Я. В. Хромой

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

«ВИЩА ШКОЛА»

Я.В. Хромой

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Допущено Міністерством освіти УРСР як навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів

Київ
Головне видавництво
видавничого об'єднання «Вища школа»
1983

УДК 517.11 (07)

Математическая логика. Хромой Я. В.— Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1983.— 208 с.— Укр.

Пособие содержит элементарные сведения по алгебре высказываний и логике предикатов. Рассмотрены построения исчисления высказываний как формальной системы, а также даны общие представления о формальных математических теориях первого порядка. Большое внимание уделено вопросу логического следования.

Изложение теоретического материала иллюстрируется примерами, связанными со школьным курсом математики.

Рассчитано на студентов физико-математических факультетов пединститутов. Им могут пользоваться также учителя математики общеобразовательных школ.

Ил. 18 Табл. 30 Библиогр.: 36 назв.

Рецензенти: доцент *В. В. Клюев* (Черкаський педінститут),
доцент *П. М. Олонічев* (Вінницький педінститут)

Редакція літератури з математики і фізики
Зав. редакцією *Є. Л. Корженевич*

Х $\frac{1702020000-101}{М211(04)-83}$ 107—83

ВСТУП

Під логікою звичайно розуміють аналіз методів міркувань. Слово «логіка» походить від грецького слова «логос», що означає «слово», «мова», «міркування». Логіка встановлює, що слідує з прийнятих припущень, при цьому основна увага звертається не на зміст, а на форму. Тому логіку й називають формальною. Не розглядаючи питання, що таке форма і зміст, з'ясуємо підхід логіки на прикладах міркувань.

Приклади

1. Жодне трансцендентне число не є раціональним; π — трансцендентне число. Отже, π не є раціональним числом.
2. Жодна планета не є зіркою; Марс — планета. Отже, Марс не є зіркою.

Обидва виводи мають ту саму форму, однакову логічну структуру, але різний зміст. Їх можна записати за такою схемою:

Жодне M не є N; P є M. Отже, P не є N.

В обох прикладах йдеться про предмети різного змісту, але до них застосовано ті самі вирази, які належать логіці, а саме: «жодне», «не», «є», «отже».

При цьому з точки зору логіки для правильності міркувань зовсім неістотно, чи висловлені в прикладах 1 і 2 твердження є істинними, чи ні. Важлива тільки форма, яка визначається такими логічними сталими, як «жодне», «не», «є», «отже».

Назви предметів, про які йдеться в розглянутих прикладах, можна замінювати довільно, але вирази, що їх стосуються, однакові, при цьому логічна коректність міркування не порушується. Так, щоб дістати з прикладу 1 приклад 2, замінимо слова «трансцендентне число», «раціональне число», «π» відповідно словами «планета», «зірка», «Марс».

Таким чином, логічна коректність міркування обумовлюється формою, а не змістом. Звідси і термін «формальна логіка».

Слід зазначити, що розглянутий вище паралелізм слів звичайної мови принаймні в деяких випадках не може бути гарантією того, що відповідні логічні форми збігаються. Наведемо приклади.

Приклади

3. Піаніно — це музичний інструмент; у нас є піаніно. Отже, у нас є музичний інструмент.

4. Час — це гроші; у нас є час. Отже, у нас є гроші.

Тут словесний паралелізм той самий, що й в прикладах 1 і 2. Проте міркування прикладу 3 правильне, а міркування прикладу 4 навряд чи можна вважати правильним. Цей факт пояснюється неоднозначністю термінів звичайної (природної) мови. Ось чому для логіки виникає потреба в створенні штучної однозначної символічної мови, яка точно відповідатиме логічній формі, йтиме за нею. Побудова таких «формалізованих» мов, зокрема, є характеристичною рисою математичної логіки. Звідси, до речі, її інша назва — «символічна логіка».

Видатний російський логік і математик П. С. Порецький (1846—1907) так охарактеризував математичну логіку: *математична логіка — це логіка за своїм змістом і математика за своїм методом.*

Математична логіка будується як математична наука. Це галузь математики, спрямована на вивчення математичних міркувань. Математика — дедуктивна наука основним методом діставання математичних істин є логічне виведення, а не експеримент, як в природних науках. Критерієм істинності математичних міркувань є їх логічна бездоганність, точне виконання на всіх етапах міркування правил формальної логіки.

Формальна логіка як наука існує від часів великого грецького мислителя Арістотеля (384—322 рр. до н. е.), який і заклав основи цієї науки.

Математична логіка — це сучасна формальна логіка. Її народження відносять до середини XIX століття, а саме, до 1847 року, коли визначний англійський математик Джордж Буль (1815—1864) видав свою книгу «Математичний аналіз логіки». Основна ідея Буля — аналогія між алгеброю і логікою, побудова логіки як певної алгебри, що дало б змогу обчислювати відповідь як результат міркування.

Серед попередників Буля слід назвати одного з творців математичного аналізу Г. В. Лейбніца (1646—1716), якому належить ряд провідних ідей математичної логіки.

Чим же відрізняється математична логіка від традиційної формальної логіки, яка бере свій початок від Арістотеля? Математичну логіку характеризує перш за все широке, всебічне використання символіки, пов'язане із вищезгаданим створенням штучних формалізованих мов. При цьому слід зазначити, що запровадження символічної мови не тільки значно збільшує, а й удосконалює технічні можливості логіки. У розвитку математичної логіки застосування символів означає разом з тим прийняття спеціальної системи логічного аналізу, що слід вважати основною характеристичною рисою впровадження формалізованої мови. Ці мови, створені математичною логікою, є настільки багатими, що дають змогу сформулювати в них усі основні положення сучасної математики.

Іноді математичну логіку означають як предмет формальної логіки, який вивчається за допомогою формалізованих мов.

Характеристичною рисою математичної логіки є також сучасний формальний аксіоматичний метод, розроблений одним з найвидатніших математиків XX століття Д. Гільбертом (1862—1943). Цей метод є основним інструментом обгрунтування математики і разом з тим важливим знаряддям розвитку сучасної математики, могутнім засобом логічної систематизації її.

Формальний аксіоматичний метод — це розвинення, уточнення і вдосконалення змістовного аксіоматичного методу, який виражено в аксіоматиці геометрії Евкліда.

Аксіоматичний метод Гільберта відрізняється від змістовного: 1) повним абстрагуванням від змісту (формалізацією) як необхідним засобом уточнення; 2) точним формулюванням усіх вихідних тверджень даної теорії; 3) явним формулюванням тих логічних засобів, які допускаються при побудові цієї теорії (правил виводу).

На базі формального аксіоматичного методу стало можливим уточнення таких фундаментальних понять, як доведення, несуперечність теорії тощо, у той час як засоби традиційної логіки тут виявилися непридатними.

Отже, математична логіка, будучи частиною математики, займає в ній особливе місце як важливий і могутній інструмент дослідження основ математики, обгрунтування самої математичної науки.

Теорія математичного доведення становить ядро математичної логіки. Кожне математичне доведення полягає в послідовному застосуванні певних логічних засобів до вихідних тверджень. Встановлення та аналіз цих логічних засобів є необхідними для уточнення поняття математичного доведення. Таке уточнення було обумовлено розвитком математики і, перш за все, виникненням важливих математичних проблем, що базуються на теорії множин. Це, наприклад, проблема континууму, поставлена засновником теорії множин Г. Кантором (1845—1918) у 1883 р., яку протягом кількох десятиліть неможливо було розв'язати.

Аналіз таких проблем наводив математиків на думку про те, що труднощі їх розв'язання обумовлено логічною природою цих проблем. На порядок дня висувалися питання: «Що точно означає вираз: *довести певне твердження* та *що таке математичне доведення?*» Адже можна доводити окремі теореми, не маючи строгого означення поняття доведення. Проте, не володіючи таким означенням, неможливо довести, що якась проблема не є розв'язною в даній теорії.

При цьому тільки в аксіоматичних теоріях з точно встановленими логічними засобами (в дедуктивних теоріях) можна було точно сформулювати такі поняття, як недовідність, несуперечність.

Особливе значення для поглиблення логічного аналізу поняття математичного доведення і, взагалі, для підсилення ролі основ математики в логічних дослідженнях, мали парадокси (антиномії), що виникли на початку XX ст. в канторовій теорії множин, яка на той час стала фундаментом математики. Ці парадокси означали, що можна навіть в математиці у цьому взірці точності прийти до суперечності, застосовуючи міркування, цілком придатні з погляду канторової теорії множин.

Визначне місце серед згаданих парадоксів належить парадоксу Рассела, який ми зараз розглянемо. Множини можна розбити на дві категорії: множини, які не є елементами самих себе (власні), і множини, які є елементами самих себе (невласні). Власними є, наприклад, множина столів у даній аудиторії, множина планет сонячної системи тощо, а невласною є, скажімо, множина всіх множин.

Утворимо тепер за Расселом множину R всіх тих і тільки тих множин, які є власними. До якої категорії належить R? Припущення $R \in R$, тобто, що R — невласна множина, обумовлює те, що $R \notin R$, оскільки R (справа) містить тільки власні множини, а R (зліва) — невласна множина. Таким чином, припущення $R \in R$ — неправильне. Далі, з припущення $R \notin R$ випливає, що $R \in R$, бо R (справа) містить усі власні множини, а R (зліва) за припущенням — власна множина. Отже, і припущення $R \notin R$ — неправильне. Ми довели, що $R \in R$ тоді і тільки тоді, коли $R \notin R$, тобто зайшли у суперечність.

Парадокси теорії множин призвели до так званої кризи в основах математики. З'явилися різні критичні напрями, які виступали проти класичної математики і ставили під сумнів деякі з її блискучих досягнень, побудованих на базі канторової теорії множин.

Зокрема, піддавалися критиці застосування до нескінченних множин таких логічних принципів, як, наприклад, закон виключеного третього; відкидалися так звані чисті теореми існування, які відіграють істотну роль в класичній математиці (в цих теоремах доведення існування не супроводжувалося побудовою відповідного прикладу, а обмежувалося виявленням того, що припущення про супротивне приводить до суперечності).

Зазначимо, що в боротьбі різних напрямів в основах математики було глибоко і грунтовно проаналізовано суть парадоксів теорії множин і в цьому, перш за все, заслуга математичної логіки.

Щоб відстояти і зберегти всі досягнення класичної математики, зокрема, користування абстракцією актуальної нескінченності, Д. Гільберт висунув свою славетну програму. Математичні висловлення Гільберт поділяє на «реальні», які допускають скінченну інтерпретацію, та «ідеальні», які такої інтерпретації не допускають. «Ідеальним» висловленням, за Гільбертом, має належати роль, аналогічна тій, яку відіграють у математиці ідеальні елементи, наприклад, ідеальна пряма в проективній геометрії. Від «ідеальних» висловлень вимагається тільки одне — щоб користування ними не призвело до суперечності. Гільберт був впевнений, що цю властивість «ідеальних» висловлень можна строго обгрунтувати. З цією метою він запропонував формалізувати в с ю математику, побудувати її як формальну аксіоматичну систему (як сукупність знаків, позбавлених змісту, операції над якими виконуються за строго встановленими правилами).

Така формальна аксіоматична система являється точним математичним об'єктом, який є предметом розгляду іншої вже змістовної теорії, яку Гільберт назвав м е т а м а т е м а т и к о ю, або теорією математичного доведення. У цій теорії допускаються тільки так звані фінітні методи, тобто розгляд тільки с к і ч е н н о г о числа конкретно заданих символів і конкретних міркувань про с к і н ч е н н і послідовності цих символів. Це означає, що в метаматематиці, за Гільбертом, не допускаються ні абстракція актуальної нескінченності, ні неконструктивні доведення існування. Інакше кажучи, метаматематика могла користуватись тільки такими методами міркувань, законність яких не викликала сумнівів у жодному з математиків. Зазначимо, що обмеження фінітними методами стосується тільки метатеорії і аж ніяк не стосується формальних математичних теорій.

Завершальним і разом з тим центральним пунктом програми Гільберта є доведення в метатеорії (в метаматематиці) н е с у п е р е ч н о с т і формальної математики. Це доведення несуперечності, проведене цілком надійними засобами, повинно було раз і назавжди гарантувати абсолютну надійність класичної математики або, за словами Гільберта, вернути математикам рай, створений для них Кантором. Таким чином, мета програми Гільберта полягала в доведенні несуперечності математики і в такому уточненні канторової теорії множин, щоб ця теорія стала несуперечною і достатньою для всіх потреб математики.

У програмі Гільберта основна роль відводилася математичній логіці. Зокрема, поняття внутрішньої несуперечності теорії, як і точне поняття математичного доведення, сформульовано в термінах математичної логіки. На шляхах здійснення цієї програми відбувався бурхливий розвиток і тріумфальні успіхи математичної логіки в нашому столітті.

Проте програма Гільберта в цілому виявилась нездійсненною. Цей результат встановив видатний математик і логік К. Г е д е л ь (народ. 1906 р.). У своїх визначних теоремах про неповноту (1931 р.) Гедель встановив принципіальну обмеженість методу формалізації.

Результат Геделя ні в якій мірі не заперечує прогресивного значення створення формальних систем, формалізації окремих математичних (і не тільки математичних) теорій. Розумно впроваджувана формалізація певної теорії сама стає могутнім засобом пізнання. Про це свідчать, зокрема, блискучі досягнення спеціалістів з математичної логіки в розв'язанні суто математичних проблем, які довгий час вважалися нерозв'язними. Так, було доведено незалежність гіпотези континууму і аксіоми вибору в даній аксіоматичній теорії множин при умові несуперечності останньої, а також розв'язання десятої проблеми Гільберта.

Визначним досягненням математичної логіки є уточнення поняття алгоритму, створення на цій основі теорії алгоритмів, величезне значення і можливості якої важко переоцінити. Разом з тим, математична логіка знайшла широке застосування і в таких науках, як математична лінгвістика, математична психологія, біологія, економічні науки тощо та в різних галузях техніки.

З середини XX століття починається нова технічна революція, пов'язана з успіхами кібернетики, зокрема, із створенням електронних обчислювальних машин (ЕОМ), які майже з фантастичною швидкістю виконують математичні і логічні операції. Теоретичним фундаментом цієї технічної революції можна вважати м а т е м а т и ч н у л о г і к у, завдяки якій було вперше здійснено точний аналіз логічних операцій, що зумовило можливість їх технічної реалізації.

Формалізація логічних операцій, сприяючи точному аналізу логічної структури мислення, відкриває широкі можливості автоматизації логічних процесів. У зв'язку з цим докорінно змінилось уявлення про принципіальні можливості машин у виконанні тих функцій, які раніше вважалися властивими тільки інтелекту людини. Широко розгорнулися дослідження проблем штучного інтелекту, зокрема, на основі ідей та методів математичної логіки.

З самого початку вивчення логіки може виникнути питання: вивчаючи кожну науку, ми користуємося логікою, зокрема, при вивченні логіки необхідно знову користуватися логікою; чи немає тут порочного кола? Ні, немає. Треба просто чітко відрізняти логіку як предмет вивчення від логіки, за допомогою якої відбувається це вивчення. У зв'язку з цим слід відрізняти два рівня мови, а саме, предметну мову, на якій формулюється логіка — предмет вивчення, і метамову, в якій досліджується предметна мова за допомогою необхідних логічних засобів. Таке розрізнення мови і метамови вимагається не тільки при вивченні логіки, воно стосується й інших галузей знання.

Особливо наочно ця відмінність між двома рівнями мови виявляється, коли фактично є дві різні природні мови, наприклад, коли ми вивчаємо французьку мову за підручником, написаним українською мовою. У цьому разі предметна мова — французька, а метамова — українська. Тут змішуванням мови і метамови по суті неможливе.

Інша справа, коли і мова, і метамова виражені в термінах однієї природної мови, можливо, збагаченої певними символами. Тоді змішування мови і метамови цілком можливе, що, в свою чергу, може призвести до суперечності.

Для прикладу розглянемо парадокс Беррі. Позначимо через M множину всіх натуральних чисел, які можна означити реченням української мови, що містить не більш ніж двісті букв. Очевидно, M — скінченна множина, тому множина всіх натуральних чисел, які не належать M, непорожня і містить найменше число. Позначимо його через a. Тоді твердження

«a — найменше натуральне число, яке не можна означити реченням української мови, що містить не більше ніж двісті букв» (*)

є суперечним. Справді, $a \notin M$, тобто, число a не належить множині M за своїм означенням. Разом з тим, $a \in M$, оскільки (*) і є тим означенням числа a, яке містить менш ніж двісті букв. Парадокс виник через те, що в твердженні (*) змішано два рівні мови. Тут маємо і терміни предметної мови арифметики натуральних чисел, і такі терміни метамови, як «речення», «буква», «українська мова».

Змішування двох рівнів мови обумовлює застосування певного твердження до самого себе, а це може призвести (і призвело в даному разі) до парадокса.

Характерним у цьому смислі є відомий із стародавніх часів парадокс Епіменіда. Його формулювання дуже просте:

«Те, що я кажу,— неправда». (**)

Із істинності (**) відразу слідує його хибність, а з хибності (**) — його істинність. Тут маємо самозастосовність твердження (**), обумовлену змішуванням предметної мови і метамови. Так, (**) містить і назву певного твердження предметної мови, і ствердження його хибності, яке вже належить іншому рівню мови. Якщо явно розрізнити предметну мову і метамову, замінивши (**) твердженням «Те, що я кажу по-німецьки, — неправда», то парадокса не буде (останнє твердження не є самозастосовним).

До речі, міркування, близькі до парадокса Епіменіда, привели одного з найвидатніших представників математичної логіки нашого століття К. Геделя не до парадокса, а до блискучого відкриття — його славетної теореми про неповноту.

Побудова формалізованих мов математичної логіки, визначаючи точно структуру предметної мови, створює передумови чіткого розрізнення предметної мови та відповідної метамови.

Розділ I

АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

§ 1. Висловлення. Операції над висловленнями

Під висловленням розумітимемо речення, про яке має смисл говорити, що воно (його зміст) є істинним або хибним, і притому тільки одне з двох. Звичайно, це не означення. Поняття висловлення є в логіці висловлень вихідне, неозначуване.

Саме ця властивість — *бути істинним чи хибним* — є характеристичною для висловлення як предмета вивчення логіки. Від усіх інших властивостей висловлень ми абстрагуємося.

Поняття істинності і хибності в логіці висловлень не аналізуються, а беруться як дані. Яке значення — «істинність» чи «хибність» — властиве даному висловленню, залежить від відповідної реальності, якої стосується це висловлення.

Наприклад, «5 — просте число» є висловлення істинне, «Рим — столиця Франції» — висловлення хибне. Зауважимо, що хоч кожне висловлення або істинне, або хибне, проте це не означає, що для кожного висловлення відомо, яка з цих двох можливостей має місце. Так, формулювання великої теореми Ферма — висловлення, але невідомо яке, істинне чи хибне.

Розглянемо вираз «x більше одиниці». Цей вираз не є висловленням, бо немає смислу твердити про його істинність чи хибність доти, поки символ «x» не буде замінено назвою певного дійсного числа.

Про вираз, який не є висловленням, але стає ним після заміни всіх символів змінних, що входять в цей вираз, назвами відповідних предметів, кажуть, що він є висловлювальною формою або невизначеним висловленням. Так, вирази «$x + y = 2$», «$A \cup B = C$», «$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$» — висловлювальні форми.

Розглядаючи висловлення, ми виходимо з двох основних припущень: а) кожне висловлення є або істинним, або хибним, тобто третього не дано (закон виключеного третього традиційної логіки); б) жодне висловлення не є одночасно істинним і хибним (закон виключення суперечності традиційної логіки).

Прийняти ці припущення — значить стати на точку зору класичної двозначної логіки. У XX столітті розвинулися і продовжують розвиватися так звані некласичні логіки: многозначна логіка, інтуїціоністська (конструктивна) логіка, модальна логіка. У подальшому ми додержуватимемося тільки точки зору класичної логіки, в рамках якої проводяться всі математичні міркування.

Цю точку зору математичною мовою можна висловити так: на множині висловлень задано функцію, яка набуває точно два значення — «істинне» і «хибне» («і» і «х»). Введемо символи, нейтральні щодо мови викладу. Позначимо значення «істинне» та «хибне» відповідно через «1» та «0». Звичайно, «1» і «0» тут не є назвами чисел, а тільки символами значень введеної функції істинності. Цю функцію називають функцією істинності, а значення «1» і «0» — значеннями істинності чи істинісними значеннями.

Висловлювальні змінні позначимо так само, як числові змінні в математиці: $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$ Замість цих символів можна підставляти довільні висловлення. Звичайно, символи $p, q, r, p_1, p_2, p_3 \ldots$ не є висловленнями, вони є змінними для висловлень (їх також називають змінними висловленнями або пропозиційними буквами чи пропозиційними змінними).

Значення функції істинності для даного значення аргументу p позначатимемо $|p|$. Так, позначивши через p висловлення «2 — найменше просте число», а через q — висловлення: «Число π дорівнює 3,14», матимемо: $|p| = 1$, $|q| = 0$.

Аналогічно тому, як у звичайній алгебрі розглядають операції над числами, в алгебрі висловлень вводять логічні операції над висловленнями.

Однією з основних задач логіки висловлень є дослідження операцій, за допомогою яких з певних вихідних висловлень утворюються нові висловлення. Такі операції і називаються логічними. При цьому, згідно з прийнятою точкою зору, обмежимося розглядом тих операцій, для яких значення істинності результату операції **цілком визначається** істинісними значеннями її компонентів.

Логічні операції над висловленнями приблизно відповідають таким виразам природної мови, як: «і», «або», «неправильно, що», «якщо..., то», «тоді і тільки тоді, коли». Проте, на відміну від цих зв'язок природної мови, які не мають точно встановленого, однозначного змісту, символи, які вводять для позначення відповідних логічних операцій, є **однозначними**. Вони задовольняють усі умови, які формулюються в математиці при введенні нових символів.

Як приклад неоднозначності розглянемо зв'язку «або». Наведемо три висловлення, в яких зустрічається цей сполучник.

1) «Чергові збори академгрупи відбудуться завтра або післязавтра».

2) «Кути α і β конгруентні, або в сумі становлять 180 градусів».

3) «$AB = BC$, або трикутник ABC — рівнобедрений». У першому висловленні «або» — роздільне, виключне. Це висловлення слід вважати істинним **рівно** в двох випадках: а) коли збори відбудуться завтра; б) коли збори відбудуться післязавтра. В усіх інших випадках висловлення 1) — хибне. У другому висловленні «або» — невиключне. Висловлення 2) — істинне в трьох випадках, зокрема й тоді, коли «кути конгруентні» і «кути в сумі становлять 180 градусів». У третьому висловленні «або» означає «що рівнозначне з».

Така неоднозначність недопустима при побудові алгебри висловлень. Тому ми вводимо нові **символи** для позначення логічних операцій, формулюючи для кожного символа його строге означення. Це можна зробити, оскільки ми абстрагуємося від усіх властивостей висловлень, крім однієї — його істинісного значення.

Означення кожної логічної операції задаватимемо відповідною матрицею (таблицею), в перших стовпчиках якої записуються всі можливі істинісні значення компонентів, а в останньому стовпчику — істинісне значення результату операції.

Логічна операція, яка приблизно відповідна зв'язці «і» звичайної мови, позначається символом «$\wedge$» і «&» і задається матрицею.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Бінарна логічна операція, задана цією таблицею, називається **кон'юнкцією**, або **логічним множенням**. Запис «$p \wedge q$» читається: «p і q». Зазначимо, що результат логічної операції називається тим самим терміном, що й операція. Таким чином, вираз «$p \wedge q$» є кон'юнкцією.

Вищенаведене табличне означення операції «кон'юнкція» рівнозначне такому словесному означенню:

Кон'юнкція $p \wedge q$ істинна тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти p і q є одночасно істинними.

Бінарна логічна операція, відповідна зв'язці «або нероздільне», позначається символом «$\vee$» і задається таблицею

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ця операція називається **диз'юнкцією** або **логічним додаванням**. Вираз «$p \vee q$» читається: «p або q».

Унарна операція, відповідна виразу: «неправильно, що», позначається символом «$\neg$» або «—» і задається таблицею

p	$\neg p$
0	1
1	0

Ця операція називається **логічним запереченням**. Вираз «$\neg p$» читається: «не p».

Словесне означення диз'юнкції:

Д и з' ю н к ц і я «$p \lor q$» *істинна тоді і тільки тоді, коли принаймні один з її компонентів p, q є істинним, у противному разі диз'юнкція є хибною.*

Аналогічне означення для логічного заперечення: $\neg p$ *істинне тоді і тільки тоді, коли p — хибне, у противному разі* $\neg p$ — *хибне.*

Операція, яка приблизно відповідає сполучнику «якщо..., то...», позначається символом «$\rightarrow$» або «$\supset$» і називається і м п л і к а ц і є ю (матеріальною). Вона означається таблицею

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В імплікації «$p \rightarrow q$» p називають а н т е ц е д е н т о м або п о с и л к о ю, q — к о н с е к в е н т о м або в и с н о в к о м.[1]

Словесне означення операції «імплікація» таке:

І м п л і к а ц і я хибна тоді і тільки тоді, коли її антецедент — істинний, а консеквент — хибний, в усіх останніх випадках імплікація — істинна.

Бінарна логічна операція, яка відповідає зв'язці «тоді і тільки тоді», позначається символом «$\leftrightarrow$», або «$\sim$», або «$\equiv$» і називається е к в і в а л е н ц і є ю. Її табличне означення:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[1] Ця операція називається м а т е р і а л ь н о ю і м п л і к а ц і є ю. Ми не розглядатимемо інших видів імплікації, а тому називатимемо її просто і м п л і к а ц і є ю.

Словесне означення еквіваленції можна сформулювати так:

Е к в і в а л е н ц і я «$p \leftrightarrow q$» *істинна тоді і тільки тоді, коли p і q набувають однакових значень істинності, в противному разі еквіваленція — хибна.*

Зазначимо, що словесні означення формулюються, звичайно, в метамові (якою в даному разі є українська мова). Ось чому ми тут уникаємо порочного кола.

Із сказаного вище випливає, що символ диз'юнкції «$\lor$» відповідає невиключному, нероздільному «або». Бінарна логічна операція, яка відповідає виключному, роздільному «або», позначається символом «$\oplus$» і задається таблицею

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
0	0	1
1	1	0

У цій таблиці значення функції істинності дорівнює арифметичній сумі за модулем 2 істинісних значень компонентів, чим і пояснюється введене для неї позначення.

Наведемо приклади запису в нових позначеннях. Позначивши через p висловлення «π більше, ніж 3», через q — висловлення «π — число раціональне», через r висловлення «число π виражає відношення довжини кола до його діаметра», маємо (за даними математики): $|p| = 1$, $|q| = 0$, $|r| = 1$.

За означенням логічних операцій:

$$|p \land q| = 0,\ |p \lor q| = 1,\ |\neg p| = 0,\ |\neg q| = 1,$$
$$|p \rightarrow q| = 0,$$
$$|q \rightarrow p| = 1,\ |p \leftrightarrow r| = 1,\ |p \oplus q| = 1,\ |p \oplus r| = 0,$$
$$|p \land q \rightarrow r| = 1,$$
$$|p \land r \rightarrow q| = 0,\ |p \lor q \rightarrow r| = 1,\ |p \lor r \rightarrow q| = 0.$$

Висловлення, які не містять логічних зв'язок, називатимемо е л е м е н т а р н и м и чи а т о м а р н и м и. Наприклад, висловлення «Москва — столиця Радянського Союзу» і «101 — просте число» — елементарні висловлювання. У *логіці висловлень* елементарні висловлювання розглядаються як неподільні цілі, їх внутрішню структуру тут не аналізують (цим займається логіка предикатів). Висловлення, яке містить хоч одну логічну зв'язку, називається *складним висловленням*. Наприклад, висловлення «1001 не є простим числом», «дзвінок не дзвонить або в квартирі нікого немає» є складними висловленнями.

Підкреслимо, що однією із задач логіки висловлень є визначення істинності чи хибності *складного* висловлення за даними істинісними значеннями елементарних висловлень, що його складають. Навпаки, визначення істинності чи хибності *елементарного* висловлення не стосується логіки, відповідні дані про істинність чи хибність беруться з реальної дійсності, з даних різних наук.

Означення імплікації може викликати деякий сумнів у читача, оскільки воно не цілком узгоджується з нашою інтуїцією слідування. Зокрема, це стосується перших двох рядків таблиці означення імплікації $p \to q$, які відповідають випадкам, коли $|p| = 0$. Чим обгрунтовується те, що при $|p| = 0$ істинісне значення імплікації $p \to q$ дорівнює 1? Справа в тому, що в природній мові, як правило, не вживається слідування «якщо p, то q» при умові, що p — хибне. Проте легко впевнитися, що введене означення імплікації відповідає тому розумінню слідування, якого додержуються в математичних міркуваннях.

З цією метою розглянемо елементарне математичне твердження «Для всіх дійсних чисел x, якщо $x > 3$, то $x > 1$», істинність якого очевидна. Кожний окремий випадок цього загального твердження повинен бути істинним. Зокрема, при $x = 2$ дістаємо істинне твердження «Якщо $2 > 3$, то $2 > 1$» ($|2 > 3| = 0$; $|2 > 1| = 1$; маємо випадок другого рядка таблиці істинісних значень імплікації). При $x = 0$ матимемо теж істинне твердження «якщо $0 > 3$, то $0 > 1$», яке відповідає першому рядку таблиці імплікації.

Наведемо ще один аргумент на користь введеної таблиці для імплікації. Наша інтуїція вимагає такого означення імплікації, при якому вираз

$$p \wedge q \to p \qquad (1)$$

набиратиме в усіх випадках істинісне значення 1. При $|p| = 0$, враховуючи означення кон'юнкції, маємо $|0 \to 0| = 1$, а при $|p| = 1$, $|q| = 0$ маємо $|0 \to 1| = 1$, тобто дістали перші два рядки таблиці імплікації (які і викликали сумнів).

Не слід змішувати імплікацію з таким тлумаченням зв'язки «якщо..., то...», яке надає їй характер відношення причини до наслідку. Таблиця імплікації, звичайно, незастосовна до такого тлумачення. Так, твердження «Якщо воду при нормальному тиску нагріти до 50° С, то вона закипить» є хибним і при хибності посилки, тобто коли воду не нагріти до 50° С. Це обумовлено причинно-наслідковим характером виразу «якщо..., то...» у даному твердженні. У цьому разі не можна замінювати вираз «якщо..., то...» символом імплікації.

Аналогічно імплікація не застосовується до так званих *контрфактичних суджень*, які мають вид «якби p, то q». Наприклад, «Якби Пушкін не написав трагедії «Борис Годунов», то не було б повстання декабристів» вважається хибним, незважаючи на хибність посилки.

Зазначимо, що для математики останні застереження не відіграють ролі, адже ні з причинними зв'язками, ні з контрфактичними судженнями в математиці не доводиться зустрічатися.

Означення імплікації (слідування) часто пов'язують з такими принципами: 1) «З хибного слідує будь-що». 2) «Істинне слідує з будь-чого». Таким чином: 1) «З хибного слідує як істинне, так і хибне». 2) «Істинне слідує як з істинного, так і з хибного».

Відомий математик XX століття Ф. *Хаусдорф* висловив принцип 1) у такій парадоксальній формі: «Якщо $2 \cdot 2 = 5$, то існують відьми». Цим він підкреслив, що в математиці з одного хибного твердження можна вивести, користуючись вже цілком правильними міркуваннями, будь-яке (навіть хибне) твердження.

Іноді принципи 1) і 2) називають *парадоксами матеріальної імплікації*, оскільки вони не відповідають цілком нашій інтуїції. У зв'язку з цим вводилися такі види імплікації, як *формальна* та *строга* (див. [33], [17]).

Розглянемо докладніше питання про переклад символів логічних операцій на терміни звичайної мови. Запис «$p \to q$» читається: «Якщо p, то q», або «з p слідує q» («p імплікує q»).

У математичній мові той факт, що дана імплікація «$p \rightarrow q$» має місце, часто передають виразом «Твердження p є достатньою умовою для твердження q», або «Твердження q є необхідною умовою для твердження p».

Вираз «$p \rightarrow q$» читається ще, як «q тоді, коли p», або «p тільки тоді, коли q».

Наприклад, наступні словесні формулювання рівнозначні між собою:

1) Якщо трикутник ABC рівносторонній, то він рівнобедрений.

2) З того, що трикутник ABC рівносторонній, слідує, що він рівнобедрений.

3) Для того щоб трикутник ABC був рівнобедреним, достатньо, щоб він був рівностороннім.

4) Для того щоб трикутник ABC був рівностороннім, необхідно, щоб він був рівнобедреним.

5) Істинність твердження «Трикутник ABC — рівносторонній» є достатньою умовою істинності твердження «Трикутник ABC — рівнобедрений».

6) Істинність твердження «Трикутник ABC — рівнобедрений» є необхідною умовою істинності твердження «Трикутник ABC — рівносторонній».

7) Трикутник ABC рівнобедрений тоді, коли він — рівносторонній.

8) Трикутник ABC рівносторонній тільки тоді, коли він — рівнобедрений.

Неоднозначність перекладу на звичайну мову стосується й інших символів логічних операцій.

Так, символ «$\wedge$» можна перекладати, як «і», «а», «але», «так..., як ...», «...незважаючи на...», «...хоч ...», «...разом з...». Символ «$p \vee q$», крім звичайного «p або q», читається також, як «p, якщо не q», а символ «$\neg p$» — як «неправильно, що p» і як «p не має місця». Вираз «$p \leftrightarrow q$» можна тлумачити, як «p рівнозначне з q», «p — необхідна і достатня умова для q», «якщо p, то q, і навпаки».

§ 2. Таблиці істинності. Тавтології

Пропозиційні букви, символи логічних операцій та дужки становлять вихідні символи мови алгебри висловлень. Будь-яка послідовність вихідних символів є **виразом** мови. З множини всіх виразів виділяють **формули**, які в мові алгебри висловлень відповідають словам в природній мові.

Щоб говорити про формули, треба надати їм імена, бо, згідно з нашою практикою, ми, говорячи про речі, користуємось їх іменами. Так, сказавши «Юра пішов на роботу», ми маємо на увазі, що людина, ім'я якої Юра, пішла на роботу. Стверджуючи, що «Київ — чудове місто», користуються назвою «Київ», але мають на увазі, звичайно, місто, позначене цією назвою, а не саму назву. Говорячи «5 — натуральне число», теж мають на увазі не символ «5», а саме те, що він позначає.

Для позначення формул алгебри висловлень вживатимемо великі букви готичного алфавіту — $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$. При цьому запис $\mathfrak{A}$ $(p_1, \ldots, p_n)$ означатиме, що в формулу, позначену буквою $\mathfrak{A}$, входять пропозиційні букви $p_1, \ldots, p_n$.

Формулами алгебри висловлень називатимемо пропозиційні букви і вирази виду $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B})$, *де* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *— формули.* При цьому пропозиційні букви називають **елементарними** чи **атомарними формулами**.

Слід сказати, що за скінченне число кроків можна завжди визначити, чи є даний вираз формулою алгебри висловлень, чи ні. Так, вираз

$$((p \rightarrow (\neg q)) \vee r) \tag{2}$$

є формула алгебри висловлень. Побудуємо відповідну послідовність кроків за означенням формули, поки не дістанемо вираз (2), а саме, $(\neg q)$ — формула алгебри висловлень (вираз виду $(\neg \mathfrak{A})$), $(p \rightarrow (\neg q))$ — формула (вираз виду $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$), нарешті, $((p \rightarrow (\neg q)) \vee r)$ — формула (вираз виду $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$). Навпаки, вираз $(p \rightarrow (\neg q) \vee r)$ не є формулою алгебри висловлень. Справді, $(\neg q)$ — формула, а далі відповідна послідовність кроків побудови формули сбривається за відсутністю потрібних дужок.

Дужки у формулі визначають однозначний порядок виконання операцій. Символу кожної логічної операції відповідає пара дужок, що робить запис формули алгебри висловлень досить громіздким. З метою спрощення встановлюються правила скорочення числа дужок з тим, щоб не порушити, звичайно, однозначності порядку виконання дій у даній формулі. Це такі правила скорочення:

1) зовнішні дужки в записі кінцевої формули опускаються;

2) усім логічним операціям алгебри висловлень приписується певний ранг, який знижується в міру переміщення зліва направо в такому записі символів логічних операцій: $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. При цьому вважається, що операція вищого рангу зв'язує сильніше, ніж операція нижчого рангу.

Наприклад, скорочений запис формули (2) за цими правилами має вигляд $(p \rightarrow \urcorner q) \vee r$; формула $((p \rightarrow (q \vee (\urcorner r))) \leftrightarrow (\urcorner q))$ скорочено записується, як: $p \rightarrow q \vee \urcorner r \leftrightarrow \urcorner q$. У свою чергу, вираз $\urcorner p \wedge q \rightarrow r$ є скороченим записом формули $(((\urcorner p) \wedge q) \rightarrow r$. Надалі замість виразу «скорочений запис формули $\mathfrak{A}$» вживатимемо вираз «формула $\mathfrak{A}$».

Остання по порядку логічна операція в формулі називається **головною** операцією в цій формулі. Так, у формулі $(p \rightarrow \urcorner q) \wedge r \vee \urcorner q$ головною операцією є диз'юнкція, а головна операція формули $\urcorner p \vee \vee (p \rightarrow q) \leftrightarrow q \wedge (\urcorner p \rightarrow q)$ — еквіваленція.

У записі формул можна обійтися зовсім без дужок. Розглянемо спосіб бездужкового запису формул, запропонований відомим польським логіком Я. Лукасєвічем. Згідно з цим способом, символ операції записують безпосередньо перед її компонентами, а не між ними, як при звичайному способі запису бінарної операції. Крім того, тут символи логічних операцій відмінні від введених вище. Вони позначаються великими латинськими буквами. Так, кон'юнкція позначається через K, диз'юнкція — через A, заперечення — через N, імплікація — C, еквіваленція — E. Наприклад, $p \wedge q$ записується, як Kpq, $p \vee q$ — Apq, $p \rightarrow q$ — Cpq, $p \leftrightarrow q$ — Epq. Зокрема, формула $p \wedge q \rightarrow r$ матиме вигляд $CKpqr$, а формула $p \wedge (q \rightarrow r)$ — вигляд $KpCqr$.

Нехай задано формулу алгебри висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$, де змінні $p_1, \ldots, p_n$ можуть набувати довільно істинісні значення з множини $\{0, 1\}$. Кожен розподіл значень істинності всіх пропозиційних букв $p_1, \ldots, p_n$ називають **n-значним набором** $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Кожному набору $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ відповідає точно визначене єдине значення функції істинності формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$, яке можна обчислити суто механічно.

Наприклад, формулі $\mathfrak{A} = (\urcorner p \rightarrow q \vee r) \wedge (q \rightarrow p \vee \urcorner r)$ на наборі (p, q, r), де $|p| = 0$, $|q| = 1$, $|r| = 0$, відповідає значення істинності $|\mathfrak{A}|$, яке обчислюється так:

$$|\mathfrak{A}| = (\urcorner 0 \rightarrow 1 \vee 0) \wedge (1 \rightarrow 0 \vee \urcorner 0) = (1 \rightarrow 1) \wedge$$
$$\wedge (1 \rightarrow 0 \vee 1) = 1 \wedge (1 \rightarrow 1) = 1.$$

Це значення істинності може, звичайно, бути різним на різних наборах. Так, на наборі (p, q, r), де $|p| = 0$ $|q| = 1$, $|r| = 1$, матимемо

$$|\mathfrak{A}| = (\urcorner 0 \rightarrow 1 \vee 1) \wedge (1 \rightarrow 0 \vee \urcorner 1) = (1 \rightarrow 1) \wedge$$
$$\wedge (1 \rightarrow 0 \vee 0) = 1 \wedge (1 \rightarrow 0) = 1 \wedge 0 = 0.$$

Щоб розглянути залежність істинісного значення $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ від усіх можливих розподілів істинісних значень пропозиційних букв $p_1, \ldots, p_n$, треба впорядкувати множину всіх наборів, щоб не пропустити жодного з них. Проведемо таке впорядкування наборів, вважаючи умовно кожний набір записом певного натурального числа в двійковій системі числення. При цьому n-значний набір відповідатиме запису n-розрядного числа. Так, для $n = 3$ множина всіх наборів буде впорядкована таким чином: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1). Таке впорядкування називають **лексикографічним** (**словниковим**); упорядкування множини наборів можна, звичайно, провести іншим способом, зокрема, антилексикографічно. Тоді матимемо: (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1,1,1).

Число всіх n-значних наборів дорівнює 2^n.

Доведення цього твердження легко провести методом математичної індукції. Справді, при $n = 1$ маємо два однозначних набора: 0 і 1. Припустимо, що при $n = k$ твердження справджується. Тоді існує рівно 2^k k-значних наборів. Проте для кожного k-значного набора можна утворити рівно два $(k + 1)$-значних набора приєднанням 0 або 1. Отже, число всіх $(k + 1)$-значних наборів дорівнюватиме $2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$, тобто твердження справджується і при $n = k + 1$. Тому, згідно з принципом математичної індукції, це твердження справджується при всіх натуральних n.

Як проводити на кожному наборі обчислення значень функції істинності, що відповідає даній формулі, проілюструємо на прикладі формули

$$\mathfrak{B} = (\urcorner p \rightarrow q \vee r) \wedge (q \rightarrow p \vee \urcorner r).$$

p	q	r	$\neg p$	$q \vee r$	$\neg p \to q \vee r$	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$q \to p \vee \neg r$	$\mathfrak{A}$
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	1

Ця таблиця називається **таблицею істинності** формули $\mathfrak{A}$. Кожному символу логічної операції в формулі $\mathfrak{A}$ відповідає окремий стовпчик таблиці, останній стовпчик відповідає істинісному значенню, яке визначається даною формулою (її головною операцією). Звернемо увагу на те, що кожен стовпчик таблиці істинності для формули $\mathfrak{A}$ відповідає певному кроку процесу її побудови або, як кажуть, певній підформулі $\mathfrak{A}$.

Часто таблицею істинності формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ називають скорочену таблицю, в якій з вищенаведеної залишають перших n стовпчиків (значень аргументів $p_1, \ldots, p_n$) і останній стовпчик.

В принципі, для кожної формули алгебри висловлень можна побудувати відповідну таблицю істинності. «В принципі» — бо степінь складності такої таблиці для формули $\mathfrak{A}$ швидко зростає із збільшенням числа різних пропозиційних букв, що входять в $\mathfrak{A}$. Так, при $n = 3$ число рядків таблиці дорівнює $2^3 = 8$, при $n = 4$ воно становить 16, при $n = 5$ дорівнює 32, а при $n = 10$ — вже 1024. Практично побудувати таблицю істинності в останньому випадку вже неможливо. Проте цей факт зовсім не зменшує теоретичного значення **принципіальної** можливості побудувати таблицю істинності для будь-якої заданої формули алгебри висловлень.

Таблиця істинності для формули алгебри висловлень задає певну **функцію** істинності. При цьому не слід плутати формулу алгебри висловлень з **функцією істинності**, яку ця формула визначає. Формула є «ім'ям» відповідної функції істинності. Та сама функція істинності може зображатися різними формулами (річ може мати кілька назв). Проте кожній формулі алгебри висловлень відповідає певна таблиця істинності,

отже, певна функція істинності, аналогічно тому, як кожному імені в формалізованій мові відповідає тільки один предмет.

Тут виникає питання: чи справджується обернене твердження, а саме, чи кожну функцію істинності можна зобразити формулою алгебри висловлень? Це питання ми розглянемо нижче.

Серед формул алгебри висловлень особливе місце займають ті формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$, які на **всіх** наборах $(p_1, \ldots, p_n)$, тобто при **всіх можливих** розподілах істинісних значень пропозиційних букв $p_1, \ldots$ $\ldots, p_n$, набирають значення 1. Такі формули називаються **тавтологіями**.

Означення. *Формула алгебри висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ називається **тавтологією** тоді і тільки тоді, коли функція істинності, яка визначається формулою, тотожно дорівнює 1. Тавтології називають ще тотожно істинними формулами, або законами алгебри висловлень.*

Наведемо приклади деяких найважливіших тавтологій.

1. $p \leftrightarrow \neg\neg p$ — закон подвійного заперечення.
2. $p \vee \neg p$ — закон виключеного третього.
3. $\neg(p \wedge \neg p)$ — закон виключення суперечності.
4. $p \to p$ — закон тотожності.
5. $p \wedge p \leftrightarrow p$
6. $p \vee p \leftrightarrow p$

   (5–6) — закони ідемпотентності.
7. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg p)$ — закон контрапозиції

Довести те, що формули 1—7 є тавтологіями, можна за допомогою таблиць істинності. Так, доведемо, що формула 7 є тавтологія.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	7
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Доведення тавтологій 1—6 пропонуємо читачеві виконати самостійно (відповідні таблиці істинності для них міститимуть всього по 2 рядки).

Той факт, що формула алгебри висловлень $\mathfrak{A}$ є тавтологією, позначають так: $\models \mathfrak{A}$. Символ $\models$, як і $\mathfrak{A}$, належить до метамови.

Метод побудови таблиці істинності — не єдиний метод встановлення нових тавтологій. Часто виявляється зручним так званий метод відшукання контрприклада.

Приклади

1. Перевірити, чи є тавтологією формула алгебри висловлень

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)). \tag{3}$$

Розв'язання. Припустимо, що формула (3) не є тавтологією. Тоді здайдеться хоча б один набір (p_0, q_0, r_0), на якому істинісне значення формули (3) дорівнюватиме 0. Розглянемо цей набір. Оскільки головна операція в формулі (3) — імплікація, то, за означенням імплікації, $|(3)| = 0$ тільки тоді, коли

$$|p_0 \to (q_0 \to r_0)| = 1 \tag{4}$$

і, крім того,

$$|(p_0 \to q_0) \to (p_0 \to r_0)| = 0. \tag{5}$$

З (5) дістаємо

$$|p_0 \to q_0| = 1; \tag{6}$$

$$|p_0 \to r_0| = 0, \tag{7}$$

оскільки в (5) головна операція є теж імплікація.

Далі, з формули (7), за означенням імплікації, маємо

$$|p_0| = 1 \tag{8}$$

і

$$|r_0| = 0. \tag{9}$$

Підставляючи результат (8) у формулу (6), знайдемо

$$|q_0| = 1, \tag{10}$$

а підставивши значення (8), (9), (10) у формулу (4), матимемо

$$1 \to (1 \to 0) = 1. \tag{11}$$

Проте, за означенням імплікації, $1 \to (1 \to 0) = 0$, що суперечить (11). Отже, наше припущення неправильне, тобто формула (3) — тавтологія. (Це закон самодистрибутивності імплікації, або закон Фреге).

2. Перевірити, чи є тавтологією формула алгебри висловлень

$$((p \to (q \to r)) \to (p \to q)) — (p \to r). \tag{12}$$

Припустимо, що формула (12) не є тавтологією. Тоді знайдеться хоча б один контрприклад, а саме, такий набір (p_0, q_0, r_0), на якому значення (12) дорівнюватиме 0. Міркуючи, як і в попередньому прикладі, дістанемо

$$|p_0 \to r_0| = 0 \tag{13}$$

і

$$|((p_0 \to (q_0 \to r_0)) \to (p_0 \to q_0)| = 1. \tag{14}$$

З (13) матимемо $|p_0| = 1$, $|r_0| = 0$. Підставляючи останній результат в (14) і поклавши $|q_0| = 1$, дістанемо

$$((1 \to (1 \to 0)) \to (1 \to 1) = (1 \to 0) \to 1 = 0 \to 1 = 1.$$

Таким чином, знайдено контрприклад, а саме, показано, що на наборі $|p_0| = 1$, $|q_0| = 1$, $|r_0| = 0$ формула (12) набуває значення 0. Отже, задана формула не є тавтологією.

У математиці із даних, вже встановлених співвідношень, виводять нові співвідношення. Аналогічно в алгебрі висловлень з відомих тавтологій виводять інші.

Важливим засобом утворення нових тавтологій є підстановка в дану формулу. Доведемо наступну теорему підстановки.

Теорема. *Якщо $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ — тавтологія, то формула $\mathfrak{A}^*$, утворена з формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_i, \ldots$ $\ldots, p_n)$ підстановкою довільної формули алгебри висловлень $\mathfrak{B}$ замість кожного входження пропозиційної букви p_i в $\mathfrak{A}$, є також тавтологія.*

Доведення. Дано, що $|\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \ldots$ $\ldots, p_n)| = 1$ і $|\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \ldots, p_n| = 1$ на всіх наборах $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n)$. Проте при довільному розподілі істинісних значень $(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots$ $\ldots, p_n)$ формула $\mathfrak{B}$, яку підставляємо замість p_i, не може набувати істинісних значень, відмінних від 0 і 1. Звідси $\mathfrak{A}^*$ тотожно дорівнює 1, тобто $\mathfrak{A}^*$ є тавтологія.

Примітка. При застосуванні теореми підстановки слід мати на увазі, що підстановку в $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ можна застосовувати тільки замість пропозиційних букв p_i $(i = 1, \ldots, n)$ і обов'язково в усіх місцях входження p_i в формулу $\mathfrak{A}$.

Приклади

1. Відомо, що формула $\mathfrak{A}(p, q) = (p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ є тавтологія. Підставимо в $\mathfrak{A}(p, q)$ замість p формулу $\neg p \to q$. В результаті дістанемо формулу $((\neg p \to q) \to q) \leftrightarrow (\neg q \to$ $\to \neg(\neg p \to q))$, яка за теоремою підстановки є також тавтологія.

2. Застосуємо до тієї самої формули $\mathfrak{A}(p, q)$ одночасно підстановки: $\neg q$ замість p, $\neg p$ замість q. Тоді матимемо формулу $\mathfrak{A}^* =$ $= (\neg q \to \neg p) \leftrightarrow (\neg\neg p \to \neg\neg q)$, яка також тотожно істинна.

Зауважимо, що робити підстановку замість $(\neg p)$ чи $(\neg q)$ ми не маємо права, оскільки $\neg p$ і $\neg q$ — не є пропозиційні букви.

Другий засіб утворення тавтологій дає наступна теорема.

Теорема. *Якщо*

$$\models \mathfrak{A} \tag{15}$$

$$\models \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \qquad (16)$$

то $\models \mathfrak{B}$.

Доведення. Застосуємо знову метод від супротивного. Припустимо, що $\mathfrak{B}$ — не тавтологія. Тоді існує такий набір, на якому $|\mathfrak{B}| = 0$. Оскільки значення істинності $\mathfrak{A}$ на цьому наборі, як і на всіх інших, згідно з умовою (15), дорівнюватиме 1, то, за означенням імплікації, $|\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}| = 0$ на даному наборі. Отже, формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ не є тавтологією, що суперечить формулі (16). Зайшли у суперечність. Зроблене припущення неправильне, тобто формула $\mathfrak{B}$ є тавтологія.

Приклад. Підстановкою в тавтологію

$$p \to (q \to p)$$

дістаємо $\models (p \vee \neg p) \to (q \to (p \vee \neg p))$. Оскільки $\models p \vee \neg p$ (закон виключеного третього), то за останньою теоремою $\models q \to (p \vee \neg p)$.

Формула алгебри висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$, яка набуває значення істинності 0 на всіх 2^n наборах, називається суперечністю. Найпростішим прикладом суперечності є формула $p \wedge \neg p$.

Формула алгебри висловлень, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називається нейтральною. Прикладом нейтральної формули є, скажімо, $p \to q$.

Множини тавтологій, суперечностей і нейтральних формул попарно не перетинаються і разом становлять множину всіх формул алгебри висловлень.

Означення. *Формула алгебри висловлень, яка не є суперечністю, називається виконуваною.*

Так, формула $p \to p$ — виконувана і формула $p \to \neg p$ теж виконувана при $|p| = 0$; $|p \to \neg p| = 1$.

Наведемо ряд тверджень, справедливість яких очевидна.

Запереченням тавтології є суперечність і, навпаки, запереченням суперечності є тавтологія.

Кожна тавтологія — виконувана формула (але, звичайно, не навпаки).

Кожна нейтральна формула — виконувана, але не навпаки.

Запереченням виконуваної формули може бути як виконувана, так і невиконувана формула.

Так, для виконуваної (навіть тотожно істинної) формули $\mathfrak{A} = p \to (q \to p)$ формула $\neg \mathfrak{A} = \neg (p \to (q \to p))$ є невиконуваною. А запереченням виконуваної (не тотожно істинної) формули $\mathfrak{B} = p \to q$ є також виконувана формула $\neg \mathfrak{B} = \neg (p \to q)$. Звичайно, твердження «Заперечення $\mathfrak{A}$ — виконувана формула» і «$\mathfrak{A}$ — невиконувана формула» мають різний зміст (з останнього випливає перше, але не навпаки).

Аналогом поняття тавтології в природній мові є поняття логічно істинного твердження. Для розгляду його введемо поняття логічної структури.

Логічна структура складного висловлення — це формула алгебри висловлень, яка утворюється з даного складного висловлення заміною в ньому кожного елементарного висловлення пропозиційною змінною (буквою). При цьому однакові елементарні висловлення в усіх місцях входження замінюються тією самою буквою і різні елементарні висловлення — різними буквами, а логічні зв'язки природної мови замінюються символами відповідних логічних операцій.

Для прикладу визначимо логічну структуру твердження «Якщо добуток двох даних чисел дорівнює нулю, то перший множник дорівнює нулю або другий множник дорівнює нулю».

Тут маємо три різних елементарних висловлення:

1) Добуток двох даних чисел дорівнює нулю.
2) Перший множник дорівнює нулю.
3) Другий множник дорівнює нулю.

Замінимо їх різними пропозиційними буквами: p, q, r відповідно, а логічні зв'язки — «якщо..., то ...» і «або» — символами відповідних логічних операцій. В результаті матимемо логічну структуру виду

$$p \to q \vee r.$$

Важлива роль у проведенні міркувань належить поняттю логічної істини. Можна сказати, що однією з основних задач логіки є вивчення логічних істин.

Означимо логічну істинність висловлення (твердження).

Означення. *Висловлення називається логічно істинним* (на *базі алгебри висловлень*) *тоді і тільки тоді, коли його логічна структура є тавтологією.*

Таким чином, поняття логічної істинності висловлення є аналогом поняття тавтології для формул алгебри висловлень.

Наведемо тепер приклади логічно істинних тверджень.

«Якщо Марс — планета, то Марс — планета» (його логічна структура — $p \to p$, тобто тавтологія).

«Трикутник ABC — рівнобедрений або трикутник ABC — нерівнобедрений» (логічна структура цього твердження — $p \lor \neg p$).

Якщо π більше ніж 3, то з того, що π більше ніж 2, слідує, що π більше ніж 3» (його логічна структура — тавтологія $p \to (q \to p)$).

«З того, що $\sqrt{3}$ менше ніж 1,75, слідує, що $\sqrt{3}$ менше ніж 2 тоді і тільки тоді, коли з того, що $\sqrt{3}$ не менше ніж 2 слідує, що $\sqrt{3}$ не менше ніж 1,75» (логічна структура — тавтологія $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$).

З другого боку, твердження «Якщо дане число кратне 10, то воно кратне 5» має логічну структуру — «$p \to q$», тобто не тавтологію. Отже, воно не є логічно істинним на базі алгебри висловлень. Так само і твердження «Двічі по два — чотири», яке є зразком непохитної істини, будучи простим висловленням (його логічна структура — «p»), не може бути логічно істинним на базі алгебри висловлень.

При розгляді окремих логічно істинних тверджень на базі алгебри висловлень може скластися таке враження, що ці твердження, будучи тривіальними, не несуть по суті жодної нової інформації (з цим, до речі, зв'язаний і термін «тавтологія»),— а тому не являють взагалі ніякого інтересу.

Проте, як буде показано далі при розгляді логічного слідування, поняття тавтології і логічно істинного твердження відіграють дуже важливу роль у логіці.

§ 3. Рівносильність формул алгебри висловлень. Властивості логічних операцій

Формули алгебри висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ і $\mathfrak{B}(p_1, \ldots, p_n)$ називають **рівносильними** або **логічно еквівалентними**, якщо їх функції істинності $|\mathfrak{A}|$ і $|\mathfrak{B}|$ тотожно рівні, тобто, якщо їх значення на всіх 2^n наборах збігаються.

Примітка. У цьому означенні (як і в ряді інших, наведених нижче), згідно з загальноприйнятою в математичній літературі практикою, зв'язка «якщо» вживається в розумінні «тоді і тільки тоді».

Рівносильність формул $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ позначатимемо $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Підкреслимо, що символ «$\equiv$» не є символом **операції** алгебри висловлень, а означає певне **відношення** між формулами. $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — це назви формул, а вираз «$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$» не є назвою формули алгебри висловлень, а **твердженням про формули**. Символ «$\equiv$» належить не предметній мові логіки висловлень, а метамові.

