$ будет следовательно во всей плоскости z однозначная двоякопериодическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2 i$. Таким путем мы получили простейший наглядный пример *„эллиптической функции“*, т. е. двоякопериодической мероморфной функции [2]).

Таким же способом можно исследовать функции, указанные в предыдущем параграфе, построив из треугольников прямоугольники или параллелограммы.

§ 4. Модулярные и автоморфные функции.

Перейдем теперь к изучению конформного отображения верхней полуплоскости на простейшие после прямолинейных многоугольников области, а именно *на круговые многоуголь-*

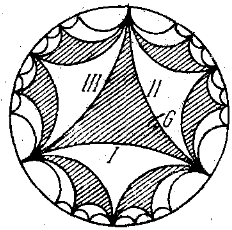
---

[1]) См. соответствующие рассуждения в § 2 (стр. 236).

[2]) Здесь следует подчеркнуть, что в этой главе говорится только о частных случаях эллиптических функций и что в общем случае, при произвольном параллелограмме периодов, эллиптические функции не производят конформного отображения на полуплоскость.

ники, т. е. на многоугольники, образованные дугами окружностей. Случай двуугольника, образованного такими дугами, был рассмотрен в главе IV, § 8. Следующая по простоте фигура такого рода будет треугольник, образованный дугами окружностей, причем простейшим случаем такого треугольника является в свою очередь равносторонний треугольник, все углы которого равны нулю.

Пусть такой треугольник G лежит внутри единичного круга плоскости z (черт. 51). Теорема Римана о конформном отображении утверждает, что существует такая, определенная внутри области G аналитическая функция $\zeta = f(z)$, которая эту область отображает на верхнюю полуплоскость ζ и при том так, что вершины треугольника G переходят в три точки 0, 1, ∞ вещественной оси.



Черт. 51.

Не зная явного выражения этой функции, мы можем, пользуясь принципом симметрии, почти непосредственно вывести геометрическим путем ее существенные свойства.

Обозначим через I, II, III три стороны треугольника, а их отображения на вещественную ось обозначим соответственно через I′, II′, III′. Если верхнюю полуплоскость ζ мы отразим в одном из прямолинейных отрезков I′, II′, III′, то мы получим нижнюю полуплоскость, соединенную с верхней вдоль этого отрезка. Отражая же треугольник G в соответствующей стороне, мы получим примыкающий к нему другой треугольник, составленный дугами окружностей, у которого углы также будут равны нулю. Этот отображенный треугольник не будет уже равносторонним, но будет опять вписан в тот же единичный круг плоскости z, что и первоначальный треугольник. Действительно, окружность единичного круга пересекает ортогонально ту окружность, относительно которой совершается инверсия треугольника; при инверсии она должна, поэтому, перейти в такую окружность, которая пересекает в тех же точках и при том ортогонально окружность, в которой совершается инверсия т. е. должна перейти в себя. Поступая так же далее, т. е. отражая каждый полученный криволинейный треугольник плоскости z в его свободных сторонах и аналогично присоединяя одна к другой в плоскости соответствующие верхние и нижние полуплоскости, мы придем, с одной стороны, к поверхности Римана над плоскостью ζ, имеющей бесконечно много листов, и точки разветвления $0, 1, \infty$; с другой же стороны получим в плоскости z *„модулярную фигуру“*, т. е. сеть, образованную бесконечным числом круговых треугольников, имеющих нулевые углы и вписанных в единичный круг. Все стороны этих треугольников ортогональны к окружности единичного круга, а сами эти треугольники заполняют весь единичный круг, сгущаясь к каждой точке окружности этого круга.

Последнее геометрическое свойство, наглядно видное из чертежа, докажем следующим образом. Процесс отражения в сторонах треугольников будем совершать таким образом, чтобы при этом всегда сохранялась полная симметрия. Отразив сперва G одновременно во всех его трех сторонах, мы получим вписанный круговой шестиугольник с нулевыми углами. Отразив этот шестиугольник в каждой из его шести внешних сторон, мы получим вписанный в тот же единичный круг 30-угольник с нулевыми углами и т. д. Покажем, что окружность единичного круга будет повсюду плотно покрыта вершинами этих многоугольников. Действительно, если γ будет такая дуга окружности единичного круга, на которой нет вершин наших многоугольников, то должна существовать бесконечная последовательность таких дуг окружностей, ортогональных к окружности единичного круга, что каждая из них объемлет последующую и каждая опирается (в виде свода) на дугу, часть которой составляет дуга γ. Эта последовательность дуг должна сходиться к некоторой дуге окружности, которая тоже опирается на γ или на дугу, содержащую γ, и вместе с дугой γ или вместе с некоторой большей дугой окружности единичного круга ограничивает область G^*, свободную от наших треугольников. Однако это невозможно, так как, отражая первоначальный треугольник или некоторый другой треугольник в одной из тех ортогональных окружностей, которые достаточно близко аппроксимируют границу области G^*, мы наверно попадем во внутренность этой области. С другой стороны, вписанный n-угольник с нулевыми углами заполняет при n достаточно большом сколь угодно полно внутреннюю область единичного круга, если вершины этого n-угольника при возрастании n лежат достаточно плотно.

Таким образом, согласно принципу симметрии, функция $\zeta(z)$

отображает конформно всю внутреннюю область единичного круга плоскости z на описанную выше поверхность Римана. Двум треугольникам, имеющим общую сторону, соответствует при этом всегда целый лист, покрывающий плоскость ζ. Функция $\zeta(z)$ принимает следовательно внутри единичного круга каждое значение, кроме 0, 1, ∞, бесконечное число раз, а самые эти значения не принимает нигде. Все точки окружности единичного круга будут особыми точками функции $\zeta(z)$. Действительно, в окрестности каждой такой точки происходит сгущение круговых треугольников и следовательно в произвольной близости каждой граничной точки функция принимает бесконечное число раз всякое значение, кроме 0, 1, ∞, что конечно невозможно, в окрестности регулярной точки. Окружность единичного круга будет следовательно особой линией функции $\zeta(z)$, через которую эта функция никаким способом не может быть продолжена. Окружность единичного круга будет *„естественной границей“* функции $\zeta(z)$.

К обозначениям, установившимся в историческом развитии теории эллиптических функций, мы придем, отображая единичный круг плоскости z на верхнюю полуплоскость новой переменной τ таким образом, чтобы вершины нашего исходного треугольника G, соответствующие точкам 0, 1, ∞ вещественной оси плоскости ζ переходили бы в точки $i\infty$, 0, 1 плоскости τ, т. е. так, чтобы отображением области G была бы область, изображенная на черт. 52. Функцию, которая эту область отображает на верхнюю полуплоскость ζ, обозначим через $\varkappa^2(\tau)$.

Треугольник с нулевыми углами, изображенный на черт. 52, разделим его „высотами“ на 6 треугольников (черт. 53). За основную область, которую надо отобразить на верхнюю полуплоскость ζ, выберем густо заштрихованную область [1], у которой угол в вершине $\tau = e^{\frac{\pi i}{3}}$ равен $\frac{\pi}{3}$, в вершине $\tau = 1 + i$ равен $\frac{\pi}{2}$ и наконец в третьей, бесконечно удаленной вершине равен нулю. Функция, которая так отображает эту область на верхнюю полуплоскость ζ, что ука-

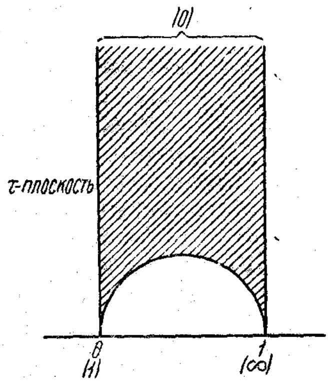
[1]) Две другие заштрихованные на чертеже области получаются из первой двукратным отображением в дуге.

занные вершины переходят соответственно в точки 0, 1, ∞ вещественной оси плоскости ζ обозначается в литературе через $J(\tau)$.

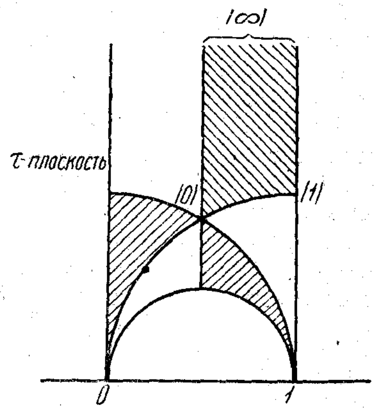
Из того обстоятельства, что основная область черт. 53 получается делением на 6 частей области черт. 52, можно вывести, на чем подробнее не останавливаемся, что между функциями $\varkappa^2(\tau)$ и $J(\tau)$ существует зависимость, которая функцию $J(\tau)$ выражает как рациональную функцию шестой степени от $\varkappa^2$. Эта зависимость имеет вид

$$J = \frac{4}{27}\,\frac{(\varkappa^4 - \varkappa^2 + 1)^3}{\varkappa^4(1-\varkappa^2)^2}.$$

Обе функции J и $\varkappa^2$ принадлежат к так называемым „*модулярным функциям*“. По аналогии с этим названием бу-



Черт. 52.



Черт. 53.

дем впредь называть поверхность Римана, лежащую над плоскостью ζ и определенную на стр. 241, кратко называть „*модулярной поверхностью*“.

Важнейшие свойства модулярных функций получаются прямо из геометрических соображений. Четному числу отражений в вещественной оси верхней полуплоскости J, соответственно $\varkappa^2$, после которых получаются, следовательно, первоначальные значения, соответствует определенное линейное преобразование переменной τ. Это обстоятельство выражают словами так: *модулярные функции до-*

пускают линейные преобразования в самих себя. Все линейные преобразования модулярной функции в самое себя получатся, если составить всевозможные композиции из четного числа инверсий нашей треугольной фигуры. *Множество этих преобразований образует группу.* Группой преобразований называется при этом совокупность преобразований, которая содержит вместе с каждым преобразованием и обратное ему и которая обладает тем свойством, что всякое преобразование, составленное из двух преобразований совокупности, будет тоже преобразованием, принадлежащим данной совокупности [1]).

Такие однозначные функции одной переменной, которые не изменяются для некоторой группы линейных преобразований этой переменной, называются *автоморфными функциями.*

После эллиптических функций модулярные функции представляют собой простейший не элементарный пример функций, принадлежащих к этому важному для более тонких отделов теории функций классу.

Подобным же образом можно получить и другие автоморфные функции, исходя из рассмотрения произвольных криволинейных многоугольников, образованных дугами окружностей. Рассмотрим такой криволинейный многоугольник, лежащий за исключением разве лишь его вершин целиком внутри единичного круга плоскости z. Вершины этого многоугольника пусть лежат или на окружности единичного круга или же внутри его, а все n сторон

---

[1]) Представим себе, что фигура, например, на черт. 53 отражением в ее сторонах продолжена на всю верхнюю полуплоскость τ. Можно убедиться, что полученное разбиение полуплоскости при подстановке $\tau' = \tau + 1$ или $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ переходит само в себя. Эти подстановки являются частными случаями так называемых *„модулярных подстановок“*, которые имеют вид:

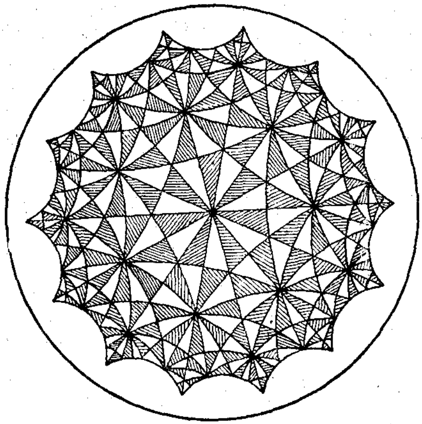
$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

(α, β, γ, δ — целые числа и $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$).

Здесь мы не можем останавливаться на доказательстве того факта, что все модулярные подстановки могут быть получены путем повторной композиции из двух выше указанных.

По теории модулярных функций следует особо указать на сочинение *Klein* und *Fricke*, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (2 Bde., Leipzig 1890 und 1892).

многоугольника, сами или после продолжения, пусть пересекают эту окружность ортогонально. Внутреннюю область G многоугольника представим теперь себе отображенной при помощи функции $\zeta(z)$ опять на верхнюю полуплоскость ζ, причем n его вершинам будут соответствовать n определенных точек на вещественной оси плоскости ζ. Так же, как и выше при модулярных функциях, можно эту функцию аналитически продолжить путем последовательной инверсии многоугольника в его сторонах и соответственно путем отражения полуплоскости ζ в ограничивающих ее отрезках вещественной оси; при этом над плоскостью ζ мы получим поверхность Римана, состоящую из бесконечного числа листов, а в плоскости z будут примыкать друг к другу бесконечно много круговых многоугольников, соответствующих полуплоскостям Римановой поверхности. На том же основании, что и выше, все стороны этих многоугольников будут ортогональны к окружности единичного круга. Последняя есть „*ортогональная окружность*“ для функции.



Черт. 54.

Позаботимся теперь о том, чтобы полученная нами фигура, образованная круговыми многоугольниками, покрывала бы ровно один раз внутреннюю область единичного круга и при том так, чтобы около каждой вершины, лежащей внутри этого круга, находилось бы четное число многоугольников; для этой цели надо принять углы при вершинах основного n-угольника равными $\frac{\pi}{r_1}, \frac{\pi}{r_2}, \ldots, \frac{\pi}{r_n}$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — целые положительные числа или ∞. На черт. 54 изображен пример для случая $n=3$, $r_1=2$, $r_2=7$, $r_3=3$. Можно элементарным геометрическим рассуждением доказать, что при этом условии полученные нами многоугольники будут покрывать ровно один раз и без дыр всю внутренность единичного круга, причем они будут сгущаться к каждой граничной точке этого *„предельного круга“*. Это доказательство мы здесь опускаем. Легко видеть, что определенная таким образом функция $\zeta(z)$ будет опять *однозначной автоморфной функцией* от z. Действительно, каждый обход вокруг общей вершины многоугольников в плоскости z эквивалентен четному числу инверсий; каждой же двукратной инверсии соответствует возвращение к первоначальным значениям ζ. Далее, двукратная инверсия в плоскости z приводит к некоторому линейному преобразованию вида

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

и таким образом будем иметь, что

$$\zeta(z') = \zeta(z).$$

Таким образом для функции $\zeta(z)$, так же как и для модулярной функции, существует группа линейных преобразований, при которых функция не меняется. Мы не можем здесь останавливаться на более детальном изучении этих функций, для чего потребовалось бы знакомство со свойствами геометрически заданной группы преобразований. Читатель найдет полное изложение этого вопроса в монографии Fricke-Klein'a. „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ [1]).

§ 5. Теорема Пикара.

На существовании модулярных функций основано доказательство *теоремы Пикара*, далее приводимое.

Эта теорема, представляющая некоторое уточнение изложенной в главе IV § 1 теоремы Вейерштрасса, говорит, что *всякая целая функция, не являющаяся постоянной, принимает любое заданное наперед конечное значение, за исключением, быть может, одного.*

---

[1]) 2 Bde., Leipzig 1897 und 1912. Также следует указать на оригинальные работы *H. Poincaré* и *F. Klein* (*Poincaré*, Oeuvres, vol. 2; *Klein*, Ges. math. Abh, Bd. 3). В главе IX нам придется еще рассматривать эти функции.

Из примера показательной функции видно, что такое исключение возможно, так как показательная функция нигде не обращается в нуль.

Для доказательства теоремы Пикара предположим, что целая трансцендентная [1]) функция $G(s)$ не принимает двух различных значений, хотя бы $G=a$ и $G=b$. Тогда $g(s)=$ $=\frac{G(s)-a}{b-a}$ будет целой трансцендентной функцией, которая не принимает значений 0 и 1. Так как $G(s)$, будучи целой функцией, регулярна всюду в конечной части плоскости, то функция $g(s)$ не принимает и значения равного ∞. Пусть $\zeta=\varkappa^2(\tau)=m(z)$ будет модулярная функция, которая определена в предыдущем параграфе и которая отображает единичный круг плоскости z на модулярную поверхность над плоскостью ζ. Рассмотрим бесконечно многозначную обратную функцию $z(\zeta)$. Если s_0 — какая-нибудь конечная точка, то, как мы видели, $g(s_0)$ будет отлично от 0, 1 и ∞. Функция $z(\zeta)$ будет поэтому в точке $\zeta=g(s_0)$ регулярна, хотя и бесконечно многозначна.

Представим себе, что в окрестности точки $\zeta=g(s_0)$ выбрана какая-нибудь однозначная ветвь функции $z(\zeta)$, и сопоставим значения ζ из этой окрестности точкам окрестности $s=s_0$, при помощи функции $\zeta=g(s)$. Полученный таким способом элемент функции $T(s)=z(g(s))$ можно аналитически продолжить вдоль всякого лежащего на конечном расстоянии пути, выходящего из точки s_0, так как целая функция $g(s)$ не принимает значений 0, 1, ∞. Вместе с тем видно, что функция $T(s)$, полученная всевозможными аналитическими продолжениями, в каждой конечной точке s равна одному из бесконечного числа значений $z(g(s))$.

По теореме монодромии (глава V, § 1) функция $T(s)$ в окрестности каждой конечной точки будет однозначной. Функция $T(s)$ должна быть, следовательно, опять целой функцией. Так как все значения $T(s)=z(g(s))$ будут лежать в единичном круге $|T|\leqslant 1$, то эта функция, по теореме Лиувилля (глава III, § 2), должна быть постоянной, что

---

[1]) Целая рациональная функция, по основной теореме алгебры, принимает каждое значение.

очевидно возможно только тогда, если значение $g(s)$ будет постоянным. Таким образом теорема Пикара доказана [1]).

§ 6. Другое доказательство теоремы Пикара. Теоремы Шоттки и Ландау.

Важными выводами из существования модулярных функций являются также теоремы Шоттки (Schottky) и Ландау (Landau), из которых, между прочим, снова может быть получена теорема Пикара.

Теорема Шоттки относится к классу теорем искажения, изложенных в главе VI, § 7. Эта теорема формулируется так:

Множество всех функций $\zeta = f(z)$, регулярных в круге $|z| < R$, которые в этом круге не принимают значений 0 и 1 и имеют, в нулевой точке, заданное значение ζ_0, будет равномерно ограничено в своей совокупности в каждом круге $|z| \leqslant R_1 < R$.

Пусть $t = t(\zeta)$ будет обратная функция для модулярной функции $\zeta = m(t)$, определенной в § 4. Как и в § 5, сопоставим сперва с нулевой точкой плоскости z какое-нибудь одно из бесконечно большого числа значений $t(\zeta_0)$ и построим затем при помощи аналитического продолжения функцию вида $T(z) = t(f(z))$. Так как функция $f(z)$ нигде в круге $|z| < R$ не принимает значений 0, 1, ∞, то аналитическое продолжение возможно вдоль всякого пути, расположенного целиком внутри круга $|z| < R$. Полученные таким образом значения функции $T(z)$, соответствующие точкам этого круга, лежат внутри единичного круга. Из теоремы монодромии сразу следует, что функция $T(z)$

---

[1]) В этом доказательстве мы пользовались только следующими свойствами функции $z(\zeta)$:

1) Существует отличная от 0, 1, ∞ точка ζ_0, в окрестности которой функция $z(\zeta)$ однозначна и регулярна.

2) Если из точки ζ_0 провести какой-нибудь путь, который минует точки 0, 1, ∞, то вдоль такого пути функцию $z(\zeta)$ можно неограниченно продолжать; в частности, следовательно, каждая ветвь функции $z(\zeta)$ будет регулярной и однозначной в окрестности каждой точки, которой при продолжении можно достигнуть.

3) Значения, принимаемые функцией $z(\zeta)$, лежат в такой области плоскости z, которая часть плоскости оставляет непокрытой.

4) Функция $z(\zeta)$ не равна постоянной.

однозначна в круге $|z| < R$. Принцип Lindelöf'а (глава VI, § 7) утверждает теперь, что если задано число ζ_0, а также выбранное в соответствии с ним значение $t(\zeta_0)$, то для каждого круга $|z| \leqslant R_1$ существует такая, вполне определенная, замкнутая область H_1, содержащая точку $t(\zeta_0)$ и внутренняя по отношению к единичному кругу, что для *всех* допускаемых функций $f(z)$ отображения $T(z)$ всех точек круга $|z| \leqslant R_1$ будут лежать в H_1; при этом предполагается еще, что построение функции $T(z) = t(f(z))$ всякий раз совершается при помощи одного и того же начального значения $T(0) = t(\zeta_0)$. Точки $\zeta = m(t)$, соответствующие точкам t из области H_1, образуют в плоскости ζ такую замкнутую область, которая не содержит точек 0, 1, ∞ и, следовательно, ограничена. С другой стороны, эти точки представляют как раз множество тех значений ζ, в которые отображаются точки круга $|z| \leqslant R_1$, функцией $\zeta = f(z)$ независимо от специального выбора этой функции. Таким образом теорема Шоттки доказана.

Из этой теоремы сделаем некоторые важные выводы.

Пусть функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

регулярна в круге $|z| < 1$ и пусть $0 < \rho < 1$. Из интегрального представления Коши для производной функции (глава II, § 7, (6)) следует тогда, что

$$a_1 = f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \, d\varphi,$$

$$|a_1| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\rho} \max_{|z|=\rho} |f(z)|.$$

Предположим теперь, что функция $f(z)$ нигде в круге $|z| < 1$ не принимает значений 0 и 1. По теореме Шоттки будем тогда иметь, что $\max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$ должен быть меньше некоторой величины $\theta(a_0, \rho)$, которая зависит только от $a_0 = f(0)$ и от ρ. Таким образом имеем, что

$$|a_1| \leqslant \frac{\theta(a_0, \rho)}{\rho} = \theta_1(a_0, \rho).$$

Предположим теперь, что функция $f(z)$ регулярна уже не в круге $|z| < 1$, а в круге $|z| < R$ $(R > 0)$ и нигде в этом круге не принимает значений 0 и 1. Функция

$$g(z) = f(Rz) = a_0 + a_1 Rz + \ldots$$

будет тогда регулярна в круге $|z| < 1$ и нигде в этом круге не будет принимать значений 0 и 1. Если, сверх того, $a_1 \neq 0$, то, применяя только-что полученный результат к функции $g(z)$, при условии $0 < \rho < 1$, будем иметь, что

$$|a_1 R| \leqslant \theta_1(a_0, \rho),$$

откуда

$$R \leqslant \frac{\theta_1(a_0, \rho)}{|a_1|}. \tag{1}$$

Эта величина, ограничивающая радиус того круга $|z| < R$, где функция $f(z)$ регулярна, зависит в сущности, только от начальных коэффициентов a_0 и a_1, так как ρ произвольно. Обозначив, например, значение правой части (1) при $\rho = \frac{1}{2}$ через $\theta_2(a_0, a_1)$, получаем *теорему Ландау*:

Если a_0 и a_1 — комплексные числа и $a_1 \neq 0$, то существует такое положительное число $\theta_2 = \theta_2(a_0, a_1)$, зависящее только от a_0 и от a_1, которое обладает следующим свойством: если число $R > \theta_2$ и

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

будет какой-нибудь степенной ряд, у которого первые коэффициенты равны a_0 и a_1, то или ряд $\mathfrak{P}(z)$ не сходится во всем круге $|z| < R$ или функция, представленная этим рядом, хотя бы в одной точке этого круга принимает значение 0 или 1.

Отсюда просто получается новое доказательство теоремы Пикара. Если бы существовала целая функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, где $a_1 \neq 0$, не принимающая нигде значений 0 и 1, то по теореме Ландау степенной ряд $a_0 + a_1 z + \ldots$ не мог бы сходиться везде, что представляет противоречие. Всякая целая функция, у которой в точке $z = 0$ производная не равна нулю, должна, следовательно, где-нибудь принять значение 0 или 1. Так как параллельным переносом всякую точку плоскости можно переместить в нулевую точку, то достаточно предположить, что производная $f'(z)$ не равна нулю, хотя бы в какой-нибудь одной точке плоскости, т. е. что $f(z)$ не постоянная. Наконец, числа 0 и 1 могут быть, заменены какими-нибудь двумя различными между собой числами $\varkappa$ и λ. Действительно, если $f(z)$ — целая функция и не равна постоянной, то и $g(z)=\frac{f(z)-\varkappa}{\lambda-\varkappa}$ (см. § 5) тоже есть целая функция, не равная постоянной; кроме того из $g(z)=0$ и $g(z)=1$, следует, что $f(z)=\varkappa$ и соответственно $f(z)=\lambda$. Но полученный результат и есть как раз теорема Пикара.

§ 7. Отображающие функции круговых многоугольников как решение дифференциальных уравнений.

В то время, как мы смогли дать явное представление функций $z=\varphi(\zeta)$, конформно отображающих прямолинейный многоугольник плоскости z на верхнюю полуплоскость ζ, для произвольных многоугольников, образованных дугами окружностей, эта цель нами ни в коей мере не достигнута. Покажем здесь только вкратце, что эти последние функции удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, которые могут быть построены из геометрических данных и являются, обратно, характеристическими для рассматриваемых конформных отображений. На эти дифференциальные уравнения, интегрирование которых всегда может быть выполнено, в случае надобности, при помощи рядов, нужно глядеть как на замену представления отображающих функций при помощи формул.

Для составления этих дифференциальных уравнений обратимся к изложенному в § 1. Представим себе, что многоугольник Π, образованный дугами окружностей и имеющий углы $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$, отображен конформно на верхнюю полуплоскость ζ и пусть его вершинам соответствуют последовательно точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вещественной оси. Пользуясь принципом симметрии, мы можем совершать аналитическое продолжение этого конформного отображения, причем после четного числа инверсий в плоскости ζ мы придем опять к тем же самым значениям ζ, в то время как этой операции в плоскости z соответствует линейное преобразование

$$z^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}. \tag{1}$$

Даже если фигура, образованная двойными многоугольниками, покрывающая плоскость z, не замыкается, т. е. если функция $\zeta(z)$ не будет однозначной, то все-таки эта функция будет иметь автоморфный характер, выражаемый равенством

$$\zeta(z^*) = \zeta(z).$$

Функцию $z(\zeta)$ обычно называют *линейно-полиморфной функцией*. Это свойство „линейной полиморфии" можно определить так: *функция $z(\zeta)$ в окрестности каждой точки плоскости ζ, за исключением точек $\zeta = a_1, a_2, \ldots, a_n$, однозначна и нигде не имеет существенно особых точек. Если точка ζ обходит одну из точек a_ν, то точка z испытывает линейную подстановку.*

Из этого свойства легко видеть, что z должно быть решением дифференциального уравнения третьего порядка. Для доказательства этого составим для произвольной аналитической функции z от ζ некоторое дифференциальное выражение $[z]_\zeta$, инвариантное относительно всякого линейного преобразования, т. е. такое выражение, для которого имеет место равенство $[z^*]_\zeta = [z]_\zeta$, если z^* определено равенством (1), как например выражение z' инвариантно относительно преобразования $z^* = z + \beta$ или выражение $\frac{z''}{z'}$ инвариантно относительно преобразования $z^* = \alpha z + \beta$ [1]).

Для того, чтобы получить искомое дифференциальное выражение, продифференцируем три раза равенство

$$z^*(\gamma z + \delta) = \alpha z + \beta,$$

в результате находим уравнения

$$\gamma(z^* z)' + \delta z^{*\prime} - \alpha z' = 0,$$
$$\gamma(z^* z)'' + \delta z^{*\prime\prime} - \alpha z'' = 0,$$
$$\gamma(z^* z)''' + \delta z^{*\prime\prime\prime} - \alpha z''' = 0.$$

Исключая отсюда постоянные γ, δ, α, получаем

$$\begin{vmatrix} (z^*z)' & z^{*\prime} & z' \\ (z^*z)'' & z^{*\prime\prime} & z'' \\ (z^*z)''' & z^{*\prime\prime\prime} & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Здесь α и β означают произвольные постоянные ($\alpha \neq 0$).

После простых преобразований это уравнение примет вид

$$\frac{z^{*'''}}{z^{*'}}-\frac{3}{2}\left(\frac{z^{*''}}{z^{*'}}\right)^2=\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

Таким образом, выражение

$$[z]_\zeta=\frac{2z'z'''-3z''^2}{2z'^2}$$

и является дифференциальным выражением третьего порядка, обладающим указанным свойством инвариантности.

В литературе это выражение называется *дифференциальным параметром Шварца*, хотя оно встречается до Шварца уже у Лагранжа и других авторов [1]).

Пусть теперь $z=\varphi(\zeta)$ будет наша линейно-полиморфная функция. Дифференциальный параметр Шварца, составленный для этой функции, будет однозначной функцией во всей плоскости ζ, так как четное число отражений полуплоскости ζ означает только линейную подстановку для функции $z=\varphi(\zeta)$, а следовательно выражение $[z]_\zeta$ остается при этом без изменения. Как и в § 1, из конформности отображения (предполагая, что исходная ветвь $z(\zeta)$ в верхней полуплоскости не имеет полюсов), пользуясь принципом симметрии, можно заключить, что выражение $[z]_\zeta$ может иметь особые точки только в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Мы утверждаем, что эти особые точки могут быть только полюсами. Не ограничивая общности, можно принять, что $a_1=0$, $\lim\limits_{\zeta\to 0}\varphi(\zeta)=0$. Предположим сперва, что $\alpha_1>0$. Подстановка $t=z^{\frac{1}{\alpha_1}}$ преобразует развернутый угол с вершиною в точке $t=0$ в развернутый угол с вершиною в точке $\zeta=0$, так что t будет по принципу симметрии взаимно однозначной функцией от ζ в окрестности $\zeta=0$. Принимая во внимание, что точка $\zeta=0$ является простым нулем для t, найдем для t разложение

$$t=c\zeta(1+c_1\zeta+\ldots),$$

---

[1]) Шварц в своей основной работе „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussi sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion . . .. darstellt" впервые правильно оценил значение этого выражения (ср *H. A. Schwarz*, Ges. Math. Abh. Bd. 2, S. 211).

где c — постоянная, неравная нулю. Таким образом, для z имеем, что

$$z = c^*\zeta^{\alpha_1}(1 + c_1^*\zeta + c_2^*\zeta^2 + \ldots),$$

где $c^* \neq 0$.

Дифференциальный параметр Шварца будет, следовательно, равен

$$[z]_\zeta = \frac{1 - a_1^2}{2\zeta^2}[1 + c_1'\zeta + \ldots].$$

Это выражение остается в силе и тогда, когда $\alpha_1 = 0$. Действительно, тогда имеет место разложение

$$z = \frac{c}{\lg c_1\zeta + c_a\zeta + c_3\zeta^2 + \ldots},$$

из которого получается то же самое выражение для $[z]_\zeta$.

