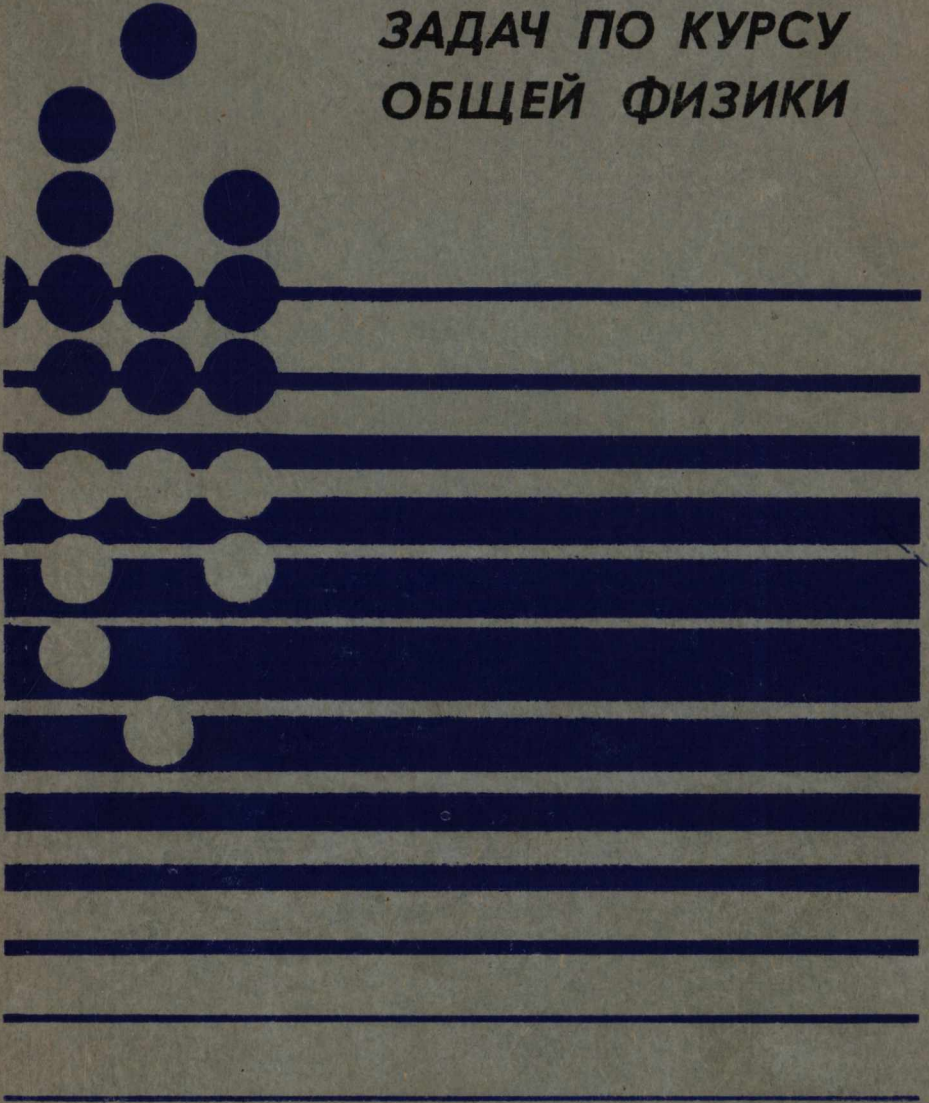


3/075.34

2-82

**Е. В. Фирганг РУКОВОДСТВО  
К РЕШЕНИЮ  
ЗАДАЧ ПО КУРСУ  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**



Е. В. ФИРГАНГ,

**РУКОВОДСТВО  
К РЕШЕНИЮ  
ЗАДАЧ ПО КУРСУ  
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

Допущено

Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших  
технических учебных заведений

ИБ ИИУС



bn43377



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1977

53 (075.34)  
Ф62  
УДК 53(076)

Рецензенты: кафедра физики Военной инженерной академии им. Ф. Э. Дзержинского (зав. кафедрой — доц., канд. физ.-мат. наук Кузьмин Д. В.) и доц., канд. физ.-мат. наук Ремизов А. Н.

Фирганг Е. В.  
Ф62 Руководство к решению задач по курсу общей физики. Учеб. пособие для втузов. М., «Высш. школа», 1977.

351 с. с ил.

В пособии даются методические указания к решению задач по основным разделам курса общей физики и приводятся примеры решения типовых задач. При этом внимание уделено проблеме поиска решения и обоснованию выбранного способа решения. В каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения рассмотренных задач.

Ф  $\frac{20401-433}{001(01)-77} 45-77$

© Издательство «Высшая школа», 1977.

БИБЛИОТЕКА  
Ивано-Франковского  
педагогического института  
ИНВ. №

Знание законов физики предполагает умение не только формулировать эти законы, но и применять их в конкретных случаях при решении задач. Однако именно решение задач вызывает наибольшие затруднения у изучающих физику.

Для решения задач оказывается, как правило, недостаточно формального знания физических законов. В некоторых случаях необходимо знание специальных методов, приемов, общих для решения определенных групп задач. В других случаях таких методов не существует. Тогда главным, что способствует успеху дела (кроме знания теории), становится способность аналитического мышления, т. е. умение рассуждать.

Этим двум аспектам обучения решению задач на семинарских занятиях не всегда уделяют должное внимание, а в существующей на русском языке литературе отсутствуют пособия, в которых систематически излагались бы методы решения задач по всему курсу общей физики.

Настоящее пособие имеет целью восполнить указанный пробел, оказав помощь прежде всего тем, кто самостоятельно изучает физику. Опыт автора на факультете повышения квалификации при Мосстанкине показал, что данное руководство может быть полезно также преподавателям вузов (особенно молодым) при подготовке к проведению семинарских занятий.

Предполагается, что, работая с данным руководством, читатель будет пользоваться учебным пособием по курсу общей физики, а также задачником, в которых он найдет нужный теоретический и справочный материалы. Поэтому в начале каждого параграфа помещен лишь краткий перечень формул и законов, связанных с решением задач, приведенных в данном параграфе. Эти формулы позволяют читателю, приступающему к работе над данным разделом, судить об объеме теоретического материала, необходимого для решения рассматриваемых задач.

Вслед за списком формул в начале каждого параграфа (а если он разбит на несколько разделов, то в начале каждого раздела) помещены методические указания к решению задач по теме данного параграфа (раздела). В методических указаниях обсуждаются особенности задач данной темы, даются общие методы, приемы их решения.

Важным элементом книги является решение задач. Приведенные примеры решения задач имеют целью: а) пояснить применение изложенных методов, б) углубить понимание физических законов, в) развить умение рассуждать. Поставленная цель определила содержание задач и способ подачи их решения.

При подборе задач автор руководствовался следующими принципами: 1. Задачи должны быть такими, чтобы при их решении основное внимание уделялось физической стороне вопроса: понять условие; отделив главное от несущественного, выявить основные физические



процессы, имеющие место в данном случае; выяснить, каким физическим законам подчиняются эти процессы; иногда из нескольких законов выбрать один, применение которого приводит кратчайшим путем к цели. 2. Более простые задачи должны предшествовать более сложным. 3. В пределах каждой темы задачи должны быть взаимосвязаны: в одних случаях решение задачи опирается на полученные ранее результаты, в других — сравнение двух задач делается для того, чтобы, несмотря на их кажущееся сходство, выявить существенное различие между ними.

Всегда имеется опасность, что, прочитав решение определенной задачи, студент запомнит его, но не сумеет решить другую задачу по той же теме. Ведь каждая задача (если она не сводится к подстановке чисел в известную формулу или не является «чистой» иллюстрацией одного из изложенных методов) требует определенного навыка аналитического мышления, а порой — догадки, изобретательности. Учитывая это, автор старался не просто давать решение задачи, но и по возможности, используя метод анализа, показать, как можно прийти к этому решению.

Большинство задач, приведенных в данном пособии, взято из задачников [10], [12], [14], [15]. Многие задачи переработаны. Часть задач составлена автором руководства.

Из-за тесной связи между различными частями курса физики распределение материала по главам и параграфам в известной мере условно. Например, задачи на совместное применение законов сохранения импульса и энергии рассмотрены не только в § 3, но и в § 11, 27, 31; задачи по динамике специальной теории относительности даны в § 18, 31.

В Приложении помещены задачи и приведена таблица номеров задач из задачников [10] и [15] для самостоятельного решения, а также даны указания к решению наиболее трудных задач. Чтобы контролировать усвоение материала, каждую из этих задач рекомендуется решать непосредственно после разбора соответствующей задачи данного руководства, указанной в первом столбце таблицы.

Автор выражает благодарность доцентам Д. В. Кузьмину и А. Н. Ремизову, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

*Автор*

# Глава 1

## МЕХАНИКА

### § 1. КИНЕМАТИКА

#### Основные формулы

Положение точки в пространстве определяется радиусом-вектором  $r$ , т. е. вектором, проведенным из начала координат в данную точку.

Перемещение ( $\Delta r$ ) точки есть вектор, проведенный из ее начального положения в конечное и равный приращению радиуса вектора данной точки.

Скорость есть производная от радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (1.1)$$

Ускорение точки есть производная от скорости по времени или вторая производная от радиуса-вектора движущейся точки по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (1.2)$$

В равномерном прямолинейном движении ( $v = \text{const}$ ) выполняется соотношение

$$\Delta r = v \Delta t. \quad (1.3)$$

Формулы движения с постоянным ускорением ( $a = \text{const}$ ):

$$v = v_0 + at, \quad (1.4)$$

$$\Delta r = v_0 t + at^2/2, \quad (1.5)$$

где  $v_0$  — начальная скорость.

В криволинейном движении точки полное ускорение  $a$  есть векторная сумма тангенциального  $a_t$  и нормального  $a_n$  ускорений. Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}; \quad (1.6)$$

при этом

$$a_t = dv/dt, \quad (1.7)$$

$$a_n = v^2/R, \quad (1.8)$$

где  $R$  — радиус кривизны траектории в данной точке.

Среднее значение модуля скорости точки в промежутке времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  равно

$$\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t, \quad (1.9)$$

где  $\Delta s$  — путь, пройденный точкой за промежуток времени  $\Delta t$ \*

Угловая скорость тела есть производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.10)$$

\* Величину  $\langle v \rangle$  часто называют средней скоростью на пути  $\Delta s$  за промежуток времени  $\Delta t$ .

Угловое ускорение тела есть производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.11)$$

В равномерном вращательном движении ( $\omega = \text{const}$ ) выполняется соотношение

$$\varphi = \omega t. \quad (1.12)$$

Формулы равнопеременного вращательного движения тела вокруг неподвижной оси ( $\varepsilon = \text{const}$ ):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.13)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2. \quad (1.14)$$

Связь угловых величин с линейными:

$$s = rR, v = \omega R, a^t = \varepsilon R, a_n = \omega^2 R, \quad (1.15)$$

где  $s$  — путь, пройденный точкой вращающегося тела (длина дуги),  $R$  — расстояние точки от оси вращения (радиус дуги)

Угловая скорость тела, вращающегося равномерно, связана с числом оборотов в секунду  $n$  и периодом вращения  $T$  соотношением

$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T \quad (1.16)$$

## А. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СЛОЖЕНИЕ СКОРОСТЕЙ

### Методические указания

1. Для решения задачи по кинематике надо знать закон (уравнение) движения точки, определяющий ее положение в любой момент времени. В случае равномерного прямолинейного движения такой закон выражается формулой (1.3). Так как при этом модуль вектора перемещения  $\Delta r$  точки равен пути  $s$ , то формуле (1.3) соответствует скалярное уравнение  $s = vt$ .

2. Часто в условии задают равномерное прямолинейное движение не одного, а нескольких (обычно двух) тел по отношению к системе отсчета, связанной с Землей, или иной системе отсчета. В таких случаях решение задачи упрощается, если рассматривать все движения в системе отсчета, связанной с одним из движущихся тел (см. задачу № 1-2). Иногда такой выбор системы отсчета необходим (см. задачу № 1-1). При этом полезно иметь в виду, что если тело  $A$  движется относительно тела  $B$  со скоростью  $v_1$ , то, как это следует из относительности движения, тело  $B$  движется относительно тела  $A$  со скоростью  $v_2$ , где

$$v_2 = -v_1. \quad (1.17)$$

3. Если материальная точка участвует в двух движениях, то ее перемещение  $\Delta r$  равно векторной сумме перемещений, полученных в каждом движении, независимо от того, последовательно или одновременно происходили эти движения:

$$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2.$$

В последнем случае, разделив обе части уравнения на общий промежуток времени  $\Delta t$  и переходя к пределу, получим согласно (1.1)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (1.18)$$

т. е. скорость точки в сложном движении равна векторной сумме ее скоростей в отдельных движениях.

### Решение задач

1-1. Частица  $A$ , двигаясь со скоростью  $\mathbf{v}$ , ударяется о массивную стенку  $B$ , которая движется в том же направлении со скоростью  $\mathbf{u}$  (рис. 1-1). Определить скорость частицы после удара, если известно, что при ударе о стенку  $B$ , когда она неподвижна, частица отскакивает, сохраняя скорость по модулю и изменяя ее направление на противоположное.

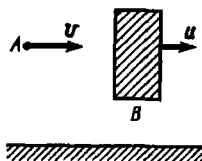


Рис. 1-1

**Решение.** Условие задачи предполагает скорости движения тел  $A$  и  $B$  заданными в некоторой системе отсчета, например, связанной с Землей. Но при этом дан закон соударения частицы с *неподвижной* стенкой. Поэтому, для того чтобы решить задачу, необходимо рассмотреть движение частицы в системе отсчета, связанной со стенкой  $B$ . В этой системе отсчета стенка будет неподвижной, а движение частицы — сложным, состоящим из двух: относительно Земли со скоростью  $\mathbf{v}$  и, как это следует из соотношения (1.17), вместе с Землей относительно стенки со скоростью  $-\mathbf{u}$ . Поэтому в соответствии с формулой (1.18) скорость частицы относительно стенки равна

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Согласно условию частица отскочит от стенки со скоростьюю

$$-(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Теперь вернемся к системе отсчета, связанной с Землей, так как в этой системе надо найти скорость частицы после удара. Движение частицы после удара о стенку и в этом случае состоит из двух: относительно стенки со скоростью  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  и вместе со стенкой относительно Земли со скоростью  $\mathbf{u}$ . Следовательно, искомая скорость

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Отсюда видно, что направление вектора  $\mathbf{v}'$  зависит от соотношения модулей векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ : 1) если  $v < 2u$ , то направление скорости частицы после удара сохранится; 2) если  $v > 2u$ , то изменится на противоположное; 3) если  $v = 2u$ , то она остановится.

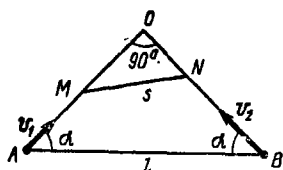


Рис. 1-2

1-2. Из двух пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми  $l$ , одновременно начинают двигаться два корабля со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Векторы скоростей образуют с отрезком  $AB$  одинаковые углы  $\alpha = 45^\circ$  (рис. 1-2). Считая движение кораблей равномерным и прямолинейным, определить наименьшее расстояние между ними.

**Решение.** Приведем два способа решения задачи, отличающиеся выбором системы отсчета.

1. Пусть движение кораблей происходит в той системе отсчета (связанной с Землей), в которой заданы их скорости. Сначала расстояние между кораблями будет уменьшаться, затем (если они не столкнутся) — увеличиваться. Чтобы найти наименьшее расстояние  $s_{\min}$ , применим общий метод исследования функции на экстремум. Для этого рассмотрим положение кораблей спустя произвольный промежуток времени  $t$  после начала движения и найдем расстояние между ними как функцию времени. Из чертежа следует:

$$s = \sqrt{(OM)^2 + (ON)^2} = \sqrt{(OA - v_1 t)^2 + (OB - v_2 t)^2}.$$

Обозначив  $a = OA = OB$ , получим

$$s = \sqrt{2a^2 - 2a(v_1 + v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}. \quad (1)$$

Чтобы найти минимум функции  $s = s(t)$ , продифференцируем ее по времени и приравняем нулю производную:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-2a(v_1 + v_2) + 2t(v_1^2 + v_2^2)}{2\sqrt{2a^2 - 2a(v_1 + v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}} = 0.$$

Отсюда время, соответствующее наименьшему расстоянию  $s_{\min}$ , равно

$$t_{\min} = a(v_1 + v_2)/(v_1^2 + v_2^2).$$

Подставив это значение времени в (1), получим ответ:

$$s_{\min} = \frac{a|v_2 - v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{l|v_2 - v_1|}{\sqrt{2(v_1^2 + v_2^2)}}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует: 1) если  $v_1 = v_2$ , то  $s_{\min} = 0$ , т. е., двигаясь с одинаковыми скоростями, корабли встретятся в точке  $O$  (рис. 1-2); 2) если  $v_1 = 0$  или  $v_2 = 0$  (движется только один корабль), то  $s_{\min} = a$ , т. е.  $s = s_{\min}$ , когда корабль окажется в точке  $O$ .

2. Воспользуемся системой отсчета, связанной с одним из двух кораблей, например с первым. В этой системе отсчета первый корабль будет неподвижен, а движение второго корабля будет сложным: со скоростью  $v_2$  относительно Земли и со скоростью  $v_1' = -v_1$  вместе с Землей относительно первого корабля (рис. 1-3). Скорость результирующего движения выразится вектором  $v$ , причем

$$v = \sqrt{v_1'^2 + v_2^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Минимальным расстоянием между кораблями будет длина перпендикуляра  $AC$ , опущенного на направление вектора  $v$ . Расчет, основанный на подобии прямоугольных треугольников, приводит к ответу.

$$s_{\text{мин}} = AC = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{2(v_1^2 + v_2^2)}}, \quad (3)$$

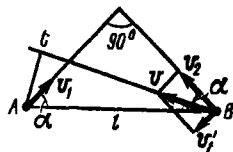


Рис 1-3

что совпадает с ответом (2), так как в (3)  $v_2 > v_1$ .

Как видим, второй способ решения, в котором система отсчета при-  
зывается к одному из движущихся тел, значительно проще первого.

## Б. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

### Методические указания

1. Среди задач на неравномерное (переменное) движение большую группу составляют задачи на движение точки с постоянным ускорением  $a = \text{const}$ . Если при этом векторы ускорения  $a$  и начальной скорости  $v_0$  лежат на одной прямой, то движение будет прямолинейным. В противном случае точка движется по кривой (параболе) в плоскости, содержащей эти векторы. Движение с постоянным ускорением  $a$  происходит, в частности, под действием силы тяжести: когда сопротивление воздуха пренебрежимо мало, все тела падают вблизи поверхности Земли с одинаковым ускорением, направленным вертикально вниз и равным  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

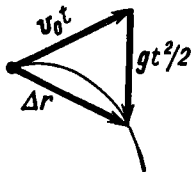


Рис. 1-4

3. Как в прямолинейном, так и в криволинейном движениях с постоянным ускорением скорость  $v$  точки и ее перемещение  $\Delta r$  определяются формулами (1.4), (1.5). На рис. 1-4 вектор перемещения  $\Delta r$  частицы, брошенной под углом к горизонту, изображен в соответствии с (1.5) в виде суммы векторов  $v_0t$  и  $gt^2/2$ . Отсюда ясен способ *графического* решения задачи на определение скорости  $v$  частицы и ее перемещения  $\Delta r$  в любой момент времени, если известны начальная скорость  $v_0$  и ускорение  $a$ .

Однако основным методом решения задач по кинематике (как и по остальным разделам курса физики) является *аналитический* (численный) метод, при котором от векторной формы записи уравнений переходят к скалярной. Для этого выберем прямоугольную систему координат с осями  $Ox$ ,  $Oy$ , лежащими в плоскости, в которой движется частица. Проектируя все векторы, входящие в уравнения (1.4), (1.5) на оси координат, и учитывая, что проекция суммы векторов равна сумме их проекций, получим четыре скалярных уравнения соответственно для осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ \Delta x &= v_{0x} t + a_x t^2 / 2; \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

$$\left. \begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a_y t, \\ \Delta y &= v_{0y} t + a_y t^2 / 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Здесь  $\Delta x \approx x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$  — проекции вектора перемещения  $\Delta \mathbf{r}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$ , равные приращениям соответствующих координат;  $v_x, v_y, v_{0x}, v_{0y}, a_x, a_y$  — проекции векторов  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}$  на те же оси. Теперь решение задачи сводится к решению системы уравнений. Например, если неизвестными являются векторы  $\mathbf{v}, \Delta \mathbf{r}$ , то, найдя из уравнений их проекции, легко затем вычислить модули и направления самих векторов.

Выбор осей определяется условием конкретной задачи. При этом надо стремиться к тому, чтобы часть проекций оказалась равной нулю и уравнения упростились бы. Обычно начало координат совмещают с положением точки в начальный момент времени, т. е. полагают  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , а одну из осей, например  $Oy$ , направляют вдоль вектора  $\mathbf{a}$ . Тогда  $a_x = 0$ ,  $a_y = a$ . Если при этом векторы  $\mathbf{v}_0, \mathbf{a}$  лежат на одной прямой (оси  $Oy$ ), то  $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0y} = v_0$ ,  $v_y = v$  и вместо (1.19), (1.20) получим два уравнения прямолинейного равнопеременного движения:

$$v = v_0 + at, \quad (1.21)$$

$$y = v_0 t + at^2/2. \quad (1.22)$$

Хотя величины  $v, v_0, a, y$ , входящие в (1.21), (1.22), называют обычно скоростью, ускорением и перемещением, они являются, по существу, проекциями соответствующих векторов на ось  $Oy$ , т. е. величинами алгебраическими. Эти проекции равны по модулю самим векторам.

Знаки всех проекций, входящих в уравнения (1.19)—(1.22), определяются правилом: если вектор образует с направлением оси проекций острый угол, его проекция положительна, если этот угол тупой — проекция отрицательна. Если направление искомого вектора заранее неизвестно, то поступают так. Предполагают некоторое направление этого вектора и записывают в уравнениях его проекции со знаками, соответствующими выбранному направлению. Если в ответе получен положительный знак, то составляющая вектора вдоль соответствующей оси направлена так, как было предположено, отрицательный знак говорит об обратном (см. задачи № 1-3, 1-4).

3. Формулы (1.21), (1.22) применимы также к *криволинейному равнопеременному* движению, т. е. с постоянным по модулю тангенциальным ускорением. В этом случае  $y = y(t)$  — *криволинейная координата* движущейся точки (длина дуги), отсчитываемая в одну сторону от начальной точки положительной, а в другую — отрицательной;  $v = dy/dt$  — скорость,  $a = dv/dt$  — тангенциальное ускорение.

4. В общем случае путь  $s$ , отсчитываемый вдоль траектории движущейся точки, больше модуля вектора перемещения  $\Delta \mathbf{r}$ ; лишь для прямолинейного движения, происходящего все время в одном направлении,  $s = |\Delta \mathbf{r}|$ . Следовательно, координата  $y$  в формуле (1.22), равная по модулю вектору перемещения, выражает пройденный путь также лишь в том случае, когда точка движется по прямой все время в одном направлении. Криволинейная координата  $y$  (см. п. 3) также выражает пройденный путь только тогда, когда точка движется вдоль кривой в одном направлении. Способ вычисления пути в том случае, когда точка, двигаясь по траектории, изменяет направление своего движения, рассмотрен в задаче № 1-5.



5. В случае *равнопеременного* движения точки (прямолинейного или криволинейного), происходящего все время в *одном направлении*, средняя скорость за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  вычисляется по формуле

$$\langle v \rangle = (v_1 + v_2)/2, \quad (1.23)$$

где  $v_1, v_2$  — значения скорости в моменты  $t_1$  и  $t_2$ .

Действительно, в этом случае на графике скорости пройденный путь численно равен площади трапеции (трапеции  $abcd$  на рис. 1-5), поэтому

$$\Delta s = (v_1 + v_2) \Delta t / 2.$$

Подставив это значение  $\Delta s$  в (1.9), получим формулу (1.23).

Существенно, что в остальных случаях переменного движения формула (1.23) может привести к ошибке. Тогда для вычисления средней скорости применяют общую формулу (1.9).

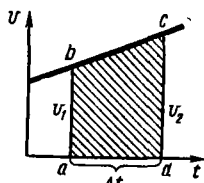


Рис. 1-5

### Решение задач

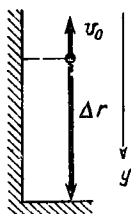


Рис. 1-6

1-3. Мячик, брошенный с балкона в вертикальном направлении, через  $t = 3,0$  упал на Землю. Определить начальную скорость мячика, если высота балкона над Землей равна 14,1 м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение.** В условии не указано направление, в котором брошен мяч, — вертикально вниз или вверх. Однако эта неопределенность не является существенной для решения задачи. В любом случае движение мяча будет равнопеременным с ускорением  $a = g$ , а высота балкона над Землей, данная в условии, полностью определяет вектор перемещения  $\Delta r$  мяча (рис. 1-6). Поэтому для решения задачи достаточно воспользоваться формулой (1.22), выражающей модуль этого перемещения.

Предположим, что мяч брошен со скоростью  $v_0$  вертикально вверх. Направим ось проекций  $y$  вертикально вниз. Соблюдая правило знаков, получим по (1.22)

$$y = -v_0 t + g t^2 / 2.$$

Решив уравнение относительно  $v_0$ , найдем

$$v_0 = \frac{g t^2 - 2y}{2t} = \frac{9,8 \cdot 9,0 - 2 \cdot 14,1}{2 \cdot 3,0} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 10 \text{ м/с}.$$

Положительный знак величины  $v_0$  показывает, что начальная скорость мяча направлена именно так, как мы предположили, т. е. вертикально вверх.

**З а м е ч а н и я :** 1. Легко убедиться в том, что выбор положительного направления оси отсчета произволен. Так, направив ось  $y$  вверх, получим уравнение

$$-y = v_0 t - gt^2/2,$$

которое, очевидно, равносильно предыдущему.

2. Если предположить, что начальная скорость  $v_0$  направлена вертикально вниз, т. е. по оси  $y$ , то будем иметь

$$y = v_0 t + gt^2/2.$$

Решив это уравнение, найдем  $v_0 = -10$  м/с. Отрицательный знак показывает, что на самом деле начальная скорость мяча направлена не так, как мы предположили, а вертикально вверх, т. е. пришли к приемному результату.

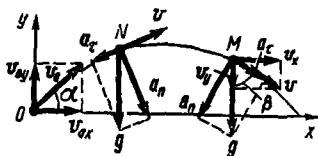


Рис 1-7

1-4. Тело брошено со скоростью  $v_0 = 20,0$  м/с под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость тела, а также его нормальное и тангенциальное ускорения через  $t = 1,50$  с после начала движения. На какое расстояние  $l$  переместится за это время тело по горизонтали и на какой окажется высоте  $h$ ?

**Р е ш е н и е.** Так как тело движется с постоянным ускорением  $a = g$ , его скорость и перемещение определяются векторными уравнениями (1.4), (1.5) или соответствующими им скалярными уравнениями (1.19), (1.20). Мы не знаем, в какой точке траектории будет тело через 1,50 с после начала движения, — на восходящей или нисходящей ветвях параболы. Предположим, что оно находится в точке  $M$  (рис. 1-7).

Введем координатные оси, направленные по горизонтали ( $Ox$ ) и вертикали ( $Oy$ ) и совместим начало координат с положением тела в начальный момент времени. Тогда, подставив в уравнения (1.19), (1.20) значения  $a_x = 0$ ,  $a_y = -g$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ;  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ ,  $\Delta x = x$ ,  $\Delta y = y$  и учитывая, что проекция скорости тела в точке  $M$  на ось  $Oy$  направлена вниз, получим:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (2)$$

$$-v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (3)$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2. \quad (4)$$

Искомые величины  $l$ ,  $h$  равны соответственно координатам  $x$ ,  $y$  точки  $M$  в момент  $t \doteq 1,50$  с:

$$l = x = v_0 \cos \alpha \cdot t = 20,0 \cdot 0,87 \cdot 1,50 \text{ м} = 26 \text{ м}.$$

$$h = y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2 = \left[ 20,0 \cdot 0,50 \cdot 1,50 - \frac{9,8 \cdot (1,50)^2}{2} \right] \text{ м} = 4,0 \text{ м}.$$

Скорость  $v$  в точке  $M$  найдем через ее проекции, определяемые по формулам (1) и (3):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2}. \quad (6)$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$v = \sqrt{20,0^2 \cdot 0,87^2 + (9,8 \cdot 1,50 - 20,0 \cdot 0,50)^2} \text{ м/с} = 17 \text{ м/с}.$$

Для определения нормального и тангенциального ускорений учтем, что полное ускорение тела, движущегося в поле земного тяготения, есть не что иное как ускорение  $g$  силы тяжести. Разложив вектор  $g$  на составляющие по касательному и нормальному направлениям к траектории в точке  $M$ , получим (рис. 1-7):

$$a_n = g \sin \beta = g (v_x/v),$$

$$a_\tau = g \cos \beta = g (v_y/v),$$

где  $\beta$  — угол между вертикалью и касательной к траектории в точке  $M$ . Подставим вместо величин  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v$  их значения из формул (1), (3), (5):

$$a_n = \frac{gv_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2}}, \quad (6)$$

$$a_\tau = \frac{g(gt - v_0 \sin \alpha)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2}}. \quad (7)$$

Вычисления по формулам (6) и (7) дают:

$$a_n = 9,5 \text{ м/с}^2; a_\tau = 2,6 \text{ м/с}^2.$$

Положительное значение величины  $a_\tau$  подтверждает правильность нашего предположения относительно места тела на траектории. Отрицательное значение  $a_\tau$  свидетельствовало бы, что скорость тела убывает и что, следовательно, оно находится на восходящей ветви параболы.

З а м е ч а н и я: 1. Предположим, что тело находится в данный момент в точке  $N$  (рис. 1-7), тогда

$$v_y \doteq v_0 \sin \alpha - gt, \quad (8)$$

$$a_\tau = \frac{g(v_0 \sin \alpha - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}} = -2,6 \text{ м/с}^2.$$

Однако этот результат совпадает с полученным ранее. Дело в том, что в положении  $N$  ускорение  $a_\tau$  направлено против скорости  $v$ . Поэтому его отрицательное значение, вычисленное для  $t = 1,50$  с, свидетельствует

о том, что фактически в этот момент ускорение  $a_\tau$  имеет направление, противоположное тому, которое мы предположили, т. е. в сторону скорости  $v$ . Но это значит, что скорость растет, следовательно, тело движется по нисходящей ветви параболы. Таким образом, убеждаемся, что, приступая к решению задачи, можно произвольно задавать положение тела на траектории.

2. Величину  $a_\tau$  можно найти другим путем, учитывая, что она, согласно формуле (1.7), равна производной от модуля скорости по времени. Подставив в (1.7) вместо скорости ее значение по (5) и выполнив дифференцирование, получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g(gt - v_0 \sin \alpha)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (gt - v_0 \sin \alpha)^2}}$$

независимо от того, будем ли подставлять значение  $v_y$  по (3) или по (8). При таком методе нахождения  $a_\tau$  неравенство  $(dv/dt) > 0$  всегда будет означать возрастание скорости и, значит, движение тела по нисходящей ветви параболы. Наоборот, неравенство  $(dv/dt) < 0$  будет означать убывание скорости и, следовательно, движение тела по восходящей ветви параболы.

1-5. Точка движется по кривой согласно уравнению  $y = 6t - t^3/8$  (длина — в метрах, время — в секундах). Найти среднюю скорость движения точки в промежутке времени от  $t_1 = 2,0$  с до  $t_2 = 6,0$  с.

**Решение.** Так как средняя скорость определяется формулой (1.9), то задача сводится к вычислению пути  $\Delta s$ , пройденного точкой за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ . В условии задачи  $y$  — криволинейная координата движущейся точки (см. стр. 10).

Если бы точка двигалась по кривой в течение всего промежутка времени  $\Delta t$  в одном направлении, то имело бы место очевидное равенство  $\Delta s = |\Delta y|$ , где  $\Delta y = y_2 - y_1$  — приращение координаты  $y$  за  $\Delta t$ . В противном случае  $\Delta s > |\Delta y|$ . Действительно, если, например, координата  $y$  увеличивалась, то после изменения направления движения она начнет уменьшаться, в то время как путь, пройденный телом, продолжает расти. Тогда для нахождения пути  $\Delta s$  надо разбить промежуток времени  $\Delta t$  на такие  $n$  промежутков  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ , чтобы в течение каждого из них точка двигалась в одном направлении. Вычислив изменение координаты  $\Delta y_i$ , соответствующее каждому из этих промежутков  $\Delta t_i$ , определим путь  $\Delta s$  по формуле

$$\Delta s = \sum_{i=1}^{i=n} |\Delta y_i|. \quad (1)$$

Исследуем данную функцию  $y = y(t)$ . Учтем, что в моменты изменения направления движения точки по траектории скорость обращается в нуль. Поэтому, предположив, что такие моменты  $t'_i$  существуют, найдем их из соотношения

$$v = \frac{dy}{dt} = 6 - \frac{3t^2}{8} = 0.$$

Отсюда  $t'_{1,2} = \pm 4$  с. Значит, в течение промежутка  $t_2 - t_1$  действительно имеется один момент времени  $t' = 4,0$  с, когда направление движения точки изменяется. Обозначив ее координаты в моменты  $t_1, t', t_2$  соответственно через  $y_1, y', y_2$ , получим по формуле (1)

$$\Delta s = |y' - y_1| + |y_2 - y'|. \quad (2)$$

Из заданного уравнения  $y = y(t)$  находим:  $y_1 = 11$  м,  $y' = 16$  м,  $y_2 = 9,0$  м. Теперь по формулам (2) и (1.9) получим ответ:

$$\Delta s = (|16 - 11| + |9,0 - 16|) \text{ м} = 12 \text{ м}; \quad \langle v \rangle = \frac{12}{4,0} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3,0 \text{ м/с}.$$

## В. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Методические указания

1. Поскольку угловое перемещение  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  связаны между собой так же, как и соответствующие им линейные величины  $\Delta r, v, a$ , методы решения задач на вращательное движение твердого тела во многом совпадают с теми, что были рассмотрены для движения точки. Это относится прежде всего к задачам на равнопеременное вращательное движение тела вокруг неподвижной оси, которое описывается формулами (1.13), (1.14), аналогичными формулам равнопеременного движения точки (1.21), (1.22).

В формулах (1.13), (1.14) величины  $\varphi, \omega_0, \omega, \varepsilon$  — алгебраические. Знак  $\varphi$  определяется направлением поворота тела за время  $t$ , а знаки  $\omega, \omega_0$  — направлением вращения тела в соответствующие моменты времени. Величины  $\omega$  и  $\varepsilon$  имеют одинаковые знаки при ускоренном вращении и противоположные — при замедленном. Приступая к решению задачи, можно любое из двух направлений вращения — по часовой стрелке или против — принять за положительное.

2. Если тело одновременно участвует в двух вращательных движениях с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  относительно двух пересекающихся осей, то результирующее движение будет также вращательным с угловой скоростью, равной  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . Напомним, что направления вектора угловой скорости и вращения тела связаны правилом правого винта.

### Решение задач

1-6. Маховик вращается равноускоренно. Найти угол  $\alpha$ , который составляет вектор полного ускорения  $a$  любой точки маховика с радиусом в тот момент, когда маховик совершит первые  $N = 2,0$  оборота.

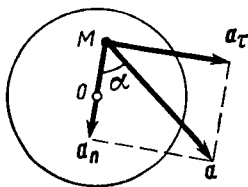


Рис. 1-8

**Решение.** Разложив вектор  $\mathbf{a}$  точки  $M$  на тангенциальное  $\mathbf{a}_\tau$  и нормальное  $\mathbf{a}_n$  ускорения, видим (рис. 1-8), что искомый угол определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = a_\tau / a_n.$$

Поскольку в условии дано лишь число оборотов, перейдем к угловым величинам, применив формулы (1.15). Тогда получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon r}{\omega^2 r} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (1)$$

Так как маховик вращается равноускоренно, найдем связь между величинами  $\varepsilon$  и  $\omega$  с помощью формул равнопеременного вращения (1.13), (1.14), исключив из них время:  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon t$ . Поскольку  $\omega_0 = 0$ , а  $\varphi = 2\pi N$ , то

$$\omega^2 = 2\varepsilon \cdot 2\pi N = 4\pi N\varepsilon. \quad (2)$$

Подставив значение  $\omega^2$  из (2) в (1), получим

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/(4\pi N) = 0,040; \quad \alpha = 17'.$$

**З а м е ч а н и е.** Из ответа видно, что угол, образуемый вектором  $\mathbf{a}$  с радиусом, одинаков для всех точек тела и целиком определяется углом поворота  $\varphi = 2\pi N$ , т. е. при заданном угле поворота не зависит от промежутка времени, в течение которого произошел этот поворот. При этом в начальный момент времени  $N=0$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ,  $\alpha = \pi/2$ , т. е. вектор  $\mathbf{a}$  направлен по касательной к траектории точки  $M$ . Наоборот, при возрастании  $N$  угол  $\alpha$  убывает (стремясь к нулю при  $N \rightarrow \infty$ ).

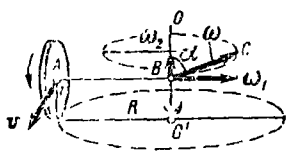


Рис. 1-9

1-7. При движении автомобиля его колесо радиуса  $r = 0,75$  м катится по окружности радиуса  $R = 6,00$  м в горизонтальной плоскости. При этом центр колеса движется с постоянной скоростью  $v = 1,50$  м/с. Определить: 1) угловую скорость и угловое ускорение колеса; 2) угол, образуемый вектором  $\boldsymbol{\omega}$  с вертикалью.

**Решение.** Качение колеса по окружности представим как сумму двух вращательных движений: 1) с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг горизонтальной оси  $AB$  (рис. 1-9) и 2) с угловой скоростью  $\omega_2$  вместе с осью  $AB$  вокруг вертикальной оси  $OO'$ . Направление векторов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  на рисунке соответствует правилу правого винта. Результирующий вектор угловой скорости по модулю равен

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (1)$$

Величины  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  найдем по второй из формул (1.15). Предварительно определим линейную скорость наружных точек колеса в его вращении вокруг оси  $AB$ . Для этого все движения рассмотрим в системе отсчета, связанной с автомобилем. Тогда колесо будет вращаться вокруг неподвижной оси  $AB$ , а точки дороги, соприкасающиеся с ко-

лесом, будут в силу относительности движения иметь скорость  $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ . Так как между колесом и дорогой нет скольжения, то его наружные точки также будут иметь скорость  $\mathbf{v}'$ , равную по модулю  $v$ . Таким образом, из (1) и (1.15) получим

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \left(\frac{v}{R}\right)^2} = \frac{v}{r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}}.$$

Как видно из чертежа, вектор  $\omega$  образует с вертикалью угол

$$\alpha = \arctg(\omega_1/\omega_2) = \arctg(R/r) = 83^\circ.$$

Чтобы найти угловое ускорение колеса, учтем, что оно согласно определяющей его формуле (1.11), равно скорости изменения вектора  $\omega$ . Хотя при качении колеса модуль вектора  $\omega$  не изменяется, сам вектор изменяется: он поворачивается около оси  $OO'$ . Так как его начало (точка  $B$  на рис. 1-9) неподвижно, то скорость изменения  $\omega$ , т. е. величина  $\epsilon$ , равна скорости перемещения конца вектора  $\omega$  — точки  $C$ . Точка  $C$  опишет окружность радиуса, численно равного  $\omega_1$ , за время, равное периоду  $T_2$  вращения колеса вокруг оси  $OO'$ . Поэтому с учетом (1.16) получим

$$\epsilon = \frac{2\pi\omega_1}{T_2} = \omega_2 \omega_1 = \frac{v^2}{rR} = 0,50 \text{ рад/с}^2.$$

## § 2. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

### Основные формулы

Второй закон Ньютона для материальной точки постоянной массы

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.1)$$

где  $\Sigma \mathbf{F}$  — равнодействующая всех сил, приложенных к телу,  $m$  и  $\mathbf{a}$  — его масса и ускорение.

Закон трения скольжения: сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления между поверхностями трущихся тел, т. е.

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.2)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств поверхностей.

В неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно с ускорением  $\mathbf{a}_0$  относительно инерциальной системы, второй закон Ньютона имеет вид

$$\Sigma \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}} = m\mathbf{a}, \quad (2.3)$$

где  $\Sigma \mathbf{F}$  — сумма всех сил, действующих на данное тело со стороны других тел,  $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0$  — сила инерции,  $\mathbf{a}$  — ускорение тела в неинерциальной системе отсчета.

### А. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И УПРУГИХ СИЛ

#### Методические указания

1. Важно помнить, что второй закон Ньютона, выражаемый уравнением (2.1), справедлив только в инерциальных системах отсчета. В подавляющем большинстве задач, в которых рассматривают дви-



жение тел относительно поверхности Земли, систему отсчета, связанную с Землей, можно считать практически инерциальной. Тогда следует считать инерциальной и всякую другую систему отсчета, которая движется поступательно и без ускорения относительно Земли.

2. Сила тяжести, согласно ее определению (см., например, [4]), равна  $mg$ , где  $m$  — масса тела,  $g$  — ускорение свободного падения в системе отсчета, связанной с Землей. Вследствие суточного вращения Земли сила тяжести немного отличается от силы, с которой тело притягивается к Земле. Однако при решении задач этим различием обычно пренебрегают, полагая систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной.

3. Во многих задачах динамики можно пренебречь силами трения, возникающими при движении тел, и считать тогда, что тела находятся лишь под действием силы тяжести и упругих сил реакции связей (давлений опор, натяжений нитей и т. д.). Здесь, как и в остальных разделах § 2, ограничимся лишь теми случаями, когда размеры тел оказываются несущественными для решения задачи, т. е. будем рассматривать тела как материальные точки.

4. Для решения задач динамики составляется уравнение движения материальной точки, выражающее второй закон Ньютона (2.1). При этом рекомендуется следующий порядок действий:

а) сделать чертеж и на нем изобразить все силы, действующие на данное тело.

Выражение «на тело действует сила» всегда означает, что данное тело взаимодействует с другим телом, в результате чего приобретает ускорение. Следовательно, к данному телу всегда приложено столько сил, сколько имеется других тел, с которыми оно взаимодействует.