Наведемо основні рівносильності алгебри висловлень:

(1) $p \land q \equiv q \land p$ — комутативність кон'юнкції;

(2) $p \lor q \equiv q \lor p$ — комутативність диз'юнкції;

(3) $p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r$ — асоціативність кон'юнкції;

(4) $p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$ — асоціативність диз'юнкції;

(5) $p \land (q \lor r) \equiv p \land q \lor p \land r$ — перший дистрибутивний закон;

(6) $p \lor q \land r \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ — другий дистрибутивний закон;

(7) $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
(8) $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$ — закони де Моргана;

(9) $p \to q \equiv \neg p \lor q$;

(10) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$;

(11) $\neg\neg p \equiv p$;

(12) $p \land p \equiv p$;

(13) $p \lor p \equiv p$;

(14) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

У наступних рівносильностях позначатимемо істинне висловлення символом «1», а хибне висловлення — символом «0». Тоді для довільної формули алгебри висловлень $\mathfrak{A}$ мають місце такі рівносильності (так звані закони сталих):

(15) $\mathfrak{A} \land 1 \equiv \mathfrak{A}$;

(16) $\mathfrak{A} \land 0 = 0$;

(17) $\mathfrak{A} \lor 1 \equiv 1$;

(18) $\mathfrak{A} \lor 0 \equiv \mathfrak{A}$.

Беручи до уваги означення операції «$\leftrightarrow$», а також означення тавтології і рівносильності, можна зробити висновок, що кожну тавтологію, в якої головна операція еквіваленція, можна записати як рівносильність двох відповідних формул. Інакше кажучи, ця тавтологія породжує певну рівносильність. Так, тавтології $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (закону подвійного заперечення) відповідає рівносильність (11); законам ідемпотентності відповідають рівносильності (12) і (13); тавтології $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg p$ (закону контрапозиції) відповідає рівносильність (14). Зазначимо, що кожній з цих рівносильностей дають назву відповідної тавтології.

Доведемо рівносильність (6)

$$p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Нехай $|p \vee q \wedge r| = 0$. Тоді $|p| = 0$ і $|q \wedge r| = 0$,

тобто $$|q| = 0 \quad (*)$$

або $$|r| = 0. \quad (**)$$

Якщо матимемо рівність (*), то $|p \vee q| = 0$, а якщо (**), то $|p \vee r| = 0$. Отже, за означенням кон'юнкції, права частина рівносильності (6) має значення 0, тобто те саме значення, що й ліва частина. Тепер нехай $|p \vee q \wedge r| = 1$. Тоді $|p| = 1$ або $|q \wedge r| = 1$. Якщо $|p| = 1$, то $|p \vee q| = 1$ і $|p \vee r| = 1$ (за означенням диз'юнкції), а тому значення правої частини теж буде 1. Якщо $|q \wedge r| = 1$, то $|q| = 1$ і $|r| = 1$. Тому $|p \vee q| = 1$ і $|p \vee r| = 1$ (за означенням диз'юнкції). Отже, значення правої частини рівносильності (6) і в цьому разі збігається із значенням лівої частини. Цим і завершується доведення того, що функції істинності лівої і правої частин рівносильності (6) тотожно рівні.

Доведення рівносильності (7) проведемо безпосередньо побудовою двох таблиць істинності для формул

$$\neg(p \wedge q) \quad (*)$$

і

$$\neg p \vee \neg q, \quad (**)$$

які запишемо разом.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Як бачимо, 4-й і 7-й стовпчики збігаються, тобто функції істинності формул (*) і (**) тотожно рівні. Рівносильність (7) доведено.

Аналогічно доводиться рівносильність (9). Маємо

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Третій і п'ятий стовпчики збігаються. Отже, рівносильність (9) доведено.

Цим самим способом можна було б довести і рівносильність (6) (у цьому разі ми мали б 8 рядків таблиці істинності).

Доведення рівносильності (15) проведемо так. На тих наборах, де $|\mathfrak{A}| = 1$, маємо $|\mathfrak{A} \wedge 1| = 1 \wedge 1 = 1 = |\mathfrak{A}|$ на наборах, де $|\mathfrak{A}| = 0$,

$$|\mathfrak{A} \wedge 1| = 0 \wedge 1 = 0 = |\mathfrak{A}|.$$

Таким чином, на в с і х наборах значення обох функцій істинності однакові. Рівносильність (15) доведено.

Доведення рівносильності (17) безпосередньо випливає з означення диз'юнкції, а рівносильності (16) — з означення кон'юнкції.

Решту рівносильностей пропонуємо читачеві довести самостійно.

З рівносильністю ф о р м у л алгебри висловлень пов'язано поняття рівносильності в и с л о в л е н ь.

Два в и с л о в л е н н я називають р і в н о с и л ь н и м и тоді і тільки тоді, коли формули, що зображають їх логічну структуру, є рівносильними між собою.

Приклади

1. Твердження «Неправильно, що 7 ділить 47 або 7 ділить 95» рівносильне твердженню «7 не ділить 47 і 7 не ділить 95» (за рівносильністю (8)).

2. Твердження «Неправильно, що температура повітря у Києві зараз дорівнює —5° С і атмосферний тиск становить 750 мм рт. ст.» рівносильне твердженню «Температура повітря у Києві зараз не дорівнює —5° С або атмосферний тиск не становить 750 мм рт. ст.» (згідно з рівносильністю (7)).

3. Твердження «Якщо дане число більше 3, то воно більше 2» рівносильне твердженню «Дане число не більше 3 або воно більше 2» (згідно з рівносильністю (9)).

Якщо має місце рівносильність $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, де $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — формули алгебри висловлень, то має місце тавтологія $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$, і навпаки. Так, рівносильність, (7) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ можна записати як тавтологію

$$\neg (p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q. \tag{17}$$

Застосувавши теорему підстановки до (17), можна замінити в ній пропозиційні букви p, q відповідно довільними формулами алгебри висловлень $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Дістанемо тавтологію (18) $\neg (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \leftrightarrow \neg \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{B}$. Зробивши обернений перехід від тавтології (18) з головною операцією еквіваленції до рівносильності, матимемо

$$\neg (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \equiv \neg \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{B}.$$

Аналогічно можна записати будь-яку з рівносильностей (1) — (14), підставляючи замість пропозиційних букв довільні формули алгебри висловлень.

Отже, дістанемо узагальнені рівносильності, записані в метамові.

$$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}; \quad \neg\neg \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A};$$
$$\neg (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \equiv \neg \mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \equiv \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B};$$
$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}); \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}.$$

Зокрема,

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \wedge \neg q; \quad \neg ((p \to q) \vee \neg q) \equiv$$
$$\equiv \neg (p \to q) \wedge \neg\neg q;$$
$$\neg p \wedge \neg q \to \neg p \equiv \neg (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p.$$

З означення рівносильності формул безпосередньо випливає, що для будь-яких формул логіки висловлень $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ мають місце співвідношення:

а) $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_1$ (р е ф л е к с и в н і с т ь);

б) якщо $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2$, то $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}_1$ (с и м е т р и ч н і с т ь);

в) якщо $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_2$ і $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}_3$, то $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{A}_3$ (т р а н з и т и в н і с т ь).

При цьому важливе значення має наступна теорема про заміну.

Т е о р е м а. *Нехай* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$ $(\mathfrak{B}_1)$ — *підформула* $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}_1$ $(\mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{B}_1)$. *Позначимо через* $\mathfrak{A}^*$ $(\mathfrak{B}^*)$ *результат заміни в формулі* $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$ *підформули* $\mathfrak{A}_1$ $(\mathfrak{B}_1)$ *на* $\mathfrak{A}_2$ $(\mathfrak{B}_2)$. *Тоді* $\mathfrak{A}^*$ $(\mathfrak{B}^*) \equiv \mathfrak{B}$ $(\mathfrak{A})$.

Інакше кажучи, *якщо в рівносильності* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *замінити будь-яку підформулу* $\mathfrak{A}$ *чи* $\mathfrak{B}$ *на рівносильну їй, то рівносильність не порушується.*

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає із способу побудови таблиці істинності формули алгебри висловлень і того факту, що останні стовпчики таблиць істинності рівносильних формул збігаються між собою.

Звернемо увагу на в і д м і н у між з а м і н о ю і п і д с т а н о в к о ю:

а) підстановка робиться т і л ь к и замість пропозиційної букви, тоді як заміна проводиться замість п і д ф о р м у л и;

б) за теоремою підстановки можна замість пропозиційної змінної підставляти д о в і л ь н у формулу, а за теоремою про заміну підформула замінюється тільки н а р і в н о с и л ь н у їй формулу;

в) підстановка проводиться обов'язково в у с і х місцях входження замінюваної пропозиційної букви, тоді як заміна даної підформули можлива і замість одного її входження в формулу.

Виходячи з вищенаведених властивостей рівносильності, перетворення, в яких фігурують рівносильні формули, можна записувати у вигляді ланцюга аналогічно тому, як це має місце при записі тотожних перетворень у звичайній алгебрі.

Приклади

1. $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \equiv 1 \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q;$
$\vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q.$

Тут було послідовно застосовано: другий дистрибутивний закон, закон виключеного третього, закон $1 \wedge \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$.

2. $p \wedge q \vee \neg p \wedge q \equiv q\ (p \vee \neg p) \equiv q \wedge 1 \equiv q;$
$p \wedge q \vee \neg p \wedge q \equiv q.$

На першому кроці застосовано перший дистрибутивний закон, прочитаний справа наліво, на другому кроці — закон виключеного третього, на третьому кроці — рівносильність $\mathfrak{A} \wedge 1 \equiv \mathfrak{A}$.

З метою обгрунтування кожної ланки ланцюга рівносильностей, тобто кожного кроку доведення, ми відразу після його написання записуватимемо цей ланцюг вертикально (зверху вниз), записуючи справа від кожної формули її обгрунтування (в дужках) і нумеруючи кожен крок. Крім цього, для короткості ми здебільшого опускатимемо знак кон'юнкції (логічного множення). Таким чином, запис «pq» слід розуміти як «$p \wedge q$».

Приклади

1. Довести

$$p \vee pq \equiv p \quad \text{(1-й закон поглинання).} \tag{20}$$

Доведення
1. $p \vee pq$;
2. $p(1 \vee q)$ (з 1,1-й дистрибутивний закон);
3. $p \wedge 1$ (з 2, закон «$1 \vee \mathfrak{A} \equiv 1$»);
4. p (з 3, закон «$\mathfrak{A} \wedge 1 \equiv \mathfrak{A}$»).

2. Довести

$$p(p \vee q) \equiv p \quad \text{(2-й закон поглинання).} \tag{21}$$

Доведення
1. $p(p \vee q)$;
2. $pp \vee pq$ (з 1, 1-й дистрибутивний закон);
3. $p \vee pq$ (з 2, рівносильність (12));
4. p (з 3, рівносильність (20)).

3. Довести

$$\neg(p \to q) \equiv p \neg q. \tag{22}$$

Доведення
1. $\neg(p \to q)$;
2. $\neg(\neg p \vee q)$ (з 1, рівносильність (9));
3. $\neg\neg p \wedge \neg q$ (з 2, рівносильність (8));
4. $p \wedge \neg q$ (з 3, рівносильність (11)).

Зазначимо, що, як в розглянутих прикладах, так і в наступних, побудова ланцюгів рівносильностей неможлива без застосування теореми про заміну. Пропонуємо читачеві самостійно визначити, де саме застосовано цю теорему у кожному з наведених прикладів.

4. Довести

$$p \vee q \equiv \neg p \to q. \tag{23}$$

1. $\neg p \to q$;
2. $\neg\neg p \vee q$ (рівносильність $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \equiv \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, з 1);
3. $p \vee q$ (рівносильність (11), з 2)).

5. Довести

$$p \vee q \equiv (p \to q) \to q. \tag{24}$$

1. $(p \to q) \to q$;
2. $\neg(p \to q) \vee q$ (рівносильність $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \equiv \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, з 1);
3. $p \neg q \vee q$ (з 2), рівносильність (22));
4. $(p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$ (з 3, 2-й дистрибутивний закон);
5. $(p \vee q) \wedge 1$ (з 4, закон виключеного третього);
6. $p \vee q$ (з 5, рівносильність (15)).

6. Довести

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \neg q \vee q \neg p. \tag{25}$$

1. $\neg(p \leftrightarrow q)$;
2. $\neg((p \to q) \wedge (q \to p))$ (з 1, рівносильність (10));
3. $\neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$ (з 2, рівносильність (7));
4. $p \neg q \vee q \neg p$ (з 3, рівносильність (22) двічі).

Як бачимо, рівносильні перетворення дають змогу в деяких випадках замінювати вихідні формули простішими (в розумінні числа входжень пропозиційних букв у формулу — довжини формули або щодо числа символів логічних операцій у формулі — висоти формули).

Так, число входжень пропозиційних букв у формулі $p \vee (\neg p \wedge q)$ становить 3, а в остаточній формулі $p \vee q$ це число дорівнює 2 (приклад 1, с. 35); число символів логічних операцій відповідно 3 і 1. У прикладі 1, с. 36 довжина вихідної формули $p \vee pq$ дорівнює 3, а в остаточній формулі (p) вона дорівнює 1. При цьому висота вихідної формули становить 2, кінцевої — 0. У прикладі 2, с. 35 довжина і висота вихідної формули дорівнюють 4, а в остаточній формулі висота дорівнює 0, а довжина — 1.

Проте дуже часто рівносильні перетворення вживають для зміни структури, характеру даної формули. Утворена при цьому формула, можливо, матиме довжину (висоту) не меншу, ніж вихідна формула.

Так, у прикладі 4 довжина вихідної і остаточної формули дорівнює 2, а висота остаточної формули 2 навіть більша, ніж у вихідної. Проте ці формули мають різну структуру. Вихідна формула тут диз'юнкція, а остаточна зовсім не містить символу диз'юнкції.

Аналогічно в прикладі 5 довжина вихідної формули $p \vee q$ дорівнює 2, висота — 1, а формула $(p \to q) \to q$, утворена внаслідок перетворення, має довжину 3, а висоту 2. Таким чином, остаточно формула тут є складнішою. Цей факт зовсім не заперечує значення даної рівносильності, оскільки остання дає змогу замінити диз'юнкцію виразом, в якому, крім символу імплікації, немає жодного іншого символу логічної операції.

Приклад

Формулу $(\neg(p \vee q) \to pqr) \vee \neg pr$ перетворити в рівносильну, висота якої дорівнює 2.
1. $(\neg(p \vee q) \to pqr) \vee \neg pr$;
2. $(\neg\neg(p \vee q) \vee pqr) \vee \neg pr$ (1, рівносильність (9));
3. $((p \vee q) \vee pqr) \vee \neg pr$ (2, рівносильність (11));

4. $(p \vee q) \vee (pqr \vee \neg pr)$ (3, рівносильність (4));
5. $(p \vee q) \vee r\,(pq \vee \neg p)$ (4, рівносильність (5));
6. $(p \vee q) \vee r\,(p \vee \neg p)\,(q \vee \neg p)$ (5, рівносильність (6));
7. $(p \vee q) \vee r\,(q \vee \neg p)$ (6, закон виключеного третього, рівносильність (15));
8. $(p \vee q) \vee rq \vee r \neg p$ (7, рівносильність (5));
9. $(p \vee r \neg p) \vee (q \vee rq)$ (8, рівносильності (4) і (2)),
10. $(p \vee r)\,(p \vee \neg p) \vee q\,(1 \vee r)$ (9, рівносильності (6) і (5));
11. $(p \vee r) \wedge 1 \vee q \wedge 1$ (10, закон виключеного третього і рівносильність (17));
12. $(p \vee r) \vee q$ (11, рівносильність (15) двічі).

Рівносильності (1) — (14) означають, що введені логічні операції не є незалежними. Так, згідно з рівносильністю (9), можна імплікацію виразити через диз'юнкцію і заперечення, а рівносильність (10) дає змогу заміновати еквіваленцію на рівносильну їй кон'юнкцію двох імплікацій.

Зазначені рівносильності логіки висловлень визначають ряд властивостей логічних операцій. Рівносильності (1) — (4) формулюють властивості комутативності й асоціативності кон'юнкції та диз'юнкції. Рівносильність (5) встановлює дистрибутивну властивість логічного множення (кон'юнкції) щодо логічного додавання (диз'юнкції). Ці властивості з б і г а ю т ь с я з аналогічними властивостями сум і добутків у звичайній алгебрі, що дає змогу оперувати з відповідними виразами алгебри висловлень як з алгебраїчними многочленами.

Зокрема, згідно із законами асоціативності для кон'юнкції і диз'юнкції, можна ввести скорочений запис при $m > 2$ m-членної кон'юнкції чи диз'юнкції без дужок. Наприклад, оскільки $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) \equiv (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$, то ці обидва рівносильних вирази можна записати як $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$ (аналогічно і для диз'юнкції).

Завдяки першому дистрибутивному закону в логіці можна розкривати дужки (і виносити за дужки) як у звичайній алгебрі та замінювати кон'юнкцію диз'юнкцій відповідною диз'юнкцією кон'юнкцій. Наприклад,

$$(p_1 \vee p_2)\,(p_3 \vee p_4) \equiv p_1p_3 \vee p_2p_3 \vee p_1p_4 \vee p_2p_4.$$

Рівносильність (6) — другий дистрибутивний закон — порушує аналогію із звичайною алгеброю у бік розширення можливостей алгебри висловлень. Так, зокрема, маємо

$$p_1p_2 \vee p_3p_4 \equiv (p_1 \vee p_3)\,(p_2 \vee p_3)\,(p_1 \vee p_4)\,(p_2 \vee p_4).$$

Тут диз'юнкція кон'юнкцій перетворюється в рівносильну в і д п о в і д н у кон'юнкцію диз'юнкцій.

Порушення аналогії із звичайною алгеброю особливо виявляється в зв'язку із законами ідемпотентності: $pp \equiv p$, $p \vee p \equiv p$. Ці закони означають, що в алгебрі логіки немає ні показників степенів, ні числових коефіцієнтів звичайної алгебри.

На відміну від кон'юнкції та диз'юнкції імплікація не має властивості комутативності, тобто не має місця логічна еквівалентність виразів

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \qquad (*)$$

і

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}. \qquad (**)$$

Так, при $|\mathfrak{A}| = 1$, $|\mathfrak{B}| = 0$ маємо $|\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}| = 0$, тоді як $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) = 1$.

Відносно схеми (*) схема (**) називається о б е р н е н о ю (так само схема (*) щодо схеми (**), схеми (*) і (**) є взаємообернені). Взаємообернені схеми нерівносильні між собою.

Наприклад, твердження «Якщо чотирикутник $ABCD$ — квадрат, то $ABCD$ — ромб» не рівносильне оберненому до нього твердженню «Якщо $ABCD$ — ромб, то $ABCD$ — квадрат». Разом з тим, згідно з рівносильністю (14), імплікація $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ рівносильна своїй контрапозиції $\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}$. Тому перше твердження логічно рівнозначне твердженню «Якщо чотирикутник $ABCD$ — не ромб, то $ABCD$ — не квадрат».

Зазначимо, що з рівносильності двох імплікацій не випливає рівносильність обернених даним імплікацій. Наведемо приклад.

Формули

$$p \to (q \to r) \qquad (26)$$

і

$$p \wedge q \to r \qquad (27)$$

рівносильні. Справді,

$$p \to (q \to r) \equiv \neg p \vee (q \to r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$$

і

$$p \wedge q \to r \equiv \neg (p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r,$$

тобто формули (26) і (27) рівносильні тій самій формулі, отже, вони рівносильні між собою. Оберненою імплікацією до імплікації (26) є

$$(q \to r) \to p, \tag{28}$$

а до імплікації (27) —

$$r \to p \wedge q. \tag{29}$$

Проте формули (28) і (29) не рівносильні, оскільки при $|p| = |q| = |r| = 0$ маємо $|(28)| = 0$, а $|(29)| = 1$.

Імплікація також не задовольняє властивості асоціативності, тобто,

$$p \to (q \to r) \not\equiv (p \to q) \to r.$$

Щоб довести це, досить покласти $|p| = |q| = |r| = 0$. Тоді $0 \to (0 \to 0) = 1$, $(0 \to 0) \to 0 = 0$.

Проте для еквіваленції властивості асоціативності і комутативності мають місце (пропонуємо читачеві довести це самостійно).

§ 4. Нормальні форми

У багатьох питаннях математичної логіки вживаються так звані кон'юнктивні і диз'юнктивні нормальні форми.

Означення. *Елементарною кон'юнкцією (диз'юнкцією) називається кон'юнкція (диз'юнкція) пропозиційних букв та їх заперечень (при цьому допускається повторення букв). Число пропозиційних букв в элементарній кон'юнкції (диз'юнкції) називають її рангом.*

Так, формула $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3$ — елементарна кон'юнкція рангу 3, формула $\neg p_1 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_2$ — елементарна диз'юнкція рангу 4, формулу p_i вважатимемо як елементарною кон'юнкцією, так і диз'юнкцією рангу 1, а формула $p_1 \vee p_2 \wedge p_3$ не є ні елементарною кон'юнкцією, ні диз'юнкцією.

Означення. *Диз'юнкція (кон'юнкція) n елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) називається n-членною диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою.* Скорочений запис відповідно днф і кнф. При $n = 1$ днф (кнф) перетворюється в елементарну кон'юнкцію (диз'юнкцію). Днф (кнф), рівносильна даній формулі алгебри висловлень $\mathfrak{A}$, називається днф $\mathfrak{A}$ (кнф $\mathfrak{A}$).

Приклади

1. Формула $(\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_3$ є кнф (кон'юнкція двох елементарних диз'юнкцій — $\neg p_1 \vee p_2$ і p_3).

2. Формула $\neg p_1 \vee p_2$ є кнф, у якої $n = 1$, бо $\neg p_1 \vee p_2$ — це елементарна диз'юнкція рангу 2; разом з тим, дана формула є і днф, в якої $n = 2$ (диз'юнкція двох елементарних кон'юнкцій $\neg p_1$ і p_2 рангу 1).

3. Формула $\neg (p_1 p_3 \vee p_2)$ не є ні кнф, ні днф.

4. У записі першого дистрибутивного закону ліва частина рівносильності $p \wedge (q \vee r)$ є кнф, а права частина — $p \wedge q \vee p \wedge r$ — днф. У записі другого дистрибутивного закону, навпаки, ліва частина є днф, а права частина — кнф

Доведемо, що для кожної формули алгебри висловлень $\mathfrak{A}$ існує кнф $\mathfrak{A}$ і днф $\mathfrak{A}$. Для цього задамо скінченну послідовність кроків, внаслідок яких, виходячи з $\mathfrak{A}$, дістанемо кнф $\mathfrak{A}$ або днф $\mathfrak{A}$ (конструктивне доведення).

1) Користуючись у разі необхідності рівносильностями $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \equiv \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, замінюємо $\mathfrak{A}$ рівносильною формулою $\mathfrak{A}_1$, в якій немає жодного символу логічної операції, відмінного від $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

2) Застосовуючи закони де Моргана і закон подвійного заперечення, дістанемо формулу $\mathfrak{A}_2$, в якій кожний символ заперечення стосується тільки тієї пропозиційної букви, яка безпосередньо за ним слідує, причому $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{A}$.

3) Щоб дістати днф $\mathfrak{A}$ (кнф $\mathfrak{A}$), досить, в разі необхідності, застосувати до $\mathfrak{A}_2$ перший (другий) дистрибутивний закон.

Приклади

1. Звести до кнф формулу $(pq \to r) \to \neg p$.

1. $(pq \to r) \to \neg p$;
2. $\neg (pq \to r) \vee \neg p$ (1, рівносильність (9));
3. $\neg (\neg (pq) \vee r) \vee \neg p$ (2, рівносильність (9));
4. $(\neg \neg (pq) \wedge \neg r) \vee \neg p$ (3, рівносильність (8));
5. $(pq \wedge \neg r) \vee \neg p$ (4, рівносильність (11));
6. $(pq \vee \neg p)(\neg r \vee \neg p)$ (5, рівносильність (6));
7. $(p \vee \neg p)(q \vee \neg p)(\neg r \vee \neg p)$ (6, рівносильність (6)).

Враховуючи транзитивність відношення рівносильності, маємо $(pq \to r) \to \neg p \equiv (p \vee \neg p)(q \vee \neg p)(\neg r \vee \neg p)$, тобто формула $(p \vee \neg p)(q \vee \neg p)(\neg r \vee \neg p)$ є кнф заданої формули.

2. Звести до днф формулу $p \leftrightarrow qr$.

1. $p \leftrightarrow qr$;
2. $(p \to qr) \wedge (qr \to p)$ (1, рівносильність (10));
3. $(\neg p \vee qr)(\neg (qr) \vee p)$ (2, рівносильність (9) двічі);
4. $(\neg p \vee qr)(\neg q \vee \neg r \vee p)$ (3, рівносильність (7));
5. $\neg p \neg q \vee qr \neg q \vee \neg p \neg r \vee qr \neg r \vee \neg pp \vee qrp$ (4, рівносильність (5)).

Для формули $(pq \to r) \to \neg p$ формула

$$(q \vee \neg p)(r \vee \neg p) \tag{30}$$

теж є кнф, бо (30) — кон'юнкція елементарних диз'юнкцій. Беручи до уваги закон виключеного третього і рівносильність (15), матимемо

$$(p \vee \neg p)(q \vee \neg p)(r \vee \neg p) \equiv$$
$$\equiv 1 \wedge (q \vee \neg p)(r \vee \neg p) \equiv (q \vee \neg p)(r \vee \neg p).$$

Формула (30) є, крім того, простішою, ніж перша кнф, її довжина менша (перша кнф має довжину 6, а довжина формули (30) є 4).

Аналогічно для формули $p \leftrightarrow qr$ можна побудувати простішу днф, а саме:

$$\neg p \neg q \vee \neg p \neg r \vee qrp, \tag{31}$$

оскільки

$$\neg p \neg q \vee qr \neg q \vee \neg p \neg r \vee qr \neg r \vee \neg pp \vee qrp \equiv$$
$$\equiv \neg p \neg q \vee (q \neg q) r \vee \neg p \neg r \vee q(\neg rr) \vee \neg pp \vee$$
$$\vee qrp \equiv \neg p \neg q \vee 0 \vee \neg p \neg r \vee 0 \vee 0 \vee qrp \equiv$$
$$\equiv \neg p \neg q \vee \neg p \neg r \vee qrp.$$

В останніх рівносильних перетвореннях послідовно застосовано комутативність і асоціативність кон'юнкції, той факт, що $|\mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{A}| = 0$ для довільної формули $\mathfrak{A}$ (закон суперечності), рівносильність $\mathfrak{A} \vee 0 \equiv \mathfrak{A}$. Довжина формули (31) становить 7, тоді як перша побудована днф мала довжину 15.

Існування для даної формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ відмінних між собою днф $\mathfrak{A}$ (кнф $\mathfrak{A}$) різного степеня складності висуває задачу знаходження серед них найпростішої в певному відношенні.

Означення. *Днф $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ називається* ***мінімальною,*** *якщо вона містить найменше число входжень пропозиційних змінних $p_1, \ldots, p_n$ порівняно з усіма іншими днф $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$.*

Аналогічне означення дається і для мінімальної кнф $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$.

Задача відшукання мінімальної нормальної форми для заданої формули алгебри висловлень є досить важливою. Її коротко називають **задачею мінімізації.**

На перший погляд здається, що задача мінімізації розв'язується перебором всіх днф для заданої формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ і виділенням серед них мінімальної (ми тут для короткості говоримо тільки про днф, але сказане далі стосується і кнф).

Проте число різних днф, що містять m змінних $p_1, \ldots, p_m$, дуже швидко зростає із збільшенням m, що робить метод перебору неефективним. Так, якщо обмежитися елементарними кон'юнкціями і днф без повторень однакових членів, то має місце таке твердження.

Теорема 1. *Число різних днф, складених з пропозиційних змінних $p_1, \ldots, p_m$, дорівнює 2^{3^m}.*

Доведення. Спочатку доведемо, що число різних елементарних кон'юнкцій, складених з m змінних $p_1, \ldots, p_m$, дорівнює 3^m. Справді, при $m = 1$ маємо три елементарних кон'юнкції: p_1, $\neg p_1$ і порожню. Припустимо, що твердження справджується при $m = k$. Тоді число різних елементарних кон'юнкцій, складених з $p_1, \ldots, p_k$, становить 3^k. Для p_{k+1} можливі три випадки: увійти в елементарну кон'юнкцію, складену з $p_1, \ldots p_k$: 1) без знака заперечення, 2) під знаком заперечення, 3) зовсім не входить до неї. Тому число різних елементарних кон'юнкцій, складених з $p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}$, дорівнюватиме $3^k \cdot 3 = 3^{k+1}$. Отже, за принципом математичної індукції, для кожного натурального m число різних елементарних кон'юнкцій, складених з $p_1, \ldots, p_m$, становить 3^m. Множина всіх днф, складених з m змінних $p_1, \ldots, p_m$, як множина всіх підмножин множини, що містить 3^m елементів, має потужність 2^{3^m}.

Таким чином, вже при $m = 2$ маємо $2^{3^2} = 512$ різних днф, а при $m = 3$ це число становитиме

$$2^{3^3} = 2^{27} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^7 > 1000 \cdot 1000 \cdot 125 =$$
$$= 125 \cdot 10^6.$$

Із вищесказаного випливає, що задачу мінімізації не можна розв'язати простим перебором формул. Ця задача не тривіальна. До розв'язування її є багато підходів, їй присвячено чимало спеціальних робіт. Проте ми не розглядатимемо тут цього питання. Докладно з ним можна ознайомитися у посібнику [9].

Нормальні форми (кон'юнктивна і диз'юнктивна) мають різні застосування. Одне з них, пов'язане з так званою проблемою вирішення в алгебрі висловлень, ми розглянемо.

Під проблемою вирішення для тавтологій розумітимемо питання: чи існує алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули $\mathfrak{A}$ алгебри висловлень визначити за скінченне число кроків, є $\mathfrak{A}$ тавтологією, чи ні.

Теорема 2. *Формула $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ алгебри висловлень є тавтологією тоді і тільки тоді, коли кожний кон'юнктивний член кнф $\mathfrak{A}$, тобто кожна елементарна диз'юнкція, що входить до кнф $\mathfrak{A}$, містить хоч одну пропозиційну букву p_i $(i = 1, \ldots, n)$ разом з її запереченням.*

Доведення «тоді». Дано, що кожний кон'юнктивний член кнф $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ для деякого i має вигляд $\ldots \vee p_i \vee \ldots \vee \neg p_i \vee \ldots$. Завдяки комутативності й асоціативності диз'юнкції можна замінити розглядуваний кон'юнктивний член рівносильним йому, який матиме вигляд $(\ldots(\vee p_i \vee \neg p_i)\ldots)$. Оскільки $|p_i \vee \neg p_i| = 1$ (закон виключеного третього) і $|\mathfrak{A} \vee 1| = 1$, то для довільної формули $\mathfrak{A}$ маємо, що істинісне значення даного кон'юнктивного члена дорівнює 1 незалежно від істинісних значень змінних $p_1, \ldots, p_n$. Цей результат стосується кожного кон'юнктивного члена кнф $\mathfrak{A}$. Отже, кнф $\mathfrak{A}| = 1$ на кожному наборі $(p_1, \ldots, p_n)$. Через те, що кнф $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ — тавтологія.

Доведення «тільки тоді». Дано, що $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ — тавтологія. Припустимо, що хоч один кон'юнктивний член кнф $\mathfrak{A}$ не містить жодної пропозиційної букви $p_1, \ldots, p_n$ разом з її запереченням (тобто супротивне тому, що треба довести). Розглянемо цей кон'юнктивний член, який позначимо K. Надамо кожній змінній p_l, яка входить в K під знаком заперечення, істинісне значення 1, а тим пропозиційним буквам p_k, які входять в K без знака заперечення,— істинісне значення 0. При цьому розподілі істинісних значень $|K| = 0$. Беручи до уваги рівносильність $\mathfrak{A} \wedge 0 = 0$ для довільної формули $\mathfrak{A}$, дістаємо $|$кнф $\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}| = 0$ при даному розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$. Це суперечить тому, що формула $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ є тавтологією. Таким чином, зроблене припущення — неправильне. Отже, якщо $\mathfrak{A}$ — тавтологія, то кожний кон'юнктивний член кнф $\mathfrak{A}$ містить хоч одну пропозиційну букву $p_1, \ldots, p_n$ разом з її запереченням.

Доведена теорема встановлює факт існування алгоритма для відповіді на питання — чи є довільно задана формула логіки висловлень тавтологією? Справді, для довільно заданої формули логіки висловлень $\mathfrak{A}$ досить: 1) звести $\mathfrak{A}$ до кнф; 2) перевірити, чи виконується у кнф $\mathfrak{A}$ необхідна і достатня умова попередньої теореми. Якщо так, то $\mathfrak{A}$ — тавтологія (достатність умови), якщо ж ні, то $\mathfrak{A}$ не є тавтологією (необхідність умови).

Таким чином, проблема вирішення в алгебрі висловлень є розв'язною, і притому в позитивному розумінні.

Приклади

1. Чи є формула $p \to pq$ тавтологією?

Зведемо задану формулу до кнф.

1. $p \to pq$;
2. $\neg p \vee pq$ (1, рівносильність (9));
3. $(\neg p \vee p)(\neg p \vee q)$ (2, рівносильність (6)).

Формула 3 є кнф для формули 1. Перший кон'юнктивний член, кнф 1, містить пропозиційну букву p разом з її запереченням, але другий кон'юнктивний член $\neg p \vee q$ не містить жодної такої букви. Отже, за попередньою теоремою, задана формула $p \to pq$ не є тавтологією.

2. Чи є формула

$$(p \to q) \vee (\neg p \to q) \tag{32}$$

тавтологією?

1. $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$;
2. $(\neg p \vee q) \vee (\neg\neg p \vee q)$ (1, рівносильність (9));
3. $\neg p \vee q \vee p$ (2, рівносильності (11) і (13)).

Остання формула є кнф формули (32), яка складається з одного кон'юнктивного члена (з однієї елементарної диз'юнкції). У цей кон'юнктивний член входить пропозиційна буква p разом з її запереченням. Отже, за попередньою теоремою, формула (32) — тавтологія.

3. Аналогічно тавтологією є формула

$$((p \to q) \vee p)(q \vee (q \to p), \tag{33}$$

оскільки вона рівносильна формулі $(\neg p \vee q \vee p)(q \vee \neg q \vee p)$ (на основі рівносильності (9)).

Аналогічно попередньому можна сформулювати теорему про необхідну і достатню умову для того, щоб дана формула $\mathfrak{A}$ логіки висловлень була суперечністю. Для цього досить у формулюванні останньої теореми замінити вирази «тавтологія», «кнф», «кон'юнктивний член» відповідно на вирази: «суперечність», «днф», «диз'юнктивний член». В результаті дістанемо теорему, довести яку пропонуємо читачеві самостійно.

Розглянуті вище нормальні форми не визначаються однозначно для заданої формули: для тієї самої формули алгебри висловлень існують істотно *різні* кнф і днф (звичайно, всі вони *рівносильні* між собою).

Виділимо тепер з класу нормальних форм для даної формули $\mathfrak{A}$ алгебри висловлень певний підклас, члени якого однозначно визначаються за даною формулою $\mathfrak{A}$ (з точністю до порядку запису). Введемо ряд означень.

Означення

1. *Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається правильною, якщо кожна пропозиційна змінна входить до неї не більше ніж один раз, включаючи також входження змінної під знаком заперечення.*

Наприклад, елементарна кон'юнкція $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_4$ є правильною, а елементарна диз'юнкція $p_2 \vee p_3 \vee \neg p_2 \vee p_1$ не є правильною.

2. *Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається повною щодо пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо кожна з цих змінних входить до неї або із знаком заперечення, або без нього.*

Так, щодо змінних p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 елементарна диз'юнкція $p_2 \vee p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee p_4$ є повною, а елементарна кон'юнкція $p_2 \wedge \neg p_1 \wedge p_5 \wedge p_4$ не є повною.

3. *Досконалою диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою щодо пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ називається днф (кнф), в якій всі елементарні кон'юнкції (диз'юнкції) правильні і повні щодо даного набору пропозиційних змінних.*

Досконалу диз'юнктивну (кон'юнктивну) нормальну форму позначатимемо надалі так: Ддннф (Дкнф).

Згідно з останнім означенням, днф $p_1 \neg p_2 p_3 \vee \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 p_2 p_3$ не є Ддиф щодо змінних p_1, p_2, p_3, бо вона містить елементарну кон'юнкцію $\neg p_1 p_2$, яка не є повною (немає змінної p_3). Так само не є Ддиф і формула $p_1 \neg p_2 p_3 \vee \neg p_1 p_2 \neg p_3 p_1$, оскільки друга елементарна кон'юнкція в ній не є правильною (змінна p_1 входить до неї двічі). Навпаки, днф $p_1 \neg p_2 p_3 \vee \vee \neg p_1 p_2 p_3 \vee \neg p_1 p_2 \neg p_3$ є досконалою щодо тих самих пропозиційних змінних p_1, p_2, p_3.

Покажемо на прикладах, як зводити формулу алгебри висловлень до рівносильної їй Ддиф і Дкнф.

Приклади

1. Перетворити днф $p_1 p_2 p_3 \neg p_2 \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 \neg p_2 p_3 \neg p_2$ у рівносильну їй Ддиф щодо змінних p_1, p_2, p_3.

1. $p_1 p_2 p_3 \neg p_2 \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 \neg p_2 p_3 \neg p_2$;
2. $p_1 (p_2 \neg p_2) p_3 \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 p_3 (\neg p_2 \neg p_2)$ (1, комутативний і асоціативний закони кон'юнкції);
3. $p_1 \wedge 0 \wedge p_3 \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 p_3 \neg p_2$ (2, закон суперечності і рівносильність (12));
4. $0 \vee \neg p_1 p_2 \vee p_1 \neg p_2 p_3$ (3, рівносильність $\mathfrak{A} \wedge 0 \equiv 0$);
5. $\neg p_1 p_2 \vee p_1 \neg p_2 p_3$ (4, рівносильність $\mathfrak{A} \vee 0 = \mathfrak{A}$);
6. $\neg p_1 p_2 (p_3 \vee \neg p_3) \vee p_1 \neg p_2 p_3$ (5, закон виключеного третього і рівносильність $\mathfrak{A} \wedge 1 = \mathfrak{A}$);
7. $\neg p_1 p_2 p_3 \vee \neg p_1 p_2 \neg p_3 \vee p_1 \neg p_2 p_3$ (6, перший дистрибутивний закон).

У останній днф кожний диз'юнктивний член є правильною і повною елементарною кон'юнкцією і жодна елементарна кон'юнкція не повторюється. Отже, ця формула і є потрібною Ддиф, яка рівносильна вихідній формулі за транзитивністю відношення рівносильності.

2. Перетворити кнф $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_1 \vee p_3) \times \times (p_2 \vee \neg p_3)$ у рівносильну їй Дкнф щодо змінних p_1, p_2, p_3.

1. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)(\neg p_1 \vee p_2 \vee p_1 \vee \neg p_3)(p_2 \vee \neg p_3)$;
2. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)((\neg p_1 \vee p_1) \vee p_2 \vee \neg p_3)(p_2 \vee \neg p_3)$ (1, комутативний і асоціативний закони диз'юнкції);
3. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)(1 \vee p_2 \vee \neg p_3)(p_2 \vee \neg p_3)$ (2, закон виключеного третього);
4. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge 1 \wedge (p_2 \vee \neg p_3)$ (3, рівносильність $\mathfrak{A} \vee 1 \equiv 1$);
5. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)(p_2 \vee \neg p_3)$ (4, рівносильність $\mathfrak{A} \wedge 1 \equiv \equiv \mathfrak{A}$);
6. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)((p_1 \neg p_1) \vee p_2 \vee \neg p_3)$ (5, закон суперечності і рівносильність $\mathfrak{A} \vee 0 \equiv \mathfrak{A}$);
7. $(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)((p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)(\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3)$ (6, другий дистрибутивний закон).

Оскільки в останній кнф усі кон'юнктивні члени є правильними і повними елементарними диз'юнкціями, жодна з яких не повторюється, то ця кнф і є шуканою Дкнф.

На основі розглянутих прикладів можна описати послідовність кроків, необхідних для зведення формули до Ддиф і Дкнф.

А. Щоб звести днф, в якій жодний диз'юнктивний член не повторюється, до Ддиф, треба:

1) Кожну неправильну елементарну кон'юнкцію, користуючись комутативним і асоціативним законами, законом суперечності і рівносильностями (12), (16), (18), перетворити в правильну.

2) До неповної елементарної кон'юнкції, яка не містить, наприклад, пропозиційної змінної p_i, приєднати кон'юнктивно диз'юнкцію $p_i \vee \neg p_i$, істинісне значення якої тотожно дорівнює 1, і розкрити дужки за першим дистрибутивним законом. У разі необхідності цей процес повторюється доти, поки кожна неповна елементарна кон'юнкція не перетвориться в повну.

3) Якщо в остаточній днф є однакові диз'юнктивні члени, то залишити тільки один з них.

Б. Щоб звести кнф, жодний кон'юнктивний член якої не повторюється, до Дкнф, треба:

1) Кожну неправильну елементарну диз'юнкцію, застосовуючи комутативний і асоціативний закони, закон виключеного третього та рівносильності (13), (17), (15), перетворити в правильну.

2) До неповної елементарної диз'юнкції, яка не містить, наприклад, змінної p_i, приєднати диз'юнктивно кон'юнкцію $p_i \wedge \neg p_i$ (її істинісне значення тотожно дорівнює 0) і застосувати другий дистрибутивний закон. У разі необхідності цей процес повторюється, як у випадку зведення до Ддиф.

3) Якщо в остаточній кнф є однакові кон'юнктивні члени, то залишити тільки один з них.

Досконалі нормальні форми знаходять широке застосування в різних питаннях, зокрема при визначенні тавтологій.

Теорема 3. *Для того щоб формула $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ логіки висловлень була тавтологією, необхідно і достатньо, щоб Ддиф $\mathfrak{A}$ містила 2^n елементарних кон'юнкцій (тобто всі можливі елементарні кон'юнкції, що містять змінні $p_1, \ldots, p_n$).*

Доведення. *Необхідність.* Дано, що $|\mathfrak{A}| = 1$ при всіх розподілах істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$. Припустимо, що Ддиф $\mathfrak{A}$ не містить 2^n елементарних кон'юнкцій. Тоді знайдеться така елементарна кон'юнкція, складена з $p_1, \ldots, p_n$, яка не входить в Ддиф $\mathfrak{A}$. Позначимо її через K. Надамо кожній змінній, яка входить в K без знака заперечення, значення 1, а кожній змінній, що входить в K із знаком заперечення,— значення 0. При такому розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$ матимемо $|K| = 1$. Тоді всі елементарні кон'юнкції, що входять в Ддиф $\mathfrak{A}$, відрізняючись від K хоч одним логічним множником, матимуть значення 0 при даному розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$. Звідси $|\text{Ддиф } \mathfrak{A}| = 0$ на цьому наборі, що суперечить умові теореми. Необхідність доведено.

Достатність. За умовою Ддиф $\mathfrak{A}$ містить 2^n елементарних кон'юнкцій. Зазначимо, що число всіх різних наборів $p_1, \ldots, p_n$ теж становить 2^n. Розглянемо довільний набір значень $p_1, \ldots, p_n$, тобто довільну упорядковану n-ку з нулів та одиниць. Поставимо їй у взаємно-однозначну відповідність елементарну кон'юнкцію K_1, складену з $p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ за таким правилом:

одиниці на i-му місці в n-ці відповідає p_i в K_1,
нулю на i-му місці в n-ці відповідає $\neg p_i$ в K_1.

Очевидно, на розглядуваному наборі значень $p_i, \ldots, p_n$ маємо $|K_1| = 1$. Отже, $|\text{Ддиф } \mathfrak{A}| = 1$, бо K_1 входить як диз'юнктивний член в Ддиф $\mathfrak{A}$. Беручи до уваги довільність розглянутого набору, дійдемо висновку, що $|\text{Ддиф } \mathfrak{A}| = 1$ при кожному розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$. Оскільки $\mathfrak{A} \equiv$ Ддиф $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ — тавтологія. Достатність доведено.

Розглянута теорема дає змогу за даною Ддиф відразу визначити, є вона тавтологією чи ні. Для цього досить підрахувати число диз'юнктивних членів. Так, Ддиф $p_1p_2p_3 \vee \neg p_1 \neg p_2p_3 \vee p_1p_2 \neg p_3$ не може бути тавтологією, оскільки в ній міститься тільки чотири диз'юнктивних члена, а для того щоб вона була тавтологією, вона повинна містити $2^3 = 8$ диз'юнктивних членів, тобто 8 елементарних кон'юнкцій.

Як бачимо, тавтологія у формі Ддиф щодо змінних $p_1, \ldots, p_n$ при заданому n єдина (з точністю до порядку членів). Ця властивість єдиності поширюється не тільки на тавтології. Про це мова йтиме в § 5.

§ 5. Булеві функції. Питання функціональної повноти

Означення. *Булевою називається функція, значення якої, як і значення всіх її аргументів, належать заданій двохелементній множині.*

Зафіксуємо цю двохелементну множину як $\{0,1\}$. Тоді булева функція від n аргументів (n-місна) є відображенням множини $\{0, 1\}^n$ на $\{0, 1\}$. Таким чином, функції істинності алгебри висловлень є булевими функціями.

Примітка. n-місну булеву функцію можна означити більш загально як відображення множини A^n на $\{0, 1\}$, де A — множина-носій булевої алгебри. Носій скінченної булевої алгебри містить точно 2^k елементів (k — довільне натуральне число). Найважливішим є випадок, коли $k = 1$, тобто випадок бінарної булевої алгебри. Саме його ми й розглядатимемо. Тоді клас булевих функцій збігається з класом функцій істинності алгебри висловлень.

Булеву n-місну функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна задати:
а) безпосередньо таблицею істинності, на якій точно

визначено, яке значення f відповідає кожній окремій упорядкованій n-ці (набору) значень аргументів $x_1, \ldots, x_n$;

б) формулою, в якій задано операції, що їх треба виконати над значеннями аргументів $x_1, \ldots, x_n$, щоб дістати значення функції. [1]

Підрахуємо число різних булевих n-місних функцій. Число всіх наборів $(x_1, \ldots, x_n)$ дорівнює числу розміщень з повторенням з двох елементів 0 і 1 по n, тобто 2^n. А число всіх n-місних булевих функцій дорівнює числу розміщень з повтореннями з тих самих двох елементів по 2^n, тобто 2^{2^n}.

Зокрема, число різних одномісних булевих функцій становить $2^{2^1} = 4$, для двомісних булевих функцій це число дорівнює $2^{2^2} = 16$, для трьомісних — 256, для чотиримісних — 65 536. Отже, число різних n-місних булевих функцій дуже швидко зростає із збільшенням n, а тому таблиці істинності при $n > 3$ стають дуже громіздкими і практично мало застосовними.

Проте для $n = 1$ і $n = 2$ легко побудувати таблиці істинності для всіх булевих функцій бінарної булевої алгебри.

При $n = 1$ чотири одномісних булевих функцій задаються так:

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут f_1, f_4 — константи, $f_2(x_1) = x_1$, $f_3(x_1) = \neg x_1$.

При $n = 2$ 16 двомісних булевих функцій зображаються таблицею

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

[1] Булеву функцію, як і всяку функцію, можна задати словесно. Наприклад, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 \text{ на наборі } (1, 1, 1), \\ 0 \text{ на всіх інших наборах.} \end{cases}$

Кожна з функцій $f_1 - f_{16}$ зображається відповідно формулою алгебри висловлень.

f_1 і f_{16} — константи, $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ — кон'юнкція, $f_3(x_1, x_2) = \neg(x_1 \to x_2)$ — антиімплікація, $f_4(x_1, x_2) = x_1$, $f_5(x_1, x_2) = \neg(x_2 \to x_1)$ — обернена антиімплікація, $f_6(x_1, x_2) = x_2$, $f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ антиеквіваленція, $f_8(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $f_9(x_1, x_2) = \neg(x_1 \vee x_2)$ — антидиз'юнкція, або стрілка Пірса, $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$, $f_{11}(x_1, x_2) = \neg x_2$, $f_{12}(x_1, x_2) = x_2 \to x_1$ — обернена імплікація, $f_{13}(x_1, x_2) = \neg x_1$, $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$, $f_{15}(x_1, x_2) = \neg(x_1 x_2)$ — антикон'юнкція, або штрих Шеффера.

Кожній формулі алгебри висловлень відповідає булева функція (функція істинності). Чи має місце обернене твердження, тобто, чи для кожної булевої функції існує формула алгебри висловлень, яка зображає або, як кажуть, реалізує цю функцію? Доведемо сильніше твердження.

Теорема 1. *Кожна булева функція зображується формулою алгебри висловлень, яка містить символи не більш ніж трьох логічних операцій — кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення.*

Доведення. Нехай $f(x_1, \ldots, x_n)$ — довільна функція істинності, тобто кожному з 2^n наборів значень аргументів відповідає значення 0 чи 1. Пронумеруємо всі набори і j-му набору $(1 \leqslant j \leqslant 2^n)$ поставимо у відповідність кон'юнкцію

$$K_j = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\sigma}, \text{ де } x_i^{\sigma} = \begin{cases} x_i, & \text{якщо } |x_i| = 1, \\ \neg x_i, & \text{якщо } |x_i| = 0. \end{cases}$$

Можна вважати, що хоча б на одному наборі f набуває значення 1, у противному разі f тотожно дорівнює 0 і тоді реалізується, наприклад, формулою $x_1 \wedge \neg x_1$, що доводить теорему для випадку, коли f тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо довільний набір, на якому значення f дорівнює 1. Якщо номер цього набору в нашій нумерації буде t, то $|K_t| = 1$ на цьому наборі (адже всі логічні множники в K_t мають значення 1 на t-му наборі), а на всіх інших наборах $|K_t| = 0$, бо всі інші набори відрізняються від t-го набору хоча б одним значенням x.

Утворимо тепер диз'юнкцію D всіх тих K_j, які відповідають всім наборам, на яких f набирає значення 1. Ця диз'юнкція і є шуканою формулою, яка реалізує f.

Справді, для кожного набору, на якому значення f дорівнює 1, в D знайдеться елементарна кон'юнкція K, така, що $|K| = 1$ на цьому наборі. Отже, і $|D| = 1$ (як диз'юнкція, один член якої має значення «істинність»), і на кожному наборі, де $|f| = 0$, всі елементарні кон'юнкції, що входять в D як диз'юнктивні члени, набирають значення 0, тому й $|D| = 0$ на цьому наборі.

Таким чином, формула алгебри висловлень D реалізує функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$, причому в формулу D не входять інші символи логічних операцій, крім $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Теорему доведено.

Оскільки D — диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, причому всі ці кон'юнкції — правильні, повні і не повторюються, то D є досконалою диз'юнктивною нормальною формою.

Наслідок. *Для кожної булевої функції, відмінної від тотожного нуля, існує її зображення у вигляді Ддиф.*

Доведення теореми дає змогу визначити алгоритм побудови Ддиф для заданої булевої функції, відмінної від тотожного нуля.

Приклад. Булева функція задана таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Написати Ддиф, яка реалізує $f(x_1, x_2, x_3)$.

Розв'язання. Виділимо набори з номерами 1, 2, 4, 7, на яких f набуває значення 1, і утворимо для кожного набору відповідну кон'юнкцію K_j. Такими наборами є перший, другий, четвертий, сьомий. Відповідні їм кон'юнкції K_i мають вигляд

$$K_1 = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3, \quad K_2 = \neg x_1 \neg x_2 x_3,$$
$$K_4 = \neg x_1 x_2 x_3, \qquad K_7 = x_1 x_2 \neg x_3.$$

Кожна з цих кон'юнкцій набуває значення «1» тільки на одному, відповідному їй наборі, на всіх інших наборах вона дорівнює 0. Їх диз'юнкція D така: $\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3$. $|D| = 1$ на першому, другому, четвертому, сьомому наборах, де значення f дорівнює 1, і $|D| = 0$ на всіх інших наборах, де f теж має значення 0. Отже, днф D реалізує задану булеву функцію.

***Теорема 2.** Зображення булевої функції Ддиф є єдиним (з точністю до порядку членів).*

Доведення. Підрахуємо число елементарних повних і правильних кон'юнкцій від n пропозиційних змінних $x_1, \ldots, x_n$, множину яких позначимо K^*. Оскільки кожна із змінних $x_1, \ldots, x_n$ неодмінно зустрічається в кожній із згаданих елементарних кон'юнкцій в одному з двох станів — або із знаком заперечення або без нього («або» тут роздільне),— то число всіх елементарних повних і правильних кон'юнкцій, складених з $x_1, \ldots, x_n$, дорівнює числу розміщень з повторенням з 2 елементів по n, тобто 2^n. Число всіх Ддиф, складених з $x_1, \ldots, x_n$, дорівнює числу всіх підмножин множини K^*, зменшеному на одиницю, тобто $2^{2^n} - 1$ (віднімання одиниці тут обумовлено тим, що множина всіх підмножин включає порожню множину, а поняття порожньої Ддиф не введено).

З другого боку, число всіх булевих функцій від змінних $x_1, \ldots, x_n$, відмінних від тотожного нуля, теж дорівнює $2^{2^n} - 1$.

Тепер припустимо, що для деякої $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ існує більш ніж одна Ддиф, яка реалізує f_0. Звідси випливає, що хоча б для однієї $f(x_1, \ldots, x_n)$, відмінної від тотожного нуля, не існує Ддиф, яка її зображає, що суперечить попередній теоремі. Таким чином, для кожної булевої функції існує не більш ніж одна Ддиф, що її реалізує, а з урахуванням попередньої теореми — точно одна Ддиф.

Доведена властивість єдиності є характерною для Ддиф і виділяє їх із класу днф.

Досконалі нормальні форми поряд з таблицями істинності є засобом задання булевих функцій, причому часто вони виявляються найекономічнішим і найзручнішим способом. Наприклад, формула $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \ldots \wedge x_{16}$ задає булеву функцію $f(x_1, \ldots, x_{16})$. Ця формула є Ддиф, що складається з одного диз'юнктивного члена, вона містить 31 символ, а таблиця істинності для неї налічує $2^{16} = 65\,536$ рядків.

Звичайно, Ддиф для заданої булевої функції не має властивості мінімальності щодо інших днф. Дуже часто

Ддиф, яка реалізує дану булеву функцію, має більшу довжину (є складнішою), ніж інша днф, що теж зображає дану функцію.

Так, булева функція $f(x_1, x_2, x_3)$, задана вище таблицею істинності, реалізується Ддиф, довжина якої 12. Проте дуже легко перетворити її в рівносильну днф, довжина якої становить 8. Справді,

$$\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \equiv$$
$$\equiv \neg x_1 \neg x_2 (x_3 \vee \neg x_3) \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \equiv$$
$$\equiv (\neg x_1 \neg x_2 \wedge 1) \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3 \equiv$$
$$\equiv \neg x_1 \neg x_2 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \neg x_3$$

(тут послідовно застосовано асоціативний закон, перший дистрибутивний закон виключеного третього, закон сталих (15) і теорему про заміну).

Булеві функції допускають аналогічне зображення і через Дкнф, а саме, має місце така теорема.

Теорема 3. *Кожна булева функція, відмінна від тотожної одиниці, зображається через Дкнф, яка є єдиною (з точністю до порядку членів).*

Д о в е д е н н я. Нехай f — довільна булева функція, відмінна від тотожної одиниці. Тоді $\neg f$ відмінна від тотожного нуля, а тому має єдине зображення через Ддиф, яке позначимо D. Зображенням булевої функції $\neg\neg f$ є формула алгебри висловлень $\neg D$. Згідно з законами де Моргана і подвійного заперечення, $\neg D$ рівносильна деякій Дкнф. Оскільки $\neg\neg f$ рівносильне з f, то теорему доведено.

Приклад. Нехай $f(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$\neg$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Зобразити задану функцію через Дкнф.

Р о з в' я з а н н я. Маючи на увазі, що $f(x_1, x_2, x_3)$ треба реалізувати у вигляді Дкнф, виписуємо поруч із стовпчиком значень f аналогічний стовпчик для $\neg f$.

Ддиф, що реалізує $\neg f$, згідно з алгоритмом, визначеним на с. 52, матиме вигляд

$$D = \neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3.$$

Тоді $\neg\neg f$, яка збігається з f, зобразиться формулою $\neg D$, тобто $\neg(\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \vee \neg x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3)$, що є рівносильною формулі $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$. Тут використано закони де Моргана і закон подвійного заперечення. Оскільки остання формула є Дкнф, то вона є шуканим зображенням $f(x_1, x_2, x_3)$.

Булева функція, відмінна від тотожного нуля і одиниці, допускає зображення і через Ддиф, і через Дкнф. Як вибрати з них простіше? Очевидно, для булевої функції, яка набуває значення 1 (0) менш ніж на половині всіх наборів, простішим є зображення у вигляді Ддиф (Дкнф).

Наприклад, для булевої функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданої приписом $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ на наборі (0, 1, 0, 1), $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ на всіх інших наборах, Ддиф, що її реалізує, складається тільки з одного диз'юнктивного члена $\neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4$ (довжина формули дорівнює 4). Поряд з цим, зображення тієї самої функції у вигляді Дкнф містить 15 кон'юнктивних членів (довжина її дорівнює 60). Нехай $f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$ на наборах (0, 1, 1) і (1, 0, 1), а на всіх інших наборах $f(x_1, x_2, x_3) = 1$. Цю функцію краще реалізувати через Дкнф, яка матиме вигляд $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ (довжина формули дорівнює 6 при 2 кон'юнктивних членах). Проте Ддиф для даної функції містить 6 диз'юнктивних членів і має довжину формули 18.

Зображення довільної булевої функції формулою алгебри висловлень, що містить символи тільки трьох операцій, обумовлює введення нового поняття функціональної повноти.