Таким образом мы доказали, что особые точки для $[z]_\zeta$ могут быть только полюсами, и одновременно определили главную часть функции в каждом таком полюсе. Так как функция $[z]_\zeta$ однозначна и регулярна всюду в плоскости ζ, за исключением конечного числа полюсов, то эта функция будет рациональной и, следовательно, мы получаем такой результат:

Каждая линейно-полиморфная функция $z(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка

$$[z]_\zeta = R(\zeta), \tag{2}$$

где $R(\zeta)$ — рациональная функция от ζ.

Дифференциальное уравнение (2) обладает тем замечательным свойством, что знание одного его решения позволяет найти все остальные. Действительно, из предыдущего непосредственно видно, что всякая линейная функция от некоторого решения z уравнения (2) будет опять решением этого уравнения. Так как обратно, такая линейная функция содержит три произвольных постоянных, то таким образом мы получаем общий интеграл дифференциального уравнения (2).

Теория этого дифференциального уравнения тесно связана с учением о линейных однородных дифференциальных уравнениях второго порядка с рациональными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения (2) можно представить, в виде отношения двух частных интегралов таких линейных дифференциальных уравнений, и обратно, отношение двух линейно независимых решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка удовлетворяет уравнению типа (2). *В частности, случай $n=3$ приводит к гипергеометрическому дифференциальному уравнению.*

Если в частности речь идет о *функциях круговых треугольников*, т. е. о функциях, отображающих треугольник, образованный дугами окружностей и имеющий углы $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$, на верхнюю полуплоскость ζ, то для дифференциального параметра Шварца для такой функции $z=z(\zeta)$ найдем, произведя вычисление постоянных, выражение [1])

$$[z]_\zeta = \frac{(1-\alpha_1)^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{2(\zeta-a_1)^2(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)} + \frac{(1-\alpha_2)^2(a_2-a_3)(a_2-a_1)}{2(\zeta-a_2)^2(\zeta-a_3)(\zeta-a_1)} + \frac{(1-\alpha_3)^2(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{2(\zeta-a_3)^2(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)},$$

где a_1, a_2, a_3 будут те точки вещественной оси плоскости ζ, в которые отображаются вершины треугольника. Если

---

[1]) Предполагая точки a_1, a_2, a_3 отличными от $\zeta=\infty$, легко найти, исходя из разложения в окрестности $\zeta=\infty$ функции $z=z_\infty+\frac{c_1}{\zeta}+\frac{c_2}{\zeta^2}+\dots$ ($c_1 \neq 0$), что разложение $[z]_\zeta$ в окрестности бесконечно удаленной точки начнется с члена, содержащего $\frac{1}{\zeta^4}$. Кроме того, мы видели, что $[z]_\zeta$ имеет полюса второго порядка в точках $\zeta=a_1$, $\zeta=a_2$ и $\zeta=a_3$. Поэтому $[z]_\zeta$ должно иметь вид:

$$[z]_\zeta = \frac{A+B\zeta+C\zeta^2}{(\zeta-a_1)^2(\zeta-a_2)^2(\zeta-a_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}\left[\frac{A_1}{\zeta-a_1}+\frac{A_2}{\zeta-a_2}+\frac{A_3}{\zeta-a_3}\right].$$

Зная, что разложение $[z]_\zeta$ в окрестности точки $\zeta=a_k$ ($k=1, 2, 3$) начинается с члена $\frac{1-\alpha_k^2}{2}\frac{1}{(\zeta-a_k)^2}$, легко найдем A_1, A_2 и A_3.

Прим. ред.

нормировать отображение так, чтобы было $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=\infty$, то отсюда получится

$$[z]_\zeta=\frac{1-\alpha_1^2}{2\zeta^2}+\frac{1-\alpha_2^2}{2(\zeta-1)^2}+\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_3^2-1}{2\zeta(\zeta-1)}.$$

Если в частности $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, то получаем дифференциальное уравнение модулярной функции $\varkappa^2(\tau)$, определенной в § 4

$$[\tau]_{\varkappa^2}=\frac{1}{2\varkappa^4}+\frac{1}{2(\varkappa^2-1)^2}-\frac{1}{2\varkappa^2(\varkappa^2-1)}.$$

Если же $\alpha_1=\frac{1}{3}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=0$, то для соответствующей функции $\tau=\tau(J)$, т. е. для функции, отображающей шестую часть предыдущей области, получим

$$[\tau]_J=\frac{4}{9J^2}+\frac{3}{8(J-1)^2}-\frac{23}{72(J-1)J}.$$

На эти важные и прекрасные соотношения мы можем здесь только указать [1]).

---

[1]) Читатель найдет подробности в сочинении *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884), а также в литографированных лекциях „Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (Göttingen 1891) и „Über die hypergeometrische Funktion“ (Göttingen 1894). Подробные указания литературы имеются в энциклопедических статьях *R. Fricke* II B. 3 и II B. 4. О затронутых здесь вопросах для функций треугольника (названной там „функция s Шварца“ $s(\alpha, \beta, \gamma; J)$) ср. в особенности главу III тома I монографии *Klein* и *Fricke* о модулярных функциях, упомянутой на стр. 247.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РИМАНА О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ.

В главе VI общая задача о построении аналитических функций, принадлежащих к заданным областям, была решена только для частного случая однолистных односвязных областей. Изложенные там методы, в особенности знакопеременная метода Шварца, могут быть весьма сильно обобщены. Обращаясь в этой главе к задаче, поставленной во всей ее общности, мы будем пользоваться однако с самого начала совершенно другой методой, не зависящей от результатов главы VI, методой, которая ближе примыкает к первоначальной трактовке вопроса по Риману и которая названа Риманом *принципом Дирихле* (Dirichlet). Эта метода основана существенным образом на соображениях теории потенциала и теснейшим образом связана с наглядными представлениями свойств жидкого потока. При изложении избранной нами методы мы сделаем сперва упрощающее предположение, что речь идет об однолистной области, а потом проведем наше доказательство существования при самых общих предположениях относительно области.

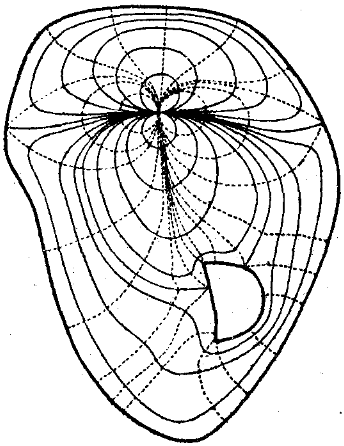
§ 1. Эвристические изыскания. Плоскость с надрезами.

Чтобы найти более целесообразный подход к нашему кругу вопросов, воспользуемся наглядными представлениями о свойствах некоторого течения.

Предположим для простоты, что область G, являющаяся носителем нашего двумерного потока, есть однолистная область, ограниченная конечным числом кусочно-гладких кривых.

Представим себе, что в какой-нибудь ее точке, хотя бы в точке O с координатами $x=0$, $y=0$, помещен двойной источник; тогда образуется некоторый поток. Потенциал потока $u(x, y)$ должен иметь в точке O, например, особенность $\frac{x}{x^2+y^2}$, а тогда сопряженный потенциал $v(x, y)$ будет иметь особенность $\frac{-y}{x^2+y^2}$.

Поток должен происходить вдоль кривых $v=\text{const}$, выходя из двойного источника в O параллельно оси X и возвращаясь в эту точку в том же направлении, как показано на черт. 23 стр. 126.



Черт. 55.

Если замкнутая кривая $v=\text{const}$, не проходит через точки скрещивания, то вдоль такой кривой значения u изменяются монотонно от $+\infty$ до $-\infty$, когда точка, описывающая кривую, выходя из O, опять возвращается в эту точку. Действительно, в силу уравнений Коши-Римана имеем, что $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}$, где s — длина дуги, отсчитанная в направлении потока, а n — длина на нормали, направленной в левую сторону. Так как значения v с одной стороны кривой $v=\text{const}$ больше, а с другой стороны кривой меньше этой постоянной, то вдоль всей кривой $v=\text{const}$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ имеет постоянный знак.

Можно теперь думать, что картина линий тока выглядит так, как изображено на черт. 55 для случая двусвязной области G, т. е. что в области G нет критических точек течения и что все кривые $v=\text{const}$ будут простыми замкнутыми кривыми, проходящими через O и целиком лежащими внутри G. Исключение представляют две кривые $v=c_1$ и $v=c_2$, каждая из которых упирается в одну из двух кривых контура, ограничивающего область G, и разветвляется на ней на две ветви; последние обходят эту кривую контура в двух противоположных направлениях, соединяются вновь в некоторой точке контура и, протекая вместе по внутренней области G, опять втекают в O.

Аналитическая функция $\zeta = u + iv = f(z)$ отображает каждую линию тока, которая вся протекает внутри области G, взаимно однозначным образом на полную прямую $v = \text{const}$ плоскости ζ, причем точка O переходит в точку $\zeta = \infty$. Если значение постоянной будет монотонно возрастать от $-\infty$ до $+\infty$, то прямая $v = \text{const}$ опишет всю плоскость ζ один раз. Отметим, что только для исключительных прямых $v = c_1$ и $v = c_2$ не все их точки будут соответствовать внутренним точкам области G, а именно некоторому отрезку прямой $v = c_1$ и соответственно $v = c_2$ будет соответствовать кривая контура области G.

Таким образом, плоскость ζ надо представить себе надрезанной вдоль двух, а для случая n-связной области соответственно вдоль n таких прямолинейных отрезков, параллельных вещественной оси. Назовем такую область „*плоскостью с прямолинейными надрезами*". Аналитическая функция $\zeta = u + iv = f(z)$ отображает, следовательно, область G на такую область. Подчеркнем, что эта функция в точке O имеет простой полюс с вычетом, равным 1, т. е. что она может быть представлена в виде $f(z) = \frac{1}{z} + g(z)$, где $g(z)$ регулярная функция при $z = 0$. Без особых пояснений очевидно, что источник может быть помещен в любой точке z_0 и что можно по произволу задать мощность и направление двойного источника. В этом случае отображающая функция $\zeta = f(z)$ в окрестности точки $z = z_0$ будет иметь вид

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + g(z),$$

где a — некоторая произвольная вещественная или комплексная постоянная и $g(z)$ — регулярная в точке $z = z_0$ функция.

Для случая односвязной области предыдущие рассуждения содержат теорему Римана о конформном отображении. Действительно, если область G не совпадает со всей плоскостью z или плоскостью, из которой удалена одна точка, то область G можно по предыдущему отобразить конформно на плоскость ζ, снабженную одним прямолинейным надрезом. Пользуясь некоторым линейным преобразованием, можно перевести этот надрез в отрезок $0 \leqslant u < \infty$ оси u. Отобразим теперь такую надрезанную плоскость при помощи функции $\zeta_1 = \sqrt{\zeta}$ на верхнюю полуплоскость ζ_1, что равносильно отображению на единичный круг.

Кроме потока в области G, производимого двойным источником, мы можем рассматривать и другие потоки, например такой, который происходит от двух логарифмических источников, помещенных в точках z_0 и z_1 и имеющих равную по величине и обратную по знаку мощность, или от двух вихрей в тех же точках, имеющих одинаковую интенсивность, но противоположное направление вращения или такой поток, который происходит от помещенного в точке z_0 источника порядка выше первого. Таким потокам будут соответствовать аналитические функции, регулярные в G всюду за исключением точек z_0, z_1 (соответственно z_0) и имеющие особенности вида

$$\lg \frac{z-z_0}{z-z_1} \text{ или } i \lg \frac{z-z_0}{z-z_1} \text{ или } \frac{1}{(z-z_0)^2} \text{ и т. д.}$$

Наша задача теперь состоит в том, чтобы заменить предыдущие соображения некоторой математической теорией и в особенности в том, чтобы доказать существование введенных выше чисто эвристически гармонических функций, которые мы будем впредь называть „*потенциалами потока*".

Для этой цели нам нужно рассмотреть интеграл, взятый по области G и представляющий собою величину энергии потока. Если $\varphi(x, y)$ будет потенциал скорости некоторого потока, то кинетическая энергия потока для некоторой части B области G выражается интегралом

$$\iint_B (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy,$$

умноженным на некоторый постоянный, независящий от φ, множитель. Наша метода будет основана на том, что мы будем пытаться *обратить в минимум* такое выражение при надлежаще выбранных добавочных условиях. Прежде чем формулировать эту минимальную задачу, рассмотрим в следующем параграфе некоторые свойства таких интегралов.

§ 2. Интеграл Дирихле и формула Грина.

Пусть B будет какая-нибудь однолистная область. Выражение

$$D[\varphi]=D_B[\varphi]=\int\limits_B\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy \tag{1}$$

назовем „*интегралом Дирихле*" от функции φ, распространенным по области B [1]), причем $\varphi(x, y)$ есть какая-нибудь вещественная функция от прямоугольных координат x, y, для которой такой двойной интеграл существует. Если подинтегральная функция не всюду в области B, включая и контур, непрерывна или если к области B принадлежит бесконечно удаленная точка, то интеграл надо рассматривать как несобственный [2]).

Если ввести полярные координаты r и ϑ, то интеграл Дирихле принимает вид

$$D[\varphi]=\int\limits_B\int\left(\varphi_r^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right)r\,dr\,d\vartheta. \tag{2}$$

---

[1]) Значок, указывающий область, мы будем опускать, если от этого не может возникнуть никакого недоразумения.

[2]) Несобственный интеграл здесь можно определить так: пусть B' будет некоторая замкнутая область, внутренняя к B, или точечное множество, состоящее из нескольких таких областей. Если функция $f(x, y)$ нигде не отрицательна в B, то под символом $\int\limits_B\int f(x, y)\,dx\,dy$ мы будем понимать точную верхнюю границу значений всех интегралов $\int\limits_{B'}\int f(x, y)\,dx\,dy$, соответствующих всем рассматриваемым множествам точек B'. Если $f(x, y)$ принимает также и отрицательные значения, то разложим ее на сумму $f=f^*+f^{**}$, где f^* совпадает с f везде, где $f\geqslant 0$, а в остальных точках $f^*=0$, а f^{**} совпадает с f везде, где $f\leqslant 0$ и равно нулю в остальных точках. Под символом $\int\limits_B\int f(x, y)\,dx\,dy$ будем в этом случае понимать разность интегралов от f^* и от $-f^{**}$.

Интеграл Дирихле обладает свойством инвариантности относительно конформного отображения, т. е. если область B отобразить конформно при помощи функции $\zeta=f(z)=$ $=f(x+iy)=u+iv$ на некоторую область B^*, то для всякой функции φ, для которой соответствующие интегралы имеют смысл, имеет место равенство

$$\iint_B (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy=\iint_{B^*}(\varphi_u^2+\varphi_v^2)\,du\,dv.$$

Действительно, в силу уравнений Коши-Римана мы имеем

$$\varphi_x^2+\varphi_y^2=(\varphi_u^2+\varphi_v^2)(u_x^2+u_y^2).$$

С другой стороны $u_x^2+u_y^2=u_xv_y-u_yv_x$ есть как раз величина функционального определителя от u, v по x и по y, величина не отрицательная; следовательно, по известной теореме интегрального исчисления о замене переменных в двойном интеграле, вышеуказанная формула действительно имеет место.

В частности, при $\varphi=u$ мы получим

$$D[u]=\iint_B |f'(z)|^2\,dx\,dy=\iint_{B^*} du\,dv.$$

Таким образом, интеграл Дирихле от гармонической функции u, распространенный по области B, равен величине площади той области B^*, в которую аналитическая функция $\zeta=u+iv$ отображает область B (ср. главу II, § 8).

Интеграл Дирихле очевидно остается инвариантным также и при конформном отображении с изменением направления отсчета углов, как например при инверсии в прямой или в окружности.

Если λ и μ постоянные, то, обозначив для краткости

$$D[\varphi,\psi]=\iint_B(\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y)\,dx\,dy, \tag{3}$$

имеем тождество

$$D[\lambda\varphi+\mu\psi]=\lambda^2D[\varphi]+2\lambda\mu\,D[\varphi,\psi]+\mu^2D[\psi]. \tag{4}$$

Так как $D[\lambda\varphi+\mu\psi]$ будет не отрицательная однородная квадратичная функция от λ и μ, то

$$D[\varphi,\psi]^2\leqslant D[\varphi]\cdot D[\psi], \tag{5}$$

где конечно предполагается, что соответствующие интегралы существуют. Из (5) сразу видно, что если $D[\varphi]$ и $D[\psi]$ существ ют, то существует и $D[\varphi, \psi]$.

Интеграл $D[\varphi, \psi]$ также будет инвариантным относительно конформного отображения, что можно доказать так же, как и для $D[\varphi]$ или вывести из тождества (4).

В дальнейшем нам понадобится некоторое простое преобразование интеграла $D[\varphi, \psi]$, которое называется *формулой Грина*.

Предположим, что область B ограничена конечным числом кусочно-гладких кривых. Пусть φ будет непрерывная во всей области B функция, имеющая кусочно-непрерывные производные [1]). Пусть далее ψ будет непрерывная вместе со своими первыми и вторыми производными функция во всей области, включая и контур. Обозначим через $\frac{\partial}{\partial n}$ производную по внутренней нормали к контуру и через ds линейный элемент контура, проходимого в положительном направлении. *Формула Грина* имеет тогда вид:

$$D[\varphi, \psi] = -\int_B\int \varphi\Delta\psi\, dx\, dy - \int_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\, ds.$$

Эта формула представляет собой ни что иное, как формулу интегрирования по частям, примененную к интегралу $D[\varphi, \psi]$.

Для доказательства достаточно установить эту формулу для такой последовательности областей, контуры которых „гладко" аппроксимируют контур области B и имеют длины, ограниченные в их совокупности (ср. главу I, § 2). Так как за такую последовательность можно взять последовательность многоугольников, целиком лежащих внутри B, то можно ограничиться доказательством формулы для многоугольников, а так как многоугольники можно разложить на треугольники, которые можно считать, кроме того, прямоугольными (в противном случае их можно было бы разло-

[1]) Функция называется *кусочно-непрерывной* в области G, если эту область можно разложить на такие части, ограниченные простыми кусочно-гладкими кривыми, чтобы каждая замкнутая область, внутренняя к G, имела бы общие точки только с конечным числом этих частей и кроме того, чтобы в каждой из этих частей функция была бы непрерывна и имела бы непрерывные контурные значения.

жить одною из высот на прямоугольные треугольники), то можно ограничиться доказательством формулы для прямоугольных треугольников. Заметим еще, что доказываемая формула Грина остается инвариантной при параллельном переносе или повороте системы координатных осей. Координатные оси, следовательно, можно выбрать так, чтобы вершины рассматриваемого треугольника $\triangle$ имели бы координаты 0, 0; a, 0; 0, b. Интегрируя теперь по частям, получаем

$$\iint\limits_{\triangle}(\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y)\,dx\,dy=\int\limits_0^b dy\int\limits_0^{\frac{a}{b}(b-y)}\varphi_x\psi_x\,dx+$$

$$+\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}(a-x)}\varphi_y\psi_y\,dy=\int\limits_0^b[\varphi\psi_x]_{x=0}^{x=\frac{a}{b}(b-y)}dy+$$

$$+\int\limits_0^a[\varphi\psi_y]_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)}dx-\iint\limits_{\triangle}\varphi(\psi_{xx}+\psi_{yy})\,dx\,dy=$$

$$=-\iint\limits_{\triangle}\varphi\Delta\psi\,dx\,dy-\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds,$$

где последний интеграл взят по контуру треугольника и положительная нормаль направлена внутрь. Таким образом формула Грина доказана.

§ 3. Принцип Дирихле.

В теории функций интеграл Дирихле применялся первоначально не в связи с потенциалами потока. Впервые он встречается при попытках решить предельную задачу теории потенциала. Путь, по которому следовал здесь Риман, можно представить, в простейшем случае, следующим образом. Пусть G будет область в плоскости xy, ограниченная одной кусочно-гладкой кривой S. Пусть вдоль контура G заданы непрерывным образом граничные значения функции. Рассмотрим интеграл Дирихле $D[\varphi]$, распространенный по области G, где φ — какая-нибудь непрерывная вместе с первыми и вторыми производными внутри и на контуре области G функция, принимающая на контуре заданные значения. Если среди всех таких функций существует функция $u\ (x, y)$, для которой интеграл Дирихле принимает наименьшее значение, то эта функция u должна удовлетворять дифференциальному уравнению $\Delta u = 0$ и, следовательно, должна решать предельную задачу теории потенциала. Действительно, пусть $h(x, y)$ будет функция которая вместе со своими первыми и вторыми производными непрерывна в области G, включая контур. Пусть далее $h(x, y)$ везде на контуре обращается в нуль и пусть интеграл $D[h]$ остается конечным, в остальном же функция $h\ (x, y)$ пусть будет совершенно произвольна. При всяком вещественном значении параметра ε будем тогда иметь, что

$$D[u+\varepsilon h] = D[u] + 2\varepsilon D[u, h] + \varepsilon^2 D[h] \geqslant D[u]$$

и следовательно

$$\varepsilon(2D[u, h) + \varepsilon D[h]) \geqslant 0,$$

что при произвольном ε возможно очевидно только при условии

$$D[u, h] = 0.$$

Применяя формулу Грина, сразу получим

$$\int\limits_G\int h\,\Delta\,u\,dx\,dy = 0.$$

Так как h — произвольная функция, то отсюда следует наличие равенства

$$\Delta u = 0.$$

Действительно, если бы функция Δu, непрерывная в G, была бы отлична от нуля, например положительна в какой-нибудь точке этой области, то в G должна была бы существовать некоторая окрестность этой точки, где Δu была бы тоже положительна. Если теперь выберем за h такую непрерывную вместе со своими первыми и вторыми производными в G функцию, которая внутри этой окрестности положительна, а вне ее равна нулю, то получим противоречие с вышенаписанным равенством.

Как указал впервые Вейерштрасс, этого рассуждения, названного Риманом *принципом Дирихле*, никоим образом не достаточно для доказательства существования решения предельной задачи. Действительно, совсем не очевидно, что при поставленных условиях интеграл должен иметь минимум; непосредственное же доказательство этого сначала не удавалось. Вообще говоря, относительно ограниченного снизу множества чисел можно только утверждать существование точной нижней границы, а не действительно достигаемого минимума [1]).

Несмотря на это мы увидим дальше, что основная идея доказательства Римана, состоящая в том, чтобы характеризовать гармонические функции минимальными свойствами интеграла Дирихле, все-таки приводит к цели; мы удержим поэтому здесь название „*принципа Дирихле*". Но вместо того, чтобы проводить идею принципа Дирихле на предельной задаче теории потенциала, мы приложим этот принцип для доказательства существования потенциалов потока. Здесь придется однако несколько видоизменить вышеуказанную минимальную задачу. Необходимость такого изменения видна прежде всего из того, что интеграл Дирихле не существует, если область интегрирования содержит источник или какую-нибудь другую рассмотренную выше особую точку. Рассмотрим сперва случай, когда в нулевой точке O помещен двойной источник, и представим себе, что около точки O, как около центра, описан круг K радиуса a с окружностью $\varkappa$, лежащий целиком внутри G. Определим теперь функцию $S(x, y)$ следующим образом:

$$S(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{x}{a^2} & \text{внутри } K \text{ и на окружности } \varkappa,\\ 0 & \text{вне круга } K.\end{cases} \qquad (1)$$

Эта функция $S(x, y)$ имеет ту же особенность, что и искомая гармоническая функция u [2]).

[1]) Известный пример неразрешимости минимальной задачи представляет такая задача. Точки 0 и 1 оси x-ов надо соединить кривой, имеющей непрерывную кривизну и ортогональной к оси x в точках 0 и 1 так, чтобы длина такой кривой была бы наименьшей. Точная нижняя граница длин таких кривых, равная 1, очевидно не достигается ни одной из допускаемых кривых.

[2]) Введение, по Вейлю, этой функции S вносит, при проведении доказательства, упрощения в сравнении с прежними доказательствами.

Подчеркнем, что функция S также будет гармонической функцией, так как везде в круге K, за исключением его центра, она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta S = 0. \tag{2}$$

Далее, вдоль окружности $\varkappa$ имеет место равенство

$$\frac{\partial S}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

если $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по внутренней нормали к кругу. Для доказательства этого свойства заметим, что в полярных координатах r, ϑ функция $S(x, y)$ принимает вид $\frac{\cos\vartheta}{r} + \frac{r}{a^2}\cos\vartheta$, откуда следует

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{r=a} = 0.$$

Если мы желаем рассмотреть потенциалы потока, обладающие другими, рассмотренными выше, особенностями (для простоты предположим, что соответствующие особые точки лежат в вышеупомянутом круге K радиуса a), то за *„функцию особенностей"* мы выберем такую функцию $S(x, y)$, которая в заданных точках имеет требуемые особенности, в остальных точках внутри круга K является регулярной гармонической функцией, вне круга K тождественно равняется нулю, а на его окружности имеет производную по нормали, равную нулю. В дальнейшем мы рассмотрим только случай простого полюса в точке O, но заметим, что наши рассуждения могут быть приложены и в других указанных случаях [1]).

Пусть теперь φ будет функция непрерывная всюду в G, включая контур, за исключением только точки O. Пусть эта функция имеет кусочно-непрерывные производные и пусть в точке O она обладает заданной особенностью.

Функция $\Phi = \varphi - S$ будет тогда непрерывна во всей области G, за исключением окружности $\varkappa$, где она претерпевает скачок, обусловленный функцией S. Интеграл Дирихле $D[\Phi]$ может быть поэтому распространен и над точкой O.

---

[1]) Ср. например главу IX, § 2.

Функцию Φ назовем „*допустимой*", если она удовлетворяет следующим условиям: 1) функция $\Phi + S = \varphi$ в области G, включая и контур, непрерывна везде, за исключением точки O, и имеет кусочно-непрерывные производные, в точке же O она обладает особенностью $\frac{x}{x^2+y^2}$; 2) интеграл

$$D[\Phi] = \iint_G (\Phi_x^2 + \Phi_y^2)\, dx\, dy.$$

существует.

Заметим, что допустимая функция Φ, при прибавлении произвольной постоянной, остается допустимой и что при этом значение интеграла $D[\Phi]$ не меняется. Можно, поэтому, без изменения $D[\Phi]$ всегда достичь того, чтобы рассматриваемые функции Φ равнялись бы нулю в точке O. Такие функции будем называть „*нормированными*" и такое название будем прилагать к соответствующей функции $\varphi = \Phi + S$.

Поставим теперь такую минимальную задачу: *среди всех допустимых функций Φ найти такую, для которой интеграл $D(\Phi)$, распространенный по области G, имеет наименьшее значение.*

Эта минимальная задача во всяком случае имеет смысл, т. е. существует по крайней мере о д н а допустимая функция Φ, для которой интеграл $D[\Phi]$ имеет конечное значение. Действительно, пусть K' будет круг радиуса a', концентрический с кругом K радиуса a и лежащий целиком внутри G, и пусть $a' > a$. Функцию Φ определим следующим образом: $\Phi = 0$ внутри круга K и вне круга K' и $\Phi = \frac{2}{a} \frac{a'-r}{a'-a} \cos\vartheta$ в кольце $a < r \leqslant a'$. Функция Φ будет очевидно допустимой, и соответствующий ей интеграл Дирихле будет конечным.

Множество всех значений $D[\Phi]$, соответствующих всем допустимым функциям Φ, следовательно, не будет пустым и должно иметь точную нижнюю границу, очевидно не отрицательную и которую мы обозначим через d.

Если наша минимальная задача может быть решена, например, при помощи некоторой функции U, то для всякой непрерывной внутри и на контуре G функции h, имеющей кусочно-непрерывные производные и для которой существует

$D[h]$, должно иметь место при произвольном ε, неравенство
$$D[U+\varepsilon h] \geqslant D[U].$$

Как и раньше (стр. 268), отсюда получим, что [1])
$$D[U, h] = 0. \tag{4}$$

Если решение U вообще существует, то существует и некоторое нормированное решение и притом *только одно*. Действительно, если существует еще другое нормированное решение U', то функция $U-U'$ будет всюду в G непрерывной и будет иметь в G кусочно-непрерывные частные производные. Далее существует интеграл
$$D[U-U'] = D[U] + D[U'] - 2D[U, U'].$$

В силу равенства (4) должно быть, как
$$D[U, U-U'] = 0,$$
так и
$$D[U', U-U'] = 0.$$

Вычитая эти равенства почленно, найдем
$$D[U-U'] = 0.$$

Частные производные от $U-U'$ должны, следовательно, всюду в области G равняться нулю. Так как в точке O функции U и U' совпадают, то во всей области G функции U и U' должны быть тождественны, что мы и хотели показать.

Заметим, наконец, что произвол в выборе величины a не имеет влияния на функцию $u = U + S$. Действительно, если $a' < a$ будет радиус нового круга K' с центром в O и S' — соответствующая a' функция
$$S'(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{x}{a'^2} & \text{внутри } K' \text{ и на окружности } \kappa' \\ 0 & \text{вне } K', \end{cases}$$

то имеем следующее предложение: решение U' новой минимальной задачи равно $U' = U + S - S'$, так что $u = U + S = U' + S'$; разрешимость одной минимальной за-

[1]) Из этого уравнения опять можно заключить, что U и соответственный $u = U + S$ являются гармоническими функциями, что впоследствии будет доказано непосредственно.

дачи влечет за собой разрешимость другой. Для доказательства положим $S-S'=\sigma$; эта функция вне круга K тождественно равна нулю, внутри же круга K' так же как и внутри кругового кольца R, расположенного между $\varkappa$ и $\varkappa'$, будет регулярной гармонической функцией. Если Φ будет допустимой функцией первой минимальной задачи, то $\Phi'=\Phi+\sigma$ будет допустимой функцией второй задачи и обратно. Мы имеем далее

$$D[\Phi']=D[\Phi]+D[\sigma]+2D[\Phi, \sigma]$$

и, как сейчас будет доказано,

$$D[\Phi, \sigma]=0. \tag{5}$$

Таким образом, интегралы $D[\Phi]$ и $D[\Phi']$ отличаются между собой на величину, не зависящую от выбора функций Φ и Φ', и следовательно, обе минимальные задачи эквивалентны. Для доказательства (5) воспользуемся формулой Грина, заметив, что всюду внутри K' и внутри кольца R $\Delta\sigma=0$, что на окружности $\varkappa$ и внутри K вблизи от окружности $\varkappa$ $\sigma=S$ и, следовательно, на этой окружности $\varkappa$ будет $\dfrac{\partial\sigma}{\partial n}=0$ и что $\dfrac{\partial\sigma}{\partial n}$ на окружности $\varkappa'$ непрерывна.