Чтобы правильно определить направление сил, действующих на тело, надо помнить, что сила тяжести направлена вниз по линии отвеса, сила реакции опоры при отсутствии трения — по нормали к соприкасающимся поверхностям в точке их касания в сторону тела, сила натяжения нити — вдоль нити в сторону точки подвеса;

б) записать второй закон Ньютона в векторной форме (2.1),

в) если силы действуют не по одной прямой, то выбирают две взаимно перпендикулярные оси (два направления)  $x$  и  $y$ , лежащие в плоскости действия сил\*. Спроектировав все векторы, входящие в уравнение (2.1), на эти оси, записывают второй закон в виде двух скалярных уравнений:

$$\Sigma F_x = ma_x, \quad \Sigma F_y = ma_y. \quad (1)$$

В случае прямолинейного движения одну из осей ( $x$ ) направляют вдоль ускорения  $\mathbf{a}$ , а другую ( $y$ ) — перпендикулярно вектору  $\mathbf{a}$ . Тогда  $a_x = a$ ,  $a_y = 0$  и уравнения (1) упрощаются:

$$\Sigma F_x = ma, \quad \Sigma F_y = 0. \quad (2)$$

В более общем случае криволинейного движения одну ось направляют вдоль тангенциального ускорения  $\mathbf{a}$  (т. е. по касательной к кривой), другую — вдоль нормального ускорения  $\mathbf{a}_n$ .

\* В курсе общей физики рассматривают, как правило, лишь плоские системы сил.

Если все силы, действующие на тело, лежат на одной прямой и, следовательно, вдоль этой прямой направлен вектор  $\mathbf{a}$ , то, выбрав ее за ось проекций и направив в сторону вектора  $\mathbf{a}$ , сразу записывают второй закон в скалярной форме:

$$\Sigma F = ma, \quad (3)$$

где  $\Sigma F$  — сумма проекций сил, действующих на тело.

Знаки всех проекций в уравнениях (1)—(3) определяются правилом, изложенным на стр. 10.

5. Если в задаче рассматривается движение системы связанных между собой тел, то уравнение движения записывают для каждого тела в отдельности. Кроме того, записывают уравнения, выражающие так называемые кинематические условия, связывающие ускорения отдельных тел системы (например, равенство по модулю ускорений двух грузов, висящих на нерастяжимой нити, перекинутой через блок). Таким образом, получают систему уравнения, число которых равно числу неизвестных.

Если тела связаны нитью, массой которой можно пренебречь, то силу натяжения нити считают одинаковой по всей ее длине. Действительно, предположив, что на участок нити длиной  $\Delta l$  действуют со стороны соседних частей силы  $T_1, T_2$ , запишем по второму закону Ньютона

$$T_1 - T_2 = \Delta m a,$$

где  $\Delta m$  — масса рассматриваемого участка нити. Полагая  $\Delta m = 0$ , получим  $T_1 = T_2$ . Если нить перекинута через блок, то равенство  $T_1 = T_2$  выполняется только в том случае, когда можно пренебречь массами нити и блока, а также силами трения, возникающими при вращении блока.

### Решение задач

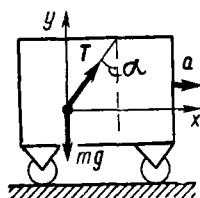


Рис. 2-1

2-1. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением  $a = 3,0 \text{ м/с}^2$ , висит на проволоке груз массой  $m = 2,00 \text{ кг}$ . Определить силу натяжения  $T$  проволоки и угол  $\alpha$  ее отклонения от вертикали, если груз неподвижен относительно вагона.

**Решение.** На груз действуют сила тяжести  $mg$  и сила натяжения  $T$  проволоки (рис. 2-1). Так как груз неподвижен относительно вагона, его ускорение равно ускорению вагона. При этом нить должна быть отклоненной от вертикали назад, так как только в этом случае равнодействующая сил  $mg$  и  $T$  будет направлена вперед, сообщая

грузу ускорение  $a$ . Второй закон Ньютона (2.1) в применении к грузу выразится уравнением

$$mg + \vec{T} = ma.$$

Проектируя векторы  $mg$ ,  $T$ ,  $ma$  на оси  $x$  и  $y$  (рис. 2-1), получим соответственно два скалярных уравнения:

$$T \sin \alpha = ma, \quad T \cos \alpha - mg = 0.$$

Совместное решение этих уравнений и последующее вычисление дают:

$$\alpha = \text{arctg}(a/g), \quad T = m \sqrt{a^2 + g^2};$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{3,0}{9,8} = \text{arctg} 0,31 = 17^\circ,$$

$$T = 2,0 \sqrt{(3,0)^2 + (9,8)^2} \text{ Н} = 21 \text{ Н}.$$

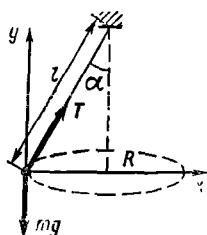


Рис. 2-2

2-2. Груз массой  $m = 45$  кг вращается на канате длиной  $l = 5,0$  м в горизонтальной плоскости, совершая  $n = 16,0$  об/мин. Какой угол  $\alpha$  с вертикалью образует канат и какова сила его натяжения?

**Решение.** На груз действуют сила тяжести  $mg$  и сила натяжения  $T$  каната (рис. 2-2). По второму закону Ньютона,

$$mg + T = ma. \quad (1)$$

Так как движение по окружности происходит здесь с постоянной по модулю скоростью, то полное ускорение тела есть нормальное ускорение  $a_n$ , направленное к центру окружности радиуса  $R$ :

$$a = a_n = (v^2/R) = 4\pi^2 n^2 R.$$

Выберем оси  $x$  и  $y$  так, чтобы одна из них была направлена в сторону ускорения (рис. 2-2). Проектируя векторы, входящие в уравнение (1) на эти оси, получим:

$$T \sin \alpha = m \cdot 4\pi^2 n^2 R, \quad (2)$$

$$T \cos \alpha - mg = 0. \quad (3)$$

Из чертежа видно, что  $R = l \sin \alpha$ . Решив совместно уравнения (2), (3) с учетом последнего равенства, имеем

$$T = 4\pi^2 n^2 l m; \quad \alpha = \arccos(g/4\pi^2 n^2 l).$$

Подставив числовые значения величин в единицах СИ и выполнив вычисление, находим:

$$T = 0,63 \text{ кН}, \quad \cos \alpha = 0,71, \quad \alpha = 45^\circ.$$

**З а м е ч а н и е.** Решения двух последних задач имеют много общего: движение тел в обоих случаях происходит под действием сил одинаковой природы и сходных по направлению. Различие в движениях тел объясняется лишь тем, что в одном случае равнодействующая приложенных сил направлена вдоль скорости тела (прямолинейное движение), в другом — равнодействующая, будучи постоянной по модулю, направлена под прямым углом к скорости (равномерное движение по окружности).

Более сложные задачи на неравномерное движение по окружности рассмотрены в § 3 «Законы сохранения», так как решение этих задач весьма упрощается благодаря применению кроме законов Ньютона закона сохранения энергии.

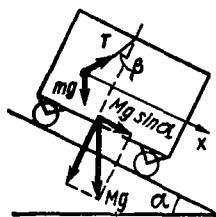


Рис. 2-3

2-3. В вагоне укреплен отвес (шарик массой  $m$  на нити). Какое направление примет отвес, когда вагон будет скатываться без трения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$  (рис. 2-3)? Считать, что отвес неподвижен относительно вагона.

**Р е ш е н и е.** Предположим, что отвес составляет с нормалью к наклонной плоскости искомым угол  $\beta$  (рис. 2-3). На шарик действуют сила тяжести  $mg$  и сила натяжения  $T$  нити. По второму закону Ньютона,

$$mg + T = ma, \quad (1)$$

где  $a$  — ускорение шарика, равное ускорению вагона. Так как вагону сообщает ускорение составляющая его силы тяжести, направленная вдоль наклонной плоскости и равная  $Mg \sin \alpha$ , где  $M$  — масса вагона, то, по второму закону Ньютона, ускорение вагона

$$a = \frac{Mg \sin \alpha}{M} = g \sin \alpha. \quad (2)$$

Выберем ось проекций  $x$ , направив ее вдоль ускорения  $a$ . Тогда вместо векторного уравнения (1) с учетом (2) получим

$$mg \sin \alpha + T \sin \beta = mg \sin \alpha,$$

отсюда

$$T \sin \beta = 0. \quad (3)$$

Так как  $T \neq 0$  (одна лишь сила тяжести не может сообщить шарiku ускорение  $g \sin \alpha$ ), то из (3) имеем

$$\sin \beta = 0, \quad \beta = 0.$$

Таким образом, при спуске вагона отвес расположен по нормали к наклонной плоскости.

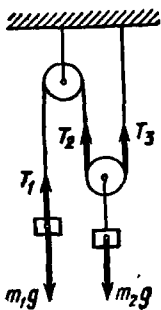


Рис. 2-4

2-4. Определить ускорения  $a_1$  и  $a_2$ , с которыми движутся грузы  $m_1$  и  $m_2$  в установке, изображенной на рис. 2-4, а также силу натяжения  $T$  нити. Трением и массой блоков пренебречь. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

**Решение.** На груз  $m_1$  действуют силы тяжести  $m_1g$  и сила натяжения  $T_1$  нити, на груз  $m_2$  — сила тяжести  $m_2g$  и силы натяжения  $T_2$ ,  $T_3$  нитей. При этом  $T_1 = T_2 = T_3 = T$  (см. указания на стр. 19). Поскольку все силы направлены по вертикали, запишем уравнения, выражающие второй закон Ньютона, применительно к грузам сразу в скалярном виде, выбрав положительным направлением вниз и предположив, что ускорение груза  $m_1$  направлено вниз и, следовательно, ускорение груза  $m_2$  — вверх:

$$m_1g - T = m_1a_1, \quad (1)$$

$$m_2g - 2T = -m_2a_2. \quad (2)$$

Рассматривая кинематическую схему установки и учитывая условие нерастяжимости нити, запишем соотношение между модулями перемещений грузов, происходящих за одно и то же время:  $s_1 = 2s_2$ . Очевидно, такое же соотношение существует и между модулями ускорений грузов:

$$a_1 = 2a_2. \quad (3)$$

Решив совместно уравнения (1), (2), (3), получим:

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g; \quad a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2} g; \quad T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

Отсюда следует: 1) если  $2m_1 > m_2$ , то  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , т. е. ускорения грузов направлены так, как мы предположили; 2) если  $2m_1 = m_2$ , то  $a_1 = a_2 = 0$  — грузы покоятся или движутся равномерно; 3) если  $2m_1 < m_2$ , то  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ . В этом случае ускорение груза  $m_1$  направлено вверх, ускорение груза  $a_2$  — вниз.

**З а м е ч а н и е.** Во всех трех случаях направления скоростей грузов остаются неопределенными, так как они зависят от направлений начальных скоростей и времени движения. Например, при  $2m_1 > m_2$  груз  $m_1$  может двигаться ускоренно вниз или замедленно вверх. В обоих случаях вектор  $a_1$  направлен вниз.

Методические указания

1. При движении тела по поверхности какого-либо другого тела между ними возникает взаимодействие, при этом к первому телу оказывается приложенной сила  $R$  (рис. 2-5), которую называют силой реакции опоры. Во всех реальных случаях эта сила направлена не по нормали к соприкасающимся поверхностям, а отклонена от нее в сторону, противоположную скорости  $v$  движения тела. Разложив силу  $R$  на составляющие по нормали и по касательной к соприкасающимся поверхностям, получим  $R = N + F_{тр}$ , где  $N$  — сила нормального давления,  $F_{тр}$  — сила трения. Таким образом, сила трения является, по существу, одной из составляющих силы реакции опоры.

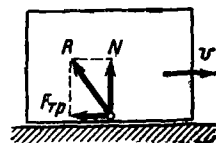


Рис. 2-5

2. Сила трения скольжения подчиняется закону трения скольжения (2.2) и направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости тела. Появление силы трения не может изменить направление относительной скорости тела: в крайнем случае под действием силы трения тело остановится и тогда сила трения скольжения исчезнет. Этим обстоятельством пользуются в тех задачах, где заранее неизвестно направление движения тела (см. задачу № 2-6).

3. Сила трения покоя  $F_{пок}$  всегда равна по модулю и противоположна по направлению той силе, которая должна была бы вызвать скольжение. Поэтому сила  $F_{пок}$  есть величина переменная даже при постоянном значении силы  $N$ . Однако она имеет предел — величину  $F_{пок макс}$ , определяемую законом трения покоя:  $F_{пок макс} = \mu_0 N$ , где  $\mu_0$  — коэффициент трения покоя. Решая задачи, мы будем приближенно считать  $\mu_0 = \mu$ , т. е. будем полагать максимальное значение силы трения покоя равной силе трения скольжения.

Решение задач

2-5. Тележку массой  $M = 20,0$  кг, на которой лежит груз массой  $m = 10,0$  кг, тянут с силой  $F$ , направленной горизонтально (рис. 2-6). Коэффициент трения между грузом и тележкой  $\mu = 0,100$ . Пренебрегая трением между тележкой и опорой, найти ускорения тележки  $a_1$  и груза  $a_2$ , а также силу трения между грузом и тележкой в двух случаях: 1)  $F = 2,00$  кгс, 2)  $F = 6,00$  кгс.

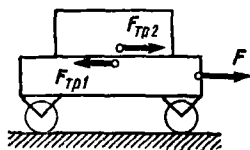


Рис. 2-6

**Решение.** Рассмотрим силы, действующие на оба тела. При этом, поскольку их ускорения направлены по горизонтали, достаточно учитывать лишь силы, действующие горизонтально, так как остальные — направленные по вертикали — заведомо уравновешиваются.

На тележку действуют сила  $F$  и сила со стороны груза  $F_{\text{тр}1}$ . Последняя направлена против скорости тележки относительно груза при трении скольжения или против силы  $F$  при трении покоя, т. е. в любом случае сила  $F_{\text{тр}1}$  направлена влево (рис. 2-6). На груз действует сила трения со стороны тележки  $F_{\text{тр}2}$ , направленная, согласно третьему закону Ньютона, вправо, причем по модулю  $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}}$ . Направив ось проекций в сторону ускорения, т. е. по горизонтали вправо, запишем в скалярном виде уравнения движения тележки и груза:

$$F - F_{\text{тр}} = Ma_1, \quad (1)$$

$$F_{\text{тр}} = ma_2 \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) содержат три неизвестных. Чтобы получить еще одно уравнение, выясним характер силы трения между тележкой и грузом. Если тележка выскальзывает из-под груза, то между ними действует сила трения скольжения, подчиняющаяся закону (2.2). Так как в данном случае сила  $N$  равна по модулю силе тяжести груза, то

$$F_{\text{тр}} = \mu mg. \quad (3a)$$

Если же тележка и груз двигаются как одно целое, то между ними действует сила трения покоя  $F_{\text{пок}} \neq \mu mg$ . Однако в этом случае выполняется равенство

$$a_1 = a_2. \quad (3b)$$

Таким образом, в обоих возможных случаях получим систему трех уравнений.

Итак, необходимо выяснить характер сил трения, действующих между телами. Рассмотрим подробнее оба возможных варианта:

а) тележка выскальзывает из-под груза. Между ними действует сила трения скольжения, которую найдем по формуле (3a):

$$F_{\text{тр}} = 0,100 \cdot 10,0 \cdot 9,8 \text{ Н} = 9,8 \text{ Н};$$

б) тележка и груз движутся как одно целое, удерживаемые трением покоя. Тогда, обозначив  $a_1 = a_2 = a$ , запишем систему уравнений (1), (2) в виде

$$F - F_{\text{пок}} = Ma, \quad F_{\text{пок}} = ma.$$

Решив эту систему, получим

$$a = F / (M + m), \quad (4)$$

$$F_{\text{пок}} = Fm / (M + m). \quad (5)$$

Формула (5) выражает пропорциональную зависимость между  $F$  и  $F_{\text{пок}}$ . Однако значение  $F_{\text{пок}}$  имеет предел, равный силе  $F_{\text{тр}}$ , которая уже найдена. Поэтому в действительности два тела будут двигаться как одно целое лишь при таких значениях силы  $F$ , при которых значение  $F_{\text{пок}}$ , определяемое по (5), не будет превышать ее предельного значения. Пределав расчеты, получим:

1) если  $F = 2,00 \text{ кгс} = 19,6 \text{ Н}$ , то  $F_{\text{пок}} = 6,5 \text{ Н}$ ;



2) если  $F = 6,00 \text{ кгс} = 58,8 \text{ Н}$ , то  $F_{\text{поик}} = 19 \text{ Н}$ , что невозможно, ибо предельное значение  $F_{\text{поик}}$  равно  $9,8 \text{ Н}$ . Значит, в этом случае между телами будет действовать трение скольжения.

Теперь легко ответить на все вопросы задачи:

1)  $F = 19,6 \text{ Н}$ . Между телами действует сила трения покоя  $F_{\text{поик}} = 6,5 \text{ Н}$ . Из формулы (4) находим  $a = 0,65 \text{ м/с}^2$ ;

2)  $F = 58,8 \text{ Н}$ . Между телами действует сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = 9,8 \text{ Н}$ . Из (1) и (2) находим ускорения тел:  $a_1 = 2,5 \text{ м/с}^2$ ,  $a_2 = 0,98 \text{ м/с}^2$ .

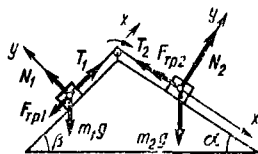


Рис. 2-7

2-6. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 45^\circ$ , укреплен блок (рис. 2-7).

Грузы  $m_1 = 1,00 \text{ кг}$ , и  $m_2 = 2,00 \text{ кг}$  соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение  $a$ , с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонных плоскостей, и силу натяжения  $T$  нити. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой:  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать. Рассмотреть случаи:

1)  $\mu = 0,10$ , 2)  $\mu = 0,20$ .

**Решение.** На каждый из грузов действуют четыре силы: сила тяжести, сила нормального давления  $N$  опоры, сила трения  $F_{\text{тр}}$  и сила натяжения  $T$  нити. В этой задаче мы заранее не знаем направления сил трения и, следовательно, не можем сразу приступить к составлению уравнений движения грузов в скалярной форме. В самом деле, сила трения направлена всегда в сторону, противоположную относительной скорости движущегося тела. Но куда движутся грузы — неизвестно.

Вспользуемся тем правилом, что сила трения, возникающая при движении тела, не может изменить направления его относительной скорости. Выясним направление движения грузов, предположив, что трение отсутствует. Так как в этом случае ускорение грузов определяется разностью составляющих сил тяжести, направленных вдоль соответствующих плоскостей, то найдем эти составляющие:

$$m_1 g \sin \beta = 1,00 \cdot 9,8 \cdot 0,71 \text{ Н} = 6,9 \text{ Н},$$

$$m_2 g \sin \alpha = 2,00 \cdot 9,8 \cdot 0,50 \text{ Н} = 9,8 \text{ Н}.$$

Так как  $m_1 g \sin \beta < m_2 g \sin \alpha$ , то груз  $m_1$  будет двигаться по наклонной плоскости вверх, груз  $m_2$  — вниз. А поскольку силы трения не могут изменить направление движения тел, то и при наличии трения грузы будут двигаться так же.

Теперь приступим к составлению уравнений движения грузов. Выбрав для каждого груза оси проекций  $x$  и  $y$  так, чтобы одна из осей была направлена вдоль ускорения (рис. 2-7), запишем для каждого груза  $m_1$  и  $m_2$  в проекциях на оси соответственно по два скалярных

уравнения (учитывая при этом, что  $T_1 = T_2 = T$ , см. указания на стр. 19):

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin \beta - F_{\text{тр}1} = m_1 a, \\ N_1 - m_1 g \cos \beta = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m_2 g \sin \alpha - T - F_{\text{тр}2} = m_2 a, \\ N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, по закону трения скольжения,

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1, \quad F_{\text{тр}2} = \mu N_2. \quad (3)$$

Систему уравнений (1) — (3) с неизвестными  $a$ ,  $T$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $F_{\text{тр}1}$ ,  $F_{\text{тр}2}$  преобразуем в систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin \beta - \mu m_1 g \cos \beta = m_1 a, \\ m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a, \end{cases} \quad (4)$$

в которой два неизвестных:  $a$  и  $T$ . Решив эту систему, получим:

$$a = [m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_1 (\sin \beta + \mu \cos \beta)]g / (m_1 + m_2), \quad (5)$$

$$T = [\sin \alpha + \sin \beta - \mu (\cos \alpha - \cos \beta)]m_1 m_2 g / (m_1 + m_2). \quad (6)$$

Подставив в формулы (5) и (6) числовые данные для первого случая ( $\mu = 0,10$ ), получим:

$$a = 0,18 \text{ м/с}^2, \quad T = 7,9 \text{ Н.}$$

Для второго случая ( $\mu = 0,20$ ) из формулы (5) имеем

$$a = -0,19 \text{ м/с}^2.$$

Прежде чем выполнять дальнейшие расчеты, проанализируем полученный результат. Отрицательное значение ускорения показывает, что при  $\mu = 0,20$  направления движения грузов противоположны тем, что были бы при отсутствии трения (при этом учитываем, что в обоих случаях начальные скорости грузов равны нулю). Но этого не может быть, так как сила трения не в состоянии изменить направление движения тела. Таким образом, получен неверный ответ для ускорения. Следовательно, система уравнений (1)—(3) не соответствует действительности при  $\mu = 0,20$ . Единственной ошибкой, которую мы могли здесь допустить, является предположение о том, что грузы находятся в состоянии движения и между ними и плоскостями действуют силы трения скольжения [это отражено в уравнениях (3)]. Следовательно, на самом деле при  $\mu = 0,20$  грузы находятся в состоянии покоя, удерживаемые силами трения покоя, для которых соотношения (3) несправедливы. Итак,  $a = 0$  при  $\mu = 0,20$ .

Теперь вместо системы (4) получим систему

$$T - m_1 g \sin \beta - F_{\text{пок}1} = 0,$$

$$m_2 g \sin \alpha - T - F_{\text{пок}2} = 0,$$

в которой неизвестны  $T$ ,  $F_{\text{поп1}}$ ,  $F_{\text{поп2}}$  и которая, очевидно, не имеет единственного решения для  $T$ . Задача стала неопределенной: величина  $T$  теперь зависит от некоторых дополнительных обстоятельств, не указанных в условии, а именно от того, каким образом грузы были помещены в положение, изображенное на рис. 2-7.

## В. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

### Методические указания

1. В задачах, в которых идет речь о физических явлениях, происходящих внутри ускоренно движущегося тела (вагона, лифта, куска металла и т. д.), решение, основанное на применении второго закона Ньютона, упрощается, если рассматривать явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся телом. Соответственно двум движениям тела — поступательному и вращательному — применяют как поступательно движущиеся, так и вращающиеся неинерциальные системы отсчета. В поступательно движущихся неинерциальных системах отсчета второй закон Ньютона выражается уравнением (2.3).

Это же уравнение применимо и во вращающихся системах отсчета при условии, что рассматриваемая материальная точка (частица) в ней покоится. Тогда в выражении (2.3)  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_n$  — центростремительное ускорение той точки вращающейся системы отсчета, в которой находится данная частица; величину  $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_n$  называют центробежной силой инерции.

Сила инерции, входящая в уравнение (2.3), отличается от других сил тем, что она существует только в неинерциальной системе отсчета и для нее нельзя указать тех конкретных тел, со стороны которых она действует.

2. Существует другой способ объяснить поведение тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно (или вращающейся, если рассматриваемая материальная точка в ней покоится). При этом никаких сил инерции не вводят, но считают, что происходит изменение поля тяготения: ускорение силы тяжести\* изменяется по модулю и направлению и вместо  $\mathbf{g}$  становится равным  $\mathbf{g}'$ , причем

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_0), \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{a}_0$  — ускорение той точки неинерциальной системы отсчета (относительно инерциальной), в которой находится данная частица (рис. 2-8).

На рисунке:  $\mathbf{a}_0$  — ускорение вагона относительно Земли,  $\mathbf{g}'$  — ускорение частицы  $\Delta m$  относительно вагона. В системе отсчета, связанной с вагоном, поле тяготения таково, что линия отвеса (направление вектора  $\mathbf{g}'$ ) оказывается наклоненной к полу вагона, а сила тяжести отличается от той, что была в неподвижном вагоне.

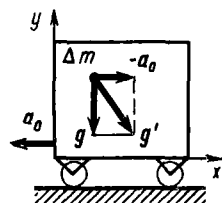


Рис. 2 8

\* Правильнее в этом случае величину  $\mathbf{g}$  называть напряженностью поля тяготения (см § 5).

Этот метод объяснения поведения тел в неинерциальных системах отсчета получил обоснование в общей теории относительности.

3. Из двух рассмотренных методов второй гораздо быстрее приводит к цели в тех случаях, когда искомая величина определяется в инерциальной системе отсчета какой-либо известной формулой, содержащей ускорение силы тяжести. Тогда достаточно принять это ускорение равным величине  $g'$ , выражаемой уравнением (2.4), и произвести необходимые вычисления. Сюда относятся задачи на распределение давления в жидкости или газе в ускоренно движущихся сосудах (см. задачу № 6-4), на колебания математического или физического маятника в ускоряемых кабинах и т. п.

### Решение задач

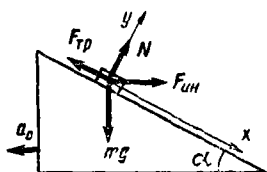


Рис. 2-9

2-7. Тело массой  $m$ , находящееся на вершине наклонной плоскости, удерживается силой трения. За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением  $a_0 = 1,00 \text{ м/с}^2$  (рис. 2-9)? Длина плоскости  $l = 1,00 \text{ м}$ , угол наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ , коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu = 0,60$ .

**Решение.** Выберем систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. Пока плоскость покоится, на тело действуют три силы: сила тяжести  $mg$ , сила нормального давления  $N$  опоры и сила трения покоя  $F_{\text{покоя}}$ , которые уравновешивают друг друга. Как только начнется ускоренное движение плоскости и «привязанная» к ней система отсчета станет неинерциальной, появится четвертая сила, действующая на тело, — сила инерции  $F_{\text{ин}} = -ma_0$ . Равновесие нарушится и тело начнет скользить вниз по наклонной плоскости с ускорением  $a$ . Так как искомое время определяется известной формулой пути равноускоренного движения без начальной скорости

$$t = \sqrt{2l/a}, \quad (1)$$

то надо найти ускорение  $a$ . Для этого запишем второй закон Ньютона в нашей неинерциальной системе отсчета:

$$mg + N + F_{\text{тр}} + F_{\text{ин}} = ma. \quad (2)$$

Выберем оси проекций, как показано на рисунке. Проектируя все векторы, входящие в уравнение (2), на оси  $x$  и  $y$ , получим соответственно два скалярных уравнения:

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + ma_0 \cos \alpha = ma, \quad (3)$$

$$-mg \cos \alpha + N + ma_0 \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

Решив систему (3), (4) с учетом  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , найдем ускорение:

$$a = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha).$$

Теперь по формуле (1) имеем

$$t = \sqrt{2l [g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + a_0(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)]^{-1}}.$$

Подставив числовые значения величин, найдем

$$t = 0,8 \text{ с}$$

Итак, рассмотрев поведение тела в неинерциальной системе отсчета и введя силу инерции, мы свели дело к простой задаче, решаемой стандартным методом динамики. Решение же в инерциальной системе отсчета оказалось бы значительно более трудным.

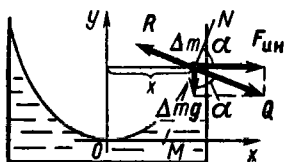


Рис. 2-10

2-8. Сосуд с жидкостью вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить форму поверхности жидкости.

**Решение.** Каждая точка вращающегося сосуда с жидкостью имеет ускорение, направленное к оси вращения и равное  $a_0 = \omega^2 x$ , где  $x$  — расстояние точки от оси вращения. Рассмотрим явление в неинерциальной системе отсчета, «привязанной» к вращающемуся сосуду. В ней жидкость будет неподвижной. Решим задачу двумя способами, соответствующими двум методам объяснения поведения тела в неинерциальной системе отсчета:

1. На частицу жидкости массой  $\Delta m$ , лежащую на поверхности на расстоянии  $x$  от оси вращения, действуют три силы: 1) сила тяжести  $\Delta mg$ , 2) центробежная сила инерции  $F_{ин} = -\Delta m a_0$ , 3) сила реакции  $R$  соседних частиц жидкости (рис. 2-10). Равнодействующая внешних сил, действующих на частицу  $\Delta m$  покоящейся жидкости, должна быть направлена по нормали к поверхности жидкости в данной точке (здесь внешними являются силы  $\Delta mg$  и  $F_{ин}$ , а сила  $Q$  — их равнодействующая). В противном случае существовала бы направленная по касательной  $MN$  составляющая силы  $Q$ , которая вызвала бы скольжение частицы по поверхности жидкости.

Отсюда можно найти угол  $\alpha$  наклона касательной  $MN$  к линии горизонта (оси  $Ox$ ). Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta m a_0}{\Delta mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = (dy/dx)$ , получим дифференциальное уравнение кривой, вращение которой вокруг оси  $Oy$  образует поверхность жидкости:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x,$$

откуда

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \quad (1)$$

Очевидно, при данном выборе оси  $Ox$  постоянная  $C = 0$ .

Из (1) следует, что кривая на рис. 2-10 — парабола. Следовательно, но, поверхность жидкости является параболоидом вращения.

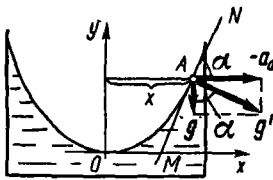


Рис. 2 11

2. Не будем вводить сил инерции, но учтем, что при вращении сосуда в связанной с ним системе отсчета изменяется поле тяготения. При этом «новое» ускорение силы тяжести  $g'$  выражается через «старое» ускорение  $g$  соотношением (2.4):  $g' = g + (-a_0)$ .

Выберем точку  $A$  поверхности жидкости, расположенную на расстоянии  $x$  от оси вращения (рис. 2-11). Пусть векторы  $g'$  и  $g$  образуют в этой точке угол  $\alpha$ . Так как поверхность покоящейся жидкости всегда нормальна к направлению силы тяжести, то, как видно из чертежа, между касательной  $MM'$  и линией горизонта (осью  $Ox$ ) также будет угол  $\alpha$ , при этом

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a_0}{g} = -\frac{\omega^2 x}{g}.$$

Дальнейший ход решения совпадает с тем, что получен при первом способе.

### § 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

#### Основные формулы

Импульс (количество движения) материальной точки есть векторная величина

$$p = mv \quad (3.1)$$

Импульс системы материальных точек равен (по определению) векторной сумме импульсов всех частиц, образующих систему:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i. \quad (3.2)$$

Центром инерции системы материальных точек называется точка  $C$ , положение которой в пространстве определяется радиусом-вектором, имеющим начало в произвольной точке  $O$  и равным

$$r_C = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i r_i}{M}. \quad (3.3)$$

Здесь  $m_i$  — масса  $i$ -й материальной точки,  $r_i$  — ее радиус-вектор с началом в той же точке  $O$ ,  $M$  — масса всей системы

Импульс системы материальных точек равен произведению массы  $M$  системы на скорость движения  $v_C$  ее центра инерции:

$$p = Mv_C. \quad (3.4)$$

Систему взаимодействующих тел называют замкнутой, если на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы есть величина постоянная, т. е.

$$p = \text{const}. \quad (3.5)$$

Работа, совершаемая силой  $F$  при элементарном перемещении  $\Delta r$ ,

$$\Delta A = F \Delta r = F \Delta s \cos \alpha, \quad (3.6)$$

где  $\Delta s = |\Delta r|$  — элементарный путь,  $\alpha$  — угол между векторами  $F$ ,  $\Delta r$ .  
Работа переменной силы  $F$  на пути  $s$

$$A = \int_0^s F \cos \alpha ds. \quad (3.7)$$

Изменение полной энергии системы равно работе, совершенной внешними силами, приложенными к системе:

$$W_2 - W_1 = A_{\text{внешн.}} \quad (3.8)$$

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно со скоростью  $v$ ,

$$W_k = mv^2/2. \quad (3.9)$$

Потенциальная энергия тела, поднятого вблизи поверхности Земли на высоту  $h$ ,

$$W_{\text{п}} = mgh \quad (3.10)$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_{\text{п}} = kx^2/2, \quad (3.11)$$

где  $k$  — коэффициент упругости, определяемый отношением упругой силы к величине  $x$  упругой деформации

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы в которой действуют только консервативные силы, есть величина постоянная, т. е

$$W_k + W_{\text{п}} = \text{const.} \quad (3.12)$$

**Общие замечания** Как импульс, так и кинетическая энергия тела зависят от выбора системы отсчета, изменяясь при переходе от одной системы отсчета к другой. Поэтому, составляя уравнения, выражающие законы сохранения импульса и энергии, необходимо рассматривать движения всех тел в одной и той же инерциальной системе отсчета\*. В большинстве случаев, решая задачи, пользуются той инерциальной системой отсчета, к которой относится условие задачи. Это так называемая «лабораторная» система отсчета, обычно связанная с Землей.

Если в условии задачи фигурирует относительная скорость  $v_{\text{отн}}$  сближения (или удаления) двух движущихся по одной прямой частиц в некоторый момент времени их взаимодействия, то целесообразно рассматривать явление в такой инерциальной системе отсчета, в которой одна из частиц в этот момент неподвижна. Тогда скорость другой будет  $v_{\text{отн}}$ .

Иногда решение задачи упрощается, если выбрать такую систему отсчета, которая движется поступательно относительно «лабораторной» со скоростью центра инерции системы частиц\*\* и в которой, следо-

\* В неинерциальной системе отсчета на тела действуют силы инерции, внешние по отношению к данной системе тел. Поэтому всякая система тел в этом случае является неизолированной системой, для которой ни полный импульс, ни полная энергия не сохраняются.

\*\* Здесь и далее имеется в виду изолированная система частиц.



вательно, центр инерции неподвижен. Будем для краткости называть такую систему отсчета *связанной с центром инерции*. Этой системой отсчета пользуются в тех случаях, когда необходимо рассматривать относительное перемещение частей системы, центр инерции которой движется относительно «лабораторной» системы отсчета (см. задачи № 3-2, 11-9, 31-4).

Из формул (3.3), (3.4), (3.5) вытекают следующие свойства системы отсчета, связанной с центром инерции:

а) скорость центра инерции системы частиц в любой инерциальной системе отсчета есть величина постоянная, т. е.

$$v_c = \text{const}, \quad (3.13)$$

и, следовательно, система отсчета, связанная с центром инерции, также является инерциальной,

б) в этой и только в этой системе отсчета выполняются соотношения:

$$\sum m_i \Delta r_i = 0, \quad (3.14)$$

$$p = \sum m_i v_i = 0, \quad (3.15)$$

где  $m_i$ ,  $v_i$  — масса и скорость  $i$ -й частицы,  $\Delta r_i$  — ее перемещение, соответствующее переходу системы из начального положения в конечное,  $p$  — импульс системы частиц;

в) в этой и только в этой системе отсчета суммарная кинетическая энергия частиц может обращаться в нуль в случае их относительного покоя.

#### А ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

##### Методические указания

1. Ценность закона сохранения импульса для решения задач динамики в том, что он, связывая начальное и конечное значения импульса замкнутой системы, позволяет исключать из рассмотрения внутренние силы, т. е. силы взаимодействия частей системы. Поэтому закон применяют в тех задачах, в которых силы взаимодействия между отдельными телами системы являются величинами переменными, причем характер их изменения во времени сложен или вообще неизвестен (например, силы, возникающие при ударе).

2. Уравнение (3.5), выражающее закон сохранения импульса, является векторным. Поэтому, находя вектор  $p = \sum p_i$ , надо руководствоваться правилом сложения векторов или, выбрав оси проекций  $Ox$  и  $Oy$ , записать закон сохранения импульса в скалярной форме двумя уравнениями:

$$p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}.$$

Если импульсы всех тел системы направлены вдоль одной прямой, то, выбрав эту прямую за ось проекций, сразу записывают закон со-

хранения импульса в скалярной форме:

$$p = \text{const},$$

где  $p = \sum p_i$  — сумма проекций импульсов всех тел системы.

3. Закон сохранения импульса справедлив для замкнутых систем. Однако его можно применять и для систем, на которые действуют внешние силы при условии, что их сумма равна нулю:  $\sum \mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$ .

Если же  $\sum \mathbf{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но окажется, что сумма проекций всех внешних сил на некоторую ось ( $Ox$ ) равна нулю, то

$$p_x = \text{const},$$

т. е. проекция импульса системы на направление, в котором внешние силы не действуют (или уравновешиваются), есть величина постоянная.

### Решение задач

3-1. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью  $v$ , укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом на угол  $\alpha$  (рис. 3-1). Орудие произвело выстрел, в результате чего скорость платформы с орудием уменьшилась в 3 раза. Найти скорость  $v'$  снаряда (относительно орудия) при вылете из ствола. Масса снаряда  $m$ , масса платформы с орудием  $M$ .

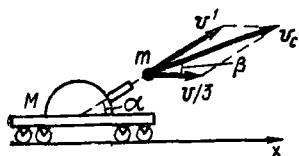


Рис 3-1

**Решение.** Выясним возможность применения закона сохранения импульса. На систему платформа с орудием — снаряд извне действуют две силы: сила тяжести системы  $(M + m)g$  и сила нормального давления  $N$  рельсов. До выстрела эти силы уравновешивались, так как система двигалась равномерно. Во время выстрела сила взаимодействия между платформой и рельсами возрастает вследствие явления отдачи, поэтому равновесие сил, приложенных к системе, нарушается:  $N > (M + m)g$ . Следовательно, во время выстрела система не является замкнутой, ее импульс изменяется. Учтем, однако, что обе рассмотренные силы действуют по вертикали, в то время как в горизонтальном направлении никакие силы на систему не действуют (трением платформы о рельсы пренебрегаем). Поэтому проекция импульса системы на горизонтальное направление (ось  $x$  на рис. 3-1) есть величина постоянная:

$$p_x = \text{const}. \quad (1)$$

Пусть состояниям системы до и после выстрела соответствуют значения величины  $p_x$ , равные  $p_{x1}$  и  $p_{x2}$ . Рассматривая все движения относительно Земли, получим:

$$p_{x1} = (M + m)v, \quad (2)$$

$$p_{x2} = M \frac{v}{3} + mv_c \cos \beta, \quad (3)$$

где  $v_c \cos \beta$  — проекция на ось  $x$  скорости  $v_c$  снаряда относительно Земли (рис. 3-1).

Чтобы связать величину  $v_c$  с искомой скоростью  $v'$ , будем рассматривать движение снаряда относительно Земли как сложное, состоящее из двух: со скоростью  $v'$  относительно орудия и со скоростью  $v/3$  вместе с орудием относительно Земли. Тогда в соответствии с формулой (1.18) получим

$$v_c = v' + v/3. \quad (4)$$

Спроектируем векторы, входящие в (4), на ось  $x$ :

$$v_c \cos \beta = v' \cos \alpha + v/3. \quad (5)$$

Заменив в (3) величину  $v_c \cos \beta$  ее значением по (5) и приравняв согласно (1) правые части формул (2) и (3), найдем

$$v' = \frac{2(M+m)}{3m \cos \alpha} v.$$

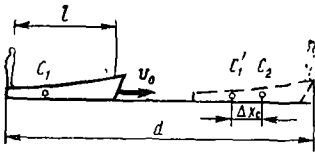


Рис 3-2

3-2. На корме лодки длиной  $l$  и массой  $M$  сидит человек массой  $m$ . В результате кратковременного толчка лодка с человеком приобретает скорость  $v_0$  и начинает двигаться от одного берега канала шириной  $d$  к другому (рис. 3-2), при этом человек переходит с кормы на нос лодки. Пренебрегая сопротивлением воды, найти время движения лодки.

**Решение.** Рассматривая систему лодка — человек как замкнутую и применяя к ней закон сохранения импульса (3.5), приходим к выводу, что, поскольку закон движения человека относительно лодки нам неизвестен, движение лодки относительно воды (или Земли) нельзя считать равномерным. Однако на основании соотношения (3.13) можно утверждать, что скорость центра инерции системы относительно воды есть величина постоянная:  $v_C = v_0 = \text{const}$ . Отсюда следует, что искомое время

$$t = \overline{C_1 C_2} / v_0, \quad (1)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — начальное и конечное положения центра инерции системы,  $\overline{C_1 C_2}$  и  $v_0$  — его перемещение и скорость. Далее возможны два пути решения задачи:

1. Как видно из рисунка, выполняется соотношение

$$C_1 C_2 = d - l + |\Delta x_C|, \quad (2)$$

где  $d - l$  — модуль перемещения лодки относительно воды,  $|\Delta x_C|$  — модуль перемещения центра инерции системы относительно лодки.

Чтобы найти величину  $|\Delta x_C|$ , выберем систему отсчета, связанную с центром инерции системы лодка — человек.

Пусть  $s_1$ ,  $s_2$  — модули перемещений лодки и человека. При этом, как видно из рис. 3-3,  $s_2 = l - s_1$ . Тогда, направив ось проекций вправо и учитывая направление перемещений двух тел, запишем соотношение (3.14) в скалярной форме:

$$-Ms_1 + m(l - s_1) = 0,$$

откуда

$$s_1 = [m / (M + m)]l. \quad (3)$$

Но в силу относительности движения  $|\Delta x_C| = s_1$ . Теперь из (1)—(3) находим ответ:

$$t = \frac{d - lM / (M + m)}{v_0}. \quad (4)$$

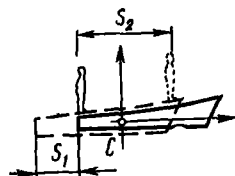


Рис 3-3

2. Из формулы (1) следует, что ответ не зависит от характера движения человека. Предположим, что оно было равномерным в течение всего промежутка времени  $t^*$ . Тогда будет равномерным и движение лодки. Пусть  $p_0$ ,  $p$  — импульсы системы соответственно в начальный и некоторый промежуточный моменты времени. Тогда, по закону сохранения импульса,  $p_0 = p$ , т. е.

$$(M + m)v_0 = M[(d - l)/t] + m(d/t), \quad (5)$$

где  $(d - l)/t$  — скорость лодки,  $d/t$  — скорость человека (все скорости даны в системе отсчета, связанной с Землей).

Решив уравнение (5) относительно  $t$ , получим тот же ответ (4).

## Б. РАБОТА, ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

### Методические указания

1 В механике применяют закон сохранения энергии главным образом в тех задачах, где между телами, образующими замкнутую систему, действуют потенциальные силы (гравитационные и упругие), *изменяющиеся во времени*. В этих случаях расчет скоростей тел или их координат при помощи второго закона Ньютона приводит к необходимости интегрирования, для выполнения которого надо знать закон изменения силы  $F \doteq F(t)$ . Применение закона сохранения энергии, связывающего начальное и конечное состояния системы взаимодействующих тел, упрощает решение подобных задач, так как позволяет не рассматривать действующие между телами силы (см. задачу № 3-4).