Справді, не всяка система операцій алгебри логіки має властивість, доведену вище для системи $\{\wedge, \vee, \neg\}$. Наприклад, через операції алгебри висловлень $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ не можна зобразити в с і булеві функції, оскільки не існує такого зображення для булевої функції f^*, яка мала б значення 0 на наборі (1, 1, ..., 1), що складається з одних одиниць. На цьому наборі значення кожної з операцій $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, а отже, і значення функції f^*, дорівнює 1, що суперечить її означенню.

Означення. *Система операцій алгебри висловлень називається* ф у н к ц і о н а л ь н о п о в н о ю, *якщо кожну булеву функцію можна зобразити формулою, яка не містить жодних символів логічних операцій, крім тих, що входять у дану систему.*

Використовуючи це означення, теорему 1 можна сформулювати так:

Система операцій $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *є функціонально повною.*

Сформулюємо тепер теорему, яка встановлює факт існування деяких інших важливих функціонально повних систем операцій алгебри висловлень.

Теорема 4. *Наступні системи операцій є функціонально повними:* 1) $\{\neg, \vee\}$, 2) $\{\neg, \wedge\}$, 3) $\{\neg, \rightarrow\}$, 4) $\{\wedge, \oplus, 1\}$, 5) $\{\rightarrow, 0\}$, 6) {Заперечення кон'юнкції}, 7) {Заперечення диз'юнкції}.

Д о в е д е н н я. 1) Оскільки система $\{\neg, \wedge, \vee\}$ — функціонально повна, то досить показати, що кон'юнкцію можна виразити формулою алгебри логіки, яка не містить інших символів операцій, крім «$\neg$» і «$\vee$». Останній факт встановлюється рівносильністю $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$, яку дістаємо застосуванням в правій частині закону де Моргана і закону подвійного заперечення.

2) Доводимо аналогічно 1) з тією відміною, що береться до уваги рівносильність $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$, яка дає змогу зобразити диз'юнкцію формулою, що не містить інших символів логічних операцій, крім «$\neg$» і «$\wedge$».

3) Доводимо аналогічно, скориставшись рівносильністю $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$, яка дає змогу виразити диз'юнкцію формулою, що не містить інших символів логічних операцій, крім «$\neg$» і «$\rightarrow$».

4) Доведення зводиться до доведення 2), бо кон'юнкція входить в систему 4), а заперечення $\neg p$ виражається через константу 1 і додавання по модулю 2 — формулою $1 \oplus p$. (Систему $\{1, \oplus, 1\}$ прийнято як основу в алгебрі Жегалкіна, [8].)

5) Оскільки імплікація входить в систему, то досить виразити в термінах останньої і заперечення. Це здійснюється рівносильністю $\neg p \equiv p \rightarrow 0$, яка перевіряється безпосередньо (справді, при $|p| = 1$ обидві частини мають значення 0, а при $|p| = 0$ — значення 1).

6) Досить показати, що через заперечення кон'юнкції (штрих Шеффера) можна виразити і заперечення, і кон'юнкцію. Позначимо $\neg(p \wedge q)$ через $p | q$. Маємо

$$p | p = \neg(p \wedge p) \equiv \neg p;$$

$$(p | q) | (p | q) \equiv \neg(p | q) = \neg\neg(p \wedge q) \equiv p \wedge q.$$

Таким чином, і заперечення, і кон'юнкція зображаються через штрих Шеффера. Згідно з 2), система $\{ | \}$ — функціонально повна.

7) Покажемо, що через заперечення диз'юнкції (стрілку Пірса) можна виразити і заперечення, і диз'юнкцію. Позначимо $\neg(p \vee q)$ через $p \uparrow q$. Маємо

$$p \uparrow p = \neg(p \vee p) \equiv \neg p;$$

$$(p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q) \equiv \neg(p \uparrow q) = \neg\neg(p \vee q) \equiv p \vee q.$$

Отже, заперечення і диз'юнкція зображаються через стрілку Пірса, і, згідно з 1), система $\{\uparrow\}$ — функціонально повна.

У випадках 6) і 7) функціонально повна система складається тільки з однієї операції. Можна довести, що інших функціонально повних систем алгебри висловлень, які містять лише одну бінарну операцію, немає ([21]). Останнє твердження перестає бути правильним, якщо допустити також тернарні операції ([33]).

Наведемо ще приклад функціонально неповної системи. Такою є система $\{\neg, \leftrightarrow\}$. Справді, через заперечення і еквіваленцію можна виразити тільки булеві функції, стовпчик значень яких має, як у зазначених операціях, однакову кількість нулів і одиниць, а, наприклад, булева функція, що зображається формулою $p \rightarrow q$, такої властивості не має, отже, вона не може бути виражена через функції даної системи.

§ 6. Логічне слідування на базі алгебри висловлень

Однією з центральних задач логіки є аналіз міркувань. Міркування являє собою ланцюг тверджень, кожне з яких є або вихідним, або слідує із встановлених раніше тверджень. Саме так ми доводимо математичні теореми, причому термін «слідує» не з'ясовується, а вважається відомим і цілком зрозумілим з логіки.

Перейдемо до розгляду цього питання. Перш за все сформулюємо означення.

Означення 1. *Нехай задано формули алгебри висловлень $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, з яких хоча б одна містить пропозиційні змінні $p_1, \ldots, p_n$.*

Говорять, що формула $\mathfrak{B}$ с л і д у є л о г і ч н о з формули $\mathfrak{A}$ (на базі алгебри висловлень), якщо $\mathfrak{B}$ набуває значення 1 при кожному розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$, при якому $\mathfrak{A}$ має значення 1. При цьому $\mathfrak{A}$ називається ***п о с и л к о ю, п р и п у щ е н н я м*** *або* ***г і п о т е з о ю,*** *а $\mathfrak{B}$ —* ***л о г і ч н и м в и с н о в к о м.***

Дамо більш загальне означення логічного слідування для випадку, коли число посилок дорівнює m, де $m \geqslant 1$.

Означення 2. *Говорять, що формула $\mathfrak{B}$ с л і д у є л о г і ч н о з посилок $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, якщо $\mathfrak{B}$ набуває значення 1 при кожному такому розподілі істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$, при якому всі посилки $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ мають значення* 1.

Той факт, що $\mathfrak{B}$ слідує з посилок $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, позначають $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$. Для порожньої множини посилок маємо $\models \mathfrak{B}$, що цілком узгоджується з попереднім тлумаченням запису «$\models \mathfrak{B}$» як скороченням твердження «$\mathfrak{B}$ є тавтологією».

На практиці відношення логічного слідування часто застосовується не до формул, а до висловлень, сформульованих у природній мові, збагаченій відповідними символами.

Означення 3. *Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ — висловлення, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ — відповідно їх логічні структури (форми). Говорять, що висловлення B логічно слідує з висловлень $A_1, \ldots, A_n$ (на базі логіки висловлень) тоді і тільки тоді, коли формула алгебри висловлень $\mathfrak{B}$ логічно слідує з формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ (на базі алгебри висловлень).*

Приклад. Нехай формули алгебри висловлень $\mathfrak{A}_1(p_1, p_2, p_3)$, $\mathfrak{A}_2(p_1, p_2, p_3)$, $\mathfrak{A}_3(p_1, p_2, p_3)$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ задано такою таблицею істинності (с. 59):

За означенням 2 маємо $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \models \mathfrak{B}_1$, бо в усіх тих рядках таблиці, де значення всіх трьох посилок дорівнює 1, (в другому і сьомому рядках) $\mathfrak{B}_1$ теж має значення 1. Крім того, $\mathfrak{B}_2$ не слідує з тих самих посилок, оскільки $\mathfrak{B}_2$ хоч і має лише в одному рядку таблиці значення 0, але це — один з тих рядків, де в с і посилки набувають значення 1. (Звернемо увагу на те, що за означенням 2 досить розглядати лише ті рядки таблиці істинності, на яких всі посилки одночасно мають значення 1).

p_1	p_2	p_3	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{A}_2$	$\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{B}_2$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Символ логічного слідування $\models$ принципіально відрізняється від символу імплікації, який в записі $p \to q$ входить в формулу алгебри висловлення як її складова частина. Проте перший символ не є частиною жодної формули алгебри висловлень, він тільки стверджує щось про формули. Знак імплікації — це символ о п е р а ц і ї, яка породжує нову формулу, а символ логічного слідування — це символ в і д н о ш е н н я між формулами. Символ $\to$ належить до предметної мови алгебри висловлень, а знак $\models$ належить м е т а м о в і, в якій трактуються властивості формул алгебри висловлень і відношення між ними. Незважаючи на це, між зазначеними символами існує тісний і дуже істотний зв'язок, до розгляду якого ми й перейдемо.

Означення 1—3 дають алгоритм перевірки логічного слідування даної формули з формул-посилок тільки у випадку, коли для цих формул задано їх таблиці істинності. Ось чому значно зменшується можливість безпосереднього практичного застосування цих означень. Тому важливе значення має наступне твердження.

Теорема 1. *Формула $\mathfrak{B}$ логічно слідує з посилок $\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots p_n), \ldots \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n)$ (на базі алгебри висловлень) тоді і тільки тоді, коли формула $\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots, p_n) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n) \to \mathfrak{B}$ є тавтологією.*

Д о в е д е н н я «т о д і». Дано $\models \mathfrak{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}$.

Довести $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$.

Розглянемо довільний розподіл істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$, при якому в с і $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ набувають значення 1. Тоді $|\mathfrak{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m| = 1$ на розглядуваному наборі значень $p_1, \ldots, p_n$. Значення $\mathfrak{B}$ на цьому наборі не може бути нулем, бо, за означенням імплікації, ми мали б $|\mathfrak{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}| = 0$ на розглядуваному наборі, що суперечить умові. Отже, на довільному наборі, де в с і посилки $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, ..., m$) набувають значення 1, $|\mathfrak{B}| = 1$. Це означає, що $\mathfrak{B}$ логічно слідує з посилок $\mathfrak{A}_1, ... \mathfrak{A}_m$.

Д о в е д е н н я «т і л ь к и т о д і». Дано

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Довести

$$\models \mathfrak{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}. \tag{2}$$

Припустимо, що (2) не є тавтологією. Тоді знайдеться хоча б один набір значень $p_1, ..., p_n$, на якому

$$|\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}| = 0. \tag{3}$$

На цьому наборі, за означенням імплікації, з (3) маємо

$$|\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m| = 1 \tag{4}$$

і

$$|\mathfrak{B}| = 0. \tag{5}$$

З рівності (4) слідує, що в с і $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, ..., m$) на цьому наборі мають значення 1. Враховуючи це і рівність (5), дістаємо, що $\mathfrak{B}$ не слідує логічно з $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_m$. Отже, ми зайшли у суперечність з (1). Наше припущення неправильне, тобто співвідношення (2) доведено.

Принципіальне значення доведеної теореми полягає в тому, що вона зводить питання про відношення логічного слідування, сформульоване в термінах метамови, до аналізу певної формули алгебри висловлень. Крім того, з точки зору цієї теореми з'ясовується важлива роль тавтологій як засобу встановлення факту логічного слідування — центрального поняття логіки.

З доведеної теореми, як і з означення логічного слідування, випливають безпосередньо такі його властивості:

1. *Якщо* $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_1 \models \mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{A}_1, ...$ $..., \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{A}_2$ (в л а с т и в і с т ь т р а н з и т и в н о с т і).

2. *Якщо* $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$ і $\mathfrak{A}$ — *довільна формула алгебри висловлень, то* $\mathfrak{A}_1, ..., \mathfrak{A}_m, \mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$ *(приєднання довільної формули алгебри висловлень до числа посилок не порушує даного логічного слідування).*

3. *Якщо* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{A}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$ *і* $\models \mathfrak{A}_i$, то $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{i-1}, \mathfrak{A}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{A}_m \models \mathfrak{B}$ *(вилучення з числа посилок формули, яка є тавтологією, не порушує даного логічного слідування).*

Пропонуємо читачеві самостійно довести ці властивості.

Наведемо тепер кілька схем логічного слідування ($\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — назви довільних формул алгебри висловлень).

1°. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$. Для доведення цього слідування покажемо, що має місце тавтологія

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}. \tag{6}$$

Припустимо, що (6) не є тавтологією. Тоді знайдеться такий розподіл істинісних значень пропозиційних змінних, що входять в формули $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, при якому $|(6)| = 0$. Розглянемо цей розподіл. З означення імплікації і кон'юнкції

$$|\mathfrak{B}| = 0, \tag{7}$$

$$|\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}| = 1, \tag{8}$$

$$|\mathfrak{A}| = 1. \tag{9}$$

З рівностей (7) і (9) маємо $|\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}| = 0$, що суперечить співвідношенню (8). Отже, формула (6) — тавтологія, а тому за попередньою теоремою слідування 1) доведено.

Слідування 1° має широкі застосування в логіці. Такі слідування називатимемо п р а в и л а м и в и в о д у. Зокрема, правило 1) має кілька назв: правило висновку, правило відокремлення чи відривання, а також «modus ponens» (від латинських слів: modus — спосіб, ponens — що стверджує). Скорочено це правило виводу позначають через MP.

Правило MP застосовують настільки часто, його використання стало таким звичним, що навіть не помічають цього кроку міркування. Наприклад, рідко коли повністю проводять таке міркування. З двох тверджень «Якщо завтра неділя, то завтра вихідний день» і «Завтра неділя» слідує «Завтра вихідний день».

2°. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{B} \models \neg\mathfrak{A}$. Доведення слідування 2° аналогічне доведенню 1°. Це правило виводу називається modus tollens (латинське слово tollens означає «заперечувальний») і позначається MT.

Наведемо приклад застосування правил MT. Маємо два істинних твердження «Якщо 1262 кратне 28, то 1262 кратне 4» і «1262 не кратне 4». Отже, за правилом MT, 1262 не кратне 28.

Правило МТ застосовується в деяких доведеннях від супротивного. Його схема виражається словами: «Нехай p, тоді q; але q не має місця, отже, $\neg p$».

Приклад. Довести, що з посилок $p \to q$, q не слідує p і що з посилок $p \to q$, $\neg p$ не слідує $\neg q$.

Доведення. Досить показати, що формули

$$(p \to q) \wedge q \to p \quad (10)$$

і

$$(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q \quad (11)$$

не є тавтологіями. Це слідує з того, що при $|p| = 0, |q| = 1$ $|(10)| = |(11)| = 0$.

З цими схемами «схожі» такі неправильні схеми:

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \models \mathfrak{A}\ (?)$$

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \neg \mathfrak{A} \models \neg \mathfrak{B}\ (?)$$

Ця зовнішня схожість правильних і неправильних схем, незважаючи на їх істотну відмінність, часто буває джерелом різних помилок.

Прикладом такої помилки є «міркування». Дано: 1) Якщо $\triangle ABC$ — прямокутний (p), то квадрат більшої його сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін (q).

2) Квадрат більшої сторони $\triangle ABC$ дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

З тверджень 1) і 2) логічно слідує, що «$\triangle ABC$ — прямокутний». (?).

Висновок тут зроблено неправильно, бо з $p \to q$ і q зовсім не слідує p. Така помилка стає більш небезпечною в зв'язку з тим, що в даному випадку p виявляється фактично істинним, але це не випливає з наведених посилок. Справа в тому, що в даному разі твердження, обернене до твердження 1), про яке в посилках не згадувалося, виявляється теж істинним, а з $q \to p$ і q за МР, звичайно, слідує p.

При наявності такої помилки для з'ясування її логічної суті доцільно навести контрприклад, в якому $|p \to q| = |q| = 1$, а $|p| = 0$. Нехай замість p взято висловлення «12 ділить 136», а замість q — «4 ділить 136». Висловлення $p \to q$ і q — обидва істинні, тоді як p — хибне (12 не ділить 136).

З деяких тавтологій, які являють собою імплікації, за допомогою правила МР можна дістати нові важливі правила виводу.

Точніше, якщо $\models \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$. Справді,

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \models \mathfrak{B} \quad (12)$$

за МР. Вилучивши з числа посилок в (12) тавтологічну формулу $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, що не порушує слідування (властивість 3 відношення $\models$), дістаємо

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}.$$

Продовжимо тепер розгляд деяких правил виводу.

3°. З тавтології $p \wedge q \to p$ підстановкою довільних формул алгебри висловлень $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ замість p і q відповідно дістанемо $\models \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, звідки $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \models \mathfrak{A}$. Аналогічно

$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \models \mathfrak{B}$ — правило вилучення кон'юнкції — ОК.[1]

4°. Аналогічно попередньому з тавтології $p \to p \vee q$ дістаємо $\mathfrak{A} \models \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ і так само

$\mathfrak{B} \models \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — правило введення диз'юнкції — ВД.

5°. З тавтології $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ маємо

$(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2),\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \models \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3$ — правило силогізму.

6°. З тавтології $p \wedge q \to p \wedge q$ дістаємо

$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B} \models \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (правило введення кон'юнкції — ВК).

7°. З тавтології $(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$ маємо

$\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \models \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3$ — правило вилучення диз'юнкції — ОД.

Примітки

1. Слід мати на увазі істотну відміну між тавтологіями і правилами виводу. Перші є виразами предметної мови алгебри логіки — формули, а другі є відношеннями між формулами, виражені в термінах метамови.

2. Логічне слідування

$$\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}, \quad (*)$$

звичайно, не можна плутати з твердженнями

$$\text{«Якщо } \models \mathfrak{A}, \text{ то } \models \mathfrak{B}\text{».} \quad (**)$$

З (*) випливає (**), але (**) може мати місце і без (*).

Наприклад, нехай $\mathfrak{A} = p \to q$, $\mathfrak{B} = q$. Тоді імплікація $(\models p \to q) \to (\models q)$ має значення «істинність» в силу хибності антецедента (бо $p \to q$ — не тавтологія); в той же час неправильно, що $p \to q \models q$, оскільки при $|p| = |q| = 0$ посилка істинна, а висновок хибний. Іншими словами, співвідношення (*) строго сильніше, ніж (**).

---

[1] Правила вилучення кон'юнкції і диз'юнкції можна назвати також правилами «опускання», тому позначатимемо їх відповідно ОК і ОД.

Як вже зазначалося, завдання логіки — розробити принципи правильного міркування. Ці міркування, зокрема математичні, здебільшого проводяться в природній мові, можливо, збагаченій символами. Як же теорія логічного слідування застосовується до таких міркувань?

Насамперед треба перекласти формулювання природної мови на символічну мову логіки. Тим самим відбувається абстрагування від конкретного змісту висловлень і зберігається тільки логічна структура міркування.

Тоді матимемо стандартну задачу: чи слідує зроблений в даному міркуванні висновок з прийнятих гіпотез? Причому розв'язування задачі проводиться суто механічно, застосовується певний алгоритм.

Приклади

1. Чи правильним є наступне міркування, тобто чи слідує з нижченаведених посилок зроблений висновок (на базі алгебри висловлень)?

Дано посилки:

1) Якщо добуток двох даних числових множників a і b більше нуля, то з того, що $a < 0$ слідує, що $b < 0$;

2) $ab > 0$ або неправда, що $ab > 1$;

3) $a < 0$;

4) $ab > 1$.

Отже, $b < 0$.

Перекладемо на мову алгебри висловлень. Для цього замість атомарних (простих) висловлень запишемо пропозиційні букви — однакові для тих самих, але різних для різних висловлень. Інакше кажучи, записуємо логічну структуру заданих посилок і очікуваного висновку.

Прості висловлення тут $ab > 0$, $a < 0$, $ab > 1$. Замінюємо їх пропозиційними буквами p, q, r, s відповідно. Логічна структура заданих посилок і очікуваного висновку тоді запишеться таким чином: 1) $p \to (q \to r)$; 2) $p \vee \neg s$; 3) q; 4) s. Отже, r.

Згідно з теоремою 1, перевіряємо, чи буде тавтологією формула

$$(p \to (q \to r)) \wedge (p \vee \neg s) \wedge q \wedge s \to r. \tag{13}$$

Припустимо, що формула (13) не тавтологія. Тоді хоч при одному розподілі істинісних значень p, q, r, s вона набуває значення 0. При такому розподілі істинісних значень за означенням імплікації та кон'юнкції дістаємо:

$$|r| = 0, \tag{14}$$

$$|p \to (q \to r)| = 1, \tag{15}$$

$$|p \vee \neg s| = 1, \tag{16}$$

$$|q| = 1, \tag{17}$$

$$|s| = 1. \tag{18}$$

Далі, з рівності (18) $|\neg s| = 0$, беручи до уваги (16), дістаємо

$$|p| = 1. \tag{19}$$

З рівностей (14), (17), (19) маємо $|p \to (q \to r)| = 0$, що суперечить (15). Таким чином, наше припущення неправильне, і формула (13) є тавтологією, а тому r логічно слідує з даних припущень 1) — 4). Відповідь на поставлене в прикладі запитання стверджувальна.

2. Чи правильне таке міркування: «Якщо хоча б один з даних числових множників a і b дорівнює нулю, то їх добуток дорівнює нулю. Ні a, ні b не дорівнюють нулю. Отже, добуток ab не дорівнює нулю»?

Аналогічно попередньому замінюємо п р о с т і висловлення «$a = 0$», «$b = 0$», «$ab = 0$» пропозиційними змінними відповідно p, q, r. Логічна структура припущень і зробленого висновку запишеться тоді: 1) $p \vee q \to r$; 2) $\neg p$; 3) $\neg q$, отже, $\neg r$. Перевіримо, чи буде тавтологією формула алгебри висловлень

$$(p \vee q \to r) \wedge \neg p \wedge \neg q \to \neg r. \tag{20}$$

Шукаючи контрприклад, припустимо, що знайдеться такий набір значень p, q, r, на якому $|(20)| = 0$. Тоді, за означенням імплікації, заперечення і кон'юнкції, $|\neg r| = 0$, $|\neg p| = |\neg q| = 1$, тобто $|r| = 1$, $|p| = |q| = 0$. При цьому $|p \vee q \to r| = 1$. Ми не зайшли у суперечність, а, навпаки, знайшли такий набір $|p| = |q| = 0$, $|r| = 1$, на якому формула (20) набуває значення 0 і тому не є тавтологією. За теоремою 1 $\neg r$ не слідує з припущень 1) — 3). Отже, міркування, наведене в умові прикладу, неправильне.

Проте зроблений в прикладі висновок за умов даної конкретної задачі є істинним. Адже справа зовсім не в тому, а в питанні, чи слідує зроблений висновок з прийнятих посилок незалежно від його істинності чи хибності.

Якщо в даному прикладі замінити посилку 1) оберненим твердженням, залишивши без змін 2), 3) і висновок, то міркування, наведене в умові, виявиться цілком правильним. Справді, формула

$$(r \to p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q \to \neg r \tag{21}$$

є тавтологія. Припущення, що існує такий набір значень p, q, r, на якому $|(21)| = 0$, приводить до суперечності:

$$|r| = 1, \tag{22}$$

$$|r \to p \vee q| = 1, \tag{23}$$

$$|p| = 0, \tag{24}$$

$$|q| = 0. \tag{25}$$

З формул (22) — (25) випливає $|r \to p \vee q| = 0$, що суперечить умові (23).

Щоб проілюструвати наочно помилковість «міркування» прикладу 2, доцільно навести контрприклад з тією самою логічною структурою посилок і висновку, що й у прикладі 2, але при істинності всіх посилок висновок виявиться хибним. Для цього досить у прикладі 2 прийняти за p, наприклад, твердження «Гоголь народився у Києві», за q — «Гоголь народився в Одесі», за r — «Гоголь народився на Україні». Тоді посилки 1), 2) є істинними (Гоголь не народився ні у Києві, ні в Одесі), а висновок $\neg r$ буде хибним (бо Гоголь народився на Україні).

При аналізі правильності або неправильності встановленого слідування фактична істинність чи хибність посилок і висновку не є істотною. Важливо одне: висновок повинен логічно слідувати з даних посилок. Іншими словами, припущення і висновок можуть виявитись і хибними, але це не порушує правильності логічного слідування. Звичайно, виключається те, що в правильних міркуваннях з **істинних посилок** може слідувати **хибний висновок** (за означенням логічного слідування).

Так, логічні слідування в двох наступних прикладах цілком правильні (міркування проведені за схемою МТ).

Приклади

1. «Якщо Нью-Йорк — найбільше місто США, то Нью-Йорк — столиця США; Нью-Йорк не є столицею США; отже, Нью-Йорк не є найбільшим містом США».

Тут перша посилка і висновок — хибні, проте слідування — правильне.

2. «Якщо $\pi < 3$, то π — ірраціональне число; π не є ірраціональним числом; отже, π не менше ніж 3».

У цьому разі висновок — істинний, друга посилка — хибна, слідування — правильне (за правилом МТ).

Аналогічно тому, як відношення логічного слідування пов'язано з **операцією** імплікації, згідно теореми 1, відношення рівносильності (логічної еквівалентності) пов'язане з **операцією** еквіваленції, а саме, має місце таке твердження.

Теорема 2. *$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли $\models \mathfrak{A} \leftrightarrow \leftrightarrow \mathfrak{B}$.*

Відношення логічної еквівалентності, як відомо, має властивості рефлексивності, транзитивності і симетричності. Відношення логічного слідування також має властивості рефлексивності і транзитивності, але не має властивості симетричності.

Інакше кажучи, при логічному слідуванні не має місця зворотність міркувань, яка є характерною для міркувань, побудованих на рівносильності тверджень. До речі, нехтування цим фактом призводить до помилок, коли призвичаївшись до рівносильних перетворень, при яких з даного результату випливає вихідне твердження (властивість зворотності), цей факт автоматично переносять і на відношення слідування. Це є груба помилка.

З питанням про логічне слідування тісно пов'язано питання про сумісність чи несумісність (суперечливість) множини висловлень.

Означення. *Множина формул $\Gamma = \{\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots \ldots, \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n)\}$ називається* ***сумісною*** *(**несуперечною**), якщо існує такий розподіл істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$, при якому*

$$|\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots, p_n) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n)| = 1.$$

Множина формул, яка не є сумісною, називається ***суперечною.***

Беручи до уваги означення кон'юнкції, маємо твердження: *множина формул алгебри висловлень $\Gamma = \{\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n)\}$ є сумісною (суперечною) тоді і тільки тоді, коли* ***хоча б на одному*** *наборі (на* ***всіх*** *наборах) значень $p_1, \ldots, p_n$* ***всі*** *формули (***хоча б одна з*** *формул) $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots \ldots, m)$ набувають (набуває) значення* 1 (0).

Дослідження сумісності чи суперечності даної множини формул алгебри висловлень можна проводити методом знаходження контрприкладу.

Припустимо, що задана множина формул $\Gamma\ \{\mathfrak{A}_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \mathfrak{A}_m(p_1, \ldots, p_n)\}$ є сумісною. Тоді знайдеться такий набір істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$, на якому

$$|\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_m| = 1. \qquad (26)$$

Звідси на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}_1| = 1$, $|\mathfrak{A}_2| = = 1, \ldots, |\mathfrak{A}_m| = 1$. Якщо останні співвідношення приводять до суперечності, то множина Γ — суперечна (несумісна). Якщо формула (26) не приводить до суперечності, то потрібний набір значень $p_1, \ldots, p_n$ знайдено, і множина Γ — сумісна.

Приклад. 1) Дослідити на сумісність множини формул алгебри висловлень:

1) $\Gamma_1 = \{\neg(p \to q),\ \neg p$; 2) $\Gamma_2 = \{p \to q,\ p \to \neg q,\ p \vee q\}$; 3) $\Gamma_3 = \{p \to q,\ p \to \neg q,\ p \wedge q\}$.

Розв'язання. 1) Припустимо, що множина Γ_1 — сумісна. Тоді знайдеться такий набір значень p, q, на якому $|\neg(p \to q) \wedge \neg p| = 1$. Отже, на цьому наборі

$$|\neg p| = 1 \quad \text{і} \quad |\neg(p \to q)| = 1. \tag{27}$$

З першої умови $|p \to q| = 1$, що суперечить умові (27). Отже, множина Γ_1 — суперечна.

2) Нехай множина Γ_2 — сумісна. Тоді на деякому наборі значень p, q виконуються одночасно умови $|p \to q| = 1$, $|p \to \neg q| = 1$, $|p \vee q| = 1$.

Ці умови виконуються на наборі $|p| = 0$, $|q| = 1$. Отже, Γ_2 — сумісна множина.

3) Для сумісності Γ_3 необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$|p \to q| = 1, \quad |p \to \neg q| = 1, \quad |p \wedge q| = 1.$$

З останньої рівності маємо $|p| = |q| = 1$. При цьому $|p \to \neg q| = 0$, що суперечить другій умові. Отже, множина Γ_3 — суперечна.

Теорема 3. *Якщо Γ — суперечна множина формул логіки висловлень, то для довільної формули $\mathfrak{A}$ має місце слідування $\Gamma \models \mathfrak{A}$.*

Доведення. Справді, при кожному розподілі істинісних значень пропозиційних змінних хоча б одна формула з множини Γ набуде значення 0. Отже, множина тих наборів, на яких усі посилки набувають значення,— порожня. Беручи до уваги, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, бачимо, що за означенням логічного слідування має місце слідування $\Gamma \models \mathfrak{A}$.

Розділ II

ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

§ 1. Алфавіт числення висловлень. Правила утворення

У першому розділі за основу викладу було взято поняття висловлення, причому постулювалося, що висловлення можуть бути або істинними, або хибними («третього не дано»).

Цим самим неявно застосовувався закон виключеного третього, причому застосовувався він до нескінченної множини всіх висловлень (абстракція актуальної нескінченності). Проте правомірність такого застосування є предметом дискусій при розгляді основ математики.

Звідси виникає необхідність побудови аксіоматичної теорії (системи), яка відповідатиме алгебрі висловлень, будучи, разом з тим, вільною від вищезгаданої абстракції як передумови. Цю формальну аксіоматичну систему називатимемо численням висловлень ([22]).

Перш ніж перейти до розгляду числення висловлень, розглянемо побудову формальної системи взагалі. Формалізація змістовної теорії має на меті перетворити останню на об'єкт математичного вивчення. Для цього спочатку дають чіткий опис мови даної теорії:

а) точний перелік усіх вихідних символів даної теорії (її алфавіт), абстрагуючись цілком і повністю від їх змісту;

б) правила утворення формул теорії як певних послідовностей вихідних символів;

в) з класу формул виділяється певний підклас, і виділені формули називаються аксіомами теорії;

г) правила перетворення або правила виводу, за якими і тільки за якими дозволяється від певних формул системи переходити до інших.

Підкреслимо, що вихідні символи розглядаються як матеріальні знаки на папері або на дошці, які означають тільки те, що про них сказано в аксіомах теорії.

Алфавіт числення висловлень містить:

1) зчисленну множину символів

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_i,\ \ldots,$$

які називають пропозиційними буквами або змінними;

2) символи логічних операцій, з яких перший назвемо символом заперечення, а другий — символом імплікації. Це тільки назви, ніякого змісту в них не вкладено;

3) символи: (— ліва дужка,) — права дужка. Їх називають розділовими знаками.

Введений тут алфавіт є алфавітом штучної символічної мови, яку називають предметною мовою. Опис цих символів дано в іншій мові. У нас цей опис є в певній частині української мови, до якої приєднано назви символів і виразів предметної мови. Мову, в якій описується предметна мова, називають **метамовою**. У даному разі метамова — це вищезгадана частина української мови.

Чітке розмежування **предметної мови та метамови** є необхідною умовою усвідомлення всієї дальшої побудови числення як формальної теорії.

Метамова на відміну від предметної мови формальної теорії не має чітко вираженої формальної структури. Її терміни мають зміст, в метамові ми знаємо, про що йде мова.

Зазначимо, що вибір символів логічних операцій $\neg$, $\to$ пов'язаний з тим, що система $\{\neg, \to\}$ є функціонально повною.

Можливий, звичайно, і інший вибір вихідних символів логічних операцій, з тією лише умовою, що вони становлять функціонально повну систему. Так, в [22] розглядається система $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$, а в [4] і в [34] — система $\{\neg, \vee\}$, в [23] — система $\{\to, 0\}$.

Побудувавши алфавіт числення висловлень, перейдемо до побудови пропозиційних формул — поняття, аналогічного поняттю слова в звичайній мові.

Скінченна лінійна послідовність вихідних символів називається **виразом числення висловлень**. Проте не кожний вираз числення висловлень є його формулою, аналогічно тому, як не кожна сукупність букв є словом у природній мові.

Поняття пропозиційної формули чи формули числення висловлень означимо індуктивно:

1° Пропозиційна буква є формула числення висловлень.

2° Якщо $\mathfrak{A}$ — формула числення висловлень, то $(\neg\mathfrak{A})$ — пропозиційна формула, якщо $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — формули числення висловлень, то $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — пропозиційна формула.

3° Інших формул числення висловлень, крім зазначених в п.1° і 2°, немає.

Примітка. Символи $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, звичайно, не належать до предметної мови, це символи метамови, які є назвами формул предметної мови. Говорячи щось про формули, ми вживаємо їх назви, аналогічно тому, як стверджуючи щось про столи, ми користуємось назвою «стіл», а не самими предметами. Назви формул предметної мови належать вже до метамови. Іншими словами, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — це змінні метамови, які пробігають множину пропозиційних формул.

Вищенаведене означення формули дає ефективний засіб визначення для будь-якого заданого виразу числення висловлень, чи є цей вираз формулою, чи ні.

Приклади

1. Довести, що вираз $(((\neg p_1) \to p_2) \to p_1)$ є пропозиційною формулою.

Доведення. Справді, пропозиційними формулами є: p_1 — згідно з 1°, $(\neg p_1)$ — згідно з 2°, p_2 — згідно с 1°, $((\neg p_1) \to p_2)$ — згідно з 2°, $(((\neg p_1) \to p_2) \to p_1)$ — згідно з 2°.

2. Довести, що вираз

$$((\neg (p_1 \to p_2)) \to \neg p_3) \quad (*)$$

не є пропозиційною формулою.

Доведення. Справді, p_1, p_2, p_3 — пропозиційні формули, згідно з 1° $(p_1 \to p_2)$, $(\neg (p_1 \to p_2))$ — пропозиційні формули, згідно з 2°, $\neg p_3$ не є пропозиційною формулою ні за 1°, ні за 2°, отже, не є взагалі формулою числення висловлень, згідно з 3°. Таким чином, вираз (*) не є пропозиційною формулою.

Як випливає з попереднього, у записі пропозиційних формул нагромаджується велика кількість дужок. Щоб уникнути громіздкості записів, приймемо такі умови скорочення числа дужок:

а) у записі формул опускатимемо зовнішні дужки (на всіх кроках утворення формули);

б) вважатимемо (як і в першому розділі), що символ «$\neg$» зв'язує міцніше, ніж «$\to$».

Тоді формула прикладу 1 матиме вигляд $(\neg p_1 \to p_2) \to p_1$ (дві дужки замість шести).

Примітка. Скорочений запис формули за умовами а), б), звичайно, не є пропозиційною формулою за нашим індуктивним означенням. Проте за таким скороченим записом можна легко відновити повний запис пропозиційної формули і, притому однозначно.

У подальшому ми часто користуватимемося різними скороченими записами формул. Так, за означенням вводять наступні скорочення:

$$p_1 \wedge p_2 \text{ замість } \neg(p_1 \to \neg p_2),$$

$$p_1 \vee p_2 \text{ замість } \neg p_1 \to p_2,$$

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ замість } (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_1).$$

Ці означення можна символічно записати у вигляді

$$p_1 \wedge p_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \neg(p_1 \to \neg p_2); \quad (1)$$

$$p_1 \vee p_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \neg p_1 \to p_2; \qquad (2)$$

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \overset{\mathrm{df}}{=} (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_1). \qquad (3)$$

Таким чином, як скорочення вводять ті символи логічних операцій, які не ввійшли в алфавіт числення висловлень.

За розглянутим скороченим записом формули однозначно відтворюється повний запис. Наприклад, скорочений запис

$$\neg (p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \qquad (4)$$

означає в записі через вихідні символи

$$\neg\neg (p_1 \to \neg p_2) \to (\neg\neg p_1 \to \neg p_2) \wedge$$
$$\wedge (\neg\neg p_1 \to \neg p_2) \to \neg\neg (p_1 \to \neg p_2),$$

і остаточно

$$\neg ((\neg\neg (p_1 \to \neg p_2) \to (\neg\neg p_1 \to \neg p_2)) \to$$
$$\to \neg ((\neg\neg p_1 \to \neg p_2) \to \neg\neg (p_1 \to \neg p_2))). \qquad (5)$$

Порівняння записів (5) і (4) наочно ілюструє доцільність скорочення.

§ 2. Побудова числення висловлень

Перш ніж перейти до наступного кроку формальної побудови числення висловлень, звернемо увагу на відмінність між формулами і схемами формул.

П р о п о з и ц і й н а ф о р м у л а — це вираз предметної мови числення висловлень, а саме, певна лінійна послідовність вихідних символів числення.

С х е м и ф о р м у л — це вирази метамови. Внаслідок підстановки в схему замість змінних метамови конкретних формул дістаються різні пропозиційні формули.

Інакше кажучи, схема формул задає нескінченну множину конкретних формул. Кожна з цих формул називається о к р е м и м в и п а д к о м даної схеми.

Так, схема $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$ задає формули: $p_1 \to (p_2 \to p_1)$; $\neg p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to \neg p_1)$; $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_3 \to (p_1 \to p_2))$ тощо. Для схеми формул $\neg\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ окремими випадками є формули $\neg\neg p_1 \to p_1$, $\neg\neg (\neg p_1) \to \neg p_1$, $\neg\neg (\neg p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \to p_2)$ тощо.

До дальшої побудови формальної теорії можна підійти двояко.

При першому підході з множини формул числення виділяють певні формули, які вважаються а к с і о м а м и.

При другому підході з множини схем формул виділяють певні схеми, які називають с х е м а м и аксіом.

Схеми аксіом формулюються в метамові, частинні випадки схем аксіом (аксіоми) формулюють в предметній мові як формули числення висловлень.

Перший підхід застосовується в [22], [4], [33], другий — в [21], [17], [18].

Для нашої аксіоматичної побудови виберемо другий підхід. Схемами аксіом є три наступних схеми:

S1 $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$;

S2 $(\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)) \to ((\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3))$;

S3 $(\neg \mathfrak{A}_1 \to \neg \mathfrak{A}_2) \to ((\neg \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to \mathfrak{A}_1)$.

Тут $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ — довільні схеми пропозиційних формул, [21].

Аксіомами теорії є окремі випадки схем S1, S2, S3, які є лінійними послідовностями вихідних символів (пропозиційні формули). Наприклад, аксіомою є пропозиційна формула

$$(\neg p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to \neg p_3)) \to ((\neg p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to$$
$$\to (\neg p_1 \to \neg p_3)) \qquad (6)$$

як окремий випадок схеми S2 або формула

$$(\neg (p_1 \to p_2) \to \neg\neg p_3) \to ((\neg (p_1 \to p_2) \to \neg p_3) \to$$
$$\to (p_1 \to p_2)) \qquad (7)$$

як окремий випадок схеми S3.

Взагалі існує ефективний метод, за яким можна визначити, чи є довільна пропозиційна формула аксіомою, чи ні. Для цього досить перевірити, чи є задана формула окремим випадком однієї із схем S1, S2, S3. Так, формула $p_1 \to p_1$, очевидно, не є окремим випадком жодної із схем S1, S2, S3, а тому не є аксіомою.

Звичайно в аксіоматичних математичних теоріях формулювання правил утворення і аксіом вже визначає шлях побудови всієї теорії, оскільки теореми теорії одержуються з аксіом за правилами, взятими ззовні з логіки. При побудові логічних числень, зокрема числення висловлень, необхідно точно сформулювати правила, за якими з певних заданих формул виводять інші. Такі правила називаються п р а в и л а м и в и в о д у.

Сформулюємо основне правило виводу числення висловлень. Із схем формул $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ і $\mathfrak{A}$ виводиться $\mathfrak{B}$, причому $\mathfrak{B}$ називається безпосереднім висновком посилок $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$.

Це правило виводу називатимемо, як і в алгебрі висловлень, «модус поненс» і позначатимемо «МР».

Так, схема

$$(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3) \tag{8}$$

виводиться із схем S2 і

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \tag{9}$$

за МР, тобто схема (8) є безпосереднім висновком схем S2 і (9).

Якби ми замість схем аксіом S1 — S3 сформулювали аксіоми, тобто застосували перший підхід до аксіоматичної побудови числення висловлень, то поряд з МР необхідним було б ще одне основне правило виводу, а саме, правило підстановки.

Правило МР можна сформулювати так. З двох формул, де одна є імплікація, а друга — антецедент першої, можна вивести консеквент даної імплікації, який і є безпосереднім висновком заданих формул. Внаслідок цього правило МР часто називають правилом відокремлення, або правилом відривання.

Дамо тепер строге означення центрального поняття формальної теорії — поняття формального доведення.

Означення. *Формальним доведенням формули числення висловлень $\mathfrak{B}$ називають скінченну послідовність пропозиційних формул*

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_i, \ldots, \mathfrak{A}_n, \tag{10}$$

таку, що $\mathfrak{A}_n$ збігається з $\mathfrak{B}$, а кожний член послідовності (10) є або аксіомою, або безпосереднім висновком двох попередніх членів послідовності (10) за правилом МР.

Іншими словами, послідовність (10) буде формальним доведенням формули $\mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $\mathfrak{B}$ збігається з $\mathfrak{A}_n$; 2) кожне $\mathfrak{A}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) є або аксіомою, або існують такі $j < i$, $k < i$, що $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_j \to \to \mathfrak{A}_i$.

Означення. *Пропозиційна формула, для якої існує формальне доведення, називається теоремою числення висловлень.*

Зокрема, кожна аксіома є теоремою (її доведенням є скінченна послідовність, що складається з одного члена, а саме — з цієї аксіоми).

Зазначимо, що хоч поняття формули і аксіоми даної теорії ефективні, поняття теореми може бути неефективним. Справді, з означення теореми не випливає, що існує алгоритм для визначення того, чи є задана пропозиційна формула теоремою, чи ні. Цей факт підлягає окремому дослідженню.

Те, що формула $\mathfrak{A}$ є теоремою, позначається $\vdash \mathfrak{A}$. Це позначення не слід плутати з позначенням $\models \mathfrak{A}$ в алгебрі висловлень, яке розшифровується як «$\mathfrak{A}$ — тавтологія, чи тотожно істинна». Твердження, що формула $\mathfrak{A}$ тотожно істинна і що $\mathfrak{A}$ можна вивести в даній системі аксіом із даними правилами виводу, є принципіально відмінними, оскільки вони стосуються різних планів дослідження. Перший план — семантичний, де береться до уваги зміст. Другий план — синтаксичний, де абстрагуються від змісту.

Підкреслимо, що формальне доведення становить конкретний об'єкт, який може бути предметом точного вивчення.

У подальшому лінійні послідовності, які є формальними доведеннями, записуватимемо вертикально, зверху вниз, з тим, щоб справа від кожного члена послідовності дати його обгрунтування, згідно з означенням доведення (аналіз доведення). Члени послідовності пронумеровані. Обгрунтування (як і нумерація) належить до метамови і не є складовою частиною формального доведення.

Схема теорем. 1. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (для довільної формули $\mathfrak{A}$). Розглядувана схема породжує нескінченну множину теорем, кожна з яких є окремим випадком схеми $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. (Наприклад, теореми $p \to p$, $(\neg p \to p) \to (\neg p \to p)$).

Доведення

1. $(\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})) \to ((\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}))$ (окремий випадок S2, де замість $\mathfrak{A}_2$ взято $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ і $\mathfrak{A}$ замість $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$);
2. $\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})$ (окремий випадок S1);
3. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})$ (1, 2, МР);
4. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})$ (S1);
5. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (3, 4 МР).

Ця послідовність є формальним доведенням формули $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$[1]. Справді, перший, другий і четвертий члени послідовності — окремі випадки схем аксіом, а третій та п'ятий члени виводяться з попередніх за правилом MP, причому останній член послідовності є доводжуваною формулою.

Зазначимо, що перевірка того, чи є дана послідовність формул доведенням, проводиться механічно. Проте відшукання доведення вже не є механічним актом, а вимагає певної винахідливості.

Примітка. Ця теорема здається більш «очевидною», ніж формули, використані в процесі її доведення. Проте це не стосується суті формального доведення. Треба тільки з'ясувати, чи слідує дана формула з прийнятих аксіом за правилом MP. Взагалі, в формальних доведеннях всякі посилання на очевидність є неприпустимими.

Крім розглянутого поняття формального доведення, ми користуємося таким доведенням, яке звичайно вживається в математиці та в інших науках. Це доведення означає послідовність тверджень, нехай української мови, доповненої певними спеціальними термінами, причому ця послідовність впевнює нас в правильності доводжуваної тези, є достатнім обгрунтуванням її. Таке доведення, на відміну від формального, називають з м і с т о в н и м.

Як бачимо, поняття змістовного доведення точно не визначено. Доведення теорем числення висловлень проводиться формально. Сукупність усіх теорем числення висловлень становить формальну теорію. Проте міркування про теорію, про теореми, аналіз доведення їх та аналіз відношень між теоремами проводяться в метамові і становлять іншу теорію, яку називають м е т а т е о р і є ю даної формальної теорії.

Метатеорію числення висловлень ми не формалізуємо, а розглядаємо її як змістовну теорію. Доведення в метатеорії — змістовні, вони будуються як звичайні математичні доведення.

Маючи на увазі застосування до основ математики, ми, згідно з Д. Гільбертом, допускатимемо в м е т а т е о р і ї тільки так звані ф і н і т н і з а с о б и, тобто методи, які не використовують абстракції актуальної нескінченності, а тому є для всіх математиків, взагалі кажучи, безперечними.

[1] Тут і в подальшому ми вживаємо терміни «формула», «теорема», замість «схема формул», «схема теорем» відповідно.

Твердження метатеорії називатимемо на відміну від т е о р е м формальної теорії м е т а т е о р е м а м и, або просто твердженнями. Доведення метатеорем не формальні, а змістовні.

§ 3. Вивідність. Метатеорема дедукції

У формальних доведеннях використовуються тільки теореми даної формальної теорії, оскільки кожен член послідовності, яка становить формальне доведення, є, за означенням доведення, теоремою.

Цей факт обмежує можливості формального доведення, значно ускладнює його і відрізняє від математичних доведень. В останніх, як відомо, широко використовуються, крім аксіом і доведених вже теорем, певні припущення.

З метою поширення практичних можливостей формального доведення і наближення його до практики математичних доведень введемо поняття формальної вивідності з припущень.

Означення. *Формула числення висловлень $\mathfrak{B}$ називається* в и в і д н о ю *з множини формул Γ, які називаються* п р и п у щ е н н я м и, *або* п о с и л к а м и, *тоді і тільки тоді, коли існує скінченна послідовність формул*

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n, \tag{11}$$

така, що $\mathfrak{B}_n$ збігається з $\mathfrak{B}$ і кожен член послідовності (11) *є або аксіомою, або одним з припущень, або безпосереднім висновком з попередніх членів* (11) *за правилом MP.*

Те, що формула $\mathfrak{A}$ вивідна з Γ, позначається $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$. Як випливає з означення, поняття формальної вивідності — це узагальнення, поняття формального доведення. В окремому випадку, коли Γ — порожня множина (немає жодного припущення), маємо $\vdash \mathfrak{A}$, тобто $\mathfrak{A}$ — теорема числення висловлень, що відповідає означенню теореми, даного в попередньому параграфі.

Якщо Γ — скінченна множина, що складається з формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, то вивідність $\mathfrak{B}$ з Γ записується так:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash \mathfrak{B}. \tag{12}$$

Символ формальної вивідності схожий із символом логічного слідування в алгебрі висловлень, але не збігається з останнім. Про відмінність між поняттям формально вивідної формули і логічним висновком на базі алгебри висловлень можна повторити те, що сказано в § 2 про відношення між поняттями теореми числення висловлень і тотожно істинної формули алгебри висловлень.

Приклад. Показати, що має місце формальна вивідність

$$\neg \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \quad \neg \mathfrak{A}_1 \to \neg \mathfrak{A}_2 \vdash \mathfrak{A}_1$$

(множина припущень Γ складається з двох формул $\neg \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, $\neg \mathfrak{A}_1 \to \neg \mathfrak{A}_2$).

Побудуємо потрібну за означенням послідовність (11), записуючи її так, як і у випадку формального доведення.

1. $\neg \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (припущення);
2. $\neg \mathfrak{A}_1 \to \neg \mathfrak{A}_2$ (припущення);
3. $(\neg \mathfrak{A}_1 \to \neg \mathfrak{A}_2) \to ((\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to \mathfrak{A}_1)$ (S3);
4. $(\neg \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to \mathfrak{A}_1$ (2, 3, MP);
5. $\mathfrak{A}_1$ (1, 4, MP).

Побудована послідовність дає шукану вивідність за означенням. Справді, вивідна формула $\mathfrak{A}_1$ збігається з останнім членом послідовності 1—5, а кожен член послідовності є або аксіомою (третій), або одним з припущень (перший, другий), або вводиться з попередніх членів послідовності за правилом MP (четвертий, п'ятий).

Як випливає з означення, відношення формальної вивідності має властивості, аналогічні властивостям логічного слідування (§ 6, розд. I).

1° Якщо $\Gamma \vdash \mathfrak{A}$ і $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$[1].

2° Якщо $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$, то $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

3° Якщо $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ і $\vdash \mathfrak{A}$, то $\Gamma \vdash \mathfrak{B}$.

Пропонуємо читачеві довести ці властивості самостійно.

В алгебрі висловлень було встановлено, що питання про те, чи є формула $\mathfrak{B}$ логічним висновком з припущень $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, рівнозначне питанню — чи має місце тотожна істинність певної формули алгебри висловлень, а саме, $\mathfrak{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}$.

Природно виникає питання, чи існує аналогічний зв'язок між поняттям формальної вивідності деякої формули із заданих припущень і формальним доведенням певної теореми числення висловлень? Це можна зробити за допомогою так званої метатеореми дедукції.

---

[1] Γ — множина формул, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — назви довільних формул числення висловлень.

Метатеорема дедукції (МТД). *Якщо Γ — множина формул числення висловлень, $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — довільні його формули і $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Зокрема, для порожньої множини формул Γ, якщо $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.*

Нагадаємо, що доведення метатеорем на відміну від теорем формальної теорії проводиться змістовно як звичайне математичне доведення.

Доведення. За умовою дано, що існує така скінченна послідовність формул числення висловлень:

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}, \tag{13}$$

що кожне $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ є або 1) — аксіомою, або 2) — одним з припущень, тобто належить множині $\Gamma \cup \{\mathfrak{A}\}$, або 3) — існують $j, k < i$ такі, що $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i$, тобто $\mathfrak{B}_i$ слідує з двох попередніх членів (13) $\mathfrak{B}_k$ і $\mathfrak{B}_j$ за правилом MP. Покажемо, що в кожному з цих трьох єдино можливих випадків має місце вивідність $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ для кожного i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1. $\mathfrak{B}_i$ — аксіома. Щоб дістати вивідність $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$, досить поповнити послідовність (13) такими формулами, вивідними з Γ : $\mathfrak{B}_i$ (аксіома); $\mathfrak{B}_i \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i)$ (за схемою аксіом S1); $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ (за MP).

2. а) якщо $\mathfrak{B}_i \in \Gamma$, то аналогічно випадку 1) приєднаємо до формул (13) послідовно формули $\mathfrak{B}_i$ (припущення — елемент Γ); $\mathfrak{B}_i \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i)$ (за схемою аксіом S1); $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ (за MP). Таким чином, $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$.

б). якщо $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}$, то поповнимо формули (13) послідовністю з п'яти формул, яка є доведенням теореми $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Враховуючи, що $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}$, дістаємо $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$.

3. Доведення проведемо за індукцією. Індуктивне припущення, що для всіх натуральних $m < i$ має місце вивідність $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_m$. Тоді $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j$ і $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_k$, бо $j < i$, $k < i$. Далі,

1. Γ (множина припущень);
2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i)) \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i))$ (S2);
3. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i)$ (індуктивне припущення, бо $\mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_k$);
4. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i)$ (2, 3, MP);
5. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j$ (індуктивне припущення);
6. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ (4, 5, MP).

Таким чином, з індуктивного припущення випливає, що $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$.

Тепер, за принципом зворотної індукції, твердження $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ у випадку 3) виконується для всіх натуральних чисел, зокрема і для числа i, тобто $\Gamma \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ в усіх трьох випадках для довільного i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Як окремий випадок при $i = n$ дістаємо $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_n$, або $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$[1].

Наслідок. *Якщо* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, *то*

$$\vdash \mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to (\cdots \to (\mathfrak{A}_{n-1} \to (\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B})) \ldots)).$$

Для доведення, маючи вивідність $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \vdash \mathfrak{B}$, досить застосувати метатеорему дедукції (скорочено МТД) n раз.

Застосовуючи даний наслідок, можна безпосередньо переходити від вивідності з припущень до певної теореми числення висловлень. Тоді при доведенні нових теорем числення висловлень широко використовують припущення. Це наближає формальне доведення до доведень, які проводяться в математиці, коли крім аксіом і доведених вже теорем використовується і дане в умові доводжуваного твердження.

Твердження, обернене до метатеореми дедукції, доводиться досить просто.

Теорема. *Якщо*

$$\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \tag{14}$$

то $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$.

Доведення

1. Γ (множина припущень);

$\vdots \qquad \vdots$

i. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ (за умовою (14));

$i+1$. $\mathfrak{A}$ (припущення);

$i+2$. $\mathfrak{B}$ (i, $i+1$, MP).

Отже, за означенням вивідності, $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$. Таким чином, МТД може бути подана в формі $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли $\Gamma \vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Поряд з основним правилом виводу MP обгрунтуємо тепер деякі вивідні в численні висловлень правила, мета яких полягає в скороченні числа кроків формального доведення. Інакше кажучи, вивідні правила — це будівельні блоки при побудові формального доведення, схеми, кожна з яких замінює кілька кроків доведення.

---

[1] Якщо Γ — порожня множина, то з $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ слідує $\vdash \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Проте слід пам'ятати, що без вивідних правил в принципі можна обійтись, оскільки кожне з них виводиться з аксіом за допомогою правила MP.

Могутнім засобом одержання ряду важливих вивідних правил виводу є метатеорема дедукції, зокрема сама МТД може розглядатись як таке вивідне правило.

Сформулюємо дві вивідності ($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ — назви довільних пропозиційних форм).

$$1.\ \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3,\ \vdash \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3.$$

Цю вивідність називатимемо правилом силогізму (скорочено ПС).

Доведення

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \\ 2.\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \\ 3.\ \mathfrak{A}_1 \end{array}\right\} \text{(припущення);}$$

4. $\mathfrak{A}_2$ (1, 3, MP);
5. $\mathfrak{A}_3$ (2, 4, MP).

За означенням вивідності, з 1 — 5 маємо $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_1 \vdash \mathfrak{A}_3$. Звідси, за МТД, $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \vdash \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3$.

$$2.\ \mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \vdash \mathfrak{A}_2 \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3).$$

Цю вивідність називають правилом перестановки посилок (скорочено ППП).

Доведення

1. $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)$;
2. $\mathfrak{A}_2$;
3. $\mathfrak{A}_1$ (1—3, припущення);
4. $\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3$ (1, 3, MP);
5. $\mathfrak{A}_3$ (2, 4, MP).

Далі, з 1—5, за означенням вивідності, маємо $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3), \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1 \vdash \mathfrak{A}_3$, звідки, застосовуючи двічі метатеорему дедукції, дістаємо

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \vdash \mathfrak{A}_2 \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3).$$

Звичайно, ці вивідні правила можна було б дістати і без застосування МТД (як і всі інші теореми числення висловлень, що доводяться за її допомогою), але це було б значно складніше і вимагало б більшої кількості кроків. Застосування МТД та інших вивідних правил значно скорочує і полегшує формальне доведення.

Правда, при наявності таких скорочень ми дістаємо не формальне доведення, а тільки доведення факту його існування. Повне доведення відтворюється однозначно за скороченим доведенням. Надалі ми ці скорочені доведення називатимемо теж **формальним** доведенням, маючи, проте, на увазі вищесказане.

Доведемо кілька теорем[1] числення висловлень, які буде використано у подальшому.

Теорема 2. $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$.

Доведення

1. $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A})\to((\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A})$ (S3);
2. $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A})\to((\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A})$ (1, ППП);
3. $\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}$ (схема теорем 1);
4. $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}$ (2, 3, MP);
5. $\neg\neg\mathfrak{A}\to(\neg\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A})$ (S1);
6. $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ (4, 5, ПС).

Теорема 3. $\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A}$.

Доведення

1. $(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A})\to((\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\to\neg\neg\mathfrak{A})$ (S3);
2. $\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}$ (схема теорем 2);
3. $(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})\to\neg\neg\mathfrak{A}$ (1, 2, MP);
4. $\mathfrak{A}\to(\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A})$ (S1);
5. $\mathfrak{A}\to\neg\neg\mathfrak{A}$ (4, 3, ПС).

Теореми 2 і 3 називають відповідно **другим законом подвійного заперечення** і **першим законом подвійного заперечення**. Зазначимо, що в семантичному плані ці теореми мають принципову відмінність. Перший закон подвійного заперечення споріднений із законом виключення суперечності, який визнають беззастережно всі математики, тоді як другий закон подвійного заперечення тісно пов'язаний із законом виключеного третього, застосування якого до нескінченних множин викликає сумнів у деяких математиків.

Теорема 4. $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})$ (другий закон контрапозиції).