Таким образом имеем, что

$$D_{K'}[\Phi, \sigma]=-\iint\limits_{K'}\Phi\,\Delta\sigma\,dx\,dy-\int\limits_{\varkappa'}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial n}ds=\int\limits_{\varkappa'}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial r}ds$$

и

$$D_R[\Phi, \sigma]=-\iint\limits_{R}\Phi\,\Delta\sigma\,dx\,dy-\int\limits_{\varkappa}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial n}ds-\int\limits_{\varkappa'}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial n}ds=$$

$$=-\int\limits_{\varkappa'}\Phi\frac{\partial\sigma}{\partial r}ds.$$

Складывая, эти формулы, получаем искомое равенство

$$D[\Phi, \sigma]=0.$$

Прежде чем перейти к решению поставленной минимальной задачи, освободимся от предположения о том, что G есть однолистная область. Тогда будет возможно провести наши рассуждения сразу для самого общего случая. Для этого прежде всего надо установить геометрическое понятие об области самого общего вида (поверхности Римана), в соответствии с идеями, затронутыми нами в конце § 3 главы V.

§ 4. Постановка задачи в общем виде.

Однолистную область G можно всегда исчерпать кругами, налегающими друг на друга, т. е. можно задать исчислимую последовательность кругов, K_1, K_2, ... так, чтобы каждая точка G принадлежала бы хотя бы одному из этих кругов и чтобы всякая замкнутая область, внутренняя к G, состояла бы из точек, принадлежащих к конечному числу этих кругов. Аналогичным образом многолистные области, построенные в главе V, как поверхности Римана для какой-либо аналитической функции, можно тоже исчерпать *„круговыми областями"*. Под *„круговой областью"* мы будем понимать при этом или однолистный круг, или плоскость, из который вырезан такой круг или многолистный круг, состоящий из конечного числа листов и имеющий точку разветвления в центре или соответствующую область, к которой принадлежит бесконечно удаленная точка. Мы будем для удобства предполагать эти круговые области всегда замкнутыми, не оговаривая этого специально. Такое исчерпывание римановой поверхности получается само собой при аналитическом продолжении с помощью степенных рядов, если рассматривать соответствующие этим рядам круги равномерной сходимости. В частности, замкнутые поверхности Римана, состоящие из n листов, распространенных над всей плоскостью, могут быть вполне исчерпаны конечным числом таких круговых областей. Однолистную область G или, соответственно, данную риманову поверхность можно при помощи таких круговых областей рассматривать как *„предел"* последовательности таких заключающих друг друга замкнутых областей G_n, что G_n будет частью области G_{n+1} и что всякая точка G будет лежать в одной из областей G_n (и значит во всех последующих). Для этого, достаточно за область G_n выбрать область, составленную из конечного числа подходящих круговых областей.

Нам надо теперь определить понятие многолистной области вне связи с аналитической функцией, чтобы затем доказать существование соответствующих функций.

Для определения самой общей области, распространенной над плоскостью z, рассмотрим определенные выше однолистные или многолистные круговые области в качестве простейших элементов. Составим сперва из конечного числа таких областей замкнутую область G, которая характеризуется следующими условиями: каждая точка одной из данных круговых областей называется точкой области G. Некоторые из круговых областей, которые покрывают один и тот же круговой двуугольник плоскости z, должны быть соединены над этим двуугольником [1]), причем совпадающие точки обеих круговых областей считаются тождественными точками области G. При этом, если одна из двух круговых областей разветвлена, то другая не должна выступать за ее центр и сама не должна быть разветвленной. Введем далее понятное само собою ограничение — если точка P из круговой области A тождественна с точкой Q из круговой области B и если точка Q тождественна с точкой R из круговой области C, то точки P и R будем считать тоже тождественными. Предположим наконец, что в результате такого процесса соединения получается одно единственное связное множество точек.

Если каждая точка контура одной из данного конечного числа круговых областей будет внутренней точкой какой-нибудь другой из этих областей, то мы будем иметь замкнутую поверхность. В противном случае мы можем по вышеуказанному правилу присоединить к области G, которую мы всегда рассматриваем как замкнутую, еще некоторое конечное число дальнейших круговых областей и получить такую область G^*, которая содержит область G как часть. Рассматривая теперь последовательность $G_1, G_2, \ldots$ таких областей, причем G_n всегда будет содержаться в G_{n+1}, скажем, что такая последовательность определяет „область“ G. Под „областью“ G мы будем понимать при этом совокупность точек, принадлежащих хотя бы одной из областей G_n. Мы будем называть G также „*пределом*“ заключающих друг друга областей G_n.

---

[1]) При наших соглашениях мы исключаем соединение двух круговых областей, когда они обе покрывают одну и ту же кольцевую область или когда одна из них содержится в другой; но это ограничение ни в коей мере не является существенным.

В результате мы определили геометрическое понятие самой общей поверхности Римана. На определенной таким способом области G мы можем рассматривать функции точки, которые в каждой однолистной области, принадлежащей G, будут функциями координат x, y плоскости z и следовательно могут быть обозначены через $f(x, y)$ (или $\varphi(x, y)$ и т. д.).

Если некоторую область B можно разложить на конечное число однолистных областей и если существуют интегралы, распространенные по каждой такой отдельной области, от некоторой функции $f(x, y)$, определенной в B, то сумму таких интегралов мы будем называть интегралом от $f(x, y)$, распространенным по области B, и будем обозначать через

$$\int\limits_B\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

Рассмотрим теперь интегралы, распространенные по нашим областям G_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{Gn}\int f(x, y)\, dx\, dy$ существует, то этот предел будем называть интегралом, распространенным по области G от функции $f(x, y)$, и будем обозначать его через $\int\limits_G\int f(x, y)\, dx\, dy$.

Если функция $f(x, y)$ в области G нигде не отрицательна и если все интегралы, распространенные по областям G_n, не превосходят некоторого независящего от n числа, то интеграл, распространенный по G, очевидно существует. Встречающиеся дальше интегралы мы будем понимать в указанном здесь смысле (см. примечание 2, стр. 264).

Теперь мы можем поставленную в § 3 минимальную задачу в тех же словах высказать и для области G только-что определенного рода. При этом будем предполагать, что точка O, в которой помещен источник, не совпадает ни с одной из точек разветвления области G [1]).

Задачей следующих параграфов является решение нашей минимальной задачи в этом самом общем смысле. Для этого предпошлем ряд вспомогательных рассуждений.

---

[1]) От этого предположения легко освободиться, перенеся при помощи конформного отображения такую точку разветвления в обыкновенную точку.

§ 5. Предельная задача и минимальный принцип для круга.

Мы начнем с доказательства того, что решение предельной задачи для круга (которая в главе III, § 10 была уже решено нами при помощи интеграла Пуассона) эквивалентна решению некоторой минимальной задачи типа, рассмотренного в § 3.

Докажем следующую теорему: пусть $w(x, y)$ будет функция непрерывная и имеющая кусочно-непрерывные производные в круге K радиуса R, включая его контур $\varkappa$, и такая, что интеграл Дирихле $D[w]$ имеет конечное значение. Пусть u будет такая регулярная внутри K гармоническая функция, которая на его контуре совпадает с w. Тогда существует интеграл $D[u]$ [1]) и имеет место неравенство

$$D[u] \leqslant D[w]. \tag{1}$$

Таким образом предельная задача теории потенциала, т. е. задача об определении гармонической функции по ее значениям на контуре эквивалентна задаче о минимуме интеграла $D[w]$ *при заданных значениях* w *на контуре.*

Эта теорема была бы сейчас же доказана, если бы можно было приложить формулу Грина для круга K к функциям u и $u-w$. Действительно, мы имеем

$$D[w] = D[u + (w-u)] = D[u] + D[w-u] + 2D[u, w-u].$$

С другой стороны, пользуясь формулой Грина и замечая, что $\Delta u = 0$ и что значения u и w на контуре равны, мы имели бы

$$D[u, w-u] = -\iint_K (w-u)\,\Delta u\,dx\,dy - \int_\varkappa (w-u)\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0,$$

[1]) Как раз этот пункт требует доказательства, так как легко задать такие непрерывные значения на контуре, при которых $D[u]$ будет бесконечно большим, например:

$$f(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!\,\vartheta}{n^2}.$$

Таким образом возможны случаи, когда предельная задача разрешима при помощи интеграла Пуассона, но не разрешима при помощи минимального принципа, что было подчеркнуто например Гадамаром (Hadamard).

и следовательно,

$$D[w] = D[u] + D[w-u] \geqslant D[u].$$

Однако, вообще говоря, ничего нельзя сказать относительно значений производных от функции u на окружности $\varkappa$. Заметим, что на основании главы III, § 8, (8), функцию u можно представить как предел $u = \lim\limits_{h \to \infty} u_n$ последовательности везде регулярных гармонических функций u_n (конечных тригонометрических сумм), и то же самое можно сказать и о производных. Действительно, можно положить (если r и ϑ обозначают полярные координаты)

$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

где коэффициенты

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(R, \vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(R, \vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

зависят только от заданных граничных значений w. Так как при $r = R$ оба интеграла

$$\int_0^{2\pi} w \frac{\partial u_n}{\partial r} d\vartheta, \quad \int_0^{2\pi} u_n \frac{\partial u_n}{\partial r} d\vartheta$$

равны

$$\frac{\pi}{R} \sum_{k=1}^{n} k (a_k^2 + b_k^2),$$

то при $r = R$ имеем

$$\int_0^{2\pi} (w - u_n) \frac{\partial u_n}{\partial r} d\vartheta = 0,$$

Так как функция u_n во всем круге K, включая контур $\varkappa$, имеет непрерывные первые и вторые производные, то теперь применение формулы Грина дозволено и из равенства $D[w] = D[u_n + (w - u_n)]$ получается, как и выше, неравенство

$$D[w] \geqslant D[u_n].$$

Пусть теперь $K_1, K_2, \ldots$ будет какая-нибудь последовательность концентрических кругов, сходящихся извнутри к кругу K; тогда прежде всего имеем, что

$$D_K[w] \geqslant D_{K_h}[u_n].$$

Так как в круге K_h функции u_n и их производные любых порядков равномерно сходятся к функции u и соответственно к ее производным, то интеграл $D_{K_h}[u]$ также существует и

$$D_K[w] \geqslant D_{K_n}[u].$$

Переходя к пределу $h \to \infty$, заключаем, что интеграл $D_K[u]$ существует и что

$$D_K[u] = \lim_{h \to \infty} D_{K^h}[u] \leqslant D_K[w],$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат можно значительно обобщить. Прежде всего, из инвариантности интеграла Дирихле относительно конформного отображения следует, что та зависимость, которая существует для круга между минимальной задачей и решением предельной задачи, существует и для всякой замкнутой области, которую можно отобразить конформно на круг. Так например, эта зависимость имеет место для области, внешней по отношению к кругу или для n-листного круга с точкой разветвления в центре, т. е. для всех областей, которые в § 4 были названы нами „круговыми областями".

В заключение рассмотрим еще одно обобщение вышеприведенной теоремы о минимуме для круга. Пусть K будет круг, окружность которого $\varkappa$ разделена на две дуги $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Пусть $w(x, y)$ будет какая-нибудь функция, непрерывная в круге K и на его окружности, имеющая там кусочно-непрерывные частные производные первого порядка и конечный интеграл Дирихле $D[w]$.

При этих условиях существует гармоническая функция $u(x, y)$, непрерывная внутри круга K и на его окружности $\varkappa$, регулярная внутри K и на части контура $\varkappa_2$, совпадающая на $\varkappa_1$ с функцией w и имеющая равную нулю производную по нормали на $\varkappa_2$; эта функция обладает тем свойством, что

$$D[u] \leqslant D[w]. \tag{2}$$

Это значит, что *гармоническая функция u решает задачу о минимуме интеграла Дирихле, распространенного на область круга, если значения на контуре заданы только для некоторой части окружности этого круга, на остальной же части остаются произвольными.*

Для доказательства отобразим конформно круг K на полукруг так, чтобы дуга $\varkappa_1$ переходила бы в полуокружность, а дуга $\varkappa_2$ в диаметр. В силу сказанного в главе IV, § 8, такое отображение возможно. Функция w перейдет при этом в некоторую функцию точки полукруга, которую обозначим опять через w. Отразим теперь полукруг в его диаметре и продолжим функцию w в симметричный полукруг, приписывая симметричным точкам те же самые значения функции. В этом новом круге мы можем, пользуясь непрерывными граничными значениями, которые принимает на его окружности функция w, построить при помощи интеграла Пуассона соответствующую гармоническую функцию u. По предыдущей теореме, для этого круга имеет место неравенство

$$D[u] \leqslant D[w], \tag{3}$$

справедливое (в силу симметричности отражения в диаметре) и для каждого полукруга. В силу той же симметричности можно утверждать, что на диаметре производная функции u по нормали к этому диаметру будет равна нулю. Конформно отобразив полукруг обратно на первоначальный круг и замечая, что при этом направление нормали к диаметру перейдет в направление нормали к дуге $\varkappa_2$, мы убедимся в справедливости нашей теоремы.

Едва ли заслуживает особого замечания, что в силу инвариантности интеграла Дирихле при конформном отображении наша обобщенная теорема о минимуме будет иметь место и в том случае, когда вместо круга будет рассматриваться „круговая область".

§ 6. Леммы.

Из малости интеграла Дирихле $D[\varphi]$ мы выведем некоторые заключения о подинтегральной функции. При произвольной функции φ это, вообще говоря, сделать невозможно, но это удается сделать, если принять, что φ есть гармоническая функция. Тогда имеет место следующая полезная для многочисленных приложений в теории функций лемма.

Лемма I. Пусть $p(x, y)$, регулярная в данной области B гармоническая функция, и пусть ее интеграл Дирихле $D_B[p]$ меньше некоторого числа M. Пусть B' — какая-нибудь замкнутая область, лежащая внутри B, и R — такое число, что всякий круг радиуса R с центром в какой-нибудь точке области B' лежит весь вместе с его окружностью внутри B. Тогда везде в области B' имеет место неравенство

$$p_x^2 + p_y^2 \leqslant \frac{M}{R^2\pi}. \tag{1}$$

Таким образом, если $f(z) = p + iq$ есть такая аналитическая функция, у которой вещественная часть равна $p(x, y)$, то для каждой замкнутой области B', лежащей внутри B, линейное увеличение, получаемое при конформном отображении при помощи этой функции, будет не больше некоторой величины, зависящей только от M и B' и стремящейся одновременно с M к нулю [1]).

Для доказательства рассмотрим производную $f'(z) = p_x - ip_y$ в круге K радиуса R, лежащем вместе с его окружностью целиком внутри B. По интегральной формуле Коши значение производной в центре z_0 этого круга будет равно

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(t)}{t - z_0}\,dt,$$

где интеграл взят в положительном направлении по какой-нибудь окружности положительного радиуса $r \leqslant R$ с центром в точке z_0. Если положить $t - z_0 = re^{i\vartheta}$, то, умножая

---

[1]) На эту лемму можно в некотором отношении смотреть как на дополнение теорем искажения (глава VI, § 7).

это равенство на r и интегрируя его в пределах от 0 до R, получим

$$\frac{R^2}{2} f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\int_K \frac{f'(t)}{re^{i\vartheta}} re^{i\vartheta} \cdot i d\vartheta \cdot r dr = \frac{1}{2\pi} \int\int_K f'(t)\, dx\, dy$$

и следовательно

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{1}{R^2\pi} \int\int_K |f'(t)|\, dx\, dy. \tag{2}$$

Пользуясь теперь неравенством Шварца (ср. главу VI, § 4) из (2) получим

$$|f'(z_0)|^2 \leqslant \frac{1}{R^2\pi} \int\int_K |f'(t)|^2\, dx\, dy = \frac{1}{R^2\pi} D_K[p].$$

По предположению, около каждой точки нашей области B', как около центра, можно описать круг K радиуса $R^{\cdot}$ так, чтобы этот круг целиком лежал внутри B. Для этого круга, следовательно, будет $D_K[p] \leqslant M$. Таким образом, в области B' мы имеем

$$p_x^2 + p_y^2 = |f'(z)|^2 \leqslant M \cdot \frac{1}{R^2\pi},$$

что и доказывает лемму.

Отсюда непосредственно следует следующая лемма.

Лемма II. Если последовательность гармонических регулярных в B функций $u_1, u_2, u_3, \ldots$ сходится в некоторой точке области B и если

$$\lim_{n \to \infty} D_B[u_n] = 0, \tag{3}$$

то в каждой замкнутой области B', целиком лежащей внутри области B, последовательность функций u_n равномерно сходится к некоторой постоянной.

Если же вместо (3) (при тех же предположениях) имеем, что

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} D_B[u_n - u_m] = 0, \tag{4}$$

то последовательность функций u_n сходится в B' равномерно к некоторой регулярной гармонической функции u, Действительно, по лемме I, в первом случае, производные функций u_n сходятся в B' равномерно к нулю. Так как, по предположению, последовательность функций u_n сходится в некоторой точке, то эта последовательность сходится равномерно в B' к некоторой постоянной. Точно также и во втором случае последовательность u_n сходится равномерно к некоторой предельной функции u, которая (глава III, § 9) будет в B' регулярной гармонической функцией.

Если предположить, что последовательность $u_1, u_2, \ldots$ сходится на некоторой части контура, а не во внутренней точке, то то же можно доказать сходимость внутри области. Действительно, имеет место такая лемма.

Лемма III. Пусть B будет замкнутая область, контур которой содержит дугу окружности C, и пусть B' будет такая замкнутая область, принадлежащая B, которая может содержать из точек контура области B только точки, внутренние для дуги C. Пусть $u_1, u_2, \ldots$ будет такая последовательность гармонических регулярных в B функций, для которой, с одной стороны,

$$\lim_{n \to \infty} D_B[u_n] = 0, \tag{5}$$

с другой стороны, на дуге C

$$u_1 = u_2 = \ldots = 0. \tag{6}$$

При этих условиях последовательность $u_1, u_2, \ldots$ сходится в B' равномерно к нулю.

Если же

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} D_B\,[u_n - u_m] = 0 \tag{7}$$

и на дуге C

$$u_1 = u_2 = \ldots, \tag{8}$$

то наша последовательность u_n сходится в B' равномерно к некоторой регулярной гармонической функции u.

Для доказательства отразим область B в дуге окружности C. При условии (6) продолжим все гармонические функции u_n в отраженную в дуге C область так, чтобы симметричным точкам соответствовали бы значения функции u_n, равные по величине и противоположные по знаку [1]). Тогда по § 2 интеграл $D[u_n]$ по отраженной области будет иметь то же значение, что и по области B. Равенство (5) будет иметь место, следовательно, во всей области, состоящей из B и из отраженной области. Прилагая лемму II, получаем доказываемую теорему. Такие же соображения имеют место и при условиях (7) и (8).

Аналогично доказывается наконец и последняя лемма.

Лемма IV. Пусть B, B' и C имеют те же самые значения, что и в лемме III, и пусть для области B имеют место равенства (5) или (7), а на дуге C

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}=\ldots=0 \tag{9}$$

или соответственно

$$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}=\ldots, \tag{10}$$

где n обозначает нормаль к C. Пусть далее последовательность u_1, $u_2, \ldots$ сходится в некоторой точке области B.

---

[1]) Для аналитического продолжения гармонической функции u через дугу круга, пользуясь принципом симметрии для аналитической функции $f(z)=u+iv$ (глава V, § 2, соответственно глава VI, § 4), можно доказать следующую теорему: *если функция u обращается в нуль на дуге окружности, то симметричным точкам надо приписать равные по величине и противоположные по знаку значения функции. Если же производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ по нормали к этой дуге равна нулю, то симметричным точкам надо приписать равные значения u.*

Этот „принцип симметрии для гармонических функций“ можно доказать и прямо, не пользуясь принципом симметрии для аналитических функций и при том, можно не предполагать функцию регулярной на дуге C. Действительно, пусть u будет, например, гармоническая регулярная в полукруге функция, непрерывная вплоть до контура. Пусть эта функция на ограничивающем полукруг диаметре имеет постоянное значение, хотя бы равное нулю. Функцию u можно продолжить в симметричный полукруг, при помощи отражения. В самом деле, рассмотрим гармоническую функцию, изображаемую интегралом Пуассона, построенным при помощи граничных значений, которые равны граничным значениям u на данной верхней полуокружности и равны по величине, но противоположны по знаку этим значениям на отраженной полуокружности. Эта функция на диаметре имеет значения, равные нулю, что ясно видно из формулы (10) § 8, глава III, в которой надо положить $\psi=0$, $g(2\pi-\varphi)=-g(\varphi)$. Таким образом, на всем контуре данного полукруга она совпадает со значениями функции u, и следовательно должна совпасть со значениями функции u и внутри полукруга.

Тогда эта последовательность сходится равномерно в B' к некоторой постоянной или соответственно к некоторой регулярной гармонической функции u.

Для доказательства отразим [1]) область B в дуге C, а затем доказательство заканчивается как и в предыдущей лемме.

Заметим еще, что получающаяся в случае (10) гармоническая функция u непрерывна на дуге C круга и имеет там те же производные по нормали, что и функции u_n.

§ 7. Решение минимальной задачи для специальных областей.

Теперь мы можем приступить к доказательству существования решения нашей минимальной задачи. Начнем с того случая, когда область G построена из конечного числа N тех „круговых областей", которые были определены в § 4 [2]).

Предположим, что тот круг K радиуса a с центром в нулевой точке O, который служил для определения нашей „функции особенности" S, лежит целиком вместе с его окружностью внутри круговой области K_1. Предположим еще, что ни одна из круговых областей K_2, $K_3, \ldots K_N$ не имеет общих точек с K. Наконец пусть K_1 лежит целиком внутри G.

Существует ли решение нашей минимальной задачи — пока должно оставаться нерешенным. Но, во всяком случае, множество значений $D[\Phi]$, соответствующих „допустимым" функциям Φ, имеет точную нижнюю границу $d \geqslant 0$, так что для всякой допустимой функции

$$D[\Phi] \geqslant d \tag{1}$$

и, следовательно, существует такая последовательность функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} D[\Phi_n] = d. \tag{2}$$

Это непосредственно следует из существования точной нижней границы множества положительных чисел. (Может

[1]) См. предыдущее примечание.

[2]) Напомним, что такую область надо считать замкнутой.

оказаться, что все функции Φ_n равны одной и той же функции U, в случае, если эта функция действительно дает значение $D[U]=d$ и следовательно решает задачу). Такую последовательность $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ назовем *минимальной последовательностью.*

Выведем сперва некоторое важное соотношение, которому подчиняется всякая минимальная последовательность. Пусть $h_1, h_2, \ldots$ будут непрерывные в G функции, обладающие кусочно-непрерывными производными, и такие, что соответствующие интегралы $D[h_n]$ будут меньше некоторого числа M, не зависящего от n. Тогда, для всякой минимальной последовательности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ будет

$$\lim_{n \to \infty} D[\Phi_n, h_n] = 0; \tag{3}$$

причем $D[\Phi_n, h_n]$ будет стремиться к нулю равномерно, в том смысле, что при заданном M, независимо от специального выбора последовательности функций h_n, выражение $D[\Phi_n, h_n]$ делается по модулю меньше всякого произвольно заданного числа, если только n будет сделано достаточно большим.

Действительно, построим функцию $\Phi_n + \varepsilon h_n$, где ε — некоторый параметр. Тогда имеем, что

$$D[\Phi_n + \varepsilon h_n] = D[\Phi_n] + \varepsilon(2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n]) \geqslant d.$$

Если бы при некоторых произвольно больших значениях n было бы

$$|D[\Phi_n, h_n]| \geqslant \alpha > 0,$$

то, приняв $\varepsilon = \pm \frac{\alpha}{M}$, мы имели бы, что

$$|\varepsilon(2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n])| \geqslant \frac{\alpha^2}{M}.$$

Так как $D[\Phi_n]$ стремится к d, когда n неограниченно растет, то при некоторых достаточно больших n и при условии, что знак ε противоположен знаку $D[\Phi_n, h_n]$, мы имели бы

$$D[\Phi_n] + \varepsilon(2D[\Phi_n, h_n] + \varepsilon D[h_n]) \leqslant D[\Phi_n] - \frac{\alpha^2}{M} < d,$$

что противоречит вышеприведенному неравенству.

В частности можно принять, что $h_n = \Phi_m - \Phi_n$, где m

или остается постоянным или изменяется как-нибудь вместе с n. Действительно,

$$D[h_n] = D[\Phi_n] + D[\Phi_m] - 2D[\Phi_n, \Phi_m],$$

в силу формулы (5) § 2, будет наверно меньше некоторого числа, независящего от n и m. Так как

$$D[\Phi_m] = D[\Phi_n + (\Phi_m - \Phi_n)] = D[\Phi_n] + 2D[\Phi_n, \Phi_m - \Phi_n] + \\ + D[\Phi_m - \Phi_n],$$

то из равенства

$$\lim_{m\to\infty} D[\Phi_m] = \lim_{n\to\infty} D[\Phi_n] = d,$$

принимая во внимание (3), выведем, что при n и m достаточно больших, $D[\Phi_m - \Phi_n]$ будет сколь угодно малым.

Таким образом, для каждой минимальной последовательности имеем соотношение

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} D[\Phi_n - \Phi_m] = 0, \tag{4}$$

играющее основную роль для дальнейшего доказательства[1]).

Пусть теперь $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ будет какая-нибудь минимальная последовательность нашей минимальной задачи. Образуем при ее помощи новую минимальную последовательность,

---

[1]) Формулу (4) можно, как это сделал Beppo Levi, доказать следующим образом, не пользуясь формулой (3). Если Φ_m и Φ_n допустимые функции, то (при произвольных постоянных λ и μ) функция

$$\Phi = \frac{\lambda\Phi_m + \mu\Phi_n}{\lambda + \mu}$$

будет тоже допустимой для нашей минимальной задачи. Таким образом имеем, что $D[\Phi] \geqslant d$.

Отсюда имеем

$$\lambda^2 (D[\Phi_m] - d) + 2\lambda\mu\, (D[\Phi_m, \Phi_n] - d) + \mu^2 (D[\Phi_n] - d) \geqslant 0.$$

Так как это равенство справедливо при произвольных λ и μ, то

$$(D[\Phi_m] - d)\,(D[\Phi_n] - d) - (D[\Phi_m, \Phi_n] - d)^2 \geqslant 0.$$

Имеем поэтому

$$|D[\Phi_m - \Phi_n]| \leqslant |D[\Phi_m] - d| + |D[\Phi_n] - d| + 2\,|D[\Phi_m, \Phi_n] - d| \leqslant \\ \leqslant |D[\Phi_m] - d| + |D[\Phi_n] - d| + 2\sqrt{(D[\Phi_m] - d)\,(D[\Phi_n] - d)}.$$

Отсюда следует сейчас же формула (4).

функции которой получаются из функций первоначальной последовательности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ „*процессом сглаживания*“, чтобы таким способом приблизиться к решению нашей задачи.

Для того, чтобы описать наш процесс сглаживания, предположим, прежде всего, что K_h будет круговая область, которая вся лежит внутри G и которая отлична от K_1. Мы будем говорить, что допустимая функция сравнения Φ „сглажена“ для области K_h, если построена такая функция, которая вне K_h совпадает с Φ, а внутри K_h будет регулярною гармоническою функциею, решающей предельную задачу теории потенциала для круговой области K_h, причем значениями на контуре являются те значения, какие принимает на контуре K_h функция Φ. Если же K_h имеет дугу C, общую с контуром области G, то под сглаживанием для K_h мы будем понимать замену Φ такой допустимой (а значит непрерывной и на контуре K_h) функцией, которая совпадает с Φ вне K_h, а внутри K_h будет регулярной гармонической функцией, имеющей равные нулю производные по нормали на дуге C. Наконец под сглаживанием в K_1 будем понимать замену Φ такой допустимой функцией Φ^*, что

$$\Phi^* + S - \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{a^2}$$

будет внутри K_1 регулярной гармонической функцией, а Φ^* вне K_1 и на его контуре будет совпадать с Φ.

Расположим теперь круговые области $K_1, K_2, \ldots, K_N$ в каком-нибудь порядке так, чтобы каждая из них встречалась бы по крайней мере один раз, и сгладим некоторую допустимую функцию сравнения Φ сперва для первой из этих областей; полученную таким путем функцию сгладим для второй области и т. д., пока этот процесс сглаживания не будет выполнен, хотя бы один раз, для каждой из круговых областей $K_1, \ldots, K_N$. Мы будем говорить, что полученная таким способом функция Ψ будет допустимой функцией сравнения, полученной путем „сглаживания функции Φ для области G“. Очевидно, что такая функция останется сглаженной в G, если присоединим еще одно сглаживание для какой-нибудь круговой области K_h. Каждая сглаженная в G функция будет регулярной гармонической функцией в каждой части области, не содержащей дуг окружностей, ограничивающих наши круговые области K_h.

При сглаживании величина интеграла Дирихле не увеличивается, т. е. всегда имеем

$$D[\Psi] \leqslant D[\Phi], \tag{5}$$

если Ψ получено путем сглаживания Φ. Для каждой круговой области, отличной от K_1, это следует из § 5, (1). Для K_1 обозначим

$$S - \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{a^2} = k;$$

функция k будет в K равняться нулю, а внутри кругового кольца R, лежащего между перифериями $\varkappa$ и $\varkappa_1$ кругов K и K_1, будет удовлетворять уравнению $\Delta k = 0$; на окружности $\varkappa$ производная по нормали $\frac{\partial k}{\partial n}$ обращается в нуль. Так как $\Psi + k$ будет гармонической регулярной внутри K_1 функцией, совпадающей на контуре с $\Phi + k$, то в силу § 5 имеем для круга K_1:

$$D[\Psi + k] \leqslant D[\Phi + k]$$

или

$$D[\Psi] \leqslant D[\Phi] + 2D[\Phi - \Psi,\ k].$$

По формуле Грина

$$D[\Phi - \Psi,\ k] = D_R[\Phi - \Psi,\ k] = -\iint\limits_R (\Phi - \Psi)\,\Delta k\,dx\,dy -$$

$$- \int\limits_{\varkappa_1} (\Phi - \Psi)\frac{\partial k}{\partial n}\,ds - \int\limits_{\varkappa} (\Phi - \Psi)\frac{\partial k}{\partial n}\,ds = 0,$$

ибо в R удовлетворяется уравнение $\Delta k = 0$, на $\varkappa$ везде $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$ и на $\varkappa_1$ везде $\Psi = \Phi$. Таким образом, как было сказано,

$$D[\Psi] \leqslant D[\Phi].$$

Это неравенство имеет таким образом место при всяком сглаживании для области G.

Прилагая теперь описанный процесс сглаживания к функциям Φ_1, $\Phi_2, \ldots$ нашей минимальной последовательности, перейдем от каждой функции Φ_n к такой функции Ψ_n, которая получается из Φ_n сглаживанием для области G.