В задачах на движение тела по окружности в вертикальной плоскости на тело также действуют изменяющиеся во времени силы. При этом наряду с законом сохранения энергии приходится все же использовать второй закон Ньютона. Однако и в этом случае можно решить задачу, не зная зависимости  $F = F(t)$  (см. задачу № 3-5).

\* Мы пренебрегаем промежутком времени  $\Delta t$  ( $\Delta t \ll t$ ), в течение которого скорость человека возрастала от  $v_0$  до  $v$ . Скорость  $v$  сохранялась затем до конца. Существовало, что при данном способе решения задачи величину  $\Delta t$  можно считать как угодно малой.

2. Подчеркнем, что закон сохранения механической энергии можно применять к системе взаимодействующих тел при одновременном выполнении следующих условий: а) система должна быть замкнутой (закон применим и для систем, на которые действуют внешние силы, в том случае, если их суммарная работа равна нулю, т. е.  $\sum A_{\text{внеш}} = 0$ ); б) внутри системы должны отсутствовать силы трения (кроме сил трения покоя) и силы неупругих деформаций, так как иначе механическая энергия системы будет рассеиваться, превращаясь во внутреннюю энергию.

3. Если тело (или система тел) движется под действием силы тяжести, его нельзя считать изолированным. В этом случае изолированной системой, к которой можно применять закон сохранения энергии, будет система тело — Земля. Однако, исключая при этом из рассмотрения энергию Земли, мы практически не совершим ошибки по следующим причинам: а) само понятие потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли предполагает энергию взаимодействия тела и Земли, и уже поэтому характеризует энергию всей системы, а не одного тела; б) изменением кинетической энергии Земли в результате ее взаимодействия с падающим телом можно пренебречь (легко показать, что кинетическая энергия, получаемая телами в результате их взаимодействия, обратно пропорциональна массам тел\*). Поэтому при решении задач на движение тела (или системы тел) в поле тяготения Земли не рассматривают ни потенциальную, ни кинетическую энергию Земли.

4. Выбор нулевого уровня отсчета высоты  $h$ , входящей в формулу (3.10) потенциальной энергии поднятого тела, произволен. При изменении нулевого уровня на величину  $\Delta h$  в обеих частях уравнения, выражающего закон сохранения энергии, появится один и тот же член  $mg\Delta h$ , что, разумеется, не повлияет на решение задачи. Обычно за нулевой уровень принимают самое нижнее положение движущегося тела.

Если потенциальная энергия какого-либо тела системы не изменяется, то, составляя уравнение, выражающее закон сохранения энергии для системы, эту энергию вообще можно не рассматривать.

### Решение задач

3-3. Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью  $v$ , въезжают на асфальт. Считая, что длина полозьев санок равна  $l$ , а коэффициент трения их об асфальт равен  $\mu$ , определить путь  $s$ , пройденный санками по асфальту, если известно, что  $s > l$ . Массу санок считать равномерно распределенной по длине полозьев. Трением санок о лед пренебречь.

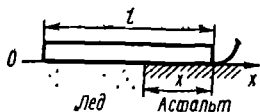


Рис 3 4

\* Действительно, из закона сохранения импульса следует, что импульсы, получаемые телами при взаимодействии без начальных скоростей, равны друг другу по модулю:  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ . Поэтому можно записать следующие равенства:

$$\frac{W_{к1}}{W_{к2}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} ; \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} .$$

**Решение.** Когда сани въезжают на асфальт, происходит постепенное увеличение силы давления  $N$  полозьев на асфальт от нуля до максимального значения, равного силе тяжести  $mg$  санок. В связи с этим возрастает и сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , действующая на сани со стороны асфальта.

Поскольку санки движутся под действием переменной силы, воспользуемся для решения понятиями работы и энергии. Работа силы трения, действующей на санки, определяется изменением их кинетической энергии от  $W_1 = mv^2/2$  до  $W_2 = 0$ . Тогда на основании соотношения (3.8) можно записать

$$A_{\text{тр}} = -mv^2/2. \quad (1)$$

С другой стороны, работу  $A_{\text{тр}}$  можно вычислить по формулам (3.6) и (3.7). Для этого разобьем весь путь, пройденный санками, на два участка:  $s = l + s'$ . На пути  $l$  на санки действует переменная сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Найдем совершенную ею работу  $A_1$ . Пусть санки уже прошли по асфальту путь  $x$  (рис. 3-4), тогда сила давления полозьев на асфальт равна  $N = mgx/l$ , сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu mgx/l$ . Теперь по (3.7) получим

$$A_1 = - \int_0^l \mu mg \frac{x}{l} dx = - \frac{\mu mg}{2} l. \quad (2)$$

Интеграл взят со знаком минус потому, что величина  $F_{\text{тр}} = \mu mgx/l$  и  $dx$  имеют противоположные знаки. На пути  $s'$  сила трения постоянна и равна  $\mu mg$ , и поэтому совершаемая ею работа

$$A_2 = -\mu mgs'.$$

Полная работа сил трения

$$A_{\text{тр}} = A_1 + A_2 = -\mu mg[l/2 + s']. \quad (3)$$

Приравнивая правые части равенства (1) и (3) и сокращая массу, найдем

$$s' = (v^2 - \mu gl)/2\mu g.$$

Таким образом, весь путь, пройденный санями,

$$s = l + s' = (v^2 + \mu gl)/2\mu g.$$

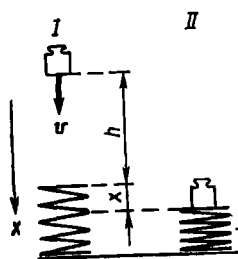


Рис. 3-5

3-4. Гиря, положенная на верхний конец спиральной пружины, сжимает ее на  $x_0 = 1,0$  мм. На сколько сожмет пружину эта же гиря, брошенная вертикально вниз с высоты  $h = 0,20$  м со скоростью  $v = 1,0$  м/с?

**Решение.** Искомая величина  $x$  деформации пружины определяет по формуле (3.11) потенциальную энергию тела. Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии. Так как на гирию действует сила тяжести, рассмотрим систему Земля—гирия—пружина. Поскольку при движении гири и сжатии пружины трения практически не возникает, полная механическая энергия этой изолированной системы будет сохраняться.

Подсчитаем энергию системы в ее начальном (I) и конечном (II) положениях (рис. 3-5). Выберем за нулевой уровень отсчета высоты самое нижнее положение гири, соответствующее сжатой пружине. В начальном положении энергия системы  $W_1$  складывается из потенциальной и кинетической энергии гири:

$$W_1 = mg(h + x) + m\dot{v}^2/2. \quad (1)$$

В конечном положении у гири не будет кинетической энергии, зато сжатая пружина будет обладать энергией упругой деформации. Теперь полная энергия системы согласно формуле (3.11)

$$W_2 = kx^2/2, \quad (2)$$

где коэффициент упругости  $k$ , согласно его определению, равен

$$k = mg/x_0. \quad (3)$$

Приравнивая по закону сохранения энергии, правые части выражений (1) и (2) с учетом соотношения (3), получим после простых преобразований квадратное уравнение относительно  $x$ :

$$x^2 - 2gx_0x - (2gx_0h + v^2x_0) = 0.$$

Решив уравнение, найдем

$$x_{1,2} = gx_0 \pm \sqrt{g^2x_0^2 + 2gx_0h + v^2x_0}.$$

Отрицательный корень уравнения должен быть отброшен:  $x < 0$  означает растяжение пружины, тогда как на самом деле она сжимается.

Выразив величины, входящие в формулу, в единицах СИ и подставив их числовые значения, выполним вычисление:

$$\begin{aligned} x &= (9,8 \cdot 10^{-3} + \sqrt{(9,8)^2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 9,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,20 + 10^{-3}}) \text{ м} = \\ &= 8 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 8 \text{ см}. \end{aligned}$$

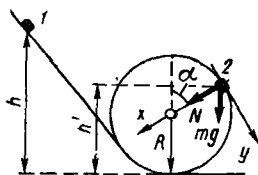


Рис. 3-6

3-5. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты  $h$  по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса  $R$  (рис. 3-6). На какой высоте  $h'$  выпадет тело из петли? Трением пренебречь.

**Решение.** Сначала выясним, почему, двигаясь вдоль петли, тело может оторваться от нее. На тело в произвольный момент времени его движения вверх по петле действуют две силы (рис. 3-6): сила тя-

жести  $mg$  и сила давления  $\mathbf{N}$  петли, направленная по радиусу к центру окружности. По второму закону Ньютона,

$$mg + \mathbf{N} = ma. \quad (1)$$

Направим оси проекций  $x$  и  $y$  по векторам нормального и тангенциального ускорений  $a_n$  и  $a_t$ , т. е. по радиусу и касательной к окружности. Учитывая, что  $a_n = v^2/R$  и  $a_t = dv/dt$ , получим вместо (1) два скалярных уравнения для осей  $x$  и  $y$  соответственно:

$$mg \cos \alpha + N = mv^2/R, \quad (2)$$

$$mg \sin \alpha = m (dv/dt). \quad (3)$$

Так как при движении вверх по петле величина  $mg \cos \alpha$  возрастает, а  $mv^2/R$  убывает, то величина  $N = (mv^2/R) - mg \cos \alpha$  в уравнении (2) должна и подавно убывать. При обращении  $N$  в нуль тело оторвется от петли.

Приняв  $N = 0$ , перепишем, сокращая величину  $m$ , уравнения (2) и (3) для момента отрыва тела от петли:

$$g \cos \alpha = v^2/R, \quad (2')$$

$$g \sin \alpha = dv/dt. \quad (3')$$

В систему (2') и (3') явно не вошла искомая величина  $h'$ , однако она весьма просто связана с углом  $\alpha$ . Как видно из чертежа,

$$\cos \alpha = (h' - R)/R. \quad (4)$$

Поэтому было бы достаточно найти величину  $\alpha$ . Однако найти ее из системы (2'), (3') невозможно, так как эта система содержит более двух неизвестных.

Исчерпав возможности, которые дает второй закон Ньютона для движущегося вдоль петли тела, воспользуемся законом сохранения энергии. Так как трение отсутствует и, следовательно, на тело действуют только потенциальные силы, то полная механическая энергия тела (точнее: замкнутой системы тело — желоб — Земля) во время его движения будет сохраняться.

В начальный момент времени тело обладает только потенциальной энергией  $W_1 = mgh$ . В момент отрыва движущегося со скоростью  $v$  тела его полная энергия  $W_2 = mgh' + mv^2/2$ . Приравняв по закону сохранения энергии величины  $W_1$  и  $W_2$ , получим

$$v^2 = 2g(h - h'). \quad (5)$$

Теперь из (2'), (4) и (5) легко найдем ответ:

$$h' = (2h + R)/3.$$

**З а м е ч а н и я:** 1. Мы решили задачу, не используя уравнения (3), выражающего второй закон Ньютона для касательного к окружности направления. В задачах на движение по окружности в вертикальной плоскости закон сохранения энергии по существу заменяет дифференциальное уравнение (3), которое поэтому составлять вообще не надо.



2. Интересно отметить, что тело выпадет из петли не при любых значениях  $h$ . Действительно, так как  $h'$  не может быть больше  $2R$  и меньше  $R$  (при  $h' < R$ , даже полностью потеряв скорость, тело, не отрываясь от петли, начнет скользить обратно), т. е.  $h'_{\max} = 2R$  и  $h'_{\min} = R$ , то, подставив эти значения  $h'$  в (6), получим  $h_{\max} = 2,5R$ ,  $h_{\min} = R$ . Следовательно, при  $h > 2,5R$  и  $h < R$  тело из петли не выпадет.

## В. СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

### Методические указания

1. Сюда относятся в основном задачи на упругий удар или иное взаимодействие тел, представляющих собой замкнутую систему, когда отсутствуют силы трения и силы неупругих деформаций и когда у тел в результате взаимодействия изменяются скорости. При этом сохраняются как импульс, так и энергия системы, что дает два уравнения, позволяющих определить, например, скорости обоих тел после взаимодействия, если известны скорости до взаимодействия.

2. В случае неупругого удара возникающие остаточные деформации тел всегда сопровождаются частичным или полным переходом механической энергии во внутреннюю энергию (тела нагреваются). Поэтому механическая энергия системы не сохраняется. Тогда энергия, затраченная на деформацию, определяется как разность между начальными и конечными значениями механической энергии системы.

3. При помощи совместного применения законов сохранения полной (а не только механической) энергии и импульса, решаются задачи № 11-9, 27-7, 31-3, 31-4, 31-5 руководства.

### Решение задач

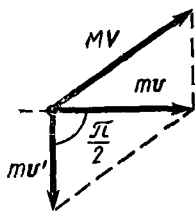


Рис. 37

3-6. При упругом ударе нейтрона о ядро углерода он движется после удара в направлении, перпендикулярном начальному. Считая, что масса  $M$  ядра углерода в  $n = 12$  раз больше массы  $m$  нейтрона, определить, во сколько раз уменьшается энергия нейтрона в результате удара.

**Решение.** Введем обозначения:  $v$  — скорость нейтрона до удара,  $v'$  — после удара;  $V$  — скорость ядра углерода после удара (до удара она равна нулю).

В результате упругого удара импульс и энергия, которыми до удара обладал нейтрон, распределяются между двумя частицами. При этом

по законам сохранения импульса и энергии соответственно имеем:

$$m \mathbf{v} = m \mathbf{v}' + M \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$

По условию задачи требуется найти отношение

$$\alpha = \frac{mv^2}{2} : \frac{mv'^2}{2} = \left( \frac{v}{v'} \right)^2.$$

Для выполнения расчетов необходимо перейти от векторной формы записи уравнения (1) к скалярной форме. Это можно сделать, применив метод проекций, который неоднократно использовался. Однако в данном случае можно поступить проще. Изобразим на чертеже импульсы  $mv'$ ,  $MV$  и их векторную сумму  $mv$ , учитывая, что угол между векторами  $mv$  и  $mv'$  равен  $\pi/2$  (рис.3-7). Из треугольника импульсов имеем

$$(mv)^2 + (mv')^2 = (MV)^2. \quad (3)$$

Почленно разделив уравнение (2) на  $m$  и (3) на  $m^2$  и учитывая условие  $M/m = n$ , получим:

$$v^2 - v'^2 = nV^2, \quad (4)$$

$$v^2 + v'^2 = n^2V^2. \quad (5)$$

Чтобы исключить из системы величину  $V$ , разделим почленно (5) на (4):

$$\frac{v^2 + v'^2}{v^2 - v'^2} = n,$$

а числитель и знаменатель полученного соотношения — на  $v'^2$ , тогда находим

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = n,$$

откуда

$$\alpha = \frac{n+1}{n-1} = \frac{13}{11} = 1,2.$$

3-7. Молот массой  $m = 5,00$  кг, двигаясь со скоростью  $v = 4,00$  м/с, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием равна  $M = 95$  кг. Считая удар абсолютно неупругим, определить энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия. Чему равен к. п. д. процессаковки при данных условиях?

**Решение.** Сначала обоснуем возможность применения законов сохранения для решения данной задачи. Строго говоря, система молот—изделие—наковальня не является замкнутой. На нее действуют извне сила тяжести  $(M + m)g$  и сила давления  $N$  опоры, на которой стоит

наковальня. Во время удара молота вторая сила в той или иной степени, определяемой упругими свойствами опоры, будет превышать первую силу и к рассматриваемой системе будет приложена извне равнодействующая  $R = N - (M + m)g$ .

Однако силы ударного взаимодействия тел весьма велики. Очевидно, условие задачи предполагает, что по сравнению с этими силами величиной  $R$  можно пренебречь, и, таким образом, считать систему замкнутой\*.

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что энергия, затраченная на деформацию изделия, равна разности значений механической энергии системы до и после удара. Так как во время удара изменяется только кинетическая энергия тел (незначительным перемещением тел по вертикали за время удара мы пренебрегаем), то получим для энергии деформации

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)v'^2}{2}, \quad (1)$$

где  $v'$  — общая скорость всех тел системы после неупругого удара. Ее найдем на основании закона сохранения импульса:

$$mv = (m + M)v'. \quad (2)$$

Подставив в формулу (1) значение  $v'$  из уравнения (2), получим ответ на первый вопрос задачи:

$$W_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m}. \quad (3)$$

Так как энергия, расходуемая на ковку изделия, является по смыслу задачи полезной, то к. п. д. процессаковки

$$\eta = \frac{W_{\text{полезн}}}{W_{\text{полн}}} = \left( \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{M+m} \right) : \frac{mv^2}{2} = \frac{M}{M+m}. \quad (4)$$

Подставив числовые значения заданных величин в формулы (3) и (4) и выполнив вычисление, получим:

$$W_{\text{деф}} = 38 \text{ Дж}, \quad \eta = 0,95.$$

Из (4) видно, что к. п. д. процессаковки тем больше, чем больше масса наковальни по сравнению с массой молота. При  $(m/M) \rightarrow 0$   $\eta \rightarrow 1$ .

#### § 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

##### Основные формулы

Второй закон Ньютона для движения центра инерции твердого тела

$$\sum F_i = ma_C. \quad (4.1)$$

\* Практически это будет в том случае, когда железная наковальня стоит на сравнительно мягком основании, скажем, на деревянном полу. Наоборот, если упругие свойства наковальни и опоры близки друг к другу (например, железная наковальня стоит на чугунном основании), то рассмотренную выше систему нельзя считать замкнутой. Тогда будет точнее считать замкнутой систему молот — изделие — наковальня — основание.

где  $a_C$  — ускорение центра инерции. При поступательном движении тела уравнение (4.1) определяет ускорение любой точки тела.

Момент силы  $F$  относительно центра вращения

$$M = [Fr], \quad (4.2)$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из центра вращения в точку приложения силы.

Момент импульса материальной точки относительно центра вращения

$$L = m[vr], \quad (4.3)$$

где  $mv$  — импульс этой точки,  $r$  — ее радиус-вектор.

Момент инерции материальной точки относительно оси вращения

$$I = mr^2, \quad (4.4)$$

где  $m$  — масса точки,  $r$  — расстояние ее от оси.

Момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции материальных точек, составляющих это тело:

$$I = \int_{(m)} r^2 dm. \quad (4.5)$$

Моменты инерции некоторых однородных тел вращения относительно их геометрических осей вращения:

$$\text{тонкостенный цилиндр } I = mr^2, \quad (4.5a)$$

$$\text{сплошной цилиндр } I = mr^2/2, \quad (4.5b)$$

$$\text{шар } I = 2mr^2/5. \quad (4.5v)$$

Момент инерции однородного тонкого стержня длиной  $l$  относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его длине,

$$I = ml^2/12. \quad (4.5r)$$

Момент инерции  $I$  тела относительно любой оси вращения и момент инерции  $I_0$  тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела, связаны соотношением (теорема Штейнера)

$$I = I_0 + md^2, \quad (4.6)$$

где  $m$  — масса тела,  $d$  — расстояние между осями.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$\Sigma M_t = I\varepsilon, \quad (4.7)$$

где  $M = \Sigma M_t$  — результирующий момент всех внешних сил, приложенных к телу,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение.

Момент импульса твердого тела равен произведению момента инерции тела на угловую скорость:

$$L = I\omega. \quad (4.8)$$

Момент импульса системы тел есть векторная сумма моментов импульсов всех тел системы:

$$L = \Sigma L_t = \Sigma I_t \omega_t. \quad (4.9)$$

Закон сохранения момента импульса: если результирующий момент внешних сил, приложенных к системе, равен нулю ( $M = 0$ ), то момент импульса системы есть величина постоянная, т. е.

$$L = \text{const}. \quad (4.10)$$

Работа постоянного момента силы, действующей на тело,

$$A = M\varphi, \quad (4.11)$$

где  $\varphi$  — угол поворота тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$W_{\text{к}} = I\omega^2/2. \quad (4.12)$$

**Общие замечания.** В задачах по курсу общей физики обычно рассматривают вращение твердого тела лишь вокруг неподвижной оси или оси, перемещающейся в пространстве параллельно самой себе. В этом случае все векторы, характеризующие вращательное движение тела:  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ,  $M$ ,  $L$ , — направлены вдоль оси вращения. Это позволяет упростить запись уравнений вращательного движения тела. Выбрав ось вращения за ось проекций, будем в дальнейшем все уравнения писать в скалярном виде. При этом знаки величин  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ,  $M$ ,  $L$  определяют следующим образом. Некоторое направление вращения (по часовой стрелке или против нее) выбирают за положительное. Величины  $\omega$ ,  $L$ ,  $M$  берутся со знаком плюс, если их направление соответствует выбранному положительному направлению, в противном случае — со знаком минус. Знак величины  $\varepsilon$  всегда совпадает со знаком  $M$ .

При ускоренном вращении тела знаки всех четырех величин совпадают; при замедленном движении две пары величин —  $\omega$ ,  $L$  и  $M$ ,  $\varepsilon$  — имеют противоположные знаки..

## А. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Методические указания

1. Уравнениями движения твердого тела являются второй закон Ньютона для движения центра инерции тела (4.1) и основное уравнение динамики вращательного движения (4.7). Их применяют для расчетов сил и ускорений в случае равнопеременного движения твердого тела ( $a_c = \text{const}$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ).

2. Сложное движение твердого тела удобно рассматривать как сумму двух движений: вращательного относительно какой-либо оси и поступательного со скоростью оси. Обычно выбирают ось вращения так, чтобы она проходила через центр инерции тела.

3. При качении однородного цилиндра (шара) по плоскости между линейными величинами, характеризующими движение центра инерции тела, — скоростью  $v_c$  и ускорением  $a_c$  — и угловыми величинами, определяющими вращательное движение тела, — угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  — существуют соотношения\*:

$$v_c = \omega R, \quad (4.13)$$

$$a_c = \varepsilon R, \quad (4.14)$$

где  $R$  — радиус цилиндра (шара).

\* Справедливость этих соотношений становится очевидной, если качение тела рассматривать в системе координат, связанной не с плоскостью, по которой тело катится, а с осью катящегося тела, проходящей через центр инерции.

## Решение задач

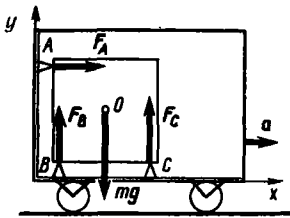


Рис 4-1

4-1. Однородный куб массой  $m = 10,0$  кг лежит в углу вагона на трех опорах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 4-1). Определить силы реакции опор  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $F_C$ , если известно, что вагон движется с ускорением  $a = 2,00$  м/с<sup>2</sup>.

**Решение.** Так как куб движется только поступательно ( $a \neq 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ), уравнения движения твердого тела (4.1) и (4.7) запишутся в виде

$$а) \Sigma F_i = ma, \quad б) \Sigma M_i = 0. \quad (1)$$

На куб действуют сила тяжести  $mg$ , приложенная в центре куба, и три силы реакции опор, направленные нормально к соответствующим граням куба (рис. 4-1). Так как эти силы в совокупности не параллельны между собой, перепишем соотношение (1а) в виде двух скалярных уравнений, выбрав оси проекций, как показано на рисунке. Тогда для осей  $x$  и  $y$  соответственно получим:

$$F_A = ma, \quad F_B + F_C - mg = 0. \quad (2)$$

Чтобы не допустить ошибки, составляя уравнение моментов (1б), необходимо иметь в виду, что основное уравнение динамики вращательного движения (4.7), частным случаем которого является уравнение (1б), выведено для вращения тела вокруг какой-либо *неподвижной* оси, т. е. для движения в инерциальной системе отсчета. Однако, выбирая какую-либо точку ускоренно движущегося тела за ось вращения и составляя уравнение моментов относительно этой оси, мы тем самым рассматриваем движение тела в неинерциальной системе отсчета. В этом случае уравнения движения можно записывать, лишь вводя силы инерции (см. § 2, п.В). Оказывается, что, составляя уравнение (1б), можно все-таки не учитывать сил инерции, *если выбрать ось вращения, проходящую через центр инерции тела*. Действительно, сила инерции всегда приложена в центре инерции, поэтому при таком выборе оси вращения момент этой силы равен нулю.

Итак, выбрав ось вращения, проходящую через центр инерции куба, и приняв положительным направление вращения по часовой стрелке, на основании (1б) запишем

$$F_A (l/2) + F_B (l/2) - F_C (l/2) = 0, \quad (3)$$

где  $l$  — длина ребра куба. Решая систему (2), (3), находим:

$$F_A = ma; \quad F_B = m(g - a)/2; \quad F_C = m(g + a)/2.$$

Подставив в эти формулы числовые значения заданных величин и выполнив вычисление, получим:

$$F_A = 10 \cdot 2 \text{ Н} = 20 \text{ Н}; \quad F_B = 5 \cdot (9,8 - 2) \text{ Н} = 39 \text{ Н}; \quad F_C = 5 \cdot (9,8 + 2) \text{ Н} = 59 \text{ Н}.$$

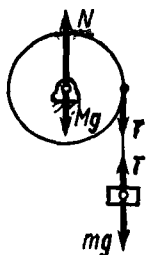


Рис. 4 2

4-2. На горизонтальную ось насажен шкив радиуса  $R$ . На шкив намотан шнур, к свободному концу которого подвесили гирию массой  $m$  (рис. 4-2). Считая массу  $M$  шкива равномерно распределенной по ободу, определить ускорение  $a$ , с которым будет опускаться гирия, силу натяжения  $T$  нити и силу давления  $N$  шкива на ось.

**Решение.** Поскольку ускорение центра инерции шкива  $a_C = 0$  и шкив только вращается, уравнения движения (4.1) и (4.7) для него запишутся в виде

$$а) \Sigma F_i = 0, б) \Sigma M_i = I\epsilon. \quad (1)$$

На шкив действуют силы тяжести  $Mg$ , натяжения  $T$  нити и реакции  $N$  оси. Последняя по третьему закону Ньютона численно равна искомой силе давления шкива на ось. Очевидно, сила  $N$  направлена вертикально вверх, так как только в этом случае может выполняться соотношение (1а). Так как все три вектора коллинеарны (т. е. параллельны одной и той же прямой), уравнение (1а) можно записать в скалярном виде:

$$Mg + T - N = 0. \quad (2)$$

Шкив вращается под действием лишь момента силы  $T$ . Следовательно, уравнение (1б) дает

$$TR = I\epsilon. \quad (3)$$

Момент инерции шкива, поскольку его масса распределена по ободу, найдем по формуле (4.5а):

$$I = MR^2. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (3), описывающие движение шкива, содержат три неизвестных:  $T$ ,  $N$  и  $\epsilon$ . Недостающее уравнение запишем, применив второй закон Ньютона для поступательного движения гири:

$$mg - T = ma. \quad (5)$$

Поскольку шнур сматывается со шкива без проскальзывания, ускорение гири равно линейному ускорению точек на ободу шкива. Следовательно,

$$\epsilon = a/R. \quad (6)$$

Подставив в (3) значения  $I$ ,  $\epsilon$  по формулам (4) и (6), найдем из системы (2), (3), (5) все три неизвестные величины:

$$a = \frac{mg}{M+m}; \quad T = \frac{Mmg}{M+m}; \quad N = \frac{M(M+2m)g}{M+m}.$$

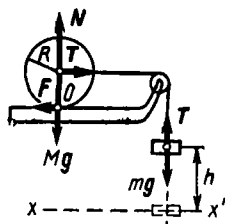


Рис. 4-3

4-3. Система, состоящая из цилиндрического катка радиуса  $R$  и гири, связанных нитью, перекинутой через блок (рис. 4-3), под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение  $a$  центра инерции катка и силу натяжения  $T$  нити. Какую скорость  $v$  приобретет гиря, если она опустится с высоты  $h$ ? Масса цилиндра  $M$ , масса гири  $m$ , массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

**Решение.** Катящийся цилиндр участвует в двух движениях: вращается вокруг оси и движется поступательно со скоростью оси. Поэтому воспользуемся уравнениями движения твердого тела (4.1) и (4.7).

На каток действуют четыре силы: сила натяжения  $T$  нити, сила тяжести  $Mg$ , сила давления опоры  $N$  и сила трения покоя  $F$ . Последняя сила обусловлена тем, что каток не скользит, а катится по плоскости, в то время как первые три силы, проходящие через ось, не могли бы вызвать вращения тела\*. Так как силы  $Mg$  и  $N$  заведомо уравновешиваются (ускорения по вертикали нет), мы их в дальнейшем учитывать не будем.

Возможны два дальнейших пути решения задачи, связанные с двумя способами выбора оси вращения тела:

1. Пусть ось вращения совпадает с геометрической осью цилиндра, проходящей через центр инерции катка. Следовательно, мы будем рассматривать качение тела как сумму двух движений: поступательного со скоростью центра инерции и вращательного вокруг оси, проходящей через центр инерции. Для поступательного движения на основании закона (4.1) получим

$$T - F = Ma. \quad (1)$$

Так как вращающий момент относительно оси цилиндра создает лишь сила трения\*\*, то согласно (4.7) имеем

$$FR = I\epsilon.$$

Это уравнение перепишем, учитывая соотношения (4.56) и (4.14) и сокращая  $R$ :

$$F = Ma/2. \quad (2)$$

\* Действие силы  $F$  не связано с трением качения. Она появляется как сила реакции опоры, противодействующая возникновению скольжения катка по плоскости. При исчезновении силы натяжения  $T$  нити исчезает и сила  $F$ .

\*\* Момент силы инерции мы здесь не рассматриваем, поскольку ось вращения проходит через центр инерции тела (см задачу № 4-1).



Уравнения (1) и (2) содержат три неизвестных:  $T$ ,  $F$ ,  $a$ . Недостающее уравнение запишем, применив второй закон Ньютона для гири, ускорение которой, очевидно, равно ускорению центра инерции катка:

$$mg - T = ma. \quad (3)$$

Решив систему (1), (2), (3), найдем неизвестные величины  $a$ ,  $T$ :

$$a = \frac{2mg}{3M + 2m}; \quad T = \frac{3Mmg}{3M + 2m}.$$

Зная ускорение гири, вычислим искомую скорость по известной формуле скорости равнопеременного движения:

$$v = \sqrt{2ah} = 2\sqrt{mgh/(3M + 2m)}.$$

2. За ось вращения выберем ось, которая проходит через точку касания цилиндра с плоскостью (точка  $O$ , рис. 4-3), т. е. будем рассматривать качение тела как вращение вокруг мгновенной оси. Вращающим моментом относительно этой оси является момент силы  $T$ , поэтому на основании уравнения (4.7), получим

$$TR = I'e. \quad (4)$$

Момент инерции цилиндра относительно этой оси найдем по формуле (4.5б) и теореме Штейнера (4.6):

$$I' = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2. \quad (5)$$

Как и в первом способе, записав второй закон Ньютона для гири (3), из уравнений (4) и (3) с учетом соотношений (5) и (4.14) найдем значения ускорения  $a$  и силы  $T$ , совпадающие с полученными ранее.

Скорость гири вычислим так же, как в первом способе.

**З а м е ч а н и е.** Оба способа решения задачи основаны на использовании уравнений движения твердого тела. Ниже дан третий способ решения этой задачи, связанный с применением закона сохранения энергии (см. задачу № 4-5).

## Б. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### Методические указания

1. Закон сохранения энергии широко применяется в решении задач на вращательное движение твердого тела, особенно в случаях неравнопеременного вращения, происходящего под действием переменного момента сил. Все замечания о применении закона сохранения энергии, сделанные в § 3, п.Б, относятся и к случаю вращения твердого тела. При этом следует помнить, что полная кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетической энергии его поступательного движения со скоростью центра инерции и кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции.

2. Закон сохранения момента импульса во вращательном движении, так же как и закон сохранения импульса в поступательном движении, позволяет исключать из рассмотрения любые силы, действующие внутри системы, в том числе силы трения. Поэтому закон применяют в тех задачах на вращательное движение твердого тела (или системы тел), где характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или вообще неизвестен.

Закон сохранения момента импульса можно применять к любой системе при условии, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к этой системе, равен нулю. Силы при этом могут и не уравновешиваться.

### Решение задач

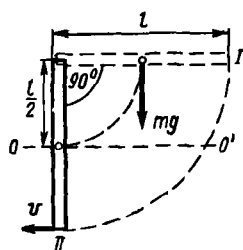


Рис. 4-4

4-4. Тонкий однородный стержень длиной  $l$  может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно ему. Стержень отклонили на  $90^\circ$  от положения равновесия и отпустили. Определить скорость  $v$  нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

**Решение.** Стержень поворачивается вокруг оси под действием момента силы тяжести. Так как при опускании стержня этот момент уменьшается, вращение стержня не будет равнопеременным, поэтому применение основного уравнения динамики вращательного движения (4.7) здесь нецелесообразно.

Воспользуемся законом сохранения энергии. Так как в данном случае отсутствуют силы трения, энергия стержня (точнее, системы стержень — Земля) не изменяется при его движении, поэтому

$$W_1 = W_{II},$$

где  $W_1$  есть потенциальная энергия поднятого стержня,  $W_{II}$  — кинетическая энергия его вращательного движения, если принять нулевой уровень отсчета высоты ( $OO'$ , рис. 4-4) проходящим через центр тяжести стержня в его нижнем положении. Следовательно,

$$W_1 = mgl/2, \quad W_{II} = I\omega^2/2.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств и учитывая, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, на основании соотношения (4.5г) и теоремы Штейнера (4.6) равен

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

а также что  $v = \omega l$ , получим для искомой скорости

$$v = \sqrt{3gl}.$$

**4-5.** Решить задачу № 4-3 на основе закона сохранения энергии.

**Решение.** Анализируя условие задачи № 4-3, мы выяснили, что на каток действует сила трения. Несмотря на это, к системе каток — гири можно применить закон сохранения механической энергии, поскольку эта сила есть сила трения покоя. В отличие от силы трения скольжения и трения качения эта сила не совершает работы, связанной с убылью механической энергии системы.

Начальная энергия системы  $W_1$  есть потенциальная энергия поднятых над Землей тел. При этом, поскольку потенциальная энергия катка во все время его движения не изменяется, вообще не будем ее учитывать при составлении уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Выберем нулевой уровень отсчета высоты проходящим через центр тяжести опущенной гири ( $xx'$ , см. рис. 4-3). Тогда получим

$$W_1 = mgh. \quad (1)$$

Будем рассматривать качение цилиндра как результат двух движений: поступательного со скоростью центра инерции и вращательного вокруг оси, проходящей через центр инерции. Тогда конечная энергия системы, когда гиря опустится с высоты  $h$ , будет равна

$$W_2 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Первые два члена в правой части (2) выражают кинетическую энергию поступательного и вращательного движений катка. Приравнявая на основе закона сохранения энергии правые части (1) и (2), получим

$$mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (3)$$

Учитывая соотношения (4.5б) и (4.13), из уравнения (3) найдем скорость гири:

$$v = 2\sqrt{mgh/(3M+2m)}. \quad (4)$$

Определим ускорение центра инерции катка, равное ускорению гири, приняв во внимание, что рассматриваемая система движется под действием постоянных сил и, следовательно, ее ускорение постоянно. Сравнивая выражение (4) с формулой скорости равнопеременного движения  $v = \sqrt{2ah}$ , получим для ускорения прежний ответ:  $a = 2mg/(3M+2m)$ .

Для вычисления силы натяжения  $T$  нити еще раз воспользуемся законом сохранения энергии. На основании этого закона работа, совершенная силой  $T$ , приложенной к центру инерции катка, при перемещении последнего на расстояние  $l = h$  равна кинетической энергии, полученной катком при этом перемещении, т. е.

$$Th = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Отсюда, учитывая соотношения (4.5б), (4.13) и (4), найдем силу  $T$ :

$$T = 3Mmg/(3M + 2m).$$

**З а м е ч а н и е.** Сравнивая различные методы решения задачи № 4-3, сделаем выводы, относящиеся к любой системе связанных между собой тел (или одному телу), движущихся лишь под действием сил тяжести и реакций связей: 1) для определения конечной скорости тел целесообразно применять метод, основанный на законе сохранения энергии. При этом можно не рассматривать силы, действующие на систему, достаточно убедиться в отсутствии среди них сил трения, рассеивающих механическую энергию системы; 2) для определения сил и ускорений следует пользоваться уравнениями движения твердого тела (4.1) и (4.7).

4-6. Круглая платформа радиуса  $R = 1,00$  м, момент инерции которой  $I = 130$  кг·м<sup>2</sup>, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, делая  $n_1 = 1,00$  об/с. На краю платформы стоит человек, масса которого  $m = 70$  кг. Сколько оборотов в секунду  $n_2$  будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

**Решение.** Перемещаясь по платформе, человек взаимодействует с ней. О характере этого взаимодействия нам ничего не известно, поэтому основное уравнение динамики вращательного движения к платформе применить невозможно. В этой задаче в отличие от двух предыдущих у нас нет оснований и для применения закона сохранения энергии, поскольку не исключено, что, перемещаясь по вращающейся платформе, человек будет совершать работу, изменяя механическую энергию вращающейся системы платформа — человек.

Учтем, что, согласно условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции. Это означает, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к вращающейся системе, равен нулю. Следовательно, для системы платформа — человек выполняется закон сохранения момента импульса (4.10), который запишем так:

$$L_1 = L_2. \quad (1)$$

Подсчитаем начальный момент импульса системы  $L_1$  (человек стоит на краю платформы) и конечное его значение  $L_2$  (человек стоит в центре платформы):

$$L_1 = I_1 \omega_1 = (I + mR^2) \cdot 2\pi n_1, \quad (2)$$

где  $mR^2$  — момент инерции человека,  $I_1 = I + mR^2$  — начальный момент инерции системы,  $\omega_1$  — ее начальная угловая скорость;

$$L_2 = I_2 \omega_2 = I \cdot 2\pi n_2, \quad (3)$$

где  $I_2$  и  $\omega_2$  — конечные момент инерции и угловая скорость системы. Здесь учтено, что момент инерции человека, стоящего в центре платформы, согласно формуле (4.4) равен нулю. Решая систему (1) — (3), получаем

$$n_2 = n_1(I + mR^2)/I.$$

Подставив в эту формулу числовые значения заданных величин и выполнив вычисление, находим

$$n_2 = 1,5 \text{ об/с.}$$

**З а м е ч а н и е.** Мы видим, что при уменьшении момента инерции системы, связанном с перемещением человека в центр платформы, увеличилась угловая скорость вращения системы:  $\omega_2 > \omega_1$ . Следовательно, должно иметь место неравенство  $I_2 \omega_2^2 > I_1 \omega_1^2$ , поскольку  $I_2 \omega_2 = I_1 \omega_1$ . Но это, согласно формуле (4.12), означает увеличение кинетической энергии вращающейся системы. Таким образом, сделанное нами вначале предположение о том, что человек, перемещаясь от края платформы к центру, совершает работу, изменяя механическую энергию вращающейся системы, соответствует действительности. Решение задачи, основанное на постоянстве механической энергии системы, было бы неверным. Закон сохранения энергии позволяет лишь вычислить работу, совершенную человеком, как величину, равную изменению механической энергии системы:

$$A = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} - \frac{I_1 \omega_1^2}{2}.$$

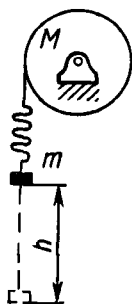


Рис. 4-5

4-7. Маховик, имеющий вид диска радиуса  $R$  и массы  $M$ , может вращаться вокруг горизонтальной оси. К его цилиндрической поверхности прикреплен шнур, к другому концу которого подвешен груз массы  $m$  (рис. 4-5). Груз был приподнят и затем отпущен. Упав свободно с высоты  $h$ , груз натянул шнур и благодаря этому привел маховик во вращение. Какую угловую скорость  $\omega$  приобрел при этом маховик?

**Р е ш е н и е.** Когда падающий груз натягивает шнур, возникает взаимодействие посредством шнура между грузом и маховиком. Мы ничего не знаем о характере этого взаимодействия, зависящего от упругих свойств тел (в основном шнура). Ясно лишь, что в результате этого взаимодействия увеличивается скорость точек цилиндрической поверхности маховика и уменьшается скорость падения гири. Шнур растягивается до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. Такое весьма кратковременное взаимодействие между грузом и маховиком можно рассматривать как неупругий удар\*. Как и при всяком неупругом ударе, закон сохранения механической энергии здесь не применим.

\* Именно при неупругом ударе тела деформируются до тех пор, пока их скорости не станут равными.

Однако к системе груз — маховик можно применить закон сохранения момента импульса. На эту систему действуют три внешних силы: силы тяжести диска, реакции опоры и сила тяжести груза. Поскольку первые две силы проходят через ось диска, их момент относительно этой оси равен нулю. Действием же момента силы тяжести груза, равного  $mgR$ , во время удара можно пренебречь по сравнению с моментом очень больших сил взаимодействия груза и маховика при ударе. Таким образом, можно считать результирующий момент всех внешних сил относительно оси диска *во время удара* равным нулю. Тогда, по закону сохранения момента импульса (4.10),

$$L_1 = L_2, \quad (1)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — моменты импульса системы груз — маховик соответственно в начале и конце удара.

Так как в начале удара диск был еще неподвижен, величина  $L_1$  представляет собой момент импульса падающего груза относительно оси вращения диска. Принимая груз за материальную точку, согласно формуле (4.3) получим

$$L_1 = mv_1R, \quad (2)$$

где скорость  $v_1$  гири найдем по известной формуле скорости при свободном падении:

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Величина  $L_2$  равна суммарному моменту импульса гири и вращающегося диска, когда скорости груза и точек цилиндрической поверхности диска стали одинаковыми:

$$L_2 = mv_2R + I\omega, \quad (4)$$

где величины  $v_2$  и  $\omega$  связаны соотношением

$$v_2 = \omega R. \quad (5)$$

Подставим в уравнение (1) значения  $L_1$  и  $L_2$  по (2) и (4). Решив его относительно  $\omega$  с учетом формул (3), (5) и (4.5б), получим

$$= m\sqrt{2gh} / \left( m + \frac{1}{2} M \right) R.$$

4-8. Маятник в виде однородного шара, жестко скрепленного с тонким стержнем, длина которого равна радиусу шара, может качаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня (рис. 4-6). В шар нормально к его поверхности ударила пуля массы  $m = 10,0$  г, летевшая горизонтально со скоростью  $v = 800$  м/с, и застряла в шаре. Масса шара  $M = 10,0$  кг, радиус его  $R = 15$  см. На какой угол  $\alpha$  отклонится маятник в результате удара пули? Массой стержня пренебречь.