1. $\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{B}$ } (припущення);
3. $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to((\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{A})$ (S3);
4. $(\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to\mathfrak{A}$ (1, 3, MP);
5. $\mathfrak{B}\to(\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$ (S1);
6. $\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ (2, 5, MP);
7. $\mathfrak{A}$ (4, 6, MP).

[1] В усіх цих теоремах $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — назви довільних формул числення висловлень.

З 1—7, за означенням вивідності, маємо $\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B},\ \mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A}$, а звідси, застосувавши двічі метатеорему дедукції, дістаємо $(\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to(\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})$.

Оскільки в останньому доведенні застосовується МТД, то на певному етапі обов'язково вводяться припущення, причому тут, як і в багатьох інших випадках, за припущення беруться антецеденти відповідних імплікацій — підформул доводжуваної формули. Ці припущення знімаються, так би мовити, застосуванням метатеореми дедукції.

Теорема 5. $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A})$ (**перший закон контрапозиції**).

Доведення

1. $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$
2. $\neg\mathfrak{B}$ } (припущення);
3. $(\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})\to((\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A})$ (S3);
4. $\neg\mathfrak{B}\to(\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B})$ (S1);
5. $\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{B}$ (2, 4, MP);
6. $(\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to\neg\mathfrak{A}$ (3, 5, MP);
7. $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ (теорема 2);
8. $\neg\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ (7, 1, ПС);
9. $\neg\mathfrak{A}$ (6, 8, MP).

Звідси за означенням вивідності маємо

$$\mathfrak{A}\to\mathfrak{B},\quad \neg\mathfrak{B}\vdash\neg\mathfrak{A}.$$

Після дворазового застосування метатеореми дедукції дістанемо

$$\vdash(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})\to(\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A}).$$

Теорема 6. $\neg\mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$ (закон заперечення антецедента).

Доведення

1. $\neg\mathfrak{A}$
2. $\mathfrak{A}$ } (припущення);
3. $(\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A})\to((\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})\to\mathfrak{B})$ (S3);
4. $\neg\mathfrak{A}\to(\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A})$ (S1);
5. $\neg\mathfrak{B}\to\neg\mathfrak{A}$ (1, 4, MP);
6. $(\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})\to\mathfrak{B}$ (3, 5, MP);
7. $\mathfrak{A}\to(\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{A})$ (S1);
8. $\neg\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$ (2, 7, MP);
9. $\mathfrak{B}$ (6, 8, MP).

Звідси дістаємо $\neg\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$. Після дворазового застосування метатеореми дедукції до останньої вивідності маємо $\vdash\neg\mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$.

Теорема 6′. $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$.

Ця теорема доводиться на основі теореми 6 застосуванням правила ППП.

Теорема 7. $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{B} \to \neg (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}))$.

Доведення. За МР маємо $\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B}$. Застосовуючи двічі МТД до цієї вивідності, дістанемо

$$\vdash \mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}). \qquad (*)$$

Далі,

1. $\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B})$ (формула (*));
2. $((\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}) \to (\neg \mathfrak{B} \to \neg (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}))$ (схема теореми 5);
3. $\mathfrak{A} \to (\neg \mathfrak{B} \to \neg (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}))$ (1, 2, ПС).

Теорема 8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B})$.

Доведення

$\left.\begin{array}{l}1.\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \\ 2.\ \neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}\end{array}\right\}$ (припущення);

3. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A})$ (теорема 5);
4. $\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}$ (1, 3, МР);
5. $(\neg \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A}) \to ((\neg \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}$ (S3);
6. $(\neg \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{B}$ (4, 5, МР);
7. $(\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\neg \mathfrak{B} \to \neg\neg \mathfrak{A})$ (схема теореми 5);
8. $\neg \mathfrak{B} \to \neg\neg \mathfrak{A}$ (2, 7, МР);
9. $\neg\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (теорема 2);
10. $\neg \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ (8, 9, ПС);
11. $\mathfrak{B}$ (6, 10, МР).

Звідси за означенням вивідності маємо $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{B}$. Після дворазового застосування МТД дістаємо

$$\vdash (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}).$$

Усі наведені доведення — скорочені. Їх дуже легко перетворити на повні, замінивши всі посилання на доведені раніш теореми і вивідні правила їх виведенням з аксіом за правилом МР.

§ 4. Деякі питання метатеорії. Несуперечність числення висловлень

При побудові числення висловлень як формальної аксіоматичної теорії першим є питання про співвідношення між теоремами числення висловлень і тавтологіями алгебри висловлень.

Будуючи числення висловлень формально, ми прагнемо, щоб кожна теорема числення висловлень була тотожно істинною в алгебрі логіки, тобто, щоб серед теорем не було формули, яка при певному розподілі істинісних значень виявилась би хибною.

Бажано також, щоб тотожно істинні формули алгебри висловлень були вивідними з прийнятих аксіом числення висловлень. Проте, чи мають місце такі співвідношення?

Для кожної аксіоматичної теорії кардинальним є питання несуперечності. Справді, така теорія будується послідовним приєднанням нових теорем, які формально виводять з аксіом за допомогою правил виводу. Отже, немає ніякої гарантії, що в цьому процесі ми не зайдемо у суперечність. Інакше кажучи, виникає питання, чи при поступовому нагромадженні теорем формальної теорії не трапиться так, що одна з теорем буде суперечити іншим. У цьому плані повстає проблема несуперечності числення висловлень.

Виникають також інші принципіальні питання, які стосуються структури всієї формальної теорії в цілому. Ці питання належать, звичайно, до метатеорії даної формальної теорії, вони формулюються в термінах метамови. Їх, безперечно, не можна розв'язати в рамках даної формальної теорії. Проте результати цієї теорії дають дуже цінний матеріал для розв'язання тих самих питань у метатеорії.

Відповіді на поставлені вище питання сформулюємо у вигляді наступних метатеорем.

Метатеорема 2 (МТ 2). *Кожна теорема числення висловлень є тавтологією.*

Доведення. Кожну формулу числення висловлень, отже, і кожну його теорему, можна розглядати як формулу алгебри висловлень (алфавіт числення висловлень становить правильну частину множини вихідних символів алгебри висловлень). Таким чином, у даній метатеоремі треба довести, що кожна теорема числення висловлень при в с і х розподілах істинісних значень її пропозиційних букв набирає значення 1.

Нехай $\mathfrak{A}$ — довільна теорема числення висловлень, n — число членів послідовності формул

$$\mathfrak{B}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (14)$$

яка становить доведення $\mathfrak{A}$.

Доведення метатеореми 2 проведемо індукцією по i.

Базис індукції. При $i = 1$ $\mathfrak{B}_i$ — аксіома. Легко довести, що кожна аксіома кожної із схем S1, S2, S3 є тавтологією.

Розглянемо аксіому

$$p_1 \to (p_2 \to p_1) \tag{15}$$

схеми S1. Припустимо, що формула (15) не є тавтологією. Тоді існує такий набір значень: p_1, p_2, на якому $|(15)| = 0$. На цьому наборі, за означенням імплікації, $|p_1| = 1$ і одночасно $|p_2 \to p_1| = 0$, звідки $|p_2| = 1$, $|p_1| = 0$, тобто ми зайшли у суперечність, тому формула (15) — тавтологія. Підставляючи в тавтологію (15) довільні формули числення висловлень замість пропозиційних букв p_1, p_2, за теоремою підстановки § 2, розд. I, приходимо знову до тавтології. Таким чином, доведено, що кожен окремий випадок схеми $S1$ є тавтологією.

Аналогічну перевірку для окремого випадку схеми аксіом S2 вже було зроблено вище. Пропонуємо читачеві самостійно виконати перевірку для окремого випадку схеми аксіом $S3$.

Індукційний крок. Припустимо, що доводжуване твердження справджується при всіх $i < k$*, тобто, що кожна теорема числення висловлень, доведення якої містить менше ніж k членів, є тавтологією.

Розглянемо довільний член $\mathfrak{B}_k$ послідовності (14). Якщо $\mathfrak{B}_k$ — аксіома, то $\mathfrak{B}_k$ — тавтологія. Якщо $\mathfrak{B}_k$ не є аксіомою числення висловлень, то серед формул (14) існують члени $\mathfrak{B}_j$ і $\mathfrak{B}_m$, $j < k$, $m < k$, з яких $\mathfrak{B}_k$ слідує за правилом MP. (Нагадуємо, що тут розглядається повне формальне доведення, в якому є тільки одне правило виводу, адже кожне скорочене доведення можна перетворити в повне).

Тоді, за індуктивним припущенням, $\mathfrak{B}_j$ і $\mathfrak{B}_m$ — тавтології. Застосування правила MP до тавтологій приводить до тавтологій (с. 61). Тому $\mathfrak{B}_k$ також є тавтологією.

Таким чином, з індуктивного припущення випливає, що $\mathfrak{B}_k$ — тавтологія. Інакше кажучи, якщо кожен член послідовності (14) з номером, меншим ніж k, є тавтологією, то тавтологією є і член цієї послідовності з номером k.

* k — фіксоване, але довільне натуральне число.

За принципом математичної індукції доводжуване твердження справджується для всіх натуральних чисел $i \leqslant n$, зокрема, для числа n, тобто $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}$ — тавтологія.

MT2 встановлює дуже важливу властивість теорем числення висловлень. Вона дає впевненість у тому, що серед теорем числення висловлень не має жодної формули, відмінної від тотожно істинної.

Цю властивість називають несуперечністю відносно істинності, несуперечністю відносно інтерпретації або семантичною[1] несуперечністю.

Метатеорема 2 іноді формулюється так:

Числення висловлень—теорія семантично несуперечна.

Введемо тепер поняття несуперечності, яке, на відміну від семантичної несуперечності, є незалежним від інтерпретації.

Означення. *Теорія $\mathcal{L}$ називається* ***внутрішньо несуперечною*** або несуперечною в класичному розумінні, якщо не існує формули $\mathfrak{A}$, вираженої в термінах $\mathfrak{B}$, такої, що $\mathfrak{A}$ і $\neg\mathfrak{A}$ одночасно є теоремами теорії $\mathfrak{B}$. Теорія, яка не є внутрішньо несуперечною, називається внутрішньо суперечною.

Метатеорема 3 (MT3). *Числення висловлень — теорія внутрішньо несуперечна.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ — довільна теорема числення висловлень. За MT2 $\mathfrak{A}$ — тавтологія. Тоді $\neg\mathfrak{A}$ набуває при всіх розподілах істинісних значень пропозиційних букв, які входять в $\mathfrak{A}$, значення 0 і тому не може бути тавтологією. Отже, згідно з MT2 (точніше, в силу контрапозиції до MT2), $\neg\mathfrak{A}$ не є теоремою числення висловлень.

Таким чином, $\mathfrak{A}$ і $\neg\mathfrak{A}$ одночасно не можуть бути теореми числення висловлень. Зважаючи на довільність формули $\mathfrak{A}$, MT3 доведено.

Поняття внутрішньої несуперечності застосоване тільки в тих теоріях, де є символ заперечення. Щоб позбутися цього обмеження і щоб поняття несуперечності було вільним від усякої інтерпретації, вводять відповідне означення несуперечності.

Означення. *Теорія $\mathcal{L}$ називається синтаксично несуперечною, або несуперечною в розумінні Поста, якщо*

[1] Слово «семантика» означає частину вчення про мову, в якій йдеться про **смисл** слів.

існує хоча б одна формула, виражена в термінах цієї теорії, яка не є теоремою $\mathcal{L}$.

Теорія, яка не є синтаксично несуперечною, називається синтаксично суперечною. Іншими словами, *теорія $\mathcal{L}$ синтаксично суперечна тоді і тільки тоді, коли кожна формула, виражена в термінах теорії $\mathcal{L}$, теорема.*

Метатеорема 4 (МТ 4). *Числення висловлень — теорія синтаксично несуперечна.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто, що кожна формула числення висловлень — теорема. Тоді для довільної формули $\mathfrak{A}$ числення висловлень як $\mathfrak{A}$, так і $\neg\mathfrak{A}$ є його теоремами, що суперечить МТ3.

Ця суперечність означає, що зроблене припущення неправильне. Отже, числення висловлень — теорія синтаксично несуперечна.

Оскільки в синтаксично суперечній теорії всі формули є теоремами, то така теорія не має пізнавальної цінності, поняття доведення в ній втрачає смисл. Тому проблема несуперечності для формальної теорії є основною.

Ми вивели синтаксичну несуперечність числення висловлень з внутрішньої, а останню — з семантичної несуперечності цього числення.

Легко довести, що: а) з синтаксичної суперечності будь-якої формальної теорії, в алфавіті якої є символ операції заперечення, слідує її внутрішня суперечність; б) з внутрішньої суперечності формальної теорії слідує її семантична суперечність.

Доведення. а) Досить згадати, що в синтаксично суперечній теорії всі формули є теоремами. Отже, для довільної формули $\mathfrak{A}$ як $\mathfrak{A}$, так і $\neg\mathfrak{A}$, є теореми.

б) Дано, що теорія $\mathcal{L}$ — внутрішньо суперечна, тобто існує така формула $\mathfrak{A}$, виражена в термінах $\mathcal{L}$, що $\mathfrak{A}$ і $\neg\mathfrak{A}$ є теоремами $\mathcal{L}$. Якщо $\mathfrak{A}$ при цьому не є тотожно істинною в $\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ — семантично суперечна. Якщо $\mathfrak{A}$ — тотожно істинна, то $\neg\mathfrak{A}$ — тотожно хибна; а оскільки $\neg\mathfrak{A}$ теж теорема $\mathcal{L}$, то знову $\mathcal{L}$ — семантично суперечна теорія.

Крім того, в кожній формальній теорії, в якій, як в численні висловлень, виконується правило МР і теорема 6, із внутрішньої суперечності теорії $\mathcal{L}$ слідує її синтаксична суперечність.

Справді, з внутрішньої суперечності $\mathcal{L}$ слідує, що знайдеться така формула $\mathfrak{A}$, що

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg\mathfrak{A} \tag{16}$$

і

$$\vdash_{\mathcal{L}} \mathfrak{A}. \tag{17}$$

З теореми 6, а також з формули (16) і (17) в результаті дворазового застосування МР дістаємо $\vdash_{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}$, тобто довільна формула теорії $\mathcal{L}$ є теоремою $\mathcal{L}$.

§ 5. Повнота числення висловлень

Метатеорема 2 означає, що для довільної формули $\mathfrak{A}$ числення висловлень умова «бути тотожно істинною формулою» необхідна для того, щоб $\mathfrak{A}$ була теоремою. Природно виникає запитання: чи буде ця умова також і достатньою?

Інакше кажучи, чи має місце твердження, обернене до МТ2, тобто, має місце метатеорема:

Якщо $\mathfrak{A}$ — тотожно істинна формула числення висловлень, то $\mathfrak{A}$ — теорема цього числення.

Відповідь на це запитання стверджувальна, але обгрунтування її значно складніше, ніж доведення МТ2.

Перш за все зауважимо, що таблиця істинності логічної операції алгебри висловлень визначає певні формальні вивідності в численні висловлень. Як саме будуються ці формальні вивідності для окремих рядків таблиці, ми розглянемо на конкретних прикладах.

Нехай маємо таблицю операції заперечення.

p_1	$\neg p_1$
0	1
1	0

Першому рядку таблиці відповідає вивідність $\neg p_1 \vdash \neg p_1$, яка має місце за теоремою 1 і означенням вивідності, другому рядку — вивідність $p_1 \vdash \neg\neg p_1$, що справджується за теоремою 3 і означенням вивідності.

Аналогічно, чотирьом рядкам таблиці імплікації

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

відповідають такі чотири вивідності:

$$1)\ \neg p_1,\ \neg p_2 \vdash p_1 \to p_2; \quad 2)\ \neg p_1,\ p_2 \vdash p_1 \to p_2;$$

$$3)\ p_1,\ \neg p_2 \vdash \neg (p_1 \to p_2); \quad 4)\ p_1,\ p_2 \vdash p_1 \to p_2.$$

Для ілюстрації встановимо вивідність 3).

1. $p_1,\ \neg p_2$ — припущення;
2. $p_2 \to (\neg p_2 \to \neg (p_1 \to p_2))$ (T7);
3. $\neg (p_1 \to p_2)$ (2, 1, MP два рази)

Інші вивідності рекомендуємо встановити самостійно.

Ці чотири вивідності справджуються за означенням формальної вивідності і 1); 2) — за теоремою 6; 3) — за теоремою 7; 4) — за (S1).

Їх можна об'єднати, ввівши таке символічне позначення:

$$p_i' = \begin{cases} p_i, & \text{якщо } |p_i| = 1; \\ \neg p_i, & \text{якщо } |p_i| = 0. \end{cases}$$

Тоді вивідності 1), 2), 3), 4) можна записати у вигляді $p_1',\ p_2' \vdash (p_1 \to p_2)'$, а дві вивідності, що відповідають таблиці заперечення,— у вигляді $p_1' \vdash p_1'$.

Покажемо, що для довільної формули числення висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ має місце аналогічне співвідношення, якщо додатково ввести позначення

$$\mathfrak{A}' = \begin{cases} \mathfrak{A}, & \text{якщо } |\mathfrak{A}| = 1; \\ \neg \mathfrak{A}, & \text{якщо } |\mathfrak{A}| = 0. \end{cases}$$

Лема. *Для довільної формули числення висловлень $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ має місце вивідність*

$$p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}'(p_1, \ldots, p_n).$$

Доведення. Лему доведемо за повною індукцією по числу символів логічних операцій m у формулі $\mathfrak{A}$.

При $m = 0$ $\mathfrak{A}$ — атомарна формула (пропозиційна буква), і лема, очевидно, справджується ($p_i' \vdash p_i'$).

Індуктивне припущення сформулюємо так: *твердження леми справджується для всіх формул з числом символів логічних операцій, меншим, ніж m.*

На основі цього припущення доведемо, що лема справджується і для формул з числом символів логічних операцій, що дорівнює m.

Формула $\mathfrak{A}$ має вигляд: 1) $\neg \mathfrak{A}_1$ або 2) $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (остання логічна операція в $\mathfrak{A}$ є або заперечення, або імплікація).

1) $\mathfrak{A} = \neg \mathfrak{A}_1$, причому для $\mathfrak{A}_1$ виконується індуктивне припущення, бо число символів логічних операцій в $\mathfrak{A}_1$ менше, ніж m. Тому справджується співвідношення

$$p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}_1'(p_1, \ldots, p_n). \tag{18}$$

Тут можливі два випадки:

а) на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}| = 1$. Тоді $|\mathfrak{A}_1| = 0$. За означенням $\mathfrak{A}_1'$ і $\mathfrak{A}'$ маємо $\mathfrak{A}_1' = \neg \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Таким чином, із співвідношення (18) випливає $p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}'$;

б) на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}| = 0$. Тоді $|\mathfrak{A}_1| = 1$. За означенням $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1$ і з (18) слідує: $p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}_1$. Далі, $\mathfrak{A}_1 \to \neg\neg \mathfrak{A}_1$, згідно з теоремою 3. Отже, $\mathfrak{A}_1 \vdash \neg\neg \mathfrak{A}_1$, а тому $p_1', \ldots, p_n' \vdash \neg\neg \mathfrak{A}_1$. Беручи до уваги, що $\neg\neg \mathfrak{A}_1 = \neg \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, маємо $p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}'$.

Таким чином, якщо $\mathfrak{A} = \neg \mathfrak{A}_1$, то з індуктивного припущення слідує, що лема має місце і для формул, число символів логічних операцій яких дорівнює m.

Доведемо тепер, що це саме твердження має місце і для випадку, коли $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$, причому для $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ справджується індуктивне припущення. Тут можливі три випадки:

а) на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}| = 0$. Тоді $|\mathfrak{A}_1| = 1$, $|\mathfrak{A}_2| = 0$, $|\mathfrak{A}_1'| = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2' = \neg \mathfrak{A}_2$. За індуктивним припущенням,

$$p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1; \tag{19}$$

$$p_1', \ldots, p_n' \vdash \mathfrak{A}_2' = \neg \mathfrak{A}_2. \tag{20}$$

Тепер запишемо доведення в такому вигляді.

1. $p'_1, \ldots, p'_n$ (припущення);
2. $\mathfrak{A}_1$ (1, 19);
3. $\neg\mathfrak{A}_2$ (1, 20);
4. $\mathfrak{A}_1 \to (\neg\mathfrak{A}_2 \to \neg(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2))$ (теорема 7);
5. $\neg\mathfrak{A}_2 \to \neg(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2)$ (2, 4, MP);
6. $\neg(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2)$ (3, 5, MP);
7. $\neg\mathfrak{A}$ (6, беручи до уваги 2));
8. $\mathfrak{A}'$ (7, враховуючи а));

$p'_1, \ldots, p_n \vdash \mathfrak{A}'$ (за означенням вивідності);

б) на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}| = 1$ і $|\mathfrak{A}_2| = 1$, значення $\mathfrak{A}_1$ — довільне. Тоді

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \quad (i_1),$$

$$\mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}_2 \quad (i_2).$$

За індуктивним припущенням,

$$p'_1, \ldots, p_n \vdash \mathfrak{A}'_2. \qquad (21)$$

Потім запишемо:

1. $p'_1, \ldots, p'_n$ (припущення);
2. $\mathfrak{A}'_2$ (1, 21);
3. $\mathfrak{A}_2$ (2, i_2);
4. $\mathfrak{A}_2 \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2)$ (S1);
5. $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (3, 4, MP);
6. $\mathfrak{A}$ (5, за умовою);
7. $\mathfrak{A}'$ (6, i_1);

$p'_1, \ldots, p_n \vdash \mathfrak{A}'$ (за означенням вивідності);

в) на розглядуваному наборі $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2| = 1$ і $|\mathfrak{A}_1| = 0$ (значення $\mathfrak{A}_2$ — довільне);

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \ (i_3),$$

$$\mathfrak{A}'_1 = \neg\mathfrak{A}_1.$$

За індуктивним припущенням,

$$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \mathfrak{A}'_1 = \neg\mathfrak{A}_1. \qquad (22)$$

Далі маємо:

1. $p'_1, \ldots, p'_n$ (припущення);
2. $\neg\mathfrak{A}_1$ (1, 22);
3. $\neg\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2)$ (теорема 6);
4. $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (2, 3, MP);
5. $\mathfrak{A}$ (4, за умовою);
6. $\mathfrak{A}'$ (5, i_3);

$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \mathfrak{A}'$ (за означенням вивідності).

Таким чином, в усіх можливих випадках в того, що вивідність

$$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \mathfrak{A}' \qquad (23)$$

має місце для всякої формули $\mathfrak{A}$, яка містить менше ніж m символів логічних операцій, слідує, що формула (23) має місце і для кожної формули, що містить рівно m таких символів.

За принципом повної індукції лема справджується для всіх формул, які містять будь-яке число символів логічних операцій, тобто для всіх формул числення висловлень.

Лему доведено.

Метатеорема 5 (МТ 5). *Для довільної формули числення висловлень $\mathfrak{A}$, якщо $\models \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$, тобто, якщо $\mathfrak{A}$ — тавтологія, то $\mathfrak{A}$ — теорема.*

Доведення. За попередньою лемою

$$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \mathfrak{A}'(p_1, \ldots, p_n). \qquad (24)$$

Оскільки $\mathfrak{A}$ — тавтологія, то $\mathfrak{A}'$ збігається з $\mathfrak{A}$ при всіх розподілах істинісних значень $p_1, \ldots, p_n$. Тому

$$p'_1, \ldots, p'_n \vdash \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n). \qquad (25)$$

Застосовуючи до (25) метатеорему дедукції, дістанемо

$$p'_1, \ldots, p_{n-1} \vdash p'_n \to \mathfrak{A}. \qquad (26)$$

Це співвідношення включає дві вивідності, залежно від того, чи $p'_n = p_n$, чи $p'_n = \neg p_n$, а саме,

$$p'_1, \ldots, p'_{n-1} \vdash p_n \to \mathfrak{A}; \qquad (27)$$

$$p'_1, \ldots, p'_{n-1} \vdash \neg p_n \to \mathfrak{A}. \qquad (28)$$

Продовження доведення запишемо так:

1. $p'_1, \ldots, p'_n$ (припущення);
2. $p_n \to \mathfrak{A}$ ((27), 1);
3. $\neg p_n \to \mathfrak{A}$ (2, (28));
4. $(p_n \to \mathfrak{A}) \to ((\neg p_n \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})$ (теорема 8);
5. $(\neg p_n \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ (4, (27), MP);
6. $\mathfrak{A}$ (5, (28), MP).

Звідси за означенням вивідності маємо

$$p'_1, \ldots, p'_{n-1} \vdash \mathfrak{A}. \qquad (29)$$

Вивідність (29) показує, що в процесі доведення ми позбулись одного з припущень — p'_n. Повторюючи цей процес n раз, можна звільнитися від усіх n припущень $p_1, \ldots, p_n$ і, таким чином, дістати $\vdash \mathfrak{A}$. Отже, якщо $\models \mathfrak{A}$, то $\vdash \mathfrak{A}$.

Доведена в МТ5 властивість числення висловлень називається семантичною повнотою, або повнотою відносно інтерпретації, або повнотою в широкому розумінні.

Ця властивість дуже важлива, оскільки на її основі можна зробити висновок, що схем аксіом S1, S2, S3 і правила виводу MP цілком досить, щоб вивести всі змістовно тотожно істинні формули числення висловлень.

МТ5 сформульовано для випадку, коли формула $\mathfrak{A}$ — довільна формула числення висловлень, тобто містить не більше, ніж два вихідних символи логічних операцій: $\neg$ і $\to$. Вона зберігає силу, якщо $\mathfrak{A}$ вважати довільною формулою алгебри висловлень, яка містить, крім вихідних символів числення висловлень, ще три символа логічних операцій, а саме, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, які в численні висловлень ми вживали як скорочення. Точніше, має місце такий наслідок.

Наслідок. *Якщо $\mathfrak{A}$ — довільна формула алгебри висловлень, яка є тавтологією, то $\mathfrak{A}$ — теорема або скорочення теореми числення висловлень.*

Справді, кожна формула алгебри висловлень рівносильна (логічно еквівалентна) певній формулі, вираженій в термінах не більше, ніж двох логічних операцій $\neg$ і $\to$.

Об'єднуючи МТ2 і МТ5, дістаємо таке твердження: *Для того щоб формула $\mathfrak{A}$ числення висловлень була теоремою, необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{A}$ була тотожно істинною.*

Для доведення дальших теорем числення висловлень (чи їх скорочень) доцільно поступити тепер таким чином (щоправда, при цьому ми встановимо факт існування чи не існування доведення, а не саме доведення).

Вважаючи даний вираз формулою алгебри висловлень, за одним з відомих алгоритмів встановлюємо, чи є $\mathfrak{A}$ тотожно істинною, чи ні. Згідно з доведених метатеорем цим повністю вирішується питання, чи буде $\mathfrak{A}$ теоремою (скороченням теореми) числення висловлень, чи ні.

Наприклад, скороченими записами теорем числення висловлень є комутативні, асоціативні, дистрибутивні закони для кон'юнкції і диз'юнкції, закони де Моргана, як і всі інші раніш встановлені тавтології.

Зазначимо, що існує багато різних доведень семантичної повноти числення висловлень ([4], [22], [33], [34]). Ідея вищенаведеного доведення належить угорському математику Кальмару.

§ 6. Розв'язність, незалежність аксіом числення висловлень

Розв'язувальним методом для формальної теорії L називають метод, за допомогою якого для довільної формули $\mathfrak{A}$ із L можна за скінченне число кроків визначити, чи буде $\mathfrak{A}$ теоремою L, чи ні.

Проблема вирішення для L полягає в тому, щоб знайти розв'язувальний метод для L, або довести, що такого методу немає.

У першому випадку кажуть, що проблема вирішення для L розв'язується позитивно, у другому — негативно. У першому випадку теорію L називають розв'язною в другому — нерозв'язною.

Переходячи до проблеми вирішення в численні висловлень, зауважимо, що за означенням поняття теореми числення висловлень ще не можна визначити, чи розв'язується проблема вирішення для даного числення в тому або іншому смислі.

Порівняємо з цієї точки зору поняття теореми і поняття доведення. В останньому випадку для кожної заданої послідовності формул числення висловлень можна, виходячи з означення формального доведення, перевірити суто механічно за скінченне число кроків — буде ця послідовність доведенням, чи ні. Проте щоб з'ясувати, чи є дана формула $\mathfrak{A}$ теоремою числення висловлень, чи ні, виходячи безпосередньо з означення теореми, треба перевірити безліч послідовностей і визначити, є вони доведенням $\mathfrak{A}$ чи ні. Цього, звичайно, не можна зробити за скінченне число кроків.

Проте проблема вирішення для числення висловлень розв'язується дуже легко, якщо використати метатеореми 5 і 2.

Метатеорема 6 (МТ6). *Числення висловлень — теорія розв'язна.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ — довільна формула числення висловлень. Застосуємо до неї один з відомих алгоритмів перевірки $\mathfrak{A}$ на тавтологію. Складемо для $\mathfrak{A}$ таблицю істинності і розглянемо її останній стовпчик.

Це, звичайно, можна зробити за скінченне число кроків. Якщо виявиться, що $\mathfrak{A}$ — тавтологія (останній стовпчик таблиці буде містити лише одиниці), то за МТ5 $\mathfrak{A}$ — теорема. Якщо $\mathfrak{A}$ — не тавтологія (останній стовпчик таблиці істинності містить хоча б один нуль), то за МТ2 (за її контрапозицією) $\mathfrak{A}$ не є теоремою.

В основу аксіоматики числення висловлень ми поклали не окремі аксіоми, а схеми аксіом, тобто певні підмножини множини аксіом. Тому і поняття незалежності сформулюємо для підмножини множини аксіом.

Означення. *Підмножину A множини аксіом теорії L називають незалежною, якщо жодну аксіому з A не можна вивести за допомогою правил виводу теорії L з аксіом L, які не входять в A.*

Метатеорема 7 (МТ 7). *Кожна із схем аксіом* (S1), (S2), (S3) *незалежна.*

Доведення. Ідея доведення незалежності полягає в тому, що:

а) будується відповідна інтерпретація формул теорії L;

б) визначається певна властивість P формул інтерпретації (формули, що мають цю властивість, називаються виділеними);

в) встановлюється, що всі схеми аксіом, крім тієї, незалежність якої доводиться, мають властивість P;

г) доводиться, що правила виводу теорії L зберігають властивість P;

д) встановлюється, що жодний окремий випадок схеми аксіом, незалежність якої доводиться, не має властивості P.

Тим самим незалежність розглядуваної схеми аксіом буде доведена. Доведемо незалежність схеми аксіом S1.

Доведення. а) для побудови інтерпретації покладемо, що кожна пропозиційна буква пробігає множину $\{0, 1, 2\}$, а логічні операції $\neg$ і $\rightarrow$ означені такими таблицями (с. 97):

б) за властивість P приймемо властивість формул набувати при всіх розподілах значень 0, 1, 2 тільки значення 0 (виділене значення);

в) покажемо, що всі аксіоми схеми S2 мають властивість P.

Припустимо супротивне. Тоді знайдеться аксіома схеми

$$((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)), \qquad (30)$$

p_1	$\neg p_1$
0	1
1	1
2	0

p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

яка набуває значення 1 або 2 хоча б на одному наборі значень p_1, p_2, p_3. Перша можливість відпадає за означенням імплікації (остання не дорівнює, взагалі, 1). Таким чином, $|(30)| = 2$ на якомусь наборі. Розглянемо набір (p_1, p_2, p_3). За означенням імплікації, антецедент імплікації (30) не може набувати значення 2, бо тоді $|(30)| = 0$, а, будучи імплікацією, він не набуває також значення 1. Отже, на розглядуваному наборі

$$|p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)| = 0. \qquad (31)$$

При цьому значення консеквента імплікації (30) не може дорівнювати 0 і 1, тобто

$$|(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)| = 2. \qquad (32)$$

1) $|p_1| = 2$. Тоді $|p_1 \rightarrow p_2| = |p_1 \rightarrow p_3| = 0$ і $|(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3)| = 0$, що суперечить (32).

2) $|p_1| = 1$. Тоді, згідно з (31), маємо $|p_2 \rightarrow p_3| = 2$. Беручи до уваги співвідношення (32), дістаємо

$$|p_1 \rightarrow p_2| = 0. \qquad (33)$$

Звідси $|p_2| = 2$ і $|p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)| = 1 \rightarrow (2 \rightarrow \ldots) = 1 \rightarrow 0 = 2$, що суперечить співвідношенню (31).

3) $|p_1| = 0$. Тоді, згідно із співвідношенням (31) і означенням імплікації,

$$|p_2 \rightarrow p_3| = 0. \qquad (34)$$

З (32) дістаємо $|p_1 \to p_2| = 0$. Отже, $|p_2| = 0$, а внаслідок (34) $|p_3| = 0$, що суперечить (32). (Справді, $(0 \to 0) \to \to (0 \to 0) = 0 \neq 2$).

Ця суперечність в усіх можливих випадках означає, що зроблене припущення неправильне, тобто, що всі аксіоми схеми мають властивість P.

Аналогічно доведемо, що всі аксіоми схеми S3 мають властивість P. Припустимо супротивне. Тоді знайдеться аксіома схеми S3.

$$(\neg p_1 \to \neg p_2) \to ((\neg p_1 \to p_2) \to p_1), \tag{35}$$

яка хоча б на одному наборі (p_1, p_2, p_3) набуває значення 2. Розглянемо цей набір. За означенням імплікації,

$$|\neg p_1 \to \neg p_2| = 0\,[1]. \tag{36}$$

За означенням «$\neg$», маємо $|\neg p_1| = 0$ або $|\neg p_1| = 1$. У першому випадку $|p_1| = 2$ і, зіставляючи (36) з означенням імплікації, дістаємо $|\neg p_2| = 0$. Тоді $|(35)| = = (\neg 2 \to 0) \to ((\neg 2 \to 2) \to 2) = 0 \to (2 \to 2) = 0$, що суперечить припущенню. У другому випадку при $|\neg p_1| = 1$ із співвідношення (36), за означенням імплікації, маємо $|\neg p_2| = 2$, всупереч означенню «$\neg$». Отже, всі аксіоми схеми S3 теж мають властивість P;

г) тепер покажемо, що правило MP зберігає властивість формул набувати тільки значення 0 (виділене значення) на всіх наборах.

Справді, для довільних формул числення висловлень $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$, якщо $|\mathfrak{A}_1| = 0$ і $|\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2| = 0$, то значення $\mathfrak{A}_2$ не може бути відмінним від 0. Справді, $0 \to 1 = 2$, $0 \to 2 = 2$ і тільки $0 \to 0 = 0$.

Таким чином, усі формули, вивідні із схем аксіом S2, S3, набувають тільки виділене значення, тобто мають властивість P;

д) покажемо, нарешті, що схема аксіом S1 властивості P не має.

Справді, формула $p_1 \to (p_2 \to p_1)$, яка є окремим випадком S1, набуває значення 2 при $|p_1| = 0$, $|p_2| = = 1$ $(0 \to (1 \to 0) = 0 \to 2 = 2)$.

Цим встановлено незалежність схеми аксіом S1.

Доведемо незалежність схеми аксіом S2.

---

[1] Як антецедент імплікації (35), що має значення 2, імплікація в (36) не може мати значення 2, а як імплікація, не може мати значення 1.

Доведення. Введемо таку інтерпретацію логічних операцій

p_1	$\neg p_1$
0	1
1	0
2	1

p_1	p_2	$p_1 \to p_2$
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	0
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

Характеристична властивість формул та сама, що й у випадку 1. Те, що всі формули схем S1 і S3 мають властивість P, легко довести побудовою таблиць істинності, які містять тільки 9 рядків.

p_1	p_2	$p_2 \to p_1$	S1	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \to \neg p_2$	$\neg p_1 \to p_2$	$(\neg p_1 \to p_2) \to p_1$	S3
0	0	0	0	1	1	2	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	2	0	0
0	2	0	0	1	1	2	0	0	0
1	0	2	0	0	1	2	0	2	0
1	1	2	0	0	0	0	2	0	0
1	2	0	0	0	1	2	1	2	0
2	0	1	0	1	1	2	0	1	0
2	1	0	0	1	0	0	2	0	0
2	2	0	0	1	1	2	0	1	0

Доведення того, що правило MP зберігає властивість P формул, проводиться так само, як і у випадку 1.

Схема аксіом S2 не має властивості P, тобто не всі аксіоми S2 на всіх наборах набувають виділене значення 0. Справді, її окремий випадок — аксіома

$$(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$$

набуває значення 2 при $|p_1| = |p_2| = 0$, $|p_3| = 1$, оскільки

$$(0 \to (0 \to 1)) \to ((0 \to 0) \to (0 \to 1)) =$$
$$= (0 \to 2) \to (0 \to 2) = 1 \to 1 = 2.$$

Доведемо незалежність схеми S3.

Доведення. Вважатимемо, що пропозиційні букви пробігають множину $\{0,1\}$ (означення $\neg$, $\to$ те саме, що й в алгебрі висловлень). Для довільної формули числення висловлень $\mathfrak{A}$ позначимо через $h(\mathfrak{A})$ формулу, яка утворюється з $\mathfrak{A}$ усуненням усіх символів заперечення в $\mathfrak{A}$. За характеристичну властивість формул візьмемо властивість набувати значення 1 на всіх наборах.

Тоді при заміні всіх формул $\mathfrak{A}$ на $h(\mathfrak{A})$ всі окремі випадки схем аксіом S1 і S2 матимуть цю характеристичну властивість, бо вони є тавтологіями алгебри висловлень, $h(\mathfrak{A})$ збігається для цих формул з $\mathfrak{A}$ (вони не містять знака заперечення). Проте інакше стоїть справа із схемою аксіом S3, оскільки для формули

$$(\neg p_1 \to \neg p_2) \to ((\neg p_1 \to p_2) \to p_1) = \mathfrak{A}, \qquad (37)$$

яка є окремим випадком S3,

$$h(\mathfrak{A}) = (p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to p_1) \text{ і при } |p_1| = 0,$$
$$|h(\mathfrak{A})| = 0.$$

Властивість бути тавтологією зберігається правилом MP. Отже, всі формули, вивідні із схем S1 і S2, є тавтологіями. Таким чином, формула (37) — невивідна із схем S1 і S2. Схема аксіом S3 — незалежна.

Доведена властивість незалежності аксіом числення висловлень не має такого принципіального значення, як доведення несуперечності чи повноти. Справді, залежність системи аксіом означає тільки, що є зайві аксіоми, а це теорії не загрожує.

Слід зазначити, що встановлення незалежності певного твердження часто відігравало в історії математики важливу роль. Так було із славнозвісним п'ятим постулатом Евкліда. Після тривалих спроб вивести його

в інших евклідових аксіом незалежність п'ятого постулату була встановлена фактом створення геометрії Лобачевського, несуперечність якої зводилася до несуперечності евклідової геометрії.

Те саме було з доведенням незалежності аксіоми вибору та гіпотези континууму від інших аксіом теорії множин при умові їх несуперечності.

§ 7. Приклад іншої побудови числення висловлень Поняття про конструктивну логіку

Аксіоматичну побудову класичного числення висловлень можна здійснити багатьма різними способами. Усі вони еквівалентні між собою, сукупність теорем їх та сама.

Ми розглянули побудову числення висловлень, виходячи з певної системи схем аксіом з одним правилом виводу — MP.

Намітимо тепер в загальних рисах розгляд системи, побудованої на конкретних аксіомах і на двох основних правилах виводу — MP і правилі підстановки.

Для цього виберемо аксіоматичну побудову числення висловлень, викладену у книзі П. С. Новікова [23].

В алфавіт нашої попередньої системи (§ 1) внесемо таку зміну: вихідний символ $\neg$ замінимо символом 0 і відповідно змінимо означення формули, доповнивши його пунктом «0 — формула числення висловлень».

Список аксіом міститиме чотири наступних аксіоми (зазначимо, що ці аксіоми є формулами числення висловлень, а не метамови).

A1. $p_1 \to (p_2 \to p_1)$;
A2. $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;
A3. $0 \to p_1$;
A4. $((p_1 \to 0) \to 0) \to p_1$.

Нагадаємо перш за все, що система $\{\to, 0\}$ — функціонально повна (§ 5, розд. I), тобто через $\to$ і константу 0 можна виразити всі формули алгебри висловлень.

Перших дві аксіоми є окремими випадками схеми аксіом нашої попередньої побудови (закон ствердження консеквента і закон Фреге). A3 змістовно відповідає принципу «З хибного слідує що завгодно», A4 є не що інше, як закон подвійного заперечення, бо $\neg p$ — це скорочення для $p \to 0$.

Поряд з відомим правилом МР введемо п р а в и л о п і д с т а н о в к и. Нехай $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — формули числення висловлень, $p_1, \ldots, p_n$ — різні пропозиційні змінні. Позначимо через

$$\mathrm{S}^{\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n}_{p_1 \ldots p_n}\mathfrak{A} \tag{*}$$

вираз, який утворюється з формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ внаслідок одночасної заміни всіх в х о д ж е н ь $p_1, \ldots, p_n$ відповідно формулами $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$. Говорять, що (*) утворено з $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ за правилом підстановки.

Означення доведення і теореми — ті самі, що й в § 2, проте в число правил виводу включається і правило підстановки.

Так, доведемо теорему $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ для будь-якої формули $\mathfrak{A}$.

1. $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$ (A2);
2. $(\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})) \to ((\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}))$ $(\mathrm{S}^{\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}}_{p_1\ p_2\ p_3}1)$;
3. $p_1 \to (p_2 \to p_1)$ (A1);
4. $\mathfrak{A} \to ((\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}) \to \mathfrak{A})$ $(\mathrm{S}^{\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}_{p_1\ p_2}3)$;
5. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})) \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (2, 4, MP);
6. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{A})$ $(\mathrm{S}^{\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}}_{p_1\ p_2}3)$;
7. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (5, 6, MP).

Аналогічно попередньому в цій системі вводиться поняття вивідності з припущень (гіпотез), включаючи правила підстановки, причому виявляється, що можна обмежитися застосуванням цього правила тільки до аксіом. Від цього сукупність теорем числення не звужується.

Застосування правила підстановки лише до аксіом числення обумовлює ситуацію, в якій ми знаходимося при користуванні схемами аксіом.

Тепер можна довести в системі Новікова метатеорему дедукції (нагадаємо, що при доведенні цієї метатеореми ми користувалися тільки схемами аксіом S1 і S2, окремими випадками яких є аксіоми A1 і A2). Завдяки цьому ми можемо встановити ряд вивідних правил і теорем числення, необхідних для доведення в метатеорії властивостей несуперечності і повноти даної системи.

У математиці розрізняють два види доведень — е ф е к т и в н і та н е е ф е к т и в н і.

До перших належать такі, в яких разом з доведенням існування певного математичного об'єкта дається метод

його побудови. Неефективні методи, навпаки, зводяться до доведення самого факту існування математичного об'єкта, при цьому не вказується метод його побудови і доведення проводиться незалежно від нього (так звані ч и с т і т е о р е м и існування).

Джерелом неефективних методів є закон виключеного третього. Розглянемо приклад.

Позначимо через p твердження «Гіпотеза Гольдбаха справджується». Тоді вираз «$p \vee \neg p$» — закон виключеного третього — означатиме: «Гіпотеза Гольдбаха справджується або гіпотеза Гольдбаха не справджується». Останнє висловлення істинне, але воно не просуває нас ні на крок в доведенні того, яка саме з двох можливостей має місце — p чи $\neg p$.

Конструктивна логіка, зокрема, ставить собі задачу — звільнитися від неефективних методів доведення.

Підхід конструктивної логіки характеризується тим, що для прийнятності певного твердження з точки зору цієї логіки не досить його істинності, а вимагається ще встановлюваність цього твердження ([23]).

Поняття встановлюваності визначається наступними постулатами.

B1. Кон'юнкція $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ встановлювана тоді і тільки тоді коли встановлюване $\mathfrak{A}$ і встановлюване $\mathfrak{B}$.

B2. Диз'юнкція $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ встановлювана тоді і тільки тоді, коли встановлюване $\mathfrak{A}$ або встановлюване $\mathfrak{B}$.

B3. Імплікація $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ встановлювана тоді і тільки тоді, коли встановлюваність $\mathfrak{B}$ можна звести до встановлюваності $\mathfrak{A}$, тобто кожного разу, як буде встановлено $\mathfrak{A}$, можна дістати встановлюваність $\mathfrak{B}$.

B4. Заперечення $\neg\mathfrak{A}$ встановлюване тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{A}$ — не встановлюване.

B5. Константа 0 не встановлювана (0 інтерпретується як фіксоване висловлення, про яке відомо, що воно не встановлюване).

З цих постулатів встановлюваності випливає, що закон виключеного третього класичної логіки в конструктивній логіці стає змістовно неприйнятним. Справді, прийняття цього закону, беручи до уваги постулат B2, означало б, що нам відоме розв'язання будь-якої математичної проблеми. Так, позначимо довільну математичну проблему через p. Тоді $p \vee \neg p$ означає, що або p встановлюване (дана проблема розв'язана в позитивному розумінні), або $\neg p$ встановлюване (дана проблема розв'язана в негативному розумінні).

Якщо з точки зору прийнятих постулатів B1—B5 перевірити аксіоми A1—A4, то дістанемо, що аксіоми A1—A3 будуть прийнятними в конструктивній логіці.

Так, встановлюваність A1 слідує з того, що із встановлюваності p_2 автоматично випливає встановлюваність $p_1 \to p_2$.

Для встановлюваності A3 зазначимо, що, оскільки антецедент A3 невстановлюваний, імплікація $0 \to p_1$, згідно з B3, тривіально встановлювана. Інакше, за B3, імплікація $0 \to p_1$ встановлювана тоді і тільки тоді, коли множина ситуацій, в яких константа 0 встановлена, є підмножиною множини ситуацій, в яких вищенаведена імплікація встановлювана. Перша множина порожня, а тому є підмножиною довільної множини, що й завершує обгрунтування.

Інакше стоїть справа з аксіомою A4. Справді, з невстановлюваності того, що p_1 — невстановлюване, зовсім не слідує, що p_1 — встановлюване.

Усі попередні міркування були суто змістовними, неформальними. Перш ніж перейти до аксіоматики конструктивного числення висловлень, зазначимо, що система $\{\to, 0\}$, так само, як і $\{\to, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, не є функціонально повною в конструктивному численні висловлень. Справді, відповідні співвідношення, які дають змогу виразити одні з операторів $\to$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ через інші в класичній логіці, не можна довести без допомоги закону виключеного третього, який не має місця в конструктивному численні.

Отже, за вихідну систему операцій в конструктивному численні висловлень приймемо $\{\to, \wedge, \vee, 0\}$.

Аксіомами конструктивного числення висловлень вважатимемо такі формули:

K1. $p_1 \to (p_2 \to p_1)$;
K2. $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;
K3. $0 \to p_1$;
K4. $p_1 \wedge p_2 \to p_1$;
K5. $p_1 \wedge p_2 \to p_2$;
K6. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_1 \to p_2 \wedge p_3))$;
K7. $p_1 \to p_1 \vee p_2$;
K8. $p_2 \to p_1 \vee p_2$;
K9. $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \vee p_2 \to p_3))$.

Перших три з них збігаються з аксіомами A1—A3 класичного числення висловлень, аксіоми K4—K6 характеризують оператор кон'юнкції, аксіоми K7—K9 —

оператор диз'юнкції, оператор імплікації міститься в усіх аксіомах K1—K9.

За правила виводу конструктивного числення висловлень візьмемо правило MP і правило підстановки, які було сформульовано вище. Означення доведення, теотеореми, вивідності з припущень також аналогічні відповідним введеним вище означенням.

Той факт, що формула $\mathfrak{A}$ є теоремою конструктивного числення K, записують $\vdash_K \mathfrak{A}$.

Приклад доведення в теорії конструктивного числення. Доведемо, що $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}$ для довільних формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ конструктивного числення.

1. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_1 \to p_2 \wedge p_3))$ (K6);
2. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}))$ $(S^{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}\;\mathfrak{B}\;\mathfrak{A}}_{p_1\;\;\;p_2\;p_3}1)$;
3. $p_1 \wedge p_2 \to p_2$ (K5);
4. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ $(S^{\mathfrak{A}\;\mathfrak{B}}_{p_1\;p_2}3)$;
5. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A})$ (2, 4, MP);
6. $p_1 \wedge p_2 \to p_1$ (K4);
7. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ $(S^{\mathfrak{A}\;\mathfrak{B}}_{p_1\;p_2}6)$;
8. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A}$ (5, 7, MP).

Легко довести, що в конструктивному численні виконується метатеорема дедукції.

Доведемо за допомогою МТД: $\vdash_K (p_1 \to 0) \to (p_1 \to p_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ p_1 \to 0 \\ 2.\ p_1 \end{array}\right\} \text{(припущення);}$$

3. 0 (1, 2, MP);
4. $0 \to p_1$ (K3);
5. $0 \to p_2$ $(S^{p_2}_{p_1}4)$;
6. p_2 (3, 5, MP).

Отже, $p_1 \to 0,\ p_1 \vdash_K p_2$ (1—6, за означенням вивідності). Звідси $\vdash_K (p_1 \to 0) \to (p_1 \to p_2)$ (МТД два рази).

Користуючись метатеоремою дедукції, легко вивести ряд допоміжних правил виводу, зокрема, правило силогізму

$$\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \vdash_K \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3$$

і правило перестановки посилок

$$\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \vdash_K \mathfrak{A}_2 \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3).$$

Доведемо в конструктивному численні перший закон контрапозиції: $(p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to 0) \to (p_1 \to 0))$.

$$\left.\begin{array}{l}1.\ p_1 \to p_2\\ 2.\ p_2 \to 0\end{array}\right\}\ \text{(припущення)};$$

3. $p_1 \to 0$ (1, 2, ПС).

Таким чином, $p_1 \to p_2,\ p_2 \to 0 \vdash_K p_1 \to 0$ (1—3, за означенням вивідності). Звідси, застосовуючи двічі МТД, дістанемо

$$\vdash_K (p_1 \to p_2) \to ((p_2 \to 0) \to (p_1 \to 0)).$$

Проте, деякі закони класичного числення висловлень не справджуються в конструктивній логіці. Це, крім закону виключеного третього,

закон подвійного заперечення:

$$\neg\neg p_1 \to p_1,\ \text{або}\ ((p_1 \to 0) \to 0 \to p_1;$$

другий закон контрапозиції:

$$((p_2 \to 0) \to (p_1 \to 0)) \to (p_1 \to p_2);$$

закон де Моргана:

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \to \neg p_1 \vee \neg p_2$$

та ін.

У цьому зв'язку слід зазначити істотну відмінність між запереченням в конструктивному і в класичному численні висловлень.

В останньому для кожної формули $\mathfrak{A}$ існує рівнозначна їй формула, яка являє собою заперечення деякої формули, а саме, $\neg\neg\mathfrak{A}$.

У конструктивному численні це не так, оскільки тут не має місця закон подвійного заперечення.

Доведення невивідності у формальному конструктивному численні вищезгаданих законів є досить складним, і ми його тут не розглядатимемо. Виклад цих та ряду інших принципіальних питань міститься в [23].

Розглянемо коротко цікаву інтерпретацію конструктивного числення, запропоновану в 1932 р. А. М. Колмогоровим.

В основу цієї інтерпретації покладено те, що класична логіка систематизує схеми доведення теоретичних тверджень, а конструктивна логіка здійснює те саме для розв'язування задач.

В інтерпретації Колмогорова пропозиційні змінні пробігають множину задач, тобто $p_1, p_2, p_3, \ldots$ інтерпретуються як задачі.

Логічним операціям $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$ дається така інтерпретація:

$p_1 \wedge p_2$ — розв'язати обидві задачі, p_1 і p_2.

$p_1 \vee p_2$ — розв'язати хоча б одну із задач, p_1 чи p_2.

$p_1 \to p_2$ — розв'язати задачу p_2, якщо відомо розв'язання задачі p_1.

$\neg p_1$ — припускаючи, що задача p_1 розв'язана, прийти до суперечності.

Формула конструктивного числення $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ трактується як певна функція задач $p_1, \ldots, p_n$, а тотожна істинність формули $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$ — як наявність загального методу, за яким можна розв'язати будь-яку задачу $\mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$, де $p_1, \ldots, p_n$ — довільні конкретні задачі.

Завдяки інтерпретації Колмогорова стає зрозумілою неправомірність в конструктивному численні вищезгаданих законів класичної логіки — закону виключеного третього, закону подвійного заперечення, другого закону контрапозиції тощо.

Розділ III

ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

§ 1. Предикати, логічні операції над ними

Числення висловлень, побудоване в попередніх розділах, як алгебра висловлень і як аксіоматична теорія, будучи складовою частиною всіх логічних числень, зовсім недостатнє навіть для аналізу дуже простих міркувань.

Розглянемо, наприклад, таке міркування:

Іван — старший від Петра, Петро — старший від Василя, отже, Іван — старший від Василя. (*)

Правильність цього міркування не викликає сумнівів. Перекладемо його на мову алгебри висловлень. Міркування (*) складається з трьох простих (атомарних) висловлень: «Іван — старший від Петра», «Петро — старший від Василя», «Іван — старший від Василя». Замінимо їх пропозиційними буквами p_1, p_2, p_3 відповідно.

Тоді міркування (*) запишеться символічно у вигляді

$$p_1,\ p_2 \models p_3. \qquad (1)$$

Співвідношення (1) справджується, як відомо, тоді і тільки тоді, коли тотожно істинною є формула алгебри висловлень

$$p_1 \wedge p_2 \to p_3. \qquad (2)$$

Проте формула (2) не є тотожно істинною, оскільки при $|p_1| = |p_2| = 1, |p_3| = 0$ вираз (2) набуває значення 0. Отже, і співвідношення (1) не справджується всупереч очевидній правильності міркування (*).

Справа в тому, що, позначаючи атомарні висловлення пропозиційними буквами, ми розглядаємо ці висловлення як неподільні цілі, абстрагуючись від їхньої внутрішньої структури, тоді як саме ця структура є суттєвою.

В усіх трьох висловленнях йдеться про те саме відношення «старше», і характер міркування зміниться, якщо слово «старше» замінити, наприклад, у другому висловленні словом «молодше» (тоді зроблений висновок не випливатиме з даних посилок).

Таким чином, навіть для проведення найпростіших міркувань стає необхідним аналіз внутрішньої структури висловлення.

Проте такий аналіз неможливий на базі алгебри числення висловлень, оскільки в цих теоріях просте висловлення виступає як вихідний пункт дослідження, як об'єкт, позбавлений частин, позбавлений внутрішньої структури. Тому стає необхідним вихід за межі логіки висловлень, він здійснюється в логіці предикатів.

Користуючись граматичними термінами, внутрішню структуру висловлення називають суб'єктно-предикатною. Суб'єкт — назва предмету, а предикат — назва властивості предмету чи відношення між предметами, про які йдеться у висловленні. У граматиці суб'єкт — це підмет, а предикат — присудок. Проте аналогія між логікою і граматикою в даному разі дуже умовна і це треба мати на увазі. Так, суб'єкт (логічний) часто виражається групою слів, він може в реченні виконувати граматичну функцію не тільки підмета, але й доповнення тощо.

Перш за все треба суб'єктно-предикатну структуру висловлення виразити відповідною символікою (логічною). Вихідним пунктом при цьому є поняття предиката. Для символічного позначення предикатів вживатимемо великі і латинські букви, а для позначення суб'єктів — малі латинські букви, причому використовується математична практика функціональних позначень.

Так, висловлення «11 — просте число» можна записати як A (11), а висловлення «Іван старше від Петра» — як C (i, p).

Зазначимо, що для багатьох математичних предикатів існують спеціальні символічні позначення. Наприклад, $=$, $<$, $>$ тощо. У тому разі, коли для предикатів не має загальновживаних символічних позначень, вводимо для них позначення відповідними буквами. Так, у попередньому абзаці запис A (x) означає «x — просте число», а C (x, y) означає «x старше y».

У розглянутих прикладах «11», «i», «p» — предметні константи, тобто назви або імена певних предметів, а «x», «y» — предметні змінні, замість яких можна підставляти назви предметів, із певної множини, на якій визначено даний предикат.

У кожній окремій галузі знання доцільно виділити так звану універсальну множину (універсум), для якої всі розглядувані в даній галузі множини будуть підмножинами. У ботаніці такою множиною є множина рослин, у планіметрії — множина всіх точок площини тощо. Для першого з вищерозглянутих прикладів за універсальну множину можна прийняти множину натуральних чисел, для другого — множину людей.

Предметні константи і предметні змінні називатимемо термами (звичайно, це не є означенням терма). У розглянутих прикладах 11, i, p, x, y — терми. Якщо використати функціональну термінологію, то терми є аргументами предикатів, а значеннями предикатів є висловлення.

Предикат, означений на множині M — функція, аргументи якої пробігають цю множину і значеннями якої є висловлення (пропозиційна функція). Вираз, яким записується предикат, це висловлювальна форма, с. 12.

Вивчаючи висловлення, ми абстрагуємося від їхнього змісту і беремо до уваги тільки істинісні значення їх. Аналогічно в логіці предикатів значення предикатів розглядаються з погляду істинності чи хибності їх. Таким чином, кожен предикат визначає певну логічну функцію, аргументами якої є елементи універсальної множини, а значеннями — 1 і 0 («істинне», «хибне»). Так, предикат $A(x)$ («x — просте число») на множині натуральних чисел визначає логічну функцію, яка для значень аргументу 1, 2, 3, 4, 5, 6 набуває відповідно значення: «хибне», «істинне», «істинне», «хибне», «істинне», «хибне», тобто 0, 1, 1, 0, 1, 0.