Прибавляя постоянные, нормируем эти функции Ψ_n так, чтобы они обращались бы в точке O в нуль.

Так как каждая функция Ψ_n будет допустимой функцией сравнения, то мы должны иметь

$D[\Psi_n] \geqslant d$; из $D[\Psi_n] \leqslant D[\Phi_n]$ и из $\lim\limits_{n\to\infty} D[\Phi_n] = d$ следует поэтому, что

$$\lim_{n\to\infty} D[\Psi_n] = d.$$

Таким образом, функции $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ *образуют минимальную последовательность и поэтому удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} D[\Psi_n - \Psi_m] = 0. \tag{6}$$

Представим себе, что сглаживание производится так, что круг K_1 будет последним в ряду. Функции $\Psi_n + S$ будут тогда гармоническими регулярными в круге K_1, за исключением нулевой точки, функциями. Но отсюда и из леммы II, § 6 непосредственно следует равномерная сходимость функций Ψ_n в каждой замкнутой области, лежащей внутри круга K_1. Действительно, $\Psi_n - \Psi_m$ будет такая гармоническая регулярная в круге K_1 функция, равная нулю в точке O, которая удовлетворяет предельному равенству (6). Обозначим через U предельную функцию $\lim\limits_{n\to\infty} \Psi_n$; тогда $U + S = u$ будет гармонической регулярной в круге K_1 за исключением нулевой точки функцией.

Пусть K_2 будет круговая область, имеющая общую с K_1 замкнутую часть B. Докажем, что последовательность функций Ψ_n определяет гармоническую функцию также и в круговой области K_2, совпадающую в общей области B с функцией U, только-что определенной для K_1. Действительно, представим себе, что из минимальной последовательности функций Ψ_n образована новая минимальная последовательность Ω_n, причем Ω_n получается из Ψ_n сглаживанием для круговой области K_2; тогда имеем как равенство

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} D[\Omega_n - \Omega_m] = 0, \tag{7}$$

так и равенство

$$\lim_{n\to\infty} D[\Omega_n - \Psi_n] = 0,$$

так как последовательность Ψ_1, Ω_1, Ψ_2, Ω_2,...тоже будет минимальной. Тем более имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} D_B[\Omega_n - \Psi_n] = 0.$$

Так как $\Omega_n - \Psi_n$ равна нулю на дуге окружности, ограничивающей K_2 и лежащей в K_1, то по лемме III из § 6 функция $\Omega_n - \Psi_n$ должна в B стремиться к нулю при возрастании n, т. е. Ω_n сходится к определенной раньше функции U. В силу равенства (7), на основании леммы II, гармонические функции Ω_n будут, следовательно, во всем круге K_2 стремиться к гармонической функции U, которая является аналитическим продолжением построенной выше для K_1 функции U.

Тем же путем можно пойти дальше и получить гармоническую функцию U, которая в каждой замкнутой части G^* области G, не содержащей дуг окружностей, производящих разбиение нашей области на круговые, будет пределом, к которому равномерно сходится каждая сглаженная минимальная последовательность и для которой $u = U + S$ будет везде в G, за исключением точки O, регулярной гармонической функцией (с заданной особенностью в O).

Надо еще доказать, что U решает нашу минимальную задачу. Прежде всего легко видеть, что интеграл $D[U]$ существует и не может быть больше d. Действительно, так как функции Ψ_n в каждой замкнутой части G^*, где нет дуг окружностей, производящих разбиение области, равномерно сходятся к U и так как отсюда по § 9, гл. III вытекает равномерная сходимость их производных, то имеем:

$$D_{\overline{G}}[U] = \lim_{n\to\infty} D_{\overline{G}}[\Psi_n] \leqslant \lim_{n\to\infty} D[\Psi_n] = d,$$

где $D_{\overline{G}}$ обозначает сумму интегралов Дирихле, распространенных по совокупности $\overline{G}$ таких частичных областей. Устремляя $\overline{G}$ к G, получим в самом деле, что $D[U] \leqslant d$.

Показав еще, что U будет допустимая функция, мы докажем тем самым, что $D[U] = d$, так как интеграл Дирихле для допустимой функции не может быть меньше d.

Чтобы показать, что U будет допустимой функцией, надо только доказать, что U или, что все равно, u имеет на контуре области G, по предположению замкнутой, непрерывные значения. Из леммы IV, § 6, имеем для каждой дуги C контура, что на ней u непрерывна и обладает равными нулю производными по нормали. *Сопряженная гармоническая функция v должна поэтому*, в силу дифференциальных уравнений Коши-Римана, *сохранять постоянное значение вдоль каждой такой дуги $\varkappa$*. Покажем теперь, что на каждой связной части контура это значение одно и то же, т. е. что граничные значения v остаются непрерывными в точке P пересечения двух, следующих друг за другом круговых дуг C_1 и C_2 контура G. Для этого представим себе, что достаточно малая окрестность точки P, в части, принадлежащей к G, так отображена на однолистную область плоскости $\xi\eta$, что точка P переходит в нулевую точку и сходящиеся в P части дуг C_1 и C_2 переходят в два отрезка Γ_1 и Γ_2 оси ξ. Функция v будет тогда гармонической функцией также от ξ и η, которую мы опять обозначим через v. Эта функция на Γ_1 и Γ_2 имеет постоянные граничные значения v_1 и соответственно v_2 и может терпеть разрыв, самое большее, в нулевой точке. В области же H, примыкающей к Γ_1 и Γ_2 (области, получающейся отображением вышеупомянутой части G), которую можно предполагать лежащей в верхней полуплоскости, она будет регулярна. Введем теперь полярные координаты r, ϑ с полюсом в нулевой точке и будем отсчитывать ϑ от положительной оси ξ. Если R выбрано так, что полуокружность $r=R$, $0<\vartheta<\pi$ лежит вся в области H, то колебание v на каждой дуге окружности $0<\vartheta<\pi$ $(0<r\leqslant R)$ будет не меньше $\alpha=|v_1-v_2|$. Поэтому имеем

$$\alpha\leqslant\int\limits_0^\pi\left|\frac{\partial v(r,\vartheta)}{\partial\vartheta}\right|d\vartheta$$

и, в силу неравенства Шварца,

$$\alpha^2\leqslant\pi\int\limits_0^\pi\left(\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right)^2d\vartheta.$$

Разделив это неравенство на r и проинтегрировав по r от $r=\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ до $r=R$, получим

$$\alpha^2 \lg \frac{R}{\varepsilon} \leqslant \pi \iint\limits_{H^*} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)^2 dr\, d\vartheta \leqslant \pi \iint\limits_{H^*} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)^2\right) r\, dr\, d\vartheta = \pi D_{H^*}[v],$$

где H^* обозначает половину кругового кольца $\varepsilon \leqslant r \leqslant R$, $0<\vartheta<\pi$. Так как $D[v]=D[u]$, то выражение в правой части остается конечным, если интеграл возьмем вплоть до $r=0$, так что $\alpha^2 \lg \frac{R}{\varepsilon}$ не превосходит некоторой независящей от ε границы; отсюда имеем, что $\alpha=0$, т. е. $v_1=v_2$ [1]).

Теперь легко видеть, что u имеет непрерывные граничные значения на всем контуре G. Так как для внутренних точек каждой дуги C контура G функция u имеет непрерывные граничные значения, то надо доказать непрерывность u только для угловых точек контура. Только что рассмотренное конформное отображение угла на область плоскости $\xi\eta$ показывает, что аналитическая функция $u+iv$, как функция от $\xi+i\eta$ может быть аналитически продолжена по принципу симметрии в окрестности нулевой точки через вещественную ось плоскости $\xi\eta$ [2]). Итак, в этой окрестности u будет непрерывна, откуда, возвращаясь обратно к G, докажем наше утверждение. А тем самым заканчивается доказательство того, что функция U решает нашу минимальную задачу.

§ 8. Непрерывная зависимость потенциалов потока от области. Решение общей минимальной задачи.

После того как решена минимальная задача для наших специальных областей, ее решение в общем случае получается как простое следствие одного интересного самого по себе предложения, которое выражает непрерывность зависимости потенциалов потока от области.

---

[1] Ср. соответствующие рассуждения в главе VI, § 4.

[2]) См. сноску на стр. 284.

Предположим, что область G (соответственно с § 4) определена как „предел“ последовательности заключающих друг друга областей G_n, причем эти области G_n не должны обязательно быть того вида, который указан в предыдущем параграфе. Доказываемое предложение можно тогда формулировать так: предположим, что точка O (с координатами $x=0$, $y=0$) принадлежит всем областям G_n; пусть $u_n(x, y)$ будет соответствующий G_n нормированный потенциал потока, имеющий особенность $\frac{x}{x^2+y^2}$ в точке O. Тогда в каждой замкнутой области B, принадлежащей области G и не содержащей точки O, последовательность потенциалов u_n будет равномерно сходиться к гармонической функции $u(x, y)$, которая представляет собой потенциал потока области G. Другими словами: *из существования потенциалов потока для областей G_n можно вывести существование потенциала потока в области G и получить его простым переходом к пределу.*

Пусть S будет опять введенная в § 3 функция, соответствующая особенности $\frac{x}{x^2+y^2}$. Рассмотрим функции $U=u_n-S$ и положим

$$D_{Gn}[U_n]=D_n[U_n]=d_n\ ^{1)}.$$

Так как U_n обозначает потенциал потока для области G_n, то число d_n будет минимальное значение для этой области G_n.

Пусть Φ будет какая-нибудь допустимая для минимальной задачи области G функция и d точная нижняя граница всех соответствующих интегралов Дирихле $D_G[\Phi]$. При всяком n тогда имеем, что

$$d_n \leqslant d.$$

Действительно, всякому произвольно малому, положительному числу ε соответствует такая допустимая в G функция Φ, что $D_G[\Phi] < d+\varepsilon$ и тем более $D_n[\Phi] < d+\varepsilon$, откуда и следует наше утверждение. Если, с другой стороны, $n < m$, то так как U_m тоже есть допустимая функция сравнения в G_n,

$$d_n = D_n[U_n] \leqslant D_n[U_m] \leqslant D_m[U_m] = d_m,$$
$$d_n \leqslant d_m;$$

[1]) Вообще для простоты будем писать всегда $Dn\,[\Phi]$ вместо $DGn\,[\Phi]$.

следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \delta$ существует и будет не больше d, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \delta \leqslant d. \tag{1}$$

Если положить $U_m - U_n = h$, то, в силу того, что по § 3, (4) $D_n[U_n, h] = 0$, будет

$$d_m \geq D_n[U_m] = D_n[U_n + h] = D_n[U_n] + D_n[h] = d_n + \\ + D_n[U_m - U_n].$$

Таким образом, при m и n достаточно больших интеграл $D_n[U_m - U_n]$ будет сколь угодно малым, т. е. для всякой замкнутой области B, лежащей внутри G, имеем, что

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} D_B[U_m - U_n] = 0.$$

В силу леммы II, § 6 и условия, что $U_n = 0$ в точке O, получаем теперь равномерную сходимость функций U_n и соответственно потенциалов потока u_n. Обозначим предельные функции через U и соответственно u. Так как сходимость остается равномерной и для производных, то

$$D_B[U] = \lim_{n\to\infty} D_B[U_n] \leqslant \lim_{n\to\infty} D_n[U_n] = \delta.$$

Так как B произвольная замкнутая область внутренняя к G, то отсюда сейчас же следует существование $D[U]$ и зависимость

$$D[U] \leqslant \delta \leqslant d. \tag{2}$$

Так как d есть точная нижняя граница значений интегралов Дирихле $D[\Phi]$ для всех допустимых функций Φ, то из (2) следует, что

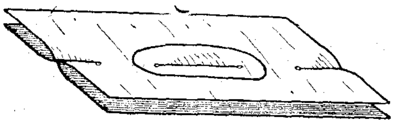
$$D[U] = d. \tag{3}$$

Таким образом, в силу § 3, U представляет собой решение нашей минимальной задачи, что и доказывает нашу теорему.

Из этой теоремы непрерывности непосредственно следует существование решения нашей минимальной задачи для самой общей области, определенной в § 4, так как в § 7 мы доказали существование потенциалов потока для тех областей G_n которые служили для построения этой области.

§ 9. Конформное отображение на плоскость с надрезами.

Перейдем теперь к изучению конформного отображения, совершаемого аналитической функцией $\zeta = f(z) = u + iv$, *„характеристической функцией течения"*, где u — только-что найденная гармоническая функция, а v — сопряженный с ней потенциал. Для этого сперва нужно сделать некоторые замечания геометрического характера относительно связности области G. Действительно, для многолистных областей могут встретиться обстоятельства совершенно иного рода, чем для областей однолистных, а именно могут существовать такие *„циклические сечения"* (т. е. простые замкнутые, непрерывные кривые, лежащие в G), которые не разлагают область на отдельные части.



Черт. 56.

Если же область G обладает тем свойством, что она каждым циклическим сечением разлагается на отдельные части, то мы будем называть G *„подобною однолистным"* областью [1]. Примером области, не являющейся подобною однолистным, может служить изображенная на черт. 56 двулистная поверхность Римана, которая не разлагается замкнутой кривой, лежащей в верхнем листе; напротив область, полученная отсюда при помощи разреза вдоль этой кривой, будет подобна однолистной.

Очевидно, что при всяком непрерывном взаимно однозначном отображении одной области на другую, не разлагающее циклическое сечение одной области переходит в такое же другой. Таким образом, конформное отображение на однолистную область возможно только тогда, когда сама отображаемая область G будет подобной однолистным областям. Мы будем впредь делать это предположение.

Область, подобная однолистным, называется (так же, как и однолистная область) n-связной, если она ограничена n отдельными кривыми.

---

[1]) По теореме Жордана (гл. I, § 2) однолистная область обладает таким свойством.

Главная цель настоящего параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы: *функция* $\zeta = u + iv = f(z)$ *отображает* n*-связную подобную однолистной область* G *взаимно однозначно и конформно на всю плоскость* ζ, *разрезанную вдоль* n *прямолинейных отрезков, параллельных вещественной оси.* Некоторые из этих разрезов могут при этом сводиться к точкам.

Если „подобная однолистным" область G *не будет конечно-многосвязной областью,* то, как будет доказано, такая область отображается функцией $\zeta = f(z)$ на однолистную область. *Если понятие плоскости с надрезами надлежащим образом определить и для случая бесконечной многосвязности области, то приведённая выше теорема имеет место и в этом случае.*

Докажем сперва, что аналитическая функция $\zeta = u + iv$ будет *однозначна* в G. Так как потенциал потока u, по самому определению, является однозначной функцией точки в G, то надо только доказать однозначность сопряженной гармонической функции v. Для этого воспользуемся равенством

$$D[U, h] = 0,$$

которое имеет место, если h — какая-нибудь непрерывная в G функция, имеющая кусочно-непрерывные первые производные и конечное значение $D[h]$. Это равенство выражает то обстоятельство, что U является решением нашей минимальной задачи. Это равенство получается или так же как формула (4), § 3 или из (3), § 7, если там положить $\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = U$ и $h_1 = h_2 = \ldots = h$. Если функцию h выберем в частности так, чтобы она в круге K тождественно равнялась бы нулю, то можно U заменить на u и получить

$$D[u, h] = 0. \tag{1}$$

В силу независимости функции u от радиуса круга K (ср. § 3), равенство (1) имеет место и тогда, если h тождественно равно нулю в сколь угодно малой окрестности точки O.

Из равенства (1) можно вывести однозначность функции v.

Действительно, пусть C будет кусочно-гладкая замкнутая кривая, лежащая в G и не проходящая через точку O. Докажем, что для такой кривой имеет место зависимость

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int \frac{\partial v}{\partial s} ds = 0, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ обозначает производную по дуге, а $\frac{\partial}{\partial n}$ производную по той нормали, которая получается положительным вращением на угол $\frac{\pi}{2}$ из направления касательной, направленной в сторону возрастающих дуг s. По предположению, кривая C разделяет G на две области G' и G'', в одной из которых, хотя бы в G', лежит точка O. Функцию h выберем в G'' тождественно равной 1, а в G' так, чтобы во всяком случае она равнялась бы нулю в окрестности точки O и в окрестности каждой граничной точки G, которая является также граничной точкой G'; такой выбор h, очевидно, возможен [1]). Тогда будем иметь, что $D_{G''}[u, h] = 0$, а в силу равенства (1) и $D_{G'}[u, h] = 0$. Прилагая здесь формулу Грина, сразу получим требуемое равенство (2), а вместе с тем и однозначность v.

Доказательство нашей теоремы об отображении проведем, предполагая сперва, как и в § 7, что область G состоит из конечного числа „круговых областей". Переходя потом к пределу, мы докажем теорему и для общего случая.

Итак, пусть G будет область указанного специального вида, относительно которой предположим еще, что она имеет граничные точки (например, не состоит из всей плоскости). Тогда из доказанного в § 7 постоянства граничных значений v на каждой связной части границы области G легко вывести наше предложение. Достаточно только показать, что функция $\zeta = f(z)$ принимает каждое значение $a = \alpha + i\beta$, где β не совпадает ни с одним из n граничных значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функции v один и только один раз. Для этого (соответственно со сказанным в гл. III, § 5, (4)) рассмотрим изменение $\lg[f(z) - a]$, когда точка z описывает в положительном направлении всю границу области G. При обходе каждой связной части границы это изменение равно нулю, так как значение $f(z)$ колеблется на прямой линии плоскости ζ, в ту и другую сторону, и возвращается, наконец, в начальную точку, между тем как точка a лежит вне этой прямой. С другой стороны изменением логарифма определяется разность между числом нулей и числом полюсов функции

[1]) Примем например h отличной от нуля только в узкой полосе, прилегающей к C.

в области G. Так как функция $f(z)$ в G имеет один полюс первого порядка в точке O, то значение a она принимает в G один и только один раз. Таким образом отображенная область состоит из всей плоскости ζ, ограниченной связными граничными точечными множествами числом n, расположенными на n прямых $v = c_1$, $v = c_2, \ldots, v = c_n$. Таким образом, отображениями n непрерывных граничных кривых области G будут n разрезов, что и требовалось доказать.

Мы дадим еще другое доказательство этой теоремы, основанное на рассмотрении кривых $v = \text{const}$. Пусть c будет какая нибудь постоянная, отличная от каждого из граничных значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$ функции v. Рассмотрим в области G кривую $v = c$ и докажем, что она состоит из одного замкнутого пути, проходящего через точку O. Для доказательства заметим сперва, что в силу однозначности функции v в области G и в силу сказанного в главе IV, § 2 о поведении кривых $v = \text{const}$ в окрестности полюса, при всяком c через точку O может проходить только *одна* ветвь кривой $v = c$. Рассмотрим теперь части, на которые разлагается кривой $v = c$ область G, в одной из которых $v < c$, а в другой $v > c$. Если наше предложение не верно, то, так как кривая $v = c$ нигде не может подходить к самой границе, должна существовать замкнутая ветвь кривой $v = c$, не проходящая через точку O и ограничивающая, например, некоторую область $v > c$. На этой ветви кривой производная от v по внутренней нормали была бы всюду положительной. Производная от u по направлению касательной к этой кривой была бы поэтому тоже положительной. Функция u не возвращалась бы поэтому к первоначальному значению при обходе этой области и не была бы, поэтому, однозначной функцией в G, что невозможно.

Следовательно, кривая $v = c$ действительно состоит из одной единственной замкнутой ветви, проходящей через точку O. На каждой такой кривой, если ее обходить в одном направлении, производная от v по нормали, а поэтому также и производная от u по касательной должны сохранять свои знаки. Так как при обходе от точки O до возвращения опять в эту точку функция u меняется от $+\infty$ до $-\infty$, в соответствии с тем обстоятельством, что точка O является полюсом, то кривая $v = c$ отображается взаимно однозначным образом на прямую линию плоскости ζ и это имеет место при всяком c лежащем между $-\infty$ и $+\infty$, за исключением n значений $c_1, c_2, \dots c_n$. Таким образом наша теорема о конформном отображении доказана вторично.

Если наша область G не имеет граничных точек и, следовательно, представляет собой „замкнутую" поверхность Римана (так как G состоит из конечного числа листов), то не существует никакой исключительной кривой $v = \text{const}$, и значит область G отображается на всю плоскость ζ взаимно однозначно и конформно. Функция $z = \psi(\zeta)$ обратная для $f(z)$, определена и однозначна во всей плоскости и может иметь особыми точками только полюса (и следовательно только конечное число их), так как каждому значению ζ соответствует определенная точка G. В силу главы V, § 4, функция $\psi(\zeta)$ будет, поэтому, рациональной функцией, например степени m, а G будет замкнутой m-листной поверхностью Римана, принадлежащей к $f(z)$. *Таким образом, множество тех областей, которые отображаются на полную плоскость ζ, тождественно со множеством поверхностей Римана для функций, обратных рациональным.*

Опуская теперь предположение о том, что область G построена из круговых областей, рассмотрим произвольную область G, подобную однолистной, которая определена (в смысле § 4) как „предел" заключающих друг друга областей G_m указанного выше специального рода. Для каждой области G_m мы можем построить „характеристическую функцию течения" $\zeta_m = f_m(z)$, отвечающую заданной особенности в точке O. По § 8, предельная функция

$$f(z) = \lim_{m \to \infty} f_m(z) = \lim_{m \to \infty} (u_m + iv_m)$$

будет характеристической функцией течения для области G.

Так как функции $f_m(z)$ отображают области G_m на однолистные области плоскости ζ, то, пользуясь надлежаще обобщенной леммой из главы VI, § 1, получим, что функция $\zeta = f(z)$ тоже отображает область G на однолистную область Γ плоскости ζ.

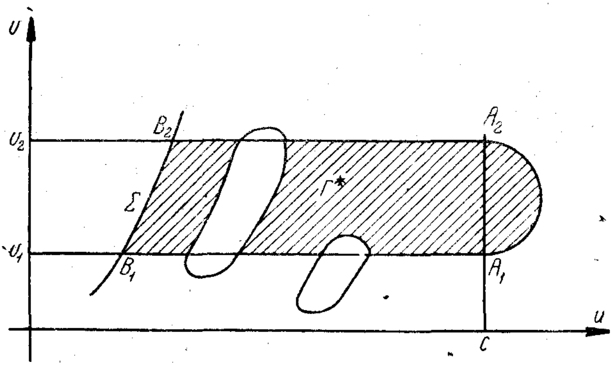
О порядке связности области G мы при этом не делали никакого предположения. Область может быть и бесконечно многосвязной. Таким образом, доказана следующая общая теорема о конформном отображении: *каждая конечно или бесконечно многосвязная область, подобная одно-*

листной, может быть отображена взаимно однозначным образом и конформно на однолистную область [1]).

Покажем теперь, что и в рассмотренном теперь случае общей, подобной однолистным „предельной" области G, если она конечно-многосвязна, отображенная область Γ будет опять надрезанной плоскостью. В силу инвариантности интеграла Дирихле при конформном отображении, из равенства (1), если принять в нем за независимые переменные координаты u, v отображенной области Γ, следует, что

$$\iint\limits_{\Gamma} h_u \, du \, dv = 0, \tag{3}$$

так как $u_u = 1$, $u_v = 0$. Здесь h обозначает любую функцию, которая в окрестности бесконечно удаленной точки области Γ, являющейся отображением точки O, тождественно равняется нулю, а в остальных точках области Γ непре-



Черт. 57.

рывна и имеет кусочно-непрерывные первые производные, и кроме того такая, что интеграл $D_\Gamma[h]$ существует. Отсюда легко видеть, что Γ будет надрезанной областью. Предположим, что связная часть Σ границы области Γ имеет две точки с различными координатами v_1 и v_2, причем пусть например $v_1 < v_2$. Так как все точки, для которых модуль ζ достаточно велик, принадлежат области Γ, то можно выб-

[1]) Это важное предложение названо Koebe *„общим принципом униформизации"*.

рать такое положительное число c_1, чтобы все точки ζ, у которых $u \geqslant c$, принадлежали бы области Г. На прямой $u=c$ отметим точки A_1, A_2, у которых $v=v_1$ и соответственно $v=v_2$ (черт. 57). Отрезок, соединяющий эти точки, весь лежит в области Г.

Проведем теперь влево от отрезка $A_1 A_2$ прямые $v=\text{const}$ до их первой точки пересечения с частью Σ границы. Такая точка встречи должна существовать во всяком случае, так как части Σ границы принадлежит по крайней мере одна точка, ордината которой имеет любое значение между v_1 и v_2. Пусть B_1 и B_2 будут такие точки пересечения для прямых $v=v_1$ и $v=v_2$. Части отрезков A_1B_1, A_2B_2, лежащие в Г, отрезок A_1A_2 и, в общем случае, другие части границы области Г, расположенные между A_1A_2 и Σ, ограничивают одну или несколько частей области Г, совокупность которых обозначим для краткости через Г′. Рассмотрим теперь какую-нибудь непрерывную функцию $g(v)$ от v в промежутке $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$, относительно которой предположим, что она равна нулю при $v=v_1$ и $v=v_2$ (но не тождественно) и что она нигде не отрицательна, например $g(v)=(v-v_1)^2(v-v_2)^2$. Далее определим везде в Г′ функцию $h(u, v)$ равенством $h(u, v)=g(v)$. Построим наконец справа от A_1A_2 полукруг и представим себе, что h продолжена в этом полукруге так, что на контуре h везде равно нулю, например положим, что во всех точках, одинаково удаленных от центра круга h, имеет одно и то же значение. Совокупность областей Г′, к которой присоединен полукруг, построенный на A_1A_2, обозначим через Г* и функцию h зададим всюду вне Г* равной нулю. Для этой функции h очевидно

$$\int_{\Gamma}\int h_u\,du\,dv=\int_{\Gamma^*}\int h_u\,du\,dv=-\int_{v_1}^{v_2} g(v)\,dv,$$

т. е. не равен нулю, что противоречит равенству (3). Таким образом доказано, что все точки какой-нибудь связной части границы области Г лежат на одном отрезке, параллельном оси u, т. е. что Г будет надрезанной плоскостью. Таким образом, наша теорема для конечно-многосвязных областей доказана.

В случае бесконечно-многосвязной области назовем „*плоскостью с прямолинейными надрезами*“ такую однолистную область, для которой каждое связное множество граничных точек образует отрезок, параллельный вещественной оси. Тогда приведенное выше доказательство легко переносится и на этот случай. Для этого нам нужно только построить, как выше, совокупность Γ' областей для связной части Σ границы однолистной области Γ. Если представим себе, что область Γ заменена такою ограниченною множеством точек Σ односвязною областью $\overline{\Gamma}$ плоскости ζ, к которой принадлежит бесконечно удаленная точка, то построение области $\overline{\Gamma}'$ возможно непосредственно. Из этой области надо еще удалить все те точки, которые не принадлежат Γ. Оставшееся множество точек и будет искомым множеством Γ'. После построения Γ' доказательство того, что Σ имеет характер надреза, будет то же самое что и раньше.

Заметим, что *множество точек, образованное надрезами плоскости, в случае бесконечной многосвязности области* Γ, *имеет площадь, равную нулю.* Это значит, что все надрезы области Γ можно заключить внутрь конечного числа таких кусочно-гладких кривых, что ограниченная ими область имеет произвольно малую площадь. Доказательство легко получается из вышеприведенного равенства (3)

$$\iint\limits_{\Gamma} h_u \, du \, dv = 0, \tag{4}$$

если его применить к такой функции h, которая в окрестности бесконечно удаленной точки равна нулю, в области Γ непрерывна, имеет кусочно-непрерывные производные и совпадает с u в некотором круге, внутри которого лежат все надрезы области Γ. Так как область G определена как предел последовательности заключающих друг друга областей G_n, каждая из которых в отдельности отображается на однолистную область Γ_n, ограниченную конечным числом кусочно-гладких кривых, то область Γ можно также рассматривать как предел таких областей Γ_n. Из равенства (4) тогда имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Gamma_n} h_u \, du \, dv = 0. \tag{5}$$

Но каждый из этих интегралов равен конечной сумме интегралов вида $\int u \, dv$, где каждый интеграл взят в положительном направлении по одной из граничных линий области Γ_n. Таким образом абсолютная величина интеграла

$$\int\limits_{\Gamma n}\int h_u\, du\, dv = \sum\int u\, dv$$

представляет собой общую величину площади областей, вырезанных граничными кривыми области Γ_n из всей плоскости, что в силу равенства (5) и доказывает наше утверждение.

Укажем еще в заключение на еще не вполне выясненный вопрос о том, что происходит с областью G, если один из надрезов области Γ сводится к точке. Если Γ — односвязная область, то существует только одна единственная граничная точка, которую мы при помощи линейного преобразования перенесем в бесконечно удаленную точку. Обратная функция $\psi(\zeta)$ будет тогда целой функцией или (если G покрывает точку $z=\infty$) мероморфной функцией. Таким образом мы приходим к кругу вопросов, относящихся к теореме Пикара; эти проблемы мы можем рассматривать как вопрос о геометрической структуре таких бесконечно-многолистных, подобных однолистным поверхностей Римана, которые при их конформном отображении на однолистную область переходят в плоскость, из которой исключена одна точка.

§ 10. Единственность конформного отображения на плоскость с надрезами.

В § 3 мы видели, что характеристическая функция течения определяется минимальным свойством с точностью до постоянного слагаемого. Покажем теперь, что эта функция для конечно-многосвязной подобной однолистным области G может быть однозначно определена также и только-что доказанным свойством отображения. В соответствии с этим сформулируем такую теорему: *если $\zeta = f(z)$ и $\zeta^* = f^*(z)$ две такие аналитические регулярные в области G функции, каждая из которых отображает область G конформно на плоскость с надрезами, то разность между ними будет постоянной.*

Для доказательства рассмотрим область Γ, состоящую из плоскости с надрезами, на которую функция $\zeta = f(z)$

отображает область G. Функция $\tau = p + iq = \zeta - \zeta^* = f(z) - f^*(z) = \varphi(\zeta)$ будет однозначной и регулярной функцией от ζ во всей области Γ, включая и бесконечно удаленную точку. Мнимая часть этой функции должна иметь постоянные значения на каждом разрезе области Γ. Пусть $q = q_0$ будет какое-нибудь значение, которое q принимает в области Γ. Рассмотрим кривую $q = q_0$, которая отделяет ту часть области Γ, где $q > q_0$, от той ее части, где $q < q_0$. Эта кривая не может быть замкнутой в области Γ, так как тогда при обходе по этой кривой, p не могло бы вернуться к первоначальному значению (ср. § 9, стр. 299). Таким образом кривая $q = q_0$ должно оканчиваться в граничных точках области Γ, так что q должно совпадать с одним из граничных значений. Так как существует только конечное число таких граничных значений, то отсюда видно, что все эти граничные значения тождественны между собой и тождественны со значением q в произвольной точке области Γ. Таким образом, q и p, а следовательно и $\varphi(\zeta)$, будут постоянными, что и требовалось доказать [1]).