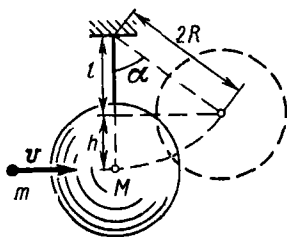


Рис. 4-6

**Решение.** Как видно из чертежа, искомый угол  $\alpha$  связан с высотой  $h$  подъема центра шара:

$$\cos \alpha = (2R - h)/2R. \quad (1)$$

Так как величина  $h$  определяет потенциальную энергию, полученную шаром вследствие удара пули, выясним возможность применения закона сохранения энергии. Поскольку в результате удара пули в шар скорости обоих тел станут одинаковыми, этот удар следует считать неупругим. Значит, механическая энергия в процессе удара не сохраняется (частично переходит во внутреннюю энергию). Однако после удара механическая энергия движущейся системы маятник — пуля будет сохраняться, так как теперь в ней действуют только потенциальные силы. Следовательно, при подъеме шара вместе с пулей кинетическая энергия вращательного движения системы будет превращаться в потенциальную энергию поднятых тел. По закону сохранения энергии,

$$I\omega^2/2 = Mgh + mgh', \quad (2)$$

где  $I$  — момент инерции маятника вместе с застрявшей в нем пулей,  $h'$  — высота подъема пули. Строго говоря, не зная, в каком месте шара застряла пуля, мы не можем вычислить величины  $I$  и  $h'$ . Однако, по условию задачи,  $M \gg m$ , поэтому, пренебрегая массой пули по сравнению с массой шара, отбросим величину  $mgh'$  в уравнении (2) и вычислим момент инерции маятника на основании формулы (4.5в) и теоремы Штейнера (4.6):

$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M(2R)^2 = 4,4MR^2. \quad (3)$$

Теперь определим угловую скорость  $\omega$ , которую получит система в результате удара пули. Воспользуемся законом сохранения момента импульса. Возможность применения этого закона основана на следующем. Во время удара на систему маятник — пуля извне действуют силы тяжести и реакции опоры. Вторая сила проходит через ось вращения, поэтому ее момент равен нулю. Учитывая, что за время удара маятник не успеет заметно отклониться от вертикали, и принимая во внимание условие  $M \gg m$ , можно считать, что и первая сила во время удара проходит через ось и, следовательно, ее момент также равен нулю. Значит, согласно закону (4.10) момент импульса системы во время удара пули будет сохраняться. Обозначив через  $L_1$  и  $L_2$  моменты импульса системы соответственно в начале и конце процесса удара, можно записать

$$L_1 = L_2. \quad (4)$$

Величина  $L_1$  есть момент импульса летящей пули относительно оси вращения маятника (сам маятник пока еще неподвижен). На основании определения (4.3) имеем

$$\dot{L}_1 = mv \cdot 2R.$$

Момент импульса  $L_2$  маятника с застрявшей в нем пулей, согласно определению (4.8), равен

$$L_2 = I\omega = 4,4MR^2\omega. \quad (6)$$

Решая систему (4)—(6), получаем для угловой скорости

$$\omega = mv/2,2MR. \quad (7)$$

Исключив из системы (1)—(3), (7) неизвестные  $I$ ,  $\omega$ ,  $h$ , найдем

$$\cos \alpha = 1 - m^2v^2/4,4M^2gR.$$

Подставив в эту формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $M = 10,0$  кг,  $m = 1,00 \cdot 10^{-2}$  кг,  $R = 0,15$  м,  $v = 800$  м/с, и произведя вычисления, получим:

$$\cos \alpha = 0,90; \quad \alpha = 26^\circ.$$

### § 5. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

#### Основные формулы

Закон всемирного тяготения: две материальные точки, имеющие массы  $m_1$  и  $m_2$  и находящиеся на расстоянии  $r$ , притягиваются с силой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  кг<sup>-1</sup>·м<sup>3</sup>·с<sup>-2</sup> — гравитационная постоянная.

Напряженностью гравитационного поля называется векторная величина

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{m'}, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, с которой поле действует на помещенную в данную точку частицу массой  $m'$ .

Напряженность гравитационного поля, созданного материальной точкой массы  $m$  на расстоянии  $r$  от нее,

$$G = \gamma \frac{m}{r^2}. \quad (5.3)$$

Потенциальная энергия тяготения двух материальных точек, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ , находящихся на расстоянии  $r$ , при условии, что  $W_\infty = 0$ , равна

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (5.4)$$

Потенциал гравитационного поля (определяющая формула)

$$\varphi = \frac{W}{m'}, \quad (5.5)$$

где  $W$  — потенциальная энергия частицы массой  $m'$ , помещенной в данную точку поля.

Потенциал поля, созданного материальной точкой массы  $m$  на расстоянии  $r$  от нее,

$$\varphi = -\gamma \frac{m}{r}. \quad (5.6)$$



Работа сил поля по перемещению частицы  $m'$  между двумя точками поля, потенциалы которых  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ,

$$A = \Delta W = m' (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (5.7)$$

Законы Кеплера:

I. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

II. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

III. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (5.8)$$

### Методические указания

1. Отметим, что в формулах (5.1), (5.4)  $r$  есть расстояние между *материальными точками*. Если взаимодействующие тела нельзя считать материальными точками, то эти формулы к ним неприменимы. Однако если неточечные тела обладают сферически симметричным распределением массы (например, однородные шары), то формулы (5.1), (5.4) дают правильный результат, если под  $r$  понимать расстояние между центрами взаимодействующих тел. Это же замечание относится и к формулам (5.3), (5.6), где  $r$  в случае сферической симметрии есть расстояние от центра тела до рассматриваемой точки\*.

2. Задачи на движение тела под действием силы тяготения можно решать методами, основанными на применении к телу второго закона Ньютона, а к изолированной системе — законов сохранения (см. § 2, 3).

Использование величин, характеризующих гравитационное поле, — напряженности  $\mathbf{G}$  и потенциала  $\varphi$  — часто упрощает решение задачи. Так, введение вектора  $\mathbf{G}$  позволяет в некоторых случаях не рассматривать силы, действующие на тело (см. задачу № 5-2), а понятие потенциала — вычислять работу сил тяготения по формуле (5.7), когда тело движется в поле тяготения нескольких небесных тел (см. задачу № 5-4).

3. Законы Кеплера, описывающие движение планет вокруг Солнца, применимы также для движения тел во всяком центральном поле, например в поле тяготения Земли (см. задачу № 5-5). *Центральным* называют такое силовое поле, в котором сила, действующая на каждую частицу, зависит только от ее расстояния до определенной точки — центра поля и направлена всегда по радиусу, проведенному из центра поля к частице.

### Решение задач

5-1. Определить напряженность  $G_0$  и потенциал  $\varphi_0$  гравитационного поля Земли около ее поверхности.

**Решение.** Задачу можно решить при помощи формул (5.3), (5.6), в которые подставляются значения  $m$  и  $r$  для Земли, взятые из

\* Теми же методами, которые применяются в электростатике, можно показать, что гравитационное поле тела, обладающего сферически симметричным распределением массы, в точках вне тела таково, как если бы вся масса тела была сосредоточена в центре.

справочных таблиц. Однако есть более короткий способ. Формула (5.2) выражает величину  $G$  через отношение силы тяготения, действующей на частицу, к массе этой частицы. Но согласно второму закону Ньютона это отношение равно ускорению  $a$  частицы, которое она получает под действием силы тяготения. Следовательно,

$$G = a.$$

У поверхности Земли это ускорение есть ускорение силы тяжести  $g$  — величина, постоянная для всех тел. Таким образом, получаем

$$G_0 = g \approx 9,8 \text{ Н/кг.}$$

Зная напряженность гравитационного поля Земли, найдем из соотношений (5.6) и (5.3) его потенциал:

$$\varphi_0 = -G_0 r = -9,8 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = -6,2 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг.}$$

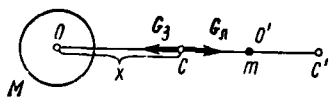


Рис 5-1

5-2. На каком расстоянии от центра Земли должно находиться тело, чтобы силы его притяжения к Земле и Луне взаимно уравнивались? Считать, что масса  $M$  Земли больше массы  $m$  Луны в 81 раз, а расстояние между их центрами равно 60 радиусам Земли.

**Решение.** Так как, по условию, сила  $F$  суммарного гравитационного поля Земли и Луны, действующая на помещенное в искомую точку тело, равна нулю, из формулы (5.2) следует, что и величина  $G$  в этой точке равна нулю. Здесь  $G$  — сумма векторов напряженности  $G_3$  и  $G_{\text{л}}$  полей Земли и Луны соответственно. Сумма двух векторов равна нулю только тогда, когда они противоположны по направлению и равны по модулю:

$$G_3 = G_{\text{л}}. \quad (1)$$

Поскольку векторы напряженности гравитационных полей как Земли, так и Луны направлены к их центрам, легко сообразить, что искомая точка  $C$  должна лежать на отрезке прямой  $OO'$ , соединяющем центры Земли и Луны (рис. 5-1). Обозначим:  $OC = x$ . Тогда  $O'C = 60R - x$ . Подставив в (1) значения напряженностей  $G_3$  и  $G_{\text{л}}$  по формуле (5.3) и учитывая данное в условии соотношение масс Земли и Луны ( $M = 81m$ ), запишем

$$\gamma \frac{81m}{x^2} = \gamma \frac{m}{(60R - x)^2}.$$

Решив уравнение, найдем:

$$x_1 = 54R, \quad x_2 = 67,5 R.$$

Корень  $x_2 > 60 R$  означает, что искомая точка лежит на прямой  $OO'$  за Луной (точка  $C'$  на рис. 5-1). Очевидно, это значение  $x_2$  не удовлетворяет условию, ибо поля Земли и Луны, будучи в точке  $C'$  одинаково направленными, не уравнивают друг друга, несмотря на равенство модулей векторов  $G_3$  и  $G_{\text{л}}$ . Отбросив корень  $x_2$ , получим ответ:  $x = 54R$ .

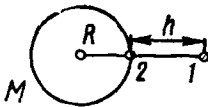


Рис 5 2

5-3. Ракета, летевшая над поверхностью Земли на высоте  $h$ , в результате кратковременного действия мощной тормозной установки останавливается. С какой скоростью упадет ракета на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**Решение.** После прекращения работы тормозной установки на ракету действует лишь гравитационное поле Земли. Это поле потенциально: полная энергия тела, движущегося в этом поле, равная сумме его кинетической и потенциальной энергий, сохраняется.

В предыдущих параграфах мы уже рассматривали движение тел под действием силы тяготения. При этом, ограничиваясь небольшими по сравнению с размерами Земли участками пространства, считали поле тяготения однородным, т. е. принимали  $G = \text{const}$  для всех точек пространства. В настоящей задаче этого сделать нельзя. Поэтому формулу потенциальной энергии поднятого над Землей тела  $W_{\text{п}} = mgh$ , справедливую лишь для однородного поля, надо заменить более общей формулой потенциальной энергии тяготения (5.4).

Из закона сохранения энергии, примененного к системе ракета — Земля, следует, что падающая ракета приобретает кинетическую энергию за счет убыли потенциальной энергии в поле тяготения Земли, т. е.

$$W_{\text{к}} = -\Delta W_{\text{п}}, \quad (1)$$

где  $W_{\text{к}}$  — кинетическая энергия ракеты у поверхности Земли,  $\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1}$  — изменение потенциальной энергии ракеты за время ее падения из точки 1 в точку 2 (рис. 5-2). Подставив в уравнение (1) значения энергий  $W_{\text{п}1}$  и  $W_{\text{п}2}$  по формуле (5.4), а также значение  $W_{\text{к}}$ , получим

$$\frac{mv^2}{2} = \left( -\gamma \frac{Mm}{R+h} \right) - \left( -\gamma \frac{Mm}{R} \right) \quad (2)$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Земли,  $m$  — масса ракеты. Решив это уравнение относительно  $v$ , найдем

$$\sqrt{2\gamma M \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)}. \quad (3)$$

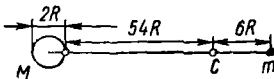


Рис 5 3

5-4. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы забросить тело массы  $m' = 1000$  кг с поверхности Земли на Луну? Считать, что при перемещении тела взаимное положение Луны и Земли не меняется. Сопротивление воздуха не учитывать. Остальные данные взять из задачи № 5-2.

**Решение.** В задаче № 5-2 была найдена точка, в которой гравитационные поля Земли и Луны уравновешиваются. Эта точка  $C$  (рис. 5-3) делит весь путь ракеты на две части. На первом участке от Земли до точки  $C$  сила тяготения суммарного гравитационного поля Земли и Луны направлена к Земле, на втором участке от точки  $C$  до Луны — к Луне. Очевидно, на первом участке необходимо совершать

работу против силы тяготения, на втором участке — не обязательно\*. Работа будет минимальной, если тело достигнет точки  $C$  с минимальной скоростью, необходимой для дальнейшего движения. Эту скорость, а значит, и кинетическую энергию в точке  $C$  можно считать равной нулю, ибо, достигнув точки  $C$  с любой, сколь угодно малой скоростью, тело тут же начнет двигаться ускоренно к Луне. Таким образом, работа пойдет только на увеличение потенциальной энергии тела в суммарном поле тяготения Земли и Луны. Поэтому она может быть вычислена по формуле (5.4) или (5.7).

Так как соотношение (5.7) определяет работу сил поля, а надо найти работу против сил поля, то для искомой величины запишем

$$A = -m' (\varphi_1 - \varphi_2) = m' (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы гравитационного поля у поверхности Земли и в точке  $C$  соответственно.

Чтобы правильно вычислить потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , учтем, что тело движется все время в суммарном гравитационном поле Земли и Луны.

Из принципа суперпозиции (наложения) полей следует, что потенциал в каждой точке пространства, в котором существуют несколько полей, равен сумме потенциалов каждого поля в отдельности. Таким образом, для каждой точки потенциал суммарного поля

$$\varphi = \varphi_3 + \varphi_1, \quad (2)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  — потенциалы полей тяготения Земли и Луны в этой точке. Учитывая соотношения, приведенные в условии задачи № 5-2, а также полученный результат ( $x = 54R$ ), на основании формул (5.6) и (2) вычислим потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\gamma \frac{M}{R} - \gamma \frac{M/81}{59R} \approx -\gamma \frac{M}{R}, \\ \varphi_2 &= -\gamma \frac{M}{54R} - \gamma \frac{M/81}{6R} = -0,020\gamma \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения потенциалов в формулу (1), получим

$$A = 0,98\gamma \frac{Mm'}{R} = 0,98 |\varphi_0| m',$$

где  $|\varphi_0| = \gamma M/R$  — абсолютное значение потенциала гравитационного поля Земли у ее поверхности.

Так как  $|\varphi_0| = 6,2 \cdot 10^7$  Дж/кг (см. задачу № 5-1), а  $m' = 1000$  кг по условию, то, подставив эти значения в последнюю формулу,

$$A = 0,98 \cdot 6,2 \cdot 10^7 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 6,1 \cdot 10^{10} \text{ Дж}.$$

**З а м е ч а н и е.** Если вычислить искомую работу по формуле (5.7), применив ее для всего пути от Земли до Луны, т. е. считать  $\varphi_1$  потенциалом поля у поверхности Земли, а  $\varphi_2$  — потенциалом поля у поверхности Луны, то будет получен неверный ответ. Дело в том, что в результате перемещения тела от Земли к Луне возрастет не только его потенциальная энергия, но и кинетическая: если движение нача-

\* Если движущимся к Луне телом является ракета, то для ее мягкой посадки нужно совершить работу и на втором участке: двигатели тормозной установки должны погасить скорость ракеты, подлетающей к Луне.

лось из состояния покоя, то в конце пути тело, разогнанное силой притяжения к Луне, будет обладать определенной скоростью. Работа, совершенная над телом, равна изменению *полной* энергии тела, а не только потенциальной. Однако формула (5.7) выражает только работу, которая обусловлена изменением потенциальной энергии тела в поле тяготения, поэтому не дает правильного ответа, если ее применить для всего пути движения тела от Земли до Луны.

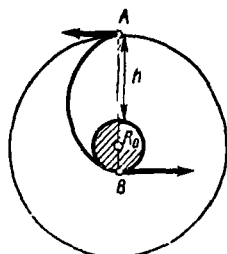


Рис 5 4

5-5. Ракета, летевшая по круговой орбите на высоте  $h$  от поверхности Земли, в результате кратковременного действия тормозной установки уменьшила свою скорость и начала снижаться. Двигаясь все время под действием силы тяжести, ракета достигает Земли, причем ее скорость в этот момент направлена по касательной к земной поверхности. Определить время спуска ракеты.

**Решение.** Движение ракеты в поле тяготения Земли, как и движение тела во всяком центральном поле, подчиняется законам Кеплера. Из I закона следует, что во время спуска ракета двигалась по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр земного шара (рис. 5-4). Выясним, какую часть эллипса составила траектория ракеты на участке спуска. Поскольку под действием тормозной установки изменился лишь модуль скорости, но не ее направление, можно заключить, что в момент начала спуска скорость ракеты была перпендикулярна ее радиусу-вектору. Таково же направление скорости ракеты относительно радиуса-вектора в конце спуска, так как по условию в этот момент ракета двигалась по касательной к поверхности.

Существуют лишь две точки эллипса (точки  $A$  и  $B$ , рис. 5-4), в которых радиус-вектор перпендикулярен касательной к кривой. Эти точки лежат на большой оси эллипса, являющейся осью его симметрии.

Так как скорость ракеты направлена по касательной к траектории, то приходим к выводу, что траектория ракеты на участке ее спуска представляет собой половину эллипса.

Теперь, применив III закон Кеплера, можно определить время спуска ракеты. Для этого сопоставим движение двух тел в поле тяготения Земли: ракеты и Луны, имея в виду, что для последней период ее обращения  $T_{\text{л}}$  и радиус орбиты  $R_{\text{л}}$  (принимаям приближенно движение Луны круговым) являются табличными величинами. По III закону Кеплера имеем

$$T^2/T_{\text{л}}^2 = a^3/R_{\text{л}}^3 \quad (1)$$

Здесь  $a$  — большая полуось орбиты ракеты,  $T$  — период ее обращения по эллипсу. Как видно из рис. 5-4, где  $R_0$  — радиус Земли,

$$a = R_0 + h/2, \quad (2)$$

Учитывая, что время  $t$  спуска ракеты равно половине периода  $T$  ее обращения, из уравнений (1) и (2) найдем

$$t = (T_{\text{л}}/2) (R_0 + h/2)^{3/2}/R_{\text{л}}^{3/2}.$$

## Глава 2

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

### § 6. ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

#### Основные формулы

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (6.1)$$

где  $p$  — давление газа,  $V$  — его объем,  $T$  — абсолютная температура,  $m$  — масса,  $\mu$  — молярная масса,  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) — молярная (универсальная) газовая постоянная

Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений  $p_i$ , т. е.

$$p = \sum p_i. \quad (6.2)$$

Барометрическая формула, выражающая убывание давления газа с высотой  $h$  над поверхностью Земли:

$$p_h = p_0 e^{-\mu g h / RT}, \quad (6.3)$$

где  $p_0$  — давление на высоте  $h = 0$ ,  $T$  — абсолютная температура газа,  $g$  — ускорение силы тяжести

#### Методические указания

1. Уравнение состояния идеального газа (6.1) применяют к газам, взятым при условиях, не слишком сильно отличающихся от нормальных ( $t_0 = 0^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па), а также к разреженным газам. Для сильно сжатых (уплотненных) газов, находящихся при очень больших давлениях (свыше  $10^7$  Па) или при слишком низких температурах, уравнение (6.1) неприменимо (см. § 9, п.А).

2. Уравнение состояния (6.1) связывает между собой пять физических величин, характеризующих состояние газа, —  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $m$ ,  $\mu$  — и позволяет по заданным четырем найти пятую величину. Напомним, что отношение  $\nu = m/\mu$  представляет собой число молей газа,  $\rho = m/V$  есть плотность газа,  $v = V/m$  — удельный объем газа.

3. В условии некоторых задач даются показания технических манометров. Они устроены так, что измеряют не полное давление газа в баллоне, а лишь давление, избыточное над атмосферным  $p_{\text{атм}}$ . Поэтому полное давление газа в баллоне равно показанию манометра, увеличенному на  $p_{\text{атм}}$ .

4. Приводим соотношения между некоторыми внесистемными единицами давления, встречающимися в литературе:

1 атм (физическая атмосфера) = 760 мм рт. ст. =  $1,01 \cdot 10^5$  Па;

1 ат (техническая атмосфера) = 1 кгс/см<sup>2</sup> =  $9,8 \cdot 10^4$  Па.

При решении задач небольшим различием между 1 атм и 1 ат часто пренебрегают.

### Решение задач

6-1. Какое количество кислорода выпустили из баллона емкостью  $V = 10,0$  л, если при этом показания манометра на баллоне изменились от 14,0 до 7,0 ат, а температура понизилась от  $t_1 = 27^\circ$  до  $t_2 = 7^\circ$ С?

**Решение.** Масса выпущенного из баллона газа  $\Delta m$  равна разности между начальной массой  $m_1$  кислорода в баллоне и его конечной массой  $m_2$ :

$$\Delta m = m_1 - m_2. \quad (1)$$

Так как условия, при которых кислород находится в баллоне, не слишком сильно отличаются от нормальных, газ можно считать идеальным. Поэтому, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа (6.1), запишем его для начального и конечного состояний газа в баллоне:

$$\rho_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT_1, \quad \rho_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT_2. \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) получим

$$\Delta m = \frac{\mu V}{R} \left( \frac{\rho_1}{T_1} - \frac{\rho_2}{T_2} \right). \quad (3)$$

Чтобы найти давления газа в баллоне  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , прибавим к показаниям манометра величину атмосферного давления, равную 1,0 ат.

Выразим в единицах СИ числовые значения величин, входящих в формулу (3):  $\rho_1 = 15 \cdot 9,8 \cdot 10^4$  Па,  $\rho_2 = 7,0 \cdot 9,8 \cdot 10^4$  Па,  $T_1 = 300$  К,  $T_2 = 280$  К,  $V = 1,00 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>,  $\mu = 0,032$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль·К). Подставив эти значения в (3) и выполнив вычисление, найдем

$$\Delta m = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ кг} = 95 \text{ г.}$$

6-2. Найти молярную массу воздуха, считая, что он состоит по массе из одной части кислорода и трех частей азота ( $m_1:m_2 = 1:3$ ).

**Решение.** Прежде всего уточним понятие молярной массы смеси газов. Свойствами идеального газа могут обладать не только химически однородные газы, но и газовые смеси. Чтобы применить уравнение состояния для газовой смеси, ей необходимо приписать некоторую, хотя и лишённую химического смысла, относительную молекулярную массу. Ее называют кажущейся относительной молекулярной массой. Масса смеси в граммах, численно равная ей, представляет собой молярную массу  $\mu_{см}$  смеси. Таким образом, величину  $\mu_{см}$  выби-

рают такой, чтобы она удовлетворяла уравнению газового состояния, записанному для смеси:

$$pV = \frac{m}{\mu_{\text{см}}} RT. \quad (1)$$

Чтобы решить данную задачу, рассмотрим каждую из газовых компонент, заключенных в объеме смеси, и запишем для нее уравнение состояния:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad (2)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT. \quad (3)$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  — парциальные давления каждой компоненты. Для смеси справедлив закон Дальтона (6.2):

$$p = p_1 + p_2. \quad (4)$$

Складывая почленно равенства (2) и (3), получим с учетом (4)

$$pV = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT. \quad (5)$$

Сравнивая (1) и (5) и учитывая, что масса смеси  $m = m_1 + m_2$ , найдем

$$\frac{m_1 + m_2}{\mu_{\text{см}}} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \quad (6)$$

откуда

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}.$$

Подставив числовые значения величин в единицах СИ:  $\mu_1 = 0,032$  кг/моль,  $\mu_2 = 0,028$  кг/моль — и учитывая соотношение  $m_2 = 3m_1$ , получим

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\mu_1 \mu_2 (m_1 + 3m_1)}{\mu_1 3m_1 + \mu_2 m_1} = \frac{4\mu_1 \mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} = 0,029 \text{ кг/моль.}$$

**З а м е ч а н и е.** Из формулы (6) следует, что число молей смеси равно сумме чисел молей отдельных компонент этой смеси. Иногда соотношение (6) считают как очевидное соотношение, не требующее доказательства. На самом деле уравнение (6), как это следует из приведенного решения задачи, является следствием закона Дальтона. Не применив этого закона, нельзя решить задачу.

6-3 Сколько времени надо откачивать газ из колбы объемом  $V_0 = 1,5 \cdot 10^3$  см<sup>3</sup> ротационным масляным насосом, чтобы давление понизилось от атмосферного  $p_0 = 760$  мм рт. ст. до  $p = 0,10$  мм рт. ст.? Быстроту действия насоса для указанного интервала давлений считать постоянной и равной  $K = 180$  см<sup>3</sup>/с. Изменением температуры газа в колбе во время откачки пренебречь.



**Решение.** Быстрота действия насоса  $K$  измеряется объемом газа, который ежесекундно переходит из откачиваемого сосуда в камеру насоса, а затем в атмосферу. Если за время  $dt$  из сосуда вышел объем газа  $dV$ , то

$$K = dV/dt. \quad (1)$$

Согласно условию, откачка протекает изотермически и подчиняется, следовательно, закону Бойля — Мариотта. Чтобы воспользоваться этим законом, справедливым для постоянной массы газа, проследим за процессом откачки в течение элементарного промежутка времени  $dt$ . За это время газ, который вначале (в произвольный момент времени) занимал объем сосуда  $V_0$  при давлении  $p$ , частично перейдет в камеру насоса. Этот процесс можно рассматривать как прирост объема одной и той же массы газа на величину  $dV$ . При этом изменится и давление газа на величину  $dp$ . Считая величину  $dp$  отрицательной, на основании закона Бойля — Мариотта запишем

$$pV_0 = (p + dp)(V_0 + dV).$$

Раскрыв скобки, приведя подобные члены и отбросив величину  $dpdV$  как бесконечно малую второго порядка, получим

$$pdV + V_0dp = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части (2) на приращение времени  $dt$  и учитывая соотношение (1), имеем

$$pK + V_0 \frac{dp}{dt} = 0.$$

Данное дифференциальное уравнение выражает зависимость давления  $p$  воздуха в колбе от времени  $t$ . Разделив переменные в этом уравнении и учитывая, что при изменении времени от нуля до  $t$  давление изменяется от  $p_0$  до  $p$ , запишем:

$$\frac{K}{V_0} dt = - \frac{dp}{p}; \quad \frac{K}{V_0} \int_0^t dt = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{K}{V_0} t = \ln \frac{p_0}{p}; \quad t = \frac{V_0}{K} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Поскольку величины  $p_0$  и  $p$  даны в одинаковых единицах, их числовые значения можно сразу подставить в формулу. Это же относится и к величинам  $V_0$  и  $K$ , отношение которых имеет размерность времени. Выполнив вычисления, найдем

$$t = 74 \text{ с.}$$

6-4. Трубка длиной  $l$  вращается около вертикальной оси, проходящей через ее середину перпендикулярно оси трубки, с угловой скоростью  $\omega$ . Температура воздуха равна  $T$ . Принимая давление воздуха внутри трубки вблизи ее открытых концов равным атмосферному  $p_0$ , определить давление воздуха в середине трубки.

**Решение.** При установившемся распределении давления воздуха в трубке он будет вращаться вместе с ней с угловой скоростью  $\omega$ . При этом каждая частица воздуха, находящаяся на расстоянии  $r$  от центра вращения, будет иметь нормальное ускорение, направленное к центру и равное

$$a_n = \omega^2 r. \quad (1)$$

Задача решается наиболее просто, если воздушный столб в трубке рассмотреть в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с трубкой. В этой системе отсчета воздух неподвижен. Однако теперь в соответствии с изложенным в § 2 (п.В) следует считать, что в трубке появилось поле тяготения, обусловленное свойствами выбранной системы отсчета. В каждой точке этого поля ускорение силы тяжести  $g' = -a_n$ , т. е. направлено по радиусу от центра. Следовательно, для воздушного столба в трубке, находящегося в этом радиальном поле тяготения, должно быть распределение давления, подобное тому, что имеется в атмосфере под влиянием поля земного тяготения. При перемещении от центра к концу трубки давление возрастает.

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой (6.3), положив в ней высоту  $h$  равной расстоянию, отсчитанному от открытого (любого) конца трубки, играющего роль нулевого уровня, до центра трубки, находящегося на «высоте», равной  $l/2$ , т. е.  $h = l/2$ . При этом учтем, что рассматриваемое нами радиальное поле не однородно: ускорение силы тяжести  $g'$ , как это следует из (1), возрастает от центра трубки к ее концам. Так как  $g'$  зависит линейно от  $r$ , за его среднее значение примем среднее арифметическое между значениями  $g'_1 = \omega^2 l/2$  у конца трубки и  $g'_2 = 0$  в ее центре, т. е.

$$g'_{cp} = \frac{g'_1 + g'_2}{2} = \frac{\omega^2 l}{4}.$$

Подставив значения  $h = l/2$  и  $g = g'_{cp}$  в формулу (6.3), получим

$$p = p_0 e^{-\omega^2 l^2 / 8RT}.$$

## § 7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

### Основные формулы

Средняя квадратичная скорость определяется соотношением

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}}, \quad (7.1)$$

где  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) — скорость  $i$ -й частицы,  $N$  — число частиц.

Основное уравнение кинетической теории газов: давление газа численно равно двум третям средней кинетической энергии поступательного движения всех молекул в единице объема, т. е.

$$p = (2/3) n \langle \omega \rangle, \quad (7.2)$$

где  $n$  — число молекул в единице объема (концентрация молекул),  $\langle \omega \rangle = \langle mv^2 \rangle / 2$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы. Для однородного по составу частиц газа  $\langle \omega \rangle = mv_{\text{кп}}^2 / 2$ .

Зависимость средней кинетической энергии поступательного движения молекулы от температуры

$$\langle \omega \rangle = (3/2) kT, \quad (7.3)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, равная

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,3}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ Дж/К} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К};$$

здесь  $N_A$  — постоянная Авогадро (число молекул, содержащихся в одном моле вещества)

Зависимость давления газа от концентрации  $n$  молекул и температуры  $T$

$$p = nkT. \quad (7.4)$$

Числом степеней свободы  $i$  называется число независимых величин, с помощью которых может быть задано положение тела или частицы. Для молекул одноатомного газа  $i = 3$ , двухатомного газа  $i = 5$ , трех- и более атомных газов  $i = 6$ .

Средняя кинетическая энергия (поступательного и вращательного движения) молекулы

$$\langle \omega_i \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (7.5)$$

Закон распределения молекул по скоростям (закон Максвелла): число молекул  $\Delta N$ , относительные скорости которых лежат в интервале от  $u$  до  $u + \Delta u$ , равно

$$\Delta N = N f(u) \Delta u. \quad (7.6)$$

Здесь  $N$  — полное число молекул газа,  $f(u) = (4/\sqrt{\pi}) e^{-u^2} u^2$  — функция распределения Максвелла,  $u = v/v_{\text{в}}$ , где  $v$  — данная скорость,  $v_{\text{в}}$  — наиболее вероятная скорость.

Скорости газовых молекул вычисляются по формулам:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{2RT/\mu} \text{ — наиболее вероятная;} \quad (7.7)$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{3RT/\mu} \text{ — средняя квадратичная;} \quad (7.8)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT/\pi\mu} \text{ — средняя арифметическая.} \quad (7.9)$$

Среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой за секунду,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi \sigma^2 n \langle v \rangle, \quad (7.10)$$

где  $\sigma$  — эффективный диаметр молекулы,  $n$  — концентрация молекул.

### Методические указания

1. В кинетической теории, рассматривающей газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся молекул и являющейся поэтому статистической теорией, употребляются различные типы средних скоростей молекул: средняя квадратичная  $v_{\text{кв}}$ , средняя арифме-

тическая  $\langle v \rangle$  и наиболее вероятная  $v_v$ . Эти три скорости связаны между собой зависимостью, определяемой формулами (7.7)—(7.9); для одного и того же газа при одной и той же температуре имеем  $v_v : \langle v \rangle : v_{\text{нв}} = 1,41 : 1,60 : 1,73$ .

Средней квадратичной скоростью  $v_{\text{нв}}$  пользуются в тех случаях, когда необходимо рассчитать какую-либо физическую величину, пропорциональную квадрату скорости, например кинетическую энергию поступательного движения молекул газа, давление газа.

Средняя арифметическая скорость  $\langle v \rangle$  позволяет определять средние значения таких физических величин, характеризующих свойства газа, в формулу которых скорость входит в первой степени, например, среднее число столкновений молекулы в единицу времени, среднее время свободного пробега, средний импульс молекул.

Наиболее вероятной скоростью  $v_v$  пользуются в задачах, связанных с применением закона распределения молекул по скоростям (7.6). Этой скорости соответствует максимум функции распределения

$$f(u) = (4/\sqrt{\pi}) e^{-u^2} u^2.$$

2. Закон распределения молекул по скоростям, записанный в форме (7.6), справедлив лишь для малых интервалов скоростей  $\Delta u$ , когда выполняется неравенство  $\Delta u \ll u$ , или, поскольку  $u = v/v_v$  и  $\Delta u = \Delta v/v_v$ , равносильное неравенство  $\Delta v \ll v$ . Если же в задаче идет речь о больших интервалах скоростей, не удовлетворяющих указанным неравенствам, закон распределения скоростей необходимо писать в дифференциальной форме, заменяя величины  $\Delta N$  и  $\Delta u$  дифференциалами  $dN$  и  $du$ . Интегрируя правую часть уравнения в пределах от  $u_1$  до  $u_2$ , вычисляют полное число молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат в интервале  $\Delta u = u_2 - u_1$ .

3. Основное уравнение кинетической теории газов (7.2), а также закон Максвелла о распределении молекул по скоростям (7.6) справедливы лишь для *идеального* газа, ибо при их выводе не учитывается взаимодействие молекул на расстоянии; соударения молекул уподобляются удару упругих шаров. Поэтому уравнения (7.2) и (7.6) и связанные с ними уравнения (7.4), (7.7)—(7.10) применяются только для не слишком сильно сжатых газов и паров.

### Решение задач

7-1. Плотность смеси азота и водорода при температуре  $t = 47^\circ\text{C}$  и давлении  $p = 2,00$  ат равна  $\rho = 0,30$  г/л. Найти концентрации молекул азота ( $n_1$ ) и водорода ( $n_2$ ) в смеси.

**Решение.** Концентрацию однородного по составу газа, очевидно, можно найти из формулы (7.4). Но в условии дана смесь двух газов, молекулы которых различаются по массе. Выясним, можно ли в этом случае применять формулу (7.4).

Соотношение (7.4) можно рассматривать как следствие основного уравнения кинетической теории газов (7.2). Однако из вывода (7.2)

вытекает, что оно справедливо для совокупности любых частиц, в том числе различных по массе. Следовательно, и формулу (7.4) можно применять для смеси газов. В этом случае  $n$  — полное число частиц в единице объема. Таким образом, из (7.4) имеем

$$n = \rho/kT. \quad (1)$$

Для определения концентраций азота и водорода кроме очевидного соотношения

$$n_1 + n_2 = n = \rho/kT \quad (2)$$

необходимо иметь еще одно уравнение, связывающее величины  $n_1$  и  $n_2$ . В связи с этим учтем следующее. Используя данные задачи, можно найти молярную массу  $\mu_{см}$  смеси рассматриваемых газов. Действительно, из уравнения газового состояния вытекает, что

$$\mu_{см} = \frac{mRT}{V\rho} = \rho \frac{RT}{\rho}. \quad (3)$$

С другой стороны, можно выразить  $\mu_{см}$  через молярные массы азота ( $\mu_1$ ) и водорода ( $\mu_2$ ), а также их концентрации  $n_1$  и  $n_2$ . Для этого воспользуемся ответом к задаче № 6-2, выражающим величину  $\mu_{см}$  через  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и массы  $m_1$ ,  $m_2$  компонентов смеси. Заметим также, что между массой  $m$  газа и его концентрацией  $n$  существует зависимость

$$m = nVm' = nV\mu/N_A, \quad (4)$$

где  $V$  — объем газа,  $\mu$  — его молярная масса,  $m'$  — масса одной молекулы. Подставив значения  $m_1$  и  $m_2$  по (4) в формулу, выведенную в задаче № 6-2 для молярной массы смеси, и произведя сокращения, найдем

$$\mu_{см} = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2)/(n_1 + n_2). \quad (5)$$

Приравняв правые части соотношений (3) и (5), получим

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2} = \frac{\rho RT}{\rho}. \quad (6)$$

Решив систему (2) и (6), найдем неизвестные  $n_1$  и  $n_2$ :

$$n_1 = \frac{\rho RT - \rho\mu_2}{kT(\mu_1 - \mu_2)}; \quad n_2 = \frac{\rho RT - \rho\mu_1}{kT(\mu_2 - \mu_1)}.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $\rho = 2,00 \cdot 9,8 \cdot 10^4$  Па,  $T = 320$  К,  $\rho = 0,30$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_1 = 0,028$  кг/моль,  $\mu_2 = 0,0020$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К),  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Подставив эти значения в формулы и выполнив вычисление, получим:

$$n_1 = 2,4 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}, \quad n_2 = 4,2 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

**7-2.** Сосуд, содержащий газ, движется со скоростью  $v_0$ , затем быстро останавливается. На сколько увеличится при этом средний квадрат скорости теплового движения молекул газа в случаях: одноатомного газа? двухатомного газа? Газ считать идеальным.

**Решение.** Воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть  $M$  — масса газа в сосуде. Двигаясь со скоростью  $v_0$ , газ, как целое, обладает кинетической энергией

$$W_k = Mv_0^2/2. \quad (1)$$

Формула (1) определяет кинетическую энергию направленного движения молекул, в котором они участвуют вместе с сосудом. После остановки сосуда направленное движение молекул в результате их соударений со стенками сосуда очень скоро превратится в хаотическое. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда за рассматриваемый малый промежуток времени, можно газ считать изолированной системой. Тогда из закона сохранения энергии следует, что «исчезнувшая» кинетическая энергия направленного движения молекул  $W_k$  должна быть равна приросту энергии хаотического движения молекул (приросту внутренней энергии)  $\Delta U$ :

$$W_k = \Delta U. \quad (2)$$

Подсчитаем внутреннюю энергию газа.

Для идеального одноатомного газа это есть энергия поступательного хаотического движения молекул:

$$U = \sum_{i=1}^N mv_i^2/2, \quad (3)$$

где  $m$  — масса молекулы,  $N$  — число молекул в сосуде. Вынося множитель  $m/2$  за знак суммы и используя понятие средней квадратичной скорости, определяемой по (7.1), перепишем равенство (3):

$$U = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{m}{2} N v_{кв}^2 = \frac{M v_{кв}^2}{2}.$$

Отсюда следует, что изменение внутренней энергии одноатомного газа при торможении

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{M v_{кв2}^2}{2} - \frac{M v_{кв1}^2}{2}, \quad (4)$$

где  $v_{кв1}$ ,  $v_{кв2}$  — средние квадратичные скорости молекул газа соответственно в начале и конце торможения. Подставив в (2) значения  $W_k$  из (1) и  $\Delta U$  из (4), получим первый ответ:

$$v_{кв2}^2 - v_{кв1}^2 = v_0^2.$$

Внутренняя энергия идеального двухатомного газа складывается из энергий поступательного и вращательного движения молекул. При этом три степени свободы приходятся на поступательное движение и две — на вращательное. В соответствии с законом о равномерном

распределении энергии по степеням свободы, следствием которого является формула (7.5), три пятых кинетической энергии  $W_k$  пойдет на увеличение энергии поступательного движения молекул и две пятых — на увеличение энергии их вращательного движения. Таким образом, теперь имеем

$$\frac{3}{5} \frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv_{кв2}^2}{2} - \frac{Mv_{кв1}^2}{2},$$

откуда получим второй ответ:

$$v_{кв2}^2 - v_{кв1}^2 = 0,6 v_0^2.$$

7-3. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре  $T$ , обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не свыше чем на 5,0 м/с? Задачу решить для двух значений  $T$ : 1) 400 К, 2) 900 К.

**Решение.** Распределение молекул по скоростям выражается уравнением (7.6), справедливым при условии  $\Delta u \ll u$ . Поскольку в задаче идет речь о наиболее вероятной скорости, надо считать  $v = v_b$ . Следовательно,  $u = (v/v_b) = 1$  и уравнение (7.6) примет более простой вид:

$$\Delta N = (4/\sqrt{\pi} e) N \Delta u.$$

Отсюда найдем ту часть молекул, относительные скорости которых лежат в интервале  $\Delta u$ :

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi} e} \Delta u. \quad (1)$$

Прежде чем производить расчеты по (1), необходимо убедиться в том, что выполняется условие  $\Delta u \ll u$ . Так как  $u = v/v_b$ , то

$$\Delta u = \Delta v/v_b. \quad (2)$$

Чтобы вычислить  $\Delta u$  по (2), найдем сначала наиболее вероятную скорость  $v_b$  по формуле (7.7) при  $T_1 = 400$  К и  $T_2 = 900$  К соответственно:

$$v_{b1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 400}{0,002}} \text{ м/с} = 1,82 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$v_{b2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 900}{0,002}} \text{ м/с} = 2,73 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Подставляя эти значения  $v_b$  в (2) и имея в виду, что  $\Delta v = 10,0$  м/с, поскольку в задаче идет речь о скоростях, лежащих в интервале от  $v_b - 5,0$  м/с до  $v_b + 5,0$  м/с, получим:

$$\Delta u_1 = 1/182, \quad \Delta u_2 = 1/273.$$

Так как  $u = 1$ , видим, что условие  $\Delta u \ll u$  выполняется для обеих температур\*. Теперь по формуле (1) найдем ответы

$$1) \frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi} e} \Delta u_1 = \frac{4}{\sqrt{3,14 \cdot 2,7 \cdot 182}} = 0,0046,$$

$$2) \frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi} e} \Delta u_2 = \frac{4}{\sqrt{3,14 \cdot 2,7 \cdot 273}} = 0,0030.$$

**З а м е ч а н и е.** Таким образом, при увеличении температуры наиболее вероятная скорость молекул увеличивается, а число молекул, скорости которых лежат в одном и том же интервале около наиболее вероятной, уменьшается. На графике, выражающем функцию распределения скоростей молекул  $f(v)$ , с увеличением температуры ( $T_2 > T_1$ ) максимум кривой сдвигается вправо, а величина максимума уменьшается (рис. 7-1).

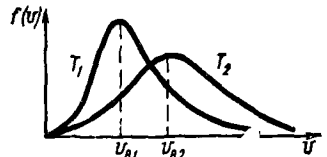


Рис 7-1

7-4. Какая часть молекул газа имеет скорости, превышающие наиболее вероятную скорость?