За числом аргументів розрізняють одномісні, двомісні, n-місні предикати (висловлювальні форми). Так, предикат «x — просте число» — одномісний, предикат «x любить y» — двомісний, а в и р а з $x + y = z$ — тримісна висловлювальна форма.

Одномісні предикати виражають в л а с т и в о с т і відповідних елементів універсальної множини, n-місні предикати при $n > 1$ виражають в і д н о ш е н н я між її елементами. Так, предикат «3 ділить x» на множині натуральних чисел N визначає властивість натурального числа x — бути кратним 3, а предикат $x + y = z$ на множині N задає відношення між трійкою натуральних чисел x, y, z, яке виконується тоді і тільки тоді, коли $x + y = z$.

Зазначимо, що вводиться також поняття 0-місного предиката, під ним розуміють просто висловлення.

У випадку скінченної універсальної множини логічну функцію, яка визначається предикатом, можна в принципі задавати таблицею (тоді кажуть, що предикат задано таблицею).

Наприклад, одномісний предикат «x — просте число» можна на множині натуральних чисел, менших ніж 16, задати таблицею з одним входом.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(x)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Двомісний предикат $y > x$ на множині пар натуральних чисел $x \leqslant 10$, $y \leqslant 10$ можна задати таблицею з двома входами.

Проте із зростанням числа елементів m універсальної множини і число аргументів предиката n така таблиця

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

швидко стає досить громіздкою. Так, при $m = 10$, $n = 2$ число елементів дорівнює $10^2 = 100$, при $m = 10$, $n = 3$ це число становитиме $10^3 = 1000$.

У загальному випадку для n-місного предиката, означеного на множині з m елементів, матимемо m^n елементів таблиці, що дорівнює числу розміщень з повтореннями з m елементів по n. Тоді число різних n-місних логічних функцій (предикатів) на m-елементній універсальній множині становитиме 2^{m^n} (число розміщень з повтореннями з двох елементів (0 і 1) по m^n, або число підмножин множини, яка містить m^n елементів).

Так, число різних двомісних логічних функцій, визначених на множині з трьох елементів, є $2^{3^2} = 2^9 = 512$, а для тримісних логічних функцій на тій самій множині це число дорівнює $2^{3^3} = 2^{27} = (2^{10})^2 \cdot 2^7$, тобто воно перевищує вже сто мільйонів.

Таким чином, практичне застосування зображення логічних функцій (предикатів) у вигляді таблиць обмежене невеликими значеннями m і n.

У математиці предикати зустрічаються дуже часто: рівняння, нерівності, арифметичні та алгебраїчні операції, подільність чисел, конгруентність, подібність геометричних фігур тощо.

У шкільній математиці предикатами називають речення, які містять змінні. Вони перетворюються на висловлення внаслідок заміни всіх змінних назвами відповідних предметів — елементів універсальної множини.

Наприклад, на множині всіх натуральних чисел рівняння $xy = z$ є тримісний предикат. Замінивши параметр x назвою натурального числа 5, дістанемо рівняння $5y =$

$= z$, тобто двомісний предикат. Замінюючи тут параметр y назвою числа 3, матимемо одномісний предикат $5 \cdot 3 = z$. Нарешті, внаслідок заміни параметра z назвою натурального числа 15 дістаємо нуль-місний предикат, тобто висловлення $5 \cdot 3 = 15$ (у даному разі — істинне).

Для вивчення предикатів математичними методами треба ввести змінні для предикатів, тобто символи, замість яких можна підставляти предикати (і тільки предикати).

Такими змінними у нас є букви P, Q, R (можливо з індексами). Самі ці символи не є предикатами аналогічно тому, як змінні для висловлень не є висловленнями. P, Q, R — це символи для довільних предикатів. Їх називають предикатними змінними, а також змінними предикатами.

Оскільки значеннями предикатів є висловлення, то над предикатами можна виконувати такі логічні операції алгебри висловлень: кон'юнкцію, диз'юнкцію, заперечення, імплікацію, еквіваленцію. Означимо ці операції.

Нехай x — довільний, але фіксований елемент універсальної множини, яку позначатимемо символом U, а P і Q — позначення довільних предикатів, заданих на U. Тоді

$|P(x) \wedge Q(x)| = 1$ тоді і тільки тоді, коли $|P(x)| = |Q(x)| = 1$, у решті випадках $|P(x) \wedge Q(x)| = 0$;

$|P(x) \vee Q(x)| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $|P(x)| = |Q(x)| = 0$, у решті випадках $|P(x) \vee Q(x)| = 1$;

$|\neg P(x)| = 1$, коли $|P(x)| = 0$;

$|\neg P(x)| = 0$, коли $|P(x)| = 1$;

$|P(x) \to Q(x)| = 0$, коли $|P(x)| = 1$ і $|Q(x)| = 0$, у решті випадках $|P(x) \to Q(x)| = 1$;

$|P(x) \leftrightarrow Q(x)| = 1$, коли $|P(x)| = |Q(x)|$, $|P(x) \leftrightarrow Q(x)| = 0$ у решті випадках.

Приклад. Нехай A, C — одномісні, B — двомісний предикат, a, b, c — елементи універсальної множини U. Дано:

$$|A(a)| = |A(b)| = 1, \quad |A(c)| = 0, \quad |C(a)| = 1,$$

$$|C(b)| = |C(c)| = 0,$$

$$|B(a, b)| = |B(b, c)| = |B(a, c)| = 1,$$

$$|B(a, a)| = |B(b, b)| = |B(c, c)| = 0.$$

Визначити істинісне значення виразу

$$(B(a, a) \leftrightarrow A(b)) \vee (B(b, b) \to A(c)) \vee B(b, c) \wedge B(c, c) \vee \vee (C(a) \leftrightarrow (A(a) \to C(b))). \qquad (*)$$

Маємо

$$(0 \leftrightarrow 1) \vee (0 \to 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \leftrightarrow (1 \to 0)) = = 0 \vee 1 \vee 0 \vee (1 \leftrightarrow 0) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1.$$

Предикатам і логічним операціям над ними надається теоретико-множинний зміст.

Предикат — це певна підмножина універсальної множини U, а саме, та підмножина U, на якій істинісне значення предиката тотожно дорівнює 1 (так звана множина істинності предиката).

Кон'юнкції предикатів $P \wedge Q$ відповідає перетин тих підмножин U, які відповідають предикатам P і Q окремо.

Диз'юнкції предикатів $P \vee Q$ відповідає об'єднання тих множин U, які відповідають P і Q окремо.

Запереченню предиката P, тобто $\neg P$, відповідає доповнення тієї підмножини U, яка відповідає предикату P.

Теоретико-множинний зміст імплікації $P \to Q$ і еквіваленції $P \leftrightarrow Q$ випливає з того, що $P \to Q$ можна зобразити як $\neg P \vee Q$, а $P \leftrightarrow Q$ — як $(\neg P \vee Q) \vee \vee (P \vee \neg Q)$.

Це можна зобразити наочно на кругах Ейлера (рис. 1—5).

Важливою модифікацією і удосконаленням способу зображення предикатів (множин) кругами Ейлера є так звані діаграми Венна. За цими діаграмами як доповнення до зображення предикатів кругами Ейлера вводиться графічне зображення твердження про те, чи є множина порожньою, чи ні. Якщо деяка множина порожня, то на діаграмі Венна відповідну частину рисунку заштриховано, а якщо множина непорожня, то у відповідному місці ставиться зірочка.

Розглянемо тепер особливості кожного з цих способів зображень предикатів.

При користуванні кругами Ейлера залежність між множинами істинності E_P і E_Q двох даних предикатів P і Q визначається взаємним розміщенням відповідних кругів. Тут можливі п'ять випадків.

1) множини E_P і E_Q мають непорожній перетин (рис. 6);

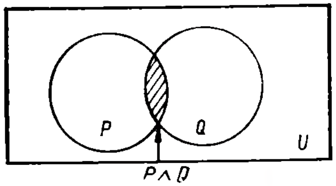

Рис. 1

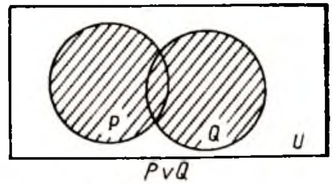

Рис. 2.

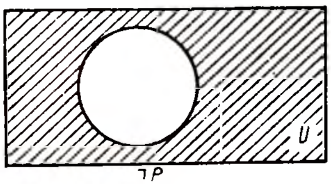

Рис. 3

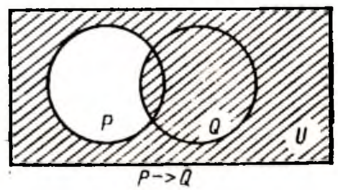

Рис. 4

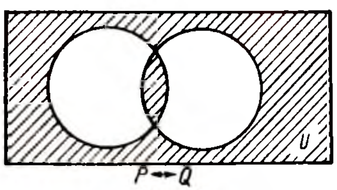

Рис. 5

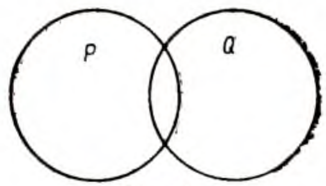

Рис. 6

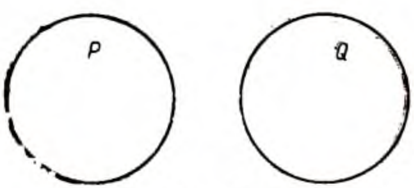

Рис. 7

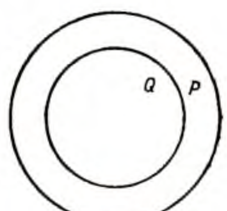

Рис. 8

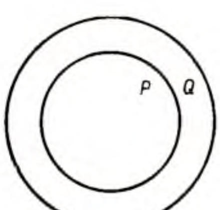

Рис. 9

Рис. 10

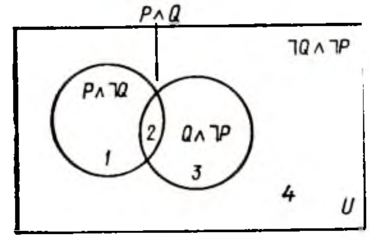

Рис. 11

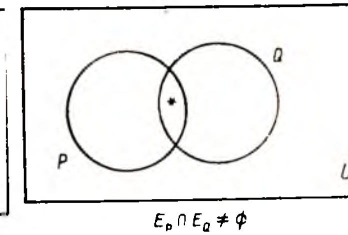

Рис. 12

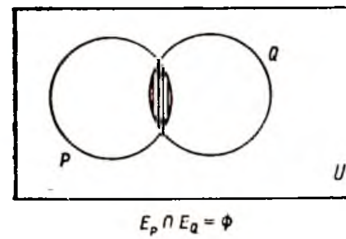

Рис. 13

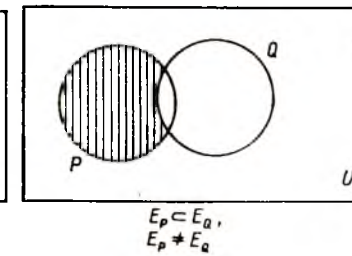

Рис. 14

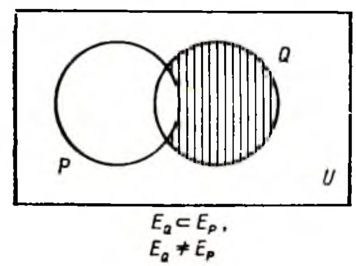

Рис. 15

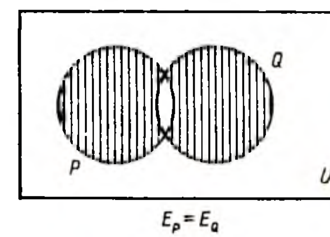

Рис. 16

2) $E_P \cap E_Q = \emptyset$ (рис. 7);
3) E_P — правильна підмножина E_Q (рис. 8);
4) E_Q — правильна підмножина E_P (рис. 9);
5) $E_P = E_Q$ (рис. 10).

Застосовуючи діаграми Венна, можна обмежитися одним рисунком, а саме, два предикати зображаються двома кругами, що перетинаються. Звичайно, цим не визначається певне твердження про залежність між множинами істинності предикатів. Останнє визначається відповідно поміткою (штриховкою чи зірочкою) у відповідній частині U (рис. 11).

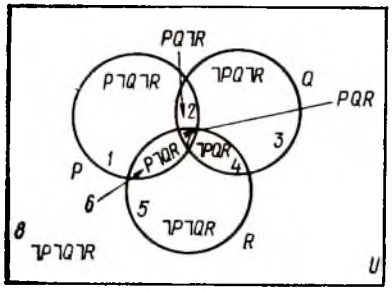

Рис. 17

Кожна з частин U характеризується тим, чи виконується кожен з предикатів, чи ні.

Зображення на діаграмах Венна розглянутих вище випадків 1) — 5) показано на рис. 12—16.

Аналогічну картину маємо і для трьох предикатів, де U розбивається на $2^3 = 8$ частин, які не перетинаються між собою (рис. 17).

У випадку чотирьох предикатів U розбивається на 16 частин, круги замінюються еліпсами, зображення досить складне, [1].

§ 2. Квантори

Крім операцій алгебри висловлень, над предикатами виконуються ще дві логічних операції, які називаються **квантора м и**.

Розглянемо два математичних твердження:

«Для кожного дійсного числа

$$x^2 - x + 1 > 0». \quad (3)$$

«Існує таке дійсне число x, що

$$2x = x». \quad (4)$$

Логічна структура цих тверджень визначається виразами «для кожного» та «існує». Уточненнями цих виразів є квантори.

Вираз «для кожного x» зображають символами $\forall x$, а вираз «існує таке x, що» — символами $\exists x$.

Символ $\forall$ називають к в а н т о р о м з а г а л ь н о с т і, а символ $\exists$ — квантором існування[1]. Перший квантор називають ще у н і в е р с а л ь н и м, другий — екзистенціальним. Символ $\forall$ — перевернута перша буква німецького слова Alle (всі), а символ $\exists$ — перевернута перша буква латинського слова Existentia (існування).

[1] Часто кванторами називають вирази типу $\forall x$, $\exists x$.

Символічний вираз $\forall x$ можна читати також як «всі x», «для всіх x», «для довільного x», а вираз «$\exists x$» — як «деякі x», «для деяких x», «знайдеться таке x» тощо.

Зазначимо, що, крім введеного позначення кванторів, вживаються також інші символічні позначення. Так, замість $\forall x$ пишуть $\bigwedge x$ або $\prod\limits_x$, або (x), а замість $\exists x$ відповідно — $\bigvee x$, $\sum\limits_x$, $E\, x$.

У введеній символіці твердження (3) набирає вигляду

$$\forall x \,(x^2 - x + 1 > 0),$$

а твердження (4) —

$$\exists x \,(2x = x).$$

При цьому предметна змінна x, що належить квантору (або знаходиться під знаком квантора), пробігає у н і в е р с а л ь н у множину. У даному разі такою множиною є множина дійсних чисел.

У загальному випадку на універсумі U символічний запис $\forall x\, A(x)$ розуміємо так: *для кожного $a \in U$ має місце висловлення $A(a)$*, а запис $\exists x\, A(x)$ — *існує хоча б одне $a \in U$ таке, що має місце $A(a)$*.

Наприклад, при $U = R$ (множина всіх дійсних чисел) запис

$$\forall x \,(x > \sqrt{2} \rightarrow x > 1)$$

зображає істинне висловлення, а запис $\forall x\, (x^0 = 1)$ — хибне висловлення (адже, 0^0 не має значення). Нехай тепер предикат $T(x)$ означає «x — трансцендентне число». Тоді на цій самій універсальній множині вираз $\exists x\, T(x)$ є істинним висловленням, а

$$\exists x \,(x^2 = -1) \quad (5)$$

— хибним. Звичайно, із зміною U результати можуть змінитися. Так, якщо за U взяти множину всіх комплексних чисел K, то (5) є істинним висловленням.

Якщо універсальна множина U — скінченна, наприклад, складається з трьох елементів a, b, c, то вираз $\forall x\, A(x)$ означатиме $A(a) \wedge A(b) \wedge A(c)$, а вираз $\exists x\, A(x)$ рівнозначний з диз'юнкцією $A(a) \vee A(b) \vee A(c)$. Взагалі, у випадку скінченної універсальної множини, квантор загальності $\forall$ перетворюється в кон'юнкцію, а квантор існування $\exists$ — в диз'юнкцію, як слідує з відповідних означень. У цьому разі квантори є тільки скороченнями відповідних записів алгебри висловлень. Проте у випадку нескінченної універсальної множини квантори не можна звести до операції алгебри висловлень (поняття нескінченної кон'юнкції чи диз'юнкції не вводилося). До речі, саме введення кванторних операцій обумовлює основні принципіальні особливості логіки предикатів. Ось чому логіку предикатів іноді називають т е о р і є ю к в а н т и ф і к а ц і ї.

Важливу роль у логіці предикатів відіграє поняття області дії квантора. Під останньою розуміють той вираз, до якого відноситься даний квантор. Область дії квантора обмежують дужками. Початок області дії позначається лівою дужкою, яка ставиться безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а в і д п о в і д н а їй права дужка означає закінчення області дії цього квантора.

Наведемо приклади (область дії квантора підкреслено).

$$\exists x\,\underline{((x\quad 3) \to (x\quad 9))}; \tag{6}$$

$$\exists x\,\underline{(x\quad 3)} \to (x\quad 9); \tag{7}$$

$$\forall x\,\underline{(x^2 - 5x + 6 = 0 \to x = 2 \vee x = 3)}; \tag{8}$$

$$\forall x\,\underline{(x^2 - 5x + 6 = 0)} \to (x = 1); \tag{9}$$

$$\forall x\,\underline{(x^2 - 5x + 6 = 0 \to x = 1)}. \tag{10}$$

У цих прикладах універсальна множина — множина всіх дійсних чисел $\boldsymbol{R}$.

Вирази (6) і (7), а також (9) і (10) відрізняються лише областю дії квантора, проте відмінність між ними дуже істотна (пропонуємо читачеві дослідити її самостійно).

Розглянемо на універсальній множині всіх дійсних чисел два вирази:

$$x > 1 \tag{11}$$

і

$$\exists x\,(x > 1). \tag{12}$$

Перший з них залежить від змінної x, замість x у вираз (11) можна підставляти назви різних дійсних чисел і при цьому діставатимемо певні висловлення (істинні чи хибні). Проте у вираз (12) та сама предметна змінна x входить інакше. Вираз (12) не залежить від x, x можна замінити іншою предметною змінною, наприклад y чи z, зміст виразу від цього не зміниться, а якщо замість x

підставляти назви дійсних чисел, то дістанемо беззмістовні вирази.

Введемо ряд означень.

Означення 1. *Входження предметної змінної x у вираз називається зв'язаним даним квантором $\forall$ чи $\exists$ по змінній x, якщо x знаходиться в області дії цього квантора або безпосередньо слідує за квантором.*

2. *Входження предметної змінної x у вираз W називається з в' я з а н и м, якщо воно зв'язане хоча б одним квантором W. У противному разі входження x у вираз W називається в і л ь н и м.*

3. *Предметна змінна x називається з в'я з а н о ю (в і л ь н о ю) в W, якщо існує зв'язане (вільне) входження x в W.*

Приклади

1) Обидва входження x у вираз (12) — зв'язані і змінна x тут зв'язана.

2) У виразі (7) перше і друге входження x — зв'язані, а третє — вільне; змінна x, за означенням, є і вільною, і зв'язаною.

3) У виразі

$$\forall x\,(x \,\vdots\, 8 \to x \,\vdots\, 4) \vee \neg\,(x \,\vdots\, 4) \tag{13}$$

перших три входження x — зв'язані, четверте — вільне; змінна x і зв'язана, і вільна.

4) Змінна x_1 у виразі $\forall x_1\,(A\,(x_1,\ x_2) \to \exists x_3\,(A\,(x_3,\ x_2)))$ — зв'язана (обидва її входження зв'язані), змінна x_2 — вільна (жодне її входження не є зв'язаним), змінна x_3 — зв'язана.

Зв'язаність змінної x у виразі W характеризується, як ми бачили, двома властивостями:

1) W від x не залежить, заміна x іншою предметною змінною, що не входить в W, не змінює значення W;

2) підстановка у W замість x назв елементів універсальної множини немає смислу.

Маючи на увазі ці властивості зв'язаних змінних, останні називають іноді п о з і р н и м и з м і н н и м и.

Зв'язування предметних змінних здійснюється кванторами, тобто операцією квантифікації. У математиці є багато операцій, які так само діють на змінні, «зв'язуючи» їх аналогічно кванторам.

Приклад. Розглянемо вираз $I = \int\limits_1^t x^2dx$. I не залежить від x, $\int\limits_1^t x^2dx = \int\limits_1^t y^2dy$. Підстановка в I назв чисел замість x не має смислу. Природно x вважати зв'язаною змінною, тоді як t є вільною змінною. Змінна x зв'язується в I операцією визначеного інтегрування.

Аналогічно оператору $\int$ діє на змінну і оператор підсумовування. У виразі $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ змінна i зв'язана, а n вільна.

Так само у виразі $\lim\limits_{x\to 2} x^3$ змінна x зв'язана, а в формулі диференціювання $(x^n)'_x = nx^{n-1}$ змінна n вільна, а x зв'язана.

Тепер, коли визначено всі операції логіки предикатів, можна подати означення поняття формули логіки предикатів.

Для n-місного предиката P_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ введемо позначення $P_k^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$. Таким чином, $P_1^{(3)}$ означає, що предикат P_1 — тримісний, $P_2^{(1)}$ означає, що предикат P_2 — одномісний.

Означення формули логіки предикатів дамо індуктивно.

Означення

1) $P_k^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots)$ — *формула логіки* предикатів. Цю формулу називають атомарною, або елементарною.

2) Якщо $\mathfrak{A}_1$ і $\mathfrak{A}_2$ — формули логіки предикатів, то

$$(\neg \mathfrak{B}_1),\ (\neg \mathfrak{A}_2),\ (\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2),\ (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2),\ (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2),$$
$$(\mathfrak{A}_1 \leftrightarrow \mathfrak{A}_2)$$

теж є формулами.

3) Якщо $\mathfrak{A}$ — формула логіки предикатів, а x — вільна змінна в $\mathfrak{A}$, то $(\forall x (\mathfrak{A}))$ і $(\exists x (\mathfrak{A}))$ теж формули.

4) Ніяких інших формул логіки предикатів, крім утворених за пп. 1) — 3), немає.

Примітки

1. Усі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів (висловлення — це нуль-місні предикати).
2. Предметні змінні і взагалі терми не є формулами.

Приклади

1. Вираз

$$(\exists x_1 (\forall x_2 (\forall x_3 ((P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \vee P_2^{(2)}(x_1, x_2)))))) \tag{14}$$

є формулою логіки предикатів.

Справді,

$P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$, $P_2^{(2)}(x_1, x_2)$ є формули згідно з п. 1) означення; $(P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \vee P_2^{(2)}(x_1, x_2))$ є формула згідно з п. 2) означення;

$$(\forall x_3 ((P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \vee P_2^{(2)}(x_1, x_2)))),$$
$$(\forall x_2 (\forall x_3 ((P_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3) \vee P_1^{(2)}(x_1, x_2)))))$$

і, нарешті, (14) — формули логіки предикатів за п. 3) означення.

2. Вираз

$$(\forall x_1 (P_1^{(1)}(x_2) \to (\exists x_1 (P_2^{(1)}(x_1))))) \tag{15}$$

не є формулою предикатів.

Справді, $P_1^{(1)}(x_2)$, $P_2^{(1)}(x_2)$ — формули за п. 1) означення; $(\exists x_1 (P_2^{(1)}(x_1)))$ — формула за п. 3) означення;

$$(P_1^{(1)}(x_2) \to (\exists x_1 (P_2^{(1)}(x_1)))) \tag{16}$$

— формула за п. 2) означення. Проте у виразі (16) x_1 не є вільною змінною, і п. 3) означення до формули (16) застосувати не можна. Отже, за п. 4) формула (15) не є формулою логіки предикатів.

З означення формули логіки предикатів випливає, що операція квантифікації, яку також називають навішування квантора на формулу, зменшує в останній число вільних змінних, за п. 3) означення.

Наприклад, $(P_1^{(2)}(x_1, x_2))$ — формула логіки предикатів з двома вільними змінними. Внаслідок навішування квантора існування по змінній x_2, дістанемо вираз, який теж є формулою з однією вільною змінною x_1, $(\exists x_2 (P_1^{(2)}(x_1, x_2)))$ (значення останньої формули залежить тільки від x_1 і не залежить від x_2). Після навішування ще одного квантора по змінній x_1, наприклад, квантора загальності, дістанемо формулу $(\forall x_1 (\exists x_2\ P_1^{(2)}\ x_1, x_2)))$, в якій вже немає вільних предметних змінних.

Формула логіки предикатів, яка не містить жодної вільної предметної змінної, називається замкненою.

Значення замкненої формули не залежить від жодної предметної змінної. Це висловлення, воно істинне або хибне. Крім того, значення формули, яка містить хоча б одну вільну предметну змінну, істотно залежить від останньої, це висловлювальна форма.

Наприклад, на універсальній множині всіх дійсних чисел вираз

$$x - y = z \tag{17}$$

є висловлювальною формою, а вираз

$$\forall x (\forall y (\exists z (x - y = z))),$$

утворений з виразу (17) зв'язуванням усіх вільних предметних змінних, є висловленням, істинним на R. Звичайно, при іншому зв'язуванні кванторами вільних змінних у виразі (17) можна дістати і хибне висловлення. Так, $\forall x (\exists y (\forall z (x - y = z)))$ є висловлення, хибне на R.

Як і в алгебрі висловлень, введемо умови скорочення числа дужок у формулах логіки предикатів.

Перш за все, залишимо всі умови скорочення числа дужок, які прийнято в алгебрі висловлень. Зокрема, опускатимемо всі зовнішні дужки. Крім того, вважатимемо, що квантори зв'язують сильніше, ніж операції алгебри висловлень. Опускатимемо також дужки, що позначають область дії квантора, тоді, коли остання є атомарною формулою.

Нарешті, якщо квантори слідують один за одним, то опускатимемо дужки між ними, виконуючи кванторні операції в порядку, зворотному до їх написання (з середини). До речі, умовимось також опускати верхні індекси у предикатів, вважаючи, що кількість аргументів кожного предиката завжди відповідає цьому індексу.

Так, приклад 1 запишеться у вигляді

$$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P_1 (x_1, x_2, x_3) \vee P_2 (x_1, x_2)),$$

а приклад 2 — у вигляді

$$\forall x_2 (P_1 (x_2) \rightarrow \exists x_1 P_2 (x_1)).$$

Запис $\exists x P (x) \rightarrow Q (x)$ слід розуміти як скорочення для $\exists x (P (x)) \rightarrow Q (x)$.

§ 3. Інтерпретація. Оцінка

В алгебрі висловлень, з'ясувавши поняття формули, ми безпосередньо переходили до визначення істинісних значень і складання таблиць істинності. Значно складніше стоїть справа в логіці предикатів. Тут ми маємо справу з універсальною множиною, яка може містити велику кількість елементів, може бути нескінченною і навіть незчисленною, як часто буває в математиці. Тоді складання таблиць стає, взагалі, неможливим.

У логіці висловлень ми оперували з пропозиційними змінними, значеннями яких були висловлення. Останнім приписувалося лише два значення і було тільки невідомо, яке саме — істинність чи хибність — має місце. Складаючи таблиці істинності, ми враховували всі випадки.

У формулах логіки предикатів містяться предикатні змінні, значеннями яких є конкретні предикати, визначені на універсальній множині. Щоб використати вже розроблений апарат логіки висловлень в логіці предикатів, треба надати предикатним змінним певної інтерпретації.

Нехай $\mathfrak{A} (P_1, \ldots, P_m)$ — формула логіки предикатів, яка містить n-місні предикатні змінні $P_1, \ldots, P_m$, D — певна структура (непорожня множина M із заданими на ній n-місними відношеннями $R_1, R_2, \ldots, R_m$ між її елементами ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Означення. *Інтерпретацією формули $\mathfrak{A} (P_1, \ldots, P_m)$ в D називають заміщення кожної n-місної предикатної змінної в $\mathfrak{A}$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$) відповідним n-місним відношенням в M та кожної предметної сталої — деяким елементом M. При цьому вважають, що вільні предметні змінні в $\mathfrak{A}$ пробігають M — множину інтерпретації, а символам логічних операцій алгебри висловлень і кванторам в $\mathfrak{A}$ надається їх звичайний смисл.*

Інтерпретацією формули логіки предикатів, яка не містить вільних предметних змінних (замкненої формули), є певне висловлення.

У загальному випадку, коли формула $\mathfrak{A}$ містить вільні предметні змінні, інтерпретація дає висловлювальну форму (невизначене висловлення), істинісне значення якої залежить від цих вільних змінних.

Приклади

1. Нехай задано формулу логіки предикатів

$$P_1 (x) \rightarrow \forall x P_1 (x). \qquad (18)$$

Перше входження x у формулу (18) вільне, друге і третє — зв'язані квантором загальності. За множину інтерпретації M приймемо множину $\{3, 4\}$, одномісну предикатну змінну P_1 інтерпретуємо як властивість «є парним числом» (конкретний одномісний предикат, визначений на $\{3, 4\}$), тобто замінимо $P_1 (x)$ виразом «x — парне число». Тоді консеквент імплікації (18) перейде у висловлення: «Для кожного $x \in \{3, 4\}$ x є парним числом», тобто «(3 — парне число) $\wedge$ (4 — парне число)», яке буде хибним. Антецедент імплікації (18) у даній інтерпретації переходить у предикат «x — парне число», де змінна x пробігає множину $\{3, 4\}$. При $x = 3$ інтерпретацією (18) є істинне висловлення

«(3 — парне число) $\rightarrow$ (3 — парне число) $\wedge$ (4 — парне число)», а при $x = 4$ маємо хибне висловлення

«(4 — парне число) → (3 — парне число) $\wedge$ (4 — парне число)». Цей результат обумовлений тим, що формула (18) не замкнена, її інтерпретація істотно залежить від вільної змінної x.

2. Задано формулу логіки предикатів

$$\forall x\,(P_1(x) \to P_2(x)). \tag{19}$$

Як бачимо, ця формула замкнена, а тому кожна її інтерпретація є висловленням.

За множину інтерпретації візьмемо множину $\{2, 3\}$. $P_1(x)$ інтерпретується як «x відмінне від 2», $P_2(x)$ — як «x відмінне від 3». Тоді інтерпретацією (19) є висловлення $\forall x\,(x \neq 2 \to x \neq 3)$, тобто $(2 \neq 2 \to 2 \neq 3) \wedge (3 \neq 2 \to 3 \neq 3)$. Другий член останньої кон'юнкції — хибне висловлення. Отже, і кон'юнкція матиме значення «хибність». Таким чином, у прийнятій інтерпретації формула (19) перейшла в хибне висловлення. Якщо за множину інтерпретації взяти множину всіх натуральних чисел, $P_1(x)$ замінити властивістю «$x \vdots 4$», $P_2(x)$ — властивістю «x — парне число», то в цій інтерпретації формула (19) переходить в істинне висловлення.

Здійснюючи інтерпретацію формул логіки предикатів і аналізуючи утворені при цьому висловлювальні форми і висловлення на істинність чи хибність, помічаємо, що складність досліджень дуже швидко зростає із зростанням кількості елементів множини інтерпретації та кількості аргументів наявних в формулі предикатів (їх, так би мовити, «місності»).

З метою кращого з'ясування процесу оцінки формул логіки предикатів розглянемо докладно випадок, коли множина інтерпретації M містить два елементи, а предикати, що входять у дану формулу, не більш ніж двомісні.

На двоелементній множині $\{a, b\}$ кількість різних одномісних логічних функцій (предикатів) дорівнює 4. Випишемо їх у таку таблицю:

x	L_1	L_2	L_3	L_4
a	0	0	1	1
b	0	1	0	1

На тій самій множині кількість різних двомісних логічних функцій становить 16, а саме:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}
(a, a)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(a, b)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
(b, a)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
(b, b)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Приклад. Оцінити формулу логіки предикатів

$$\mathfrak{A} = \forall x\,(P(x) \to P(y)) \vee \neg P(y) \tag{20}$$

на двоелементній множині $\{a, b\}$.

Р о з в' я з а н н я. Складемо таблицю

№ п/п	P	y	$\forall x\,(P(x) \to P(y))$	$\neg P(y)$	$\mathfrak{A}$
1	L_1	a	1	1	1
2	L_1	b	1	1	1
3	L_2	a	0	1	1
4	L_2	b	1	0	1
5	L_3	a	1	0	1
6	L_3	b	0	1	1
7	L_4	a	1	0	1
8	L_4	b	1	0	1

На входах таблиці записані предикатні змінні та вільні предметні змінні формули (20). Предикатна змінна P у формулі (20) пробігає множину одномісних логічних функцій $L_1 - L_4$ на $\{a, b\}$, вільна предметна змінна y пробігає множину $\{a, b\}$. Далі застосовуємо правило оцінки для операцій алгебри висловлень, причому враховуємо, що на $\{a, b\}$ квантор загальності перетворюється в кон'юнкцію, а квантор існування — в диз'юнкцію.

Розглянемо детально обчислення значення формули в третьому стовпчику таблиці (при цьому користуватимемося даними про значення логічних функцій $L_1 - L_4$, с. 124).

Р я д о к 1. $\forall x\,(L_1(x) \to L_1(a)) = (L_1(a) \to L_1(a)) \wedge (L_1(b) \to L_1(a)) = (0 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 1 \wedge 1 = 1.$

Р я д о к 2. $\forall x\,(L_1(x) \to L_1(b)) = (L_1(a) \to L_1(b)) \wedge (L_1(b) \to L_1(b)) = (0 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 1.$

Р я д о к 3. $\forall x\,(L_2(x) \to L_2(a)) = (L_2(a) \to L_2(a)) \wedge (L_2(b) \to L_2(a)) = (0 \to 0) \wedge (1 \to 0) = 1 \wedge 0 = 0.$

Рядок 4. $\forall x (L_2(x) \to L_2(b)) = (L_2(a) \to L_2(b)) \wedge (L_2(b) \to L_2(b)) = (0 \to 1) \wedge (1 \to 1) = 1 \wedge 1 = 1.$

Рядок 6[1]. $\forall x (L_3(x) \to L_3(b)) = (L_3(a) \to L_3(b)) \wedge (L_3(b) \to L_1(b)) = (1 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 0 \wedge 1 = 0.$

Такий процес оцінки формул логіки предикатів виявляється дуже громіздким навіть для випадку двоелементної універсальної множини, проте він дає змогу зрозуміти саму суть механізму оцінки формул логіки предикатів.

У розглянутому випадку формула $\mathfrak{A}$ на заданій структурі D набуває значення 1 при всіх інтерпретаціях і всіх заміщеннях вільних предметних змінних назвами елементів D.

Таку формулу логіки предикатів називають істинною або загальнозначущою на заданій структурі.

Формула логіки предикатів $\mathfrak{A}$ називається виконуваною на структурі D, якщо існує така інтерпретація на D і таке заміщення вільних предметних змінних в D, при яких $|\mathfrak{A}| = 1$.

Як видно з процесу оцінки формули $\mathfrak{A}$, істинність даної формули на структурі D залежить тільки від числа елементів (від потужності) носія D.

Якщо формула логіки предикатів $\mathfrak{A}$ істинна на множині M, то вона істинна і на множині M_1 при умові, що потужність M_1 не більша, ніж потужність M. Справді, всі інтерпретації і заміщення вільних предметних змінних на M_1 є тоді відповідно інтерпретаціями і заміщеннями вільних предметних змінних на M. Це твердження виконується для формул логіки предикатів, які не містять ні символів конкретних предикатів, ні символів предметних сталих. До речі, такими і є, взагалі, формули логіки предикатів за наведеним означенням (§ 2, розд. III). Там P_1, P_2, P_3 — символи змінних для предикатів (предикатних змінних), а не конкретних предикатів. При наявності конкретних предикатів чи предметних сталих дане твердження втрачає силу.

Наприклад, нехай A, B — конкретні предикати, визначені на множині N всіх натуральних чисел, а саме, $A(x)$ = «x — просте число», $B(x)$ = «x — непарне число». Тоді твердження $\forall x (A(x) \to B(x))$ не є загальнозначущим на множині N, але воно істинне на множині $N - \{2\}$, яка має ту саму потужність, що й N.

[1] Обчислення рядків 5, 7, 8 пропонуємо читачеві виконати самостійно.

Розглянута вище оцінка формули (20) гарантує, що ця формула буде істинною на кожній двоелементній множині (формула (20) не містить символів конкретних предикатів чи предметних сталих).

Аналогічно попередньому, якщо формула логіки предикатів (яка не містить ні символів конкретних предикатів, ні символів предметних сталих) є виконуваною на множині M, то вона виконувана на всякій множині M_1, такій, що $|M_1| \geqslant |M|$.

Так, формула

$$\forall x (P_1(x) \to P_2(x)) \qquad (21)$$

виконувана на одноелементній множині $\{a\}$.

Справді, формула (21) — замкнена, а тому досить знайти таку інтерпретацію для P_1 і P_2, при якій вираз (21) набуває значення 1. Це матиме місце, якщо P_1 і P_2 проінтерпретувати тією самою властивістю елемента a. Тоді, згідно з тільки що сформульованим твердженням, формула (21) виконуватиметься на будь-якій непорожній множині.

У позначеннях формул ми часто користуємося символом $\mathfrak{A}(x)$. Цей запис вживається в основному для того, щоб вказати на залежність формули $\mathfrak{A}(x)$ від x. Тоді природно, щоб $\mathfrak{A}(y)$ означало б для y те саме, що $\mathfrak{A}(x)$ означає для x, або, як кажуть, щоб $\mathfrak{A}(y)$ було окремим випадком $\mathfrak{A}(x)$. Проте, якщо не зробити відповідних застережень, то такий факт справджується не завжди.

Наприклад, нехай універсальною множиною є множина всіх натуральних чисел N, а формула $\mathfrak{A}(x)$ має вигляд $\exists y (x = 2y)$, тобто $\mathfrak{A}(x)$ означає, що x є парним числом. Тоді $\mathfrak{A}(y)$ матиме вигляд $\exists y (y = 2y)$. Те, що стверджується про y у формулі $\mathfrak{A}(y)$, у даному разі не є тим самим, що стверджується про x в $\mathfrak{A}(x)$. Інакше кажучи, $\mathfrak{A}(y)$ тут не можна розглядати як окремий випадок $\mathfrak{A}(x)$. Справа, очевидно, в тому, що входження y в $\mathfrak{A}(x)$ вільне, а в $\mathfrak{A}(y)$ — зв'язане. При цьому утворення $\mathfrak{A}(y)$ з $\mathfrak{A}(x)$ є, так би мовити, незаконним, і, щоб запобігти цьому, вводиться спеціальне застереження.

Означення. *Предметна змінна y називається допустимою для підстановки в формулу $\mathfrak{A}(x)$ замість x* (або вільною для x в $\mathfrak{A}(x)$), *якщо жодне вільне входження y в $\mathfrak{A}(x)$ не стає зв'язаним внаслідок цієї підстановки.*

Необхідною і достатньою умовою правильності, «законності» утворення $\mathfrak{A}(y)$ із $\mathfrak{A}(x)$ є допустимість y для підстановки в формулу $\mathfrak{A}(x)$ замість x.

Приклади

1. $\mathfrak{A}(x) = \exists z (x = z + 1)$; $\mathfrak{A}(y) = \exists z (y = z + 1)$.

Тут y — допустимий для підстановки в формулу $\mathfrak{A}(x)$ замість x. Утворення $\mathfrak{A}(y)$ із $\mathfrak{A}(x)$ — правильне.

2. $\mathfrak{A}(x) = \exists y (y > x)$; $\mathfrak{A}(y) = \exists y (y > y)$.

У данному разі y не є допустимим для підстановки в $\mathfrak{A}(x)$ замість x. Утворення $\mathfrak{A}(y)$ із $\mathfrak{A}(x)$ — неправильне.

§ 4. Логічно загальнозначущі формули логіки предикатів

Як і в алгебрі висловлень, важлива роль приділяється тим формулам логіки предикатів, які є завжди істинними.

Означення. *Формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів, яка є істинною (загальнозначущою) на кожній множині*[1], *називається* т о т о ж н о і с т и н н о ю, *або* л о г і ч н о з а г а л ь н о з н а ч у щ о ю.

Іншими словами, формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів є логічно загальнозначущою (скорочено — лзз) тоді і тільки тоді, коли при всіх інтерпретаціях на б у д ь - я к і й множині M і при всіх заміщеннях вільних предметних змінних, що входять в $\mathfrak{A}$, назвами елементів M

$$|\mathfrak{A}| = 1.$$

Клас формул лзз (тотожно істинних) має в логіці предикатів велике значення. Ці формули є схемами логічно істинних тверджень, законами логіки, вони є складовою частиною наших міркувань.

Зазначимо, що всі тавтології алгебри висловлень є логічно загальнозначущими формулами, бо кожна формула і кожна операція алгебри висловлень є відповідно формулою і операцією логіки предикатів.

Кожна підстановка формул логіки предикатів в тавтологію є також логічно загальнозначущою. Так, формули

$$P(x) \vee \neg P(x); \tag{22}$$

$$(\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \leftrightarrow (\neg \exists y Q(y) \to \neg \forall x P(x)) \tag{23}$$

є лзз (формула (22) — підстановка в закон виключеного третього, а (23) — підстановка в закон контрапозиції).

Проте більш цікавими є не такі, перенесені, так би мовити, з алгебри висловлень, а властиві самій логіці предикатів її тотожно істинні формули.

Наведемо ряд таких найчастіше вживаних логічно загальнозначущих формул логіки предикатів.

Те, що формула $\mathfrak{A}$ є лзз, позначатимемо символом $\models \mathfrak{A}$.

1. $\forall x P(x) \to P(y)$;
2. $P(y) \to \exists x P(x)$;
3. $\neg \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$ } закони де Моргана для
4. $\neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x (\neg P(x))$ } кванторів
5. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ — дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\wedge$;
6. $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ — дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\vee$;
7. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)$ — правосторонній дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\vee$;
8. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ — лівосторонній дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\wedge$;
9. $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$ — лівосторонній дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\to$;
10. $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$ — правосторонній дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\to$;
11. $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$ — лівосторонній дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\leftrightarrow$;
12. $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \to \exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ — правосторонній дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\leftrightarrow$;
13. $\forall x (\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}$
14. $\forall x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}$ | закони пронесення кванторів при тій умові, що формула $\mathfrak{B}$ не містить вільних входжень x;
15. $\exists x (\mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}) \leftrightarrow \exists x \mathfrak{A}(x) \wedge \mathfrak{B}$
16. $\exists x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \leftrightarrow \exists x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}$
17. $\forall x (\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}) \leftrightarrow \exists x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}$
18. $\exists x (\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{B}$
19. $\forall x \forall y \mathfrak{A}_1(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x \mathfrak{A}_1(x, y)$ } закони перестановки однойменних кванторів;
20. $\exists x \exists y \mathfrak{A}_1(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x \mathfrak{A}_1(x, y)$ }
21. $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$.

Доведемо кілька з цих законів.

Д о в е д е н н я з а к о н у 6. Для доведення еквіваленції доведемо дві взаємнообернені імплікації:

1) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$;
2) $\exists x (P(x) \vee \exists x Q(x) \to \exists x (P(x) \vee Q(x))$.

[1] Слід мати на увазі, що в нашому розгляді область інтерпретації є завжди непорожня множина.

5 2—1179

1) Оскільки ця формула замкнена, то результатом її інтерпретації на довільній множині є висловлення. Застосуємо метод доведення від супротивного. Нехай формула 1) не є лзз. Тоді знайдеться така множина M та інтерпретація на ній P^* замість P, Q^* замість Q, що утворене внаслідок інтерпретації висловлення матиме значення 0. За означенням імплікації матимемо (на множині M), що

$$|\exists xP^*(x) \vee \exists xQ^*(x)| = 0 \tag{24}$$

і

$$|\exists x(P^*(x) \vee Q^*(x)| = 1. \tag{25}$$

Із співвідношення (24)

$$|\exists xP^*(x)| = 0 \tag{26}$$

і

$$|\exists xQ^*(x)| = 0. \tag{27}$$

Із співвідношення (26) для довільного $a \in M$ матимемо $|\neg P^*(a)| = 1$, тобто

$$|P^*(a)| = 0. \tag{28}$$

Аналогічно, з формули (27) дістаємо

$$|Q^*(a)| = 0. \tag{29}$$

Крім того, згідно з формулою (25), існує таке $c \in M$, що $|P^*(c) \vee Q^*(c)| = 1$. Отже, або $|P^*(c)| = 1$, що суперечить рівності (28), або $|Q^*(c)| = 1$, що суперечить рівності (29). Ця суперечність свідчить про те, що зроблене припущення неправильне, тобто формула 1) логічно загальнозначуща.

Твердження, що обернена імплікація є лзз, тобто доведення 2), дістанемо прямим доведенням.

Нехай M — довільна множина, P^*, Q^* — довільні інтерпретації для P, Q відповідно. Тоді вираз

$$\exists xP^*(x) \vee \exists xQ^*(x) \to \exists x(P^*(x) \vee Q^*(x)) \tag{30}$$

є висловленням, віднесеним до множини M, оскільки 2) — замкнена формула.

Для доведення істинності формули (30) досить розглянути випадок, коли антецедент (30) має значення 1 (у противному разі імплікація (30) тривіально істинна). Таким чином,

$$|\exists xP^*(x) \vee \exists xQ^*(x)| = 1. \tag{31}$$

Звідси маємо дві можливості:

$$|\exists xP^*(x)| = 1; \tag{32}$$

$$|\exists xQ^*(x)| = 1. \tag{33}$$

Рівність (32) означає, що існує $c \in M$, що $|P^*(c)| = 1$. Отже, $|P^*(c) \vee Q^*(c)| = 1$ і, згідно з означенням квантора існування,

$$|\exists x \in M(P^*(x) \vee Q^*(x)| = 1. \tag{34}$$

Аналогічно, формула (34) слідує з формули (33). Таким чином, з (31) слідує (34), що означає істинність імплікації (30). Беручи до уваги довільність множини M і довільність інтерпретацій P^*, Q^*, дійдемо висновку, що формула 2) — тотожно істинна.

Доведення закону 21

$$\models \exists y \forall xP(x, y) \to \forall x \exists yP(x, y). \tag{35}$$

Нехай M — довільна множина, а P^* — довільна інтерпретація на M для P. Вираз $\exists y \forall x P^*(x, y) \to \forall x \exists yP^*(x, y)$ є висловленням над M (враховуємо, що формула (35) — замкнена). Досить розглянути випадок $|\exists y \forall xP^*(x, y)| = 1$ і показати, що тоді

$$|\forall x \exists yP^*(x, y)| = 1.$$

Таким чином,

$$|\exists y \forall xP^*(x, y)| = 1. \tag{36}$$

Звідси існує таке $c \in M$, що

$$|\forall xP^*(x, c)| = 1, \tag{37}$$

тобто для довільного $a \in M$

$$|P^*(a, c)| = 1. \tag{38}$$

З останнього співвідношення за означенням квантора існування

$$|\exists yP^*(a, y)| = 1 \tag{39}$$

на M, а враховуючи довільність $a \in M$, дістаємо

$$|\forall x \exists yP^*(x, y)| = 1$$

Оскільки M — довільна множина, P^* — довільна інтерпретація P, а формула (35) замкнена, то робимо висновок, що (35) — тотожно істинна.

Спробуємо тепер аналогічно попередньому довести, що імплікація, обернена до (35), є лзз.

Дано

$$|\forall x \exists y P^*(x, y)| = 1. \tag{40}$$

Звідси для довільного $a \in M$ маємо

$$|\exists y P^*(a, y)| = 1. \tag{41}$$

Отже, існує таке $c \in M$, що

$$|P^*(a, c)| = 1. \tag{42}$$

В останньому твердженні a є вже не довільний елемент M, а той елемент M, для якого справджується умова (42). Тому наступне навішування (аналогічно попередньому доведенню) квантора загальності, тобто перехід від (42) до твердження $\forall x P^*(x, c) = 1$ не є правомірним. Доведення обривається.

Справді, формула

$$\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y) \tag{43}$$

не є тотожно істинною, бо можна знайти таку множину M і інтерпретацію на ній, в якій матимемо хибне висловлення. Наприклад, нехай M — множина всіх людей (які живуть або жили). За $P^*(x, y)$ — інтерпретацію $P(x, y)$ на M — візьмемо відношення «є мати». Тоді, очевидно, $|\forall x \exists y P^*(x, y)| = 1$ і $|\exists y \forall x P^*(x, y)| = 0$, а тому

$$\forall x \exists y P^*(x, y) \to \exists y \forall x P^*(x, y)| = 0,$$

тобто формула (43) не є лзз.

У вищенаведених прикладах формули, тотожна істинність яких доводилася, були замкненими. Наведемо тепер приклад доведення закону, який не є замкненою формулою.

Доведення закону 14. У формулі

$$\forall x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}$$

$\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — довільні формули логіки предикатів, причому змінна x не має вільних входжень в $\mathfrak{B}$.

Зазначимо, що, хоч тут змінна x не входить вільно, інші предметні змінні можуть мати вільні входження в $\mathfrak{A}(x)$ і в $\mathfrak{B}$.

Доведення закону 14 зводиться до доведення двох взаємнообернених імплікацій:

1) $\forall x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \to \forall x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}$;
2) $\forall x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B} \to \forall x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B})$.

1) Нехай M — довільна множина. Позначимо через $\mathfrak{A}^*(x)$ і $\mathfrak{B}^*$ вирази, утворені з $\mathfrak{A}(x)$ і $\mathfrak{B}$ відповідно внаслідок довільної інтерпретації всіх предикатних змінних, що входять в $\mathfrak{A}(x)$ і $\mathfrak{B}$, і заміщення в них всіх вільних предметних змінних назвами елементів множини M:

$$\forall x (\mathfrak{A}^*(x) \vee \mathfrak{B}^*) \to \forall x \mathfrak{A}^*(x) \vee \mathfrak{B}^*. \tag{44}$$

Цей вираз є висловленням. Нехай це висловлення має значення 0.
Тоді

$$|\forall x \mathfrak{A}^*(x) \vee \mathfrak{B}^*| = 0 \tag{45}$$

і

$$|\forall x (\mathfrak{A}^*(x) \vee \mathfrak{B}^*)| = 1. \tag{46}$$

З рівності (45)

$$|\forall x \mathfrak{A}^*(x)| = 0 \tag{47}$$

і

$$|\mathfrak{B}^*| = 0 \tag{48}$$

Згідно з (47) існує таке $c \in M$, що

$$|\mathfrak{A}^*(c)| = 0. \tag{49}$$

Тоді з рівностей (48) і (49)

$$|\mathfrak{A}^*(c) \vee \mathfrak{B}^*| = 0. \tag{50}$$

(Тут істотно, що x не входить вільно в $\mathfrak{B}^*$, тобто, що $\mathfrak{B}^*$ не залежить від x). Проте імплікація (50) суперечить імплікації (46). Зроблене припущення неправильне. Отже, висловлення (44) є істинним. Беручи до уваги довільність множини M, а також довільність здійсненої інтерпретації та заміщень вільних предметних змінних на ній, дійдемо висновку, що формула 1) є тотожно істинною.

Доведення оберненої імплікації 2) аналогічне. Пропонуємо читачеві довести її самостійно.

Застереження, що предметна змінна x не має вільних входжень в $\mathfrak{B}$, є істотним в законах пронесення кванторів. Без цього застереження, наприклад, формула $\forall x (\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}) \leftrightarrow \forall x \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{B}$ не є тотожно істинною.

Справді, за множину інтерпретацій візьмемо множину N усіх натуральних чисел, замість $\mathfrak{A}(x)$ візьмемо $x \vdots 8 \to x \vdots 6$, замість $\mathfrak{B}$ — $\urcorner (x \vdots 24)$, а вільне входження змінної x замінимо на 24. Тоді матимемо висловлення

$$\forall x((x \vdots 8 \to x \vdots 6) \vee \neg (x \cdot 24)) \leftrightarrow \forall x (x \vdots 8 \to x \vdots 6) \vee \\ \vee \neg (24 \vdots 24),$$

яке є хибним (ліва частина еквіваленції має значення 1, а права — 0).

Із наведених законів логіки предикатів закони 7, 8, 9, 10, 11, 12 мають форму імплікації, причому обернені їм імплікації не є тотожно істинними формулами, не є лзз.

Щоб довести, що дана формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів не є лзз, досить знайти контрприклад, тобто знайти хоча б одну множину, інтерпретацію на ній і відповідне заміщення вільних предметних змінних, при яких $|\mathfrak{A}| = 0$.

Покажемо це на прикладі спростування твердження, оберненого до закону 10.

Доведемо, що імплікація

$$\exists x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \qquad (51)$$

не є лзз.

Контрприклад побудуємо так. За множину інтерпретації візьмемо $\{6, 8\}$. Нехай інтерпретацією для P є конкретний предикат «$x \vdots 4$», а для Q — «x» — непарне число». Тоді $|\exists x \in \{6, 8\} (x \vdots 4 \to x$ — непарне число$)| = 1$, а $|\exists x \in \{6, 8\} (x \vdots 4) \to \exists x \in \{6, 8\}$ (x — непарне число$)| = 0$. Таким чином, знайдено інтерпретацію, при якій формула (51) набуває значення 0, тобто формула (51) не є лзз.

Спростування тверджень, обернених до імплікацій 7, 8, 9, 11, 12, пропонуємо читачеві зробити самостійно.

Зазначимо, що в запропонованих вправах, як і в вищедоведеному випадку, задані формули замкнені, отже, відпадає необхідність в заміщенні вільних предметних змінних.

Розглянемо тепер приклад, в якому є вільне входження предметної змінної.

Чи є лзз формула

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \vee \neg Q(x). \qquad (52)$$

Застосуємо метод відшукання контрприкладу. Припустимо, що (52) не є лзз. Тоді існує множина M_0, інтерпретація P_0, Q_0 предикатних змінних P, Q і таке заміщення в і л ь н о ї предметної змінної x елементом $x_0 \in M_0$, що

$$|\forall x (P_0(x) \to Q_0(x) \vee \neg Q_0(x_0)| = 0. \qquad (53)$$

з (53) маємо

$$|\forall x (P_0(x) \to Q_0(x)| = 0 \qquad (54)$$

і

$$|\neg Q_0(x_0)| = 0.$$

Звідси $|Q_0(x_0)| = 1$. Вираз (54) означає, що знайдеться таке $x_1 \in M_0$, для якого виконуються рівності $|P_0(x_1)| = 1$, $|Q_0(x_1)| = 0$. Ці умови не суперечать одна одній. Отже, ми знайшли контрприклад: досить на певній n-елементній множині M ($n \geqslant 2$) взяти таку інтерпретацію, при якій $|P_0(x_1)| = 1$, $|Q_0(x_1)| = 0$, $|Q_0(x_0)| = 1$, і замістити вільне входження x на x_0 ($x_0, x_1 \in M$).

Таким чином, формула (52) не є тотожно істинною. Зазначимо, що на одноелементній множині формула (52) істинна. Справді, на одноелементній множині $\{a\}$ $\forall x P(x)$, $\forall x Q(x)$, $\neg Q(x)$ перейдуть відповідно в $P(a)$, $Q(a)$, $\neg Q(a)$, тобто у висловлення, які позначимо p, q, $\neg q$. Тоді матимемо формулу алгебри висловлень $(p \to q) \vee \neg q$, яка є тавтологією:

$$(p \to q) \vee \neg q \equiv (\neg p \vee q) \vee \neg q \equiv \\ \equiv \neg p \vee (q \vee \neg q) \equiv \neg p \vee 1 \equiv 1.$$

Закони 1—12 сформульовано для атомарних предикатів P, Q, а не для довільних формул логіки предикатів $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Це має істотне значення лише для законів 1, 2, оскільки в останніх поряд з $P(x)$ фігурує $P(y)$. Як вже зазначалося, такий перехід від $\mathfrak{A}(x)$ до $\mathfrak{A}(y)$ не завжди правомірний. Тому закони 1 і 2 мають місце для довільної формули логіки предикатів $\mathfrak{A}(x)$ (замість $P(x)$) тільки при умові, що змінна y — вільна для x у формулі $\mathfrak{A}(x)$. У противному разі формули $\forall x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(y)$, $\mathfrak{A}(y) \to \exists x \mathfrak{A}(x)$ перестають бути тотожно істинними. Наприклад, якщо для першої з цих формул за множину інтерпретації взяти множину N всіх натуральних чисел, а за інтерпретацію $\mathfrak{A}(x)$ взяти $\exists y (\neg (y = x))$, то дістанемо явно хибне висловлення

$$\forall x \exists y (\neg (y = x)) \to \exists y (\neg (y = y)).$$

Зауважимо, що проведені вище доведення тотожної істинності формул логіки предикатів, на відміну від аналогічних доведень в алгебрі висловлень, не підводять до алгоритму для відповіді на питання про те, чи є довільно задана формула логіки предикатів логічно загальнозначущою.

Міркування, за якими проводилося доведення в усіх розглянутих випадках, були змістовними і спиралися на інтуїтивне поняття множини. Докладніше про це мова йтиме у § 7.