---

[1]) Предоставляем читателю доказать эту теорему единственности при помощи рассуждений главы VI, § 3.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ДАЛЬНЕЙШИЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ.

Доказанную в предыдущей главе общую теорему существования мы применим для того, чтобы изложить некоторые из важнейших более глубоких вопросов теории функций. В основание наших исследований мы положим *алгебраические римановы поверхности*, т. е. (соответственно со сказанным в главе V, § 4 и в главе VIII, § 4) *замкнутые поверхности, состоящие из конечного числа листов, покрывающих всю плоскость (соответственно всю сферу) и обладающие конечным числом точек разветвления.*

В § 1 мы составим более точное представление о виде этих поверхностей. При этом мы будем сперва широко опираться на геометрические пространственные представления. В дополнении мы дадим аксиоматическое обоснование наших топологических рассуждений [1]).

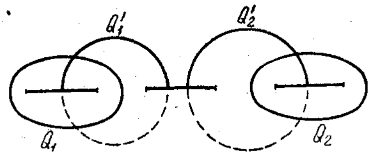
§ 1. Analysis situs алгебраических римановых поверхностей.

Уже в главе VIII, § 9, мы установили понятие циклического сечения и заметили, что существуют поверхности, именно поверхности, не подобные однолистным, которые не всегда разлагаются такими сечениями на отдельные области. Так как только такой случай и придется нам рассматривать в дальнейшем, то мы будем впредь подразумевать под „*циклическим сечением*“ замкнутую простую непрерывную кривую на поверхности, которая *не* делит поверхность на отдельные области.

---

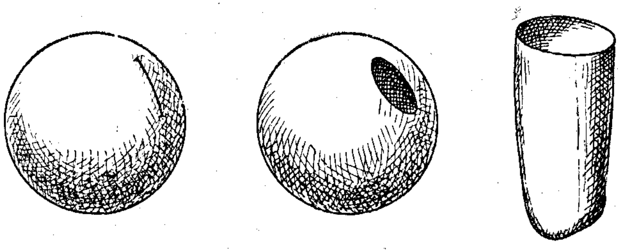
[1]) Ср. здесь книги *Вейля* (см. стр. 167) и *Керекьярто* (см. стр. 11).

Каждое такое сечение имеет два „края“, причём из самого определения видно, что возможно соединить две „противоположные“ точки краев циклического сечения Q кривой Q', которая больше нигде уже не встречает кривую Q. Замкнутая кривая Q', представляет тоже циклическое сечение, потому что Q находится с нею в том же отношении, как Q' с Q. Два таких циклических сечения называются *сопряженными друг с другом*. Примером могут служить представленные на черт. 58 пары циклических сечений на гиперэллиптической [1]) поверхности с 6 точками разветвления.



Черт. 58.

Чтобы создать себе наглядное представление о m-листной римановой поверхности G, вообразим себе, что она так разобрана на части, что получились m экземпляров полных плоскостей или, что здесь удобнее, полных сфер, причем они надрезаны вдоль некоторых кривых надлежащим образом соединяющих точки разветвления, вдоль „*сечений разветвления*“. Края этих сечений представим себе



Черт. 59.

занумерованными таким образом, что те из них, которые примыкают друг к другу на G, получают один и тот же нумер.

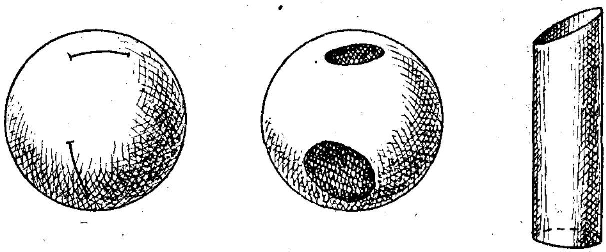
Теперь будем деформировать [2]) каждый такой „лист“,

---

[1]) Ср. сноску [1]) на стр. 178.

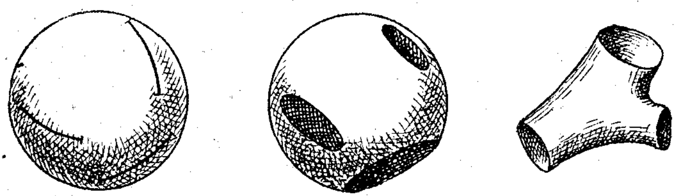
[2]) Точки получившейся после деформации фигуры сопоставляются взаимно однозначным и непрерывным образом с точками первоначальной фигуры.

пока он не примет формы мешка или трубы, как показывают черт. 59—61 для случаев простой, двойной и тройной связности листа. Таким образом, мы получаем m пространственных фигур R_1, $R_2, \ldots, R_m$, края которых возникли



Черт. 60.

из сечений разветвления G. Теперь опять соединим эти фигуры друг с другом так, чтобы края с одинаковыми нумерами совпали друг с другом; при этом мы должны при помощи непрерывной деформации позаботиться о том, чтобы везде совпали как раз те самые точки, которые совпадали и на первоначальной римановой поверхности.



Черт. 61.

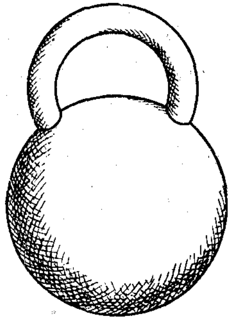
Постепенно соединяя друг с другом R_1, $R_2, \ldots, R_m$, мы можем очевидно достичь (в случае необходимости, при помощи дальнейшей непрерывной деформации) того, что получаемая поверхность нигде не будет сама себя пересекать или заузляться. При этом, само собой разумеется, могут получиться и поверхности типа сферы [1]; следу-

---

[1]) Можно наглядно представить себе это, например, на случае римановой поверхности функции $f(z) = \sqrt{(z-1)(z+1)}$.

ющий по сложности случай дает важную для теории эллиптических функций поверхность тора, которая может быть также деформирована в сферу с ручкой на ней (черт. 62). Таким образом, можно последовательно получить поверхности с двумя ручками („форма кренделя"), с тремя ручками и т. д.

Полученную описанным выше способом пространственную поверхность мы называем опять „*римановой поверхностью*". Она представляет взаимно однозначное непрерывное отображение первоначальной поверхности и обладает теми же самыми соотношениями связности, как и та. В частности, каждое циклическое сечение сохраняет свое характерное свойство — не разделять поверхности на части.



Черт. 62.

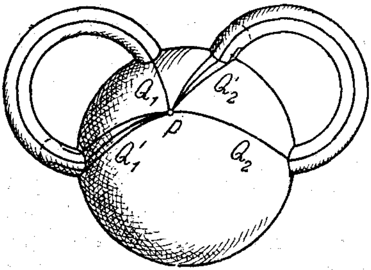
С помощью такой наглядной формы римановой поверхности, эквивалентной первоначальной поверхности, а именно сферы с насаженными на нее ручками, мы можем ввести число, характерное для внутреннего строения римановой поверхности: *назовем число p ручек римановой поверхности ее родом*.

Чтобы связать это число с характерными свойствами поверхности, обусловленными существованием возвратных сечений, мы проведем на нашей „поверхности с ручками" систему p пар взаимно-сопряженных циклических сечений Q_i, Q_i' $(i=1, 2, \ldots, p)$, например так, что Q_i' охватывает ручку поперек, а Q_i идет вдоль ручки и потом переходит на сферу (черт. 63).

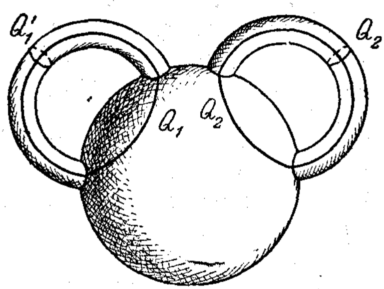
Сразу видно, что, произведя эти $2p$ сечений, мы преобразуем поверхность рода p в подобную однолистной поверхность G, потому что после такого рассечения циклических сечений больше не будет. Отсюда: *риманова поверхность рода p может быть преобразована путем проведения p раздельных пар взаимно сопряженных циклических сечений в подобную однолистной область $\overline{G}$*. Поверхности, подобной однолистной, приписываем *род нуль. Мы можем рассматривать род как число пар циклических сечений*, *которые необходимо провести на поверхности для ее преобразования в поверхность, подобную однолистной.*

Легко видеть, что p циклических сечений $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ превращают поверхность G в подобную однолистной область, которая будет не односвязной, а $2p$-связной.

Пусть P-произвольная точка нашей римановой поверхности G рода p, и пусть наша система $2p$ циклических сечений Q_i, Q_i' $(i=1, 2, \ldots, p)$ выбрана так, что P не лежит ни на одной из этих кривых. Проведем из точки P к каждой из этих пар циклических сечений (хотя бы к точке пересечения циклических сечений, принадлежащих к одной и той же паре) сечение C_i $(i=1, 2, 3, \ldots, p)$ так, чтобы эти кривые C_i не пересекали бы друг друга (кроме точки P), и нигде больше не пересекали бы ни



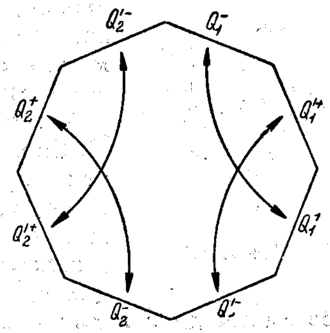
Черт. 63.



Черт. 64.

одного из циклических сечений. Эти сечения C_i мы можем опять уничтожить, если стянем точку пересечения каждой пары циклических сечений Q_i, Q_i' по кривой C_i к точке P (черт. 64).

Такой способ рассечения римановой поверхности называется „*каноническим рассечением*". Края системы циклических сечений Q_i, Q_i' $(i=1, 2, \ldots, p)$ образуют при этом замкнутый контур, который превращает поверхность в односвязную подобную однолистной область. Можно составить себе удобное представление о рассеченной поверхности и соответствии краев сечений, если вообразить, что область эта непрерывно деформируется в такой прямолинейный правильный многоугольник с $4p$ сторонами, стороны которого соответствуют краям $2p$ циклических сечений. Так например случай $p = 2$ (черт. 65) наглядно представлен восьмиугольником на черт. 65; при этом, противоположные края обозначены через $Q_i^+, Q_i'^+$, соответственно Q_i^-, $Q_i'^-$, а их соответствие указано стрелками. При „каноническом“ рассечении нашей поверхности каждые четыре надлежаще выбранные последовательные стороны $4p$-угольника всегда принадлежат паре сопряженных циклических сечений.



Черт. 65.

Предшествующее определение рода поверхности основано на наглядном представлении; как выяснится в § 2, род поверхности есть число независящее от произвола в выборе канонического рассечения. Что **всякая** алгебраическая риманова поверхность действительно может быть канонически рассечена, будет сейчас подробно доказано в нижеприводимом дополнении.

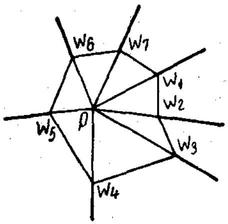
Дополнение к § 1. Возможность канонического рассечения [1]).

1. **Триангуляция.** Соединим неподвижную точку плоскости, не лежащую на прямой, соединяющей две точки разветвления, со всеми точками разветвления w, продолжим прямые соединения до бесконечности, а точки разветвления соединим циклически между собой (черт. 66). Линии $w \ldots \infty$ будем считать сечениями разветвления, вдоль которых будет надрезана сфера z и вдоль которых будут склеены между собой листы. Каждый лист, а следовательно и вся поверхость оказывается разбитой на треугольники, т. е. триангулированной.

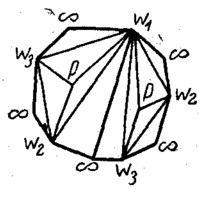
---

1) Это дополнение по своему содержанию принадлежит van der Waerden'y.

2. Преобразование в выпуклый многоугольник. После рассечения каждый лист можно растяжением треугольников превратить в выпуклый многоугольник, разделенный на треугольники. Если далее такой лист склеить с другим по сечению разветвления, вдоль которого оба листа на поверхности переходят друг в друга, то можно соответствующим образом к первому многоугольнику присоединить второй, имеющий с ним общую сторону, но не имеющий никаких других общих точек (черт. 67). Тотчас же можно вновь принять, что многоугольник, получившийся в результате соединения, будет выпуклым. Продолжая таким образом далее, мы присоединим последовательно все листы друг к другу и преобразуем в результате (надрезанную по некоторым определенным линиям) поверхность в единственный (триангулированный) выпуклый многоугольник. Вообще говоря, при этом склеивании ни в коем случае не будут произведены все возможные переходы от листа к листу, которые возможны вдоль сечений. Каждому не реализованному переходу между двумя листами вдоль некоторого сечения соответствуют две стороны многоугольника, которые нужно склеить, если желают опять восстановить поверхность (следовательно число сторон многоугольника *четное*). Такие соответствующие друг другу стороны будем обозначать одинаковыми буквами. Так как одновременное соединение всех этих пар сторон дало бы весьма неотчетливую картину, то теперь в пп. 3, 4 и 5 мы проведем соединение сторон последовательными этапами и одновременно будем производить еще смещение треугольников, и тем самым построим наглядный топологический эквивалент римановых поверхностей.



Черт. 66.

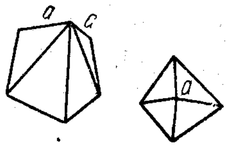


Черт. 67.

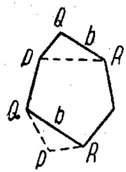
3. Операция А. Если две одноименные стороны a, a следуют одна за другой, то они склеиваются по схеме черт. 68. При этом число сторон многоугольника уменьшается. Такое соединение невозможно только в случае,

когда число сторон равно 4; но это может случиться очевидно только для однолистной поверхности, т. е. для обыкновенной сферы z, что является тривиальным случаем.

Мы можем поэтому, после повторного применения операции А, принять, что уже нигде две соседние стороны многоугольника не обозначены одинаковыми буквами.



Черт. 68.

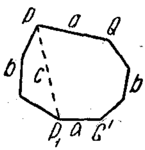


Черт. 69.

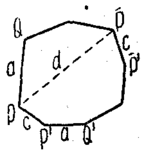
4. Операция В. Можно теперь добиться того, чтобы все вершины многоугольника соответствовали одной и той же точке поверхности, т. е. того, чтобы все точки триангуляции, за исключением одной единственной, представлялись бы исключительно вершинами треугольников, лежащими **внутри** многоугольника. Если дело обстоит еще не так, то будут существовать (черт. 69) две следующие друг за другом вершины P и Q, принадлежащие к различным точкам поверхности. Вершина, следующая за PQ, пусть будет R. Сторона $QR = b$ должна встретиться еще один раз, но не в виде стороны PQ, так как все соседние стороны многоугольника с теми же названиями уже соединены нами. Если отрезать треугольник PQR и вновь присоединить его вдоль стороны QR ко второму экземпляру стороны b (черт. 69), то получится новый многоугольник, наглядно показывающий таким же точно образом, как и старый многоугольник, соотношения связности римановой поверхности, если только в нем установлено необходимое соответствие сторон. Деформацией можно добиться того, чтобы новый многоугольник сделался выпуклым. После этой операции вершина P будет повторяться разом больше, а вершина Q разом меньше, чем до операции. Но если только Q является еще вершиной многоугольника, то можно опять найти соседнюю с Q и с ней разноименную вершину (прежде такой вершиной была P); можно поэтому повторением операции B вершину Q перевести целиком внутрь многоугольника. Если после этого еще не все вершины соответствуют одной и той же точке поверхности, то при помощи того же процесса можно опять удалить одну вершину и т. д. После конечного числа ша-

гов получится поэтому выпуклый многоугольник, который наглядно изображает связность поверхности и все вершины которого представляют одну и ту же точку этой поверхности.

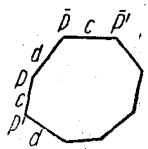
5. Операция C. Приведем теперь последовательность свободных сторон многоугольника перегруппировкой к нор-



Черт. 70.

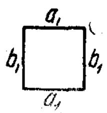


Черт. 71.

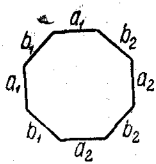


Черт. 72

мальной форме. Конечные точки двух экземпляров стороны a обозначим через P, Q и соответственно P', Q'; пусть, например, эти точки при обходе многоугольника следуют в порядке P, Q, Q', P' (черт. 70). Тогда должна существовать сторона b, которая встречается как на части контура, идущей от P к P' (и не содержащей Q и Q'), так и на части контура, идущей от Q к Q' (и не содержащей P и P'), так как в противном случае вершины первой части контура нельзя было бы отожествлять с вершинами второй части, что противоречит операции B. Разрежем теперь многоугольник вдоль прямой PP', как показывает черт. 70, склеим обе части многоугольника вдоль b и деформируем фигуру так, чтобы получился выпуклый многоугольник. При этом сторона b пропадет, но зато появится новая сторона $PP'=c$, второй экземпляр которой пусть будет $\bar{P}\bar{P}'$. Если точки P, P', $\bar{P}'$, $\bar{P}$ следуют, например, как раз в этом порядке, то повторно разрежем новый многоугольник вдоль прямой $P\bar{P}'$ (черт. 71) и склеим обе части многоугольника вдоль стороны a. Если появляющуюся при этом сторону $P\bar{P}$ обозначить через d, то стороны c, d, c, d будут теперь следовать непосредственно друг за другом (черт. 72). Но этот



Черт. 73.



Черт. 74.

порядок сторон сохранится и тогда, когда операция C будет применена к какой-нибудь следующей паре сторон вместо сторон a и b. В результате повторения этого процесса мы получим в качестве *нормальной формы* поверхности $4p$-угольник, образованный p четверками сторон $(a_1\ b_1\ a_1\ b_1)$, $(a_2\ b_2\ a_2\ b_2), \ldots, (a_p\ b_p\ a_p\ b_p)$. Простейшие примеры показаны на черт. 73 и 74.

§ 2. Абелевы интегралы и алгебраические функции на заданной римановой поверхности.

Одним из великих успехов развития идей Римана нужно считать достигнутую возможность проникнуть в сущность алгебраических функций и их интегралов. Опираясь на добытые в предыдущей главе результаты, мы постараемся развить здесь основания этой теории. Поставим себе в соответствии с замечаниями главы V, § 3, задачу построить функции, принадлежащие к данной алгебраической риановой поверхности G, т. е. алгебраические функции, однозначные на этой поверхности. Для этого исследования характерно то обстоятельство, что мы не ищем непосредственно самих алгебраических функций, но сначала ищем их (неопределенные) интегралы. Эти интегралы будут, вообще говоря, на G бесконечно многозначны, но в другом отношении часто оказываются проще, чем самые алгебраические функции. Из них дифференцированием получаем алгебраические функции. Следуя предложению Якоби, эти интегралы называют *абелевыми*, потому что Абель (Abel) первый подверг их систематическому исследованию.

Дадим абелевым интегралам, не принимая во внимание их образование путем интегрирования алгебраической функции, такое определение: *однозначная или многозначная аналитическая функция на G называется абелевым интегралом, принадлежащим к поверхности G, если ее можно неограниченно продолжать вдоль любого пути на G, избегающего только конечное число исключительных точек, если она в исключительных точках не имеет других особенностей, кроме полюсов или логарифмических особенностей, и если различные ее ветви, лежащие над одним и тем же местом поверхности G, различаются друг от друга только на постоянные.* Из этого определения ясно, что производная абелева интеграла на G однозначна и имеет разве лишь конечное число и притом только алгебраических особых точек, т. е. есть алгебраическая функция. И наоборот, неопределенный интеграл принадлежащей к G алгебраической функции имеет все свойства, перечисленные в нашем определении. В частности, алгебраические функции сами тоже принадлежат к числу абелевых интегралов.

Мы различаем, смотря по характеру их особенностей, три вида абелевых интегралов, к которым, как это обнаружится, может быть приведен самый общий абелев интеграл.

Интегралы первого вида или *всюду конечные интегралы*. Они регулярны на G и поэтому ни в одной точке G не обращаются в бесконечность.

Интегралы второго вида. Они не имеют на G никаких других особых точек, кроме полюсов.

Интегралы третьего вида. Они имеют на G логарифмические особые точки.

Прежде чем обратиться к построению абелевых интегралов, принадлежащих к данной римановой поверхности G, мы докажем некоторые их свойства, предположив сперва их существование. Пусть $f(z)$ — абелев интеграл первого или второго вида и Q — циклическое сечение, не проходящее ни через один полюс функции. Рассмотрим интеграл от $f'(z)$, взятый по Q, при непрерывной деформации Q в другое такое же циклическое сечение Q^* интеграл этот не меняется в силу теоремы Коши, если только при этой деформации сечение не проходит ни через одну особую точку функции $f'(z)$, в которой $f'(z)$ имеет отличный от нуля вычет. Вычеты $f'(z)$ должны, однако, все равняться нулю, потому что по предположению наш интеграл не принадлежит к третьему виду. Отсюда теорема: *изменение абелева интеграла первого или второго вида, которое он испытывает при обходе по любому циклическому сечению Q, не проходящему ни через какую особую точку этого интеграла, равно изменению при обходе по любому эквивалентному с Q циклическому сечению Q^*, также не проходящему ни через какую особую точку*. Это изменение называется *модулем периодичности* или *циклическим периодом*, соответствующим данному циклическому сечению.

Как в предыдущем параграфе, вообразим, что риманова поверхность канонически рассечена системой p пар взаимно сопряженных циклических сечений Q_i, Q_i' $(i=1, 2, \ldots, p)$, выходящих из точки P и не проходящих ни через какую особую точку. В результате она превращается в односвязную область $\overline{G}$. В $\overline{G}$ каждый абелев интеграл первого или второго вида будет однозначен; в этом можно убедиться совершенно теми же рассуждениями, что и выше, использовав то обстоятельство, что вычеты производной в особых точках обращаются в нуль. Следовательно циклическим сечениям Q_i, Q_i' соответствуют $2p$ модулей периодичности, из которых все остальные модули периодичности интеграла могут быть составлены линейно с целыми коэффициентами [1].

Если $f(z)$ — интеграл третьего вида, то кроме многозначности, возникающей при обходе циклических сечений, получается еще многозначность от обхода вокруг логарифмических особых точек. Но и здесь изменение при обходе вдоль двух эквивалентных циклических сечений Q, Q^*, которые не проходят ни через какую особенность и которые могут быть непрерывной деформацией переведены друг в друга, будет одинаковое, если только мы не проходим при деформации через логарифмическую особую точку. Если мы возьмем интеграл $\int f'(z)\,dz$ по всему контуру $\overline{G}$, то найдем, что *сумма вычетов всех особых точек* $f'(z)$ в G *равна нулю*, так как по каждой части пути интегрирование совершается один раз в том и один раз в другом направлении. Впрочем, при суммировании полюса функции $f(z)$ рассматривать не надо, так как вычеты $f'(z)$ в этих точках равны 0.

Существование абелевых интегралов, принадлежащих к G, мы докажем, составив по порядку некоторые особо простые интегралы, из которых сложением может быть получен самый общий абелев интеграл. Мы утверждаем прежде всего: *существует на G абелев интеграл второго вида, который имеет в данной точке O полюс с данной главной частью, не имеет никаких других особых точек кроме O, и все модули периодичности которого чисто мнимые.*

---

[1] На канонически рассеченной римановой поверхности такой интеграл однозначен; переходу через сечение канонической системы соответствует увеличение (или уменьшение) интеграла, однозначного на рассеченной римановой поверхности, на тот модуль периодичности, который принадлежит сопряженному циклическому сечению. Изменение интеграла на любом замкнутом пути слагается поэтому аддитивно из таких изменений.

Докажем сначала один частный случай этой теоремы. Пусть точка O, которая лежит, например, над $z=0$, будет простая точка, т. е. не точка разветвления римановой поверхности и заданная особенность пусть будет $\frac{1}{z}$. Тогда рассуждения главы VIII сразу приводят нас к существованию функции $f(z)$ с требуемыми свойствами; они даже принципиально упрощаются, потому что G, как замкнутая поверхность, может быть покрыта уже конечным числом круговых областей необходимого вида. Наша функция $f(z)$ обладает действительно, как требуется, чисто мнимыми модулями периодичности. Это вытекает из того, что гармоническая функция u, которая получается как решение нашей минимальной задачи, однозначна по самому определению, так что многозначность $f(z)$ может выразиться только в мнимой части v.

В самом общем случае предшествующей теоремы мы поступаем в принципе точно так же, только кладем в основу другую функцию особенности. Пусть O есть $(m-1)$-кратная $(m \geqslant 1)$ точка разветвления[1]) G и заданная главная часть в точке O пусть будет

$$a_n z^{-\frac{n}{m}} + a_{n-1} z^{-\frac{n-1}{m}} + \ldots + a_1 z^{-\frac{1}{m}} \quad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0). \qquad (1)$$

Пусть K обозначает m-листный круг с центром O и положительным радиусом a, который выбран столь малым, что никакая другая точка разветвления G не находится в K. Вводя полярные координаты r, ϑ с центром O и полагая $a_\nu = |a_\nu| e^{i\alpha_\nu}$, мы определим функцию особенности равенством

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \left(r^{-\frac{\nu}{m}} + r^{\frac{\nu}{m}} a^{-\frac{2\nu}{m}}\right) \cos\left(\alpha_\nu - \frac{\nu}{m}\vartheta\right) & \text{в } K, \text{ включая контур } K, \\ 0 & \text{вне } K. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта функция составлена так, что она в K, кроме O, является регулярной гармонической функцией, что она обращается в O в бесконечность таким же образом, как вещественная часть (1), и что на окружности K ее произ-

---

1) Под 0-кратной точкой разветвления, в виде исключения, надо понимать простую точку.

водная в направлении нормали обращается в нуль. Поэтому к ней применимо доказательство существования из предшествующей главы, и мы получаем вещественную часть требуемого интеграла второго вида.

Конечно, мы можем составить точно так же интеграл второго вида с единственным заданным полюсом и только с вещественными модулями периодичности. Для этого достаточно заменить в выражении (2) косинус на синус того же самого аргумента и полученную окончательно функцию умножить на i. Разность двух таких интегралов второго вида с одинаковыми главными частями, из которых один имеет чисто мнимые модули периодичности, а другой вещественные, есть по необходимости интеграл первого вида; при том интеграл этот наверное не будет постоянным тогда, когда хотя бы один только модуль периодичности одного из обоих интегралов второго вида не равняется нулю. Но не будем развивать это замечание дальше, потому что впоследствии мы получим интегралы первого вида другим путем.

И интегралы третьего вида удается построить подобным же образом. Простейшими из них являются указанные в следующей теореме: *пусть P_1 и P_2 две отличных друг от друга точки поверхности G, которые лежат над точками z_1, z_2 плоскости z. Тогда существуют два интеграла третьего вида $\psi(z;\, P_1,\, P_2)$ и $\psi^*(z;\, P_1,\, P_2)$, которые всюду на G, кроме точек P_1 и P_2, остаются конечными и имеют соответствующие циклическим сечениям Q_i, Q_i' $(i = 1, 2, \ldots, p)$ чисто мнимые модули периодичности. В P_1 и P_2 функция $\psi(z;\, P_1, P_2)$ имеет те же особенности, как $\lg(z - z_1)$, и соответственно $-\lg(z - z_2)$, а $\psi^*(z; P_1 P_2)$, как $i \lg(z - z_1)$ и соответственно $i \lg(z - z_2)$.*

Доказательство мы проведем сначала лишь при ограничивающем допущении, что точки P_1 и P_2 лежат внутри однолистного круга K, принадлежащего G, центр которого не совпадает ни с P_1 ни с P_2. Мы отражаем P_1 и P_2 в круге K; симметричные точки и относящиеся к ним значения z мы обозначим через P_1', P_2', z_1', z_2'. Обозначим расстояния от любой точки P до P_1, P_2 P_1', P_2' через r_1, r_2, r_1', r_2', а углы, составляемые направленными прямыми $P_1P, P_2P, P_1'P, P_2'P$ с положительной осью x, через ϑ_1, ϑ_2, ϑ_1', ϑ_2'. Чтобы построить $\psi(z;\, P_1,\, P_2)$, положим в K, включая и границу,

$$S = (\lg r_1 - \lg r_2) + (\lg r_1' - \lg r_2'), \tag{3}$$

между тем как вне K опять положим $S = 0$. Тогда $-S$ представляет в K сопряженную гармоническую функцию для $(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_1' - \vartheta_2')$.

Так как для точки P окружности круга, по известной теореме элементарной геометрии, имеет место соотношение

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (\vartheta_1' - \vartheta_2') = \text{const},$$

то сразу видно, что S на окружности круга удовлетворяет условию

$$\frac{\partial S}{\partial n} = 0.$$

Мы можем поэтому и здесь повторить дословно выводы главы VIII и прийти к абелеву интегралу третьего вида, обладающему как раз требуемыми от $\psi(z; P_1, P_2)$ свойствами.

Для $\psi^*(z; P_1, P_2)$ мы пользуемся следующей функцией особенности [1]):

$$S = \begin{cases} (\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\vartheta_1' - \vartheta_2') \text{ в } K, \text{ включая} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{контур } K, \\ 0 \text{ вне } K. \end{cases} \tag{4}$$

Чтобы сделать ее однозначной функцией внутри K, соединим P_1 и P_2 простой непрерывной, целиком лежащей в K кривой C и наложим на точку, которая служит аргументом, запрещение переходить эту кривую. Значения S на обоих

---

[1]) Если положить в основание рассуждений § 9 предыдущей главы функцию особенности (3), соответственно (4), то мы уже не получим „прямолинейно надрезанной области“, в качестве отображенной области для подобной однолистным римановой поверхности G. Исходя например из функции (3), мы получим отображающую функцию $\zeta = u + iv$, которой мнимая часть v принимает на каждом связном куске контура постоянные значения, но которая сама ведет себя в точках P_1 и P_2 как $\lg \frac{z - z_1}{z - z_2}$. Таким образом мы видим, что функция

$$\eta = e^{\zeta} = e^{u} \cdot e^{iv}$$

конформно отображает область G на полную η-плоскость, которая надрезана вдоль конечного или бесконечного числа отрезков, лежащих на лучах, проходящих через нулевую точку. В случае функции (4) получается напротив, что G отображается функцией $\eta = e^{i\zeta} = e^{iu}\, e^{-v}$ на полную η-плоскость, надрезанную по конечному или бесконечно большому числу дуг круга, концентрически расположенных вокруг нулевой точки.