**Р е ш е н и е.** В условии задачи речь идет о молекулах, скорости которых заключены в интервале от наиболее вероятной скорости  $v_{в}$  до  $v_{в} + \infty$ , т. е. в бесконечно большом интервале скоростей  $\Delta v$ . Таким образом, условие применимости закона распределения скоростей (7.6), заключающееся в том, что  $\Delta u \ll u$ , или  $\Delta v \ll v$ , здесь не выполняется. Поэтому от уравнения в форме (7.6) надо перейти к дифференциальной форме этого закона:

$$dN = (4/\sqrt{\pi}) N e^{-u^2} u^2 du. \quad (1)$$

Полное число  $\Delta N$  молекул, относительные скорости которых лежат в заданном интервале от  $u_1$  до  $u_2$ , найдем, интегрируя правую часть (1) в этих пределах:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} u^2 du. \quad (2)$$

Уравнение (2) является общей формой записи закона распределения скоростей молекул, справедливой для любых интервалов скоростей.

Учитывая, что относительная скорость  $u = v/v_{в}$  и что в нашей задаче  $v_1 = v_{в}$  и  $v_2 = \infty$ , получим:  $u_1 = 1$  и  $u_2 = \infty$ . Следовательно, искомая часть молекул выразится интегралом:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-u^2} u^2 du. \quad (3)$$

\* Вместо неравенства  $\Delta u \ll u$  можно пользоваться равносильным ему неравенством  $\Delta v \ll v$  как критерием применимости уравнения (7.6). Тогда, вычислив скорости  $v_{в1}$  и  $v_{в2}$  и сравнив их с заданной величиной  $\Delta v$ , можно сразу судить о применимости (7.6) в условиях данной задачи.



Чтобы избежать математических трудностей, связанных с нахождением несобственного интеграла, воспользуемся тем очевидным фактом, что скорости всех молекул лежат в интервале от 0 до  $\infty$ . Поэтому, если обозначить через  $\Delta N'$  число молекул, скорости которых меньше наиболее вероятной, т. е. лежат в интервале от 0 до 1, то можно записать

$$\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N'}{N} = 1. \quad (4)$$

Таким образом, вместо того чтобы искать  $\Delta N/N$  по (3), можно найти  $\Delta N'/N$  по формуле

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-u^2} u^2 du, \quad (5)$$

а затем по (4) вычислить  $\Delta N/N$ .

Так как интеграл в (5) все же в конечном виде не берется, воспользуемся методом приближенного интегрирования. Для этого разложим подынтегральную функцию  $e^{-u^2} u^2$  в ряд Маклорена:

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1} + \frac{u^4}{2} - \frac{u^6}{6} + \frac{u^8}{24} - \dots$$

$$e^{-u^2} u^2 = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \frac{u^{10}}{24} - \dots$$

Теперь, производя интегрирование по (5), имеем

$$\frac{\Delta N'}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{14} - \frac{1}{54} + \frac{1}{264} - \dots \right).$$

Ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения, найдем с погрешностью, не превышающей 0,01:

$$\Delta N'/N = 0,43.$$

Отсюда на основании (4) получим ответ:

$$\Delta N/N = 1 - 0,43 = 0,57.$$

**З а м е ч а н и я:** 1. Интеграл (2) можно найти тем же методом, которым был вычислен интеграл (5), и таким образом решить общую задачу об определении числа молекул  $\Delta N$ , скорости которых лежат в любом конечном интервале скоростей  $\Delta u = u_2 - u_1$ .

2. Используя примененный в задаче метод вычисления интеграла

$$\int_0^u e^{-u^2} u^2 du,$$

можно найти долю молекул  $\Delta N/N$ , относительные скорости которых превышают любое заданное значение  $u$ , по формуле

$$\frac{\Delta N}{N} = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} u^2 du. \quad (6)$$

В некоторых задачах имеются справочные таблицы, в которых приведены результаты вычислений по (6) для ряда значений  $u$ . В таком случае задача обычно сводится к тому, чтобы по известным значениям скорости  $v$ , молярной массы  $\mu$  газа и температуры  $T$  определить относительную скорость  $u = v/v_в$  и затем по таблице найти искомую величину  $\Delta N/N$ .

**7-5.** Найти число столкновений  $Z$ , которые происходят в течение секунды между всеми молекулами, находящимися в объеме  $V = 1,0 \text{ мм}^3$  водорода при нормальных условиях. Принять для водорода  $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

**Решение.** Число столкновений  $z$ , испытываемых одной молекулой за секунду, определяется формулой (7.10). Чтобы установить соотношение между величинами  $z$  и  $Z$ , учтем, что если умножить число столкновений одной молекулы за секунду  $z$  на число всех молекул  $N$ , то получим результат, превышающий в два раза искомое число  $Z$ . Действительно, в одном столкновении участвуют сразу две молекулы, поэтому в число  $zN$  каждое столкновение входит дважды: один раз в счет столкновений одной из молекул данной пары, другой раз в счет столкновений второй молекулы. Следовательно, правильным будет выражение

$$Z = \frac{zN}{2} = \frac{znV}{2}, \quad (1)$$

где  $n$  — концентрация молекул. Подставив в (1) вместо  $z$  его значение по (7.10), получим

$$Z = \frac{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n^2 \langle v \rangle V}{2}.$$

Найдем из формулы (7.4) концентрацию  $n$  молекул и воспользуемся выражением (7.9) для средней арифметической скорости  $\langle v \rangle$ . Тогда окончательно для  $Z$  имеем

$$Z = \frac{\sqrt{2} \pi \sigma^2 p^2 V}{2k^2 T} \sqrt{\frac{8R}{\mu T}}.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $V = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3$ ,  $p = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T = 273 \text{ К}$ ,  $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $\sigma = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ ,  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Подставив эти значения в формулу и выполнив вычисление, получим

$$Z = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-1}.$$

## § 8. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### Основные формулы

Первое начало термодинамики. количество теплоты, сообщенное системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и совершение системой работы над окружающими телами, т. е.

$$Q = \Delta U + A. \quad (8.1)$$

Внутренняя энергия одного моля идеального газа

$$U_0 = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T. \quad (8.2)$$

Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимой для нагревания одного моля вещества на один кельвин:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT}, \quad (8.3)$$

где  $\nu = m/\mu$  — число молей.

Молярная теплоемкость смеси газов, состоящей из  $n$  компонентов,

$$C = \frac{C_1 \nu_1 + C_2 \nu_2 + \dots + C_n \nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}. \quad (8.4)$$

Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания единицы массы вещества на один кельвин,

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}. \quad (8.5)$$

Удельная теплоемкость смеси газов, состоящей из  $n$  компонентов,

$$c_{см} = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (8.6)$$

Связь между удельной и молярной теплоемкостями

$$c = C/\mu. \quad (8.7)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{dU_0}{dT} = iR/2. \quad (8.8)$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_p = C_V + R = (i + 2) R/2. \quad (8.9)$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (8.10)$$

При элементарном изменении объема газа совершается работа

$$dA = p dV. \quad (8.11)$$

Работа газа при изобарном процессе

$$A = p (V_2 - V_1) \quad (8.12)$$

Работа идеального газа при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.13)$$

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса в идеальном газе

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (8.14)$$

где  $\gamma = C_p/C_V$  — отношение молярных (или удельных) теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме.

Работа идеального газа при адиабатическом процессе выражается следующими формулами:

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2), \quad (8.15)$$

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R \Gamma_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (8.16)$$

Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (8.17)$$

где  $A$  — работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла,  $Q_1$  — количество теплоты, полученное от нагревателя за это время рабочим веществом,  $Q_2$  — количество теплоты, отданное им при этом холодильнику,  $T_1$  и  $T_2$  — наивысшая и наименьшая температуры рабочего вещества.

Знак равенства в (8.17) относится только к машине, работающей по циклу Карно

Изменение энтропии тела в любом обратимом процессе, переводящем его из состояния  $A$  в состояние  $B$ , равно

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \quad (8.18)$$

где  $dQ$  — элементарное количество теплоты, полученное телом при температуре  $T$ .

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается — она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной в случае обратимых процессов, т. е.

$$\Delta S \geq 0 \quad (8.19)$$

## А. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗАМ

### Методические указания

1. Приступая к решению задачи по данной теме, прежде всего необходимо выяснить характер процесса, протекающего в газе (разумеется, если об этом не оговорено в условии). Как правило, это не вызывает трудностей в случае изохорного ( $V = \text{const}$ ) или изобарного ( $p = \text{const}$ ) процесса.

Для осуществления *изотермического* процесса ( $T = \text{const}$ ) расширения или сжатия газа необходим достаточный теплообмен между газом и окружающей средой. Этому способствуют большая теплопроводность стенок сосуда, в котором заключен газ, и медленное протекание процесса. Наоборот, условием *адиабатического* процесса расширения или сжатия газа является отсутствие теплообмена между газом и окружающей средой. Это условие на практике выполняется тем точнее, чем меньше теплопроводность стенок сосуда, содержащего газ, и чем быстрее протекает процесс.

2. В изохорном и изобарном процессах количество теплоты, полученное газом, всегда связано с изменением его температуры [см. формулу (8.3)]:

$$dQ = \nu C dT.$$

где  $C = C_V$  при изохорном процессе и  $C = C_p$  при изобарном (при этом  $C_p > C_V$ ). Поскольку обе молярные теплоемкости  $C_p$  и  $C_V$  — величины положительные, знаки приращений  $dQ$  и  $dT$  всегда совпадают. Следовательно, при нагревании ( $dT > 0$ ) газ получает тепло ( $dQ > 0$ ) и, наоборот, при охлаждении ( $dT < 0$ ) газ отдает тепло ( $dQ < 0$ ).

Вместе с тем при изотермическом и адиабатическом процессах не существует связи между приращением температуры газа и количеством теплоты, полученным им, по той причине, что в первом процессе отсутствует изменение температуры ( $dT = 0$ ), хотя газ при этом получает или отдает тепло, а во втором процессе, наоборот, газ не получает и не отдает тепла ( $dQ = 0$ ), хотя при этом изменяется его температура.

### Решение задач

8-1. Баллон емкостью  $V = 20,0$  л с кислородом при давлении  $p_1 = 100$  ат и температуре  $t_1 = 7^\circ\text{C}$  нагревается до  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ . Какое количество теплоты при этом поглощает газ?

**Решение.** Поскольку коэффициенты теплового расширения для твердых тел значительно меньше (приблизительно в сто раз), чем для газа, в условиях данной задачи можно пренебречь расширением баллона и считать процесс нагревания газа изохорным.

В зависимости от того, применять ли непосредственно первое начало термодинамики или формулу, определяющую теплоемкость тела, возможны два способа решения.

1. Применим к рассматриваемому газу первое начало термодинамики. Поскольку при изохорном процессе газ не совершает работы, из уравнения (8.1) получим

$$Q = \Delta U,$$

т. е. все сообщенное газу тепло идет на приращение его внутренней энергии. Из формулы (8.10), используя уравнение газового состояния, запишем

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{i}{2} pV.$$

Отсюда для изменения внутренней энергии имеем

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2} (p_2 - p_1) V = \frac{i}{2} p_1 V \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right).$$

Заменяя по закону Шарля для изохорного процесса отношение давлений  $p_2/p_1$  отношением абсолютных температур  $T_2/T_1$ , получим

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2} p_1 V \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right). \quad (1)$$

Эту формулу можно считать окончательным ответом. Все величины, кроме  $i$ , даны в условии. Поскольку кислород является двухатомным газом, то число степеней свободы  $i = 5$ .

2. Из формулы (8.3) для молярной теплоемкости следует, что элементарное количество теплоты, сообщенное телу при повышении его температуры на  $dT$ , равно

$$dQ = \nu C dT. \quad (2)$$

Число молей  $\nu$  найдем из уравнения газового состояния:

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{p_1 V}{RT_1}$$

Так как газ нагревается при постоянном объеме, то  $C = C_V$ , где  $C_V$  определяется по формуле (8.8). Подставив эти значения  $\nu$  и  $C_V$  в (2), получим

$$dQ = \frac{i}{2} \frac{p_1 V}{T_1} dT. \quad (3)$$

Отсюда, интегрируя и учитывая при этом, что все величины  $i$ ,  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $V$  — постоянные, найдем полное количество теплоты, поглощенное газом при нагревании от  $T_1$  до  $T_2$ :

$$Q = \frac{i}{2} \frac{p_1 V}{T_1} (T_2 - T_1), \quad (4)$$

что совпадает с выражением (1).

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $i = 5$ ,  $p_1 = 9,8 \cdot 10^6$  Па,  $V = 2,00 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>,  $T_1 = 280$  К,  $T_2 = 300$  К.

Подставив эти значения в (4) и выполнив вычисления, получим

$$Q = 3,5 \cdot 10^4 \text{ Дж} = 35 \text{ кДж.}$$

8-2. Какую работу надо совершить, чтобы, медленно сжимая при помощи поршня газ в цилиндре с хорошо проводящими тепло стенками, увеличить его давление в два раза? Начальное давление газа равно атмосферному  $p_1 = 760$  мм рт. ст., начальный объем  $V_1 = 5,0$  л. Во время сжатия давление и температура окружающего воздуха остаются постоянными. Весом поршня и трением пренебречь. Сколько тепла выделяется при сжатии газа?

**Решение.** Вначале выясним, каким процессом является сжатие газа в условиях задачи. Медленное протекание процесса и большая теплопроводность стенок цилиндра позволяют считать температуру газа равной температуре окружающей среды в течение всего процесса. А так как последняя, согласно условию, остается неизменной, то сжатие газа следует считать изотермическим процессом.

Работа газа при изотермическом процессе определяется формулой (8.13). Преобразуем ее применительно к данной задаче, используя уравнение газового состояния и закон Бойля—Мариотта:

$$A_p = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Поскольку  $p_1 < p_2$ , то  $A_r < 0$ . Как и следовало ожидать, работа, совершенная газом при его сжатии, отрицательна. В этом случае положительной будет работа  $A_{\text{внеш}}$ , совершенная внешними силами, сжимающими при помощи поршня газ в цилиндре:

$$A_{\text{внеш}} = -A_r = p_1 V_1 \ln(p_2/p_1). \quad (1)$$

Однако выражение (1) еще не является ответом, ибо  $A_{\text{внеш}}$  есть сумма двух работ: работы  $A$  силы, приложенной к поршню (например, силы руки), и работы  $A_{\text{атм}}$  силы атмосферного давления, т. е.

$$A_{\text{внеш}} = A + A_{\text{атм}}. \quad (2)$$

По условию задачи искомой величиной является работа  $A$ . Величину же  $A_{\text{атм}}$  можно найти по формуле работы газа при изобарном процессе (8.12), поскольку атмосферное давление  $p_1$  остается постоянным:

$$A_{\text{атм}} = p_1 (V_1 - V_2). \quad (3)$$

При этом индексы у объемов проставлены так, чтобы работа  $A_{\text{атм}}$ , вычисленная по (3), была положительной. Преобразуем (3), учитывая, что газ в цилиндре сжимается изотермически:

$$A_{\text{атм}} = p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = p_1 V_1 \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right). \quad (4)$$

Подставив в (2) вместо  $A_{\text{внеш}}$  и  $A_{\text{атм}}$  их значения по (1) и (4), найдем искомую работу:

$$A = A_{\text{внеш}} - A_{\text{атм}} = p_1 V_1 \left(\ln \frac{p_2}{p_1} - 1 + \frac{p_1}{p_2}\right).$$

Для определения количества теплоты, выделенного при сжатии газа, воспользуемся первым началом термодинамики. Поскольку при изотермическом процессе ( $T = \text{const}$ ) изменение внутренней энергии на основании (8.10) равно нулю:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = 0,$$

из уравнения (8.1) получаем, что количество теплоты, сообщенное газу, равно

$$Q = A_r = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = -p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Величина  $Q$  оказалась отрицательной, что обусловлено выделением теплоты газом при его сжатии.

Выразим данные величины в единицах СИ:  $V_1 = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ,  $p_1 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $(p_2/p_1) = 2$ . Подставив эти значения в формулы и выполнив вычисления, получим:

$$A = 1,0 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 0,10 \text{ кДж}; \quad Q = -3,5 \cdot 10^3 \text{ Дж} = \\ = -0,35 \text{ кДж}.$$

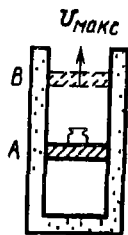


Рис 8 1

8-3. В цилиндре с плохо проводящими тепло стенками, закрытом сверху легко скользящим поршнем, площадь которого равна  $20 \text{ см}^2$  и масса  $m_n = 2,00 \text{ кг}$ , находится воздух, занимая объем  $V_1 = 1,00 \text{ л}$ . На поршне лежит гирия массой  $m_r = 8,00 \text{ кг}$  (рис. 8-1). Если быстро убрать гирию, воздух расширится и поднимет поршень. Определить работу расширения воздуха за время, в течение которого скорость поднимающегося поршня достигнет максимального значения  $v_{\text{макс}}$ . Атмосферное давление  $p_0$  принять равным  $1,00 \text{ ат}$ .

**Решение.** Прежде всего выясним характер процесса расширения воздуха в цилиндре. Учитывая, что, по условию, воздух расширяется быстро, а стенки цилиндра обладают плохой теплопроводностью, можно пренебречь теплообменом между воздухом и окружающей средой, т. е. считать процесс расширения воздуха адиабатическим.

Из условия задачи легко определить начальное давление  $p_1$  воздуха в цилиндре. На поршень в положении А (рис. 8-1) действуют силы: сила тяжести поршня  $m_n g$ , вес гири, равный  $m_r g$ , сила атмосферного давления, равная  $p_0 S$ , и сила давления воздуха, равная  $p_1 S$ . Первые три силы направлены вниз, последняя — вверх. Из условия равновесия поршня имеем

$$p_1 S = m_n g + m_r g + p_0 S,$$

откуда

$$p_1 = (m_n + m_r) g / S + p_0 = 1,47 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Условие задачи позволяет также определить давление  $p_2$  воздуха в цилиндре в тот момент, когда скорость поднимающегося поршня достигнет максимума (положение В на рис. 8-1). Поскольку воздух расширяется адиабатически, из уравнения Пуассона (8.14) следует, что его давление, а значит, и сила давления на поршень будут уменьшаться. После того как сняли с поршня гирию, сила давления воздуха на поршень снизу была сначала больше, чем сумма сил  $m_n g + p_0 S$ , действующих на него сверху, но спустя некоторый промежуток времени, в течение которого поршень двигался ускоренно, силы, приложенные к поршню, снова окажутся в равновесии.

Именно в этот момент скорость поршня достигнет значения  $v_{\text{макс}}$ , так как при дальнейшем увеличении объема воздуха в цилиндре его давление станет меньше суммы сил  $m_n g + p_0 S$ . Теперь равнодействующая сил, приложенных к поршню, окажется направленной вниз и скорость поршня будет убывать. Таким образом, из условия равновесия сил, соответствующего максимуму скорости поршня,

$$p_2 S = m_n g + p_0 S,$$



находим

$$p_2 = m_{\text{гг}}g/S + p_0 = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Теперь, зная начальное  $p_1$  и конечное  $p_2$  давления воздуха в адиабатическом процессе, а также начальный объем  $V_1$ , легко найти по формуле (8.16) работу расширения газа. Чтобы исключить из (8.16) неизвестные величины  $m$ ,  $\mu$ ,  $T_1$ , перепишем эту формулу с учетом уравнения газового состояния:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]. \quad (1)$$

Неизвестное отношение объемов выразим через отношение давлений при помощи уравнения Пуассона (8.14):

$$\left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma}$$

и вместо (1) запишем

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right]. \quad (2)$$

Поскольку воздух является смесью двухатомных газов — азота и кислорода, найдем отношение его теплоемкостей как для двухатомного газа:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i + 2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в формулу:  $p_1 = 1,5 \text{ ат} = 1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ ,  $p_2 = 1,1 \text{ ат}$ ,  $V_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ ,  $\gamma = 1,4$ , получим

$$A = \frac{1,5 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3}}{1,4 - 1} \left[ 1 - (1,1/1,5)^{0,4/1,4} \right] \text{ Дж} = 30 \text{ Дж.}$$

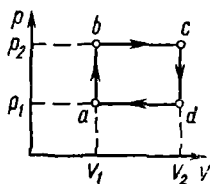


Рис 8-2

8-4. Идеальный трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 8-2). Определить к. п. д. цикла, если  $V_1 = 1,00 \text{ л}$ ,  $V_2 = 2,00 \text{ л}$ ,  $p_1 = 1,0 \text{ атм}$ ,  $p_2 = 2,0 \text{ атм}$ . Считая величины  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  переменными, принимаящими любые положительные значения, найти предельный (наибольший) к. п. д. данного цикла.

**Решение.** Изображенный на рис. 8-2 цикл состоит из четырех последовательно протекающих процессов. Рассмотрим их по порядку.

1. Участок  $ab$ . Объем  $V_1$  газа сохраняется, при этом давление его увеличивается от  $p_1$  до  $p_2$ . Так как при изохорном процессе давление газа пропорционально абсолютной температуре, видим, что температура газа здесь повышается. Следовательно, газ при этом получает (от нагревателя) количество тепла  $Q_{ab}$ .

2. Участок  $bc$ . Давление  $p_2$  газа сохраняется, объем же увеличивается от  $V_1$  до  $V_2$ , при этом газ совершает работу, равную [см. (8.12)]

$$A_{bc} = p_2 (V_2 - V_1). \quad (1)$$

Так как при изобарном процессе объем газа пропорционален абсолютной температуре, видим, что температура газа и в этом процессе повышалась. Следовательно, и здесь газ получил количество теплоты  $Q_{bc}$ .

3. Участок  $cd$ . Процесс идет изохорно ( $V_2 = \text{const}$ ), давление газа уменьшается от  $p_2$  до  $p_1$ , что означает понижение температуры. Следовательно, газ при этом отдает (холодильнику) количество теплоты  $Q_{cd}$ .

4. Участок  $da$ . При постоянном давлении  $p_1$  газ сжимается от объема  $V_2$  до объема  $V_1$  и совершает при этом отрицательную работу

$$A_{da} = p_1 (V_1 - V_2) = -p_1 (V_2 - V_1). \quad (2)$$

Уменьшение объема при изобарном процессе связано с понижением температуры газа. Следовательно, здесь, как и в предыдущем случае, газ отдает (холодильнику) некоторое количество тепла  $Q_{da}$ .

Теперь можно приступить к вычислению к. п. д. цикла по формуле (8.17). Работа газа, совершенная им на участках  $bc$  и  $da$ , равна, согласно (1) и (2),

$$A = A_{bc} + A_{da} = (p_2 - p_1) (V_2 - V_1)^*. \quad (3)$$

Количество теплоты  $Q_1$ , сообщенное газу при его нагревании, найдем на основании первого начала термодинамики. Учитывая, что газ получает теплоту на участках  $ab$  и  $bc$ , запишем для всего пути процесса  $abc$

$$Q_1 = \Delta U + A_{bc}. \quad (4)$$

Изменение внутренней энергии  $\Delta U$  при переходе газа из состояния  $a$  в состояние  $c$  вычислим с помощью формулы (8.10) как разность ее значений  $U_c$  и  $U_a$  в точках  $c$  и  $a$  графика:

$$\Delta U = U_c - U_a = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R (T_c - T_a),$$

или на основании уравнения газового состояния

$$\Delta U = (i/2) (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (5)$$

Подставив в (4) вместо  $\Delta U$  и  $A_{bc}$  их значения по (5) и (1), получим

$$Q_1 = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) + p_2 (V_2 - V_1). \quad (6)$$

---

\* Формулу (3) можно получить сразу, если учесть, что работа газа, совершенная за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной замкнутой линией — графиком цикла в системе координат  $(p, V)$ . В данном случае эта работа равна площади прямоугольника  $abcd$ .

Наконец, подставляя в (8.17) значения  $A$  и  $Q_1$  из (3) и (6), найдем к. п. д. цикла:

$$\eta = \frac{(\rho_2 - \rho_1)(V_2 - V_1)}{(i/2)(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1) + \rho_2(V_2 - V_1)}. \quad (7)$$

Подставив в (7) числовые значения величин  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  из условия и учитывая, что газ — трехатомный и, следовательно,  $i = 6$ , получим

$$\eta = 0,09.$$

Чтобы определить наибольший к. п. д. цикла, выразим количество теплоты, сообщенное газу, через молярные теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  на основании формулы (8.3):

$$Q_1 = Q_{ab} + Q_{bc} = \nu C_v(T_b - T_a) + \nu C_p(T_c - T_b). \quad (8)$$

Преобразуем (8) с помощью уравнения Клапейрона—Менделеева, записав последнее для каждого из трех состояний газа, соответствующих точкам  $a$ ,  $b$ ,  $c$  графика:

$$Q_1 = [(\rho_2 - \rho_1) V_1 C_v / R] + [(V_2 - V_1) \rho_2 C_p / R]. \quad (9)$$

Подставив в (8.17) значения  $A$  и  $Q_1$  по (3) и (9), получим

$$\eta = \frac{(\rho_2 - \rho_1)(V_2 - V_1) R}{(\rho_2 - \rho_1) V_1 C_v + (V_2 - V_1) \rho_2 C_p}. \quad (10)$$

Чтобы упростить исследование, разделим числитель и знаменатель правой части (10) на произведение  $\rho_2 V_2$  и введем обозначения  $\alpha = \rho_1 / \rho_2$ ,  $\beta = V_1 / V_2$ :

$$\eta = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) R}{(1 - \alpha)\beta C_v + (1 - \beta) C_p}. \quad (11)$$

Заметим, что согласно условию каждая из величин  $\alpha$  и  $\beta$  может принимать любые значения в интервале ]0, 1[. При произвольном фиксированном значении  $\beta$  выражение (11) приобретает вид

$$\eta = \frac{K_1(1 - \alpha)}{K_2(1 - \alpha) + K_3} = \frac{K_1}{K_2 + K_3/(1 + \alpha)}, \quad (12)$$

где  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  — постоянные положительные величины. Из (12) видно, что  $\eta(\alpha)$  — убывающая функция. Следовательно, она принимает наибольшее значение при  $\alpha \rightarrow 0$ .

При любом фиксированном значении  $\alpha$  выражение (11) дает

$$\eta = \frac{K_4(1 - \beta)}{K_5\beta + K_6(1 - \beta)} = \frac{K_4}{K_6 + K_5/(1/\beta - 1)}, \quad (13)$$

где  $K_4$ ,  $K_5$ ,  $K_6$  — постоянные положительные величины. Из (13) следует, что  $\eta(\beta)$  — убывающая функция. Значит, ее наибольшему значению соответствует  $\beta \rightarrow 0$ .

Сопоставляя полученные результаты, приходим к выводу, что, положив в (11)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , найдем предельное значение  $\eta_{\text{пред}}$ :

$$\eta_{\text{пред}} = \frac{R}{C_p} = \frac{2}{i + 2} = 0,25.$$

**Методические указания**

1. Здесь рассмотрены задачи, связанные с обратимым циклом Карно, и задачи на расчет изменения энтропии. В последних используются важнейшие свойства энтропии: 1) энтропия является функцией состояния; 2) энтропия сложной системы равна сумме энтропий ее частей (свойство аддитивности).

2. Рассчитывая изменение энтропии тела по формуле (8.18), следует помнить, что здесь  $dQ$  означает количество теплоты, *полученное* телом. Поэтому, если тело отдает тепло, величину  $dQ$  следует ставить в (8.18) со знаком «—».

3. Если переход тела из начального состояния в конечное осуществляется несколькими, последовательно протекающими процессами, то полное изменение энтропии равно алгебраической сумме изменений энтропии в каждом процессе.

4. Соотношение (8.18) выражает изменение энтропии только в обратимом процессе. Способ расчета изменения энтропии в необратимом процессе рассмотрен в задаче № 8-8.

**Решение задач**

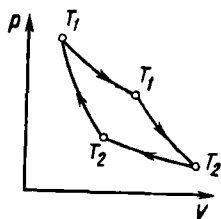


Рис. 8-3

8-5. Цикл Карно, совершаемый смесью жидкости и пара, происходит в том же температурном интервале, что и цикл, рассмотренный в задаче № 8-4. Определить к. п. д. цикла Карно.

**Решение.** К. п. д. цикла Карно, состоящего из двух изотерм и двух адиабат (рис. 8-3), не зависит от того, какое рабочее вещество совершает этот цикл, и равен согласно формуле (8.17)

$$\eta_k = (T_1 - T_2)/T_1. \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению наивысшей и наименьшей температур газа в условиях задачи № 8-4.

Было уже выяснено, что газ нагревался на пути  $abc$  (см. рис. 8-2) и охлаждался на пути  $cda$ . Следовательно, наивысшей температурой газ обладал в состоянии  $c$  и наименьшей — в состоянии  $a$ . Сохраняя обозначения предыдущей задачи, можно записать на основании уравнения газового состояния:

$$T_1 = T_c = \frac{p_2 V_2}{\nu R}, \quad T_2 = T_a = \frac{p_1 V_1}{\nu R}.$$

Подставив эти значения  $T_1$  и  $T_2$  в (1), получим

$$\eta_K = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{p_2 V_2}.$$

Используя числовые данные из условия задачи № 8-4, найдем

$$\eta_K = 0,75.$$

**З а м е ч а н и е.** Сравнив ответы в задачах № 8-4 и 8-5, получим  $\eta_K = 8,3\eta$ . Это проявление общей закономерности: тепловая машина, работающая по циклу Карно, обладает наибольшим к. п. д. по сравнению с машиной, работающей по любому другому циклу в том же температурном интервале.

8-6. Тепловая машина работает по циклу Карно, к. п. д. которого  $\eta = 0,25$ . Каков будет холодильный коэффициент  $\eta'$  машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении? Холодильным коэффициентом называется отношение количества теплоты, отнятого от охлаждаемого тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину.

**Р е ш е н и е.** К. п. д. любого цикла, в том числе и цикла Карно, выражается формулой (8.17)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (1)$$

Особенностью цикла Карно является его обратимость: процесс может протекать как в прямом, так и в обратном направлении. При обратном цикле Карно (при этом стрелки на рис. 8-3 должны иметь противоположное направление) рабочее вещество будет, расширяясь по изотерме  $T_2 - T_2$ , отбирать от холодильника количество теплоты  $Q_2$  и, сжимаясь по изотерме  $T_1 - T_1$ , отдавать нагревателю количество теплоты  $Q_1$ . При этом работа, совершенная рабочим веществом за один цикл, будет отрицательной (положительная работа расширения меньше по модулю отрицательной работы сжатия). В этом случае положительной будет работа  $A$  двигателя, приводящего в действие машину.

Согласно определению холодильного коэффициента, запишем

$$\eta' = Q_2/A.$$

Чтобы определить  $\eta'$ , исключим из (1) величину  $Q_1$ , равную  $A + Q_2$ :

$$\eta = A/(A + Q_2).$$

Выполнив преобразования, получим:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{A + Q_2}{A} = 1 + \frac{Q_2}{A} = 1 + \eta';$$

$$\eta' = \frac{1}{\eta} - 1 = 3, \text{ или } \eta' = 300 \%.$$

8-7. Исходя из второго начала термодинамики, вывести формулу для к. п. д. цикла Карно.

**Решение.\*** Наиболее общим выражением второго начала термодинамики является формула (8.19). Поскольку цикл Карно представляет собой *обратимый* процесс, из (8.19) следует, что полное изменение энтропии изолированной системы нагреватель—рабочее вещество—холодильник равно нулю:

$$\Delta S = 0. \quad (1)$$

Согласно свойству аддитивности, полное изменение энтропии системы  $\Delta S$  будет складываться из изменений энтропии нагревателя  $\Delta S_1$ , рабочего вещества  $\Delta S'$  и холодильника  $\Delta S_2$ :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S' + \Delta S_2. \quad (2)$$

Рассмотрим эти изменения энтропии за один цикл. Так как рабочее вещество, совершив цикл, вернется в первоначальное состояние, а энтропия является функцией состояния, то она примет также первоначальное значение, т. е.  $\Delta S' = 0$ . Следовательно, из (1) и (2) имеем

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0. \quad (3)$$

Выразим изменение энтропии нагревателя и холодильника  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  по формуле (8.18). Нагреватель *отдает* рабочему веществу количество теплоты  $Q_1$  при постоянной температуре  $T_1$ , переходя при этом из некоторого состояния  $A$  в состояние  $B$ . Поэтому приращение  $dQ_1$  берем со знаком «—»:

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{-dQ_1}{T_1} = -\frac{1}{T_1} \int_A^B dQ_1 = -\frac{Q_1}{T_1}.$$

Холодильник *получает* от рабочего тела количество теплоты  $Q_2$  при температуре  $T_2$ , переходя из некоторого состояния  $C$  в состояние  $D$ . Следовательно,

$$\Delta S_2 = \int_C^D \frac{dQ_2}{T_2} = \frac{1}{T_2} \int_C^D dQ_2 = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Подставим эти значения  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  в (3):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}; \quad -\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1};$$

наконец, прибавив к обеим частям равенства по единице, найдем

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

\* Схема решения заимствована из книги [1].

8-8. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой, в которой имеется закрывающееся отверстие. В одной половине сосуда содержится  $m = 10,0$  г водорода. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Отверстие в перегородке открывают, и газ заполняет весь объем. Считая газ идеальным, найти приращение его энтропии.

**Решение.** Расширение газа здесь является необратимым процессом. Поэтому было бы ошибкой применить формулу (8.18) для данного процесса\*. Воспользуемся тем, что энтропия — функция состояния и ее изменение полностью определяется начальным и конечным состояниями системы, независимо от того процесса, в ходе которого система перешла из начального состояния в конечное. Поэтому представим такой процесс расширения газа, который переводил бы его в то же самое конечное состояние, но являясь бы обратимым процессом. Найдя по формуле (8.18) приращение энтропии в таком обратимом процессе, мы решим поставленную задачу.

Так как данный газ изолирован от окружающей среды ( $Q = 0$ ,  $A = 0$ ), то его внутренняя энергия  $U$ , как это следует из первого начала термодинамики, должна оставаться постоянной. При этом будет постоянной и температура идеального газа во время его расширения согласно формуле (8.10). Значит, в качестве обратимого процесса, переводящего газ в то же конечное состояние, что и данный процесс, можно рассматривать процесс обратимого изотермического расширения, в ходе которого объем газа увеличивается в два раза. Так как в этом процессе  $T = \text{const}$ ,  $\Delta U = 0$  и, следовательно,  $Q = A$ , получим ответ по (8.18) с учетом соотношения (8.13):

$$S_B - S_A = \frac{1}{T} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_B}{V_A} = \frac{m}{\mu} R \ln 2.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $m = 1,00 \cdot 10^{-2}$  кг,  $\mu = 2,00 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К). Выполнив вычисление, получим

$$S_B - S_A = 29 \text{ Дж/К.}$$

## § 9. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ЖИДКОСТИ

### Основные формулы

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT, \quad (9.1)$$

где  $V_0$  — молярный объем газа;  $a$ ,  $b$  — постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов. Их значения берутся из таблиц.

\* Так как газ теплоизолирован ( $dQ = 0$ ), то по (8.18) получили бы  $S_B - S_A = 0$ . В действительности же, как это следует из второго начала термодинамики, энтропия газа при его необратимом расширении должна увеличиться.

Соотношения между параметрами критического состояния и постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{0к} = 3b, \quad \rho_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad (9.2)$$

где  $V_{0к}$  — молярный критический объем газа,  $\rho_k$  и  $T_k$  — его критические давление и температура

Коэффициент поверхностного натяжения измеряется силой поверхностного натяжения, действующей на единицу длины любого контура, лежащего на поверхности жидкости:

$$\sigma = F_n/l, \quad (9.3)$$

или поверхностной энергией\*  $E$ , которой обладает каждая единица площади поверхности жидкости:

$$\sigma = E/S, \quad (9.4)$$

где  $S$  — площадь поверхности жидкости

Формула Лапласа: избыточное давление, создаваемое в жидкости вследствие кривизны ее поверхности (поверхностное давление), равно

$$p_{пов} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (9.5)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости. При этом  $p_{пов}$  положительно, если поверхность жидкости выпуклая, и отрицательно, если — вогнутая.

Высота поднятия жидкости в капилляре радиуса  $r$  при полном смачивании

$$h = \frac{2\sigma}{r\rho g}, \quad (9.6)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Давление насыщающего пара над вогнутой сферической поверхностью жидкости меньше, а над выпуклой — больше, чем над плоской поверхностью, на величину, равную

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_n}{\rho_k}, \quad (9.7)$$

где  $r$  — радиус сферы,  $\rho_n$  и  $\rho_k$  — плотности насыщающего пара и жидкости.

## А. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

### Методические указания

1. Здесь рассматриваются процессы в реальных газах при температуре  $T$  не ниже критической  $T_k$ . Задачи, связанные с конденсацией паров, которая возможна лишь при условии  $T < T_k$ , приводятся в п. В настоящего параграфа.

2. Обычно в условии задачи оговаривают те случаи, когда газ надо рассматривать как реальный. В противном случае следует выяснить этот вопрос, чтобы из двух уравнений состояния газа — Клапейрона—Менделеева и Ван-дер-Ваальса\*\* — выбрать одно для реше-

\* Так называют добавочную энергию, которую имеют молекулы, лежащие в поверхностном слое жидкости, по сравнению с молекулами внутри жидкости.

\*\* Другие уравнения состояния реальных газов, кроме уравнения Ван-дер-Ваальса, не изучаются в курсе общей физики.



ния задачи. При этом газ следует считать реальным прежде всего в тех случаях, когда он очень сильно уплотнен (сжат) по сравнению с газом, взятым при нормальных условиях (см. задачу № 9-1).

3. Если из условия задачи нельзя сразу сделать вывод о том, каким следует считать данный газ—идеальным или реальным,—надо найти его молярный объем  $V_0$  и сравнить его с молярным объемом, занимаемым любым газом при нормальных условиях:  $V_{0 \text{ норм}} = 22,4 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Если при этом окажется, что  $V_0 \geq V_{0 \text{ норм}}$ , т. е. данный газ не более плотен, чем при нормальных условиях, его можно без большой погрешности считать идеальным. Если же  $V_0 \ll V_{0 \text{ норм}}$ , т. е. плотность данного газа значительно превышает ее значение при нормальных условиях, газ следует считать реальным.

В остальных случаях ( $V_0 < V_{0 \text{ норм}}$ ) надо предположить, что данный газ реальный, и найти поправки на давление  $a/V_0^2$  и объем  $b$ , стоящие в уравнении (9.1), а затем сравнить их с величинами  $p$  и  $V_0$  (разумеется, если обе они даны в условии). Отбрасывая эти поправки в случае их малости (при этом получим уравнение состояния идеального газа) или оставляя их, мы тем самым решаем вопрос о выборе уравнения.

Если в задаче неизвестной величиной является объем или масса газа и, следовательно, нельзя вычислить молярный объем  $V_0$ , критерием выбора уравнения состояния часто может служить величина давления газа. Так, при давлении, не превышающем нормальное атмосферное ( $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ), газ будет достаточно разрежен и его можно считать идеальным (если температура его не очень низка по сравнению с нормальной  $t_0 = 0^\circ \text{ C}$ ). Наоборот, при давлении  $p \gg p_0$  газ будет сильно уплотнен и его следует считать реальным (если температура не очень высока по сравнению с  $t_0$ ). В этом случае придется решать уравнение (9.1), являющееся кубическим относительно  $V_0$ . Как избежать трудностей, связанных с решением уравнения третьей степени, видно на примере задачи № 9-3.

## Решение задач

9-1. В очень прочном закрытом стальном баллоне заключена вода, занимающая при комнатной температуре половину объема баллона. Найти давление (в технических атмосферах) и плотность водяных паров при повышении температуры до  $t = 400^\circ \text{ C}$ .

**Решение.** Из таблицы критических температур возьмем для воды  $t_k = 374^\circ \text{ C}$ . Таким образом, при нагревании воды в баллоне до  $400^\circ \text{ C}$  она оказалась при температуре выше критической. Следовательно, она вся будет находиться в газообразном, или, как это принято говорить в отношении воды, парообразном, состоянии\*.

Плотность водяного пара определим, учитывая, что объем одной и той же массы воды в результате ее нагревания увеличился в два раза

---

\* Вообще говоря, паром называют газ, находящийся при температуре ниже критической (см. п. В настоящего параграфа).

(массу паров, находящихся над водой при комнатной температуре, можно не учитывать). Следовательно, плотность  $\rho$  пара, равная отношению массы к объему, будет вдвое меньше плотности воды  $\rho_v = 1,00 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>:

$$\rho = \rho_v / 2 = 5,00 \cdot 10^2 \text{ кг/м}^3.$$

Так как плотность пара в баллоне оказалась громадной по сравнению с плотностями газов при нормальных условиях (например, плотность воздуха при нормальных условиях равна 1,29 кг/м<sup>3</sup>), то, очевидно, водяной пар здесь необходимо рассматривать как реальный газ, параметры которого связаны уравнением состояния Ван-дер-Ваальса (9.1). Решив его относительно давления  $p$ , получим

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}. \quad (1)$$

Здесь  $V_0$  — молярный объем, но не объем всей массы пара. Поэтому на основании определения плотности можно записать  $V_0 = \mu/\rho$ , где  $\mu$  — молярная масса пара. Подставив это значение  $V_0$  в (1), найдем

$$p = \frac{RT}{(\mu/\rho) - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2}.$$

Взяв из таблиц значения постоянных  $a$  и  $b$  для воды, выразим все величины, входящие в формулу, в единицах СИ:  $T = 673$  К,  $a = 0,55$  м<sup>4</sup>·Н/моль<sup>2</sup>,  $b = 3,0 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/моль,  $\mu = 0,018$  кг/моль. Выполнив вычисления, найдем

$$p = 5,1 \cdot 10^8 \text{ Па} = 5,2 \cdot 10^3 \text{ ат.}$$

9-2. Определить давление  $m = 280$  г азота, находящегося при температуре 27 °С в сосуде, объем которого равен:  
1)  $V = 1,00$  м<sup>3</sup>; 2)  $V = 0,50$  л.