З поняттям логічної загальнозначущості формули тісно пов'язано поняття виконуваності формули.

Означення. *Формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів називається* ***виконуваною*** *на множині M, якщо існує хоча б одна інтерпретація $\mathfrak{A}$ на M і хоча б одне заміщення вільних предметних змінних в $\mathfrak{A}$ назвами елементів M, при яких* $|\mathfrak{A}| = 1$.

Формула $\mathfrak{A}$ називається виконуваною, якщо існує така множина, на якій $\mathfrak{A}$ — виконувана.

Виконуваність формули $\mathfrak{A}$ на множині M залежить від потужності M і не залежить від природи елементів M аналогічно тому, як це мало місце для істинності $\mathfrak{A}$ на M. Причому, виконується таке твердження.

Якщо формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів виконувана на множині M і потужність M_1 не менша, ніж потужність M, то $\mathfrak{A}$ виконувана на M_1.

Тут, як і для твердження про істинність $\mathfrak{A}$ на M, необхідне застереження, що формула не містить ні конкретних предикатів, ні предметних сталих.

Із сформульованого твердження випливає такий наслідок.

Для доведення виконуваності формули $\mathfrak{A}$ на кожній непорожній множині досить довести, що формула $\mathfrak{A}$ виконувана на одноелементній множині.

Приклади

1. Довести, що формула

$$\forall x (P(x) \to P(y)) \tag{55}$$

виконувана на кожній непорожній множині.

Доведення. Досить показати, що формула (55) виконувана на одноелементній множині $\{a\}$. Проте на цій множині формула (55) перетворюється у $P(a) \to P(a)$, тобто у формулу алгебри висловлень $p \to p$, яка є тавтологією.

2. Довести, що формула логіки предикатів

$$P(x, y) \wedge \neg P(x, z) \wedge P(y, x) \wedge \neg P(y, z) \wedge P(z, x) \wedge \neg P(z, y) \tag{56}$$

а) виконувана на кожній n-елементній множині при $n \geqslant 3$,
б) не виконувана на двохелементній множині.

Доведення. а) Досить показати, що формула (56) — виконувана на трьохелементній множині. Нехай такою множиною є множина людей, інтерпретацією двомісного предиката $P(x, y)$ є «x знає y». Вільні предментні змінні x, y, z у формулі (56) замінимо назвами людей a, b, c так, щоб виконувались умови: «a знає b», «b знає a», «c знає a», «a не знає c», «b не знає c» і «c не знає b». Ці умови, очевидно, несуперечні між собою. Інтерпретацією кон'юнкції (56) є тоді істинне висловлення, що й доводить a).

б) Нехай M — довільна двухелементна множина $\{a_1, a_2\}$, P^* — довільна інтерпретація P. Оскільки вільні предметні змінні x, y, z входять у формулу (56) симетрично, то досить розглянути таке заміщення їх: x на a_1, y на a_2, при цьому z_1 можна замінити або на a_1, або на a_2. У першому випадку останній член кон'юнкції (56) є $\neg P^*(a_1, a_2)$, який суперечить першому $P^*(a_1, a_2)$, у другому випадку другий член $\neg P^*(a_1, a_2)$ суперечить першому. Таким чином, при довільній інтерпретації на двохелементній множині кон'юнкція (56) переходить у хибне висловлення, тобто формула (56) не виконувана на даній множині.

Нарешті, встановимо таке співвідношення між тотожною істинністю і виконуваністю.

Теорема. *$\mathfrak{A}$ — тотожно істинна формула логіки предикатів тоді і тільки тоді, коли $\neg\mathfrak{A}$ — невиконувана формула.*

Доведення. Справді, нехай M — довільна множина, $\mathfrak{A}^*$ — результат довільної інтерпретації і заміщення вільних предметних змінних формули $\mathfrak{A}$. Дано $|\mathfrak{A}^*| = 1$. Тоді $|\neg\mathfrak{A}^*| = 0$, тобто $\neg\mathfrak{A}$ — невиконувана формула. Навпаки, нехай $\neg\mathfrak{A}$ — невиконувана. Тоді $|\neg\mathfrak{A}^*| = 0$, отже, $|\mathfrak{A}^*| = 1$.

§ 5. Рівносильність формул логіки предикатів. Логічне слідування

Означення. *Формули $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ логіки предикатів називаються* ***еквівалентними*** *на множині M, якщо при всіх інтерпретаціях на M і при всіх заміщеннях вільних предметних змінних назвами елементів M формули $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ набувають ті самі значення істинності.*

Формули $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$, еквівалентні на кожній множині, називаються логічно еквівалентними або рівносильними.

Відношення логічної еквівалентності між формулами логіки предикатів $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ позначатимемо, як і в алгебрі висловлень, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Відношення рівносильності формул, очевидно, має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

З означення логічної еквівалентності безпосередньо випливає, що $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли $\models \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$.

Так, із тотожно істинних формул 3—6, 13—20, § 4, дістаємо рівносильності:

3′. $\neg\forall xP(x)\equiv\exists x\neg P(x)$;
4′. $\neg\exists xP(x)\equiv\forall x\neg P(x)$;
5′. $\forall x(P(x)\wedge Q(x))\equiv\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$;
6′. $\exists y(P(x)\vee Q(x))\equiv\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$;
13′. $\forall x(\mathfrak{A}(x)\wedge\mathfrak{B})\equiv\forall x\mathfrak{A}(x)\wedge\mathfrak{B}$;
14′. $\forall x(\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B})\equiv\forall x\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B}$;
15′. $\exists x(\mathfrak{A}(x)\wedge\mathfrak{B})\equiv\exists x\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B}$;
16′. $\exists x(\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B})\equiv\exists x\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B}$;
17′. $\forall x(\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B})\equiv\exists x\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}$;
18′. $\exists x(\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B})\equiv\forall x\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}$;
19′. $\forall x\forall y\mathfrak{A}(x,y)\equiv\forall y\forall x\mathfrak{A}(x,y)$;
20′. $\exists x\exists y\mathfrak{A}(x,y)\equiv\exists y\exists x\mathfrak{A}(x,y)$.

Ці рівносильності називають так само, як і відповідні їм тотожно істинні формули. Приєднаємо ще рівносильність

21. $Qx\mathfrak{A}(x)\equiv Qu\mathfrak{A}(u)$,

де Q — символ $\forall$ чи $\exists$, змінна u не входить в $\mathfrak{A}(x)$, а змінна x не входить в $\mathfrak{A}(u)$ (перейменування зв'язаної змінної).

Очевидно, всі рівносильності логіки висловлень переносяться в логіку предикатів.

Використовуючи властивості рівносильностей, до яких належить і теорема про заміну для рівносильностей алгебри висловлень, можно діставати нові рівносильності, будуючи ланцюжок рівносильних перетворень аналогічно тому, як це робилося в алгебрі висловлень.

Наприклад, виведемо рівносильність 17′, вважаючи, що 4′ і 14′ вже встановлено.

1. $\forall x(\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B})\equiv\forall x(\neg\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B})$ (тавтологія 9, теорема про заміну);
2. $\forall x(\neg\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{B})\equiv\forall x(\neg\mathfrak{A}(x))\vee\mathfrak{B}$ (14);
3. $\forall x(\neg\mathfrak{A}(x))\vee\mathfrak{B}\equiv\neg(\exists x\mathfrak{A}(x))\vee\mathfrak{B}$ (4, теорема про заміну);
4. $\neg(\exists x\mathfrak{A}(x))\vee\mathfrak{B}\equiv\exists x\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}$ (тавтологія 9);
5. $\forall x(\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B})\equiv\exists x\mathfrak{A}(x)\to\mathfrak{B}$ (з 1 — 4 за транзитивністю «$\equiv$»).

У першому розділі ми розглядали поняття логічного слідування на базі алгебри висловлень. Не менше значення в проведенні міркувань, зокрема математичних, має логічне слідування на базі логіки предикатів.

Новими, ускладнюючими елементами тут є наявність предикатів і кванторів та можливість вільних входжень предметних змінних.

Означення. *Кажуть, що формула $\mathfrak{B}$ логічно слідує з формули $\mathfrak{A}$ в логіці предикатів, якщо на кожній множині M при будь-якій інтерпретації формула $\mathfrak{B}$ набуває значення 1 при кожному заміщенні вільних предметних змінних назвами елементів M, при якому формула $\mathfrak{A}$ набуває значення 1. Символічно це записують, як і в алгебрі висловлень, $\mathfrak{A}\models\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ називають посилкою, або припущенням, $\mathfrak{B}$ — висновком.*

Якщо немає вільних входжень предметних змінних, то означення спрощується. У цьому разі $\mathfrak{B}$ логічно слідує з $\mathfrak{A}$ тоді і тільки тоді, коли при кожній інтерпретації на довільній множині формула $\mathfrak{B}$ набуває значення 1 кожного разу, коли формула $\mathfrak{A}$ дістає це значення.

Означення логічного слідування, як і в алгебрі висловлень, узагальнюється на випадок, коли є не одна посилка, а множина посилок Γ. Тоді перше означення повторюється, але вираз «формула $\mathfrak{A}$ набуває значення 1» замінюється виразом «кожна формула з множини посилок Γ набуває значення 1».

Символічний запис має вигляд: $\Gamma\models\mathfrak{B}$. Зокрема, якщо $\Gamma=\{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n\}$ (Γ — скінченна множина), то записуємо $\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n\vdash\mathfrak{B}$.

Розглянемо приклади.

Приклади

1. Перевірити, чи слідує логічно в логіці предикатів формула $P(y)$ з формули $\exists xP(x)$ на прикладі двохелементної множини $\{a,b\}$.

№ п/п	l	y	$\exists xP(x)$	$P(y)$
1	L_1	a	0	0
2	L_1	b	0	0
3	L_2	a	1	0
4	L_2	b	1	1
5	L_3	a	1	1
6	L_3	b	1	0
7	L_4	a	1	1
8	L_4	b	1	1

Процес заповнення даної таблиці був розглянутий у § 3. Там же було наведено значення логічних функцій L_1 — L_4.

Як бачимо, в 3-му і 6-му рядках таблиці посилка $\exists\, xP(x)$ має значення 1, а $P(y)$ — значення 0. Отже, $P(y)$ не слідує логічно в $\exists\, xP(x)$.

2. Перевірити для випадку двохелементної множини, чи з формули $\forall\, xP(x)$ слідує $P(y)$.

№ п/п	I	y	$\forall\, x\, P(x)$	$P(y)$
1	L_1	a	0	0
2	L_1	b	0	0
3	L_2	a	0	0
4	L_2	b	0	1
5	L_3	a	0	1
6	L_3	b	0	0
7	L_4	a	1	1
8	L_4	b	1	1

Досить розглянути два останніх рядки таблиці, в яких значення посилки дорівнює 1. У цих двох рядках значення $P(y)$ є теж 1. Отже, відповідь на поставлене питання стверджувальна. Звичайно, результат перевірки не означає, що має місце логічне слідування

$$\forall\, xP(x) \models P(y). \tag{57}$$

Для останнього необхідно довести, що такий самий результат матимемо для довільної множини. Наведемо це доведення.

Припустимо, що фомула (57) не має місця. Тоді знайдеться множина M_0, інтерпретація P_0 предикатної змінної P і заміщення y на $y_0 \in M_0$, що будуть одночасно виконуватися рівності $|\forall\, xP_0(x)| = 1$ і $|P_0(y_0)| = 0$. Це суперечить означенню квантора загальності. Отже, наше припущення неправильне, співвідношення (57) справджується.

Зазначимо, що у співвідношенні (57) не можна, взагалі, замінити атомарну формулу $P(x)$ на довільну формулу $\mathfrak{A}(x)$. Така заміна буде правомірною тільки тоді, коли змінна y є вільною для x в $\mathfrak{A}(x)$.

Як і в алгебрі висловлень, між в і д н о ш е н н я м логічного слідування і о п е р а ц і є ю імплікації існує просте співвідношення, яке виражається таким твердженням. Логічне слідування $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n \models \mathfrak{B}$ має місце тоді і тільки тоді, коли тотожно істинною є формула

$$\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}. \tag{*}$$

Твердження (*) дає змогу звести питання про те, чи має місце певне логічне слідування до перевірки деякої формули логіки предикатів на тотожну істинність. Так, слідування $\forall\, x\,(P(x) \to Q(x)) \models \forall\, x\, P(x) \to \forall\, xQ(x)$ виводиться за допомогою твердження (*) із закону 9,

§ 4. Слідування $\exists\, x\,(P(x) \wedge Q(x)) \models \exists\, xP(x) \wedge \exists\, xQ(x)$ виводиться аналогічно із закону 8.

Деякі схеми логічного слідування вживаються в міркуваннях дуже часто (називатимемо їх п р а в и л а м и в и в о д у).

Наведемо окремі правила виводу логіки предикатів. У логіку предикатів переносяться перш за все відомі з алгебри висловлень правила виводу, зокрема,

Правило MP — $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1 \models \mathfrak{A}_2$;

Правило MT — $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \neg\mathfrak{A}_2 \models \neg\mathfrak{A}_1$;

Правило силогізму — $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3 \models \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3$;

Правила введення та ***вилучення кон'юнкції*** і ***диз'юнкції*** тощо. У наведених правилах виводу $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ — назви довільних формул логіки предикатів.

Розглянемо тепер кілька правил виводу, властивих тільки логіці предикатів ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — назви довільних формул логіки предикатів):

1. $\forall\, x\mathfrak{A}(x) \models \mathfrak{A}(y)$, якщо змінна y вільна для x в $\mathfrak{A}(x)$.

2. $\mathfrak{A}(y) \models \exists\, x\mathfrak{A}(x)$[1], якщо змінна y вільна для x в $\mathfrak{A}(x)$

3. Якщо $\Gamma \models \mathfrak{A}(x)$ і x не має вільних входжень в жодну з формул множини Γ, то $\Gamma \models \forall x\, \mathfrak{A}(x)$.

4. $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2(x) \models \mathfrak{A}_1 \to \forall\, x\mathfrak{A}_2(x)$ } якщо змінна x не

5. $\mathfrak{A}_2(x) \to \mathfrak{A}_1 \models \exists\, x\mathfrak{A}_2(x) \to \mathfrak{A}_1$ } входить вільно в $\mathfrak{A}_1$.

Д о в е д е н н я п р а в и л а 3. Нехай M — довільна множина, I — довільна інтерпретація всіх предикатних змінних і заміщення всіх вільних предметних змінних, що входять в посилки чи в $\mathfrak{A}(x)$. Позначимо через $\mathfrak{A}^*(x_0)$ вираз, утворений з $\mathfrak{B}(x)$ в результаті I, де через x_0 позначено той елемент M, на який заміщено x в інтерпретації.

За умовою $|\mathfrak{A}^*(x_0)| = 1$, якщо всі формули множини Γ в результаті I матимуть значення 1. Це саме матимемо і при кожному $x_0 \in M$, оскільки x не входить вільно в жодну з формул Γ, тобто істинісні значення всіх формул множини Γ при зміні x_0 не зміняться. Таким чином, кожного разу, коли всі посилки набувають значення 1, формула $\forall\, x\mathfrak{A}^*(x)$ теж набуває значення 1, що й доводить правило 3.

[1] Правило 1 позначатимо скорочено О$\forall$, правило 2 — В$\exists$ (О — перша буква слова «опускання», В — перша буква слова «введення»).

З правила 3 при $\Gamma = \varnothing$ випливає важливий наслідок.

Наслідок 3′. *Якщо* $\models \mathfrak{A}(x)$, *то* $\models \forall x\, \mathfrak{A}(x)$ (*правило узагальнення*).

Правило 3′ часто застосовується при доведенні математичних теорем. Так, щоб довести неперервність функції f на множині M, доводять неперервність f у довільній фіксованій точці $x \in M$. Тоді за наслідком 3′ здобутий результат справджується для кожного $x \in M$.

Проте слідування $\mathfrak{A}(x) \models \forall x \mathfrak{A}(x)$ не має місця. Справді, у противному разі формула $\mathfrak{A}(x) \to \forall x \mathfrak{A}(x)$ була б тотожно істинною. Що це не так, свідчить наступна інтерпретація.

За множину інтерпретації беремо N — множину натуральних чисел, за $\mathfrak{A}(x)$ — «x — просте число», вільну предметну змінну x замінимо назвою числа 7. Дістанемо хибне висловлення: «7 — просте число $\to \forall x$ (x — просте число)».

Решту правил виводу пропонуємо читачеві довести самостійно. Зробимо лише такі зауваження.

З правила 1 випливає наслідок: $\forall x\, \mathfrak{A}(x) \models \mathfrak{A}(x)$, оскільки x — вільний сам для себе в $\mathfrak{A}(x)$.

У правилах 4 і 5 застереження, що змінна x не входить вільно в $\mathfrak{A}_1$, є істотним. Про це свідчить хоча б такий контрприклад.

За множину інтерпретації візьмемо R — множину всіх дійсних чисел, інтерпретацією $\mathfrak{A}_2(x)$ нехай буде $x > 1$, а інтерпретацією $\mathfrak{A}_1$ — $x > 2$, вільну предметну змінну x замінимо назвою числа 3. Без застереження правило 4 тоді дає хибне висловлення

$$(3 > 2 \to 3 > 1) \to (3 > 2 \to \forall x\, (x + 1)).$$

У математиці звичайними є наступні міркування. Дано, що існує такий елемент множини U, який має властивість P. Нехай $c \in U$ таке, що $P(c)$, де c — певний вибраний елемент U. Потім звільняємося від цього c, і здобутий далі висновок буде цілком правомірним.

Відповідно до цього введемо таке правило виводу.

6. $\exists x\, \mathfrak{A}(x) \models \mathfrak{A}(c)$, де c — певний вибраний елемент універсальної множини U (правило вилучення (опускання) квантора існування — О$\exists$).

До правила 6 зробимо такі застереження.

а) Якщо формулу $\mathfrak{B}$ було виведено з посилок, і при цьому застосовувалося правило 6, то формула $\mathfrak{B}$ не повинна містить c, тобто назви вибраного елемента U.

б) Правило узагальнення (введення квантора загальності) не можна вживати по змінній, вільній в формулі $\exists x \mathfrak{A}(x)$, до якої було застосовано правило 6), саме цю умову було б порушено, якщо продовжити спробу доведення формули, оберненої до закону (21), с. 000.

Правильність співвідношення $\Gamma \models \mathfrak{B}$ можна перевірити побудовою скінченої послідовності формул логіки предикатів $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_m$, такої, що $\mathfrak{B}_m$ збігається з $\mathfrak{B}$, а кожен член послідовності є або однією з посилок, або тотожно істинною формулою, або слідує з попередніх членів послідовності за правилом виводу.

Останнє твердження випливає з таких властивостей відношення логічного слідування:

1) якщо Γ — множина формул логіки предикатів і $\mathfrak{A} \in \Gamma$, то $\Gamma \models \mathfrak{A}$;

2) якщо Γ — множина формул логіки предикатів, $\Gamma \models \mathfrak{A}$ і $\mathfrak{A} \models \mathfrak{B}$, то $\Gamma \models \mathfrak{B}$ (властивість транзитивності «$\models$»).

Приклад. Перевірити, чи справджується слідування $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)) \models \exists x\, (P(x) \wedge R(x))$.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \\ 2.\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)) \end{array}\right\} \text{(посилки);}$$

3. $P(c) \wedge Q(c)$ (1, О$\exists$);
4. $P(c)$ (3, О$\wedge$);
5. $Q(c)$ (3, О$\wedge$);
6. $Q(c) \to R(c)$ (2, О$\forall$);
7. $R(c)$ (5, 6, MP);
8. $P(c) \wedge R(c)$ (4, 7, В$\wedge$);
9. $\exists x\, (P(x) \wedge R(x)$ (8, В$\exists$);

Отже, $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x\, (Q(x) \to R(x)) \models \exists x\, (P(x) \wedge R(x))$.

Розглянемо тепер міркування, виражені в природній мові, суть яких полягає у встановленні певного логічного слідування.

Проте спочатку зробимо зауваження щодо запису в символічній мові логіки предикатів деяких типів тверджень природної мови

Ще в традиційній логіці розрізняли такі чотири типи тверджень:

а) загальностверднi — «Всі P є Q»;

б) загальнозаперечні — «Жодне P не є Q»;

в) частковостверднi — «Деякі P є Q»;

г) частковозаперечні — «Деякі P не є Q».

Наведемо їх переклад на символічну мову логіки предикатів.

а) $\forall x (P(x) \to Q(x))$;

б) $\forall x (P(x) \to \neg Q(x))$;

в) $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$;

г) $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$.

Зазначимо, що в загальних твердженнях поряд з квантором загальності з'являється операція імплікації, а в часткових твердженнях поряд з квантором існування — операція кон'юнкції, що точно відповідає змісту тверджень природної мови.

Розглянемо приклади міркувань, висловлених у термінах природної мови.

Приклад 1. Перевірити, чи правильне наступне міркування: «Деякі додатні числа менше всіх коренів даного рівняння $f(x) = 0$.

Жодне додатне число не менше від жодного від'ємного.

Отже, жодний корінь рівняння $f(x) = 0$ не є від'ємним».

Щоб перевірити, чи коректне дане міркування, тобто чи слідує логічно зроблений висновок з наведених двох припущень (посилок), запишемо їх у символічній мові логіки предикатів, вводячи відповідні предикатні символи: $D(x)$ замість «x — додатне число»,

$K(x)$ замість «x — корінь рівняння $f(x) = 0$»,

$M(x, y)$ замість «x менше y»,

$B(x)$ замість «x — від'ємне».

Тоді перша посилка (її логічна структура) запишеться у вигляді

$$\exists x (D(x) \wedge \forall y (K(y) \to M(x, y))),$$

друга посилка —

$$\forall x (D(x) \to \forall y (B(y) \to \neg M(x, y))),$$

а очікуваний висновок —

$$\forall x (K(x) \to \neg B(x)).$$

Тепер задача зводиться до того, чи виконується слідування

$$\exists x (D(x) \wedge \forall y (K(y) \to M(x, y))),\ \forall x (D(x) \to \forall y (K(y) \to \neg M(x, y))) \models \forall x (K(x) \to \neg B(x)).$$

Далі поступаємо так, як у попередньому прикладі:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \exists x (D(x) \wedge \forall y (K(y) \to M(x, y))) \\ 2.\ \forall x (D(x) \to \forall y (B(y) \to \neg M(x, y))) \end{array}\right\} \text{(посилки)};$$

3. $D(c) \wedge \forall y (K(y) \to M(c, y))$ (1, О$\exists$);

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ D(c) \\ 5.\ \forall y (K(y) \to M(c, y)) \end{array}\right\} (3, \text{О}\wedge);$$

6. $D(c) \to \forall y (B(y) \to \neg M(c, y))$ (2, О$\forall$);

7. $\forall y (B(y) \to \neg M(c, y))$ (4, 6, MP);

8. $B(y) \to \neg M(c, y)$ (7, О$\forall$);

9. $M(c, y) \to \neg B(y)$ (8, правила контрапозиції та подвійного заперечення);

10. $K(y) \to M(c, y)$ (5, О$\forall$);

11. $K(y) \to \neg B(y)$ (10, 9, правило силогізму)

12. $\forall y (K(y) \to \neg B(y))$ (11, В$\forall$);

13. $\forall x (K(x) \to \neg B(x))$ (12, перейменування зв'язаної змінної).

Отже, дане міркування коректне, очікуваний висновок логічно слідує з прийнятих посилок.

Розглянутий вище метод перевірки слідування застосовний лише тоді, коли дане міркування правильне. Цим методом, звичайно, не можна спростувати неправильне міркування. У такому випадку краще всього знайти контрприклад. Можна також застосувати твердження (*), яке встановлює необхідну і достатню умову правильності логічного слідування.

Наведемо ще один приклад.

Приклад 2. Перевірити правильність наступного міркування. «Не всі алгебраїчні числа раціональні.

Всі раціональні числа — дійсні.

Отже, деякі алгебраїчні числа не є дійсними».

Введемо предикатні змінні A, R, D замість конкретних предикатів: «...є алгебраїчним числом», «...є раціональним числом», «...є дійсним числом» відповідно. Логічна структура посилок тоді запишеться так: 1) $\exists x (A(x) \wedge \neg R(x))$, 2) $\forall x (R(x) \to D(x))$. Очікуваний висновок матиме вигляд $\exists x (A(x) \wedge \neg D(x))$.

У даному прикладі всі предикати — одномісні, причому їх тільки три. Тому можна застосувати діаграму Венна (рис. 18). На діаграмі зображено посилки 1) і 2). Першій посилці відповідає непорожність хоча б однієї з двох підмножин U, позначених зірочками (два випадки). Другій посилці відповідає порожність підмножини R, яка лежить поза D. Якщо дане міркування правильне, то на діаграмі Венна безпосередньо читається очікуваний висновок при всіх випадках. Проте в даному разі один випадок (верхня зірочка) відповідає очікуваному висновку, але другий випадок (нижня зірочка) — ні. Отже, задане міркування неправильне.

Оскільки очікуваний висновок у даному разі є ф а к т и ч н о істинним, то доцільно побудувати в термінах природної мови такий контрприклад, в якому при тій саме логічній структурі посилки є фактично істинними, а очікуваний висновок — ні. Наведемо такий контрприклад.

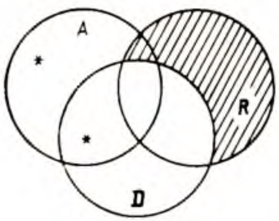

Рис. 18

За універсальну множину візьмемо N — множину натуральних чисел, замість $A(x)$ і $D(x)$ — «x кратне 5», замість $R(x)$ — «x кратне 10». Обидві посилки тоді переходять в істинні висловлення, а висновок «деякі числа, кратні 5 — не кратні 5» є хибним.

Повернемося до застережень, зроблених про застосування окремих правил виводу. Особливу увагу треба звернути на застосування правила узагальнення (В $\forall$).

Як зазначалося вище, слідування $\mathfrak{A}(x) \models \forall x\, \mathfrak{A}(x)$ неправомірне. А тому застосовувати правило В $\forall$ по тій предметній змінній, яка має в і л ь н е входження хоча б в одній з посилок даного виводу, не можна. Ігнорування цього застереження приводить до грубих помилок, про що свідчить хоча б такий приклад.

1. $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ } (посилки);
2. $\neg Q(x)$
3. $P(x) \vee Q(x)$ (1, О $\forall$);
4. $P(x) \vee Q(x) \rightarrow (\neg Q(x) \rightarrow P(x))$ (тавтологія);
5. $\neg Q(x) \rightarrow P(x)$ (3, 4, MP);
6. $P(x)$ (2, 5, MP);
7. $\forall x P(x)$ (6, В $\forall$).

Отже,

$$\forall x\,(P(x) \vee Q(x)),\ \neg Q(x) \models \forall x P(x)\ (?) \qquad (*)$$

Це слідування явно неправильне. Справді, за U візьмемо N, за $P(x)$ — «x — парне число», за $Q(x)$ — «x — непарне число», вільне входження x замінимо назвою числа 6. Тоді обидві посилки в (*) будуть істинними, а

висновок «всі натуральні числа — парні» є хибним. Помилка, очевидно, зроблена при застосуванні правила В $\forall$ в 7 по змінній x, яка має вільне входження в посилку 2.

§ 6. Випереджена нормальна форма. Закон двоїстості. Обмежені квантори

Для формул логіки предикатів, як і для формул алгебри висловлень, існують певні канонічні форми.

Дамо відповідні означення.

Означення. *Формула $\mathfrak{A}$ логіки предикатів називається з в е д е н о ю, якщо $\mathfrak{A}$ не містить інших символів операцій алгебри висловлень, крім «$\neg$», «$\wedge$», «$\vee$».*

Наприклад, формула $\forall x \exists y\,(\neg Q(x)) \vee P(y)$ — зведена, а формула $\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ — ні. Формула логіки предикатів, яка не містить кванторів, називається в і д к р и т о ю.

Означення. *Зведена формула $\mathfrak{A}$ знаходиться у в и п е р е д ж е н і й (п р е н е к с н і й) нормальній формі, якщо $\mathfrak{A}$ — відкрита або має вигляд*

$$Qx_1 Qx_2 \ldots Qx_n(\mathfrak{B}), \qquad (58)$$

де Q означає $\forall$ чи $\exists$, $\mathfrak{B}$ — відкрита формула, що знаходиться в області дії кванторів Q, і всі x_i відмінні між собою ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Так, формули $P(x)$, $\forall x \forall y \exists z\,(P(x, y) \wedge \neg Q(z))$ знаходяться в пренексній формі, а формули $\forall x P(x) \vee \exists y P(y)$, $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\exists y \forall x\,(P(x, y)) \vee Q(y)$ — ні. Вираз $Qx_1 \ldots Qx_n$ у формулі (58) називається п р и с т а в к о ю, а формула $\mathfrak{B}$ — матрицею або ядром формули $\mathfrak{A}$.

Означення. *Формула, яка знаходиться в пренексній формі і рівносильна формулі $\mathfrak{A}$, називається в и п е р е д ж е н о ю (пренексною) формою $\mathfrak{A}$.*

Теорема. *Для кожної формули логіки предикатів $\mathfrak{A}$ існує випереджена нормальна форма $\mathfrak{A}$.*

Теорему доведемо індукцією за числом m логічних операцій в $\mathfrak{A}$.

Базис індукції. При $m = 0$ формула $\mathfrak{A}$ — атомарна, отже, вона знаходиться у випередженій нормальній формі (внф).

Індукційний крок. За індуктивним припущенням доводжуване твердження має місце для кожної формули логіки предикатів з числом логічних операцій, меншим ніж m. Далі, формула $\mathfrak{A}$ має один з видів: а) $\neg \mathfrak{B}_1$, б) $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2$, в) $\mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{B}_2$, г) $Q(\mathfrak{B}_1)$, причому, за індуктивним припущенням, можна вважати, що $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ знаходяться у пренексній формі.

а) $\mathfrak{A} = \neg \mathfrak{B}_1$, де $\mathfrak{B}_1$ має вид $Qx_1 \dots Qx_n (\mathfrak{B}^*)$. Тоді, згідно із законами де Моргана, $\neg \mathfrak{B}_1 \equiv Q'x_1 \dots Q'x_n (\neg \mathfrak{B}^*)$, де Q' — квантор існування (загальності), якщо Q — квантор загальності (існування). Таким чином, для $\neg \mathfrak{B}_1$, тобто для $\mathfrak{A}$, існує внф, і для цього випадку індукційний крок доведено.

б) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2$, де, за індуктивним припущенням, $\mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_2$ мають вид $Q'x_1 \dots Q'x_n (\mathfrak{B}_1')$ і $Q''x_1 \dots Q''x_n (\mathfrak{B}_2')$ відповідно.

Щоб застосувати до формули $\mathfrak{A}$ закони пронесення кванторів, зробимо, в разі потреби, перейменування зв'язаних змінних так, щоб в обох приставках не було однакових змінних і щоб змінні обох приставок були відмінні від усіх в і л ь н и х змінних в $\mathfrak{B}_1'$ і $\mathfrak{B}_2'$. Такі перейменування, очевидно, не порушують рівносильності формул. Далі послідовно застосовуємо рівносильності 14, 16 (закони пронесення кванторів), поки не дістанемо формули у пренексній формі. Детально цей процес буде з'ясовано на прикладах.

в) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{B}_2$. У цьому разі повторюється все, сказане у випадку б), проте рівносильності 14 і 16 заміняються відповідно на 13 і 15. Отже, для випадків б) і в) індукційний крок зберігає силу.

г) $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{B}_1)$. Тут остання операція — навішування квантора. Правильність індукційного кроку очевидна.

За принципом математичної індукції доводжуване твердження має силу для формули, що містить довільне число символів логічних операцій, тобто для д о в і л ь н о ї формули логіки предикатів. Теорему доведено.

Проілюструємо подане доведення на прикладах.

Приклади

1. Звести до внф формулу $\neg \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.
Розв'язання

1. $\neg \forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$;

2. $\exists x \neg P(x) \wedge \exists x Q(x)$ (1, закон де Моргана, теорема про заміну);

3. $\exists x \neg P(x) \wedge \exists y Q(y)$ (2, перейменування зв'язаної змінної);

4. $\exists x (\neg P(x) \wedge \exists y Q(y))$ (3, пронесення квантора $\exists x$);

5. $\exists x (\exists y Q(y) \wedge \neg P(x))$ (4, комутативність кон'юнкції);

6. $\exists x \exists y (Q(y) \wedge \neg P(x))$ (5, пронесення квантора $\exists y$).

Формула $\exists x \exists y (Q(y) \wedge \neg P(x))$ рівносильна заданій і знаходиться у внф.

Примітка. Як видно з доведення теореми і розв'язання прикладу, внф заданої формули визначається неоднозначно. Формула має багато різних внф, всі вони рівносильні між собою.

2. Звести до внф формулу $\forall x P(x) \vee (\exists x P(x) \to \forall y Q(y))$.

1. $\forall x P(x) \vee (\exists x P(x) \to \forall y Q(y))$.

2. $\forall x P(x) \vee (\neg \exists x P(x) \vee \forall y Q(y))$ (1, рівносильність 9 алгебри висловлень, теорема про заміну);

3. $\forall x P(x) \vee (\forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y)$ (2, закон де Моргана, теорема про заміну);

4. $(\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y)$ (3, асоціативний закон диз'юнкції, теорема про заміну);

5. $(\forall x P(x) \vee \forall u \neg P(u)) \vee \forall y Q(y)$ (4, перейменування зв'язаної змінної);

6. $\forall x (P(x) \vee \forall u \neg P(u)) \vee \forall y Q(y)$ (5, пронесення квантора $\forall x$);

7. $\forall x (\forall u \neg P(u) \vee P(x)) \vee \forall y Q(y)$ (6, комутативність диз'юнкції);

8. $\forall x \forall u (\neg P(u) \vee P(x)) \vee \forall y Q(y)$ (7, пронесення квантора $\forall u$);

9. $\forall y Q(y) \vee \forall x \forall u (\neg P(u) \vee P(x))$ (8, комутативність диз'юнкції);

10. $\forall y (Q(y) \vee \forall x \forall u (\neg P(u) \vee P(x)))$ (9, пронесення квантора $\forall y$);

11. $\forall y (\forall x \forall u (\neg P(u) \vee P(x)) \vee Q(y)))$ (10, комутативність диз'юнкції);

12. $\forall y (\forall x \forall u) (\neg P(u) \vee P(x) \vee Q(y)))$ (11, пронесення квантора $\forall y$);

13. $\forall y \forall x \forall u (\neg P(u) \vee P(x) \vee Q(y))$ (12, опускання зайвих дужок).

Формула 12 і є шуканою внф заданої формули.

Тепер розглянемо формули, які не містять інших символів логічних операцій, крім «$\neg$», «$\wedge$», «$\vee$», «$\forall$», «$\exists$».

Означення. *Формула $\mathfrak{A}^*$ називається д в о ї с т о ю щодо $\mathfrak{A}$, якщо $\mathfrak{A}^*$ утворюється з $\mathfrak{A}$ заміною кожного з символів «$\wedge$», «$\vee$», «$\forall$», «$\exists$» на символи «$\vee$», «$\wedge$», «$\exists$», «$\forall$» відповідно.*

Так, формула $\neg \forall y \exists x P(x, y) \wedge \exists x \forall y P(x, y)$ двоїста щодо формули $\neg \exists y \forall x P(x, y) \vee \forall x \exists y P(x, y)$.

З означення безпосередньо випливає, що $(\mathfrak{A}^*)^* \equiv \mathfrak{A}$ (через $\mathfrak{A}^*$ позначено формулу, двоїсту до $\mathfrak{A}$).

Формулу логіки предикатів $\mathfrak{A}$, що містить символи предикатних змінних $P_1, \ldots, P_n$, позначатимемо $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$.

Мають місце наступні твердження.

1. *Якщо* $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n) \equiv \mathfrak{B}(P_1, \ldots, P_n)$, *то* $\mathfrak{A}^*(P_1, \ldots, P_n) \equiv \mathfrak{B}^*(P_1, \ldots, P_n)$ *(перший закон двоїстості).*

2. *Якщо* $\models \mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n) \to \mathfrak{B}(P_1, \ldots, P_n)$, *то* $\models \mathfrak{B}^*(P_1, \ldots, P_n) \to \mathfrak{A}^*(P_1, \ldots, P_n)$ *(другий закон двоїстості).*

3. *Якщо* $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$ *— тотожно істинна формула, то* $\mathfrak{A}^*(P_1, \ldots, P_n)$ *— невиконувана формула (суперечність).*

Доведення цих тверджень залишаємо читачеві, обмежуючись ілюстрацією теорем па прикладах.

Приклади

Встановивши рівносильність $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \wedge \forall xQ(x)$, за першим законом двоїстості, безпосередньо дістаємо $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$, тобто рівносильність 6. Довівши лзз 7 $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$, за другим законом двоїстості маємо $\models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$, тобто лзз 8. Оскільки формула $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ тотожно істинна, то двоїста до неї формула $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$ невиконувана (суперечність)

Часто, особливо в математичних формулюваннях, предметні змінні під знаком квантора пробігають не всю універсальну множину, а певну її підмножину. Так, у математичному аналізі універсальною числовою множиною є, як правило, множина всіх дійсних чисел, проте дуже часто вживаються також вирази: «для кожного $\varepsilon > 0$», «існує $\delta > 0$», де ε і δ пробігають множину всіх додатних чисел.

У зв'язку з цим вводять такі символічні позначення: $\underset{M}{\forall x}$, $\underset{M}{\exists x}$, де під символом кванторної змінної пишуть назву тієї підмножини M, яку пробігає ця змінна.

Для деяких числових множин введено символічні позначення:

$\boldsymbol{N}$ — множина всіх натуральних чисел;
$\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел;
$\boldsymbol{Q}$ — множина всіх раціональних чисел;
$\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел;
$\boldsymbol{R}^+$ — множина всіх додатних чисел;
$\boldsymbol{C}$ — множина всіх комплексних чисел.

Тоді символічний запис $\underset{N}{\forall x}P(x)$ читається: «для кожного натурального числа $xP(x)$», а запис $\underset{Q}{\exists x}P(x)$ — «існує таке раціональне число x, що $Q(x)$».

Символи $\underset{M}{\forall x}$, $\underset{M}{\exists x}$ називають **обмеженими кванторами**.

Означення. *Обмеженим квантором* $\underset{M}{\forall x}P(x)$ *називають вираз, який є скороченням виразу* $\forall x(x \in M \to Px))$, *тобто*

$$\underset{M}{\forall x}P(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \forall x(x \in M \to P(x)).$$

Обмеженим квантором $\underset{M}{\exists x}P(x)$ *називають вираз, який є скороченням виразу* $\exists x(x \in M \wedge P(x))$, *тобто*

$$\underset{M}{\exists x}P(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \exists x(x \in M \wedge P(x)).$$

Таке означення цілком відповідає нашій інтуїції. Справді, твердження «Кожний елемент M має властивість P» розуміємо так: «Якщо $x \in M$, то x має властивість P». На відміну від цього вираз

$$\text{«Існує } x \in M \text{ таке, що } P(x)\text{»} \qquad (*)$$

не можна трактувати як вираз: «Якщо $x \in M$, то $P(x)$», оскільки тоді твердження (*) було б правильним при $x \notin M$.

Навпаки, ми інтуїтивно розуміємо (*) як констатування правильності твердження: «Існує таке x, що $x \in M$ і одночасно має властивість P».

Приклади

1. $\underset{Q}{\forall x}\underset{Z}{\exists y}\underset{Z}{\exists u}(x = y : u) \leftrightarrow \forall x(x \in Q \to \exists y \exists u(y \in Z \wedge u \in Z \wedge \wedge x = y : u)$.

2. Запишемо велику теорему Ферма, користуючись обмеженими кванторами (через N_2 позначено множину всіх натуральних чисел, більших ніж 2):

$$\neg(\underset{N}{\exists x}\underset{N}{\exists y}\underset{N}{\exists z}\underset{N_2}{\exists n}(x^n + y^n = z^n)).$$

Рівносильним попередньому буде вираз в термінах звичайних кванторів

$$\neg(\exists x \exists y \exists z \exists n(x \in N \wedge y \in N \wedge z \in N \wedge n \in N_2 \wedge \wedge(x^n + y^n = z^n))).$$

Для обмежених кванторів має місце таке твердження.

Якщо в деякій рівносильності (тотожно істинній формулі), яка не містить символів вільних предметних змінних, замінити всі кванторні вирази $\forall x, \exists x$ символами обмежених кванторів $\underset{M}{\forall} x$, $\underset{M}{\exists} x$ відповідно, де M — довільна непорожня множина, то матимемо знову рівносильність (тотожно істинну формулу).

Це твердження ми доводити не будемо, а перевіримо його на окремому випадку закону де Моргана $\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$. Покажемо, що справджується рівносильність

$$\neg \underset{M}{\forall} x P(x) \equiv \underset{M}{\exists} x \neg P(x) \quad (M \neq \varnothing).$$

1. $\neg \underset{M}{\forall} x P(x)$;
2. $\neg \forall x (x \in M \to P(x))$ (1, означення $\underset{M}{\forall} x$);
3. $\exists x \neg (x \in M \to P(x))$ (2, закон де Моргана);
4. $\exists x (x \in M \wedge \neg P(x))$ (3, рівносильність $\neg (p \to q) \equiv p \wedge \neg q$ алгебри висловлювань);
5. $\underset{M}{\exists} x (\neg P(x))$ (4, означення $\underset{M}{\exists} x$).

Застосовуючи закони де Моргана для обмежених кванторів, можна, наприклад, велику теорему Ферма записати в іншій, еквівалентній, формі:

$$\neg (\underset{N}{\exists} x \underset{N}{\exists} y \underset{N}{\exists} z \underset{N_2}{\exists} n (x^n + y^n = z^n)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underset{N}{\forall} x (\neg \underset{N}{\exists} y \underset{N}{\exists} z \underset{N_2}{\exists} n (x^n + y^n = z^n) \leftrightarrow \cdots$$

$$\cdots \leftrightarrow \underset{N}{\forall} x \underset{N}{\forall} y \underset{N}{\forall} z \underset{N_2}{\forall} n (x^n + y^n \neq z^n).$$

Приклад. Означення границі числової послідовності, користуючись обмеженими кванторами, можна записати так:

$$(a = \lim x_n) \overset{\text{df}}{=} \underset{R+}{\forall} \varepsilon \underset{N}{\exists} m \underset{N}{\forall} n (n \geqslant m \to |x_n - a| < \varepsilon). \qquad (58)$$

Звідси можна записати характеристичну умову числа, яке не є границею даної числової послідовності (x_n).

1. $a \neq \lim x_n$;
2. $\neg (\underset{R+}{\forall} \varepsilon \underset{N}{\exists} m \underset{N}{\forall} n (n \geqslant m \to |x_n - a| < \varepsilon))$ (1, (58));
3. $\underset{R+}{\exists} \varepsilon (\neg \underset{N}{\exists} m \underset{N}{\forall} n (n \geqslant m \to |x_n - a| < \varepsilon)))$ (2, закон де Моргана);
4. $\underset{R+}{\exists} \varepsilon \underset{N}{\forall} m (\neg (\underset{N}{\forall} n (n \geqslant m \to |x_n - a| < \varepsilon)))$ (3, закон де Моргана);
5. $\underset{R+}{\exists} \varepsilon \underset{N}{\forall} m \underset{N}{\exists} n (\neg (n \geqslant m \to |x_n - a| < \varepsilon))$ (4, закон де Моргана);
6. $\underset{R+}{\exists} \varepsilon \underset{N}{\forall} m \underset{N}{\exists} n (n \geqslant m \wedge |x_n - a| \geqslant \varepsilon$ (5, тавтологія $\neg (p \to q) \leftrightarrow \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

§ 7. Проблема вирішення в логіці предикатів

Проблема вирішення в логіці предикатів формулюється в двох формах:

1) проблема вирішення для загальнозначущості,
2) проблема вирішення для виконуваності.

Проблема вирішення для загальнозначущості (виконуваності) полягає в тому, щоб знайти ефективний метод, який дасть змогу для будь-якої формули $\mathfrak{A}$ логіки предикатів визначити за скінченне число кроків, чи є $\mathfrak{A}$ логічно загальнозначущою (виконуваною), чи ні.

Це дуже важлива задача. Д. Гільберт назвав її **ц е н т р а л ь н о ю п р о б л е м о ю** математичної логіки. Позитивне розв'язання даної проблеми рівнозначне оволодінню **к о н с т р у к т и в н и м** засобом перевірки правильності міркувань, здатності автоматично перевірити в кожному випадку, чи слідує певне твердження з даних припущень, чи ні.

Доведемо таку теорему.

Т е о р е м а. *Обидві форми проблеми вирішення еквівалентні, тобто позитивне розв'язання проблеми загальнозначущості тягне за собою її розв'язання для виконуваності, і навпаки.*

Д о в е д е н н я. 1) Нехай проблема вирішення для загальнозначущості розв'язана позитивно і $\mathfrak{A}$ — довільна формула логіки предикатів. Тоді існує алгоритм, який дає змогу визначити за скінченне число кроків, чи є формула $\neg \mathfrak{A}$ лзз, чи ні. Якщо $\neg \mathfrak{A}$ є лзз, то $\mathfrak{A}$ — невиконувана, а якщо $\neg \mathfrak{A}$ не є лзз, то $\mathfrak{A}$ — виконувана. Враховуючи довільність формули $\mathfrak{A}$, маємо позитивне розв'язання проблеми вирішення для виконуваності.

2) Навпаки, нехай проблема вирішення для виконуваності розв'язана позитивно, $\mathfrak{A}$ — довільна формула. Існує алгоритм для визначення того, чи є формула $\neg \mathfrak{A}$ виконуваною, чи ні. Якщо результатом застосування алгоритма є те, що $\neg \mathfrak{A}$ виконувана, то $\mathfrak{A}$ не є лзз, а якщо

$\neg \mathfrak{A}$ невиконувана, то $\mathfrak{A}$ є лзз. Таким чином, проблема вирішення в першій формі розв'язана позитивно.

На відміну від алгебри висловлень, проблема вирішення в логіці предикатів виявляється значно складнішою, ніж здається, спроби розв'язання її протягом ряду років були безрезультатними. Чому це так — з'ясувалося в 1936 році, коли американський математик А. Черч показав, що проблема вирішення в логіці предикатів — нерозв'язна (в обох формулюваннях, тобто, що не існує алгоритму, який давав би для будь-якої формули $\mathfrak{A}$ логіки предикатів відповідь на питання, чи $\mathfrak{A}$ є тотожно істинною, чи ні.

Проте доведення нерозв'язності проблеми вирішення в логіці предикатів не припинило зусиль математиків і логіків, спрямованих на розв'язання цієї проблеми в окремих випадках, в яких вона допускає розв'язання. До розгляду цих окремих випадків ми й переходимо.

Перш за все зазначимо, що для випадку, коли універсальна множина складається з певного скінченного числа елементів, алгоритм для розв'язання питання про загальнозначущість чи виконуваність довільної формули логіки предикатів завжди існує.

Справді, в цьому разі, як відомо, символи квантора загальності в формулі замінюються символами кон'юнкції, символи квантора існування — символами диз'юнкції і питання про загальнозначущість (виконуваність) формули логіки предикатів переходить в аналогічне питання для формули алгебри висловлень, де це питання розв'язується хоч би алгоритмом таблиць істинності.

Приклад. Нехай

$$\mathfrak{A} = \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg P(y, y)) \tag{59}$$

на універсальній множині $\{a, b\}$.

На цій множині $\forall x\, \mathfrak{A}(x)$ переходить у кон'юнкцію $\mathfrak{A}(a) \wedge \mathfrak{A}(b)$, а формула $\exists x\, \mathfrak{A}(x)$ — у диз'юнкцію $\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{A}(b)$.

Замінемо послідовно всі символи кванторів у формулі (59), починаючи ззовні. При заміні зовнішнього квантора $\forall$ дістанемо

$$\exists y (P(a, y) \wedge \neg P(y, y)) \wedge \exists y (P(b, y) \wedge \neg P(y, y)). \tag{60}$$

Замінивши тут кожен з кванторів $\exists$, матимемо остаточно

$$((P(a, a) \wedge \neg P(a, a)) \vee (P(a, b) \wedge \neg P(b, b))) \wedge ((P(b, a) \wedge \neg P(a, a)) \vee (P(b, b) \wedge \neg P(b, b)). \tag{61}$$

Позначимо висловлення $P(a, a)$, $P(a, b)$, $P(b, b)$, $P(b, a)$ через p, q, r, s відповідно. Тоді формула (61) запишеться як формула алгебри висловлень

$$((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge ((s \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg r)). \tag{62}$$

Таким чином, питання про загальнозначущість (виконуваність) формули логіки предикатів (59) на $\{a, b\}$ зводиться до аналогічного питання для формули алгебри висловлень (62). До речі, формула (62) виконувана (при $|p| = |r| = 0$, $|q| = |s| = 1$ $|(62)| = 1$) і не є тавтологією (при $|q| = 0$ $|(62)| = 0$).

На основі цього результату можна сформулювати таке твердження.

Теорема. *Якщо для даної формули логіки предикатів $\mathfrak{A}$ можна довести, що вона виконувана (загальнозначуща) тоді і тільки тоді, коли має місце її виконуваність (загальнозначущість) на множині з певним скінченним числом елементів k, то питання про виконуваність (загальнозначущість) формули $\mathfrak{A}$ розв'язне для будь-якої універсальної множини.*

Доведення подамо для випадку виконуваності. Спочатку перевіримо виконуваність формули $\mathfrak{A}$ на множині M_k, що містить рівно k елементів. Це завжди можна зробити на підставі попереднього результату. Якщо виявиться, що $\mathfrak{A}$ — невиконувана на M_k, то за умовою $\mathfrak{A}$ — взагалі не виконувана. Якщо виявиться, що $\mathfrak{A}$ — виконувана на M_k, то вона й поготів виконувана на всякій множині з більшим числом елементів, ніж k. Залишається перевірити виконуваність $\mathfrak{A}$ на множинах з числом елементів $1, 2, \ldots, k - 1$, що завжди можливо за попереднім результатом.

Виникає питання: чи не можна, виходячи в розглянутих тверджень, досягти повного розв'язування проблеми вирішення в логіці предикатів, наприклад, для виконуваності.

Ні, не можна. Про це свідчить факт існування таких формул логіки предикатів, які є невиконуваними на кожній скінченній множині, але в той самий час вони виконувані на нескінченній множині.

Приклад. Розглянемо формулу логіки предикатів

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \neg P(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)). \tag{63}$$

Доведемо, що ця формула має зазначену властивість.

а) Те, що формула (63) виконувана на нескінченній множині, можна встановити наступною інтерпретацією. За область інтерпретації беремо N (множину натуральних чисел), інтерпретацією $P(x, y)$ нехай буде відношення $x < y$. Тоді формула (63) як замкнута формула перейде у висловлення

$$\forall x \exists y (x < y) \wedge \forall x \neg (x < x) \wedge \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z),$$

яке, очевидно, є істинним (кожен член кон'юнкції — істинне висловлення). Отже, формула (63) — виконувана на нескінченній множині.

Покажемо тепер, що вона не виконувана на жодній скінченній множині. Припустимо супротивне. Тоді знайдеться множина M_0, яка містить лише скінченне число елементів, і така інтерпретація предиката P, при якій (63) переходить в істинне висловлення. Зокрема матимемо:

$$|\forall x \exists y P^*(x, y)| = 1, \tag{64}$$

$$|\forall x \neg P^*(x, x)| = 1; \tag{65}$$

$$|\forall x \forall y \forall z (P^*(x, y) \wedge P^*(y, z) \to P^*(x, z))| = 1. \tag{66}$$

Візьмемо довільний елемент M_0 і позначимо його через a_1. З (64) дістаємо

$$|\exists y P^*(a_1, y)| = 1. \tag{67}$$

Позначимо елемент M_0, для якого виконується умова (67), через a_2, причому $a_2 \neq a_1$, згідно із співвідношенням (65). З умови (64) маємо

$$|\exists y P^*(a_2, y)| = 1. \tag{68}$$

Позначимо через a_3 елемент M_0, для якого справджується рівність (68). Аналогічно попередньому $a_3 \neq a_2$. Разом з тим $a_3 \neq a_1$, оскільки, згідно з (66), з рівностей $|P^*(a_1, a_2| = 1$ і $|P^*(a_2, a_3)| = 1$ слідує

$$|P^*(a_1, a_3)| = 1,$$

а тому, за умовою (65), $a_3 \neq a_1$. Продовжуючи цей процес, ми побудуємо послідовність попарно відмінних між собою елементів множини M_0

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots,$$

для яких виконується співвідношення $|P^*(a_{i_1}, a_{i_2})| = 1$, як тільки $i_1 < i_2$.

Згідно із скінченністю множини M_0, в побудованій послідовності при достатньому її продовженні знайдуться члени a_m і a_p $(m < p)$, такі, що

$$a_m = a_p. \tag{69}$$

Тоді маємо

$$|P^*(a_m, a_p)| = 1,$$

оскільки $m < p$, звідки, враховуючи (69), маємо $|P^*(a_m, a_m)| = 1$, що суперечить (65). Ця суперечність свідчить, що формула (63) не виконувана на жодній скінченній множині.

З доведеного твердження випливає, що заперечення формули (63), тобто формула

$$\exists x \forall y \neg P(x, y) \vee \exists x P(x, x) \vee \exists x \exists y \exists z P(x, y) \wedge (P(y, z) \wedge \wedge \neg P(x, z)),$$

є прикладом формули, загальнозначущої на кожній скінченній множині, але не загальнозначущої на нескінченній множині.

Важливим окремим випадком, для якого існує позитивне розв'язання проблеми вирішення в логіці предикатів, є клас формул, які містять лише одномісні предикати. Цей клас формул має велике значення, адже в термінах одномісних предикатів можна сформулювати все вчення аристотелевої логіки про силогізми, яке становить основне ядро традиційної логіки.

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{A}$ — формула логіки предикатів, яка містить лише k одномісних предикатних змінних і не містить жодних інших предикатних змінних. Для того щоб формула $\mathfrak{A}$ була логічно загальнозначущою, необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{A}$ була загальнозначущою на множині, яка містить рівно 2^k елементів.*

Доведення необхідності тривіальне. Якщо $\mathfrak{A}$ є лзз, то $\mathfrak{A}$ — загальнозначуща на кожній множині, зокрема на такій, що містить точно 2^k елементів.

Доведення достатності. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\mathfrak{A}$ замкнена формула, тобто, вона не містить жодного вільного входження предметної змінної. Справді, якщо $x_1, \ldots, x_n$ — усі вільні предметні змінні в $\mathfrak{A}$, то формула $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \mathfrak{A}$, яка є лзз одночасно з $\mathfrak{A}$, і є шуканою замкненою формулою.

Можна також вважати, що $\mathfrak{A}$ знаходиться у внф. Предикатні змінні в $\mathfrak{A}$ позначимо $P_1, \ldots, P_k$.

Дано, що формула $\mathfrak{A}$ — загальнозначуща на кожній множині, яка містить точно 2^k елементів, отже, і на кожній множині з меншим числом елементів, ніж 2^k. Треба довести, що $\models \mathfrak{A}$.

Припустимо, супротивне, тобто, що знайдеться множина M_1, $\overline{\overline{M}}_1 > 2^k$ і на ній конкретні предикати $P_1^*, \ldots, P_k^*$ такі, що $|\mathfrak{A}(P_1^*, P_2^*, \ldots, P_k^*)| = 0$. З цього припущення виведемо хибне висловлення, що стосується множини, яка складається не більш ніж з 2^k елементів, тобто буде суперечити умові теореми.

Для цього розіб'ємо елементи множини M_1 на класи, відносячи $a \in M_1$ і $b \in M_1$ до одного класу тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення:

$$P_1^*(a) \leftrightarrow P_1^*(b), \ \ldots, \ P_i^*(a) \leftrightarrow P_i^*(b), \ \ldots, \ P_k^*(a) \leftrightarrow P_k^*(b).$$

При такій розбивці два елементи M_1, які віднесені до одного класу, не відрізняються між собою відносно кожного з предикатів P_i^*, вони ніби-то ототожнюються.

Внаслідок розбиття, матимемо n класів, причому $n \leqslant 2^k$. Справді, $|P_1^*(a)| = 1$ або $|P_1^*(a)| = 0$. Так само $P_2^*(a), \ldots, P_k^*(a)$.

Отже, буде 2^k всіх розподілів істинісних значень. Проте деякі з класів можуть виявитися порожніми, тому $n \leqslant 2^k$.

Для ілюстрації розглянемо приклад розбиття при $k = 2$, $M = 10$.

№ п/п	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
P_1^*	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
P_2^*	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1

Тут маємо три непорожніх класи розбиття α_1, α_2, α_3.

$\alpha_1(1, 0) = \{a_1, a_5, a_8, a_9\}$;

$\alpha_2(0, 1) = \{a_2, a_3, a_4, a_7\}$;

$\alpha_3(1, 1) = \{a_6, a_{10}\}$

Клас α_4 (0, 0) виявився порожнім, а тому $n = 3$, тобто $n < 2^k$.

У загальному випадку позначимо класи розбиття через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots, \alpha_n$ ($n \leqslant 2^k$). Приймемо ці класи за нову систему предметних змінних і введемо предикати $Q_1, \ldots, Q_i, \ldots, Q_k$, вважаючи, що Q_i виконується для класу α_r тоді і тільки тоді, коли $|P_i^*(e_r)| = 1$, де через e_r позначено довільний елемент класу α_r.