краях C отличаются при этом на 2π. Если мы опять потребуем, как в главе VIII, § 3, непрерывности в K допускаемых к сравнению функций Φ, то функции $\varphi = \Phi + S$ получат правда ту же самую многозначность, как S, но это никоим образом не расстроит приведенных в предыдущей главе соображений. Остается еще только доказать, что на контуре K производные от S, взятые по направлению нормалей, обращаются в нуль. Это вытекает, как выше, из того, что сопряженная с $-S$ гармоническая функция

$$(\lg r_1 - \lg r_2) - (\lg r_1' - \lg r_2')$$

постоянна на контуре.

Если $P', P'', \ldots, P^{(n)}$ — какие-нибудь точки внутри K, отличные друг от друга, от P_1, P_2, и от центра круга K, то мы можем провести кривую C так, что она пройдет по порядку через $P_1, P', P'', \ldots, P^{(n)}, P_2$, и проверить справедливость формул

$$\left.\begin{aligned} \psi(z;\ P_1,\ P_2) &= \psi\ (z;\ P_1,\ P') + \psi\ (z;\ P',\ P'') + \ldots + \\ &\quad + \psi\ (z; P^{(n)} P_2), \\ \psi^*(z;\ P_1,\ P_2) &= \psi^*(z;\ P_1,\ P') + \psi^*(z;\ P',\ P'') + \ldots + \\ &\quad + \psi^*(z; P^{(n)},\ P_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Эти формулы мы применим, чтобы определить $\psi\ (z; P_1, P_2)$ и $\psi^*\ (z;\ P_1,\ P_2)$ и в том случае, когда нет однолистного круга, принадлежащего G, внутри которого лежат обе точки P_1 и P_2. Действительно между P_1 и P_2 можно всегда вставить цепь пар точек $P_1\ P'$, $P'\ P''$, $\ldots$, $P^{(n)} P_2$, для которых можно образовать функции ψ и ψ^*, как указано выше. Если бы одна из точек P_1 или P_2, хотя бы P_1, пришлась в $(m-1)$-кратной точке разветвления G, то надо было бы только взять вместо K m-листную круговую область с точкой разветвления в P_1, но с центром, отличным от P_1. Соответствующую функцию особенности мы получим, отобразив сперва m-листный круг на однолистный круг, затем составив для него функции особенности (3) и (4) и наконец снова перенеся эти функции на m-листную круговую область.

Должно однако обратить внимание на то, что наше определение не устанавливает вовсе функций ψ и ψ^* однозначным образом. Различные цепи точек, вставленных между P_1

и P_2, могут привести к совершенно различным функциям. Это вполне совместимо с нашей теоремой; указанными в этой теореме свойствами функции $\psi(z;\ P_1,\ P_2)$ и $\psi^*(z;\ P_1,\ P_2)$ определяются только с точностью до аддитивно входящих интегралов первого вида с чисто мнимыми модулями периодичности.

Пусть теперь $P_1,\ P_2,\ldots,\ P_k$ — любые точки римановой поверхности G и $a_\varkappa = a_\varkappa' + ia_\varkappa''(\varkappa = 1,\ 2,\ldots,\ k)$, — соответствующие им комплексные числа, сумма которых равна нулю. Если P_0 обозначает произвольно взятую вспомогательную точку на G, то выражение

$$\begin{gathered} a_1'\psi(z;\ P_1,\ P_0) + a_2'\psi(z;\ P_2,\ P_0) + \ldots + a_k'\psi(z; P_k, P_0) - \\ - a_1''\psi^*(z; P_1, P_0) - a_2''\psi^*(z;\ P_2,\ P_0) - \ldots - a_k''\psi^*(z; P_k, P_0) \end{gathered} \tag{6}$$

представляет собой абелев интеграл третьего вида, который имеет логарифмические особенности в точках P_1, $P_2,\ \ldots,\ P_k$, между тем как его производная имеет в этих точках вычеты $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. В остальных точках области G он будет регулярным и имеет чисто мнимые модули периодичности, соответствующие сечениям Q_i, Q_i'.

К интегралам первого вида мы придем следующим образом. Пусть Q — произвольное циклическое сечение и P_1, $P_2,\ \ldots,\ P_{n-1},\ P_n = P_1$ — замкнутая цепь точек на Q. Эти точки пусть выбраны так близко друг к другу, что для каждой пары последовательных точек $P_{\nu-1}$, P_ν можно составить интеграл $\psi^*(z;\ P_{\nu-1},\ P_\nu)$ указанным выше непосредственным способом построения. Тогда сумма

$$j(z) = \psi^*(z;\ P_1,\ P_2) + \ldots + \psi^*(z;\ P_{n-1},\ P_1)$$

будет регулярной всюду на G и следовательно конечной функцией; но ее вещественная часть не будет однозначной, как в предыдущих выражениях, но при переходе через возвратное сечение Q претерпевает скачок 2π или, точнее, $j(z)$ имеет на каждом сопряженном с Q циклическом сечении Q' модуль периодичности с вещественной частью 2π. Таким образом, $j(z)$ есть интеграл первого вида, отличный от постоянной. Выполняя наше построение для каждого из $2p$ возвратных сечений Q_i, Q_i' нашего канонического рассечения, *мы получим $2p$ интегралов первого вида, которые обозна-*

чим через $j_1(z), j_2(z), \ldots, j_{2p}(z)$. *Они линейно независимы друг от друга в том смысле, что не существует никакой линейной комбинации*

$$c_1 j_1(z) + c_2 j_2(z) + \ldots + c_{2p} j_{2p}(z)$$

с вещественными коэффициентами $c_1, \ldots, c_{2p}$ *не обращающимися одновременно в нуль, которая сохраняла бы постоянное значение.* Действительно, каждая такая комбинация имеет, по меньшей мере, один не равный нулю модуль периодичности, следовательно не может быть постоянной. Далее имеет место теорема: *каждый конечный всюду на* G *интеграл есть с точностью до постоянного слагаемого линейная комбинация интегралов* $j_1(z), j_2(z), \ldots, j_{2p}(z)$ *с вещественными коэффициентами.* Действительно, если вещественные части модулей периодичности предложенного интеграла первого вида $j(z)$ на $2p$ циклических сечениях Q_i, Q_i' равны $2\pi c_1, 2\pi c_2, \ldots, 2\pi c_{2p}$, то

$$\overline{j}(z) = j(z) - c_1 j_1(z) - \ldots - c_{2p} j_{2p}(z)$$

будет интеграл первого вида, вещественная часть которого имеет нулевые модули периодичности на циклических сечениях Q_i, Q_i' и следовательно однозначна на G. Однозначная же и во всех точках G конечная гармоническая функция w — постоянна; действительно, применяя формулу Грина к канонически рассеченной поверхности $\overline{G}$, получаем сразу соотношение

$$D_{\overline{G}}[w] = 0.$$

Следовательно, вещественная часть $\overline{j}(z)$ и потому сама функция $\overline{j}(z)$ постоянны.

Только-что доказанную теорему можно высказать еще так: *наибольшее число вещественно линейно независимых друг от друга интегралов первого вида равно удвоенному роду поверхности.* Этим показано, что число p действительно есть постоянное число, не зависящее от того или иного способа рассечения поверхности. Упомянем еще, что при допущении произвольных комплексных постоянных в качестве коэффициентов наибольшее число линейно независимых интегралов первого вида будет p.

Теперь мы установили все абелевы интегралы на G. Действительно, мы можем, комбинируя линейным образом полученные функции, составить интеграл, который в данных точках G имеет полюсы с данными главными частями, в других заданных точках имеет логарифмические разрывы с заданными вычетами производной [1]) (причем, конечно, сумма всех вычетов должна равняться нулю), и модули периодичности которого на $2p$ циклических сечениях имеют заданные вещественные части. С другой стороны, эти условия определяют абелев интеграл с точностью до постоянной; ибо вещественная часть разности двух таких интегралов есть гармоническая функция, однозначная и всюду на G регулярная, следовательно, в силу предыдущего замечания, постоянная.

Задание совокупности абелевых интегралов на поверхности определяет и совокупность алгебраических функций на поверхности.

Теперь составим такую алгебраическую функцию, для которой G является в точности соответствующей римановой поверхностью. Этим самым мы ответим на вопрос, поставленный в начале параграфа. Для этого поступим так. Пусть m — число листов поверхности G и z_0 — точка плоскости z, которая лежит на конечном расстоянии и над которой расположены m листов поверхности раздельно, т. е. без точек разветвления. Составим теперь абелев интеграл второго вида, который имеет по одному полюсу первого порядка в m точках $P_1, P_2, \ldots, P_m$, лежащих над z_0, причем вычеты этих полюсов возьмем все отличными друг от друга. Производная этого интеграла есть однозначная на G алгебраическая функция $f(z)$, обладающая тем свойством, что над z_0 лежит в точности m отличных друг от друга ее ветвей. Такая функция принадлежит как раз к G. Действительно, она однозначна на G, поэтому в крайнем случае может разве лишь случиться, что она уже при μ-кратном обходе вокруг $(\nu-1)$-кратной точки разветвления $(\mu < \nu)$ получила бы прежнее значение. Отсюда вытекало бы после соответственного аналитического продолжения, что по меньшей мере два элемента функций, принадлежащих к $P_1, P_2, \ldots, P_m$, совпали бы, а это противоречит нашему построению.

---

[1]) Эти точки могут частью совпадать с первыми.

Дифференцирование абелевых интегралов не является единственным средством образования алгебраических функций. К ним, например, можно прийти также путем сложения интегралов второго и первого вида, если надлежащим выбором находящихся в нашем распоряжении постоянных обратить в нуль модули периодичности. Относительно дальнейшего развития этой идеи мы отсылаем к специальной литературе по алгебраическим функциям [1]).

Заметим еще, что можно непосредственно прийти к интегралам первого вида, разыскивая такую вещественную функцию u от x и y, конечную во всех точках G, непрерывную везде, за исключением точек возвратного сечения Q и имеющую кусочно-непрерывные производные первого порядка, которая при переходе через Q претерпевает скачок 2π и обращает интеграл $D[u]$ в минимум. Функция эта, если она существует, должна быть, разумеется, гармонической и, как сразу получается, должна представлять вещественную часть рассмотренного выше интеграла первого вида, принадлежащего циклическому сечению Q. Существование такой функции легко доказать совершенно так же, как в главе VIII, § 7, а именно, исходя из минимальной последовательности допустимых функций φ_1, φ_2, . . . и затем сглаживая их. При этом совсем не требуется вводить функцию, определяющую особенность. Процесс сглаживания производится в точности по образцу названного параграфа. Риманова поверхность G сперва покрывается конечным числом круговых областей, которые подбираются так, чтобы каждая круговая область, содержащая некоторую точку Q, разделялась бы Q на две односвязные части.

Для круга, не содержащего ни одной точки Q, мы переходим к сглаженной последовательности путем решения предельной задачи; для такого же круга, который разделяется Q на две части T_1 и T_2, мы прибавляем к функциям сглаживаемой последовательности в части T_1 постоянную 2π; благодаря этому мы получаем в круге непрерывные

---

[1]) Кроме первого тома „Modulfunktionen" *Клейнан Фрике* (см. стр. 325), укажем еще *C. Neumann*, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale (2 Aufl., Leipzig 1884), а также *H. F. Baker*: Abel's Theorem and the allied Theory (Cambridge 1897) и *Hensel-Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln (Leipzig. 1902). Подробные литературные указания находятся в рефератах Enzyklopädie der math. Wissenschaften, II B 2, II B 7, II C 5.

функции, затем решаем с помощью граничных значений этих функций предельную задачу теории потенциала и затем опять отнимаем в T_1 значение 2π. Подробный вывод и доказательство сходимости предоставляется читателю.

§ 3. Существование автоморфных функций с данной фундаментальной областью.

Уже в главе VII, § 4 мы определили автоморфные функции, как такие однозначные функции комплексной переменной z, которые не изменяются, когда над z производятся все линейные преобразования некоторой группы. Примерами, приведшими нас к этому понятию, послужили функции, которые отображают многоугольник плоскости z, ограниченный дугами окружностей на верхнюю полуплоскость ζ. Продолжение за начальную область было выполнено с помощью принципа симметрии. Область, составленная из многоугольника, ограниченного дугами окружностей, и нового многоугольника, получившегося отражением первого в одной из его сторон, обладает тем свойством, что ее стороны делятся на пары сторон, получающихся друг из друга путем некоторых линейных подстановок. Эти подстановки будут „*производящие подстановки*" группы, к которой принадлежат рассматриваемые отображающие функции [1]).

Теперь будем исходить более общим образом из области, у которой граничные кривые состоят из нескольких пар сторон, связанных линейными подстановками, но не будем требовать, чтобы область эта могла быть разделена на симметричные относительно некоторой окружности половины. Затем с помощью принципа Дирихле при весьма общих предположениях мы докажем существование соответствующих автоморфных функций и уже после этого установим связь с изложенным в предыдущем параграфе материалом.

Пусть задана однолистная односвязная или многосвязная область B, ограниченная конечным и притом четным числом аналитических кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n; C_1', C_2', \ldots, C_n'$. Предположим, что $2n$ кривых $C_1, \ldots, C_n'$ — простые замкну-

1) Т. е. все подстановки группы могут быть составлены из „производящих".

тые или обладающие двумя конечными точками аналитические кривые; далее, что каждая пара их не имеет общих точек, кроме разве конечных точек. Точки, в которых встречаются две различные из этих кривых, назовем „вершинами" области и потребуем, чтобы в каждой вершине встречались только две дуги. Но важнейшим предположением относительно области B будет следующее: существуют n линейных подстановок $S_\nu (\nu=1, 2, \ldots, n)$, которые преобразуют соответственно кривую C_ν, проходимую в положительном направлении, в кривую C_ν', проходимую в противоположном направлении. Подстановки S_ν вместе с им обратными подстановками S_ν^{-1} производят группу $\mathfrak{G}$ линейных подстановок. Две точки (соответственно дуги кривых или области), которые получаются друг из друга посредством подстановки группы $\mathfrak{G}$, назовем *эквивалентными*.

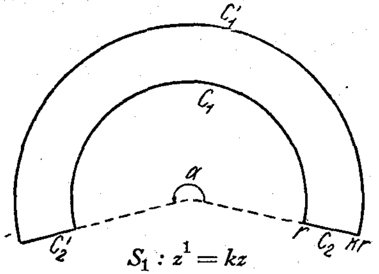
Назовем через B_S область, которая получается из B применением подстановки S группы $\mathfrak{G}$. Чтобы потом перейти к однозначным функциям, предположим, что совокупность областей B_S, соответствующих различным подстановкам S группы $\mathfrak{G}$, не покрывает многократно никакой части плоскости [1]), так что мы можем считать (по крайней мере, внутри некоторой части плоскости) B *фундаментальной областью* [2]) группы $\mathfrak{G}$. Для геометрической формы фундаментальной области B это предположение обозначает прежде всего, что те области B_S, которые сходятся в вершине E области B, покрывают окрестность E, не больше одного раза. Поэтому сумма углов в эквивалентных друг с другом вершинах B должна равняться $\frac{2\pi}{n}$, где n — целое число или бесконечность. Этого требования однако совсем недостаточно, как показывает пример на черт. 75. В этом примере указанное условие выполнено для каждой из четырех вершин, однако применение подстановки S_2 при-

[1]) Это предположение несущественно для приводимого ниже построения принадлежащих к B автоморфных функций; даже предположение об однолистности B можно для этого отбросить.

[2]) Под „*фундаментальной областью*" группы понимают область, которая из каждого множества точек, эквивалентных относительно группы (по крайней мере, внутри рассматриваемой части плоскости), содержит одного и только одного представителя.

водит уже к многократному покрытию некоторой части плоскости.

Если мы считаем эквивалентные граничные точки B не различными, то B является замкнутой поверхностью конечного рода p, следовательно она топологически эквивалентна некоторой алгебраической римановой поверхности. Мы утверждаем, что (с оговоркой о делаемом в дальнейшем предположении относительно B) это справедливо также и в смысле конформного отображения; т. е. *область B может быть взаимно однозначна и за исключением разве лишь конечного числа точек конформно отображена на алгебраическую риманову поверхность G так, что эквивалентным граничным точкам B соответствует одна и та же точка G.*



$S_1 : z^1 = kz$

$S_2 : z^1 = e^i\ z$

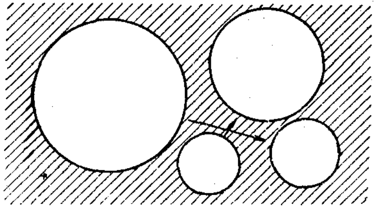
Черт. 75.

Прежде чем перейти к этим вопросам, рассмотрим несколько примеров фундаментальных областей. Укажем сначала те, которые уже встретились в главе VII, § 4. Общим для них является то, что при размножении исходной области была покрыта не вся плоскость, но только внутренность круга (соответственно полуплоскость). Соответствующие функции не могут быть аналитически продолжены за круг и потому называются *автоморфными функциями с предельным кругом*. Совершенно подобно тому, как в главе IV, § 9 мы могли истолковывать все линейные подстановки как пространственные неэвклидовы движения, здесь те линейные подстановки, которые преобразуют круг в самого себя, можно рассматривать как *плоские неэвклидовы движения* [1]). Взамен понятия эквивалентных областей входит тогда понятие неэвклидовых конгруэнтных областей.

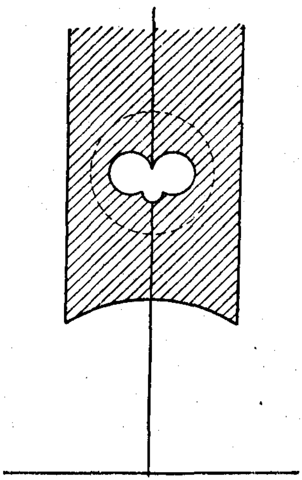
---

[1]) Если мы применим принятое там толкование линейных подстановок как пространственные неэвклидовы движения, то мы увидим, что эти движения в случае, когда они оставляют неподвижным предельный круг, преобразуют саму в себя и ту плоскость, которая вырезает из z-сферы предельный круг. В части этой плоскости, которая лежит внутри z-сферы, получается разделение, соответствующее группе движения, на неэвклидовы конгруэнтные области с прямолинейными грани-

Но существуют еще совершенно иначе образованные группы линейных подстановок. Например, начнем с области B, ограниченной $2p$ отдельно лежащими окружностями, и выберем p гиперболических или локсодромических подстановок, которыми эти окружности попарно связаны (черт 76). Соответствующая этой области B, в смысле Analysis situs, замкнутая поверхность имеет очевидно род p и может быть например по § 1 представлена в виде поверхности с p ручками. При этом $2p$ граничным кривым области B соответствуют некоторые p циклических сечений на этой поверхности, из которых каждое охватывает одну из ручек.



Черт. 76.



Черт. 77.

Если мы размножим область подстановками соответствующей группы, то области, эквивалентные B, покроют всю плоскость за исключением бесконечно большого числа предельных точек, которые образуют, по терминологии учения о множествах, совершенное нигде не связное множество, но мы не можем на этом останавливаться ближе [1]).

Другой пример мы получим, описав около точки исходного четырехугольника модулярного деления (черт. 53, где должно представить себе, что густо заштрихованный треугольник приложен к левой стороне своего левого отражения), например

цами. Проектируя эту сеть сперва из полюса плоскости на z-сферу, потом с нее стереографически на числовую плоскость, мы как раз получим фигуры текста. Можно и тут говорить о неэвклидовой геометрии если например понимать под „прямыми" ортогональные к предельному кругу окружности.

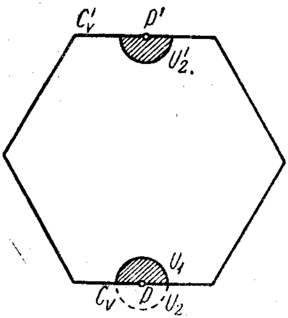
[1]) Ср. все-таки § 5, стр. 354—355.

около некоторой точки мнимой оси окружность, целиком лежащую внутри четырехугольника, и отобразив в ней четырехугольник. Область, заключенную между обоими четырехугольными контурами (черт. 77), можно считать фундаментальной; она имеет очевидно, если представить себе соответствующие части контуров соединенными, род нуль. Если мы размножим ее с помощью соответствующей группы линейных подстановок, то сеть эквивалентных областей покроет часть плоскости, ограниченную бесконечным числом окружностей (между ними одна прямая). Полученную фигуру можно описать как систему бесконечно большого числа „входящих друг в друга“ модулярных делений.

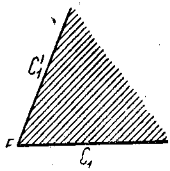
Этих указаний достаточно; выполнение, только намеченных здесь, построений, а равно и другие примеры с разъясняющими чертежами читатель найдет в упомянутом уже сочинении Fricke и Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“.

Обратимся теперь к высказанной выше теореме о конформном отображении. К упомянутой ограничительной предпосылке относительно природы области B мы придем по необходимости, если представим себе, что область B уже отображена на риманову поверхность G. Каждая точка Q поверхности G имеет то свойство, что некоторая окрестность Q может быть конформно за исключением быть может самой точки Q (в случае, если Q есть точка разветвления), отображена на однолистный круг. Если G конформно отображена на B, то то же самое должно быть возможно для „окрестности“ каждой точки P области B; при этом, конечно, нужно понимать „окрестность“ так, что вследствие отображения B на G окрестности точки P на B соответствует окрестность отображенной точки Q на G. Если P есть внутренняя точка B, то и „окрестность“ P есть очевидно окрестность P в обыкновенном смысле. Если же P лежит на границе B, то окрестность P окажется вообще разбитой на несколько кусков, которые прилегают ко всем граничным точкам, эквивалентным P. Если например P лежит на граничной кривой C_ν, но не в вершине, то B имеет в точности одну отличную от P и ей эквивалентную граничную точку P' на C'_ν, так что окрестность P состоит из двух раздельных частей U_1 и U'_2 (черт. 78). Эта окрестность наверное отображается конформно на однолистный круг. Действительно, с помощью линейной функции S_ν^{-1} часть U_2' конформно отображается на U_2, и состоящая из U_1 и U_2 область есть однолистная окрестность P в обыкновенном смысле.

Остается разобрать вопрос о том, что может случиться, если P находится в вершине области B. Пусть C_1 одна из двух граничных кривых B, проходящих через E. Тогда другая граничная кривая будет либо эквивалентная C_1 кривая C_1' или она отлична от C_1'. В первом случае все прилегающие к вершине E области B_S получаются очевидно из B применением подстановки S_1^ν $(\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Поэтому, кроме самой точки E, нет никакой эквивалентной E точки на границе B и под окрестностью E нужно разу-



Черт. 78.

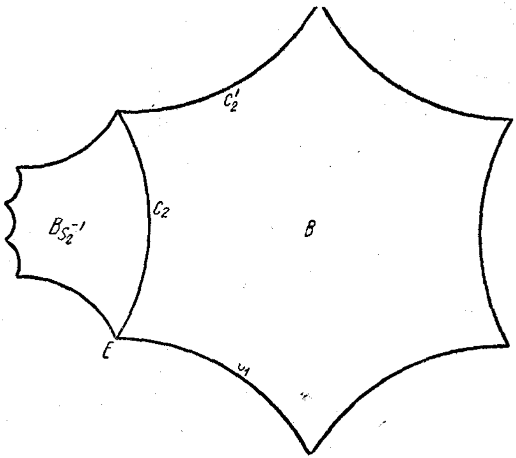


Черт. 79.

меть область в виде сектора, как показывает черт. 79. При этом точки C_1 нужно отнести к „окрестности", точки же C_1' (кроме самой точки E) не нужно. Если же вторая проходящая чрез E граничная кривая отлична от C_1' (например кривая C_2), то на границе B существует, по крайней мере, одна вершина, отличная от E, но эквивалентная с E, а именно вершина $S_2(E)$. Тогда рядом с областью B мы расположим область $B_{S_2^{-1}}$ и получим новую кривую, проходящую через E, именно граничную кривую области $B_{S_2^{-1}}$ (черт. 80). Она либо эквивалентна с C_1, тогда мы назовем ее $\overline{C}$, или она ей неэквивалентна; тогда она эквивалентна с граничной кривой C_3 области B, отличной от кривых C_1 и C_2 [1]). В этом случае мы расположим подле

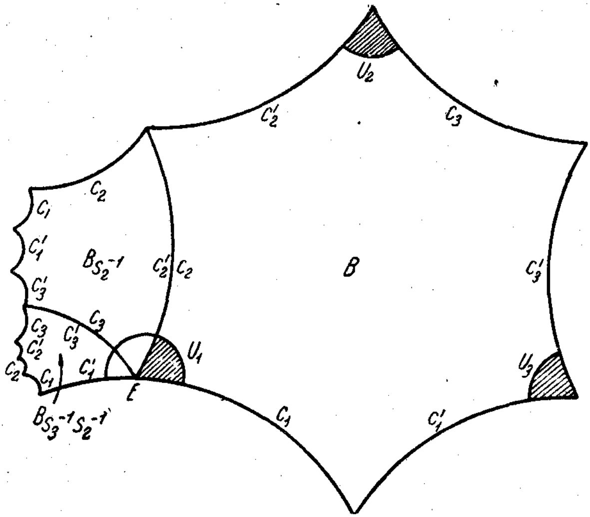
[1]) Если бы она была эквивалентна с C_2, то получилось бы противоречие с предыдущими предпосылками.

области $B_{S_2^{-1}}$ новую область $B_{S_3^{-1}S_2^{-1}}$ (черт. 81) и придем к новой кривой, проходящей через E. Во всяком случае мы получим наконец после конечного числа, например m, шагов в первый раз граничную кривую $\overline{C}$, эквивалентную с C_1. Тогде на границе B лежит в точности m вершин, эквивалентных E, и „окрестность" E представляется составленной из m кусков $U_1, U_2, \ldots, U_m$, которые, подобно тому, как выше, могут быть заменены в смысле конформ-



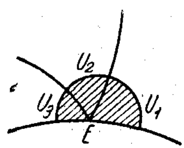
Черт. 80.

ного отображения секторовидной областью черт. 82. Так как совокупность областей B_S должна покрыть плоскость однолистно, то во всяком случае угол между C_1 и $\overline{C}$ в точке E равен, самое большее, 2π. Если он точно равен 2π, то C_1 и $\overline{C}$ покрывают друг друга, и наш сектор будет однолистной окрестностью E в обыкновенном смысле, следовательно может быть конформно отображен на круг. Если же этот угол меньше 2π, то E будет неподвижной точкой линейной подстановки S (которая отлична от тождественного преобразования) нашей группы $\mathfrak{G}$, и мы должны поставить такое требование: сектор черт. 82 должен конформно отображаться, за исключением точки E, на однолистный круг K и притом так, чтобы эквивалентные в силу подстановки S точки C_1 и C переходили бы в те же самые точки K. Здесь можно высказать без доказательства[1]), что такое отображение возможно тогда и только тогда, когда подстановка S — параболическая или эллиптическая, но не гиперболическая или локсодромическая. Называя вершину



Черт. 81.

области B, которая является неподвижной точкой содержащейся в группе $\mathfrak{G}$ подстановки S, смотря по характеру S, эллиптической, параболической, гиперболической или локсодромической вершиной, мы можем высказать наше дополнительное предположение следующим образом: *область B должна иметь только эллиптические и параболические вершины, и не должна иметь ни гиперболических, но локсодромических.*



Черт. 82.

В силу последнего предположения мы можем покрыть область B конечным числом областей, являющихся частями B, которые либо сами будут кругами, либо состоят из нескольких кусков, которые могут быть конформно отображены на однолистный круг, причем конформность может быть нарушена,

[1]) Ср. например *F. Klein*, Ges. math. Abh., Bd. 3, S. 713.

в крайнем случае, только в центре. Но тогда рассуждения предшествующего параграфа можно повторить дословно. Начнем с того, что проведем в области B, которую представим себе замкнутой, каноническую систему p пар циклических сечений Q'_i, Q''_i $(i=1, 2, \ldots, p)$; потом составим, как в § 2, потенциалы второго и третьего вида, что тут так же возможно, как и там. Эти потенциалы дополним образованием сопряженных потенциалов до соответствующих „интегралов"; наконец получим однозначные в B функции посредством дифференцирования по z или посредством линейного комбинирования интегралов второго вида. Полученные таким путем однозначные функции имеют особое свойство, а именно — иметь особыми точками в B только полюса, если их рассматривать в каждой точке P области B в зависимости от соответствующей местной униформизирующей переменной t[1]). В дальнейшем в этом параграфе мы будем называть „автоморфными функциями" только такие, инвариантные относительно нашей группы $\mathfrak{G}$ функции, которые ведут себя во всех точках B рационально в только-что указанном смысле [2]).

Если $\varphi(z)$ — одна из только-что составленных однозначных функций в B, то $\varphi(z)$ принимает равные значения в эквивалентных граничных точках B, т. е. она удовлетворяет на кривой C_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, за исключением самое большее конечного числа точек, функциональному уравнению

$$\varphi(S_\nu(z)) = \varphi(z) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Отсюда мы сразу выводим возможность аналитического продолжения функции $\varphi(z)$ в соседние области B_{S_ν}, $B_{S_\nu^{-1}}$, следовательно и в любую область B_S. Вместе с тем видна справедливость функционального уравнения

$$\varphi(S(z)) = \varphi(z) \quad (2)$$

[1]) Местной униформизирующей переменной мы называем такую функцию $t(z)$, которая обращается в нуль в P и которая отображает некоторую окрестность P на однолистный круг, описанный вокруг $t=0$. Если мы говорим о порядке полюса или нуля, то разумеем всегда порядок относительно t.

[2]) И при определении эллиптических функций требуется непременно отсутствие существенно особых точек в параллелограмме периодов.

для каждой подстановки S из $\mathfrak{G}$, т. е. выявляется автоморфный характер $\varphi(z)$. Функция $\varphi(z)$ в каждой точке B ведет себя в указанном выше смысле как функция рациональная; поэтому $\varphi(z)$ отображает „окрестность" каждой точки области B либо на однолистную область, расположенную над плоскостью φ, либо на окрестность конечномноголистной точки разветвления. Наконец $\varphi(z)$ обращается в бесконечность первого порядка только в конечном числе, например, m точек B [1]).

Пусть теперь c — произвольное комплексное число. Область B, без ограничения общности, можно выбрать так, чтобы на границе B функция $\varphi(z)$ не принимала бы значения, равного c, и не имела бы полюсов. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-c}\,dz,$$

взятый по границе области B в положительном направлении, равен нулю, в силу автоморфного характера функции $\varphi(z)$. С другой стороны, в силу главы III, § 5, (4), он равен разности между числом нулевых точек для разности $\varphi(z)-c$ и числом полюсов $\varphi(z)$, лежащих внутри B. Таким образом $\varphi(z)$ принимает каждое комплексное значение в точности в m (одинаковых или различных) точках области B. Этим доказано, что $\varphi(z)$ отображает всю область B конформно за исключением конечного числа точек на m-листную алгебраическую поверхность Римана G расположенную над плоскостью φ.