**Решение.** Чтобы решить вопрос о том, каким следует считать данный газ — идеальным или реальным, — найдем молярный объем газа  $V_0$ . Пусть в сосуде содержится  $\nu = m/\mu$  молей газа. Тогда

$$V_0 = \frac{V}{\nu} = \frac{V\mu}{m}.$$

Учитывая, что молярная масса азота  $\mu = 0,028$  кг/моль, получим:

$$1) \quad V_0 = \frac{1,00 \cdot 0,028}{0,28} \text{ м}^3/\text{моль} = 0,10 \text{ м}^3/\text{моль};$$

$$2) \quad V_0 = \frac{0,50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,028}{0,28} \text{ м}^3/\text{моль} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Сравнивая вычисленные значения  $V_0$  с молярным объемом газа при нормальных условиях  $V_{0 \text{ норм}} = 22,4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль, видим, что в первом случае газ достаточно разрежен и его можно считать иде-

альным. Уравнение состояния идеального газа для одного моля записывается так:

$$pV_0 = RT. \quad (1)$$

Отсюда

$$p = \frac{RT}{V_0} = \frac{8,3 \cdot 300}{0,10} \text{ Па} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Во втором случае  $V_0 \ll V_0 \text{ норм}$ , и газ следует считать реальным. Его давление найдем из уравнения Ван-дер-Ваальса для реального газа (9.1):

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}. \quad (2)$$

Взяв из таблиц значения постоянных Ван-дер-Ваальса для азота:  $a = 0,13 \text{ м}^4 \cdot \text{Н/моль}^2$ ,  $b = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ , произведем вычисление по (2):

$$p = \left[ \frac{8,3 \cdot 300}{5,0 \cdot 10^{-5} - 3,7 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,13}{(5,0 \cdot 10^{-5})^2} \right] \text{ Па} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Заметим, что, вычисляя давление по (1), получили бы в этом случае неверный результат:  $p = 0,5 \cdot 10^8 \text{ Па}$ .

**9-3.** Определить массу кислорода в баллоне объемом  $V = 10,0 \text{ л}$  при температуре  $27^\circ \text{C}$  и давлениях: 1)  $p = 1,00 \text{ ат}$ ; 2)  $p = 410 \text{ ат}$ .

**Решение.** В первом случае ( $p = 1,00 \text{ ат}$ ) кислород в баллоне находится при условиях, близких к нормальным\*. Поэтому без большой погрешности можно считать газ идеальным. На основании уравнения состояния идеального газа, учитывая, что для кислорода  $\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$ , получим

$$m = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{0,032 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 300} = 0,013 \text{ кг}.$$

Во втором случае ( $p = 410 \text{ ат}$ ), учитывая громадное по сравнению с нормальным давление газа, следует считать его реальным и вести расчеты на основании уравнения Ван-дер-Ваальса.

Масса газа определяется из соотношения

$$m = \mu \nu = \mu V/V_0, \quad (1)$$

где  $\mu$  — молярная масса,  $\nu$  — число молей,  $V$  — объем газа,  $V_0$  — его молярный объем. Таким образом, необходимо из (9.1) найти величину  $V_0$ , а затем по формуле (1) — массу газа.

Уравнение (9.1) является уравнением третьей степени относительно  $V_0$  и поэтому имеет, вообще говоря, три корня. Однако, учитывая, что кислород в баллоне находится при температуре выше критической ( $t_k = -119^\circ \text{C}$ ), можно утверждать, что при определенном давлении

\* То обстоятельство, что температура газа несколько выше нормальной, означает лишь, что его плотность при давлении  $p = 1,00 \text{ ат}$  меньше, чем при нормальных условиях.

газ будет иметь лишь один определенный объем [в системе координат  $(p, V)$  изотерма Ван-дер-Ваальса, соответствующая температуре выше критической, не имеет завитка]. Следовательно, кубическое относительно  $V_0$  уравнение (9.1) имеет в данном случае лишь один действительный корень. Его можно найти методом последовательных приближений, поскольку расчеты, связанные с решением кубического уравнения по общей формуле Кардано, весьма громоздки.

В качестве первого приближения вычислим молярный объем  $V_{01}$  газа, рассматривая его как идеальный. Тогда из уравнения состояния идеального газа получим

$$V_{01} = \frac{RT}{p} = \frac{8,3 \cdot 300}{410 \cdot 9,8 \cdot 10^4} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,62 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Теперь, обозначив в уравнении (9.1) поправку на давление через  $p_1 = a/V_{01}^2$ , найдем из (9.1) величину  $V_0$ :

$$V_0 = \frac{RT}{p + p_1} + b. \quad (2)$$

Подставим в (2) приближенное значение  $p_1 = a/V_{01}^2$ :

$$V_{02} = \frac{RT}{p + a/V_{01}^2} + b.$$

Взяв из таблиц значения постоянных  $a$  и  $b$  для кислорода, выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $p = 410 \cdot 9,8 \times 10^4$  Па,  $V_{01} = 0,62 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К),  $T = 300$  К,  $a = 0,13$  м<sup>4</sup>·Н/моль<sup>2</sup>,  $b = 3,1 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль. Выполнив вычисление, найдем

$$V_{02} = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Еще раз вычислив по (2) молярный объем, считая при этом  $p_1 = a/V_{02}^2$ , получим третье приближение:

$$V_{03} = 0,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Повторяя таким образом вычисления по формуле (2), будем получать все более точные значения  $V_0$ :

$$V_{04} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль};$$

$$V_{05} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Видим, что при дальнейших вычислениях по (2), если ограничиться точностью до второго знака, ответ уже не будет изменяться. Если же взять значение  $V_{05} = 0,68 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/моль, то получим по (2) прежнее значение  $V_0$ :

$$V_{06} = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поэтому действительным корнем кубического уравнения (9.1), вычисленным с точностью до второго знака, будет

$$V_0 = 0,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Теперь по (1) найдем искомую массу газа:

$$m = \frac{0,032 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{0,67 \cdot 10^{-4}} \text{ кг} = 4,8 \text{ кг.}$$

**З а м е ч а н и е.** Легко убедиться в том, что вычисление по уравнению Клапейрона—Менделеева дало бы в этом случае неверный результат:

$$m = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{0,032 \cdot 410 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 300} \text{ кг} = 5,2 \text{ кг.}$$

**9-4.** Какую часть объема стеклянной ампулы должен занимать жидкий эфир при  $t = 20^\circ\text{C}$ , чтобы при его нагревании можно было наблюдать переход вещества через критическое состояние? Для эфира  $\mu = 0,074$  кг/моль,  $\rho = 714$  кг/м<sup>3</sup> при  $20^\circ\text{C}$ ,  $t_k = 194^\circ\text{C}$ ,  $p_k = 35,6$  ат.

**Р е ш е н и е.** Переход вещества через критическое состояние характерен тем, что при этом исчезает различие между жидкой и газообразной фазами вещества. Критическое состояние характеризуется определенными для каждого вещества параметрами: критическими значениями температуры  $T_k$ , давления  $p_k$  и молярного объема  $V_{ок}$ . При этом критический объем всей массы вещества, содержащей  $\nu = m/\mu$  молей, равен

$$V_k = \nu V_{ок} = (m/\mu) V_{ок}. \quad (1)$$

Если вещество, нагретое до критической температуры  $T_k$ , окажется в объеме  $V$ , не равном  $V_k$ , то оно не будет при этом находиться в критическом состоянии. В этом случае при достижении температуры  $T_k$  не будет исчезать различие между двумя фазами, так как еще до достижения  $T_k$  все вещество при нагревании постепенно перейдет в одну фазу (при  $V > V_k$  вся жидкость в сосуде испарится, при  $V < V_k$  весь пар сконденсируется). Таким образом, для того чтобы наблюдать переход вещества, находящегося в ампуле, через критическое состояние, необходимо, чтобы при достижении критической температуры занимаемый им объем  $V$  был равен критическому объему  $V_k$ :

$$V = V_k. \quad (2)$$

Так как в этот момент вещество будет равномерно заполнять всю ампулу, то  $V$  является одновременно и объемом ампулы.

Искомое отношение объема  $V_{ж}$  жидкого эфира к объему  $V$  ампулы найдем из (1) и (2), учитывая, что  $m/V_{ж} = \rho$  есть плотность жидкого эфира:

$$\frac{V_{ж}}{V} = \frac{V_{ж}}{V_k} = \frac{V_{ж} \mu}{m V_{ок}} = \frac{\mu}{\rho V_{ок}}. \quad (3)$$

Выразив величину  $V_{0н}$  через известные  $\rho_n$  и  $T_n$  при помощи равенств (9.2), получим:

$$\frac{T_n}{\rho_n} = \frac{8a \cdot 27b^2}{27bRu} = \frac{8b}{R}$$

$$V_{0н} = 3b = \frac{3T_n R}{8\rho_n}$$

Подставим это значение  $V_{0н}$  в (3), тогда

$$\frac{V_{ж}}{V} = \frac{8\mu\rho_n}{3R\rho T_n}$$

Выразим в единицах СИ данные величины:  $\mu = 0,074$  кг/моль,  $\rho_n = 35,6 \cdot 9,8 \cdot 10^4$  Па,  $\rho = 714$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_n = 467$  К. Подставив эти значения в формулу и выполнив вычисление, найдем

$$V_{ж}/V = 0,25.$$

## Б. ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ

### Методические указания

1. При расчетах сил поверхностного натяжения следует учитывать, что эти силы действуют вдоль любого контура, лежащего на поверхности жидкости. При этом сила поверхностного натяжения, приложенная к каждому элементу этого контура, перпендикулярна ему и направлена по касательной к поверхности.

Если в качестве такого контура выбрать границу соприкосновения свободной поверхности жидкости с твердым телом, которое она смачивает, то соответствующая сила поверхностного натяжения будет проявляться как сила, с которой поверхностный слой жидкости действует на твердое тело. Полную силу можно найти по формуле (9.3) лишь при условии, что силы поверхностного натяжения, приложенные ко всем элементам контура, параллельны друг другу.

2. Каким бы тонким ни был слой жидкости (например, в мыльном пузыре), он всегда имеет две поверхности — наружную и внутреннюю, вдоль каждой из которых действуют силы поверхностного натяжения (см. задачу № 9-6).

3. Чтобы не допустить ошибки при учете избыточного (поверхностного) давления, выражаемого формулой (9.5), полезно рассматривать его как скачок давления, который существует на границе жидкости с окружающей ее средой. Величина этого скачка определяется кривизной поверхности жидкости в данной точке. Поэтому в случае поверхности переменной кривизны (например, поверхность капли, висящей на смачиваемом ею твердом теле, имеет кривизну, положительную внизу, и кривизну, отрицательную вверху) поверхностное давление  $p_{пов}$  будет различным в различных точках одной и той же жидкости, лежащих вблизи ее поверхности.

В простейших случаях сферических поверхностей целесообразно искривленную поверхность жидкости (маленькая капля, воздушный пузырек внутри жидкости и т. д.) условно принимать за некую упругую пленку, находящуюся в состоянии натяжения и поэтому сжимающую охватываемые ею жидкость или газ.

4. Во всех задачах, связанных с расчетом высоты поднятия жидкости в капилляре, где невозможно применить непосредственно формулу (9.6), следует исходить из условия равновесия столба жидкости: разность давлений, производимых на столб снизу и сверху, должна быть равна гидростатическому давлению, оказываемому столбом жидкости на его основание и равному  $\rho gh$ , где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — высота столба.

### Решение задач

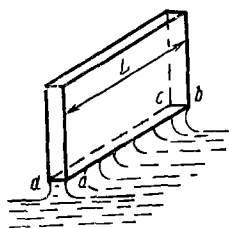


Рис 9-1

9-5. К пружинным весам подвешена тонкая металлическая пластина. Нижний край пластины  $L = 10,0$  см приведен в соприкосновение с поверхностью жидкости, которая полностью смачивает пластину. После этого пластину начинают медленно поднимать. Перед ее отрывом от жидкости поверхность последней принимает форму, изображенную на рис. 9-1. При этом свободная поверхность жидкости у границы с пластиной располагается приблизительно в вертикальной плоскости. Зная, что для отрыва пластины потребовалась сила  $F = = 0,45 \cdot 10^{-3}$  кгс, определить коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  жидкости.

**Решение.** Чтобы найти коэффициент поверхностного натяжения, нужно, как это следует из определяющей формулы (9.3), знать силу поверхностного натяжения, действующую на единицу длины какого-либо контура, ограничивающего поверхность жидкости. Таким контуром является линия соприкосновения свободной поверхности жидкости с пластиной, имеющая форму очень узкого прямоугольника  $abcd$  (рис. 9-1). Следовательно, ее длина равна  $2L$  (длиной сторон  $ad$  и  $bc$  пренебрегаем).

На пластину вдоль каждой единицы длины этого контура действует со стороны жидкости сила поверхностного натяжения, равная согласно (9.3) коэффициенту  $\sigma$ . Векторы этих сил перпендикулярны контуру и являются касательными к свободной поверхности жидкости. Поэтому в условиях данной задачи они направлены вертикально вниз и, следовательно, параллельны друг другу. Поэтому результирующая сила поверхностного натяжения  $F_{\text{н}}$ , действующая на пластину, также направлена вертикально вниз и равна сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т. е.

$$F_{\text{н}} = 2L\sigma.$$

Для отрыва пластины от жидкости необходимо приложить силу  $F$ , направленную вертикально вверх, которая бы уравнивала силу поверхностного натяжения  $F_n$ . Следовательно,

$$F_n = F. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим ответ:

$$\sigma = F/2L.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $L = 0,100$  м,  $F = 4,4 \cdot 10^{-3}$  Н. Выполнив вычисление, найдем

$$\sigma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

**З а м е ч а н и е.** Существенно, что в данной задаче пластина была тонкой, так что площадью ее соприкосновения с жидкостью — площадью прямоугольника  $abcd$  — можно было пренебречь. В противном случае необходимо учитывать отрицательное давление, создаваемое в жидкости около пластины вследствие кривизны ее поверхности (см. задачу № 9-8). Тогда соотношение (2) оказывается неверным. Кроме того, для толстой пластины силы поверхностного натяжения, приложенные к отдельным элементам контура  $abcd$ , уже не будут даже приблизительно параллельны друг другу и поэтому соотношение (1) также перестанет выполняться. Решение задачи в случае толстой пластины становится сложным.

**9-6.** Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом 0,050 м? Чему равно избыточное давление внутри пузыря?

**Р е ш е н и е.** Мыльный пузырь представляет собой очень тонкую пленку мыльной воды приблизительно сферической формы. Эта пленка имеет две поверхности — наружную и внутреннюю. Пренебрегая толщиной пленки и считая поэтому радиусы обеих сфер одинаковыми, найдем их общую площадь:

$$S = 4\pi R^2 + 4\pi R^2 = 8\pi R^2. \quad (1)$$

Поскольку до образования пузыря поверхность мыльной воды, из которой он выдут, была весьма мала, можно считать, что соотношение (1) выражает изменение (прирост) площади  $\Delta S$  поверхности мыльной воды.

Увеличение поверхности жидкости на  $\Delta S$  связано с приростом поверхностной энергии  $\Delta E$ . Как следует из формулы (9.4),

$$\Delta E = \sigma \Delta S. \quad (2)$$

Совершаемая при выдувании пузыря работа против сил поверхностного натяжения идет на увеличение поверхностной энергии  $\Delta E$ . Таким образом, из (1) и (2) получим

$$A = \Delta E = 8\pi R^2 \sigma. \quad (3)$$



Для определения избыточного давления внутри пузыря учтем, что каждая из двух сферических поверхностей пузыря — наружная и внутренняя — производит вследствие своей кривизны давление на воздух внутри пузыря. Это давление, производимое каждой сферой, можно найти по формуле Лапласа (9.5), имея в виду, что радиусы кривизны всех нормальных сечений для сферы равны ее радиусу, следовательно,  $R_1 = R_2 = R$ . Таким образом, избыточное (по сравнению с наружным) давление воздуха внутри пузыря

$$\Delta p = 2p_{\text{пов}} = 4\sigma/R. \quad (4)$$

Взяв из таблицы значение  $\sigma$  для мыльной воды ( $\sigma = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ ) и выполнив вычисление по (3) и (4), получим

$$A = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж};$$

$$\Delta p = 3,2 \text{ Па}.$$

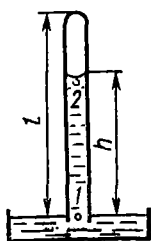


Рис 9 2

9-7. Вертикально расположенная капиллярная трубка длиной  $l = 200 \text{ мм}$  с запаянным верхним концом приведена в соприкосновение своим нижним концом с поверхностью воды. На какую высоту поднимется вода в трубке, если ее радиус  $R_0 = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ? Атмосферное давление  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Считать, что вода полностью смачивает трубку.

**Решение.** Здесь нельзя применить формулу (9.6), определяющую высоту поднятия жидкости в капилляре при полном смачивании, так как эта формула справедлива лишь для открытой с обоих концов трубки. Для решения задачи рассмотрим столбик воды, находящийся в равновесии в капилляре, после того как он уже поднялся под действием сил поверхностного натяжения. Согласно условию равновесия разность давлений у его концов равна гидростатическому давлению, производимому столбиком жидкости высотой  $h$  на его основание, т. е.

$$p_1 - p_2 = \rho gh, \quad (1)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления внизу и вверху столба соответственно.

Найдем величины  $p_1$  и  $p_2$ . Давление внизу столба (точка 1 на рис. 9-2) равно давлению в воде у ее открытой поверхности, т. е. атмосферному давлению:

$$p_1 = p_0, \quad (2)$$

так как в противном случае жидкость у нижнего края трубки не была бы в равновесии.

Поскольку столб воды ограничен сверху изогнутой поверхностью, давление  $p_2$  вверху (точка 2) отличается от давления  $p_{\text{в}}$  воздуха в трубке на величину  $p_{\text{пов}}$ , определяемую формулой (8.5), т. е.

$$p_2 = p_{\text{в}} + p_{\text{пов}}. \quad (3)$$

При расчете давления  $p_{\text{пов}}$  учтем, что мениск в узком капилляре имеет форму полусферы и, следовательно,  $R_1 = R_2 = R$ . Поэтому

$$p_{\text{пов}} = 2\sigma/R, \quad (4)$$

где  $|R| = R_0$ . Так как данный мениск вогнутый, то  $p_{\text{пов}} < 0$ . Значит, следует считать  $R = -R_0$ . Тогда вместо (4) получим

$$p_{\text{пов}} = -2\sigma/R_0. \quad (5)$$

Давление воздуха в трубке можно выразить через данные величины  $p_0$ ,  $l$ , а также высоту столба  $h$  при помощи закона Бойля—Мариотта. Воздушный столб высотой  $l - h$  при давлении  $p_0$  имел при атмосферном давлении  $p_0$  высоту  $l$ . Поскольку объем столба пропорционален его длине, то можем записать:

$$p_0(l - h) = p_0 l; \quad p_0 = p_0 l / (l - h). \quad (6)$$

Подставим в (1) значения  $p_1$  и  $p_2$  по (2) и (3), учитывая соотношения (5) и (6):

$$p_0 - \left( p_0 \frac{l}{l-h} - \frac{2\sigma}{R} \right) = \rho g h l. \quad (7)$$

Взяв из таблиц значения  $\sigma$  и  $\rho$  для воды, выразим в единицах СИ величины, входящие в (7):  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$  Па,  $l = 0,20$  м,  $R_0 = 2,0 \times 10^{-4}$  м,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $\rho = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Подставив числовые значения в (7) и решив это квадратное относительно  $h$  уравнение, получим:

$$h_1 = 11 \text{ м}; \quad h_2 = 0,014 \text{ м}.$$

Поскольку должно выполняться очевидное неравенство  $h < l$ , то ответом на вопрос задачи является второе значение.



Рис 9 3

9-8. На полированную стеклянную пластинку капнули 0,010 г воды и наложили сверху вторую такую же пластинку. Вода растеклась между пластинками по площади круга радиуса  $R = 3,0$  см, не дойдя до ее краев. С какой силой надо растягивать обе пластинки, чтобы их разъединить? Считать, что вода полностью смачивает стекло.

**Решение.** Сначала выясним, почему возникает сила притяжения между пластинками. При наложении пластинок свободная поверхность воды вследствие полного смачивания образует вогнутый мениск, диаметрального сечения которого изображено на рис. 9-3 в виде двух полуокружностей. Следовательно, давление в жидкости, заключенной между пластинками, меньше атмосферного на величину  $p_{\text{пов}}$ , определяемую по формуле (9.5). Под избытком внешнего давления пластины сближаются, вода растекается между ними все более тонким слоем. Этот процесс прекратится, когда жидкость дойдет до краев пластин, после чего мениск распрямится, а поверхностное давление и сила притяжения между пластинами исчезнут, или когда дальнейшее сближение пластин станет невозможным из-за того, что они начнут

соприкасаются друг с другом в некоторых точках вследствие неровности их поверхности. Очевидно, что именно последний случай имеет место в задаче.

Сила притяжения между пластинками равна избыточному внешнему давлению  $p_{\text{пов}}$ , умноженному на площадь одной пластины, т. е.

$$F = p_{\text{пов}} S = p_{\text{пов}} \pi R^2, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус круга растекания жидкости.

Чтобы по формуле (9.5) определить величину  $p_{\text{пов}}$ , рассмотрим два взаимно перпендикулярных нормальных сечения поверхности жидкости. Одно из них изображено на рис. 9-3, плоскость второго сечения параллельна пластинам и находится посередине между ними. Очевидно, радиус кривизны  $R_1$  первого сечения равен половине расстояния между пластинками, радиус кривизны  $R_2$  второго сечения есть радиус круга растекания жидкости, данный в условии. Поскольку при этом выполняется неравенство  $R_1 \ll R_2$ , то в формуле (9.5) можно пренебречь величиной  $1/R_2$ , т. е. кривизной второго сечения, и рассматривать мениск приближения как вогнутую цилиндрическую поверхность. Таким образом, получим

$$p_{\text{пов}} = \frac{\sigma}{R_1} = \frac{2\sigma}{d}, \quad (2)$$

где  $d$  — расстояние между пластинками. Его найдем, разделив объем воды на площадь ее растекания:

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \pi R^2}, \quad (3)$$

где  $m$  — масса воды,  $\rho$  — ее плотность. Наконец, подставив в (1) значение  $p_{\text{пов}}$  из (2) с учетом (3), определим силу притяжения между пластинками:

$$F = 2\pi^2 R^4 \sigma \rho / m. \quad (4)$$

Чтобы разъединить пластины, их надо растягивать с силой, по крайней мере равной силе их взаимного притяжения. Таким образом, формула (4) дает ответ на поставленный в задаче вопрос.

Взяв из таблиц значения  $\sigma$  и  $\rho$  для воды, выразим в единицах СИ все величины, входящие в (4):  $R = 3,0 \cdot 10^{-2}$  м,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $\rho = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $m = 1,0 \cdot 10^{-6}$  кг. Произведя вычисление, получим

$$F = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Н} = 0,12 \text{ кН.}$$

#### В СВОЙСТВА ПАРОВ

#### Методические указания

1. Паром называют газ, находящийся при температуре ниже критической. В зависимости от того, насколько пар уплотнен (сжат) он подчиняется уравнению состояния идеального газа (при малых плотностях) или уравнению состояния реального газа (при больших плотностях). При этом критерий степени уплотнения пара остается тем же, что и для всякого газа (см. п. А настоящего параграфа).

2. Отметим важнейшую особенность пара, которую необходимо учитывать, применяя к нему уравнения состояния. При изотермическом сжатии пара его плотность и давление будут возрастать лишь до тех пор, пока пар не станет *насыщающим*. При дальнейшем уменьшении объема пар начнет конденсироваться, превращаясь в жидкость. При этом плотность и давление оставшейся массы пара остаются постоянными, равными плотности и давлению насыщающего пара при данной температуре (значения этих величин берутся из таблиц).

Таким образом, при вычислении давления или плотности пара по какому-либо уравнению состояния реальными ответами будут лишь те значения  $p$  и  $\rho$ , которые не превышают значений этих величин для насыщающего пара при данной температуре. В противном случае следует считать пар в данных условиях насыщающим и за искомые величины  $p$  и  $\rho$  брать их табличные значения для насыщающего пара при данной температуре (см. задачу № 9-9).

3. В таблицах для насыщающего пара часто приводят зависимость от температуры лишь давление пара, но не его плотности. Поскольку обе величины связаны между собой уравнением состояния (Клапейрона—Менделеева или Ван-дер-Ваальса), зная одну из них, всегда можно найти и другую.

4. До сих пор речь шла о насыщающем паре, находящемся над плоской поверхностью жидкости. Его давление определяется только температурой. Однако, как следует из формулы (9.7), давление насыщающего пара над искривленной поверхностью жидкости зависит также и от кривизны этой поверхности. Эта зависимость очень слабая и практически учитывается лишь в явлении конденсации паров при наличии в них капелек микроскопических размеров, т. е. очень большой кривизны (см. задачу № 9-10).

### Решение задач

9-9. В запаянном сосуде нагрета вода массой 0,50 кг до  $107^\circ\text{C}$ . Определить давление водяного пара в сосуде при этой температуре и следующих значениях объема сосуда: 1)  $V = 1,00\text{ м}^3$ , 2)  $V = 0,50\text{ м}^3$ , 3)  $V = 5,0\text{ л}$ .

**Решение.** Здесь в отличие от задачи № 9-1 вода нагрета до температуры ниже критической. Поэтому не исключено, что не вся вода при нагревании обратилась в пар, который при этом будет находиться в состоянии насыщения. Из таблицы зависимости давления насыщающего пара от температуры находим, что при  $107^\circ\text{C}$  давление пара

$$p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Это значение определяет максимально возможное давление пара в сосуде при данной температуре.

Теперь вычислим действительное давление пара в сосуде в трех случаях.

1)  $V = 1,00\text{ м}^3$ . Чтобы выяснить, идеальным или реальным газом следует считать водяной пар, найдем его молярный объем  $V_0$ , предпо-

ложив, что вся вода в сосуде обратилась в пар:

$$V_0 = \frac{V_{\text{н}}}{m} = \frac{V_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}}} = \frac{1,00 \cdot 0,018}{0,50} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,036 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поскольку полученное значение  $V_0$  превышает молярный объем газа при нормальных условиях ( $V_{0 \text{ норм}} = 0,024 \text{ м}^3/\text{моль}$ ) и, следовательно, плотность пара меньше, чем при нормальных условиях, можно, не делая большой погрешности, считать его идеальным газом. Из уравнения состояния идеального газа, записанного для одного моля, найдем

$$p_1 = \frac{RT}{V_0} = \frac{8,3 \cdot 380}{0,036} \text{ Па} = 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Полученный ответ вполне реален, поскольку, сравнивая значения  $p_{\text{нас}}$  и  $p_1$ , видим, что  $p_1 < p_{\text{нас}}$ . Следовательно, предположение о том, что вся вода в сосуде испарилась, оказалось верным. Сосуд оказался целиком заполненным ненасыщающим паром.

2)  $V = 0,50 \text{ м}^3$ . Снова вычислим молярный объем  $V_0$  пара, предположив, что вся вода обратилась в пар:

$$V_0 = \frac{V_{\text{н}}}{m} = \frac{0,50 \cdot 0,018}{0,50} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,018 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Поскольку теперь  $V_0 < V_{0 \text{ норм}}$  и, следовательно, плотность пара больше, чем при нормальных условиях, будем рассматривать его как реальный газ, подчиняющийся уравнению Ван-дер-Ваальса (9.1). Из таблицы возьмем значения постоянных Ван-дер-Ваальса:  $a = 0,55 \text{ м}^4 \times \times \text{Н}/\text{моль}^2$ ,  $b = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Пренебрегая поправкой  $b$  по сравнению с  $V_0$ , получим из (9.1)

$$p_2 = \frac{RTV_0 - a}{V_0^2} = \frac{8,3 \cdot 380 \cdot 0,018 - 0,55}{(0,018)^2} \text{ Па} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Сравнивая этот результат со значением  $p_{\text{нас}}$ , видим, что  $p_2 > p_{\text{нас}}$  при данной температуре, что невозможно. Следовательно, предположение о том, что вся вода в сосуде обратилась в пар, оказалось неверным. В действительности пар в сосуде объемом  $0,5 \text{ м}^3$  находится в состоянии насыщения и его давление

$$p_2 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3)  $V = 0,005 \text{ м}^3$ . Поскольку пар оказался насыщающим в объеме  $0,5 \text{ м}^3$ , то при меньшем объеме сосуда он и подавно будет насыщающим. Следовательно,

$$p_3 = p_{\text{нас}} = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

9-10. Что произойдет, если в пересыщенный водяной пар, температура которого  $t = 96 \text{ }^\circ\text{C}$  и давление  $p = 1,0 \text{ кгс}/\text{см}^2$ , попадет капелька воды радиуса  $r$ ? Рассмотреть два случая: 1)  $r = 0,50 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , 2)  $r = 1,00 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ .

**Решение.** По таблице зависимости давления насыщающего пара от температуры найдем, что при  $t = 96 \text{ }^\circ\text{C}$  давление насыщающего пара

$$p_{\text{нас}} = 0,88 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (1)$$

Поскольку давление данного в условии задачи пара превышает значение  $p_{\text{нас}}$ , он действительно является пересыщенным. Это состояние мало устойчиво. Когда такой пар приходит в соприкосновение со своей жидкостью, он начинает конденсироваться. Этот процесс продолжается до тех пор, пока масса пара не уменьшится настолько, что он перестанет быть пересыщенным.

Однако конденсация пара на очень маленьких капельках затруднена в связи с тем, что давление насыщающего пара около сферической поверхности капли больше, чем около плоской поверхности жидкости при той же температуре. Следовательно, (1) дает неправильное, заниженное значение  $p_{\text{нас}}$  около капли, так как таблица, из которой оно взято, составлена для пара, находящегося над плоской поверхностью жидкости. Правильное значение  $p'_{\text{нас}}$  около капли получим по формуле (9.7):

$$p'_{\text{нас}} = p_{\text{нас}} + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ж}}} . \quad (2)$$

В зависимости от величины  $r$  могут быть два случая:

1)  $p'_{\text{нас}} > p$ , где  $p$  — действительное давление пара. Это значит, что пар, пересыщенный по отношению к жидкости с плоской поверхностью, оказался в то же время ненасыщенным по отношению к капельке. Следовательно, она испарится;

2)  $p_{\text{нас}} < p$ . Это значит, что пар пересыщен относительно не только плоской поверхности жидкости, но и капельки. Следовательно, он будет конденсироваться до тех пор, пока его давление не снизится до значения  $p'_{\text{нас}}$ .

Чтобы по формуле (2) рассчитать величину  $p'_{\text{нас}}$ , надо предварительно определить плотность пара  $\rho_{\text{п}}$ . Так как пар находится при атмосферном давлении, его можно рассматривать как идеальный газ. Тогда из уравнения Клапейрона—Менделеева найдем

$$\rho_{\text{п}} = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} .$$

Подставив это значение плотности в (2), получим

$$p_{\text{нас}} = p_{\text{нас}} + 2\sigma\mu/rRT\rho_{\text{ж}} \quad (3)$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулу (3)  $p_{\text{нас}} = 0,88 \cdot 10^5$  Па,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $p = 0,98 \cdot 10^5$  Па,  $\mu = 0,018$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль·К),  $T = 369$  К,  $\rho_{\text{ж}} = 1,00 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Выполнив вычисление, получим:

1)  $p'_{\text{нас}} = 1,1 \cdot 10^5$  Па при  $r = 0,50 \cdot 10^{-8}$  м. Сравнив значения  $p'_{\text{нас}}$  и  $p$ , видим, что  $p'_{\text{нас}} > p$ . Следовательно, имеет место первый из рассмотренных выше случаев и капля испарится;

2)  $p'_{\text{нас}} = 0,96 \cdot 10^5$  Па при  $r = 1,00 \cdot 10^{-8}$  м. Теперь  $p'_{\text{нас}} < p$ , что соответствует второму случаю: пересыщенный пар конденсируется до тех пор, пока не станет насыщающим,

## Глава 3 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 10. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

#### Основные формулы

Закон Кулона: два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящиеся на расстоянии  $r$ , взаимодействуют с силой

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (10.1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная.

Напряженностью электрического поля называется векторная величина

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q', \quad (10.2)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила, с которой поле действует на помещенный в данную точку пробный положительный заряд  $q'$ .

Поток вектора напряженности  $\mathbf{E}$  сквозь поверхность  $S$  определяется интегралом

$$N = \int_S E_n dS, \quad (10.3)$$

где  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на направление нормали к элементу площади  $dS$ .

Теорема Гаусса: поток вектора  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ , т. е.

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q_i. \quad (10.4)$$

Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$  от него,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (10.5)$$

Напряженность поля диполя в точке, находящейся на расстоянии  $r \gg l$  от диполя ( $l$  — плечо диполя),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}, \quad (10.6)$$

где  $p = ql$  — электрический момент диполя,  $\varphi$  — угол между осью диполя и радиусом-вектором, проведенным из центра диполя в данную точку.

Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности в точках, лежащих вне и внутри сферы на расстоянии  $r$  от ее центра, соответственно равна:

$$\text{а) } E_{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad \text{б) } E_{\text{внутр}} = 0. \quad (10.7)$$

Напряженность поля бесконечно длинной равномерно заряженной нити или бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности в точках, расположенных вне ее,

$$E = \tau / 2\pi\epsilon_0 a, \quad (10.8)$$

где  $a$  — расстояние точки от нити (оси цилиндра),  $\tau$  — линейная плотность заряда, численно равная заряду, приходящемуся на единицу длины нити или цилиндра, т. е.

$$\tau = \Delta q / \Delta l. \quad (10.9)$$

Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \sigma / 2\epsilon_0, \quad (10.10)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, численно равная заряду, приходящемуся на единицу площади заряженной поверхности, т. е.

$$\sigma = \Delta q / \Delta S. \quad (10.11)$$

Напряженность поля двух бесконечных параллельных равномерно заряженных с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$  плоскостей (поле плоского конденсатора) в точках, расположенных между плоскостями и вне их, соответственно равна:

$$E_{\text{внутр}} = \sigma / \epsilon_0. \quad \text{б) } E_{\text{внеш}} = 0. \quad (10.12)$$

### Методические указания

1. При решении задач на нахождение напряженности электрического поля, если задано распределение зарядов, создающих это поле, могут встретиться следующие случаи:

а) поле образовано одним или несколькими точечными зарядами. Тогда используют формулу (10.5) и *принцип суперпозиции* (наложения) электрических полей: напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных отдельными зарядами;

б) поле создано зарядами, которые не являются точечными, но распределены равномерно по сферическим, цилиндрическим или плоским поверхностям. Тогда применяют формулы (10.7), (10.8), (10.10), (10.12), выведенные с помощью теоремы Гаусса. Бесконечно длинным цилиндром (или нитью) можно считать любой реальный цилиндр (или нить) для таких точек, расстояние от которых до оси цилиндра (нити) значительно меньше, чем до его концов. Точно так же всякую плоскость можно считать бесконечной относительно таких точек, расстояние которых до плоскости значительно меньше их расстояния до краев плоскости;

в) если заряженное тело не является ни сферой, ни бесконечно длинным цилиндром, ни бесконечной плоскостью, то для определения напряженности поля необходимо разбить тело на бесконечно малые элементы, найти по формуле (10.5) напряженность  $dE$  поля, созданную в данной точке каждым элементом, а затем просуммировать все элементарные напряженности  $dE$ . При этом надо учитывать направления складываемых векторов  $dE$ . В случае, если все они направлены одинаково, можно геометрическое сложение заменить арифметическим. Тогда получим

$$E = \int dE,$$



где интегрирование производится по всему объему заряженного тела (по всей площади заряженной поверхности, по всей длине заряженной нити).

В том случае, когда складываемые векторы  $dE$  имеют различные направления, сначала выясняют, не обладает ли поле заряженного тела осевой симметрией. Если это так и при этом точка, в которой требуется определить напряженность, находится на оси симметрии поля, то оказывается, что вектор напряженности  $E$  результирующего поля в данной точке всегда направлен вдоль оси симметрии поля. Чтобы найти модуль вектора  $E$ , достаточно сложить проекции всех элементарных векторов  $dE$  на его направление. Обозначив эти проекции через  $dE_l$ , получим

$$E = \int dE_l.$$

В общем случае, когда нельзя воспользоваться соображениями симметрии, поступают так. Выбирают координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , затем суммируют (интегрируют) проекции  $dE_x$ ,  $dE_y$ ,  $dE_z$  всех элементарных векторов напряженности  $dE$  на эти оси, получая тем самым проекции искомого вектора  $E$ , т. е.

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z,$$

и его модуль:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}.$$

2. Силы взаимодействия зарядов можно рассчитывать двумя способами: по закону Кулона и по соотношению  $F = q'E$ , получаемому из формулы (10.2), если один из зарядов ( $q'$ ) рассматривать как заряд, находящийся в электрическом поле, созданном другим зарядом ( $q$ ). Второй способ, при котором задача сводится к расчету электрического поля заряда  $q$  в том месте, где находится заряд  $q'$ , обладает преимуществом в тех случаях, когда для определения  $E$  можно использовать формулы (10.7), (10.8), (10.10), (10.12). Это позволяет избежать сложного интегрирования, которое может оказаться необходимым при первом способе. Следует помнить, что, хотя в формуле (10.2), определяющей напряженность поля, под  $q'$  подразумевается *точечный* заряд, эту формулу можно применять для неточечного заряда при условии, что во всех точках пространства, где находится протяженный заряд  $q'$ , вектор  $E$  имеет одинаковые модуль и направление (см. задачу № 10-7).

3. Если в условии задачи не указывается среда, в которой взаимодействуют заряды, то подразумевается вакуум ( $\epsilon = 1$ ) или воздух, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  которого близка к единице.

4. Производя вычисления в задачах электростатики, особенно в задачах настоящего параграфа, полезно использовать значение коэффициента пропорциональности  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , входящего в ряд формул, равное

$$k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$$

## Решение задач

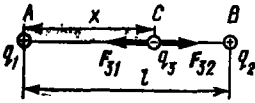


Рис. 10-1

10-1. Два точечных положительных заряда  $q_1$  и  $q_2$  помещены на расстоянии  $l$  друг от друга. Где надо поместить третий точечный заряд  $q_3$  и каким он должен быть по модулю и знаку, чтобы все три заряда оказались в равновесии?

**Решение.** Очевидно, заряд  $q_3$  должен находиться между зарядами  $q_1$  и  $q_2$  на прямой, их соединяющей: только тогда силы  $F_{31}$  и  $F_{32}$ , с которыми действуют на заряд  $q_3$  два одноименных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , будут располагаться на одной прямой и иметь противоположные направления, что необходимо для равновесия  $q_3$ . Знак заряда  $q_3$  должен быть отрицательным: только в этом случае силы, действующие на каждый из зарядов  $q_1$  и  $q_2$  со стороны двух других зарядов, будут уравновешены.

Предположим, что заряд  $q_3$  находится в точке  $C$ , расположенной на расстоянии  $x$  от заряда  $q_1$  (рис. 10-1). Запишем условие равновесия заряда  $q_3$ , к которому приложены силы  $F_{31}$  и  $F_{32}$ :

$$F_{31} = F_{32}. \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) вместо сил их значения по закону Кулона (10.1) и произведя сокращение, получим

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(l-x)^2}.$$

Решив уравнение относительно  $x$ , найдем два значения искомого расстояния  $AC$ :

$$x_1 = \sqrt{q_1} l / (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}); \quad x_2 = \sqrt{q_1} l / (\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}).$$

Исследуя второй корень, видим, что должно выполняться одно из двух неравенств:  $x_2 > l$  (при  $q_1 > q_2$ ) или  $x_2 < 0$  (при  $q_1 < q_2$ ). Этим неравенствам соответствует положение точки  $C$  вне отрезка  $AB$ , что невозможно для равновесия заряда  $q_3$ . Поэтому, отбрасывая корень  $x_2$ , получим ответ на первый вопрос задачи:

$$x = \sqrt{q_1} l / (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}). \quad (2)$$

Чтобы найти величину  $q_3$ , запишем условие равновесия одного из двух зарядов  $q_1$ ,  $q_2$ , например заряда  $q_1$ :

$$F_{12} = F_{13}. \quad (3)$$

Подставив вместо сил их значения по закону Кулона [учитывая при этом, что в формуле (3) стоят модули сил, а  $q_3$  — отрицательный заряд] и произведя сокращение, получим

$$\frac{q_2}{l^2} = \frac{|q_3|}{x^2}.$$

Заменив величину  $x$  ее значением по формуле (2), найдем

$$|q_3| = q_1 q_2 / (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2.$$

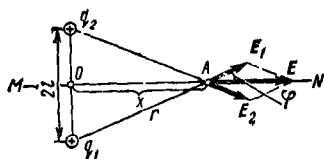


Рис 10 2

10-2. Два одинаковых положительных точечных заряда  $q_1 = q_2 = q$  находятся на расстоянии  $2l = 10,0$  см друг от друга. Найти на прямой  $MN$  (рис. 10-2), являющейся осью симметрии этих зарядов, точку, в которой напряженность электрического поля имеет максимум.

**Решение.** Выясним, почему такая точка должна существовать. Напряженность  $E$  электрического поля в любой точке прямой  $MN$  складывается из напряженностей  $E_1$  и  $E_2$ , созданных в этой точке зарядами  $q_1$  и  $q_2$ :

$$E = E_1 + E_2.$$

При этом в точке  $O$ , лежащей между зарядами, сумма векторов  $E_1$  и  $E_2$ , одинаковых по модулю и противоположных по направлению, равна нулю. В точках прямой  $MN$ , весьма удаленных от зарядов, векторы  $E_1$  и  $E_2$  окажутся приблизительно одинаково направленными. Однако и в этом случае их равнодействующая близка к нулю, поскольку оба слагаемых, как это видно из (10.5), быстро убывают при удалении от зарядов. Следовательно, на прямой  $MN$  по обе стороны от зарядов должны быть точки, в которых напряженность поля достигает максимума

Строго говоря, для этого необходимо также, чтобы напряженность поля в любой точке прямой  $MN$  была непрерывной функцией координаты этой точки. Можно показать, что это условие в задаче выполняется.

Чтобы решить задачу, найдем напряженность поля  $E$  в произвольной точке  $A$  прямой  $MN$ . Как видно из чертежа,

$$E = 2E_1 \cos \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — угол между  $E_1$  и осью  $MN$ . Обозначив отрезок  $OA$  через  $x$  и учитывая соотношения

$$r^2 = l^2 + x^2; \quad \cos \varphi = x / \sqrt{l^2 + x^2},$$

вместо равенства (1) на основании формулы (10.5) получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qx}{(l^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Эта формула выражает модуль вектора  $E$  в произвольной точке прямой  $MN$  как функцию координаты  $x$  этой точки. Чтобы найти максимум функции, продифференцируем ее по  $x$  и приравняем нулю производную:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2q [(l^2 + x^2)^{-3/2} - 3x^2 (l^2 + x^2)^{-5/2}] = 0.$$

Отсюда находим

$$x_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{2}} = \pm \frac{5,0}{\sqrt{2}} \text{ см} = \pm 3,5 \text{ см}.$$

Два значения  $x$  соответствуют двум точкам, расположенным по обе стороны от точки  $O$  на расстоянии 3,5 см от нее.