Якщо тепер у висловленні $\mathfrak{A}$, в якому є предикати P_i^* ($i = 1, \ldots, k$), замінимо кожне P_i^* на $Q_i(\alpha_r)$, а кожну предметну змінну класом, до якого вона належить, то $\mathfrak{A}$ перейде в еквівалентне висловлення.

Істинність останнього твердження випливає із самої суті побудови класів α_r. Доведемо його за індукцією, вважаючи, що $\mathfrak{A}$ знаходиться у внф. Якщо число кванторів в $\mathfrak{A}$ дорівнює 0, то істинність твердження очевидна за означенням предикатів Q_i. Припустимо, що доводжуване твердження має місце при довжині приставки m. Від навішування квантора, тобто при переході від довжини приставки m до $m + 1$, значення істинності твердження не зміниться. Отже, це твердження справджується для довільної довжини приставки. Зокрема, хибне на множині M_1 висловлення $\mathfrak{A}(P_1^*, \ldots, P_k^*)$ переходить у

висловлення хибне і віднесене до множини класів α_r, що містить n елементів, де $n \leqslant 2^k$. Це суперечить загальнозначущості $\mathfrak{A}$ на множині, яка містить n елементів. Одержана суперечність завершує доведення достатності.

З доведеної теореми і з твердження, сформульованого вище, слідує, що проблема вирішення для загальнозначущості розв'язна в позитивному розумінні для класу формул, які містять лише одномісні предикати.

Двоїстою до теореми A є наступна теорема.

Теорема 1'. *Нехай $\mathfrak{A}$ — формула логіки предикатів, яка містить k одномісних предикатних змінних і не містить жодних інших предикатних змінних. Для того щоб формула $\mathfrak{A}$ була виконуваною, необхідно і достатньо, щоб формула $\mathfrak{A}$ була виконувана на множині, яка містить точно 2^k елементів.*

Доведення. *Достатність* умови тут очевидна.

Необхідність. Нехай $\mathfrak{A}$ — виконувана формула. Тоді $\neg\mathfrak{A}$ не є логічно загальнозначущою, отже, за теоремою 1 формула $\neg\mathfrak{A}$ не є загальнозначущою на множині, що містить точно 2^k елементів. Тому її заперечення, тобто $\neg\neg\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}$ — формула, виконувана на множині, яка містить точно 2^k елементів.

Повертаючись до загального випадку формул логіки предикатів, які містять довільні предикатні змінні, зосередимо увагу на формулах, що знаходяться у внф і мають приставку спеціального вигляду.

Сформулюємо три теореми, які стосуються трьох спеціальних форм приставок.

Теорема 2. *Нехай $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$ — довільна формула логіки предикатів, яка не містить жодних символів кванторів. Тоді формула*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m) \tag{70}$$

є логічно загальнозначущою тоді і тільки тоді, коли вона загальнозначуща на множині, що містить точно m елементів.

Доведення. *Необхідність* очевидна.

Достатність. Дано, що формула (70) — загальнозначуща на множині, яка містить точно m елементів. Припустимо, що формула (70) не є лзз. Тоді знайдеться множина M_0 з числом елементів, більшим ніж m, відповідні конкретні предикати, визначені на M_0, і такі елементи M_0 — $a_1, \ldots, a_m$, що інтерпретація $\mathfrak{A}^*(a_1,$

$a_2, \ldots, a_m)$ являтиме хибне висловлення. Це суперечить загальнозначущості (70) в області, що містить m елементів. Суперечність завершує доведення.

Теорема 2′. *Нехай формула $\mathfrak{A}$ задовольняє умову теореми 2. Формула*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_m \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m) \tag{71}$$

є логічно загальнозначущою тоді і тільки тоді, коли має місце її загальнозначущість на одноелементній множині.

Доведення. *Необхідність* очевидна.

Достатність. Припустимо, що формула (71) не є лзз. Тоді й поготів не буде лзз і формула

$$\exists x \mathfrak{A}(x, \ldots, x), \tag{72}$$

яка являє собою сильніше твердження, ніж (71). (Якби формула (72) була лзз, то такою самою була б і формула (71)). Отже, існує множина M_1, таке $a \in M_1$ і конкретні предикати, визначені на M_1, такі, що здобута при цьому інтерпретація $\mathfrak{A}(a, \ldots, a)$ є хибним висловленням, що суперечить даній в умові теореми загальнозначущості $\mathfrak{A}$ на одноелементній множині.

Теорема 2″. *Якщо формула*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \tag{73}$$

загальнозначуща на множині, що містить точно m елементів, то вона є логічно загальнозначуща (формула $\mathfrak{A}$ задовольняє умову теореми 2′).

Доведення. Утворимо диз'юнкцію всіх можливих формул $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, які утворюються з формули $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ заміною $y_1, \ldots, y_n$ змінними з послідовності $x_1, \ldots, x_m$. Позначимо цю диз'юнкцію через $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)$.

На m-елементній множині із загальнозначущості формули (73) слідує загальнозначущість формули

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m). \tag{74}$$

Звідси за теоремою 2′ формула (74) є логічно загальнозначущою. Оскільки формула (74) являє собою сильніше висловлення, ніж формула (73), то остання формула теж є лзз.

З теорем 2, 2′, 2″ слідує позитивне розв'язання проблеми вирішення для класу формул: а) приставка яких складається тільки з кванторів загальності; б) приставка

яких складається тільки з кванторів існування; в) в приставці яких всі квантори загальності передують всім кванторам існування.

Приклад. Перевірити, чи формула

$$\forall x_1 \exists x_2 (P(x_1, x_2) \to P(x_2, x_1)) \tag{75}$$

є лзз.

До цієї формули можна застосувати теорему 2″ (тут $m = 1$). Ця формула загальнозначуща на одноелементній множині $\{a\}$, бо на цій множині задана формула переходить у формулу $P(a, a) \to P(a, a)$, тобто в тавтологію $p \to p$. Отже, за теоремою 2″ формула 75) є лзз.

§ 8. Застосування символіки математичної логіки в математичних формулюваннях

Символіка математичної логіки знаходить широке застосування при формулюванні математичних означень і тверджень. Вона сприяє кращому усвідомленню логічної структури математичних понять, більшій стислості і чіткості відповідних формулювань і зручності оперування з ними.

Покажемо, як за допомогою логічної символіки можна означити деякі поняття і операції теорії множин, найближчої до логіки математичної дисципліни.

Рівність множин A і B визначається співвідношенням:

M1 $A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Поняття підмножини:

M2 $A \subset B \leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B)$.

Теоретико-множинні операції об'єднання, перетину, доповнення і віднімання:

M3 $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$;

M4 $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$;

M5 $x \in \overline{A} \leftrightarrow \neg (x \in A)$;

M6 $x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in B)$.

Подамо символічний запис доведення теореми.

Теорема. Для довільної множини B виконується співвідношення $\varnothing \subset B$.

1. $\forall x (\neg (x \in \varnothing))$ (означення $\varnothing$);
2. $\neg (x \in \varnothing)$ (1, 0 $\forall$);
3. $x \in \varnothing \to x \in B$ (2, означення «$\to$»);
4. $\forall x (x \in \varnothing \to x \in B)$ (3, В $\forall$);
5. $\varnothing \subset B \leftrightarrow \forall x (x \in \varnothing \to x \in B)$ (підстановка в M2);
6. $\varnothing \subset B$ (4, 5, MP).

6 2–1179

Доведення теоретико-множинних рівностей, записане в логічній символіці, є ілюстрацією застосування правил логіки, завдяки чому виявляється суть теоретико-множинних понять.

Так, розглянемо доведення рівності

$$(A \cup B) - A = B - A.$$

1. $x \in (A \cup B) - A$ (x — довільний елемент);
2. $x \in A \cup B \wedge \neg (x \in A)$ (1, М6);
3. $(x \in A \vee x \in B) \wedge \neg (x \in A)$ (2, М3 і теорема заміни);
4. $x \in A \wedge \neg (x \in A) \vee x \in B \wedge \neg (x \in A)$ (3, перший дистрибутивний закон);
5. $0 \vee x \in B \wedge \neg (x \in A)$ (4, тавтологія $p \wedge \neg p \leftrightarrow 0$, теорема заміни);
6. $x \in B \wedge \neg (x \in A)$ (5, тавтологія $0 \vee p \leftrightarrow p$);
7. $x \in B - A$ (6, М6);
8. $x \in (A \cup B) - A \leftrightarrow x \in B - A$ (1—7, транзитивність еквіваленції);
9. $\forall x\, (x \in (A \cup B) - A \leftrightarrow x \in B - A)$ (8, $B\forall$);
10. $(A \cup B) - A = B - A$ (9, М1).

З'ясуванню логічної структури математичних понять та ролі окремих логічних операцій в їх формулюванні сприяє запис відповідних формулювань в логіко-математичній символіці.

Ось кілька прикладів.

Запишемо в символічній мові означення функції $f(x)$, обмеженої на даній множині M:

$$f(x) \text{ обмежена на } M \overset{\text{df}}{=} \underset{R+}{\exists a} \underset{M}{\forall x} (|f(x)| \leqslant a).$$

У визначальній частині (в дефініенсі) чітко виділяється роль кожного квантора і порядок їх слідування. Якщо, наприклад, в приставці правої частини змінити порядок кванторів на $\underset{M}{\forall x} \underset{R+}{\exists a}$, то дістанемо означення зовсім іншого поняття, а саме функції, скінченної на множині M.

Відміна в логічній структурі понять нескінченно великої і необмеженої послідовності стає цілком прозорою, коли перейти до логічної символіки.

Послідовність (x_n) — нескінченно велика $\overset{\text{df}}{=} \underset{R}{\forall p} \underset{N}{\exists m} \times \underset{N}{\forall n} (n > m \to |x_n| > p)$.

Послідовність (x_n) — необмежена $\overset{\text{df}}{=} \underset{R}{\forall p} \underset{N}{\forall m} \underset{N}{\exists n} (n > m \wedge |x_n| > p)$.

Відміна між поняттям неперервності функції f на множині M і рівномірної неперервності f на множині M при символічному записі відповідних означень зводиться до простої перестановки двох кванторів — квантора загальності і квантора існування.

Функція f неперервна на множині M

$$M \overset{\text{df}}{=} \underset{R+}{\forall \varepsilon} \underset{M}{\forall x} \underset{M}{\forall y} \underset{R+}{\exists \delta} (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Функція f рівномірно неперервна на множині M

$$M \overset{\text{df}}{=} \underset{R+}{\forall \varepsilon} \underset{R+}{\exists \delta} \underset{M}{\forall x} \underset{M}{\forall y} (|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Зазначимо, що факт слідування неперервності функції на множині M з факту її рівномірної неперервності на M є безпосереднім наслідком теореми логіки про те, що формула логіки предикатів $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$ є логічно загальнозначущою.

Таким чином, перестановка двох різноіменних кванторів у формулі може привести до утворення принципіально нового поняття, тоді як перестановка одноіменних кванторів, які безпосередньо слідують один за одним, приводить до логічно еквівалентного твердження. Застереження про те, що одноіменні квантори, які переставляються, повинні безпосередньо слідувати один за одним, є дуже істотне. Наведемо приклад.

Візьмемо арифметичне твердження

$$\forall x \exists y \forall z ((x - y) z = 0) \tag{77}$$

на універсальній множині всіх цілих чисел. Це твердження, очевидно, істинне (досить для довільного x взяти $y = x$). Переставимо у формулі (77) два кванторних вирази $\forall x$ і $\forall z$, які відокремлені виразом $\exists y$. Дістанемо твердження

$$\forall z \exists y \forall x ((x - y) z = 0),$$

яке на цій самій множині є хибним (досить покласти $z = 1$ і для вже вибраного значення $y = y_0$ взяти $x \neq y_0$).

Порівняємо ще логічну структуру означень найбільшого елемента частково упорядкованої множини та її максимального елемента.

а) y — найбільший елемент $D \overset{\text{df}}{=} \forall x (x \in D \to x \leqslant y)$;

б) y — максимальний елемент $D \overset{\text{df}}{=} \neg \exists x (x \in D \wedge x > y)$.

Перетворюючи дефінієнс б) за правилами логіки, дістанемо рівнозначний вираз

$$\forall x \neg (x \in D \wedge x > y) \leftrightarrow \forall x (\neg (x \in D) \vee \neg (x > y)) \leftrightarrow \leftrightarrow \forall x (x \in D \rightarrow \neg (x > y)). \qquad (78)$$

Твердження (78) нерівнозначне дефінієнсу а), останнє є сильнішим. Справді, у випадку **ч а с т к о в о** упорядкованої множини з цього слідує вираз (78), але не навпаки: з $\neg (x > y)$ може слідувати не тільки $x \leqslant y$, а також, що x незрівнянне з y. Це матиме місце, коли наприклад, D є множина підмножин множини $\{2, 3\}$, $x = \{2\}$, $y = \{3\}$, а $x < y$ інтерпретується як теоретико-множинне включення $x \subset y$. Отже, поняття максимального елемента D ширше, ніж поняття найбільшого елемента D (останнє є сильнішим).

Утворення логічного заперечення тверджень з досить складною логічною структурою може бути і не цілком тривіальною задачею. Разом з тим, у процесі математичних міркувань часто доводиться оперувати запереченням. Візьмемо хоча б доведення від супротивного або доведення заперечних тверджень (загально заперечних чи частково заперечних). У цих випадках доцільно переходити до символічних записів.

Так, нехай треба довести, що дійсне число a не є точною верхньою межею числової множини M, тобто, що $a \neq \sup M$. Сформулюємо необхідну і достатню умову цього. Запишемо спочатку означення $\sup M$ у логічній символіці:

$$(a = \sup M) \overset{\text{df}}{=} \underset{M}{\forall x} (x \leqslant a) \wedge \underset{R+}{\forall \varepsilon} \underset{M}{\exists x} (x > a - \varepsilon). \qquad (79)$$

Дефінієнс означення (79) складається з двох кон'юнктивних членів. Перший визначає, що a є верхньою межею M, а другий — що число, меньше від a, не може бути верхньою межею M. До речі, логічна структура поняття точної верхньої межі чітко розкривається при перекладі на символічну мову. У цьому, між іншим, виражається основна риса символічної мови логіки, безпосереднє призначення якої — точно передавати логічну структуру, тоді як природна мова — це, в першу чергу, засіб спілкування.

Виходячи з (79), зробимо наступні перетворення, користуючись відповідними законами логіки.

1. $a \neq \sup M$;
2. $\neg (\underset{M}{\forall x} (x \leqslant a) \wedge \underset{R+}{\forall \varepsilon} \underset{M}{\exists x} (x > a - \varepsilon))$ (1, (79));
3. $\neg \underset{M}{\forall x} (x \leqslant a) \vee \neg (\underset{R+M}{\forall \varepsilon \exists x} (x > a - \varepsilon))$ (2, $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$);
4. $\exists x (x > a) \vee \underset{R+}{\exists \varepsilon} \forall x (x \leqslant a - \varepsilon)$ (3, $\neg \forall x \mathfrak{A} \leftrightarrow \exists x \neg \mathfrak{A}$, $\neg \exists x \mathfrak{A} \leftrightarrow \forall x \neg \mathfrak{A}$).

Повертаючись до природної мови, маємо: *для доведення того, що дійсне число a не є $\sup M$, треба або довести, що a не є верхньою межею M, або, що існує число, менше від a, яке є верхньою межею M.*

У процесі математичних міркувань часто зустрічаються підстановки математичних виразів замість змінних. Ці підстановки підлягають певним застереженням логічного характеру.

З а с т е р е ж е н н я 1. *Підставляти можна тільки замість* ***в і л ь н и х*** *змінних.*

З а с т е р е ж е н н я 2. *Жодне вільне входження змінної внаслідок підстановки не повинно стати зв'язаним.*

Ці застереження стосуються не тільки змінних, зв'язаних кванторами, але й змінних, зв'язаних математичними операторами, які діють в цьому відношенні аналогічно кванторам.

Так, у виразі

$$\int_1^2 xt\,dx, \qquad (80)$$

де область зміни $t \in R$, обидва входження x — зв'язані, а входження t — вільне. Підстановка, наприклад, $\frac{3}{2}$ замість x приводить до беззмістовного виразу $\int_1^2 \frac{3}{2}\, t\, d\left(\frac{3}{2}\right)$ (порушено застереження 1). Підстановка $\frac{3}{2}$ замість t дає $\int_1^2 \frac{3}{2}\, x\,dx$, тобто окремий випадок виразу (80), як і повинно бути. Ця підстановка цілком законна; а підстановка x замість t порушує застереження 2. Справді, при цій підстановці дістаємо

$$\int_1^2 x^2\,dx, \qquad (81)$$

що не є окремим випадком інтеграла (80). Обчислюючи інтеграл (80), дістанемо $\frac{3}{2}\, t$, а обчислення інтеграла (81) дає $\frac{5}{3}$ 1, скажімо, твердження $\forall t \left(t > 0 \rightarrow \frac{3}{2}\, t > t\right)$ є істинне, а твердження $\forall t \left(t > 0 \rightarrow \frac{5}{3} > t\right)$ є хибне.

У виразі

$$\int_1^x f(x)\,dx \qquad (82)$$

входження x у верхню межу вільне, а два інших входження x зв'язані. Результатом підстановки числа 2 замість x в (82) є $\int_1^2 f(x)\,dx$ (підстановка виконується тільки замість вільного входження змінної).

У виразі $\sum\limits_{k=1}^{n} k^n$ підстановка замість зв'язаної змінної k приводить до беззмістовного виразу, а підстановка k замість вільної змінної n, при якій порушується застереження 2, приводить хоч і до змістовного виразу $\sum\limits_{k=1}^{n} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4$, але такого, що не є окремим випадком заданого (підстановка незаконна).

Формула

$$\exists x\,(x > 0 \wedge xy > 0) \to y > 0 \qquad (83)$$

на універсальній множині $\boldsymbol{R}$ визначає предикат $Q(y)$, який є тотожно істинним на $\boldsymbol{R}$ (перше і друге входження y вільні). Якщо підставити змінну x замість вільних входжень y, що суперечить застереженню 2, то дістанемо вираз

$$\exists x\,(x > 0 \wedge x^2 > 0) \to x > 0. \qquad (84)$$

Предикат, який залежить від x і визначається формулою (84), не є тотожно істинним на $\boldsymbol{R}$. Справді, підставляючи, наприклад, -2 замість вільного входження змінної x у вираз (84), матимемо

$$\exists x\,(x > 0 \wedge x^2 > 0) \to (-2 > 0). \qquad (85)$$

На множині $\boldsymbol{R}$ антецедент (85) має значення «істинність», а консеквент — «хибність». Отже, висловлення (85) хибне. Незаконна підстановка привела до зміни значення істинності.

До речі, у даному випадку запис $Q(x)$ для предиката, який визначається формулою (84), був би неправомірним, бо змінна x не є вільною для y у формулі (83).

Якщо виникають сумніви щодо правильності проведеного логічного міркування або щодо істинності складного висловлення, то доцільно іноді перейти до відповідного символічного запису та виконати суто формально вказані логічні операції.

Приклади

1. Чи є істинним твердження

«Якщо в дійсній області для довільних p і q з того, що справджується рівність виду $x^2 + px + q = 0$, слідує, що $x = 2$ або $x = 3$, то $p = -5$, $q = 6$»? (86)

Незважаючи на зовнішню схожість цього твердження з окремим випадком відомої теореми Вієта, воно є хибним.

Запишемо висловлення (86) у символічній мові, маючи на увазі, що змінні p, q, x зв'язані кванторами загальності, віднесеними до множини $\boldsymbol{R}$:

$$\forall p\, \forall q\, [\forall x\,(x^2 + px + q = 0 \to x = 2 \vee x = 3) \to p = -5 \wedge q = 6. \qquad (87)$$

Хибність висловлення (87) стає очевидною, якщо взяти до уваги, що імплікація в круглих дужках цього виразу має значення 1 при хибності її антицедента чи при істинності консеквента. Нехай, наприклад, $p = q = 2$. Тоді з (87)

$$\forall x\,(x^2 + 2x + 2 = 0 \to x = 2 \vee x = 3) \to 2 = -5 \wedge 2 = 6.$$

Останнє висловлення хибне, оскільки $|\forall x\,(x^2 - 2x + 2 = 0 \to x = 2 \vee x = 3)| = 1$ (рівняння $x^2 + 2x + 2 = 0$ не має дійсних коренів), а $|2 = -5 \wedge 2 = 6| = 0$.

Звичайно, твердження (86) ні в якому разі не випливає з теореми Вієта, бо імплікація

$$x^2 + px + q = 0 \to x = 2 \vee x = 3 \qquad (88)$$

не означає, що *числа 2 і 3 є коренями рівняння*

$$x^2 + px + q = 0, \qquad (89)$$

у ній стверджується лише, що останнє рівняння не має інших коренів, крім $x = 2$ і $x = 3$. Для істинності виразу (89) необхідна істинність оберненої імплікації до (88), а саме:

$$x = 2 \vee x = 3 \to x^2 + px + q = 0.$$

Символічний запис твердження, що є застосуванням теореми Вієта в цьому разі, матиме вигляд

$$\forall p\, \forall q\, [\forall x\,(x^2 + px + q = 0 \leftrightarrow x = 2 \vee x = 3) \to p = -5 \wedge q = 6]. \qquad (90)$$

Звернемо увагу на те, що при переході від хибного висловлення (87) до істинного висловлення (90) і м п л і к а ц і ю антецедента у (87) було замінено на е к в і в а л е н ц і ю, від цього антецедент став сильнішим твердженням, а все умовне твердження стало с л а б ш и м ($|(87)| = 0$, $|(90)| = 1$).

2. Чи належить число 2 множині значень параметра a, при яких усі дійсні корені рівняння $2x^2 - ax + 2 = 0$ задовольняють умову $x < 3$?

Перекладом вищенаведеного висловлення, істинність якого треба визначити, на символічну мову є вираз

$$\underset{\boldsymbol{R}}{\forall x}\,(D(x) \to x < 3), \qquad (91)$$

де через $D(x)$ позначено предикат «x є дійсний корінь рівняння $2x^2 - 2x + 2 = 0$».

Визначимо істинність заперечення (91):

$$\neg\,(\underset{\boldsymbol{R}}{\forall x}\,(D(x) \to x < 3) \leftrightarrow \underset{\boldsymbol{R}}{\exists x}\,(D(x) \wedge \neg\,(x < 3)). \qquad (92)$$

Оскільки предикат $D(x)$ тотожно хибний на R (рівняння $2x^2 - 2x + 2 = 0$ не має дійсних коренів), то вираз (92) має істинностне значення 0. Тоді висловлення (91) є істинним. Відповідь на поставлене запитання — позитивна.

У практиці математичних записів прийнято для скорочення опускати квантори загальності, якщо вони знаходяться на початку формули.

Так, запис комутативного закону додавання на множині дійсних чисел у вигляді $x + y = y + x$ є скороченням формули

$$\forall_R x \forall_R y (x + y = y + x).$$

Виконуваність додавання на множині натуральних чисел скорочено записується у вигляді

$$\exists_N z (z = x + y),$$

тоді як повний запис є

$$\forall_N x \forall_N y \exists_N z (z = x + y).$$

Ця умова опускання квантора стосується тільки квантора загальності і не поширюється на квантор існування, символ якого опускати **н е м о ж н а**. Ігнорування цього зауваження може призвести до грубих помилок.

Прикладом може бути така побудова «доведення» нерівності від супротивного.

«Нехай треба довести нерівність

$$A(x) \leqslant B(x) \tag{93}$$

в області D. Припустимо супротивне. Тоді

$$A(x) > B(x) \tag{94}$$

в області D. Але нерівність (94) приводить до суперечності. Отже, нерівність (93) доведено» (?).

Помилковість цього «доведення» стає зовсім очевидною, якщо відновити опущений квантор загальності і точно записати в символічній мові доводжуване твердження у вигляді

$$\forall_D x (A(x) \leqslant B(x).$$

Його запереченням є

$$\exists x \neg (\forall (x) \leqslant B(x), \tag{95}$$

а не

$$\forall x \neg (A(x) \leqslant B(x)), \tag{96}$$

як було в попередньому «міркуванні», коли відновити в (94) квантор загальності. Твердження (94) слабше, ніж (95), останнє може приводити до суперечності, а перше — ні.

Розглянуте помилкове міркування можна проілюструвати таким софізмом.

«Доведемо», що $x + \frac{1}{x} \leqslant 2$ на множині R^+.

Припустимо супротивне. Тоді $x + \frac{1}{x} > 2$ на R^+, зокрема, при $x = 1$ матимемо $1 + 1 = 2$, тобто зайшли у суперечність, що й завершує «доведення».

Помилка тут очевидна. Супротивним до доводжуваного твердження є $\exists_{R^+} x \left(x + \frac{1}{x} > 2\right)$, звідки суперечність не слідує. Доведення від супротивного обривається.

Розділ IV

МАТЕМАТИЧНІ ТЕОРІЇ

§ 1. Побудова теорії першого порядку

Як вже зазначалося, труднощі в обгрунтуванні математики, зокрема ті, що пов'язані з парадоксами теорії множин, обумовили потребу уточнити змістовний аксіоматичний метод та побудувати формалізовані математичні теорії.

У звичайних аксіоматичних математичних теоріях усі міркування проводяться в природній мові, а логічні засоби, застосовні при цьому, не описуються точно, а вважаються інтуїтивно зрозумілими.

У формалізованій теорії не тільки описуються в аксіомах точно властивості первинних понять, але й аналогічно визначається вся **м о в а** теорії, завдяки чому можна дати точний опис усіх логічних засобів, які допускаються в даній теорії, тобто строго визначити сам процес логічної дедукції.

У цьому розділі буде викладено формалізовані математичні теорії.

Спочатку визначимо алфавіт мови теорії, тобто перелік її вихідних символів.

Алфавіт теорії в даному викладі складається із:

1) зчисленної множини символів $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, які називають *індивідними змінними;*

2) скінченної (можливо порожньої) або зчисленної множини символів $a_1, a_2, a_3, \ldots$, які називають *індивідними сталими* (константами);

3) скінченної (можливо порожньої) або зчисленної множини символів f_i^j ($i = 1, 2, 3, \ldots, j = 1, 2, 3\ldots$), які називаються *функціональними буквами*;

4) скінченної непорожньої або зчисленної множини символів

P_i^j ($i = 1, 2, 3, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots$), які називаються *предикатними буквами;*

5) трьохелементної множини *логічних символів*

$$\{\neg, \rightarrow, \forall\};$$

6) трьохелементної множини *розділових знаків*

$$\{(,), \text{« , »}\}.$$

Примітки

1. Звернемо увагу на те, що алфавіт формалізованої теорії може не містити жодного символу індивідної сталої чи функціональної букви, але обов'язково містить хоча б один предикатний символ.

2. Індивідні змінні інтерпретуються як символи довільних елементів множини, розглядуваної в даній теорії, а індивідні сталі — як символи певних (виділених) елементів цієї множини.

3. Нижній індекс «і» в 4) і 5) означає номер функціональної чи предикатної букви у відповідному переліку їх, а верхній індекс — число аргументів. Так, символ P_1^2 означає певний двомісний предикат. При $j = 0$ символ P_i^j означає нуль-місний предикат, тобто висловлення.

Наступний крок побудови формальної теорії є введення її основних понять — терму і формули. Терм є аналогом назви предметів розглядуваної змістовної теорії, а формули формальної теорії інтерпретуються як її твердження.

Ці поняття введемо індуктивно.

Означення терму

1) *Кожне* x_k *і кожне* a_k *— терми* ($k = 1, 2, 3, \ldots$);

2) *якщо* $t_1, \ldots, t_n$ *— терми, то* $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ *— терм* ($i = 1, 2, 3, \ldots$);

3) ніяких інших термів теорії, крім утворених за п. п. 1), 2), немає.

Приклад. Якщо символи a_1 і f_1^2 входять в алфавіт теорії, то вирази a_1, $f_1^2(x_1, a_1)$, $f_1^2(x_1, x_2)$ є термами цієї теорії, а вирази $f_1^2(x_1)$, $P_1^2(x_1, a_1)$ — ні.

Означення формули

1) *Якщо* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *— терми теорії, то вираз* $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ *є її формула, яка називається* *е л е м е н т а р н о ю;*

2) *якщо* $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ *— формули теорії, то вирази* $(\neg \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $(\forall x_i \mathfrak{A})$ є *теж її формули;*

3) *ніяких інших формул теорії, які б не можна було дістати* за п п. 1), 2), немає.

У введених означеннях символи $t_1, t_2, \ldots, t_n, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ належать, звичайно, метатеорії, а не мові даної теорії. Це назви термів чи формул формальної теорії відповідно.

Введений алфавіт визначає мову, яка називається *м о в о ю першого порядку,* а відповідну формальну теорію називають *т е о р і є ю першого порядку.* У такій теорії аргументами функцій і предикатів, так само як і змінними, зв'язаними квантором, можуть бути тільки індивідні змінні, що й виражається у наведених вище означеннях.

Формальні теорії, де ці застереження не мають місця, називаються *т е о р і я м и вищих порядків.* У таких теоріях, зокрема, аргументами предикатів можуть бути і предикати, а квантори можуть зв'язувати також і предикатні змінні.

У подальшому мова йтиме тільки про теорії першого порядку.

Прикладами формул, якщо відповідні вихідні символи входять в алфавіт теорії, є вирази:

$$(\forall x_1 (P_3^2(x_1, x_2))),$$

$$((P_1^2(x_1, x_2)) \rightarrow (\forall x_2 (\neg P_2^2(x_2, f_1^2(x_2, x_1)))))).$$

Проте вирази

$$P_1^1(x_1, x_2), \ (x.), \ (\vee P_1^1(x_1))$$

не є формулами теорії.

Щоб обмежити число дужок, залишимо в силі умови, прийняті щодо цього в численні висловлень. Так, формула $(\forall x_1 ((\neg P_1^1 x_1)) \rightarrow (\neg P_2^2(x_1, x_2))))$ скорочено запишеться як

$$\forall x_1 (\neg P_1^1(x_1) \rightarrow \neg P_2^2(x_1, x_2)).$$

Введемо, нарешті, через відповідні означення в метамові символи $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \exists$, які відіграватимуть істотну роль в скороченні запису формул, а саме:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \overset{\mathrm{df}}{=} \neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \overset{\mathrm{df}}{=} \neg(\mathfrak{A} \to \neg\mathfrak{B});$$

$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B} \overset{\mathrm{df}}{=} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}), \quad \exists x(\mathfrak{A}) \overset{\mathrm{df}}{=} \neg\forall x(\neg\mathfrak{A}).$$

Визначивши мову першого порядку, перейдемо до аксіоматики.

Аксіоми теорії першого порядку складаються з двох груп аксіом: логічні і спеціальні (нелогічні) аксіоми. Логічні аксіоми спільні для всіх теорій першого порядку, тоді як спеціальні аксіоми виконуються тільки для даної окремої теорії.

Логічні аксіоми теорії першого порядку подамо у вигляді наступної схеми аксіом $S1$ — $S5$, які включають нескінченну множину аксіом, оскільки символи $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ позначають довільні формули теорії

S1. $\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{A})$;

S2. $((\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)) \to ((\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3))$;

S3. $(\neg\mathfrak{A}_1 \to \neg\mathfrak{A}_2) \to ((\neg\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to \mathfrak{A}_1)$;

S4. $\forall x_i \mathfrak{A}(x_i) \to \mathfrak{A}(t)$, якщо терм t вільний для x_i в $\mathfrak{A}$;

S5. $\forall x_i(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \forall x_i \mathfrak{B})$, якщо x_i немає вільних входжень в $\mathfrak{A}$[1].

Поряд із схемами аксіом $S1$ — $S5$ для всіх теорій першого порядку має місце два основних правила виводу:

1. *З* $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *виводиться* $\mathfrak{B}$ (*правило висновку* — MP).

2. *З* $\mathfrak{A}$ *виводиться* $\forall x_i \mathfrak{A}$ (*правило введення квантора* $\forall$ — B$\forall$).

Через $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ *позначено довільні формули розглядуваної теорії.*

Поняття доведення в теорії першого порядку будується аналогічно тому, як це робилося в численні висловлень.

Означення. *Скінченна послідовність формул теорії*

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n \qquad (1)$$

називається доведенням (формальним) формули $\mathfrak{B}$, *якщо* $\mathfrak{B}_n$ *збігається з* $\mathfrak{B}$ *і кожен член послідовності* (1) *є або аксіомою, або безпосередньо виводиться з попередніх членів послідовності* (1) *за правилом* MP *чи* B$\forall$.

Формула теорії T, для якої існує доведення, називається теоремою T і позначається $\vdash_T \mathfrak{B}$.

Узагальнення поняття доведення є поняття вивідності з гіпотез.

Означення. *Скінченна послідовність формул теорії T*

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n \qquad (2)$$

називається виводом $\mathfrak{B}$ *з гіпотез* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$, *якщо* $\mathfrak{B}_n$ *збігається з* $\mathfrak{B}$ *і кожен член послідовності* (2) *є або аксіомою, або однією з гіпотез* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, *або виводиться з попередніх членів послідовності* (2) *за правилом* MP *чи* B$\forall$. *У цьому разі кажуть, що* $\mathfrak{B}$ *виводиться з* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$, *що позначається* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m \vdash_T \mathfrak{B}$.

Наведемо тепер кілька прикладів формалізованих теорій з різних галузей математики. Нагадаємо, що в усіх цих теоріях зберігаються всі схеми логічних аксіом $S1$ — $S5$ і правила виводу MP і B$\forall$. Кожна формальна теорія першого порядку характеризується спеціальними аксіомами і особливостями алфавіту.

Якщо формальна теорія не має жодної спеціальної аксіоми, то вона називається численням предикатів. Числення предикатів становить логічну основу кожної теорії першого порядку.

Теорія часткового порядку. Алфавіт цієї теорії містить два бінарних предикатних символи — P_1^2 (предикат рівності) і P_2^2 (предикат меншості), які позначають відповідно «=» і «<», причому ці предикатні символи пишуть не перед аргументами, а між ними. Алфавіт нашої теорії не містить жодних функціональних символів, а також символів індивідних констант (термами теорії є тільки індивідні змінні).

Спеціальні аксіоми даної теорії визначають властивості предиката «=» (A1—A5) і предиката «<» (A6, A7), а саме,

A1. $x_1 = x_1$ (рефлексивність «=»);

A2. $x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$ (симетричність «=»);

A3. $x_1 = x_2 \wedge x_2 = x_3 \to x_1 = x_3$ (транзитивність «=»);

A4. $x_1 = x_2 \to (x_1 < x_3 \to x_2 < x_3)$

A5. $x_1 = x_2 \to (x_3 < x_1 \to x_3 < x_2)$ } зберігання предикатом рівності інших предикатів);

[1] Про істотність застережень до схем S4, S5 свідчать зауваження і приклади на с. 142.

A6. $\neg(x_1 < x_1)$ (іррефлексивність «$<$»);

A7. $x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \to x_1 < x_3$ (транзитивність «$<$»).

Примітки.

1. У записі аксіом A1—A7 опущено квантори загальності по всім змінним, які входять у ці формули.
2. На відміну від S1—S5, A1—A7 — аксіоми, а не схеми аксіом.

Задана таким чином формальна теорія, яку позначимо T′, формалізує часткове впорядкування широкого класу істотно відмінних між собою математичних структур, таких як, наприклад, грати, структура натуральних чи раціональних чисел, упорядкованих за величиною, тощо.

Приєднавши до аксіом A1—A7 аксіому

A8. $x_1 = x_2 \vee x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$,

дістанемо *теорію лінійного порядку* T″, яка не описує вже відношення порядку в структурі грат, зберігаючи це для структури натуральних, а також раціональних чи дійсних чисел.

Якщо приєднати до системи A1 — A8 аксіому щільності

A9. $x_1 < x_2 \to \exists x_3 (x_1 < x_3 \wedge x_3 < x_2)$,

то матимемо теорію T‴, яка формалізує відношення порядку в структурі раціональних, а також дійсних чисел, але не в структурі натуральних чисел.

Усі ці теорії дуже прості. Ще простішою є формальна теорія T_0, алфавіт якої складається тільки з символів індивідних змінних і одного предикатного символу «$<$». Теорія T_0 містить всього дві спеціальні аксіоми — A7 і A10:

A10. $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 (x_1 < x_3 \wedge x_2 < x_3)$.

Ця теорія формалізує математичну теорію напрямлених множин, яка застосовується при обгрунтуванні загального поняття границі.

Теорія інцидентності. Алфавіт цієї теорії складається з двох родів індивідних змінних x_1, x_2, ..., x_i ... і y_1, y_2, ..., y_j, ..., які називають відповідно т о ч к а м и і п р я м и м и, предикатного символу «$=$» і ще одного бінарного предикатного символу інцидентності, який позначатимемо I (запис $I(x_i, y_j)$ читається: «точка x_i інцидентна прямій y_j»).

Спеціальні аксіоми теорії містять аксіоми A1—A3 попередньої теорії і ще дві аксіоми рівності, а саме:

A′4. $x_1 = x_2 \to (I(x_1, y_1) \to I(x_2, y_1))$
A′5. $y_1 = y_2 \to (I(x_1, y_1) \to I(x_1, y_2))$
} аксіома зберігання предикатом рівності предиката I.

Крім цього, чотири наступних спеціальних аксіоми визначають властивості предиката I.

A′6. $\neg(x_1 = x_2) \to \exists y_1 (I(x_1, y_1) \wedge I(x_2, y_1))$;

A′7. $\neg(x_1 = x_2) \to (\exists y_1 (I(x_1, y_1) \wedge I(x_2, y_1)) \wedge$
$\wedge \exists y_2 (I(x_1, y_2 \wedge I(x_2, y_2)) \to y_1 = y_2)$;

A′8. $\forall y_1 \exists x_1 \exists x_2 (I(x_1, y_1) \wedge I(x_2, y_1) \wedge \neg(x_1 = x_2))$;

A′9. $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg(x_1 = x_2)) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge$
$\wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge \neg \exists y_1 (I(x_1, y_1) \wedge I(x_2, y_1) \wedge I(x_3, y_1)))$.

Побудована таким чином теорія першого порядку точно описує зокрема геометричне відношення інцидентності точки прямій на площині.

Теорія груп. Теорія груп містить не більш, ніж зчисленну множину індивідних змінних x_1, x_2, x_3, ..., предикатний символ (бінарний) «$=$», одну функціональну букву, яку позначимо «$+$» і одну індивідну константу 0 (у ці символи не вкладається ніякого змісту, крім того, що про них сказано в спеціальних аксіомах теорії).

Спеціальними аксіомами теорії груп є сім аксіом Г1—Г7, з яких Г1—Г3 збігаються відповідно з аксіомами рівності A1—A3.

Наведемо решту аксіом:

Г4. $x_1 = x_2 \to x_3 + x_1 = x_3 + x_2 \wedge x_1 + x_3 = x_2 + x_3$;

Г5. $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$;

Г6. $x_1 + 0 = x_1$;

Г7. $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$.

Аксіома Г4 визначає властивість підставлення предиката рівності відносно єдиної операції «$+$», Г5 — властивість асоціативності операції «$+$», Г6 — основну властивість константи 0 щодо операції «$+$», Г7 визначає існування оберненого елемента в групі.

Якщо індивідні змінні пробігають множину цілих чисел і символ «+» розуміти як знак арифметичного додавання, а символ 0 — як назву числа 0, то прийнята аксіоматика визначатиме звичайну адитивну групу цілих чисел.

§ 2. Метатеорема дедукції та її застосування

На прикладі найпростішої формальної теорії — числення висловлень — ми бачили, що безпосереднє доведення нових теорем теорії, виходячи тільки з означення, доведення, є дуже громіздким. Тим більше це стосується теорій першого порядку, будова яких значно складніша порівняно з численням висловлень.

У зв'язку с цим виникає питання, чи можна використати у подальшій побудові теорій першого порядку такий могутній засіб доведення, як метатеорема дедукції.

Перш за все доведемо важливе твердження, яке дає змогу використовувати в теоріях першого порядку т а в т о л о г і ї числення висловлень.

О к р е м и м в и п а д к о м т а в т о л о г і ї $\mathfrak{A}$ в теорії T називатимемо формулу цієї теорії, яка утворюється з $\mathfrak{A}$ п і д с т а н о в к о ю замість кожної пропозиційної букви, що входить в $\mathfrak{A}$, п е в н о ї формули теорії T.

Так, окремим випадком тавтології в теорії груп є формула

$$(x_1 + x_2 = x_1 \rightarrow x_2 = 0) \rightarrow (\neg (x_2 = 0) \rightarrow \rightarrow \neg (x_1 + x_2 = x_1)), \qquad (*)$$

яка утворюється підстановкою в тавтологію $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow \rightarrow \neg (p_2 \rightarrow p_1)$.

Доведемо таке твердження.

М е т а т е о р е м а 1. *Якщо формула* $\mathfrak{B}$ *теорії* T *першого порядку є окремим випадком тавтології, то* $\vdash_T \mathfrak{B}$, *причому останнє доведення можна дістати застосуванням тільки схем аксіом* S1—S3 *і правила* MP.

Д о в е д е н н я. Нехай $\mathfrak{B}$ — окремий випадок тавтології $\mathfrak{A}$. Тоді за властивістю повноти числення висловлень $\mathfrak{A}$ — теорема числення висловлень, тобто існує доведення $\mathfrak{A}$, в якому застосовуються тільки схеми аксіом S1—S3 і правило MP, а саме певна послідовність

формул числення висловлень

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n, \qquad (1)$$

де $\mathfrak{B}_n$ збігається з $\mathfrak{A}$.

Підставимо замість кожної пропозиційної букви, яка входить в послідовність (1), ту формулу теорії T, якою ця буква заміщалася при утворенні $\mathfrak{B}$ з $\mathfrak{A}$, а замість кожної пропозиційної букви, що не входить в (1), підставимо довільну, але одну і ту ж формулу теорії T. Утворена послідовність формул і є доведенням $\mathfrak{B}$ в теорії T, причому в даному доведенні використано лише схеми аксіом S1—S3 і правило MP.

Так, вищенаведена формула (*) як окремий випадок тавтології є теоремою теорії груп.

Доведена метатеорема дає змогу значно скорочувати доведення теорем в теоріях першого порядку введенням відповідного окремого випадку тавтології $\mathfrak{B}$ замість тієї скінченної послідовності формул теорії, яка є доведенням $\mathfrak{B}$.

Повернемось до поставленого вище питання: чи має місце для теорії першого порядку метатеорема дедукції.

Беззастережне перенесення цієї метатеореми на теорії першого порядку, зокрема на числення предикатів, недопустиме. Справді, в довільній теорії першого порядку, зокрема в численні предикатів, для довільної формули $\mathfrak{A}$ має місце вивідність

$$\mathfrak{A} \vdash \forall x_1 \mathfrak{A} \qquad (2)$$

за правилом В$\forall$. Якби в численні предикатів для формули справджувалася метатеорема дедукції, то з вивідності (2) дістали б теорему числення предикатів

$$\vdash \mathfrak{A} \rightarrow \forall x_1 \mathfrak{A}. \qquad (3)$$

Як буде показано далі (звичайно, без застосування метатеореми дедукції), кожна теорема числення предикатів є логічно загальнозначущою формулою, тобто згідно з (3) формула $\mathfrak{A} \rightarrow \forall x_1 \mathfrak{A}$ є лзз. Це суперечить результату, встановленому раніше.

Проте метатеорема дедукції справджуватиметься і для теорій першого порядку, якщо в її формулювання ввести певне застереження.

Для цього введемо поняття залежності виводу від гіпотези.

7 2–1179

Нехай дано певний вивід формули $\mathfrak{B}$ теорії першого порядку з гіпотез $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, \ldots, \mathfrak{A}_m$, а саме, $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n$ разом з аналізом цього виводу. Тоді формула $\mathfrak{B}_i$ називається **залежною від гіпотези** $\mathfrak{A}_k$ тоді і тільки тоді, коли:

1) $\mathfrak{B}_i$ збігається з $\mathfrak{A}$, причому цим обгрунтовується в аналізі входження $\mathfrak{B}_i$ в доведення, або

2) $\mathfrak{B}_i$ є безпосереднім висновком формул, з яких хоча б одна залежить від $\mathfrak{A}_k$.

Приклад

1. $P_1^2(x_1, x_2)$ (гіпотези);
2. $P_2^1(x_1)$
3. $\forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)$ (1, В$\forall$).

У цьому виводі формули 1 і 3 залежать від формули $P_1^2(x_1, x_2)$, а формула $P_2^1(x_1)$ — ні.

Перш ніж довести метатеорему дедукції для теорій першого порядку доведемо таку лему.

Лема. *Якщо* $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{B}$ *і існує такий вивід* $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$, *в якому жодна з формул* $\mathfrak{B}_i$ *не залежить від* $\mathfrak{A}$, то $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай (1) — даний вивід $\mathfrak{B}$ з множини гіпотез $\Gamma \cup \{\mathfrak{A}\}$. Доведення проведемо за індукцією по довжині n виводу (1). За індуктивним припущенням, яке ми приймемо, лема справджується при кожному $j < i$. Доведемо, що тоді вона справджується також при i. За означенням вивідності з гіпотез, для довільного $i \leqslant n$ $\mathfrak{B}_i$ є: 1) або аксіомою T, 2) або $\mathfrak{B}_i \in \Gamma$, 3) або $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}$, 4) або $\mathfrak{B}_i$ безпосередньо виводиться з попередніх членів послідовності (1) за правилом МР чи В$\forall$. Якщо маємо випадок 1) або 2), то відразу $\Gamma \vdash_T \mathfrak{B}_i$ (за означенням вивідності): випадок 3) відпадає за умовою леми (жодна з формул $\mathfrak{B}_i$ не залежить від $\mathfrak{A}$; якщо матиме місце випадок 4), то за індуктивним припущенням для кожного $j < i$ справджується $\Gamma \vdash_T \mathfrak{B}_j$, а тоді виконуватиметься і $\Gamma \vdash_T \mathfrak{B}_i$ (за означенням вивідності). Залишається додати, що, згідно з принципом зворотної математичної індукції, доводжуване твердження справджується при всіх натуральних i, зокрема, і при $i = n$.

Лему доведено.

Метатеорема 2. *Нехай через* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *позначено довільні формули, а через* Γ *— множину формул теорії першого порядку* T. *Дано, що* $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{B}$, *причому існує такий вивід* $\mathfrak{B}$ *з* $\Gamma, \mathfrak{A}$, *в якому правило* В$\forall$ *не застосовується до жодної формули, залежної від* $\mathfrak{A}$ *по тій змінній* x_i, *яка має вільне входження в* $\mathfrak{A}$. *Тоді*

$$\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}.$$

Доведення. Дано, що існує вивід (1) формули $\mathfrak{B}$ з множини гіпотез $\Gamma \cup \{\mathfrak{A}\}$. У послідовності (1) для кожного $i \leqslant n$ $\mathfrak{B}_i$ є: 1) або аксіомою T, 2) або $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}$, 3) або $\mathfrak{B}_i \in \Gamma$, 4) або існують $j < i$, $k < i$ такі, що $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{B}_k \to \mathfrak{B}_i$, 5) або існує таке $j < i$, що $\mathfrak{B}_i = \forall x_k \mathfrak{B}_j$.

Доведення проведемо зворотною індукцією по i. Індуктивне припущення — теорема справджується при всіх $r < i$. Покажемо, що тоді в усіх випадках 1) — 5) вона справджується і при $r = i$.

У випадках 1) — 4) має місце доведення, подане у численні висловлень.

Розглянемо випадок 5). Тут правило В$\forall$ застосовується до формули $\mathfrak{B}_j$ по змінній x_k; тому, згідно з умовою:

а) $\mathfrak{B}_j$ не залежить від $\mathfrak{A}$, або б) x_k не має вільних входжень в $\mathfrak{A}$.

5а). Нехай $\mathfrak{B}_i = \forall x_k \mathfrak{B}_i$, де $j < i$ і $\mathfrak{B}_j$ не залежить від $\mathfrak{A}$. За індуктивним припущенням $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$. Отже, $\Gamma, \mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{B}_j$, звідки за лемою $\Gamma \vdash_T \mathfrak{B}_j$, оскільки $\mathfrak{B}_j$ не залежить від $\mathfrak{A}$. Тоді за правилом В$\forall$ матимемо $\Gamma \vdash_T \forall x_k \mathfrak{B}_j$, тобто $\Gamma \vdash_T \mathfrak{B}_i$. Далі з $\mathfrak{B}_i$ виводиться $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$ (за схемою аксіом S1 і правилом МР). Таким чином, з індуктивного припущення слідує $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_i$.

5б). Нехай тепер $\mathfrak{B}_i = \forall x_k \mathfrak{B}_j$ і x_k не має вільних входжень в $\mathfrak{A}$. За індуктивним припущенням $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j$. Звідси за правилом В$\forall$ дістаємо $\Gamma \vdash_T \forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j)$; за схемою аксіом S5 маємо $\forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j) \to (\mathfrak{A} \to \forall x_k \mathfrak{B}_j)$, оскільки x_k не входить як вільна змінна в $\mathfrak{A}$. Таким чином, з Γ виводиться остання формула (як окремий випадок схеми аксіом). Беручи до уваги, що $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}_j$, за правилом МР матимемо $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \to \forall x_k \mathfrak{B}_j$, тобто, як і у випадку 5а).

Отже, у випадках 1) —5) з індуктивного припущення слідує, що доводжуване твердження справджується і при $j = i$. За принципом зворотної індукції це твердження справджується і при всіх натуральних $i \leqslant n$, зокрема, при $i = n$. Метатеорему дедукції доведено.

При застосуванні на практиці метатеореми дедукції особливе значення мають такі її наслідки.

Наслідок 1. *Якщо* Γ, $\mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{B}$ *і* $\mathfrak{A}$ — *замкнена формула* (*вона не містить вільних входжень жодної змінної*), *то*

$$\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Наслідок 2. *Якщо* Γ, $\mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{B}$ *і існує виведення* $\mathfrak{B}$ *з* Γ, $\mathfrak{A}$, *в якому не застосовується правило* В$\forall$, *то* $\Gamma \vdash_T \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$.

Доведемо тепер кілька теорем числення предикатів — логічної основи кожної математичної теорії першого порядку.

Теорема 1. $\forall x_1 \ (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\forall x_1 \mathfrak{A} \rightarrow \forall x_1 \mathfrak{B})$

1. $\forall x_1 (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ (гіпотеза);
2. $\forall x_1 \mathfrak{A}$ (гіпотеза);
3. $\forall x_1 (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ (схема аксіом S4);
4. $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (1, 3, MP) (формула 4 залежить від гіпотези 1);
5. $\forall x_1 \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ (схема аксіом S4);
6. $\mathfrak{A}$ (2, 5, MP) (формула 6 залежить від гіпотези 2);
7. $\mathfrak{B}$ (4, 6, MP) (формула 7 залежить від гіпотези 1 і 2);
8. $\forall x_1 \mathfrak{B}$ (7, В$\forall$) (правило В$\forall$ застосовано по змінній x_1, яка не входить вільно ні в 1, ні в 2).

Отже, $\forall x_1 (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$, $\forall x_1 \mathfrak{A} \vdash_T \forall x_1 \mathfrak{B}$ (1—8, за означенням вивідності), звідки $\forall x_1 (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \vdash_T \forall x_1 \mathfrak{A} \rightarrow \forall x_1 \mathfrak{B}$ та $\vdash_T \forall x_1 (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\forall x_1 \mathfrak{A} \rightarrow \forall x_1 \mathfrak{B})$ за метатеоремою дедукції. Звернемо увагу на те, що застосування метатеореми дедукції є законним, маючи на увазі зауваження, наведене вище.

Застосовуючи метатеорему 1 про окремі випадки тавтологій, можна обгрунтувати перенесення на теорії першого порядку, зокрема на числення предикатів, ряду похідних правил виводу з числення висловлень.

Це дасть змогу значно скоротити кількість кроків в побудові дальших доведень аналогічно тому, як це має місце в численні висловлень.

Наведемо їх формулювання ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ означають довільні формули теорії першого порядку).

Правило **ВД** — *введення диз'юнкції:* $\mathfrak{A} \vdash_T \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \vdash_T \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

Правило **ВК** — *введення кон'юнкції*: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash_T \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$,

Правило **ОД** — *вилучення диз'юнкції:*

$$\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_3, \ \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3 \vdash_T \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3$$

Правило ОК — *вилучення кон'юнкції*: $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash_T \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \vdash_T \mathfrak{B}$.

Правило КП — *контрапозиції*: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \vdash_T \neg \mathfrak{B} \rightarrow \neg \mathfrak{A}$.

Правило ПС — *правило силогізму*: $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3 \vdash_T \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3$.

Доведення правила ОД.

1. $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_3$ (гіпотеза);
2. $\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3$ (гіпотеза);
3. $(\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_3) \rightarrow ((\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3) \rightarrow (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3))$ (окремий випадок тавтології $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)))$;
4. $(\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3) \rightarrow (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3)$ (1, 3, MP);
5. $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3$ (2, 4, MP).

Отже, за означенням вивідності з гіпотез, маємо $\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3 \vdash_T \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_3$, тобто правило ОД виведено.

Доведення правила ВК.

1. $\mathfrak{A}$ (гіпотеза);
2. $\mathfrak{B}$ (гіпотеза);

Нехай формула $\mathfrak{R}$ є довільною аксіомою даної теорії.

3. $(\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow ((\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}))$ (окремий випадок тавтології $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2 \wedge p_3)))$;
4. $\mathfrak{A} \rightarrow (\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{A})$ (окремий випадок схеми аксіом S1);
5. $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{A}$ (1, 4, MP);
6. $(\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow (\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ (3, 5, MP);

7. $\mathfrak{B} \to (\mathfrak{R} \to \mathfrak{B})$ (окремий випадок схеми аксіом S1);

8. $\mathfrak{R} \to \mathfrak{B}$ (2, 7, MP);

9. $\mathfrak{R} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (8, 6, MP);

10. $\mathfrak{R}$ (за означенням $\mathfrak{R}$ — аксіома);

11. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (10, 9, MP).

Отже, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vdash_T \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ (з 1—11 за означенням вивідності з гіпотез).

Наведемо ще ряд доведень теорем числення предикатів, використовуючи похідні правила виводу як скорочення.

Теорема 2. $\forall x_k\mathfrak{A} \vee \forall x_k\mathfrak{B} \to \forall x_k (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

1. $\forall x_k\mathfrak{A} \vee \forall x_k\mathfrak{B}$ (гіпотеза);
2. $\forall x_k\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (схема аксіом S4);
3. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (окремий випадок тавтології $p_1 \to p_1 \vee p_2$);
4. $\forall x_k\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (2, 3, ПС);
5. $\forall x_k\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ (схема аксіом S4);
6. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (окремий випадок тавтології);
7. $\forall x_k\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (5, 6, ПС);
8. $\forall x_k\mathfrak{A} \vee \forall x_k\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{L}$ (4, 7, ОД);
9. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ (1, 8, MP);
10. $\forall x_k (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ (9, В$\forall$);

Отже, $\forall x_k\mathfrak{A} \vee \forall x_k\mathfrak{B} \vdash_T \forall x_k (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ (1—10, за означенням вивідності);

звідси $\vdash_T \forall x_k\mathfrak{A} \vee \forall x_k\mathfrak{B} \to \forall x_k (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ (метатеорема дедукції, беручи до уваги, що x_k не входить вільно в 1).

Теорема 3. $\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{A} \wedge \exists x_k\mathfrak{B}$

1. $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ (окремий випадок тавтології $p_1 \wedge p_2 \to p_1$);
2. $\neg\mathfrak{A} \to \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ (1, правило КП);
3. $\forall x_k (\neg\mathfrak{A} \to \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}))$ (2, правило В$\forall$);

4. $\forall x_k (\neg\mathfrak{A} \to \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})) \to (\forall x_k (\neg\mathfrak{A}) \to \forall x_k \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}))$ (схема теореми 1);
5. $\forall x_k (\neg\mathfrak{A}) \to \forall x_k \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ (3, 4 MP);
6. $\neg\forall x_k \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \neg\forall x_k (\neg\mathfrak{A})$ (5 правило КП);
7. $\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{A}$ (6 за означенням $\exists$);
8. $\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{B}$ (виводиться аналогічно 7);
9. $(\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{A}) \to ((\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{B}) \to (\exists x_k\mathfrak{A} \wedge \exists x_k\mathfrak{B}))$; (окремий випадок товтології $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_3) \to (p_1 \to p_2 \wedge p_3))$;
10. $(\exists x_k (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \exists x_k\mathfrak{B} \to \exists x_k\mathfrak{A} \wedge \exists x_k\mathfrak{B}$ (7, 9, MP);
11. $\exists x_k\mathfrak{A} \wedge \exists x_k\mathfrak{B}$ (8, 10, MP).