Пусть теперь $\zeta=\zeta(\varphi)$ алгебраическая функция от φ, которая принадлежит в точности этой римановой поверхности G. Существование такой функции было доказано в предыдущем параграфе. Если рассматривать ее как функцию от z, то очевидно она будет также однозначной автоморфной функцией $\psi(z)$ от z. То же самое имеет место для всякой рациональной функции от φ и ζ, т. е. по § 4 главы V для всякой алгебраической однозначной на G функции от φ. Если, наоборот, $\chi(z)$ есть какая-нибудь из принадлежащих к B автоморфных однозначных функций, то на поверхности G она будет однозначной функцией точки, следовательно алгебраической функцией от φ, которую можно представить как рациональную функцию от ζ и φ. Так как

1) ν-кратная точка бесконечности должна при этом считаться за ν простых.

$\varphi(z)$ и $\chi(z)$ совершенно произвольные принадлежащие к B автоморфные функции, то следовательно всякие две такие функции связаны между собой алгебраическим уравнением. Отсюда вытекает такой результат: *однозначные автоморфные функции от z, принадлежащие группе $\mathfrak{G}$ и ведущие себя во всех точках своей фундаментальной области B как рациональные функции, соответствуют взаимно однозначным образом системе алгебраических функций, однозначных на построенной соответственно B римановой поверхности G.*

Мы привели доказательство существования автоморфных функций, которое позволяет теоретически их составить, но не дает готового аналитического выражения для их вычисления. Такое аналитическое выражение в виде бесконечных рядов дал H. Poincaré в своих первых работах, относящихся к этой области. Мысль Пуанкаре была впоследствии разработана во всех деталях E. Ritter'ом [1]).

§ 4. Униформизация алгебраических и аналитических функций посредством автоморфных функций с предельным кругом.

Теория автоморфных функций стоит в тесной связи с одной важной проблемой теории функций. Мы видели в предшествующем параграфе, что две автоморфные функции

$$z = \varphi(s), \qquad \zeta = \psi(s) \tag{1}$$

с одной и той же фундаментальной областью в плоскости s удовлетворяют алгебраическому уравнению $F(z, \zeta) = 0$, т. е., что ζ есть алгебраическая функция от z. Эта алгебраическая функция является вместе с тем „*униформизированной*" однозначными автоморфными функциями (1).

Вообще, мы понимаем под „*униформизацией*" аналитической функции $\zeta = f(z)$ построение двух однозначных аналитических функций, имеющих разве лишь полярные особенности,

$$z = \varphi(s), \qquad \zeta = \psi(s)$$

---

[1]) Cp. *H. Poincaré* Œuvres, том 2, а также *Ritter*, Math. Ann. в томах 41 до 47 (1893—1896); и *Frieke-Klein*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 2.

в некоторой области комплексной числовой плоскости „униформизирующей переменной“ s и притом таких, что уравнение

$$\psi(s)=f(\varphi(s))$$

тождественно удовлетворяется относительно s. Примеры таких униформизаций встречались у нас часто. Так, функция $\zeta=z^{\alpha}$ униформизируется при любом α, если задать

$$z=e^{s}, \qquad \zeta=e^{\alpha s};$$

функция $\zeta=\sqrt{1-z^2}$ униформизируется функциями

$$z=\sin s, \qquad \zeta=\cos s$$

или функциями

$$z=\frac{2s}{1+s^2}, \qquad \zeta=\frac{1-s^2}{1+s^2};$$

функция

$$\zeta=\sqrt{4z^3-g_2z-g_3},$$

где g_2 и g_3 означают комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$g_2^3-27g_3^2\neq 0$$

униформизируется представлением

$$z=\wp(t), \qquad \zeta=\wp'(t)$$

с помощью эллиптической функции $\wp(t)$ „Вейерштрассовой $\wp$-функции с инвариантами g_2 и g_3“.

Во всех этих примерах униформизация достигается с помощью либо рациональных, либо простопериодических или двоякопериодических функций и каждый раз распространяется на всю область существования униформизируемой функции.

Возникает теперь вопрос, всегда ли возможно произвести униформизацию любой алгебраической функции во всей области ее существования. Это как раз имеет место, причем одним из прекраснейших и замечательнейших фактов теории функций является то, что униформизация всегда может быть достигнута посредством *автоморфных функций*. На основании результатов § 3 мы можем высказать это следующим образом: *алгебраические римановы поверхности и фундаментальные области автоморфных функций суть взаимно эквивалентные геометрические образы.* Униформизация посредством автоморфных функций может быть выполнена, в каждом отдельном случае, разнообразными способами; а именно можно в довольно широких пределах задавать тип фундаментальной области применяемых автоморфных функций. Мы ограничиваемся здесь простейшим и вместе с тем интереснейшим случаем так называемой *униформизации с предельным кругом.* При этом мы рассматриваем любую алгебраическую функцию $\zeta = \zeta(z)$, для которой риманова поверхность пусть будет G. В следующем параграфе мы разберем еще другой тип униформизации.

Сначала мы строим вместо поверхности G новую поверхность $\overline{\overline{G}}$, которая, правда, содержит вообще бесконечное число листов, но зато в отношении своей связности гораздо проще G. Эту поверхность, которую мы назовем *универсальной поверхностью наложения* для G, мы получим таким образом: если G имеет род $p = 0$, то $\overline{\overline{G}}$ совпадает с G; если же $p > 0$, то представим себе, что подобная однолистной поверхность $\overline{G}$, образовавшаяся путем канонического рассечения поверхности G, существует в бесконечно большом числе конгруэнтных экземпляров, и обозначим края циклических сечений везде одинаковым образом буквами Q_i^+, Q_i^-, $Q_i'^+$, $Q_i'^-$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Склеим теперь с каждым краем Q^+ поверхности $\overline{G}$ новый экземпляр, приложив его соответственным краем Q^-, точно также к каждому краю Q^- приложим новый экземпляр краем Q^+. Будем продолжать таким образом дальше, присоединяя к каждому свободному краю Q^+ или Q^- новую поверхность $\overline{G}$ соответственным краем Q^- или Q^+. Только в одном случае не нужно присоединять новые экземпляры $\overline{G}$ к свободным краям, а взамен этого должно соединить два уже имеющихся свободных края. Действительно, склеивая экземпляры друг за другом, мы получаем все время области, ограниченные следующими друг за другом краями циклических сечений, принадлежащих склеенным экземплярам $\overline{G}$. И вот как только при обходе границы одной из этих областей два соответственных края Q_h^+ и Q_h^- (или $Q_h'^+$ и $Q_h'^-$)

с одним и тем же h будут следовать непосредственно друг за другом, они должны быть соединены вместе, и к ним уже не надо присоединять никаких новых экземпляров $\overline{G}$ [1]). Продолжая этот процесс до бесконечности [2]), мы определим бесконечно многолистную область $\overline{\overline{G}}$; она состоит из бесконечно многих конгруэнтных экземпляров $\overline{G}$ и представляет искомую поверхность наложения.

Эта поверхность наложения $\overline{\overline{G}}$ при $p>0$ будет односвязной областью, подобной однолистной. Это станет очевидным из черт. 65 в § 1, если как $\overline{G}$, так и конгруэнтные экземпляры представить плоскими многоугольниками, стороны которых представляют края сечений. Если мы в точности повторим с этими многоугольниками тот же процесс соединения, что и с экземплярами $\overline{G}$, и позаботимся о том, чтобы при каждом шаге получался бы плоский простой многоугольник, то непосредственно убедимся в справедливости нашего утверждения относительно связности $\overline{\overline{G}}$ [3]).

Если мы выберем один из соединенных экземпляров $\overline{G}$ за начальный и обозначим его через $\overline{G}_0$, то каждой точке P поверхности $\overline{\overline{G}}$ соответствует в точности одна точка P_0 на $\overline{G}_0$, а именно та точка, положение которой на $\overline{G}_0$ конгруэнтно с положением P на экземпляре $\overline{G}$, которому принадлежит сама точка P. Очевидно, P и P_0 лежат над одним и тем же местом плоскости z. Каждому замкнутому пути на $\overline{\overline{G}}$ соответствует в этом смысле замкнутый путь

---

[1]) Иначе, полученная поверхность имела бы над точкой P поверхности G, из которой $\overline{G}$ получена каноническим рассечением, бесконечно много логарифмических точек разветвления, чего мы желаем избежать.

[2]) Что процесс в предположении $p>0$ действительно может продолжаться до бесконечности, т. е. что не получится замкнутой поверхности после конечного числа шагов, причем все свободные края по правилу соединятся попарно, вытекает из того, что число свободных краев будет все время расти, если надлежащим образом присоединять новые экземпляры $\overline{G}$, а именно сначала присоединить все экземпляры, какие возможно, ко всем вершинам исходного экземпляра, потом ко всем вершинам полученной области и т. д.

[3]) При этом многоугольники вовсе не должны быть конгруэнтными, поскольку дело идет только о соотношениях связности и могут даже все быть уложены однолистно в одной плоскости.

на $\overline{\overline{G}}_0$; т. е. каждая однозначная на G функция тем самым однозначна и на поверхности наложения $\overline{\overline{G}}$ [1]).

Абстрактное построение понятия римановой поверхности, данное в § 3 главы V, позволяет нам также абстрактно определить и понятие поверхности наложения без описанного выше процесса склеивания. В силу теоремы монодромии § 1 (глава V), область B, расположенная над z-плоскостью, вполне определена для целей теории функций, если только задано, возвращаемся ли мы при обходе по любому замкнутому в z-плоскости пути к исходной точке также и в области B, или же при этом мы переходим на второй лист. Поэтому мы могли бы определить универсальную поверхность наложения $\overline{\overline{G}}$ для римановой поверхности G с помощью следующего требования: каждой замкнутой кривой на G, которая может быть непрерывно стянута в одну точку, должна соответствовать на $\overline{\overline{G}}$ тоже замкнутая кривая, каждой иной замкнутой кривой на G должна соответствовать на $\overline{\overline{G}}$ незамкнутая кривая. Этого можно достичь, если каждой исходящей из точки P открытой дуге кривой PQ привести в соответствие некоторую точку поверхности наложения, однако так, чтобы всем кривым, которые при сохранении начальной и конечной точек могут быть непрерывно переведены в заданную кривую, отвечала бы одна и та же точка. Нетрудно показать равносильность этого определения с предыдущим. Преимущество последнего определения в том, что оно обходится без рассечения области G и может быть поэтому приложено к совершенно произвольным областям, что имеет значение для униформизации неалгебраических функций.

В силу § 9 главы VIII мы можем взаимно однозначно и конформно отобразить поверхность наложения $\overline{\overline{G}}$ на однолистную область и при том либо на полную s-плоскость,

---

[1]) Вообще называют „*поверхностью наложения*“ G поверхность G^*, расположенную над заданной римановой поверхностью G, если для каждой точки P на C^* можно сопоставить однозначно и непрерывно лежащую над тем же самым местом точку G, таким образом, чтобы окрестность каждой точки G^* отображалась бы взаимно однозначно и взаимно непрерывно на окрестность соответствующей точки G. Каждая такая поверхность наложения, если она подобна однолистной, годится для униформизации. Положенная нами в основание поверхность наложения представляет самый наглядный случай.

либо на s-плоскость, ограниченную только одной точкой, например точкой ∞, либо наконец на внутренность единичного круга. Первый случай исключается вследствие замечания на стр. 300 (§ 9 главы VIII), как только $\rho > 0$, потому что тогда $\overline{\overline{G}}$ будет иметь бесконечное множество листов. Если же $\rho = 0$, то мы получаем, как изображение G, полную s-плоскость и z и ζ будут рациональными функциями $\varphi(s)$ соответственно $\psi(s)$ переменной s. Итак: *для поверхностей рода нуль униформизация достигается через рациональные функции.*

В случае $\rho > 0$ обозначим отображение $\overline{\overline{G}}$ на плоскость s через S, все равно, будет ли это вся плоскость, кроме точки ∞, или единичный круг. Тогда точки поверхности $\overline{\overline{G}}$, а следовательно, и однозначные на этой поверхности значения z и ζ, будут однозначно отвечать точкам S; следовательно, z и ζ станут везде на S однозначными функциями от s; мы обозначим их опять через $\varphi(s)$ и и $\psi(s)$; т. е. алгебраическая функция $\zeta = \zeta(z)$ униформизирована посредством функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$. Если униформизирующая переменная s пробегает какой-нибудь путь на S, то система значений (z, ζ) пробегает на поверхности $\overline{\overline{G}}$ путь, которому, как выше объяснено, соответствует определенный путь на G. Если первый путь замкнут, то наверное замкнут и последний путь. Таким образом мы видим, что даже все однозначные на $\overline{\overline{G}}$ функции могут быть представлены однозначными функциями от s, хотя бы они были на G многозначны. В частности к ним относятся абелевы интегралы первого и второго вида поверхности G.

Чтобы ближе исследовать свойства функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, рассмотрим периодическое строение поверхности наложения $\overline{\overline{G}}$. *Поверхность $\overline{\overline{G}}$ допускает „преобразования наложения", т. е. конгруэнтные преобразования в себя.* К ним мы приходим следующим образом: каждая точка P на $\overline{\overline{G}}$ лежит на одном из бесчисленных экземпляров поверхности $\overline{G}$; этому экземпляру однозначно соответствует определенный следующий экземпляр, к которому мы приходим, переходя через край сечения Q^+ или Q^-; Q'^+, Q'^-. На этом экземпляре существует определенная точка, расположенная конгруэнтно с P. Для однозначности соответствия точек также и на краях Q мы должны всегда из каждого сечения причислять к $\overline{\overline{G}}$ только один край Q^+, Q'^+ но не другой край Q^-, Q'^-. Мы приводим теперь в соответствие каждой точке P на $\overline{\overline{G}}$ при каждом значении $i = 1, 2, \ldots, \rho$ конгруэнтную ей точку P', получающуюся при переходе одного из краев Q_i^+ или Q_i^-, $Q_i'^+$, $Q_i'^-$ и замечаем при этом, что $\overline{\overline{G}}$ переходить опять в $\overline{\overline{G}}$. Полученные таким образом 4ρ преобразований покрытия и все получающиеся из них повторным применением образуют „*группу преобразований наложения* $\overline{\overline{G}}$."

Что это значит для функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$?. Преобразованию наложения нашей группы соответствует взаимно однозначно на s-плоскости такое соответствие точек области S, при котором S отображается на себя. Так как преобразование наложения как конгруэнтное отображение конформно, то точно так же конформно отображение S на себя; следовательно [1]) оно представляет линейное преобразование

$$s' = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}. \tag{2}$$

Все линейные преобразования, которые мы получаем таким путем, образуют, разумеется, также группу; она изоморфна с группой преобразований наложения, т. е. операции обеих групп взаимно однозначно соответствуют друг другу так, что операции одной группы, составленной из нескольких операций, соответствует аналогично составленная операция другой группы.

Двумя точкам на $\overline{\overline{G}}$, связанным друг с другом в указанном выше смысле посредством преобразования, наложения, принадлежат одни и те же значения комплексной переменной z и ее функции ζ; поэтому для всех преобразований нашей группы имеют силу тождественно в s соотношения

$$\varphi\left(\frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}\right) = \varphi(s), \qquad \psi\left(\frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}\right) = \psi(s). \tag{3}$$

---

[1]) Если S есть плоскость с исключенной точкой, то это следует из § 3 главы IV. Отображение же единичного круга на себя может быть преобразовано посредством линейного преобразования в такое отображение, которое оставляет неподвижным нулевую точку и положительное направление оси X, но последнее отображение по § 3 главы VI есть тождество.

Отсюда результат: *алгебраическая функция $\zeta(z)$ униформизируется посредством однозначных автоморфных функций от s с группой* (2).

Для более точного исследования функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$ должно теперь различать, будет ли S вся плоскость за исключением точки ∞ или внутренность единичного круга. В первом случае равенства (2) должны иметь вид

$$s' = \alpha s + \beta, \tag{4}$$

потому что точка ∞ переходит сама в себя. Здесь постоянная α должна иметь значение 1; ибо иначе отличная от ∞ точка $s_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ осталась бы неподвижной при преобразовании (4), а следовательно соответственная точка $\overline{\overline{G}}$ осталось бы неподвижной при соответствующем (4) преобразовании наложения. А преобразование наложения, отличное от тождественного, не оставляет неподвижной никакой точки. Следовательно, преобразование (4) имеет вид

$$s' = s + \beta. \tag{5}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ поэтому будут периодическими. Случай простой периодичности, следовательно *одной* только производящей подстановки группы, не может иметь места при $\rho > 0$, потому что тогда имеются, по меньшей мере, 4 края сечений, так что по меньшей мере две существенно различных подстановки образуют группу. С другой стороны этот случай не может быть и при $\rho = 0$, потому что при этом тождественная с G поверхность $\overline{\overline{G}}$ не допускает никаких отличных от тождественного преобразований наложения [1]).

---

[1]) Заметим, что группа преобразований (5) и в случае простой периодичности дает униформизацию поверхности рода нуль, которой соответствует однако другой вид поверхности наложения $\overline{\overline{G}}$. Нужно провести внутри G сечение Q между какими-нибудь двумя точками; потом взять так разрезанную поверхность $\overline{G}$ в бесконечном числе экземпляров и, как выше, присоединять к каждому свободному краю сечений Q^+ и Q^- новый экземпляр $\overline{G}$. При этом в противоположность прежнему нельзя никогда соединять два уже существующие края. Таким образом *для алгебраических функций рода нуль существует всегда кроме униформизации посредством рациональных функций еще униформизация посредством однозначных простопериодических функций.*

Двоякая периодичность наступает при $p=1$; тогда $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ становятся *эллиптическими функциями* с двумя независимыми периодами ω_1, ω_2. Более высокий род рассматривать не приходится, ибо тогда группа (5) имела бы более двух существенно различных производящих преобразований, между тем как однозначная аналитическая функция имеет самое большее два независимых периода [1]). В самом деле, при $p=1$ эллиптические функции униформизируют эллиптические римановы поверхности [2]); но можно вообще показать, что всякая риманова поверхность рода 1 может быть униформизирована посредством двоякопериодических функций [3]).

---

[1]) Ср. Главу VII, § 2.

[2]) Ср. сноску к стр. 178.

[3]) Чтобы в этом убедиться, нужно только согласно с прежними замечаниями показать, что поверхность наложения $\overline{\overline{G}}$ римановой поверхности G рода 1 отображается посредством характеристической функции течения $\zeta=f(z)$, которая отображает $\overline{\overline{G}}$ на надрезанную область (ср. гл. VIII), на ζ-плоскость *с исключенной точкой*. Для доказательства будем рассматривать $\overline{\overline{G}}$ как предел заключенных друг в друге областей $\overline{G}_n$, причем $\overline{G}_n$ состоит из $(2n+1)^2$ экземпляров канонически рассеченной поверхности G и ограничена кривой C_n, образованной $4(2n+1)$ краями нашей системы циклических сечений. Пусть все эти сечения имеют длину меньше постоянной границы a и не проходят через точки разветвления. Мы можем тогда опоясать C_n на $\overline{\overline{G}}$ полосой S_n, которая получается от того, что обводят вдоль кривой C_n центр однолистного круга с надлежащими независящим от n радиусом. Далее примем, что никакая полоса S_n не содержит точки, где находится двойной источник, и что никакие две полосы не налегают друг на друга. Если мы обозначим через D_n интеграл от $|f'(z)|^2$ по S_n, то ряд $D_1+D_2+\ldots$ во всяком случае сходится. С другой стороны, лемма I главы VIII, § 6, формула (1), позволяет нам заключить о существовании постоянной b, независящей от n и такой, что

$$\int_{C_n} |f'(z)|^2 |dz| < b\, D_n.$$

Для длины L_n кривой, являющейся отображением C_n на ζ-плоскость, получаем с помощью неравенства Шварца

$$L_n^2=\Big(\int_{C_n} |f'(z)|\,|dz|\Big)^2 \leqslant 4\,(2n+1)\,a<\int_{C_n} |f'(z)|^2 |dz|<$$
$$<4\,(2n+1)\,ab\,D_n<cn\,D_n,$$

К существенно иным функциям приходим мы во втором случае, когда S будет единичным кругом s-плоскости. Все линейные преобразования группы должны переводить окружность этого круга в себя, отображая внутренность его взаимно однозначно на самое себя. Отображение одного из экземпляров $\overline{G}$, из которых построен $\overline{\overline{G}}$, будет однолистной областью, целиком лежащей внутри S, в которой функции $\varphi(s)$, $\psi(s)$ принимают в точности по одному разу все пары своих значений. Это есть область такого же рода, как та область, которую в предыдущем параграфе мы назвали фундаментальной областью группы (2) и поставили в центре рассуждения. Бесчисленные фундаментальные области, которые получаются из одной из них при помощи линейных преобразований (2), должны заполнить весь единичный круг и потому, во всяком случае, будучи расположены в ряд $B_1, B_2, B_3, \ldots B_h, \ldots$, должны иметь площадь, стремящуюся к нулю. Это возможно только, если они сами при достаточно большом h помещаются в произвольно малом круге [1]). Отсюда мы заключаем, что в произвольной близости каждой граничной точки единичного круга лежат целые фундаментальные области. Действительно, если мы выберем точку достаточно близко к контуру круга, то указатель h области B_h, которой эта точка принадлежит, будет произвольно велик, а поэтому диаметр B_h произвольно мал. Вместе с тем функции $\varphi(s)$,

причем c постоянная независящая от n. Отсюда следует, что для известных произвольно больших значений n длина L_n должна становиться как угодно малой потому, что в противном случае $\sum D_n$ не могла бы сходиться. Так как при возрастании n отображения кривых C_n в плоскости ζ заключаются друг в друге, то отсюда следует, что отображение $\overline{\overline{G}}$ есть ζ-плоскость с исключенной точкой. Заметим еще, что наше заключение не имеет силы при $p > 1$, потому что тогда число краев циклических сечений, из которых состоит контур выше определенной области $\overline{\overline{G_n}}$, растет быстрее, чем первая степень n.

[1]) Доказательство этого утверждения вытекает например из леммы I в главе VIII § 6, если мы ее применим к области, которая целиком лежит в S и содержит в себе исходную фундаментальную область B и которая например получается из последней путем присоединения всех примыкающих фундаментальных областей. И эта область отображается надлежащим преобразованием на область с произвольно малой площадью. А тогда из леммы I следует, что в первоначальной фундаментальной области отображающая функция становится мало отличающейся от постоянной соответственно малости площади отображения.

$\psi(s)$ принимают там все еще каждое значение; следовательно каждая точка окружности круга является существенно особой точкой обеих функций. Иными словами, круг есть естественная граница для униформизирующих автоморфных функций. Наши результаты можно высказать в теореме: *униформизация всякой алгебраической функции всегда может быть достигнута посредством автоморфных функций с предельным кругом,* причем в эту формулировку мы включаем и случай, когда S есть плоскость с исключенной точкой [1]). Эта теорема называется *теоремой об униформизации с предельным кругом.*

Единичный круг в s-плоскости с его разделением на фундаментальные области играет такую же роль, как риманова поверхность алгебраической функции с принадлежащей ей поверхностью наложения. Возвращаясь к упомянутому в последнем параграфе толкованию линейных преобразований единичного круга в себя (стр. 328), как неэвклидовых движений, мы можем сказать: риманова поверхность алгебраической функции с принадлежащей ей поверхностью наложения представляется куском плоскости, составленным из бесконечно многих неэвклидовых конгруэнтных частей, иными словами представляется *„неэвклидовым кристаллом“*. В случае эллиптических функций место неэвклидовой конгруэнтности заступает конгруэнтность эвклидова.

Заметим в заключение, что точно таким же путем можно добиться *униформизации любых аналитических функций* при помощи автоморфных функций, ибо построение соответственной односвязной поверхности наложения удается на основании ее абстрактного определения, которое мы дали выше на стр. 340; и эту поверхность наложения надлежит опять отобразить конформно на полную плоскость или плоскость с исключенной точкой или на внутренность круга. В случае, если риманова поверхность исходной функции уже сама односвязна и подобна однолистной, то она является своей собственной поверхностью наложения, и группа преобразований наложения сводится к тождественному. Обозначение „автоморфные функции“ для униформизирующих функций едва ли оправдывается в этом случае.

---

[1]) Это оправдывается, как только вместо s-плоскости мы положим в основание s-сферу; область существования автоморфных функций лежит тогда внутри некоторого круга на сфере, внешняя область которого в предельном случае может быть стянута к одной точке.

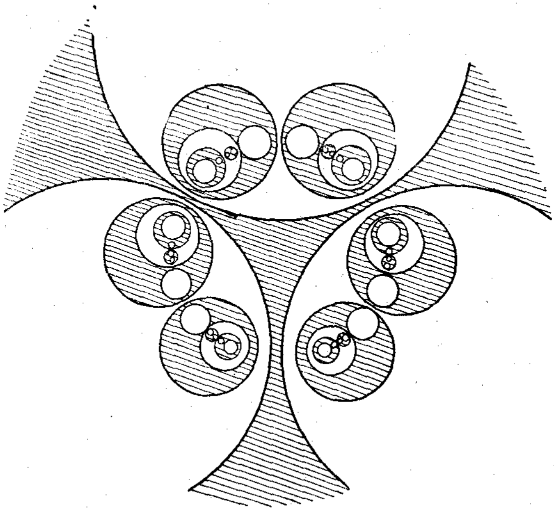
Далее укажем на то, что наши рассуждения приводят к *одновременной униформизации нескольких функций* посредством автоморфных функций с общей группой. Надо только исходить из такой римановой поверхности, на которой все рассматриваемые функции одновременно однозначны.

§ 5. Конформное отображение подобных однолистным областей на круговые области. Теорема об униформизации с циклическими сечениями.

В заключение укажем еще одно применение общей теоремы § 9 главы VIII, в силу которой можно конформно отобразить любую подобную однолистной область на область однолистную. Докажем, что при конечном n *возможно взаимно однозначно и конформно отобразить любую незамкнутую n-кратно связную подобную однолистной область на полную плоскость за исключением n круговых дыр* („*круговая область*"). Для этого по § 9 главы VIII достаточно доказать теорему в предположении, что исходная сбласть G есть плоскость z, снабженная n прямолинейными параллельными надрезами, среди которых по крайней мере один не сводится к точке. Действительно так как мы можем рассматривать надрезы в виде точек как круги с исчезающим радиусом, то в противном случае нечего было бы доказывать. Излагаемая теорема представляет обобщение теоремы Римана о конформном отображении, при том в формулировке, которую мы ей дали в главе VI в конце § 2.

Мы можем подойти к доказательству совершенно естественным путем, если на минуту примем, что уже имеется готовое конформное отображение G на круговую область **K** ζ-плоскости и что оно аналитически продолжено по принципу симметрии. Мы можем следующим образом построить шаг за шагом ту область, которая образуется процессом отражения над z-плоскостью: сперва мы переходим от G к области G_1, отражая G в его n разрезах. Полученная область G_1 — многолистная, а именно составлена из $(n+1)$ полных плоскостей, и ограничена $n\,(n-1)$ прямолинейными параллельными вещественной оси разрезами — зеркальными изображениями каждого из первоначальных разрезов $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. Из G_1 мы производим новую поверхность G_2, отражая G_1 в каждом из его свободных краев разрезов, и таким образом переходим к G_3, G_4, G_5 ... „Предел, заключающихся друг в друге областей G_j мы обозначим через G_∞.

Мы сейчас же получим наглядную картину соотношений связности нелегко поддающихся воображению областей G_j, соответственно G_∞, если мы выполним соответственные отражения в круговой области **K**. Областям G_1, G_2, ... соответствуют тогда круговые области $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, ..., заключен-



Черт. 83.

ные друг в друге, с возрастающим постоянно числом круговых дыр. Предел этих круговых областей мы обозначим через $\mathbf{K}_\infty$. На черт. 83 вычерчена для $n=3$ область $\mathbf{K}_2$, причем заштрихованы те части $\mathbf{K}_2$, которые получаются из **K** посредством четного числа отражений, остальные же части оставлены белыми. Безразлично, получается ли круговая фигура $\mathbf{K}_\infty$ действительно из G_∞ путем конформного отображения или нет, она все-таки делает наглядными в смысле Analysis situs соотношения связности G_j $(j=1,2\ldots)$ и G_∞. Мы видим, что G_∞ во всяком случае подобна однолистной, хотя уже не обладает связностью конечного порядка.

Конформное отображение области G_∞ на область со свойствами $\mathbf{K}_\infty$ удастся, если мы построим по главе VIII для какой-нибудь точки $O\,(z=z_0)$ на G_∞, которая пусть, например, лежит в первоначальной области G, характеристическую функцию течения, которая имеет в O полюс первого порядка с заданным вычетом. Последняя есть однозначная на G_∞ аналитическая функция $\zeta=u+$ $+iv=f(z)$ и отображает G_∞ на однолистную область, которую мы назовем $\mathbf{K}_\infty'$. Заключенные одна в другой области, представляющие отображения G, G_1, $G_2, \ldots$, назовем $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}_1'$, $\mathbf{K}_2', \ldots$ Теперь нам нужно доказать, что последние области имеют точно такие же свойства, что и области, обозначенные выше через $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2, \ldots$, т. е. что $\mathbf{K}'$ состоит из полной плоскости за исключением n круговых отверстий, и что $\mathbf{K}_1'$, $\mathbf{K}_2', \ldots$ происходят из $\mathbf{K}'$ вышеописанным процессом отражения.

Легко доказать этот факт, если мы раньше покажем, что *отображающая функция $f(z)$ определяется до произвольной аддитивной постоянной посредством двух следующих свойств: 1) $f(z)$ имеет в точке O на G_∞ простой полюс с заданным наперед вычетом, а во всех остальных точках G_∞ она однозначна и регулярна, 2) интеграл Дирихле*

$$D_{G_\infty - K_0}[u] = \iint\limits_{G_\infty - K_0} |f'(z)|^2\, dx\, dy,$$

распространенный по области, получающейся из G_∞ путем выбрасывания произвольно малого круга K_0 с центром O имеет конечное значение.