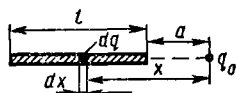


Рис 10 3

10-3. Тонкий прямой стержень длиной  $l = 15$  см равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau = 0,10$  мКл/м. На продолжении оси стержня на расстоянии  $a = 10$  см от ближайшего конца находится точечный заряд  $q_0 = 10$  нКл. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

**Решение.** Зная длину стержня  $l$  и линейную плотность заряда  $\tau$ , легко найти по формуле (10.9) заряд стержня:  $q_{ст} = \tau l$ . Однако в отличие от двух предыдущих задач здесь нельзя определить силу взаимодействия двух зарядов непосредственно по закону Кулона. Этот закон справедлив лишь для точечных зарядов, а заряд  $q_{ст}$ , распределенный по стержню, нельзя считать точечным.

Чтобы применить закон Кулона, рассмотрим бесконечно малый элемент длины  $dx$  стержня, находящийся на расстоянии  $x$  от заряда  $q_0$  (рис. 10-3). Заряд этого элемента согласно формуле (10.9) равен

$$dq = \tau dx.$$

По закону Кулона на заряд  $q_0$  будет действовать со стороны заряда  $dq$  сила, равная

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \tau dx}{x^2}.$$

Со стороны всех остальных бесконечно малых элементов стержня на заряд  $q_0$  также будут действовать элементарные силы, направленные в ту же сторону, что и  $dF$ . Сложив их модули, найдем искомую силу, равную результирующей силе действия всех элементов стержня на заряд  $q_0$ :

$$F = \int dF = \int_a^{a+l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \tau dx}{x^2}.$$

Вынося постоянные множители за знак интеграла, получим

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \tau \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \tau \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right).$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $1/4\pi\epsilon_0 = 9,00 \cdot 10^9$  м/Ф,  $q_0 = 1,0 \cdot 10^{-8}$  Кл,  $\tau = 1,0 \cdot 10^{-7}$  Кл/м,  $l = 0,15$  м,  $a = 0,10$  м. Подставив эти значения и выполнив вычисление, найдем

$$F = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

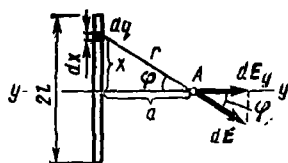


Рис 10-4

**10-4.** Тонкий стержень длиной  $2l$  равномерно заряжен с линейной плотностью  $\tau$ . Определить напряженность электрического поля в точке  $A$ , лежащей против середины стержня на расстоянии  $a$  от него. Рассмотреть общий случай, а также частные случаи:  $a \gg 2l$  и  $a \ll 2l$ .

**Решение.** Общий случай соответствует любому соотношению между величинами  $a$  и  $l$ . Так как при этом заряженный стержень нельзя считать точечным зарядом, то нельзя определить напряженность поля непосредственно по формуле (10.5). В этом отношении данная задача аналогична предыдущей. И здесь рассмотрим сначала элемент  $dx$  стержня, находящийся на расстоянии  $x$  от середины стержня (рис. 10-4). Заряд этого элемента  $dq = \tau dx$ . Полагая его точечным, найдем напряженность поля заряда  $dq$  в точке  $A$  по формуле (10.5):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{x^2 + a^2}. \quad (1)$$

Искомая напряженность поля в точке  $A$  равна сумме элементарных напряженностей  $dE$ , созданных в этой точке всеми элементами стержня. Однако здесь в отличие от предыдущей задачи векторы  $dE$  от различных элементов стержня имеют различное направление. Следовательно, их векторная сумма не равна сумме их модулей и не может быть выражена интегралом  $\int dE$ .

Чтобы преодолеть возникшую трудность, воспользуемся соображениями симметрии. Так как поле равномерно заряженного стержня обладает осевой симметрией и точка  $A$  лежит на одной из осей симметрии (ось  $yy$  на рис. 10-4), то напряженность электрического поля в точке  $A$  направлена вдоль этой оси.

Действительно, при сложении полей от любых двух, симметрично расположенных элементов стержня получается поле, вектор  $E$  которого расположен вдоль оси симметрии, как это видно на рис. 10-2. Следовательно, при суммировании всех элементарных векторов  $dE$  достаточно учесть лишь составляющие этих векторов  $dE_y$ , взятые вдоль оси симметрии  $yy$ . При этом, как видно из чертежа,

$$dE_y = dE \cos \varphi,$$

где

$$\cos \varphi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}. \quad (2)$$

Таким образом, мы свели задачу к сложению одинаково направленных векторов  $dE_y$ , и искомая напряженность  $E$  выразится интегралом

$$E = \int_{-l}^{+l} dE_y = \int_{-l}^{+l} dE \cos \varphi = 2 \int_0^l dE \cos \varphi. \quad (3)$$

Подставив в (3) значения величин  $dE$  и  $\cos \varphi$  по формулам (1) и (2) и произведя интегрирование, получим

$$E = \frac{\tau a}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \Big|_0^l = \frac{\tau l}{2\pi\epsilon_0 a \sqrt{l^2 + a^2}}. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим частные случаи задачи. Неравенство  $a \gg 2l$  означает, что можно пренебречь размерами стержня по сравнению с расстоянием от него до данной точки, т. е. заряд стержня можно считать точечным. Тогда по (10.5) найдем

$$E = q/4\pi\epsilon_0 a^2. \quad (5)$$

Из неравенства  $a \ll 2l$  следует, что данная точка находится *вблизи* тонкого стержня и *далеко* от его концов. Это соответствует *бесконечно длинному* стержню (нити, цилиндру). Следовательно, применив формулу (10.8), имеем

$$E = \tau/2\pi\epsilon_0 a. \quad (6)$$

Легко видеть, что выражения (5) и (6) являются частными случаями общего ответа (4). Действительно, при  $a \gg 2l$  можно пренебречь величиной  $l^2$  под знаком корня в (4). Тогда, учитывая, что  $2\tau l = q$ , приходим к формуле (5). При  $a \ll 2l$  пренебрегаем величиной  $a^2$  в (4) и сразу получаем соотношение (6).

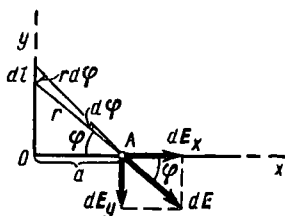


Рис. 10-5

10-5. Очень длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью  $\tau$ . Определите напряженность поля в точке  $A$ , лежащей против конца нити на расстоянии  $a$  от нее (рис. 10-5).

**Решение.** Здесь нельзя вычислить напряженность по формуле (10.8) для бесконечно длинной нити, так как заданная точка  $A$  расположена *вблизи* не только нити, но и одного из ее концов (сравните со случаем  $a \ll 2l$  предыдущей задачи). Поэтому опять рассмотрим элемент  $dl$  нити. Пусть он находится от точки  $A$  на расстоянии  $r$ . Заряд элемента  $dq = \tau dl$ . Напряженность поля  $dE$ , созданного этим зарядом в точке  $A$ , равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2}. \quad (1)$$

В качестве переменной величины здесь удобно выбрать угол  $\varphi$ , который составляет радиус-вектор  $r$  с нормалью к нити. Как видно из чертежа,

$$r = \frac{a}{\cos \varphi}; \quad dl = \frac{rd\varphi}{\cos \varphi} = \frac{ad\varphi}{\cos^2 \varphi}. \quad (2)$$

Подставив в формулу (1) значения  $r$  и  $dl$  из (2), получим

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{rd\varphi}{a}$$

Чтобы найти полную напряженность в точке  $A$ , сложим напряженности  $dE$  от всех элементов нити. При этом следует учесть, как и в предыдущей задаче, что все слагаемые векторы  $dE$  имеют различное направление. Поэтому интеграл  $\int dE$ , взятый по всей длине нити, заведомо не равен искомой величине. В этой задаче нельзя воспользоваться соображениями симметрии, так как, хотя поле заряженной нити имеет оси симметрии, точка  $A$  не лежит ни на одной из этих осей. Поэтому применим общий метод определения напряженности, изложенный в п. 1 методических указаний.

Выберем оси  $Ox$  и  $Oy$ , как показано на рисунке. Найдем проекции вектора  $dE$  на эти оси:

$$dE_x = dE \cos \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \cos \varphi d\varphi}{a};$$

$$dE_y = dE \sin \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \sin \varphi d\varphi}{a}.$$

Интегрируя эти проекции по всей длине нити и учитывая, что при этом угол  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ , вычислим проекции искомого вектора напряженности  $E$  в точке  $A$  и его модуль:

$$E_x = \int_0^{\pi/2} dE_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$E_y = \int_0^{\pi/2} dE_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a};$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\sqrt{2} \tau}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

- 10-6. Точечный заряд  $q_1 = 20$  нКл помещен в центре непроводящей сферической поверхности радиуса  $R = 15$  см, по которой равномерно распределен заряд  $q_2 = -20$  нКл. Определить напряженность поля в точках  $A$  и  $B$ , удаленных от центра сферы на расстояния  $r_A = 20,0$  см и  $r_B = 10,0$  см. Чему будет равна напряженность поля в точке  $A$ , если заряд  $q_1$  сместить на расстояние  $l = 1,0$  мм от центра сферы в направлении, которое составляет с радиусом-вектором, проведенным в точку  $A$ , угол  $\varphi = 60^\circ$  (рис. 10-6)?

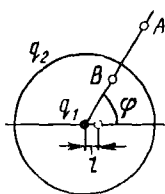


Рис 10 6

**Решение.** Напряженность поля, созданного зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , равна векторной сумме напряженностей  $E_1$  и  $E_2$  поля каждого заряда. Хотя здесь заряд  $q_2$  не является точечным, разбивать его на бесконеч-

но малые элементы, как это было сделано в трех предыдущих задачах, не обязательно, так как этот заряд распределен равномерно по поверхности сферы. Поэтому для определения поля этого заряда можно воспользоваться формулами (10.7). Как следует из (10.7а), поле сферы в точке  $A$  таково, как если бы весь заряд сферы находился в ее центре. Поэтому можно считать, что на сфере вообще зарядов нет, но в ее центре находятся два заряда  $q_1$  и  $q_2$ . Так как по условию они равны по модулю и противоположны по знаку, то ясно, что их поля в точке  $A$  (как и в любой другой точке вне сферы) уничтожат друг друга. Следовательно,

$$E_A = 0.$$

Чтобы найти напряженность поля в точке  $B$ , учтем, что согласно (10.7б) заряды, равномерно распределенные на сфере, не создают поля внутри нее. Следовательно, в точке  $B$  будет поле, созданное только зарядом  $q_1$ , и его напряженность

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B^2}.$$

После смещения заряда  $q_1$  из центра сферы поля зарядов  $q_1$  и  $q_2$  уже не будут уничтожать друг друга. По-прежнему заменяя заряженную сферу зарядом, находящимся в ее центре, видим, что задача сводится к определению напряженности поля (в точке  $A$ ) системы двух равных по модулю и противоположных по знаку зарядов, т. е. поля диполя, имеющего плечо  $l$  и электрический момент  $p = q_1 l$ . Так как, по условию,  $r_A \gg l$ , то, воспользовавшись формулой (10.6), найдем напряженность поля в точке  $A$ :

$$E_A' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 l}{r_A^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}.$$

Выразим данные величины в единицах СИ:  $(1/4\pi\epsilon_0) = 9,00 \times 10^9$  м/Ф,  $q_1 = 2,0 \cdot 10^{-8}$  Кл,  $r_A = 0,200$  м,  $r_B = 0,100$  м,  $l = 1,0 \times 10^{-3}$  м,  $\cos \varphi = 0,50$ . Подставив эти значения в формулы для  $E_B$  и  $E_A'$  и выполнив вычисление, получим:

$$E_B = 18 \cdot 10^1 \text{ В/м}; \quad E_A' = 25 \text{ В/м}.$$

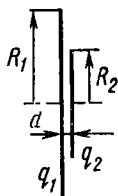


Рис. 10 7

10-7. Два коаксиальных диска радиусов  $R_1 = 10,0$  см и  $R_2 = 5,0$  см расположены на расстоянии  $d = 2,4$  мм друг от друга (рис. 10-7). Диск заряжены равномерно с поверхностной плотностью, равной  $\sigma = -20,0$  мкКл/м<sup>2</sup>. Определить силу электрического взаимодействия дисков.

**Решение.** Найдя площадь дисков и зная поверхностную плотность их заряда, можно по формуле (10.11) найти заряды дисков. Однако было бы ошибкой вычислять затем силу их взаимодействия по закону Кулона, который применим лишь для точечных зарядов.



Можно сначала по закону Кулона найти силу взаимодействия двух бесконечно малых элементов дисков, а затем, суммируя эти силы по обеим плоскостям (т. е. производя двойное интегрирование), определить полную силу взаимодействия дисков.

Однако существует другой, более простой, путь решения задачи. Каждый из двух взаимодействующих зарядов находится в поле другого заряда. При этом напряженность поля заряженного диска радиуса  $R_1$  в тех точках, где расположен второй диск, можно вычислить, не прибегая к интегрированию. Действительно, все точки диска  $R_2$  находятся *близко* от диска  $R_1$  и *далеко* от его краев. Это значит, что диск  $R_1$  можно рассматривать как бесконечную равномерно заряженную плоскость, напряженность которой определяется формулой (10.10). Выразив из формулы (10.11) заряд диска  $R_2$ :

$$q_2 = \sigma S_2 = \pi R_2^2 \sigma, \quad (1)$$

найдем искомую силу  $F$  из соотношения (10.2):

$$F = q_2 E.$$

Подставив вместо  $q_2$  и  $E$  их значения по формулам (1) и (10.10), получим\*

$$F = \pi R_2^2 \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\pi R_2^2 \sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (2)$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины  $R_2 = 5,0 \cdot 10^{-2}$  м,  $\sigma = 2,00 \cdot 10^{-5}$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Выполнив вычисление, найдем

$$F = 0,18 \text{ Н.}$$

**З а м е ч а н и е.** Как видно из формулы (2), сила взаимодействия дисков не зависит от расстояния между ними. Конечно, это будет лишь до тех пор, пока диск радиуса  $R_1$  можно рассматривать как бесконечную плоскость, т. е. пока выполняется неравенство  $d \ll R_1 - R_2$ . Наоборот, при достаточно большом расстоянии между дисками, когда  $d \gg R_1$ , заряды дисков можно считать точечными и силу взаимодействия между ними рассчитывать по закону Кулона.

## § 11. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### Основные формулы

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $r$ , при условии, что  $W_\infty = 0$ , равна

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (11.1)$$

---

\* То обстоятельство, что заряд  $q_2$  не является точечным, здесь не приведет к ошибке, так как во всех точках пространства, им занимаемых, напряженность поля  $E$  имеет одинаковые модуль и направление.

Потенциал электрического поля (определяющая формула)

$$\varphi = W/q', \quad (11.2)$$

где  $W$  — потенциальная энергия пробного заряда  $q'$ , помещенного в данную точку поля

Работа, совершенная силами поля по перемещению заряда  $q$  из точки 1 в точку 2,

$$A = -\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (11.3)$$

или

$$A = \int_1^2 F_l dl = q \int_1^2 E_l dl, \quad (11.4)$$

где  $E_l$  — проекция вектора напряженности  $E$  на направление  $dl$ ; при этом интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2

Разность потенциалов и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl, \quad (11.5)$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad (11.6)$$

где производная  $d\varphi/dl$  берется в направлении быстрейшего изменения потенциала, т.е. вдоль силовой линии.

Для однородного поля ( $E = \text{const}$ )

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l, \quad (11.7)$$

где  $l$  — расстояние между двумя точками, измеренное вдоль силовой линии  
Потенциал поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (11.8)$$

Потенциал поля сферической поверхности радиуса  $r_0$ , по которой равномерно распределен заряд  $q$  равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi r_0^2} \frac{r_0}{r} \quad (11.9)$$

для точек, лежащих вне сферы на расстоянии  $r$  от ее центра, и

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0} \quad (11.10)$$

для точек, лежащих на поверхности сферы или внутри нее

### Методические указания

1. Для вычисления потенциала поля, созданного одним или несколькими точечными зарядами, применяют формулу (11.8), а также принцип суперпозиции полей, в силу которого потенциал поля нескольких точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, созданных отдельными зарядами.

2. Если в электрическое поле вносится проводник, то в последнем всегда происходит явление электростатической индукции: свободные заряды проводника перераспределяются так, что напряжен-

ность электрического поля внутри проводника, равная векторной суммой напряженностей внешнего поля и поля зарядов самого проводника, становится равной нулю. При этом все точки проводника приобретают одинаковый потенциал, называемый потенциалом проводника. Следует помнить, что в результате явления электростатической индукции изменяется, вообще говоря, потенциал и напряженность поля в пространстве вокруг проводника. Только если известно распределение всех зарядов, в том числе и зарядов, индуцированных на проводнике, можно найти потенциал в данной точке поля. Так как распределение индуцированных зарядов заранее бывает неизвестно, решение задачи в общем случае оказывается весьма сложным. Поэтому в курсе общей физики обычно ограничиваются случаями, в которых в силу симметрии можно найти распределение индуцированных зарядов на проводнике (см. задачу № 11-3) или пренебречь этим распределением (см. задачу № 11-7).

3. Физический смысл имеет не сам потенциал, а лишь его изменение (разность потенциалов, или напряженности), подобно тому, как существенным является не сама потенциальная энергия системы, а лишь ее изменение, равное работе, совершенной системой. Так, формула (11.1), выражающая потенциальную энергию взаимодействия зарядов, справедлива лишь при условии, что величина  $W$  при бесконечном удалении зарядов условно принимается равной нулю; формулы (11.8) — (11.10) также выведены в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю.

4. В основе общего метода определения разности потенциалов лежит соотношение (11.5), связывающее разность потенциалов двух точек поля с напряженностью поля в пространстве между этими точками. При этом существенно, что интегрирование можно производить по любому пути, соединяющему две точки. Этот метод вычисления разности потенциалов применен при решении задач № 11-5, 11-7.

Если известно пространственное распределение потенциала в неоднородном поле, формула (11.6) позволяет находить напряженность поля. Задача упрощается в случае симметричных полей, когда заранее известно направление вектора  $E$ . Тогда достаточно взять производную от потенциала по координате в данном направлении (см. задачу № 11-2).

### Решение задач

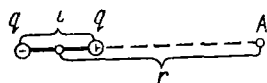


Рис. 11-1

11-1. Определить потенциал электрического поля точечного диполя, электрический момент которого  $p = 2,0 \cdot 10^{-14}$  Кл · м, в точке, лежащей на оси диполя на расстоянии  $r = 10,0$  см от его центра со стороны положительного заряда.

**Решение.** Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциал любой точки электрического поля диполя равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым зарядом диполя:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-.$$

Тогда для точки  $A$  (рис. 11-1) по формуле (11.8) имеем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r-l/2} - \frac{q}{r+l/2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2 - l^2/4},$$

где  $p = ql$ . Таким образом, для определения потенциала поля диполя надо знать, вообще говоря, не только его электрический момент  $p$ , но и плечо  $l$ . Учтем, однако, что для *точечного* диполя выполняется соотношение  $l \ll r$ . Поэтому, пренебрегая величиной  $l^2/4$  в знаменателе выведенной формулы, найдем

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2}.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $p = 2,0 \times 10^{-14}$  Кл · м,  $r = 0,100$  м,  $(1/4\pi\epsilon_0) = 9,00 \cdot 10^9$  м/Ф. Выполнив вычисление, получим

$$\varphi = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ В} = 18 \text{ мВ.}$$

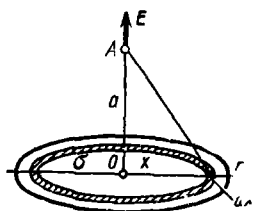


Рис 11 2

11-2. Тонкий диск радиуса  $r$  равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти потенциал и напряженность поля в точке  $A$ , лежащей на оси диска на расстоянии  $a$  от него (рис. 11-2).

**Решение.** Чтобы найти потенциал в точке  $A$ , надо применить принцип суперпозиции полей. Разобьем диск на элементарные кольца толщиной  $dx$ . Площадь кольца радиуса  $x$  равна  $2\pi x dx$ , а заряд кольца —  $2\pi\sigma x dx$ . Потенциал поля кольца равен сумме потенциалов, созданных всеми его точечными элементами. Так как последние равноудалены от точки  $A$ , то, заменив заряд кольца точечным зарядом той же величины, удаленным на расстояние  $\sqrt{a^2 + x^2}$  от точки  $A$ , найдем по формуле (11.8) потенциал кольца:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\sigma x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Интегрируя, определим потенциал диска:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^r \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + r^2} - a). \quad (1)$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности  $E$  электрического поля направлен в точке  $A$  вдоль оси диска. Поэтому для нахождения модуля  $E$  можно применить тот же метод, что и в

задаче № 10-4. Однако, имея ответ (1), поступим проще. Рассматривая величину  $a$  как переменную, по формуле (11.6) получим

$$E = -\frac{d\varphi}{da} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right). \quad (2)$$

Заметим, что при  $a \ll r$  выражение (2) переходит в формулу (10.10) для напряженности поля бесконечной плоскости.

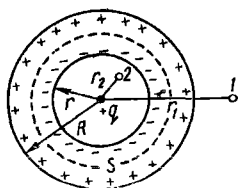


Рис 11-3

11-3. Точечный заряд  $q = 0,15$  мкКл находится в центре сферической проводящей оболочки, внешний и внутренний радиусы которой соответственно равны  $R = 25$  см и  $r = 20$  см (рис. 11-3). Определить напряженность поля в точках 1 и 2, удаленных от заряда соответственно на  $r_1 = 50$  см и  $r_2 = 10,0$  см, а также разность потенциалов между этими точками.

**Решение** Если бы заряд  $q$  не был окружен проводником, ответы на все вопросы можно было бы получить по формулам (10.5) и (11.8). Что же изменится из-за наличия проводника?

Под влиянием поля заряда  $q$  на сферических поверхностях проводника появятся индуцированные заряды, равные по модулю и противоположные по знаку; на внутренней поверхности — отрицательные, на внешней — положительные. Из соображений симметрии ясно, что, эти заряды равномерно распределятся по каждой поверхности. Но согласно формуле (10.7а) это означает, что напряженность поля индуцированных зарядов такова, как если бы оба заряда ( $+q_{\text{инд}}$  и  $-q_{\text{инд}}$ ) оказались в центре сферы. Ясно, что при этом их поля будут уничтожать друг друга. Учитывая также соотношение (10.7б), приходим к выводу, что наличие проводящей оболочки не изменит напряженности поля заряда  $q$  в точках 1 и 2.

Подставив в формулу (10.5) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $q_1 = 1,5 \cdot 10^{-7}$  Кл,  $r_1 = 0,50$  м,  $r_2 = 0,100$  м, найдем:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} = 5 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 5 \text{ кВ/м}; \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2^2} = 1,4 \cdot 10^5 \text{ В/м} = 1,4 \cdot 10^2 \text{ кВ/м}.$$

Потенциалы в каждой из точек 1 и 2 определим, как и в предыдущей задаче, с помощью принципа суперпозиции полей:

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_{q_{\text{инд}}} + \varphi_{-q_{\text{инд}}}.$$

Тогда для точки 1 согласно формулам (11.8) и (11.9) получим

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_1} + \frac{q_{\text{инд}}}{r_1} - \frac{q_{\text{инд}}}{r_1} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1}, \quad (1)$$

т. е. потенциал снаружи сферической оболочки таков, как будто ее нет.

Чтобы найти потенциал поля в точке 2, учтем, что напряженность поля зарядов, равномерно распределенных по поверхности сферы, равна нулю внутри сферы. Поэтому все точки этого поля внутри сферы имеют одинаковый потенциал, равный потенциалу самой сферы и определяемый формулой (11.10). Следовательно, для точки 2, лежащей внутри оболочки, снова применяя принцип суперпозиции полей, найдем

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_2} + \frac{q_{\text{инд}}}{R} - \frac{q_{\text{инд}}}{r} \right). \quad (2)$$

Чтобы определить величину  $q_{\text{инд}}$ , воспользуемся теоремой Гаусса (10.4), применив ее для замкнутой поверхности  $S$ , проходящей внутри проводника и охватывающей заряды  $q$  и  $-q_{\text{инд}}$  (пунктир на рис. 11-3). Так как внутри проводника при установившемся распределении зарядов электрическое поле отсутствует, поток вектора напряженности  $N$ , определяемый формулой (10.3), равен нулю. Но тогда из (10.4) следует, что

$$\Sigma q_i = q - q_{\text{инд}} = 0.$$

Приходим к выводу, что индуцированные заряды  $+q_{\text{инд}}$  и  $-q_{\text{инд}}$  численно равны заряду  $q$ . Поэтому формулу (2) можно переписать так:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right). \quad (3)$$

Теперь из формул (1) и (3) получим ответ:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = 9 \cdot 10^3 \text{ В} = 9 \text{ кВ}.$$

Из последнего соотношения видно, что в результате явления электростатической индукции разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1$  уменьшилась (сумма последних двух членов меньше нуля).

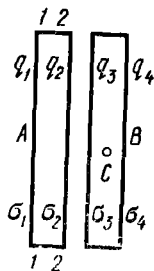


Рис. 11-4

11-4. Объяснить, почему все заряды, находящиеся на пластине плоского конденсатора, несмотря на их взаимное отталкивание, располагаются на внутренней поверхности пластины (т. е. на той поверхности, которая обращена к соседней пластине).

**Решение.** В данном случае в отличие от предыдущей задачи целесообразно воспользоваться не самой теоремой Гаусса (10.4), а выведенной с ее помощью формулой (10.10) для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости. Кроме того, необходимо

применить свойство проводников, в силу которого электрическое поле в них при установившемся распределении зарядов всегда равно нулю.

Пластина  $A$  всякого реального плоского конденсатора есть проводящее тело, ограниченное двумя плоскостями — наружной 1-1 и внутренней 2-2 (рис. 11-4). Допустим, что заряды распределены по обеим поверхностям каждой пластины (внутри проводника при электростатическом равновесии, как известно, зарядов нет). Из соображений симметрии ясно, что, сколько бы зарядов ни было на данной поверхности, они должны распределиться по ней *равномерно*\*. Следовательно, заряженный конденсатор можно представить как систему четырех равномерно заряженных плоскостей. Пусть их заряды равны  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , а поверхностные плотности заряда  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Тогда напряженность поля в какой-либо точке  $C$ , находящейся внутри пластины  $B$ , найдем на основании формулы (10.10) и принципа суперпозиции полей. При этом учтем, что положительные заряды  $q_1, q_2$  и отрицательный заряд  $q_4$  создают в точке  $C$  электрическое поле одного направления, а отрицательный заряд  $q_3$  — противоположного. Следовательно, напряженность поля в точке  $C$  равна

$$E_C = \frac{1}{2\epsilon_0} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_4| - |\sigma_3|) = \frac{1}{2\epsilon_0 S} (|q_1| + |q_2| + |q_4| - |q_3|).$$

Так как  $|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$ , то можно записать

$$E_C = \frac{1}{2\epsilon_0 S} (|q_3| + |q_4| + |q_4| - |q_3|) = \frac{|q_4|}{\epsilon_0 S}.$$

С другой стороны, напряженность поля в точке  $C$ , находящейся *внутри проводника*, должна быть равна нулю. Тогда из последней формулы следует:  $q_4 = 0$ . Таким образом, в действительности на внешней поверхности пластины  $B$  зарядов нет, все заряды распределяются только по внутренней поверхности пластины. Из симметрии задачи ясно, что и на пластине  $A$  заряды распределяются лишь по ее внутренней поверхности.

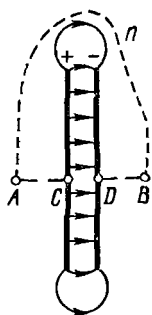


Рис 11 5

11-5. Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U = 100$  В. Определить работу, которую совершат силы поля при перемещении заряда  $q = 0,52$  мкКл из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 11-5).

\* Мы не рассматриваем заряды вблизи краев пластины, полагая их бесконечными, т. е. принимая расстояние между пластинами и их толщину малыми по сравнению с линейными размерами пластин.

**Решение.** Поскольку электрическое поле плоского конденсатора заключено между его пластинами, точки  $A$  и  $B$  находятся вне поля. Поэтому можно было бы сделать вывод, что разность потенциалов между ними отсутствует (как, например, в задаче № 11-3 для точек, лежащих внутри равномерно заряженной сферы). Однако в действительности это не так.

Разность потенциалов и напряженность электрического поля связаны формулой (11.5). Поскольку при этом интегрировать можно по любой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , выберем прямую  $AB$ . Тогда получим

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B E_l dl = \int_A^C E_l dl + \int_C^D E_l dl + \int_D^B E_l dl. \quad (1)$$

Так как во всех точках интервалов  $AC$  и  $DB$  поле отсутствует, видим, что из трех интегралов в правой части формулы (1) первый и третий равны нулю. Следовательно,

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_C^D E_l dl = U = 100 \text{ В.}$$

Таким образом, между точками  $A$  и  $B$  существует та же разность потенциалов, что и между пластинами конденсатора. Отсюда искомая работа по перемещению заряда согласно формуле (11.3) равна

$$\begin{aligned} A = q(\varphi_A - \varphi_B) &= 5,2 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \text{ Дж} = 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = \\ &= 52 \text{ мкДж.} \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е.** В действительности заряд  $q$  перемещается из точки  $A$  в точку  $B$  не по прямой  $AB$ , а по некоторой кривой  $AMB$  (см. рис. 11-5), обходя пластины конденсатора. Возникает вопрос: какие же силы совершают вычисленную нами работу, если поле конденсатора заключено между его пластинами?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, следует учесть рассеивание силовых линий электрического поля у краев пластин. Чем дальше от краев, тем меньше напряженность, но зато тем больший путь пройдет заряд  $q$ , двигаясь под действием сил электрического поля, чтобы попасть из точки  $A$  в точку  $B$ . В результате силы поля, перемещая заряд по любому пути из  $A$  в  $B$ , совершают одинаковую, отличную от нуля работу.



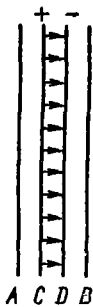


Рис. 11-6

**11-6.** Четыре металлические пластины, параллельные друг другу, находятся на равных расстояниях  $d$  (рис. 11-6). Пластины  $C$  и  $D$  заряжены до напряжения  $U$ , после чего отсоединены от источника тока. Как изменится напряжение между этими пластинами, если пластины  $A$  и  $B$  соединить проводником?

**Решение.** Выясним, что произойдет при соединении пластин  $A$  и  $B$ . Находясь вне поля заряженного конденсатора, они тем не менее обладали разными потенциалами, как это следует из решения предыдущей задачи (разность их потенциалов также была равна  $U$ ). Поэтому при соединении пластин проводником по последнему потечет электрический ток. Заряды будут перемещаться до тех пор, пока потенциалы пластин не станут равными. В результате пластина  $A$ , потенциал которой понизился, зарядится отрицательно; пластина  $B$ , потенциал которой повысился, зарядится положительно.

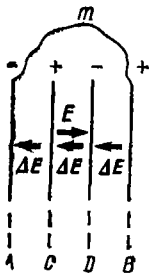


Рис. 11-7

Теперь систему четырех пластин можно рассматривать как два конденсатора, из которых один ( $CD$ ) вставлен внутрь другого ( $AB$ ). Электрические поля этих конденсаторов направлены навстречу друг другу. На рис. 11-7 изображены векторы напряженности:  $E$  — поля конденсатора  $CD$  и  $\Delta E$  — поля конденсатора  $AB$ . Тогда напряженность результирующего поля внутри конденсатора  $CD$  согласно принципу суперпозиции полей равна  $E' = E - \Delta E$ .

Очевидно, для ответа на вопрос задачи достаточно найти отношение величин  $E'/E$ . Действительно, согласно формуле (11.7) напряжение между пластинами конденсатора  $CD$  и напряженность однородного электрического поля в пространстве между ними пропорциональны друг другу.

Воспользуемся теперь следующим свойством электрического поля: работа сил поля по перемещению заряда по любому замкнутому пути равна нулю. Это значит, что интеграл, стоящий в правой части формулы (11.4), взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю:

$$\oint E_{\parallel} dl = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим замкнутый контур  $ACDBmA$  (рис. 11-7). Выберем направление его обхода против часовой стрелки. Учитывая направления векторов  $\Delta E$  и  $E$ , а также отсутствие электрического поля в проводнике, соединяющем пластины  $A$  и  $B$  (после того, как установится

определенное распределение зарядов на пластинах), на основании уравнения (1) получим

$$\oint E_1 dl = \int_A^C E_1 dl + \int_C^D E_1 dl + \int_D^B E_1 dl = -\Delta E d + \\ + (E - \Delta E) d - \Delta E d = 0.$$

Отсюда находим:

$$\Delta E = E/3; E' = E - \Delta E = 2E/3.$$

Поскольку искомое напряжение пропорционально напряженности поля между пластинами конденсатора  $CD$ , то

$$U' = 2U/3. \quad (2)$$

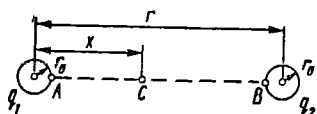


Рис 11 8

11-7. Определить разность потенциалов между двумя металлическими шарами радиуса  $r_0 = 0,50$  см каждый, находящимися на расстоянии  $r = 1,00$  м друг от друга, если заряд одного шара  $q_1 = 1,50$  нКл, а другого  $q_2 = -1,50$  нКл.

**Решение.** Как известно, заряды в проводнике распределяются так, что все его точки приобретают одинаковый потенциал. Уединенному шару, потенциал которого определяется формулой (11.10), соответствует равномерное распределение зарядов по его поверхности. В данном случае, взаимно притягиваясь, заряды шаров распределяются преимущественно на тех сторонах шаров, которыми они обращены друг к другу, вследствие чего изменится электрическое поле в пространстве вокруг шаров. Поэтому, согласно формуле (11.5), изменится также разность потенциалов между шарами и точное решение задачи оказывается связанным со значительными математическими трудностями.

Однако вытекающее из условия неравенство  $r \gg r_0$  позволяет, не делая большой ошибки, пренебречь взаимным притяжением зарядов по сравнению с силами взаимного отталкивания одноименных зарядов в пределах каждого шара, т. е. считать распределение зарядов по поверхности шаров равномерным. Тогда задача упрощается: на основании формулы (10.7а) и принципа суперпозиции полей можно вычислить напряженность поля в любой точке пространства между шарами, а значит, по формуле (11.5) найти искомую разность потенциалов.

В качестве линии интегрирования выберем прямую  $AB$  (рис. 11-8). Векторы напряженности полей обоих шаров во всех точках этой прямой направлены от  $A$  к  $B$  (от положительного заряда к отрицательному). Поэтому результирующая напряженность в некоторой точке  $C$ , отстоящей на расстоянии  $x$  от центра левого шара, согласно формуле (10.7а) равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1}{x^2} + \frac{q_2}{(r-x)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(r-x)^2} \right],$$

где  $q = |q_1| = |q_2|$  — абсолютное значение каждого заряда.

Теперь на основании (11.5), учитывая, что в данном случае  $E_t = E$ , определим искомую разность потенциалов:

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_{r_0}^{r-r_0} E dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r-r_0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(r-x)^2} \right] dx.$$

Произведя интегрирование и сделав упрощения, найдем

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q(r-2r_0)}{r_0(r-r_0)}. \quad (1)$$

Еще раз учитывая соотношение  $r \gg r_0$ , получим несколько менее точную, но более простую формулу:

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r_0}. \quad (2)$$

Вычисление по (2) дает:

$$\varphi_A - \varphi_B = 5,4 \cdot 10^3 \text{ В} \approx 5,4 \text{ кВ.}$$

**З а м е ч а н и е.** Легко видеть, что соотношение (2) можно получить сразу, вычислив потенциал каждого шара по формуле (11.10). Таким образом, эта формула дает в задаче для двух шаров приблизительно правильный результат при условии  $r \gg r_0$ . Однако он менее точен, чем формула (1). Дело тут в следующем. Применив формулу (11.10), мы не только пренебрегаем неравномерностью в распределении зарядов по поверхности шаров, но и не учитываем принципа суперпозиции полей, в силу которого потенциал *каждого* шара определяется совокупностью зарядов *обоих* шаров. Ошибки, к которым приводят обе эти неточности, имеют одинаковые знаки (ответ получается завышенным) и поэтому складываются.

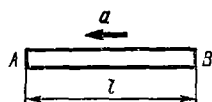


Рис 11.9

**11-8.** Объяснить, почему на концах ускоренно движущегося металлического стержня  $AB$  (рис. 11-9) появляется разность потенциалов. С каким ускорением  $a$  надо двигать проводник, чтобы разность потенциалов равнялась  $U = 1,00$  мкВ? Длина проводника  $l = 1,00$  м.

**Р е ш е н и е.** Наличие разности потенциалов свидетельствует о существовании внутри проводника электрического поля. На первый взгляд это противоречит правилу электростатики, утверждающему, что внутри проводника при установившемся распределении зарядов поле должно отсутствовать. Однако отметим, что это правило выведено для *неподвижных* проводников и является следствием того, что равнодействующая всех сил, приложенных к свободному заряду (для металла — к электрону) внутри проводника, должна быть равна нулю:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

иначе заряд не смог бы оставаться неподвижным. Для неподвижных проводников силой, действующей на свободный заряд, будет лишь сила электрического поля, равная

$$F_{эл} = eE, \quad (2)$$

где  $e$  — величина заряда.

Чтобы применить законы электростатики к проводнику, который согласно условию задачи ускоренно движется, рассмотрим явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с данным проводником. В этой системе отсчета его свободные заряды неподвижны. Следовательно, по-прежнему будет выполняться условие (1). Но в неинерциальной системе отсчета на всякое тело действует сила инерции, равная

$$F_{ин} = -ma. \quad (3)$$

Теперь условие равновесия заряда (1) запишется так:

$$F_{эл} + F_{ин} = 0. \quad (4)$$

Отсюда видим, что при ускоренном движении проводника в нем должно существовать электрическое поле даже в том случае, когда свободные заряды неподвижны относительно проводника. Это поле обусловлено соответствующим распределением зарядов (в данном случае — свободных электронов) по проводнику, отличному от их распределения в неподвижном проводнике.

Подставив в (4) вместо величин  $F_{эл}$  и  $F_{ин}$  их значения по формулам (2) и (3), получим

$$eE = ma. \quad (5)$$

При поступательном движении проводника все его точки имеют одинаковое ускорение. Поэтому вектор  $E$  в (5) также должен быть одинаковым для всех точек поля внутри проводника. Следовательно, это поле будет однородным. Тогда на основании (11.7) перепишем соотношение (5):

$$eU/l = ma,$$

откуда искомое ускорение

$$a = \frac{e}{m} \frac{U}{l}.$$

Взяв значения  $e$  и  $m$  для электрона из таблиц, выразим входящие в эту формулу величины в единицах СИ:  $U = 1,00 \cdot 10^{-6}$  В,  $l = 1,00$  м,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Выполнив вычисление, найдем

$$a = 1,8 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2.$$

11-9. Две частицы, обладающие массами  $m_1$ ,  $m_2$  и зарядами, равными  $+q_1$ ,  $+q_2$ , движутся навстречу друг другу, имея вдалеке относительную скорость  $v_{отн}$ . На какое наименьшее расстояние сблизятся частицы?

**Решение.** Приведем три способа решения задачи, различающихся выбором системы отсчета.

1. Рассмотрим движение частиц в какой-либо «лабораторной» системе отсчета, например связанной с Землей. Полагая систему двух заряженных частиц изолированной, воспользуемся законом сохранения энергии

$$W = \text{const}, \quad (1)$$

где  $W$  — полная энергия частиц. Последние обладают в каждый момент времени кинетической энергией, а также потенциальной энергией кулоновского взаимодействия.

Когда частицы находятся вдалеке друг от друга, то, как это следует из формулы (11.1), их потенциальной энергией можно пренебречь. Тогда полная энергия системы

$$W_1 = m_1 v_1^2 / 2 + m_2 v_2^2 / 2, \quad (2)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$  — скорости частиц в выбранной системе отсчета. Так как векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  направлены противоположно, то значения  $v_1$  и  $v_2$  связаны с заданной величиной  $v_{отн}$  соотношением

$$v_{отн} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_1 + v_2. \quad (3)$$

При сближении частиц потенциальная энергия их кулоновского взаимодействия (отталкивания), будучи величиной положительной, начнет увеличиваться. Следовательно, суммарная кинетическая энергия частиц станет уменьшаться. Частицы не могут как угодно близко подойти друг к другу, иначе их потенциальная энергия оказалась бы больше полной энергии  $W_1$ , что противоречит условию (1).

При наибольшем сближении частиц, когда расстояние между ними равно  $r_{мин}$ , полная энергия

$$W_{11} = T_{мин} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{мин}}. \quad (4)$$

Чтобы найти кинетическую энергию  $T_{мин}$  системы, учтем, что в момент наибольшего сближения частиц их скорости будут одинаковыми:  $\mathbf{v}_{1\ мин} = \mathbf{v}_{2\ мин} = \mathbf{v}$ . Действительно, когда скорости частиц неодинаковые, расстояние между ними растет или уменьшается и, следовательно, не является минимальным.

Применив к системе закон сохранения импульса, запишем:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad (5)$$

где  $p_1 = m_1 v_1 - m_2 v_2$  — импульс системы удаленных частиц,  $p_2 = (m_1 + m_2) v$  — импульс системы при наибольшем сближении частиц. При этом вектор  $\mathbf{v}$  предположительно выбран совпадающим по

направлению с вектором  $v_1$  (очевидно, при подсчете кинетической энергии направление скорости несущественно). Из уравнения (5) имеем

$$v = (m_1 v_1 - m_2 v_2) / (m_1 + m_2).$$

Тогда для величины  $T_{\text{мин}}$  получим

$$T_{\text{мин}} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Подставив это значение  $T_{\text{мин}}$  в формулу (4), приравняв на основе закона сохранения энергии правые части формул (2) и (4), а также учитывая соотношение (3), найдем

$$r_{\text{мин}} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}.$$

2. Выберем систему отсчета, связанную с центром инерции системы двух частиц. Пусть скорости частиц в этой системе отсчета равны  $v'_1$  и  $v'_2$ . Сначала выразим каждую из величин  $v'_1$  и  $v'_2$  через относительную скорость  $v_{\text{отн}}$ . Так как частицы движутся навстречу друг другу, то

$$v_{\text{отн}} = v'_1 + v'_2. \quad (1)$$

Поскольку в данной системе отсчета скорость центра инерции частиц равна нулю, то, согласно формуле (3.4), суммарный импульс частиц  $p = 0$ . Тогда, применив к системе частиц закон сохранения импульса и учитывая противоположные направления векторов  $v_1$  и  $v_2$ , получим

$$m_1 v'_1 - m_2 v'_2 = 0. \quad (2)$$

Решив систему (1) и (2) относительно  $v_1$  и  $v_2$ , найдем:

$$v'_1 = [m_2 / (m_1 + m_2)] v_{\text{отн}}; \quad v'_2 = [m_1 / (m_1 + m_2)] v_{\text{отн}}.$$

Полная энергия системы частиц в начальный момент равна сумме их кинетических энергий. В момент наибольшего сближения частицы имеют одинаковые по модулю и направлению скорости (см. 1-й способ). При этом каждая из скоростей равна нулю, так как в противном случае оказалось бы нарушенным условие  $p = 0$ . Следовательно, частицы будут сближаться до тех пор, пока вся их кинетическая энергия не превратится в энергию кулоновского взаимодействия. Таким образом,

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{\text{мин}}}.$$

Подставив сюда найденные значения  $v'_1$  и  $v'_2$ , получим

$$r_{\text{мин}} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}.$$

3. Выберем систему отсчета, движущуюся поступательно вместе с одной из заряженных частиц, например с первой. Эта система отсчета является неинерциальной. В ней первая частица неподвижна, а вторая движется навстречу первой с начальной скоростью  $v_{отн}$  (рис. 11-10).