Теорема 4. $\forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\exists x_k\mathfrak{A} \to \exists x_k\mathfrak{B})$

1. $\forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ (гіпотеза);
2. $\forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ (схема аксіом S4);
3. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ (1, 2, MP);
4. $\neg\mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A}$ (3, правило КП);
5. $\forall x_k (\neg\mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A})$ (4 правило В$\forall$);
6. $\forall x_k (\neg\mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A}) \to (\forall x_k \neg\mathfrak{B} \to \forall x_k \neg\mathfrak{A})$ (схема теорем 1);
7. $\forall x_k \neg\mathfrak{B} \to \forall x_k \neg\mathfrak{A}$ (5, 6, MP);
8. $\neg\forall x_k \neg\mathfrak{A} \to \neg\forall x_k \neg\mathfrak{B}$ (7, правило КП);
9. $\exists x_k\mathfrak{A} \to \exists x_k\mathfrak{B}$ (8, за означенням $\exists$);
10. $\forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \vdash_T \exists x_k\mathfrak{A} \to \exists x_k\mathfrak{B}$ (1—9, за означенням вивідності); $\vdash \forall x_k (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\exists x_k\mathfrak{A} \to \exists x_k\mathfrak{B})$ (10, метатеорема дедукції, враховуючи, що змінна x_k не входить вільно в 1).

Теорема 5. $\neg\forall x_k\mathfrak{A} \to \exists x_k \neg\mathfrak{A}$ (закон де Моргана для кванторів)

1. $\neg\exists x_k \neg\mathfrak{A}$ (гіпотеза);
2. $\neg\neg\forall x_k \neg\neg\mathfrak{A}$ (1, за означенням символу $\exists$);
3. $\neg\neg\forall x_k \neg\neg\mathfrak{A} \to \forall x_k \neg\neg\mathfrak{A}$ (окремий випадок тавтології);
4. $\forall x_k \neg\neg\mathfrak{A}$ (2, 3, MP);
5. $\forall x_k \neg\neg\mathfrak{A} \to \neg\neg\mathfrak{A}$ (схема аксіом S4);
6. $\neg\neg\mathfrak{A}$ (4, 5, MP);
7. $\neg\neg\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (окремий випадок тавтології $\neg\neg p \to p$);
8. $\mathfrak{A}$ (6, 7, MP);
9. $\forall x_k\mathfrak{A}$ (8 правило В$\forall$),

звідки $\neg\exists x_k \neg\mathfrak{A} \vdash_T \forall x_k\mathfrak{A}$ (1—9, за означенням вивідності з гіпотез).

10. $\vdash_7 \neg \exists x_k \neg \mathfrak{A} \to \forall x_k \mathfrak{A}$ (за метатеоремою дедукції, враховуючи, що x_k не має вільних входжень в формулу 1) і

11. $\vdash \neg \forall x_k \mathfrak{A} \to \neg \neg \exists x_k \neg \mathfrak{A}$ (1, правило КП)

12. $\neg \neg \exists x_k \neg \mathfrak{A} \to \exists x_k \neg \mathfrak{A}$ (окремий випадок тавтології $\neg \neg p \to p$);

13. $\neg \forall x_k \mathfrak{A} \to \exists x_k \neg \mathfrak{A}$ (11, 12, ПС).

Інші закони де Моргана для кванторів $\exists x_k \neg \mathfrak{A} \to \neg \forall x_k \mathfrak{A}$, $\neg \exists x_k \mathfrak{A} \to \forall x_k \neg \mathfrak{A}$, $\forall x_k \neg \mathfrak{A} \to \neg \exists x_k \mathfrak{A}$ пропонуємо довести самостійно.

§ 3. Інтерпретація теорії першого порядку. Модель

Теорія першого порядку будується як формальна теорія. Це означає, що її символи позбавлені смислу, оперування з ними проводиться за точно встановленими синтаксичними правилами, в яких враховується тільки форма при повному абстрагуванні від змісту. Проте метатеорія, без якої не можна навіть описати формальну теорію, розглядає формальні об'єкти останньої вже змістовно.

Формальна теорія, взята сама по собі, являє щось на зразок шахової гри; формула такої теорії нагадує позицію на шаховій дошці, системі аксіоми відповідає вихідне розміщення фігур на дошці, а правилам виводу — правила шахової гри.

Проте свого пізнавального значення формальна теорія набуває лише тому, що її термінам можна приписати певний зміст, певне значення. Так ми приходимо до поняття інтерпретації, яка означає вихід поза межі формальної теорії завдяки наданню її символам певного змісту, зовнішнього щодо цієї формальної теорії.

Вищесказане, звичайно, не з'ясовує зміст терміна «інтерпретація теорії першого порядку». Дамо строге означення цього поняття.

Нехай дано математичну структуру D, тобто непорожню множину, яку позначатимемо D^*, на якій визначено n-арні відношення R_i $(x_n, \ldots, x_n)$ і m-арні операції.

І н т е р п р е т а ц і є ю формули $\mathfrak{A}$ теорії T у структурі D називають систему, що складається з множини D^* і відображення, за яким кожній n-арній предикатній букві в $\mathfrak{A}$ відповідає певне n-арне відношення в D, кожній m-арній функціональній букві в $\mathfrak{A}$ — певна m-арна операція в D і кожній предметній константі в $\mathfrak{A}$ — назва певного елемента множини D^*. Останню множину називають о б л а с т ю і н т е р п р е т а ц і ї.

Цим повністю означено поняття інтерпретації для елементарних формул теорії першого порядку. Щоб означити це поняття для довільної формули теорії, розглянемо спочатку питання про істинностні значення формул теорії першого порядку в даній інтерпретації.

Почнемо з елементарної формули.

Вважається, що елементарна формула теорії першого порядку P_i^n $(t_1, \ldots, t_n)$ в даній інтерпретації на структурі D при даному заміщенні всіх її в і л ь н и х індивідних змінних назвами певних елементів D^* має значення «істина» (1) тоді і тільки тоді, коли відповідне n-арне відношення R $(t_1', \ldots, t_n')$ виконується в структурі D.

Нехай, наприклад, задано таку формулу теорії T: P_1^2 (x_1, x_2). Розглянемо її інтерпретацію на структурі натуральних чисел, в якій предикату P_1^2 $(x_1 x_2)$ відповідає бінарне відношення «x_1 ділить x_2». Тоді при заміщенні x_1 і x_2 відповідно назвами натуральних чисел «2» і «4» дістанемо істинне висловлення. Якщо при цій самій інтерпретації предиката P_1^2 (x_1, x_2) і тому самому заміщенні змінної x_1 залишимо x_2 без зміни, то дістанемо висловлювальну форму «2 ділить x_2», істинісне значення якої залежить від x_2.

Для визначення істинісних значень неелементарних формул теорії в інтерпретації виходять з того, що символи логічних операцій, включаючи квантори, при інтерпретації зберігають той смисл, який надається їм у звичайній математичній мові.

Точніше, *при даній інтерпретації на структурі D і певному заміщенні всіх вільних індивідних змінних назвами елементів D^*:*

формула $\neg\mathfrak{A}$ набуває значення «істина» (1) *тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{A}$ набуває значення «хибність»* (0);

формула $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ набуває значення «істина» (1) *тоді і тільки тоді, коли обидві формули $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ мають значення «істина»* (1);

формула $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ набуває значення «істина» (1) *тоді і тільки тоді, коли принаймні одна з формул набуває значення «істина»* (1);

формула $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ набуває значення «істинність» (1) *тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{B}$ набуває значення «істинність»* (1) *або $\mathfrak{A}$ — значення «хибність»* (0);

формула $\forall x_i \mathfrak{A}(x_i)$ *набуває значення «істинність»* (1) *тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента* b *множини* D^* $\mathfrak{A}(b)$ *має значення «істинність»* (1);

формула $\exists x_i \mathfrak{A}(x_i)$ *набуває значення «істинність»* (1) *тоді і тільки тоді, коли існує хоча б один елемент* b *множини* D^* *такий, що* $\mathfrak{A}(b)$ *набуває значення «істинність»* (1).

Приклади

1. Дано формулу теорії першого порядку

$$\mathfrak{A} = \forall x_1 (P_1^2(f_1^{\prime}(x_1), a_0) \to P_1^2(x_1, a_0),$$

D — структура дійсних чисел. Нехай $f_1^1(x_1)$ інтерпретується як x_1^3, константа a_0 — як 1, $P_1^2(x_1, x_2)$ — як $x_1 > x_2$. Тоді формула $\mathfrak{A}$ перетворюється в істинне арифметичне висловлення $\forall x_1 (x_1^3 > 1 \to x_1 > 1)$. Якщо в цьому прикладі змінити тільки інтерпретацію терма $f_1^1(x_1)$ певним чином, а саме інтерпретувати його як x_1^2, то дістанемо хибне на структурі дійсних чисел висловлення

$$\forall x_1 (x_1^2 > 1 \to x_1 > 1).$$

2. Розглянемо в цій самій інтерпретації формулу теорії першого порядку

$$P_1^2(f_1^1(x_1), a_0) \to \forall x_1 P_1^2(f_1^1(x_1), a_0).$$

Тепер, внаслідок інтерпретації, дістанемо висловлювальну форму над структурою дійсних чисел $x_1^2 > 1 \to \forall x_1 (x_1^2 > 1)$ (перше входження змінної x_1 тут вільне). При заміщенні вільного входження змінної x_1 назвою числа 2 ця висловлювальна форма переходить в хибне висловлення $2^2 > 1 \to \forall x_1 (x_1^2 > 1)$, а при заміщенні x_1 назвою числа 0 — в тривіально істинне висловлення

$$0^2 > 1 \to \forall x_1 (\Delta_1^2 > 1).$$

Як бачимо, внаслідок інтерпретації замкненої формули теорії першого порядку утворюється висловлення (істинне чи хибне), тоді як формула, що містить вільні входження індивідних змінних, інтерпретується як висловлювальна форма.

Формула $\mathfrak{A}$ називається істинною в даній інтерпретації, якщо вона набуває значення «істина» в цій інтерпретації при всіх заміщеннях вільних змінних в $\mathfrak{A}$ назвами елементів області інтерпретації.

Формула $\mathfrak{A}$ називається логічно загальнозначущою (в численні предикатів), якщо вона є істинною в кожній інтерпретації.

Інтерпретація, в якій всі формули даної множини формул Γ є істинними, називається моделлю даної множини Γ.

Зокрема, моделлю теорії першого порядку T називається інтерпретація, в якій всі теореми T є істинними.

Так, якщо множина формул Γ складається з однієї формули $P_1^1(x_1) \to P_1^1(x_2)$, то моделлю Γ є кожна інтерпретація, область якої одноелементна множина.

Для теорії лінійного упорядкування T'' моделями є, наприклад, інтерпретації I_1, I_2, I_3, в яких предикат «$<$» інтерпретується як арифметичне відношення «$<$», причому для I_1 область інтерпретації $D_1^* = \{1, 2, 3\}$, для I_2 $D_2^* = Q$ (множина всіх раціональних чисел), для $I_3 D_3^* = R$ (множина всіх дійсних чисел). Тут перша модель — скінченна; друга — зчисленна, третя — незчисленна.

Моделями теорії груп є, скажімо, наступні дві інтерпретації I і I'. В обох інтерпретаціях предикат «$=$» інтерпретується як звичайне відношення рівності. В I $D^* = R$, символ «$+$» інтерпретується як знак арифметичного додавання, константа «0» — як назва числа 0. В I' $D^* = R - \{0\}$ символ «$+$» інтерпретується як знак арифметичного множення, а константа «0» — як назва числа 1.

Останні дві інтерпретації називають ізоморфними між собою; для них мають місце рівнопотужність (еквівалентність) областей інтерпретації при збереженні відношень. Наведемо точне означення ізоморфізму інтерпретацій.

Нехай дано дві інтерпретації I_1 і I_2 множини формул Γ на структурах D_1 і D_2, причому в D_1 і D_2 інтерпретаціями предикатних букв P_i є відношення R_i і R_i', інтерпретаціями функціональних букв f_i є символи операцій F_i і F_i', а індивідні константи a_i інтерпретуються як c_i і c_i' відповідно.

Інтерпретації I_1 *і* I_2 *називають ізоморфними, якщо існує взаємно-однозначне відображення* φ *множини* D_1^* *на* D_2^* *таке, що мають місце твердження:*

1) *для довільних* $b_1, \ldots, b_n \in D_1$ $R'_i(b_1, \ldots, b_n)$ виконується в D_1 тоді і тільки тоді, коли $R_i(\varphi(b_1), \ldots$

..., $\varphi(b_n)$) виконується в D_2;

2) $F_i(b_1, \ldots, b_m) = F_i'(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_m))$;

3. $\varphi(c_i) = c_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Оскільки φ — взаємно-однозначне відображення D_1^* на D_2^*, то, очевидно, необхідною (але не достатньою) умовою ізоморфності інтерпретацій є рівнопотужність областей інтерпретацій I_1 і I_2. Так, не ізоморфними між собою, є вищерозглянуті моделі теорії лінійного порядку T'' (області інтерпретацій тут не рівнопотужні).

§ 4. Питання несуперечності, повноти, розв'язності

Питання про несуперечність, повноту і розв'язність ставляться для кожної теорії першого порядку окремо, тобто, коли задано спеціальні, нелогічні, аксіоми теорії.

Проте можна і навіть треба поставити ці питання для логічної основи теорій першого порядку, а саме для числення предикатів, в якому немає жодних спеціальних аксіом.

Серед перелічених питань метатеорії, як вже зазначалося, найбільше принципіальне значення має питання про несуперечність.

Означення. *Теорія першого порядку T називається* *внутрішньо* *або просто несуперечною, якщо не існує такої формули $\mathfrak{A}$, вираженої в термінах T, що як $\mathfrak{A}$, так і $\neg\mathfrak{A}$ є теоремами T.*

Метатеорема 3. *Числення предикатів першого порядку є внутрішньо несуперечною теорією.*

Доведення. Для довільної формули $\mathfrak{A}$ числення предикатів позначимо через $W(\mathfrak{A})$ вираз, який утворюється з $\mathfrak{A}$ внаслідок опускання в $\mathfrak{A}$ всіх символів термів, кванторів, відповідних дужок і ком. Наприклад, якщо

$$\mathfrak{A} = \forall x_1 (P_1^2(f_1^1(x_1), x_2) \to P_2^1(x_1), \text{ то } W(\mathfrak{A}) = P_1^2 \to P_2^1.$$

Зазначимо, що для довільної формули $\mathfrak{A}$ числення предикатів вираз $W(\mathfrak{A})$ є формулою числення висловлень, якщо символ P_i^n розглядати як пропозиційну змінну, що ми й робитимемо в подальшому доведенні.

З означення W безпосередньо випливає, що

$$W(\neg\mathfrak{A}) = \neg W(\mathfrak{A}), \quad (1)$$

і

$$W(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) = W(\mathfrak{A}) \to W(\mathfrak{B}). \quad (2)$$

Доведемо таке твердження.

Якщо $\mathfrak{B}$ — теорема числення предикатів, то $W(\mathfrak{B})$ — тавтологія.

Оскільки $\mathfrak{B}$ — теорема числення предикатів, то існує скінченна послідовність формул цього числення

$$\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_i, \ldots, \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B} \quad (3)$$

така, що кожне $\mathfrak{B}_i$ є: а) або аксіомою схем S1—S5, б) або виводиться з попередніх членів послідовності (3) — б$_1$) за MP; б$_2$) за В$\forall$. Доведення проведемо зворотною індукцією по i. Індуктивне припущення — доводжуване твердження справджується для всіх $\mathfrak{B}_p$, де $p < i$. Покажемо, що тоді воно справджується і для $\mathfrak{B}_i$.

а) Якщо $\mathfrak{B}_i$ — окремий випадок однієї із схем S1—S3, то $\mathfrak{B}_i$ — тавтологія, а $W(\mathfrak{B}_i)$ збігається з $\mathfrak{B}_i$. Якщо $\mathfrak{B}_i$ — окремий випадок схеми S4, то

$$W(\mathfrak{B}_i) = \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \quad (4)$$

де $\mathfrak{A}$ — деяка формула числення висловлень. Нарешті, у випадку, коли $\mathfrak{B}_i$ є окремим випадком схеми S5, то $W(\mathfrak{B}_i)$ матиме вигляд

$$(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}), \quad (5)$$

де $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ — певні формули числення висловлень. Як відомо, формули (4) і (5) — тавтології.

б$_1$) У даному випадку існують такі $j < i$, $k < i$, що $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i$. За індуктивним припущенням $W(\mathfrak{B}_k)$ і $W(\mathfrak{B}_j)$ — тавтології. Але $W(\mathfrak{B}_k) = W(\mathfrak{B}_j \to \mathfrak{B}_i) = W(\mathfrak{B}_j) \to W(\mathfrak{B}_i)$ (згідно із співвідношенням (2)). Оскільки $W(\mathfrak{B}_j)$ і $W(\mathfrak{B}_j) \to W(\mathfrak{B}_i)$ тавтології, то $W(\mathfrak{B}_i)$ — теж тавтологія.

б$_2$) Існує таке $k < 1$, що $\mathfrak{B}_i = \forall x_p \mathfrak{B}_k$. За індуктивним припущенням $W(\mathfrak{B}_k)$ — тавтологія, а $W(\mathfrak{B}_i) = W(\mathfrak{B}_k)$. Отже, і $W(\mathfrak{B}_i)$ — тавтологія. Таким чином, в усіх можливих випадках з індуктивного припущення слідує, що $W(\mathfrak{B}_i)$ — тавтологія. За принципом зворотної індукції $W(\mathfrak{B}_i)$ є тавтологією для кожного натурального i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Зокрема, $W(\mathfrak{B}_n) = W(\mathfrak{B})$ — тавтологія.

Тепер припустимо, що існує така формула числення предикатів $\mathfrak{A}^*$, що $\vdash \mathfrak{A}^*$ і $\vdash \neg\mathfrak{A}^*$. Тоді $W(\mathfrak{A}^*)$ і $W(\neg\mathfrak{A}^*)$ — тавтології. Але $W(\neg\mathfrak{A}^*) = \neg W(\mathfrak{A}^*)$, згідно з рівністю (1). Звідси $W(\mathfrak{A}^*)$ і $\neg W(\mathfrak{A}^*)$ — тавтології, що неможливо. Метатеорему 3 доведено.

У зв'язку з метатеоремою 3 виникає питання, чи має місце семантична несуперечність числення предикатів, тобто, чи кожна теорема числення предикатів є формулою, істинною в кожній інтерпретації. Ствердну відповідь на це питання дає наступне твердження.

Метатеорема 4. *Кожна теорема числення предикатів є логічно загальнозначущою формулою.*

Доведення. Спочатку впевнимося, що кожний окремий випадок схем аксіом S1—S5 є логічно загальнозначущою формулою. Це вже було встановлено для схем S1—S3 на с. 26 і 80, а для схем $S4$, $S5$ — на с. 141. Тепер покажемо, що правила виводу МР і В$\forall$ зберігають властивість формул бути істинними в кожній інтерпретації. Для правила МР припустимо супротивне. Тоді для деяких формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ знайдеться хоча б одна інтерпретація і хоча б одне заміщення всіх вільних предметних змінних в ній, при яких формули $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ набувають значення «істинність», а формула $\mathfrak{B}$ — значення «хибність». При цьому істинісним значенням формули $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ за означенням імплікації є «хибність», що суперечить припущенню. Нарешті, те, що правило В$\forall$ зберігає властивість формул бути істинними в кожній інтерпретації, безпосередньо слідує з означення згаданої властивості і з означення істинісного значення формули $\forall x\mathfrak{A}$. Щоб завершити доведення, досить згадати, що кожна теорема числення предикатів є або окремим випадком схем аксіом S1—S5, або утворюється з них застосуванням скінченне число раз правил МР і В$\forall$.

Примітки

1. Метатеорема 4 (точніше, її контрапозиція) часто застосовується для доведення того, що певна формула числення предикатів *не* є теоремою. Наприклад, щоб довести, що формула

$$\forall x_1 \exists x_2 P_1^2(x_1, x_2) \to \exists x_2 \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)$$

не є теоремою числення предикатів, досить згадати, що ця формула не є лзз, а тому, згідно з контрапозицією метатеореми 4, не є теоремою числення предикатів. Аналогічно, ми застосували метатеорему 4 для доведення того, що формула

$$P_1^1(x_1) \to \forall x_1 P_1^1(x_1) \qquad (*)$$

не є теоремою числення предикатів. Справді, (*) не є лзз, як ми вже бачили, і тому не може бути теоремою числення предикатів.

2. Слід підкреслити відмінність між метатеоремами 3 і 4. Метатеорему 3 доведено суто синтаксично, без жодного посилання на інтерпретацію. Навпаки, вже у формулюванні, і тим більш, в доведенні метатеореми 4 явно виступає поняття інтерпретації формул

числення предикатів; а це поняття включає і випадок нескінченної області інтерпретації і тому не є, як кажуть, фінітним. Через те ми не повторили для числення предикатів процесу, прийнятого в численні висловлень, внутрішню несуперечність якого було виведено з його семантичної несуперечності. У численні висловлень оцінка істинісних значень формули не припускає абстракції актуальної нескінченності, а в численні предикатів така оцінка включає як окремий випадок оцінку істинісних значень формул у нескінченній і навіть незчисленній області інтерпетації. Нам же потрібно мати доведення несуперечності числення предикатів, повністю незалежне від абстракції актуальної нескінченності, оскільки одна із задач математичної логіки — обгрунтування правомірності методів класичної математики, зокрема, користування абстракцією актуальної нескінченності.

Якщо користуватися поняттям інтерпретації, то доведення метатеореми 3 можна було б подати стисло так. Припустимо, що існує така формула числення предикатів $\mathfrak{A}$, що $\vdash \mathfrak{A}$ і $\vdash \neg \mathfrak{A}$. Звідси $\mathfrak{A}$ і $\neg \mathfrak{A}$ — формули, істинні в кожній інтерпретації, зокрема, в інтерпретації з одноелементною областю, в якій $\mathfrak{A}$ і $\neg\mathfrak{A}$ переходять у формули числення висловлень. Отже, наше припущення означало б суперечність числення висловлень, що неможливо.

Сформулюємо ще одну метатеорему, яка дає змогу, виходячи з даної несуперечності теорії першого порядку, діставати нові ширші несуперечні теорії.

Метатеорема 5. *Якщо до теорії першого порядку T приєднати як аксіому замкнену формулу $\neg\mathfrak{A}^*$ таку, що $\mathfrak{A}^*$ не є теоремою T, то здобута при цьому теорія $T_1 = T + \{\neg\mathfrak{A}^*\}$ буде несуперечною.*

Доведення. Перш за все зазначимо, що у внутрішньо суперечній теорії першого порядку T для довільної її формули $\mathfrak{B}$ має місце $\vdash_T \mathfrak{B}$. Справді, в суперечній теорії T знайдеться така формула $\mathfrak{A}$, що $\vdash_T \mathfrak{A}$ і $\vdash_T \neg\mathfrak{A}$. Тоді, за правилом ВК

$$\vdash_T \mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{A}. \qquad (7)$$

Крім цього,

$$\vdash_T \mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \qquad (8)$$

оскільки формула під знаком $\vdash$ є окремим випадком тавтології. З формул (7) і (8) за МР слідує $\vdash \mathfrak{B}$.

Тепер припустимо, що T_1 — суперечна теорія. Тоді

$$\vdash_{T_1} \mathfrak{A}^*. \qquad (9)$$

Позначимо множину аксіом теорії T через Γ. Отже, вираз (9) можна записати як

$$\Gamma, \neg \mathfrak{A}^* \vdash_T \mathfrak{A}^*. \qquad (10)$$

Оскільки $\neg\mathfrak{A}^*$ — замкнена формула, то до вивідності (10) можна застосувати метатеорему дедукції, звідки

$$\Gamma \vdash_T \neg\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^* \text{ або } \vdash_T \neg\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*. \qquad (11)$$

Далі

$$\vdash_T (\neg\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*) \to \mathfrak{A}^* \qquad (12)$$

як окремий випадок тавтології (так званий закон Клавія), а з формул (11) і (12) за MP дістаємо $\vdash_T \mathfrak{A}^*$, що суперечить умові, за якою $\mathfrak{A}^*$ не є теоремою T. Таким чином, метатеорему 5 доведено.

Тепер розглянемо питання про повноту.

Для теорій першого порядку розрізняють принаймні два види повноти — повноти в широкому і повноти в класичному розумінні.

Теорія першого порядку T називається повною в широкому розумінні, або семантично повною, якщо кожна формула T, істинна в інтерпретації, є теоремою T.

Теорія першого порядку T називається повною в класичному розумінні, якщо для кожної замкненої формули $\mathfrak{A}$ теорії T або $\mathfrak{A}$, або $\neg\mathfrak{A}$ є теоремою T.

Зрозуміло, що питання повноти розглядаються для кожної теорії першого порядку окремо: одна теорія першого порядку може виявитися повною, а друга — неповною, залежно від її спеціальних аксіом. Розглянемо це питання для теорії першого порядку без спеціальних аксіом, тобто для числення предикатів.

Числення предикатів не є теорією, повною в класичному розумінні. Справді, для замкненої формули числення предикатів $\mathfrak{A} = \forall x_1 P_1(x_1)$ ні $\mathfrak{A}$, ні $\neg\mathfrak{A}$ не є теоремою, бо як $\mathfrak{A}$, так і $\neg\mathfrak{A}$, очевидно, не є лзз, і залишається застосувати метатеорему 4.

Питання про те, чи є числення предикатів семантично повним, виявилося дуже складним. Воно було розв'язане в 1930 році видатним математиком і логіком К. Геделем, який довів таке фундаментальне твердження:

Метатеорема 6. (Теорема Геделя про повноту). *Кожна формула числення предикатів, істинна в кожній інтерпретації (лзз), є теоремою числення предикатів.*

Доведення цього твердження досить складне і тут ми його не розглядатимемо. Обмежимося лише доведенням того, що метатеорема 6 слідує з наступного твердження.

Метатеорема 7. *Кожна несуперечна теорія першого порядку має зчисленну модель.*

Те, що метатеорема 6 слідує з метатеореми 7, доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує така формула числення предикатів $\mathfrak{A}^*$, яка є лзз і не є теоремою цього числення. Без обмеження загальності можна вважати, що $\mathfrak{A}^*$ — замкнена формула. Справді, в противному разі, вводячи в $\mathfrak{A}^*$ квантори $\forall$ по всім її вільним індивідним змінним, дістанемо замкнену формулу $\mathfrak{A}^{**}$, причому $\mathfrak{A}^{**}$ є лзз, так само як і теоремою, тоді і тільки тоді, коли такою є $\mathfrak{A}^*$. Взявши до уваги, що $\mathfrak{A}^*$ не є теоремою числення предикатів, приєднаємо формулу $\neg\mathfrak{A}^*$ як аксіому до S1—S5. Здобута при цьому теорія T_1 буде несуперечною за метатеоремою 5, а за метатеоремою 7 вона має зчисленну модель M. У цій моделі $\neg\mathfrak{A}^*$ є істинною як аксіома T_1. Водночас $\mathfrak{A}^*$ істинна в M, бо $\mathfrak{A}^*$ — істинна в кожній інтерпретації, а тому формула $\neg\mathfrak{A}^*$ не може бути істинною в M. Зайшли у суперечність. Доведення закінчено.

Теорема про семантичну повноту числення предикатів дуже важлива. Вона означає, що кожен логічний висновок з множини спеціальних аксіом теорії першого порядку можна вивести з цих спеціальних аксіом застосуванням одних лише логічних аксіом теорії та її правил виводу. Іншими словами, теорема Геделя про повноту свідчить, що числення предикатів є надійною логічною базою, за допомогою якої можна довести всі змістовно істинні твердження математичних теорій першого порядку.

Об'єднуючи дві взаємообернені метатеореми 3 і 6, дістанемо твердження:

Для того, щоб формула числення предикатів була теоремою його, необхідно і достатньо, щоб вона була логічно загальнозначущою.

Таким чином, у численні предикатів множина теорем, означувана суто синтаксично, і означувана семантично множина логічно загальнозначущих формул збігаються.

Часто аксіоматичні математичні теорії будуються з метою описати в ній єдину математичну структуру. Так побудована, наприклад, аксіоматика Пеано та евклідова аксіоматика геометрії. При цьому прагнуть до того, щоб знайти і охарактеризувати в аксіомах теорії такі риси, які властиві об'єктам, що їх мають на увазі в даній теорії, і тільки їм. При цьому єдиність даної системи об'єктів визначається, як і взагалі в математиці, з точністю до ізоморфізму.

У зв'язку з цим виникає необхідність виділити спеціальну властивість системи аксіом, згідно з якою можна описати відповідну структуру однозначно, тобто так, щоб усі моделі цієї системи були ізоморфними.

Означення. *Теорія (система аксіом) називається* *категоричною,* *якщо кожні дві її моделі ізоморфні.*

Наприклад, система аксіом Пеано — категорична. Тривіальним випадком категоричної теорії є теорія, що містить, крім аксіом предиката рівності, ще одну спеціальну аксіому, а саме $\forall x_1 \forall x_2\ (x_1 = x_2)$. Справді, кожна її модель має область інтерпретації (універсум), що складається з одного елемента, і всі моделі тривіально ізоморфні.

Приклад некатегоричної теорії дає, наприклад, теорія груп. Структура раціональних і структура дійсних чисел є двома неізоморфними моделями адитивної теорії груп. Теорія без спеціальних аксіом — числення предикатів — , звичайно, не є категоричною. Слід зазначити, що сучасна математика займається переважно вивченням некатегоричних теорій.

Проблема вирішення в численні предикатів зводиться до аналогічної проблеми в логіці предикатів, якщо врахувати згаданий факт збігу множини теорем числення предикатів з множиною логічно загальнозначущих формул.

§ 5. Формальна арифметика. Теорема Геделя про неповноту

Серед формальних математичних теорій особливу роль відіграє формальна арифметика. Це обумовлено тим, що обгрунтування теорії натуральних чисел означає в принципі обгрунтування всієї математики. Справді, доведення несуперечності геометрії Лобачевського зводиться до аналогічного твердження для евклідової геометрії, обгрунтування останньої зводиться до обгрунтування математичного аналізу, а це, в свою чергу, з урахуванням

арифметизації аналізу зведено до обгрунтування теорії натуральних чисел.

У даному параграфі ми ознайомимо читача з деякими основними питаннями формальної арифметики. Детально це питання розглянуто у [18], [21], [22].

Мова формальної арифметики складається з алфавіту числення предикатів, до якого приєднано її спеціальні символи, а саме:

а) символ бінарного предиката рівності;

б) унарний функціональний символ S (безпосереднє слідування «за») і два бінарних функціональних символи «$+$» та «$\cdot$»;

в) індивідну константу, яку позначимо 0.

Цим символам, звичайно, не приписується жодного змісту, крім того, що про них зафіксовано в спеціальних аксіомах.

Поняття терма і формули вводяться в формальній арифметиці так само, як взагалі в формальній теорії. Зазначимо, що поняття терма в формальній арифметиці інтуїтивно відповідає назві натурального числа, а поняття формули — твердженню про числа чи про числові змінні.

Наприклад, термами є:

$S(S(S(0)))$ або $SSS0$ (відповідає «3»)

$(S0 + SS0) \cdot SS0$ (відповідає «6»)

Формулами є:

$$S0 + SS0 = SSS0;$$

$$\neg (x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_2);$$

$$\neg (x_1 = x_2) \to \neg (x_2 = x_1).$$

Спеціальні аксіоми формальної арифметики

А1. $(x_1 = x_2) \to ((x_1 = x_3) \to (x_2 = x_3));$
А2. $\neg (S(x_1) = 0);$
А3. $(S(x_1) = S(x_2) \to (x_1 = x_2);$
А4. $(x_1 = x_2) \to (S(x_1) = S(x_2));$
А5. $x_1 + 0 = x_1;$
А6. $x_1 + S(x_2) = S(x_1 + x_2);$
А7. $x_1 \cdot 0 = 0;$
А8. $x_1 \cdot S(x_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1.$

А9 (схема аксіом) $\mathfrak{A}(0) \to \forall x_1 (\mathfrak{A}(x_1) \to \mathfrak{A}(S(x_1))) \to \to \forall x_1 \mathfrak{A}(x_1)$, де $\mathfrak{A}(x_1)$ — довільна формула формальної арифметики, яка містить змінну x_1.

Таким чином, система спеціальних аксіом формальної арифметики складається з нескінченної множини аксіом, її нескінченність обумовлена наявністю в ній схеми аксіом А9 (схеми індукції), яка включає довільну формулу $\mathfrak{A}$.

Доцільно порівняти вищенаведені спеціальні аксіоми з відомою змістовною аксіоматикою Пеано. Наведемо аксіоми Пеано (П1—П5).

П1. 0 є натуральним числом.

П2. Якщо x — натуральне число, то $S(x)$ — теж натуральне число.

П3. Якщо $S(x) = S(y)$, то $x = y$.

П4. Для будь-якого натурального числа x має місце нерівність $0 \neq S(x)$.

П5. Нехай $P(x)$ — довільна властивість натурального числа x.

Якщо для довільного x а) 0 має властивість P і б) з того, що x має властивість P, слідує, що $S(x)$ теж має властивість P, то всі натуральні числа мають властивість P.

У формальній аксіоматиці А2 відповідає П4, А3—П3, А9—П5. П1 і П2 містять змістовне поняття «натуральне число», і у формальній системі А1—А9, вільній від інтерпретації, відсутні їх аналоги. А1 описує властивість предиката рівності, який в системі Пеано розуміється інтуїтивно. А5—А8 визначають властивості функціональних символів «+» і «·», відповідні аксіоми відсутні в системі Пеано, оскільки остання виходить з інтуїтивної канторової теорії множин, в рамках якої можна вивести властивості операцій додавання та множення натуральних чисел.

Зазначимо, що між А9 і П5 є дуже істотна відміна: множина властивостей натуральних чисел — це множина всіх підмножин N — множини натуральних чисел, тобто незчисленна множина, тоді як множина всіх формул $\mathfrak{A}$ в А9 є тільки зчисленною. Таким чином, твердження П5 сильніше, ніж А9.

Порівнюючи між собою системи А1—А9 і П1—П5 в цілому, дійдемо висновку, що на відміну від формальної аксіоматики А1—А9 система аксіом Пеано є, по суті, змістовною, вона містить неуточнені поняття, такі, як поняття властивості, тощо.

Правила виводу в теорії формальної арифметики, яку далі позначатимемо A, ті самі, що й у численні предикатів. До них можна приєднати для скорочення ще вивідне правило індукції

$$\mathfrak{A}(0),\ \forall x_1 (\mathfrak{A}(x_1) \to \mathfrak{A}(S(x_1)) \vdash_A \forall x_1 \mathfrak{A}(x_1).$$

Воно виводиться з схеми А9 дворазовим застосуванням МР.

Наведемо кілька прикладів доведення теорем в теорії A. Зазначимо, зокрема, що аксіоми А1—А8 залишаються в силі при заміні в них індивідних змінних x_1 довільними термами t. Це обгрунтовується послідовним застосуванням правила В$\forall$, схеми S4 і правила МР.

Виведемо перш за все властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності предиката рівності (для довільних термів t_1, t_2, t_3).

Теорема 1. $t_1 = t_1$.

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$ (А1);
2. $\forall x_2 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3))$ (1, В$\forall$ — три рази);
3. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)) \to \to (t_1 + 0 = t_1 \to (t_1 + 0 = t_1 \to t_1 = t_1))$ (S4);
4. $t_1 + 0 = t_1 \to (t_1 + 0 = t_1 \to t_1 = t_1)$ (2, 3, МР);
5. $t_1 + 0 = t_1$ (із А5 за вищенаведеним зауваженням);
6. $t_1 = t_1$ (4, 5, МР два рази).

Теорема 2. $t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$ (А1);
2. $x_1 = x_3 \to (x_1 = x_2 \to x_2 = x_3)$ (1, ПП);
3. $\forall x_3 (x_1 = x_3 \to (x_1 = x_2 \to x_2 = x_3))$ (2, В$\forall$);
4. $\forall x_3 (x_1' = x_3 \to (x_1 = x_2 \to x_2 = x_3)) \to (x_1 = x_1 \to \to (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1))$ (S4);
5. $x_1 = x_1 \to (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$ (3, 4, МР);
6. $x_1 = x_1$ (теорема 1);
7. $x_1 = x_2 \to x_2 = x_1$ (5, 6, МР);
8. $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1)$ (7, В$\forall$ — два рази);
9. $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \to x_2 = x_1) \to (t_1 = t_2 \to \to t_2 = t_1)$ (S4);
10. $t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$ (8, 9, МР).

Теорема 3. $t_1 = t_2 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_3)$

1. $x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$ (А1);
2. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3)$ (1, В$\forall$ — три рази);

3. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3) \to$
$\to (t_2 = t_1 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_3))$ (S4);

4. $t_2 = t_1 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_3)$ (2, 3, MP);

5. $t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$ (теорема 2);

6. $t_1 = t_2 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_3)$ (4, 5, правило силогізму).

Теорема 4. $t_1 = t_3 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_2)$

1. $t_1 = t_2 \to (t_3 = t_2 \to t_1 = t_2)$ (теорема 3);
2. $t_3 = t_2 \to (t_1 = t_3 \to t_1 = t_2)$ (1, ПП);
3. $t_2 = t_3 \to t_3 = t_2$ (теорема 2);
4. $t_2 = t_3 \to (t_1 = t_3 \to t_1 = t_2)$ (3, 2, правило силогізму);
5. $t_1 = t_3 \to (t_2 = t_3 \to t_1 = t_2)$ (4, ПП — перестановка посилок).

Таким чином, усі основні властивості предиката рівності вивідні в формальній арифметиці з аксіом А1—А8, тобто без схеми індукції, отже, із с к і н ч е н н о ї множини аксіом.

Наведемо тепер приклад складнішого доведення.

Теорема 5. $t_1 = t_2 \to t_1 + t_3 = t_2 + t_3$.

Доведення теореми 5 проведемо, застосовуючи правило індукції до формули $\mathfrak{A}(z) = (x = y \to x + z = y + z)$ по змінній z.

1. $x = y$ (гіпотеза);
2. $x + 0 = x$ (А5);
3. $y + 0 = y$ (А5);
4. $x + 0 = x \to (x = y \to x + 0 = y)$ (теорема 3);
5. $x + 0 = y$ (4, 2, 1, MP два рази);
6. $x + 0 = y \to (y + 0 = y \to x + 0 = y + 0)$ (теорема 4);
7. $x + 0 = y + 0$ (6, 5, 3, MP — два рази),

Отже, $x = y \vdash_A x + 0 = y + 0$ (1—7, означення вивідності);

звідки

7′. $(x = y \to (x + 0 = y + 0))$ $(\mathfrak{A}(0))$ (за метатеоремою дедукції).

Далі:

8. $x = y \to x + u = y + u$ (гіпотеза);
9. $x = y$ (гіпотеза);
10. $x + u = y + u$ (8, 9, MP);
11. $x + Su = S(x + u)$ (А6);
12. $y + Su = S(y + u)$ (А6);
13. $x + u = y + u \to S(x + u) = S(y + u)$ (А4);
14. $S(x + u) = S(y + u)$ (10, 13, MP);
15. $x + Su = S(x + u) \to (S(x + u) = S(y + u) \to$ $\to x + Su = S(y + u))$ (теорема 3);
16. $x + Su = S(y + u)$ (15, 11, 14, MP — два рази);
17. $x + Su = S(y + u) \to (y + Su = S(y + u) \to$ $\to x + Su = y + Sy)$ (теорема 4);
18. $x + Su = y + Su$ (17, 14, 12, MP — два рази);

Отже, $x = y \to x + u = y + u$, $x = y \vdash_A x + Su = y + Su$ (8—18 означення вивідності);

19. $\underbrace{(x = y \to x + u = y + u)}_{\mathfrak{A}(u)} \to$ $\to \underbrace{(x = y \to x + Su = y + Su)}_{\mathfrak{A}(Su)}$ за метатеоремою дедукції;

20. $\forall z \underbrace{(x = y \to x + z = y + z)}_{\mathfrak{A}(z)}$ (7′, 19, правило індукції);

21. $\forall x \forall y \forall z (x = y \to x + z = y + z)$ (20, B$\forall$);
22. $\forall x \forall y \forall z (x = y \to x + z = y + z) \to (t_1 = t_2 \to$ $\to t_1 + t_3 = t_2 + t_3)$ (S4);
23. $t_1 = t_2 \to (t_1 + t_3 = t_2 + t_3)$ (21, 22, MP).

Послідовно доводячи теорему за теоремою, можна побудувати теорію формальної арифметики, в якій, зокрема, можна довести всі теореми елементарної арифметики (теорії чисел).

Така побудова формальної арифметики виходить за межі даного посібника. Обмежившись наведеними прикладами доведення теорем, розглянемо деякі питання метатеорії формальної арифметики.

На перший план тут ставляться питання несуперечності і повноти. Доведення несуперечності формальної арифметики привернуло до себе увагу в двадцятих роках нашого століття, коли на шляхах реалізації програми Гільберта провадились інтенсивні спроби математиків знайти таке доведення. Воно означало б законність користування всіма методами і абстракціями класичної математики. При цьому передбачалось за Гільбертом, що шукане доведення має провадитися цілком надійними — фінітними — методами.

Завдання формулювалося дуже просто: *довести невивідність у формальній арифметиці певної формули, наприклад,* $S0 = 0$.

Справді, доведення того, що $\vdash_A S0 = 0$ означало б внутрішню суперечність теорії A, оскільки формула $\urcorner (S0 = 0)$ безпосередньо слідує з аксіоми А2, а саме:

1. $\urcorner (Sx_1 = 0)$ (А2);
2. $\forall x_1 (\urcorner (Sx_1 = 0))$ (1, В$\forall$);
3. $\forall x_1 (\urcorner (Sx_1 = 0)) \rightarrow \urcorner (S0 = 0)$ ($S4$);
4. $\urcorner (S0 = 0)$ (2, 3, МР).

Разом з тим правильним є й обернене твердження: *якщо формула $S0 = 0$ недовідна в A, то теорія A — несуперечна.*

Справді, якби теорія A була суперечною, то в ній можна було б довести всяку формулу, зокрема, $S0 = 0$.

Незважаючи на простоту формулювання задачі, всі спроби розв'язати її були деякий період марними. Ситуація, яка склалася тоді, нагадувала історію доведення V постулату Евкліда. Як і тоді, спалахнула нова визначна ідея, висловлена знову Геделем, який перед тим, у 1930 р., довів свою славетну теорему повноти.

З'ясуємо евристичний підхід до ідеї Геделя. Для цього нагадаємо парадокс Епіменіда. Твердження «Те, що я кажу, є хибним» виявляється парадоксальним, воно не може бути ні істинним, ні хибним. Іншими словами, твердження, яке каже саме про себе, що воно є хибним, приводить до парадокса.

На базі формальної теорії аналогом поняття істинності є поняття вивідності. Постає питання: що буде, коли побудувати аналог парадокса Епіменіда на базі формальної теорії A, тобто побудувати замкнену формулу G, яка в інтерпретації стверджує про себе, що вона невивідна в A. Виявляється, що при цьому парадокс не виникає.

Справді, виходитимемо з припущення, що теорія A несуперечна (семантично). Сформулюємо його так:

Жодне хибне в інтерпретації твердження не є вивідним в A (*)

Припустимо, що твердження, записане формулою G, хибне. Тоді G не вивідна в A, згідно з твердженням (*). Отже, G є істинною в інтерпретації згідно з тим, що G сама про себе стверджує. Зайшли у суперечність: G не може бути хибною. Проте на відміну від парадокса Епіменіда G може бути істинною і притому невивідною в A. Справді, припустивши, що G вивідна, дістанемо, враховуючи її зміст, що G хибна в інтерпретації, а тому невивідна за (*), що суперечить припущенню. Таким чином, G невивідна в A, і парадокса немає.

Тут справа в тому, що протилежність «істинність — хибність» у парадоксі Епіменіда тепер розпадається на дві протилежності: «вивідність — невивідність» і «істинність — хибність», що й обумовлює істотну відмінність нової ситуації без парадокса.

Суть твердження G полягає в поєднанні двох істотно відмінних частин, з яких одна належить предметній мові A, а друга — та, що говорить сама про себе — метамові, метаматематиці. Щоб виразити ці обидві частини в одній теорії, використовується створений Геделем новий визначний метод — метод геделевої нумерації, який дає змогу відобразити метаматематику в арифметику. З'ясуємо ідею геделевої нумерації.

Оскільки множина всіх символів теорії першого порядку не більш ніж зчисленна, то її можна занумерувати натуральними числами. Припишемо кожному вихідному символу теорії c певне натуральне число, яке позначатимемо $g(c)$ і називатимемо геделевим номером c. При цьому різним вихідним символам відповідатимуть різні геделеві номери. Формулі теорії першого порядку $\mathfrak{A}$, яка є скінченною послідовністю вихідних символів $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, відповідає геделів номер

$$g(\mathfrak{A}) = 2^{g(c_1)} \cdot 3^{g(c_2)} \cdot 5^{g(c_3)} \ldots p_n^{g(c_n)},$$

де через p_n позначено n-е по порядку просте число. Кожній скінченній послідовності формул теорії відповідатиме певний геделів номер так, що послідовність формул $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ дістає код

$$2^{g(\mathfrak{A}_1)} \cdot 3^{g(\mathfrak{A}_2)} \ldots p_r^{g(\mathfrak{A}_r)}.$$

Відповідно до основної теореми арифметики про єдиність розкладу натурального числа на множники, що є степенями простих чисел, різні формули і різні послідовності формул дістануть відмінні між собою геделеві номери.

Утворена таким чином функція g взаємно-однозначно відображає множину символів, формул і послідовностей формул теорії першого порядку в множину натуральних чисел, зокрема, можна однозначно встановити за даним геделевим номером, якому саме об'єкту даної формальної теорії він відповідає.

Зазначимо також, що є різні конкретні способи геделевої нумерації, але при кожному з них мають місце всі властивості, зазначені вище.

Оскільки доведення формули $\mathfrak{A}$ в A є певною скінченною послідовністю формул A, кінцевий член якої дорівнює $\mathfrak{A}$, то такому доведенню відповідає певний геделів номер.

За Геделем, різні метаматематичні предикати, зокрема, невивідність в A формули, зображаються за допомогою геделевої нумерації відповідними формулами теорії A. Зрештою, завдяки такій кодифікації метаматематика відображається в арифметику натуральних чисел.

Завдяки цьому у формальній арифметиці є змога записати явно замкнену формулу G, яка в звичайній інтерпретації означає змістовно власну невивідність в A (формальний аналог парадоксального речення Епіменіда). Проте в даному разі утворюється не парадокс, а доведення існування нерозв'язного в A твердження. У цьому суть визначної теореми Геделя про неповноту.

Перша теорема Геделя (у формі Россера). *Якщо теорія A несуперечна, то в A існує нерозв'язна замкнена формула G, тобто така, що як G, так і $\neg G$, не є теоремою A.*

Слід підкреслити, що доведення цієї метатеореми, якого ми тут не наводимо, є конструктивним, тобто не тільки стверджується факт існування формули G, але і сама ця формула будується в явному вигляді, причому все доведення проводиться фінітними методами.

Таким чином, теорія A, якщо вона несуперечна, є неповна в класичному розумінні (дедуктивно неповна). Крім цього, формула G змістовно стверджує, що вона невивідна в A. Такою вона і буде при умові несуперечності A за теоремою Геделя. Ось чому при згаданій умові формула G є змістовно істинною і разом з тим невивідною в A, тобто теорія A — семантично неповна, якщо вона несуперечна.

Неповнота теорії A, про яку йдеться в теоремі Геделя, не може бути усунена приєднанням до A нових аксіом. В новій розширеній теорії A_1 тим самим методом можна утворити аналогічну формулу G_1, яка знову буде нерозв'язною і змістовно істинною. Отже, теорія A_1 залишиться дедуктивно неповною (звичайно, при умові своєї несуперечності).

Виходячи з першої теореми про неповноту, Гедель зробив принципіально важливий висновок, який становить другу теорему Геделя.

Внутрішню несуперечність теорії A, яка виступає як гіпотеза в першій теоремі Геделя, можна зобразити певною формулою в A. Справді, внутрішня несуперечність A рівнозначна невивідності в A, скажімо, формули $0 = S0$. Адже, формула $\neg(0 = S0)$ вивидна в S, згідно з аксіомою А2, а тому одноразова вивідність формули $0 = S0$ означатиме внутрішню суперечність теорії A. Крім того, невивідність в A останньої формули, як і невивідність будь-якої формули цієї теорії, тягне за собою, як відомо, внутрішню несуперечність A. Проте невивідність певної формули в A за допомогою геделевої нумерації зображається деякою формулою теорії A.

Позначимо останню формулу через C. Тоді за першою теоремою Геделя маємо: якщо C, то формула G невивідна в A. Враховуючи те, що формула G сама стверджує власну невивідність в A, з останнього твердження маємо: якщо C, то G. Гедель показав, що все проведене міркування можна повністю формалізувати в A і дістати, таким чином, теорему: $\vdash_A C \to G$. Звідси формула C невивідна в A. Справді, припустивши супротивне, дістанемо за МР$\vdash_A G$, що суперечить першій теоремі Геделя.

Так приходимо до другої теореми Геделя про неповноту, яка формулюється так:

Друга теорема Геделя. *Якщо теорія A несуперечна, то не існує доведення її несуперечності засобами самої теорії A.*

Зокрема, оскільки фінітні методи формалізуються в A, то друга теорема Геделя означає, що не існує доведення несуперечності формальної арифметики фінітними методами при умові, що остання є несуперечною. Таким чином, програма Гільберта виявилася нездійсненною.

Слід також зазначити, що теореми Геделя по неповноту зберігають силу для кожної формальної теорії, яка містить формальну арифметику.

Відкриття Геделя має велике значення, знаменуючи новий етап розвитку метаматематики.

Перш за все, було виявлено принципіальну обмеженість методу формалізації: не можна повністю виразити у формальній теорії всі поняття і принципи математики. Це саме стосується і кожної математичної теорії, яка включає арифметику натуральних чисел. Проте цим не заперечується прогресивна роль гільбертової ідеї формалізації, адже самі геделеві теореми стали можливими тільки на базі розвинених формальних систем.

З теорем Геделя слідує недостатність фінітних методів Гільберта, зокрема, для доведення несуперечної арифметики. Тут знову залишається в силі гільбертова ідея обгрунтування математики досить надійними методами. Тільки тепер виявлено, що ці методи, залишаючись досить надійними, повинні вийти за межі фінітних. На цьому шляху було досягнуто значних успіхів: доведення несуперечності формальної арифметики нефінітними методами Г. Генценом і П. С. Новіковим.

Ще кілька слів про інтерпретацію формальної арифметики. Терміни теорії A, як і кожної формальної теорії, самі по собі не мають жодного смислу. Якщо ототожнити символ «$=$» із звичайним знаком рівності, «0» — з нулем, «$+$» і «$\cdot$» — із знаками арифметичного додавання і множення відповідно, символ S з арифметичною операцією «безпосередньо слідує за», то дістанемо інтерпретацію формальної арифметики, яка називається стандартною і являє собою звичайну змістовну арифметику. Інтуїтивно очевидно, що в цій інтерпретації всі аксіоми A1—A9 переходять в істинні твердження, тобто, що змістовна арифметика є моделлю (стандартною) теорії A. Підкреслюємо, що цей факт не доводиться, його обгрунтування вимагало б посилання на інтуїтивну теорію множин, яка сама вимагає обгрунтування.

Як слідує з теорем Геделя, формальна арифметика має і нестандартну модель. Справді вищезгадана формула G істинна в стандартній інтерпретації A. Проте повинна існувати така інтерпретація A, в якій G буде хибною. У противному разі ми мали б, що формула G є логічним висновком з A1—A9 на базі числення предикатів, а тому, як слідує з теореми Геделя про повноту, A1—A9$\vdash_A G$, що суперечить теоремі про неповноту.

Таким чином, формальна арифметика має нестандартну модель, не всі її інтерпретації ізоморфні. Отже, формальна теорія A не категорична, тоді як арифметика Пеано, як відомо, категорична. Ця невідповідність обумовлена в першу чергу тим, що аксіома індукції Пеано, як зазначалося раніше, сильніша, ніж A9.

Символи і позначення

Позначення	Найменування символу
$\neg$	заперечення
$\wedge$	кон'юнкція
$\vee$	диз'юнкція
$\to$	імплікація
$\leftrightarrow$	еквіваленція
$\oplus$	заперечення еквіваленції
$\lvert\mathfrak{A}\rvert$	істинісне значення $\mathfrak{A}$
$\forall$	квантор загальності
$\exists$	квантор існування
$\equiv$	логічна еквівалентність
$\vDash$	логічне слідуваня
$\vdash$	формальна вивідність
U	універсальна множина
$\varnothing$	порожня множина
$\cup$	об'єднання множин
$\cap$	перетин множин
$\overline{A}$	доповнення множин A
$\overline{\overline{A}}$	потужність множин A
N	множина всіх натуральних чисел
Q	множина всіх раціональних чисел
R	множина всіх дійсних чисел
R^+	множина всіх додатних чисел
Z	множина всіх цілих чисел
C	множина всіх комплексних чисел
$\underset{M}{\forall}, \underset{M}{\exists}$	обмежені квантори, віднесені до множин M
$\vDash\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$-тавтологія
$\vdash\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$-теорема числення висловлень чи числення предикатів
$\vdash_T\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A}$-теорема теорії T

Список літератури

1. **Л. Борковский, Е. Слупецкий.** *Элементы математической логики и теория множеств.*— М. : Прогресс, 1965.
2. **Н. Бурбаки.** *Теория множеств.*— М. : Мир, 1965.
3. **Д. Гильберт.** *Основания геометрии.*— М. : ОГИЗ, 1948.
4. **Д. Гильберт, В. Аккерман.** *Основы теоретической логики.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1947.
5. **С. Г. Гиндикин.** *Алгебра логики в задачах.*— М. : Наука, 1972.
6. **Р. Л. Гудстейн.** *Математическая логика.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.
7. **Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин.** *Математическая логика.*— М. : Наука, 1979.
8. **И. И. Жегалкин.** *Арифметизация символической логики.*— Математ. сб., т. 35, вып. 3, 4.
9. **Ю. И. Журавлев.** *Основные понятия теории дизъюнктивных нормальных форм.*— В кн.: Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М. : Наука, 1974.
10. **Дж. Т. Калбертсон.** *Математика и логика цифровых устройств.*— М. : Просвещение, 1965.
11. **Л. А. Калужнин.** *Что такое математическая логика.*— М. : Наука, 1964.
12. **Л. А. Калужнин.** *Введение в общую алгебру.*— М. : Наука, 1973.
13. **Л. А. Калужнин, В. С. Королюк.** *Алгоритми і математичні машини.*— К. : Рад. школа, 1964.
14. **Х. Карри.** *Основания математической логики.*— М. : Мир, 1969.
15. **М. Кац, С. Улам.** *Математика и логика.*— М. : Мир, 1971.
16. **Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон.** *Введение в конечную математику.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.
17. **С. К Клини.** *Введение в метаматематику.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1957.
18. **С. К. Клини.** *Математическая логика.*— М. : Мир, 1973.
19. **А. С. Кузичев.** *Диаграммы Венна.*— М. : Наука, 1968.
20. **Р. Линдон.** *Заметки по логике.*— М. : Мир, 1968.
21. **Э. Мендельсон.** *Введение в математическую логику.*— М. : Наука, 1976.
22. **П. С. Новиков.** *Элементы математической логики.*— М. : Физматиздат, 1959.
23. **П. С. Новиков.** *Конструктивная математическая логика с точки зрения классической.*— М. : Наука, 1977.
24. **Е. Расева, Р. Сикорский.** *Математика метаматематики.*— М. : Наука. 1972.
25. **А. Робинсон.** *Введение в теорию моделей и метаматематики алгебры.*— М. : Наука, 1967.
26. **Р. Сикорский.** *Булевы алгебры.*— М. : Мир, 1969.
27. **Р. Столл.** *Множества. Логика. Аксиоматические теории.*— М. : Просвещение, 1968.
28. **Н. И. Стяжкин.** *Становление математической логики.*— М. : Наука, 1964.
29. **А. Тарский.** *Введение в логику и методологию дедуктивных наук.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.
30. **Х. Фрейденталь.** *Язык логики.*— М. : Наука, 1969.
31. **А. Френкель, И. Бар-Хиллел.** *Основания теории множеств.*— М. : Мир, 1966.
32. **Г. Цейтлін.** *Елементи теорії булевих функцій.*— К. : Техніка, 1967.
33. **А. Черч.** *Введение в математическую логику.*— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.
34. **Дж. Шенфилд.** *Математическая логика.*— М. : Наука, 1975.
35. **И. М. Яглом.** *Алгебры Буля.*— В кн.: О некоторых вопросах современной математики и кибернетики.— М. : Просвещение, 1966.
36. **С. А. Яновская.** *Методологические проблемы науки.*— М. : Мысль, 1972.

Зміст

ЯКОВ ВЛАДИМИРОВИЧ ХРОМОЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Допущено Министерством просвещения УССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

252054, Киев-54, Гоголевская, 7,
Головное издательство
издательского объединения «Выща школа»

(На украинском языке)

Редактор *Г. П. Трофімчук*
Художній редактор *Є. В. Чурій*
Обкладинка художника *К. О. Рязанова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректор *І. П. Берус*

Інформ. бланк № 7040

Здано до набору 09.09.81. Підп. до друку 06.01.83. Формат $84\times108^1/_{32}$. Папір друк. № 1 Літ. гарн. Вис. друк. 10,92 умовн. друк. арк. 11,18 умовн фарб.-відб. 11,07 обл.-вид. арк. Тираж 5000 пр. Вид. № 5233. Зам. 2—1179. Ціна 40 к.

Головне видавництво видавничого об'єднання «Вища школа»: 252054 Київ-54, вул Гоголівська 7

Надруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» в Харківській міській друкарні № 16, м. Харків-3, вул. Університетська, 16. Зам. 138.