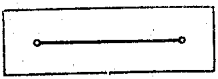
Чтобы показать правильность этого утверждения, достаточно доказать для всякой второй функции $\zeta^*=u^*+iv^*=$ $=f^*(z)$, обладающей свойствами 1 и 2, что гармоническая функция $w=u-u^*$, регулярная всюду на G_∞ и ограниченная по абсолютной величине, удовлетворяет соотношению

$$D_{G_\infty}[w]=0.$$

Для этой цели вспомним сначала, что интеграл $D_{G_\infty}[w]$, распространенный по всей области G_∞, должен существовать, ибо, с одной стороны, существует $D_{K_0}[w]$, с другой стороны, существует и $D_{G_\infty - K_0}[w]$ в силу соотношения

$$D[u-u^*] \leqslant D[u] + D[u^*] + 2\sqrt{D[u]D[u^*]}.$$

Обведем теперь каждый разрез Σ_i на G на расстоянии R прямоугольником Q_i $(i=1,2,\ldots,n)$, причем постоянное число R выберем так, чтобы не было ни одной пары разрезов, отстоящих друг от друга ближе чем на $4R$ [1]); точно также поступим с отражениями этих разрезов. Однолистную замкнутую область всех точек, отстоящих от Q_i не дальше чем на R, обозначим через B_i. Для каждого постоянного значения указателя i $(i=1, 2, 3,\ldots, n)$ расположим все отражения Q_i соответственно B_i в такой ряд:



Черт, 84.

$$Q_{i,1}, Q_{i,2},\ldots; \quad B_{i,1}, B_{i,2},\ldots,$$

что сперва стоят все изображения, лежащие в G_1, затем все вновь появляющиеся из G_2 и т. д. Положим

$$D_{B_{i,r}}[w] = W_{i,r};$$

тогда, в силу существования $D_{G_\infty}[w]$, очевидно имеет место соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{r=j}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} W_{i,r} = 0. \tag{1}$$

По лемме I главы VIII, § 6 имеет место для каждой точки $Q_{i,r}$ неравенство

$$w_x{}^2 + w_y{}^2 \leqslant \frac{1}{R^2\pi} W_{i,r}. \tag{2}$$

Если s обозначает длину дуги на $Q_{i,r}$, n — нормаль, то

$$\left|\frac{\partial w}{\partial s}\right| \leqslant \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}}, \quad \left|\frac{\partial w}{\partial n}\right| \leqslant \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}}. \tag{3}$$

---

[1]) Прямоугольники Q_i служат только для того, чтобы можно было воспользоваться леммой I из главы VIII, § 6.

Из первого уравнения следует, если разуметь под $w^0_{i,r}$ какое-нибудь значение w на $Q_{i,r}$, для всех w на $Q_{i,r}$

$$|w - w^0_{i,r}| \leqslant \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \sqrt{W_{i,r}} \cdot L, \tag{4}$$

где L — общая верхняя граница для длин всех Q_i.

Рассмотрим теперь вместо области G_j ту область G_j', которая получается из G_j, если мы заменим еще незамкнутые посредством отражения разрезы на G_j соответствующими соседними кривыми $Q_{i,r}$ и выбросим из области G_j внутренние для этих кривых области. G_j' содержится в G_j, но содержит в себе G_{j-1}, так что G_∞ можно считать также и пределом G_j'. По формуле Грина, примененной к области G_j' и к функциям $\varphi = w$, $\psi = w$, получим, в силу $\Delta w = 0$,

$$D_{G_j'}[w] = -\sum \int_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial n} ds,$$

причем граничные интегралы распространяются по тем кривым $Q_{i,r}$, которые ограничивают G^1. Вследствие однозначности функции $v - v^*$ на G_∞ имеем

$$\int_{Q_{i,r}} \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0,$$

следовательно

$$\int_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial n} ds = \int_{Q_{i,r}} (w - w^0_{i,r}) \frac{\partial w}{\partial n} ds,$$

откуда в силу (3) и (4)

$$\left| \int_{Q_{i,r}} w \frac{\partial w}{\partial n} ds \right| \leqslant \frac{1}{R^2\pi} W_{i,r} L.$$

Поэтому

$$D_{G_j'}[w] \leqslant \frac{L}{R^2\pi} \sum W_{i,r},$$

и так как при достаточно большом j все значки r становятся произвольно большими, то отсюда вытекает непосредственно на основании (1)

$$D_{G_\infty}[w] = \lim_{j \to \infty} D_{G'_j}[w] = 0.$$

Этим доказано утверждение, что w и вместе с тем $f(z) - f^*(z)$ постоянны.

Доказав таким образом что наша функция $\zeta = f(z)$ полностью определяется с помощью упомянутых выше свойств 1 и 2, мы выводим, что функции, получающиеся при различном выборе точки O на G_∞ и произвольном задании вычета в этой точке, отображающие G_∞ на однолистную область, суть *линейные функции друг от друга*. Действительно, с одной стороны, если $\zeta = f(z)$ обозначает нашу функцию, принадлежащую точке z_0, то всякая линейная функция

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{5}$$

будет опять функцией от z, отображающей область G_∞ на однолистную область ζ^*-плоскости, именно на ту область, которая получилась посредством (5) из области $\mathbf{K}'_\infty$, являющейся отображением G_∞. Кроме того ζ^* обладает очевидно свойством 2, причем под K_0 надо, конечно, понимать произвольно малый круг с центром в полюсе ζ^*. С другой стороны, можно надлежащим подбором постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (5) построить функцию ζ^*, которая на любом заданном месте ζ-плоскости, следовательно и на любом заданном месте G_∞, имеет простой полюс с заданным вычетом. Согласно доказанной теореме однозначности, линейные функции от ζ исчерпывают совокупность всех принадлежащих G_∞ функций, обладающих для какой-либо точки O на G_∞ и для какого-либо вычета указанными свойствами 1 и 2.

Этот результат можно высказать и так: всякое конформное отображение G_∞ на однолистную область ζ^*-плоскости, содержащую внутри себя точку $\zeta^* = \infty$ [1]), выполняется линейной функцией от выше составленной характеристической

---

[1]) Разумеется, это условие несущественно.

функции течения $\zeta = f(z)$. Отсюда следует дальше, что можно выполнить всякое конформное с изменением направления отсчета углов отображение G_∞ на однолистную область ζ^{**}-плоскости, содержащую внутри себя точку ∞, посредством перехода от нашей функции $\zeta = f(z)$ или от линейной функции от $\zeta = f(z)$ к сопряженной комплексной величине, следовательно, посредством соотношения вида

$$\overline{\zeta^{**}} = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}, \tag{6}$$

где $\overline{\zeta^{**}}$ означает сопряженное с ζ^{**} комплексное число.

Пользуясь теперь свойствами симметрии области G_∞, мы получаем, что функция $f(z)$ действительно отображает конформно исходную область G на круговую область желаемого вида. В самом деле, поверхность G_∞ допускает преобразования в себя, она преобразуется сама в себя, если мы ее станем отражать в одном из разрезов Σ поверхности G; при этом переставляются друг с другом обе области, на которые разлагается G_∞ посредством Σ, между тем как все точки Σ остаются неподвижными. Мы обозначим на время через $f\{P\}$ нашу функцию $\zeta = f(z)$, рассматривая ее как функцию точки P на G_∞. Если тогда P' есть точка, происшедшая от отражения точки P в разрезе Σ, то приведем ей в соответствие в ζ^{**}-плоскости точку $\zeta^{**}\{P'\} = f\{P\}$. Благодаря такому соответствию точек определяется конформное отображение поверхности G_∞ с изменением направления отсчета углов на однолистную область $\mathbf{K}'_\infty$ плоскости ζ^{**}. Так как область $\mathbf{K}'_\infty$ содержит внутри точку ∞, то в силу предшествующих рассуждений ζ^{**} есть сопряженная комплексная величина с линейной функцией от $f(z)$ и связана например уравнением (6) с $\zeta = f(z)$.

Если ζ и ζ^{**} представлены в одной и той же плоскости, то уравнение (6) определяет такое отображение плоскости на себя, при котором круги переходят опять в круги. Далее, всякая точка изображения C разреза Σ должна перейти сама в себя, тогда как обе части, на которые C разлагает $\mathbf{K}'_\infty$, должны между собой переставиться. Это возможно только в том случае, если C есть окружность. Действительно, если мы проведем через три произвольно выбранные различные точки C окружность, то при отображении (6) она переходит сама в себя, потому что три ее точки остаются неподвижными. Так как внешняя и внутренняя для этой окружности области переставляются друг с другом, то, следовательно, кривая C не может иметь никаких точек внутри или вне круга и должна быть тождественной со всей окружностью, потому что она рассекает $\mathbf{K}'_\infty$ на две раздельные части. При отображении G_∞ на ζ-плоскость всякий разрез исходной области G отображается следовательно на окружность. Поэтому на самом деле область G конформно отображена на однолистную область, ограниченную окружностями. Область эта содержит внутри точку ∞, потому что полюс O выбран в исходной области G. Этим и доказана высказанная теорема о конформном отображении.

Попутно доказано, что *это отображение по существу, т. е. с точностью до линейных преобразований, определено однозначно.* Ибо, если две различных круговых области z-плоскости конформно отображены на одну и ту же n-связную подобную однолистной область, то их можно конформно отобразить на одну и ту же надрезанную область G плоскости z. Построив поверхность G_∞ для этой поверхности G и аналитически продолжив отображение G на круговые области при помощи принципа симметрии, мы увидим, что наши отображающие функции тождественны с нашими выше разобранными функциями $\zeta^*(z)$, следовательно являются линейными функциями друг от друга. Эту теорему однозначности мы можем сформулировать так: *две круговых области могут тогда и только тогда взаимно однозначно и конформно отобразиться друг на друга, если они получаются друг из друга линейными преобразованиями.*

Рассмотрим в заключение строение области $\mathbf{K}_\infty$ [1]), на которую функция $\zeta = f(z)$ отображает поверхность G_∞. $\mathbf{K}_\infty$ есть предел; как указано на черт. 83, заключенных друг в друге областей $\mathbf{K}_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, порядок связности

[1]) После того, как наша теорема отображения доказана, мы опускаем опять верхние значки у $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}_1'$, $\mathbf{K}_2' \ldots, \mathbf{K}'_\infty$.

которых растет бесконечно вместе с j. Мы утверждаем: каждый из кругов, ограничивающих $\mathbf{K}_j$, имеет произвольно малый радиус при достаточно большом j, при том общая площадь поверхности, вырезаемой этими кругами из ζ-плоскости, стремится к нулю с возрастанием j. Правда, это чисто геометрический факт, который имеет отношение только к образованию области $\mathbf{K}_\infty$ из $\mathbf{K}$ путем процесса отражения, но не имеет никакого отношения к конформному отображению поверхности G_∞ на $\mathbf{K}_\infty$. Несмотря на это, проще всего доказательство получается, если воспользоваться существованием конформного отображения и вспомнить упомянутые в главе VIII, § 9 свойства характеристической функции течения, а именно: наша область $\mathbf{K}_\infty$ ограничена множеством точек, являющихся точками сгущения наших кругов, которое имеет „площадь нуль", т. е. может быть заключено в конечное число областей произвольно малой площади. Этим наше утверждение доказано. Кроме того граница области $\mathbf{K}_\infty$ „нигде не связна", потому что любые ее две точки можно разделить кривой, проходящей целиком вне границы, и в случае $n \geqslant 3$ даже „совершенна", т. е. тождественна с множеством ее точек сгущения.

Рассуждения этого параграфа позволяют нам доказать весьма просто другую теорему униформизации — *„теорему об униформизации с циклическими сечениями"*, аналогичную теореме об униформизации с предельным кругом § 4 и читающуюся следующим образом:

Пусть G — алгебраическая риманова поверхность рода p и $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ — система циклических сечений, не пересекающихся друг с другом на этой поверхности. Эти сечения превращают G в подобную однолистной $2p$-связную область G^*. Тогда G^* может быть конформно отображена на область B, ограниченную $2p$ простыми замкнутыми, отдельно друг от друга лежащими граничными кривыми; притом так, что всякие две граничные кривые C_i и C_i', представляющие отображения обоих краев Q_i^+ и Q_i^- любого циклического сечения $Q_i (i=1,2,\ldots,p)$, получаются друг из друга линейным преобразованием. При этом это линейное преобразование сопоставляет такие точки C_i и C_i', соответствующие точки которых лежат в G^* на

Q_i^+ и Q_i^- одна против другой. Таким образом *однозначные на G алгебраические функции униформизируются посредство моднозначных автоморфных функций, которых фундаментальная область есть только-что описанная область B* [1]).

Доказательство этой „теоремы об униформизации с циклическими сечениями“ мы начнем с построения подходящей поверхности наложения. По образцу § 4 вообразим себе, что поверхность G^* имеется в бесчисленных экземплярах, и на всех одинаково обозначены края циклических сечений через Q_i^+, Q_i^-. Затем присоединим к каждому краю Q_i^+ соответственно Q_i^- $(i=1, 2,\ldots,p)$ какого-нибудь исходного экземпляра новый экземпляр соответственным краем Q_i^- или Q_i^+; этот процесс присоединения продолжим неопределенно. При этом нужно присоединять все новые и новые экземпляры и ни в коем случае не соединять двух уже имеющихся краев. В пределе получаемая поверхность G^{**} есть наша искомая поверхность наложения. Она, как легко видеть, подобна однолистной и потому может быть конформно отображена посредством характеристической функции течения на однолистную область. Совершенно так же, как в начале параграфа, можно показать, что все функции, конформно отображающие G^{**} на однолистную область, внутри которой содержится точка ∞, суть линейные функции от одной из них. Принимая во внимание преобразования наложения, которые допускает G^{**}, мы сразу выведем наше утверждение.

§ 6. Модули области подобной однолистным.

Полученные результаты мы используем еще для разрешения вопроса о том, когда две наперед заданные подобные однолистным области G_1 и G_2 с конечным порядком связности могут быть конформно отображены друг на друга. Если обе области односвязны, то это всегда возможно; разве только исключается случай, когда

---

[1]) Пример фундаментальной области того же типа, что и рассмотренная здесь область B, мы уже упоминали в § 3. Там все граничные кривые $C_1, C_2,\ldots, C_p$; $C_1', C_2',\ldots, C_p'$ были окружности, в то время как у областей нашей теоремы в качестве граничных кривых могут появиться гораздо более общие замкнутые кривые.

одна из областей состоит из полной плоскости или плоскости с исключенной точкой или же отображается на такую плоскость. В случае любого конечного числа связности n примем, по предыдущему параграфу, что обе области отображены на круговые области, именно $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$. Вследствие приведенной на стр. 351, 352 теоремы можно тогда и только тогда конформно отобразить G_1 и G_2 друг на друга, когда круговые области $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ получаются друг из друга с помощью линейных преобразований. Если число связности равно двум, то прежде всего приводим каждую круговую область с помощью линейного преобразования к нормальному виду: область должна быть круговым кольцом между двумя концентрическими окружностями с центром в нулевой точке, причем допускаются предельные случаи, когда внутренний круг переходит в точку нуль или внешний в бесконечно далекую точку. Область такого вида мы назовем „параллельное круговое кольцо". Если линейное преобразование переводит два таких круговых кольца друг в друга, причем пусть, например, внешние круги соответствуют друг другу [1], то преобразование должно быть вида $\zeta_1 = \alpha\zeta_2$, потому что всякая прямая, проходящая через центр концентрических кругов, как общая ортогональная окружность должна перейти снова в общую ортогональную окружность, т. е. прямую, проходящую через центр; следовательно нулевая точка, а также и бесконечно удаленная точка остаются неподвижными.

При подобном преобразовании не меняется отношение радиусов обоих кругов (в предельных случаях этому отношению надо приписывать значения $\frac{0}{1}, \frac{1}{\infty}, \frac{0}{\infty}$). Обратно, два концентрических параллельных круговых кольца с одинаковым отношением радиусов можно посредством растяжения отобразить конформно друг на друга. Отсюда заключаем: две двусвязные подобные однолистным области могут тогда и только тогда конформно отобразиться друг на друга, когда отношение радиусов соответствующих параллельных круговых колец у обеих одинаковое. Поэтому необходимо и достаточно *одно* вещественное условие или,

---

[1] Другой случай приводят к этому с помощью преобразования $z' = \frac{1}{z}$ одной из областей.

как говорят, по Риману, *двусвязная подобная однолистной область имеет один „модуль"*.

Если число связности n областей G_1 и G_2 больше 2, то можно опять линейным преобразованием каждую из соответствующих круговых областей $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ сразу преобразовать так, что две окружности будут концентрическими с общим центром в нулевой точке, а остальные окружности будут лежать между ними в круговом кольце. Тогда $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ будут параллельные круговые кольца с круговыми отверстиями, причем как предельный случай включен и тот, когда ряд точек исключен из плоскости. Если вообще существует линейное преобразование, которое переводит $\mathbf{K}_2$ в $\mathbf{K}_1$, то, не поступаясь общностью, опять можем допустить, что оба внешних круга, так же как оба внутренних круга круговых колец, соответствуют друг другу. Линейное преобразование, которое переводит оба концентрических круга опять в концентрические, также расположенные круги с центром в нулевой точке, должны иметь вид $\zeta_1 = \alpha\zeta_2$. $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ должны поэтому получаться друг из друга вращением и преобразованием подобия. Мы находим поэтому, замечая, что все выводы в данном случае обратимы, такой результат: две подобные однолистным n связные области $(n > 2)$ тогда и только тогда могут конформно отображаться друг на друга при данном порядке граничных кривых, если у соответствующих кольцевидных областей совпадают друг с другом: отношения n радиусов, а также углы, под которыми видны из нулевой точки $(n-2)$ кругов, лежащих в круговом кольце, и взаимные расстояния их центров. Так как отношения радиусов задаются $(n-1)$ числами, углы первого вида $(n-2)$ числами и углы второго вида $(n-3)$ числами, то необходимым и достаточным условием отображаемости областей G_1 и G_2 друг на друга явится требование, чтобы известные $(3n-6)$ вещественных чисел области G_1 совпадали с соответственными числами области G_2. Эти постоянные числа области, характеристические для ее отображаемости, опять-таки называются „*модулями*" области. Поэтому резюмируя, мы можем сказать: *подобная однолистной, n кратно связная область при $n=1$ не имеет вещественного модуля, при $n=2$ имеет один вещественный модуль, а при $n>2$ имеет $(3n-6)$ вещественных модулей.*

Что при $n=1$ и $n=2$ общее выражение $(3n-6)$ для числа модулей не годится, объясняется вот чем: при $n=1$ область поддается преобразованию в себя с помощью функции, зависящей от трех произвольных вещественных постоянных, в случае $n=2$ с помощью функции, зависящей от одной произвольной постоянной; между тем при $n>2$ уже более нет таких групп преобразования области в себя, как показывают выше приведенные соображения.

§ 7. Общее понятие римановой поверхности.

Вначале мы мыслили римановы поверхности распространенными над числовой плоскостью или числовой сферой. Для наглядности представления их соотношений связности мы подвергали их произвольным непрерывным деформациям и таким образом заменяли их расположенными в пространстве замкнутыми кривыми поверхностями. Последние служили до сей поры исключительно целям Analysis situs. Теперь же мы покажем, что они могут служить как „римановы поверхности" и в смысле конформного отображения.

Чтобы это выяснить ближе, предположим, что G есть поверхность, лежащая в обыкновенном пространстве, на которой можно отграничить некоторое число областей так, что всякая точка поверхности G лежит по меньшей мере в одной из этих областей и что точки всякой такой области могут быть заданы двумя вещественными координатами x и y, причем координаты эти изменяются в однолистной области плоскости xy. Линейный элемент ds пусть задан выражением

$$ds^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2, \tag{1}$$

где E, F, G — функции от x и y, вид которых, зависит, конечно, от положенных в основу координат x и y. Предположим, что они имеют непрерывные частные производные, и напомним известный из дифференциальной геометрии факт, что везде имеет место неравенство

$$EG - F^2 > 0. \tag{2}$$

Далее, пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ две вещественные, имеющие непрерывные частные производные функции от x и y, которых функциональный определитель $u_x v_y - u_y v_x$ не обращается в нуль в некоторой точке поверхности G. Тогда u и v в достаточно малой окрестности этого места так же, как x и y, могут служить координатами точек поверхности, так что эта окрестность будет взаимно однозначно и непрерывно отображена на однолистную область uv-плоскости. Очевидно, отображение это сохраняет углы тогда и только тогда, когда квадрат линейного элемента, выражаемый через u, v, принимает вид

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2), \tag{3}$$

где λ — положительная непрерывная функция от u и v.

Вводя на поверхности G [1]) определенное направление обхода, мы всегда можем подбором соответственных знаков при u и v устроить так, что при сохранении углов сохранится и направление обхода. Тогда назовем комплексное выражение $u + iv = \zeta$ *аналитической функцией в окрестности рассматриваемого места* или, короче, *аналитической функцией на поверхности*. Если $u^* + iv^* = \zeta^*$ — другая функция на поверхности, то очевидно ζ^* есть аналитическая функция комплексной переменной ζ в обычном смысле, вследствие конформности отображения ζ-плоскости на ζ^*-плоскость; иными словами: *две какие угодно непостоянные аналитические функции на поверхности G суть аналитические функции друг от друга*. В частном случае плоской римановой поверхности, распространенной над z-плоскостью, ($E = G = 1$, $F = 0$), дело обстоит просто так, что z и ζ суть функции на поверхности; *наша общая точка зрения устраняет особое положение независимой переменной в сравнении с зависимой.*

Мы преобразуем условие (3), вводя $du = u_x dx + u_y dy$, $dv = v_x dx + v_y dy$, и сравним потом с (1). Таким образом мы получим три условия:

$$E = \lambda (u_x^2 + v_x^2), \tag{4}$$

$$F = \lambda (u_x u_y + v_x v_y), \tag{5}$$

$$G = \lambda (u_y^2 + v_y^2), \tag{6}$$

[1]) Это достигается прежде всего в окрестности рассматриваемого места с помощью произвольного задания. Для того, чтобы можно было без противоречия распространить выбранное направление обхода по принципу непрерывности по всей поверхности G, последняя должна быть ориентируемой поверхностью.

откуда прямо следует

$$W=\sqrt{EG-F^2}=\lambda(u_x v_y-u_y v_x), \tag{7}$$

причем корень нужно взять со знаком величины $u_x v_y-u_y v_x$ (ибо λ положительно по определению). Исключая λ из (4) и (5) с помощью (7), получаем два уравнения, линейных относительно u_y, v_y. Решая их, получим соотношения:

$$u_y=\frac{Fu_x-Wv_x}{E},$$

$$v_y=\frac{Wu_x+Fv_x}{E};$$

пользуясь (6), мы перепишем их также в виде:

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\frac{Ev_y-Fv_x}{W} \\ u_y&=\frac{Fv_y-Gv_x}{W}\end{aligned}\quad \text{или}\quad \begin{aligned} v_x&=-\frac{Eu_y-Fu_x}{W} \\ v_y&=-\frac{Fu_y-Gu_x}{W}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Эти уравнения имеют для функций на поверхности точно такое же значение, как дифференциальные уравнения Коши-Римана для аналитических функций от одной независимой комплексной переменной. Действительно, они приводятся к ним при $E=G=1$, $F=0$. Предполагая существование непрерывных вторых частных производных функций u и v, мы выведем из (8), что u и v суть решения *дифференциального уравнения Бельтрами* (*Beltrami*)

$$\Delta w=\frac{1}{W}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{Gw_x-Fw_y}{W}+\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{Ew_y-Fw_x}{W}\right)=0. \tag{9}$$

Уравнение это представляет аналог для нашей поверхности уравнения потенциала (уравнения Лапласа). Поэтому решения этого уравнения называют *потенциалами на поверхности*. Два потенциала u и v, связанные друг с другом соотношениями (8), называются *сопряженными*. Все наши прежние рассуждения относительно плоских течений непосредственно переносятся на нашу поверхность G с помощью только-что развитых понятий. В частности два сопряженных потенциала могут быть наглядно представлены с помощью линий тока и эквипотенциальных линий потока на поверхности. Формула Грина и теоремы об интеграле Дирихле сохраняют также свою силу, если мы будем разуметь под $D[\varphi, \psi]$ интеграл

$$D[\varphi, \psi] = \int\int \frac{E\varphi_y\psi_y - F(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + G\varphi_x\psi_x}{W}\, dx\, dy.$$

Все эти факты легко доказать, приняв во внимание, что составленные здесь выражения инвариантны, соответственно ковариантны, по отношению к любым взаимно однозначным непрерывным преобразованиям координат и их производных, что квадрат линейного элемента G всегда принимает вид $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$, если мы примем два сопряженных потенциала u, v на поверхности за координаты, и что при таком выборе координат наши выражения переходят в прежние ранее нами разобранные.

На основании этих представлений мы можем прямо распространить прежде развитые теоремы конформного отображения и существования на области G, которые расположены на произвольных кривых поверхностях в пространстве, потому что можно конформно отобразить только-что описанным способом окрестность всякой точки G на однолистную плоскую область. При этом область G может даже иметь в пространстве особенности. Так, не нарушают возможности конформного отображения ребра, вдоль которых примыкают друг к другу два непрерывно искривленных куска поверхности, потому что функции E, F, G при надлежащем выборе координат могут быть непрерывно продолжены вместе со своими производными через эти ребра. Даже телесные углы, в которых сходятся три или более поверхностей под углами, неравными нулю, могут содержаться внутри области G. Ведь, как легко убедиться методами § 4 главы VI, можно конформно отобразить окрестность вершины телесного угла на плоскую область и притом так, что вершине соответствует единственная точка.

В заключение обобщим понятие римановой поверхности еще больше, чем до сих пор, устранив все особенности, которые не имеют никакого отношения к сути дела. Прежде всего вовсе несущественно, что места нашей римановой поверхности представляются геометрически точками пространства. Достаточно положить в основу *любое ориентируемое двухмерное множество* M каких угодно „элементов", которое обладает свойством разложения на частные множества, внутри которых элементы определяются однозначно заданием двух вещественных координат x, y. Чтобы мы могли говорить о конформном отображении, должна быть задана на таком множестве *метрика* для „*углов*". В то время как у римановых поверхностей в пространстве мы просто могли принять естественное мероопределение эвклидова пространства, здесь мы должны произвольно задать мероопределение. Для этого, назначив систему координат x, y, мы произвольно задаем три вещественные непрерывно дифференцируемые функции $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$, подчиненные обязательному условию

$$EG - F^2 > 0$$

и установим, чтобы квадрат линейного элемента равнялся

$$E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

Но дело идет только об углах, а не о длинах, поэтому нет необходимости задавать E, F, G вполне, но только до общего вещественного отличного от нуля множителя пропорциональности. Такого рода двумерное множество с заданным мероопределением углов мы обозначаем как „*риманово многообразие*". Очевидно, риманово многообразие способно в той же мере служить основанием для развития теории функций и теории потенциала, как и риманова поверхность в пространстве.

§ 8. Исторические указания к последним главам.

Теории, которым посвящены были последние главы, все связаны более или менее косвенно с основными идеями, которые ввел в анализ Бернгард Риман [1]) (род. 1826, ум. 1866). Что Риман взял в основание своих доказательств теорем существования принцип Дирихле, указывалось уже раньше; упоминалась также критика со стороны Вейерштрасса этой методы, вследствие чего К. Нейман и

[1]) Прежде всего в его вступительном рассуждении: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" (Göttingen, 1851) и в его статье: „Theorie der Abelschen Functionen" (Journ. f. d. reine u. angew. Math. Bd. 54, 1857). Обе работы вновь напечатаны в Gesammelte. Math. Werke B. Riemanns, 2. Aufl. Leipzig, 1892.

Г. А. Шварц развили иные методы, с помощью которых им удалось доказать важнейшие теоремы существования. Они сумели доказать существование абелевых интегралов и алгебраических функций для заданной замкнутой римановой поверхности, далее возможность конформного отображения однолистных односвязных, ограниченных кусочно-гладкой кривой, областей на внутренность круга. Но еще не удалось конформно отобразить бесконечно многолистные подобные однолистным области на однолистные нормальные области, потому что доказательство сходимости гармонических функций, которые производят отображение аппроксимирующих областей, представляло тогда еще непреодолимые трудности.

Возникли новые вопросы, когда из теории автоморфных функций, зачатки которой восходят уже до Гаусса и Римана [1]), выросла проблема униформизации. Смелый полет мысли Ф. Клейна и Анри Пуанкаре в начале восьмидесятых годов прошлого столетия в самых разнообразных направлениях проблемы не дал никакого удовлетворительного решения, потому что в работах этих не могло быть дано строгое доказательство возможности униформизации. Это доказательство пришло значительно позже, после того как с одной стороны, в результате интенсивного развития, преимущественно под влиянием Ф. Клейна, идеи и методы развития в теории функций Риманом получили широкое распространение и были продолжены, а с другой стороны после того как воззрения Вейерштрасса на математическую строгость во всех вопросах анализа стали общим достоянием последующего поколения математиков. Опираясь на методы Неймана и Шварца, P. Koebe и H. Poincaré почти одновременно в 1907 году смогли доказать важнейшую теорему униформизации (о ней шла речь в § 4) и с этого момента главным образом Koebe разработал совершенно удовлетворительно этот круг вопросов по всем направлениям [2]).

---

[1]) Ср. отчет: „Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen" в томе 3, стр. 577 до 586 Ges. Math. Abhandl. Ф. Клейна, Berlin. 1923.

[2]) Из большого ряда статей *P. Koebe* прежде всего имеют значение следующие: „Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven", Abh. I—IV, Math. Annalen Bd. 67—75, 1909—1914; „Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven"; Journ. f. d. reine und angew. Math. Bd. 138 u. 139 (1910 u. 1911); „Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (konforme Abbildung und Uniformisierung)", Acta-

Между тем Д. Гильберт вновь вызвал к жизни ранее заброшенный принцип Дирихле. Прежде всего Гильберт показал в некоторых простейших случаях, что силы анализа достаточны для того, чтобы итти до конца по пути принципа Дирихле, т. е. что можно со всей строгостью доказать существование минимума интеграла. Но после этого первого успеха усилия многих математиков привели к заключению, что путь принципа Дирихле представляет, быть может, самый удобный подход к новой геометрической теории функций [1]).

---

math. Bd. 50 (1927), также ряд статей, напечатанных в различных местах: „Zur Theorie der konformen Abbildung". В этих работах приведена еще другая литература.

[1]) Для настоящего изложения можно сравнить следующие работы автора: „Ueber die Anwendung des Dirichletschen Prinzips auf die Probleme der konformen Abbildung", Math. Annalen Bd. 71 (1912); „Ueber die Existenztheoreme der Potential- und Funktionentheorie", Journ. f. d. reine u. angew. Math. Bd. 144 (1914); „Ueber eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung", Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1914 und 1922.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Шостер.

24 Зак. 1985. Курант

Бібліотека
Інв.
№

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Університетська Бібліотека
Інв. № 2588
Студентський відділ

НБ ПНУС
853

Ответственный редактор *Е. В. Пулькина.* Технический редактор *В. Д. Финити.*
Сдана в набор 25/XII 1933 г. Бум. листов $5^7/_8$. Подписана к печати 9/VI 1934 г.
Формат $82 \times 111^1/_{32}$ ГТТИ № 334. Т—22-5-4. Тип. зн. в 1 бум. л. 157.696.
Ленгорлит № 14162. Тираж 5.000—авт. л. 17,77. Заказ № 1985.