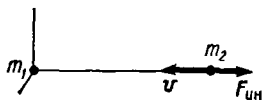


Рис 11-10

Теперь начальная энергия системы частиц равна кинетической энергии второй частицы:

$$W_1 = m_2 v_{отн}^2 / 2, \quad (1)$$

а конечная энергия (при  $r = r_{мин}$ ) равна лишь потенциальной энергии кулоновского взаимодействия, т. е.

$$W_{II} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{мин}}, \quad (2)$$

поскольку в момент наибольшего сближения вторая частица имеет нулевую скорость

В данном случае система взаимодействующих частиц является незамкнутой, так как на нее действуют силы инерции (см. § 2, п В), которые следует считать внешними по отношению к системе. Поэтому ни полный импульс, ни полная энергия системы частиц в неинерциальной системе отсчета не сохраняются.

Согласно закону сохранения энергии изменение энергии системы должно быть равно работе  $A$  силы инерции  $F_{ин}$ , действующей на частицу  $m_2$  во время ее приближения к частице  $m_1$ :

$$W_{II} - W_1 = -A, \quad (3)$$

и задача сводится к нахождению величины  $A$ .

Согласно определению силы инерции имеем

$$F_{ин} = -m_2 a_1. \quad (4)$$

Здесь  $a_1$  — ускорение частицы  $m_1$  в инерциальной системе отсчета. Его найдем с помощью второго закона Ньютона и закона Кулона:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{1}{m_1}.$$

Поскольку ускорение  $a_1$  первой частицы, обусловленное кулоновской силой отталкивания, направлено влево, то сила инерции, как это следует из (4), направлена вправо и равна

$$F_{ин} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{m_2}{m_1}. \quad (5)$$

Так как частица  $m_2$  перемещается влево, то сила инерции совершает над ней отрицательную работу, значение которой найдем, учитывая соотношение (5):

$$A = \int_{r_{\text{мин}}}^{\infty} F_{\text{ин}}(-dr) = - \frac{q_1 q_2 m_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{мин}} m_1}. \quad (6)$$

Подставив в (3) значения  $W_1$ ,  $W_{\text{п}}$ ,  $A$  из уравнений (1), (2), (6), найдем

$$r_{\text{мин}} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{отн}}^2}.$$

## § 12. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ

### Основные формулы

Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  измеряется суммарным электрическим моментом всех молекулярных диполей в единице объема диэлектрика. Для изотропного диэлектрика вектор  $\mathbf{P}$  пропорционален напряженности  $\mathbf{E}$  поля внутри него:

$$\mathbf{P} = \kappa\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (12.1)$$

где  $\kappa$  — диэлектрическая восприимчивость диэлектрика.

Поверхностная плотность  $\sigma'$  связанных зарядов равна проекции вектора  $\mathbf{P}$  на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика:

$$\sigma' = P_n. \quad (12.2)$$

Для изотропного диэлектрика векторы электрического смещения (электрической индукции)  $\mathbf{D}$  и напряженности  $\mathbf{E}$  поля связаны формулой

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad (12.3)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, равная

$$\epsilon = 1 + \kappa \quad (12.4)$$

Теорема Гаусса: поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри нее свободных зарядов, т. е.

$$\oint D_n dS = \Sigma q_{\text{внут}}. \quad (12.5)$$

Емкость (емкость) конденсатора измеряется отношением его заряда к разности потенциалов (напряжению) на пластинах:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (12.6)$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon S/l, \quad (12.7)$$

где  $S$  — площадь его пластин,  $l$  — расстояние между обкладками,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор

Емкость батареи из  $n$  конденсаторов, соединенных параллельно, равна

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (12.8)$$



Емкость батареи из  $n$  конденсаторов, соединенных последовательно, определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (12.9)$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (12.10)$$

Объемная плотность энергии электрического поля (энергия отнесенная к единице объема) равна

$$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (12.11)$$

## А. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### Методические указания

1. Для расчетов электрических полей при наличии диэлектриков вводят вспомогательную величину — вектор электрического смещения (электрической индукции)  $\mathbf{D}$  — как линейную комбинацию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$ :  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . Непосредственно из теоремы Гаусса (12.5) следует, что поток вектора  $\mathbf{D}$  через замкнутую поверхность не зависит от свойств среды.

В задачах курса общей физики, связанных с электростатическими явлениями, обычно рассматриваются лишь диэлектрики, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) они однородны и изотропны; 2) имеют форму, при которой ограничивающие их поверхности совпадают с эквипотенциальными поверхностями внешнего поля (т. е. перпендикулярны силовым линиям поля). Сюда относятся диэлектрики в плоских, цилиндрических и сферических конденсаторах (как однослойных, так и многослойных). Если *такой* диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  внести в электрическое поле постоянного заряда, то, как это следует из теоремы Гаусса (12.5) и соотношения (12.3), будут выполняться следующие правила:

1) вектор электрического смещения  $\mathbf{D}$  останется без изменения во всех точках поля как внутри, так и вне диэлектрика;

2) вектор напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля уменьшится в  $\epsilon$  раз в пространстве, занятом диэлектриком, и останется без изменения вне диэлектрика.

Любое из этих правил позволяет рассчитывать электрические поля при наличии диэлектриков, удовлетворяющих сформулированным выше двум условиям.

2. Заряженную проводящую сферу, погруженную в однородный безграничный диэлектрик, можно рассматривать как частный случай сферического конденсатора, радиус наружной сферы которого беско-

нечно велик. Отсюда, учитывая изложенное в п. 1 и формулу (10.7а), приходим к выводу, что напряженность поля такой сферы равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2}. \quad (12.12)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что формулы § 10 и 11, выражающие напряженность и потенциал поля соответственно точечного заряда, диполя, сферы, цилиндра и плоскости в вакууме, остаются верными для заряженных тел, погруженных в однородный безграничный диэлектрик, только в знаменатели этих формул добавляется множитель  $\epsilon$ .

### Решение задач

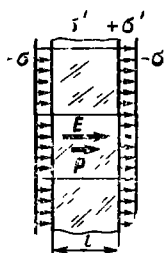


Рис. 12-1

12-1. Плоский конденсатор, между обкладками которого помещена стеклянная пластинка ( $\epsilon = 6$ ) толщиной  $l = 2,00$  мм, заряжен до напряжения  $U = 200$  В (рис. 12-1). Пренебрегая величиной зазора между пластинкой и обкладками, найти поверхностную плотность  $\sigma$  свободных зарядов на обкладках конденсатора, а также поверхностную плотность  $\sigma'$  связанных зарядов (зарядов поляризации) на стекле.

**Решение.** Величину  $\sigma$  выразим через напряженность поля  $E$  внутри конденсатора. Поскольку введение диэлектрика между его обкладками уменьшает эту напряженность поля в  $\epsilon$  раз, величины  $\sigma$  и  $E$  можно связать формулой (10.12а), добавив в ее знаменатель множитель  $\epsilon$ :

$$E = \sigma / \epsilon_0 \epsilon.$$

Отсюда, учитывая соотношение (11.7), справедливое для однородного поля конденсатора, найдем

$$\sigma = \epsilon_0 \epsilon U / l. \quad (1)$$

Чтобы определить величину  $\sigma'$ , воспользуемся формулой (12.2). Так как вектор  $P$  параллелен вектору напряженности  $E$  поля в диэлектрике, направленному по нормали к поверхностям стеклянной пластинки, то  $P_n = P$ . Поэтому, учитывая соотношения (12.1) и (12.4), получим

$$\sigma' = P = \chi \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) U / l. \quad (2)$$

Выразим входящие в формулы (1) и (2) величины в единицах СИ:  $U = 200$  в,  $l = 2,00 \cdot 10^{-3}$  м,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Подставив эти значения и выполнив вычисление, найдем:

$$\sigma = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2; \quad \sigma' = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

З а м е ч а н и е. Сравнив формулы (1) и (2), видим, что

$$\sigma'/\sigma = (\epsilon - 1)/\epsilon.$$

Этот результат можно сразу получить из рис. 12.-1, на котором изображены силовые линии электрического поля в стекле и воздушном зазоре между стеклом и обкладками. При этом надо помнить, что плотность силовых линий пропорциональна напряженности поля, а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  среды показывает, во сколько раз поле внутри диэлектрика слабее поля внутри зазора. Следовательно, из каждой  $\epsilon$  силовых линий, выходящих из свободных зарядов положительной обкладки конденсатора, лишь одна линия проходит сквозь диэлектрик, а остальные  $\epsilon - 1$  линий заканчиваются на связанных зарядах стеклянной пластинки.

**12-2.** Пространство внутри плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков, расположенными параллельно его обкладкам. Толщина слоев и диэлектрическая проницаемость материалов, из которых сделаны слои, соответственно равны  $l_1, l_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ . Конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U$ . Определить напряженности  $E_1, E_2$  электрического поля в каждом из диэлектриков, а также напряженность  $E_0$  поля в зазоре между обкладками и диэлектриками.

**Р е ш е н и е.** Чтобы найти величины  $E_1, E_2$  и  $E_0$ , выясним связь, существующую между ними и разностью потенциалов  $U$ . Воспользуемся формулой (11.5). Разбив весь путь интегрирования на две части, соответствующие толщинам двух слоев диэлектриков (толщиной зазора пренебрегаем), и учитывая, что в пределах каждого слоя поле однородно, получим

$$U = E_1 l_1 + E_2 l_2. \quad (1)$$

Так как электрическое смещение  $D$  и в зазоре ( $\epsilon = 1$ ), и в обоих слоях диэлектриков имеет одно и то же значение, то на основании формулы (12.3) запишем (сокращая  $\epsilon_0$ ):

$$E_0 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим:

$$E_1 = \frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_2 l_1 + \epsilon_1 l_2}; \quad E_2 = \frac{\epsilon_1 U}{\epsilon_2 l_1 + \epsilon_1 l_2}; \quad E_0 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 U}{\epsilon_2 l_1 + \epsilon_1 l_2}.$$

**Б. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ.  
ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ**

### **Методические указания**

1. Понятие электроемкости конденсатора основана на существовании пропорциональной зависимости между разностью потенциалов (напряжением) на обкладках конденсатора и его зарядом:

$$U = (1/C) q, \quad (1)$$

где  $C$  — емкость. Поэтому задача определения емкости конденсатора сводится к установлению формулы, дающей в каждом конкретном случае эту зависимость. В общем случае эта задача распадается на следующие этапы: 1) найти напряженность поля в какой-либо точке пространства между обкладками конденсатора как функцию заряда и координат точки, 2) пользуясь соотношением (11.5), найти разность потенциалов на обкладках как функцию заряда, т. е. получить соотношение типа (1), 3) взять величину, обратную коэффициенту пропорциональности в полученном выражении, это и будет емкость конденсатора.

2. Для расчета сил, действующих на заряженные тела в электрическом поле (*пандеромоторных сил*) при наличии диэлектриков, формула (10.2) оказывается, вообще говоря, неприменимой. Если заряженное тело погружено в диэлектрик, то формулой (10.2) можно пользоваться только в тех случаях, когда диэлектрик заполняет *все* пространство, где электрическое поле отлично от нуля. При этом под величиной  $E$ , входящей в (10.2), понимают напряженность поля в диэлектрике. Так как для точечного заряда, погруженного в безграничный диэлектрик, величина  $E$  дается соотношением (12.12), то с учетом (10.2) получаем формулу, выражающую закон Кулона для взаимодействия точечных зарядов, погруженных в *безграничный* диэлектрик:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Эта формула имеет смысл только для жидкого или газообразного диэлектрика.

Общий метод определения сил, действующих в электрическом поле на заряженные тела, находящиеся как в вакууме, так и в диэлектриках, основан на законе сохранения энергии. При этом сила, с которой некоторая система действует на помещенное в нее заряженное тело, равна взятой с обратным знаком производной от энергии системы по перемещению тела в направлении действия силы. Закон сохранения энергии применен для расчета сил, а также моментов сил, действующих на заряженные тела, при решении задач № 12-5—12-7.

### Решение задач

12-3. Между обкладками плоского конденсатора параллельно им введена металлическая пластинка толщиной  $a = 8,0$  мм. Определить емкость конденсатора, если площадь каждой из обкладок  $S = 100$  см<sup>2</sup>, а расстояние между ними  $l = 10,0$  мм.

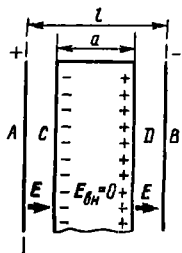


Рис 12.2

**Решение.** Емкость конденсатора найдем из определяющей формулы (12.6), если предварительно выразим напряжение на обкладках конденсатора как функцию заряда его обкладок.

В результате явления электростатической индукции свободные заряды в металлической пластинке, введенной в конденсатор, перераспределятся так, что напряженность электрического поля внутри пластинки станет равной нулю:

$$E_{\text{вн}} = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, индуцированные заряды распределятся по поверхностям пластинки так, что она станет подобной плоскому конденсатору  $CD$  (рис. 12-2), вставленному в данный конденсатор  $AB$ . Известно, что напряженность поля в пространстве вне плоского конденсатора равна нулю. Поэтому введение пластинки в конденсатор  $AB$  не изменит напряженности однородного поля в пространстве вне пластинки. Пусть эта напряженность равна  $E$ . Выразим ее через заряд конденсатора на основании формул (10.12а) и (10.11):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}. \quad (2)$$

Из соотношения (11.5) с учетом формул (1) и (2) находим напряжение на обкладках конденсатора:

$$\varphi_A - \varphi_B = E(l - a) = q(l - a)/\epsilon_0 S. \quad (3)$$

Подставив в формулу (12.6) вместо напряжения его значение по (3), получим

$$C = \epsilon_0 S / (l - a). \quad (4)$$

Выразим входящие в (4) величины в единицах СИ:  $S = 1,00 \times 10^{-2} \text{ м}^2$ ,  $l = 10,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $a = 0,80 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ . Выполнив вычисление, найдем

$$C = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} = 44 \text{ пФ}.$$

**12-4.** Как изменяется энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ( $\epsilon = 1$ ) при уменьшении расстояния между его пластинами? Рассмотреть два случая: 1) конденсатор отключен от источника напряжения, 2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

**Решение.** 1. Если конденсатор отключен от источника напряжения, то заряд на его обкладках не будет изменяться при сближении пластин, т. е.

$$q = \text{const}.$$

В то же время емкость конденсатора, как это следует из формулы (12.7), будет увеличиваться. Поэтому воспользуемся той из трех формул (12.10), в которой энергия конденсатора выражается через его заряд и емкость:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} l.$$

Видим, что при сближении пластин конденсатора его энергия, будучи пропорциональной величине  $l$ , *уменьшается*. Заметим, что за счет убыли энергии конденсатора совершается работа сил притяжения обкладок при их сближении:

$$A = - \Delta W. \quad (1)$$

2. На обкладках конденсатора поддерживается постоянное напряжение:

$$U = \text{const.}$$

Поэтому воспользуемся той из формул (12.10), в которой энергия конденсатора выражается через напряжение и емкость. Тогда, учитывая соотношение (12.7), получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2} \frac{1}{l}.$$

Следовательно, при сближении пластин энергия конденсатора, будучи обратно пропорциональной величине  $l$ , *увеличивается*.

**З а м е ч а н и е.** Выясним, за счет чего во втором случае увеличилась энергия конденсатора и совершалась работа сил притяжения обкладок. Возрастание емкости конденсатора при постоянном напряжении означает, согласно формуле (12.6), увеличение заряда на его пластинах. Значит, при сближении пластин на них дополнительно перейдут от источника напряжения заряды  $\Delta q$ . Сообщение одной пластине положительного заряда  $\Delta q$ , а другой отрицательного заряда  $-\Delta q$  эквивалентно перемещению заряда  $\Delta q$  с одной обкладки на другую. Так как этот переход происходит при постоянном напряжении  $U$ , то источник напряжения совершит работу

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = \Delta (CU) U = \Delta C \cdot U^2. \quad (2)$$

С другой стороны, энергия конденсатора увеличится на

$$\Delta W = \Delta (CU^2/2) = \Delta C \cdot U^2/2. \quad (3)$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (3), видим, что работа, совершаемая при сближении пластин источником напряжения, в два раза больше прироста энергии конденсатора. Таким образом, теперь за счет энергии источника напряжения увеличивается энергия конденсатора  $\Delta W$ , а также совершается работа  $A$  сил притяжения пластин. По закону сохранения энергии,

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + A.$$

Отсюда

$$A = A_{\text{ист}} - \Delta W = 2 \Delta W - \Delta W = \Delta W. \quad (4)$$

Сопоставляя формулы (1) и (4), приходим к выводу: при изменении емкости заряженного конденсатора электрические силы совершают работу, равную *убыли* энергии конденсатора в случае постоянства заряда на его пластинах и равную *приращению* энергии конденсатора в случае постоянства напряжения на пластинах.

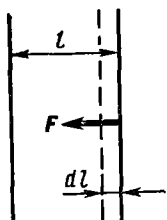


Рис. 12-3

12-5. Найти силу притяжения  $F$  между пластинами плоского конденсатора, если площадь каждой пластины  $S$ , расстояние между ними  $l$ , диэлектрическая проницаемость среды между пластинами  $\epsilon$ . Рассмотреть два случая: 1) конденсатору сообщен заряд  $q$ , после чего он отключен от источника напряжения; 2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения  $U$ . Как зависит сила притяжения от расстояния между пластинами и диэлектрической проницаемости среды?

**Решение.** Для определения сил, действующих на заряженные тела, при наличии диэлектриков формула  $F = qE$ , вообще говоря, неприменима. Поэтому воспользуемся законом сохранения энергии.

1. В этом случае  $q = \text{const}$ . Пусть (представим мысленно) одна пластина конденсатора под действием силы притяжения  $F$  совершит элементарное перемещение  $dl$  (рис. 12-3). При этом сила  $F$  произведет работу, равную

$$\delta A = F dl. \quad (1)$$

По закону сохранения энергии эта работа равна убыли энергии конденсатора:

$$\delta A = -dW. \quad (2)$$

Приравнивая правые части формул (1) и (2), получим искомую силу:

$$F = -\frac{dW}{dl} \quad (3)$$

Энергию конденсатора выразим через заданные величины по формулам (12.10) и (12.7):

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (4)$$

Подставив в формулу (3) значение энергии  $W$  по (4) и выполнив дифференцирование, найдем

$$F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \epsilon S}. \quad (5)$$

Отрицательный знак силы показывает, что она направлена в сторону уменьшения  $l$ , т. е. является силой притяжения.

Из формулы (5) видно, что сила притяжения пластин обратно пропорциональна величине  $\epsilon$  и не зависит от расстояния между пластинами.

2. Согласно условию,  $U = \text{const}$ . Учитывая результат, сформулированный в замечании к задаче № 12-4, теперь вместо формул (2) и (3) для  $\delta A$  и  $F$  надо записать соответственно:

$$\delta A = dW; \quad (6)$$

$$F = \frac{dW}{dl}. \quad (7)$$

Энергию конденсатора также выразим по формулам (12.10) и (12.7):

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon SU^2}{2} \frac{1}{l}.$$

Подставив это значение  $W$  формулу (7), получим

$$F = - \frac{\epsilon_0 \epsilon SU^2}{2l^2}. \quad (8)$$

Видим, что сила притяжения пластин пропорциональна величине  $\epsilon$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

**З а м е ч а н и е.** Попытаемся объяснить зависимость между величинами  $F$  и  $\epsilon$ , выражаемую формулой (5), предполагая, что одна из пластин конденсатора находится в электрическом поле другой пластины (как было сделано в задаче №10-7).

Известно, что связанные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика в плоском конденсаторе, ослабляют поле (в  $\epsilon$  раз) лишь *внутри* диэлектрика. Однако каждая из пластин конденсатора расположена вне диэлектрика. Поэтому появление диэлектрика между пластинами никак не должно сказаться на электрическом поле, в котором находится каждая пластина (при условии  $q = \text{const}$ ). Следовательно, и сила, действующая на каждую пластину, не зависит от наличия диэлектрика; согласно формуле (10.2),

$$F = qE, \quad (9)$$

где  $q$  — заряд одной пластины,  $E$  — напряженность поля другой пластины *в вакууме*.

Таким образом, получен результат, противоречащий выражению (5), в котором  $F$  зависит от  $\epsilon$ . Это противоречие объясняется тем, что в формулах (5) и (9) речь идет о разных силах. В формуле (9)  $F$  — *электрическая* сила, действующая на каждую пластину конденсатора и в самом деле не зависящая от диэлектрика, помещенного между ними. Однако на каждую пластину конденсатора при наличии жидкого или твердого диэлектрика кроме электрической силы притяжения действуют еще *механические* силы давления  $F_d$  со стороны диэлектрика, соприкасающегося с пластиной. Эти силы уменьшают силу притяжения пластин конденсатора. Равнодействующая всех сил, приложенных к пластине, — электрических и механических — и является той силой, которая определяется формулой (5), выведенной с помощью закона сохранения энергии.

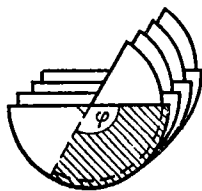


Рис. 12-4

12-6. Пластины конденсатора переменной емкости (рис. 12-4) имеют форму полукруга радиуса  $r$ , расстояние между соседними подвижной и неподвижной пластинами равно  $l$ . Всего имеется  $n$  промежутков между пластинами. Определить вращающий момент, действующий на пластины. Рассмотреть два случая: 1) конденсатору сообщен заряд  $q$ , после чего он отключен от источника напряжения; 2) на конденсаторе поддерживают постоянное напряжение  $U$ .



**Решение.** Вращающий момент, втягивающий подвижные пластины конденсатора в промежутки между неподвижными, обусловлен неоднородностями электрического поля пластин вблизи их краев. Поэтому решить задачу, рассматривая каждую пластину находящейся в электрическом поле соседних пластин, трудно. Вращающий момент можно найти с помощью закона сохранения энергии. При этом отпадает необходимость учитывать изменение электрического поля около краев пластин.

1. В этом случае  $q = \text{const}$ . Пусть (представим мысленно) подвижные пластины повернутся под действием вращающего момента  $M$  на малый угол  $d\varphi$ . Тогда силы притяжения совершат работу

$$\delta A = M d\varphi, \quad (1)$$

которая по закону сохранения энергии равна убыли энергии конденсатора:

$$\delta A = -dW. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим искомый момент:

$$M = -\frac{dW}{d\varphi}. \quad (3)$$

Энергию конденсатора выразим по формулам (12.10) и (12.7), учитывая, что каждому из  $n$  промежутков между пластинами соответствует один плоский конденсатор с площадью пластин, равной  $\varphi r^2/2$  (заштрихованный участок на рис. 12-4):

$$W = n \frac{q^2}{2C} = n \frac{q^2 l}{2\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon \varphi^2}.$$

Подставив в (3) это значение  $W$ , найдем

$$M = -\frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2} \frac{d(1/\varphi)}{d\varphi} = \frac{nq^2 l}{\epsilon_0 \epsilon r^2 \varphi^2}. \quad (4)$$

Видим, что в данном случае вращающий момент зависит от угла поворота пластин  $\varphi$ : с увеличением угла (при вдвижении пластин) вращающий момент убывает\*.

2. По условию,  $U = \text{const}$ . Снова применим закон сохранения энергии. Поскольку теперь конденсатор соединен с источником постоянного напряжения, вместо формул (2) и (3) получим (см. задачу № 12-4, 2-й случай):

$$\delta A = dW, \quad M = \frac{dW}{d\varphi}, \quad (5)$$

где энергия конденсатора

$$W = n \frac{CU^2}{2} = n \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2l} = \frac{n\epsilon_0 \epsilon \varphi r^2 U^2}{4l}.$$

\* Соотношение (4) справедливо лишь для значений  $\varphi$ , достаточно больших для того, чтобы каждый из  $n$  конденсаторов можно было считать плоским конденсатором, емкость которого определяется формулой (12.7) В противном случае выражение (4) приводит к абсурду: при  $\varphi \rightarrow 0$   $M \rightarrow \infty$  (1).

Подставив во вторую формулу (5) это значение  $W$ , найдем

$$M = \frac{n\epsilon_0 e r^2 U^2}{4l}.$$

Видим, что вращающий момент не зависит от угла  $\varphi$  (см., однако, примечание к формуле (4)) и целиком определяется заданными в условии величинами.

12-7. Объемная плотность энергии электрического поля внутри заряженного плоского конденсатора с твердым диэлектриком ( $\epsilon = 6,0$ ) равна  $2,5$  Дж/м<sup>3</sup>. Найти давление, производимое пластинами площадью  $S = 20$  см<sup>2</sup> на диэлектрик, а также силу  $F'$ , которую необходимо приложить к пластинам для их отрыва от диэлектрика.

**Решение.** Притягиваясь друг к другу с силой  $F$ , пластины конденсатора сжимают диэлектрик, заключенный между ними.

Учитывая, что сила давления  $F_d$  равномерно распределена по поверхности диэлектрика, найдем искомое давление

$$p = \frac{F_d}{S} = \frac{F}{S}. \quad (1)$$

Как известно (см. задачу № 12-5), сила притяжения пластин конденсатора (при  $q = \text{const}$ ) равна взятой с обратным знаком производной от его энергии по расстоянию между пластинами:

$$F = - \frac{dW}{dl}.$$

Поскольку в единице объема конденсатора заключена энергия  $w$ , равная ее объемной плотности, то полное изменение энергии  $dW$  при перемещении пластины конденсатора на расстояние  $dl$  равно

$$dW = w dV = w S dl.$$

Из двух последних равенств получаем силу притяжения пластин:

$$F = - w S, \quad (2)$$

откуда на основании формулы (1) находим

$$p = - w = - 2,5 \text{ Па}. \quad (3)$$

Отрицательный знак в формулах (2) и (3) означает, что величины  $F$  и  $p$  направлены в сторону уменьшения расстояния  $l$ .

Чтобы найти силу  $F'$ , необходимую для отрыва пластин от диэлектрика, снова применим энергетический метод. Рассмотрим конденсатор в тот момент, когда под действием силы  $F'$ , направленной наружу, пластина, отрываясь от диэлектрика, переместится на расстояние  $dl$ . Работа силы  $F'$  равна

$$\delta A = F' dl. \quad (4)$$

За счет работы этой внешней силы энергия конденсатора возрастет на величину  $dW$ . По закону сохранения энергии,

$$dW = \delta A. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) имеем

$$F' = \frac{dW}{dl}.$$

Теперь прирост энергии конденсатора, связанный с увеличением его объема, равен

$$dW = \omega_0 S dl,$$

где  $\omega_0$  — объемная плотность энергии поля в зазоре, появившемся при смещении пластины. Из двух последних равенств найдем

$$F' = \omega_0 S. \quad (6)$$

Чтобы найти величину  $\omega_0$ , воспользуемся формулой (12.11). Так как индукция  $D$  и в зазоре ( $\varepsilon = 1$ ), и в диэлектрике имеет одно и то же значение, то  $\omega_0 = \varepsilon \omega$  и согласно формуле (6) получим

$$F' = \varepsilon \omega S = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Н.}$$

## В. СОЕДИНЕНИЯ КОНДЕНСАТОРОВ

### Методические указания

1. Формулы (12.8) и (12.9) применяют не только для расчета емкости батарей конденсаторов при параллельном или последовательном соединении, но и для определения емкости многослойных конденсаторов. Расположение слоев параллельно пластинам (рис. 12-5) при этом соответствует последовательному соединению однослойных конденсаторов; если же границы слоев перпендикулярны пластинам, то считают, что имеется параллельное соединение однослойных конденсаторов.

2. Соединение конденсаторов часто бывает смешанным, например соединение, изображенное на рис. 12-9 и представляющее собой параллельное соединение двух групп (ветвей), каждая из которых является последовательным соединением двух конденсаторов ( $C_1, C_2$  — одна группа;  $C_3, C_4$  — другая). Возможны более сложные варианты. Например, изображенное на рис. 12-9 соединение конденсаторов само может быть одним из нескольких элементов конденсаторной цепи, последовательно соединенных друг с другом. Во всех таких случаях, поочередно применяя формулы (12.8), (12.9) для соответствующих соединений и переходя от известного к неизвестному, можно найти емкость всего соединения.

3. В некоторых случаях сложное соединение конденсаторов нельзя отнести ни к типу параллельного, ни к типу последовательного. При этом иногда оказывается возможным заменить имеющуюся схему другой, эквивалентной данной в отношении емкости, причем ее уже можно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Такие эквивалентные замены основаны на возможности

соединять и разъединять точки цепи, имеющие одинаковые потенциалы, что обычно встречается в схемах, обладающих симметрией (см. задачу № 12-10).

4. При расчете электрической цепи, состоящей из конденсаторов и источников постоянного напряжения, которую невозможно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений, следует руководствоваться следующими двумя правилами.

**П р а в и л о у з л о в**, являющееся следствием закона сохранения электрического заряда: если пластины нескольких конденсаторов соединены в один узел, не связанный непосредственно с источником напряжения, то алгебраическая сумма зарядов на этих пластинах равна нулю, т. е.

$$\Sigma q = 0. \quad (12.13)$$

**П р а в и л о к о н т у р о в**, вытекающее из закона сохранения энергии: алгебраическая сумма разностей потенциалов на всех конденсаторах и источниках напряжения, встречающихся при обходе любого замкнутого контура, равна нулю, т. е.

$$\Sigma U = 0. \quad (12.14)$$

Эти правила использованы при решении задачи № 12-11.

### Решение задач



Рис. 12-5

12-8. Как изменится емкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить стеклянную пластину ( $\epsilon = 6,0$ ), толщина которой равна половине расстояния между обкладками (рис. 12-5)?

**Решение.** Если между стеклом и воздухом посередине конденсатора поместить весьма тонкий слой проводника, это не изменит напряженности поля ни в стекле, ни в воздухе (см задачу № 12-3). Из формулы (11.5) следует, что при этом не изменится и разность потенциалов между обкладками конденсатора, а значит, и его емкость. Но теперь данный конденсатор  $AB$  можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора:  $AD$  и  $DB$ .

Пусть емкость конденсатора  $AB$  до введения стеклянной пластины была равна  $C_0$ . Тогда согласно формуле (12.7) емкости конденсаторов  $AD$  и  $DB$  равны  $2C_0$  и  $2\epsilon C_0$  соответственно. Емкость конденсатора  $AB$  после введения стеклянной пластины найдем по формуле (12.9) для последовательного соединения конденсаторов:

$$C' = \frac{C_{AD} C_{DB}}{C_{AD} + C_{DB}} = \frac{2C_0 \cdot 2\epsilon C_0}{2C_0 + 2\epsilon C_0} = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} C_0.$$

Произведя вычисление, получим

$$C' = 1,7 C_0.$$

Следовательно, емкость конденсатора  $AB$  увеличилась в 1,7 раза.



Рис. 12 6

12-9. Как изменится емкость плоского конденсатора, если его поместить в металлическую коробку, стенки которой удалены от пластин на расстояние, равное расстоянию между ними (рис. 12-6)? Влиянием краев пренебречь.

**Решение.** Приведем два метода решения задачи.

1. Этот метод основан на связи данной задачи с задачей № 11-6 и использует полученный в ней результат. Сравнивая рис. 11-7 и 12-6, легко заметить, что на них изображены эквивалентные схемы. Это значит, что, заключив конденсатор в металлическую коробку, мы получим такое же изменение разности потенциалов на его обкладках, как и на конденсаторе  $CD$  в задаче № 11-6 после соединения проводником пластин  $A$  и  $B$ . Поэтому соотношение (2) из задачи № 11-6 справедливо и здесь, если под  $U$  и  $U'$  понимать напряжения на конденсаторе соответственно до и после того, как его поместили в металлическую коробку. Так как при этом заряд конденсатора остается постоянным, то согласно формуле (12.6) его емкость изменится так, что

$$\frac{C'}{C} = \frac{U}{U'} = \frac{3}{2},$$

где  $C$  и  $C'$  — емкости конденсатора соответственно до и после его заключения в коробку.

Таким образом, емкость конденсатора увеличилась в 1,5 раза.

2. До сих пор мы рассматривали систему четырех пластин (см. рис. 11-7, 12-6) как два конденсатора ( $AB$  и  $CD$ ), непосредственно не соединенных друг с другом. Теперь эту же систему пластин представим как три конденсатора:  $AC$ ,  $CD$  и  $DB$ , обладающих одинаковой емкостью и определенным образом соединенных между собой. Чтобы выяснить тип соединения конденсаторов, учтем, что по условию можно пренебречь влиянием краев, и заменим схему на рис. 12-6 эквивалентной схемой, изображенной на рис. 12-7. Затем заменим каждую из пластин  $C$  и  $D$  двумя пластинами, соединенными между собой (рис. 12-8). Такая замена является эквивалентной, поскольку в конденсаторе заряды распределяются всегда лишь на внутренней поверхности каждой пластины, т. е. на той ее поверхности, которая обращена ко второй пластине данного конденсатора. Так, например, в системе пластин  $D_1$  и  $D_2$ , которой мы заменили пластину  $D$ , заряды распреде-

ляются только на левой поверхности пластины  $D_1$  и правой поверхности пластины  $D_2$ . Поэтому появление дополнительных проводников и поверхностей в результате раздвоения пластин  $C$  и  $D$  не изменит распределения зарядов на трех конденсаторах.

Заметим, что каждая из показанных на рис. 12-6, 12-7 пластина  $C$  и  $D$  является одновременно обкладкой двух конденсаторов (например, пластина  $D$  принадлежит конденсаторам  $CD$  и  $DB$ ). Поэтому обе поверхности каждой из пластин  $C$  и  $D$  «внутренние» и по ним распределяются заряды.



Рис 12 7

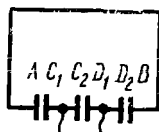


Рис. 12-8

Теперь найдем емкость батареи. Из рис. 12-8 видно, что конденсаторы  $AC_1$  и  $D_2B$  соединены между собой последовательно. Поэтому их общая емкость

$$C_{\text{пс}} = C/2,$$

где  $C$  — емкость каждого из трех конденсаторов. Конденсатор  $C_1D_1$  подключен параллельно к группе двух остальных конденсаторов. Поэтому емкость всей батареи

$$C_6 = C + C_{\text{пс}} = 3C/2.$$

Таким образом, рассматривая в данном методе конденсатор, помещенный в металлическую коробку, как батарею, мы получили результат, совпадающий с найденным ранее: емкость возрастает в 1,5 раза.

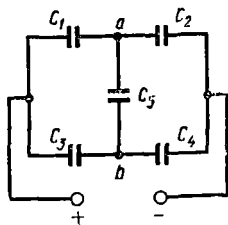


Рис. 12 9

12-10. На рис. 12-9 изображена батарея конденсаторов. Определить ее емкость, если  $C_1 = C_3 = C$ ;  $C_2 = C_4 = C_5 = 2C$ .

**Решение.** Данное соединение из пяти конденсаторов нельзя разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. К такому выводу можно прийти, если вспомнить, что для последовательного соединения двух конденсаторов характерно отсутствие узлов на проводнике, соединяющем конденсаторы. С другой стороны, при параллельном соединении оба конденсатора непосредственно подклю-

чены к одним и тем же двум точкам цепи, поэтому на обоих проводниках, соединяющих два конденсатора, должно быть по одному узлу. Из рис. 12-9 видно, что ни одно из этих двух условий не выполняется ни для одной пары конденсаторов.

Заметим, что, отключив от цепи конденсатор  $C_5$ , получим соединение, емкость которого легко рассчитать, поскольку это будет параллельное соединение двух ветвей:  $C_1, C_2$  и  $C_3, C_4$ , каждая из которых есть последовательное соединение двух конденсаторов.

Чтобы выяснить роль конденсатора  $C_5$ , найдем разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$  (рис. 12-9) после его отключения. Поскольку  $C_1 = C_3$  и  $C_2 = C_4$ , обе параллельные ветви симметричны, поэтому потенциалы точек  $a$  и  $b$ , одинаково расположенных на ветвях, должны быть равны\*. Таким образом, конденсатор  $C_5$  на рис. 12-9 оказался подключенным к точкам с нулевой разностью потенциалов и, следовательно, незаряженным. Поэтому, отключив его, получим новую схему, эквивалентную старой в отношении емкости. Применяя для новой схемы формулы (12.8) и (12.9), найдем емкость батареи  $C_6$ .

Емкость каждой из двух параллельных ветвей равна

$$C_{1,2} = C_{3,4} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = 2C/3,$$

а емкость всей батареи

$$C_6 = C_{1,2} + C_{3,4} = 4C/3.$$

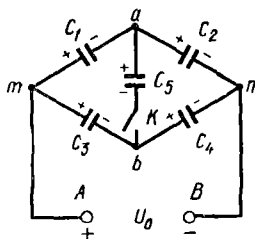


Рис. 12-10

12-11. Батарея конденсаторов (рис. 12-10) заряжена до разности потенциалов  $U_0 = 200$  В, после чего отключена от источника напряжения. Как изменится энергия батареи при замыкании ключа  $K$ , если  $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = 1,000$  мкФ,  $C_4 = 0,500$  мкФ?

**Решение.** После отключения батареи от источника ее заряд, равный сумме зарядов всех обкладок, соединенных с одним из зажимов батареи, остается постоянным независимо от положения ключа  $K$ . Однако при замыкании ключа изменится схема соединения конденсаторов, что вызовет изменение емкости батареи. Емкость и энергию батареи до и после замыкания ключа обозначим соответственно  $C_0, W_0$  и  $C, W$ . Тогда на основании формулы (12.10) получим изменение энергии батареи:

$$\Delta W = W - W_0 = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2} \frac{C_0 - C}{C_0 C}.$$

\* Учитывая обратно пропорциональную зависимость между емкостями двух последовательно соединенных конденсаторов и напряжениями на них, легко показать, что для равенства потенциалов в точках  $a$  и  $b$  достаточно существования пропорции  $C_1 : C_2 = C_3 : C_4$ .

Поскольку заряд батареи  $q = C_0 U_0$ , то

$$\Delta W = \frac{C_0 U_0^2}{2} - \frac{C_0 - C}{C} \quad (1)$$

и задача сводится к определению величин  $C_0$ ,  $C$ .

Чтобы найти емкость  $C_0$ , учтем, что батарея, изображенная на рис. 12-10, представляет собой параллельное соединение двух ветвей, каждая из которых есть последовательное соединение двух конденсаторов. Используя формулы (12.8), (12.9), получим

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 0,83 \text{ мкФ.}$$

Для нахождения величины  $C$  применим общий метод расчета емкости батареи. Пусть  $U$  — напряжение на зажимах батареи при замкнутом ключе. Выразим заряд  $q$  батареи через величины  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, U$ . Учитывая, что заряд  $q$  пропорционален напряжению  $U$ , запишем

$$q = f(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) \cdot U. \quad (2)$$

По формуле (12.6) для батареи конденсаторов имеем

$$q = CU. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем

$$C = f(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5). \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению заряда батареи по формуле (2) как функции заданных величин  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  и величины  $U$ . А это можно сделать с помощью правил (12.13), (12.14) для конденсаторных цепей.

Выразим заряд батареи через заряды конденсаторов:

$$q = q_1 + q_3. \quad (5)$$

Прежде чем составлять уравнения, необходимые для определения величин  $q_1$  и  $q_3$ , поставим знаки зарядов на обкладках всех конденсаторов в соответствии с выбранными знаками полюсов батареи (для конденсатора  $C_5$  это можно сделать лишь предположительно). Применяя для узлов  $a$  и  $b$  правило (12.13), запишем:

$$-q_1 + q_2 + q_5 = 0, \quad (6)$$

$$-q_3 + q_4 - q_5 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (5) — (7) содержат шесть неизвестных величин. Недостающие уравнения составим, используя правило контуров (12.14). Выберем направление обхода контуров, например по часовой стрелке. Чтобы избежать ошибки в знаках, надо помнить следующее: если в направлении обхода контура потенциал на данном участке (1-2) контура понижается, то разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  будет положительной,



в противном случае — отрицательной. Тогда, учитывая соотношение (12.6), получим соответственно для контуров  $tabm$ ,  $anba$  и  $AmanBA$ :

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} = 0; \quad (8)$$

$$\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} - U = 0. \quad (10)$$

Решив совместно уравнения (5) — (10), содержащие шесть неизвестных  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$ , относительно  $q$  (предварительно подставив числовые значения всех емкостей в микрофарадах), найдем

$$q = (11/13) U = 0,85 U. \quad (11)$$

Сравнив формулы (11) и (3), определим емкость батареи при замкнутом ключе:  $C = 0,85$  мкФ. Теперь все величины в правой части формулы (1) известны. Выполнив вычисление, получим

$$\Delta W = -3,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} = -0,39 \text{ мДж.}$$

**З а м е ч а н и е.** Знак минус в ответе показывает, что при замыкании ключа энергия батареи уменьшилась, хотя ее заряд не изменился. Это объясняется следующим. Перераспределение зарядов между конденсаторами сопровождалось электрическим током в соединительных проводах, что привело к нагреванию последних. Кроме того, изменение во времени силы этого тока обусловило излучение батареей электромагнитных волн. Следовательно, электростатическая энергия заряженной батареи частично превратилась в другие формы энергии.

Как следует из соотношения  $W = q^2/2C$ , при уменьшении энергии в случае постоянства заряда увеличивается емкость батареи. Полученный результат имеет общий характер: если в любой батарее конденсаторов, отключенной от источника напряжения, соединить проводником точки, не связанные непосредственно с зажимами батареи, то это вызовет уменьшение энергии и увеличение емкости батареи.

## Глава 4

# ПОСТОЯННЫЙ ТОК

### § 13. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### Основные формулы

Сила тока измеряется количеством электричества, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (13.1)$$

Плотность тока измеряется силой тока, отнесенной к единице площади поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{dI}{dS} \quad (13.2)$$

Закон Ома для участка однородной (т. е. не содержащей электродвижущих сил) цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) / R, \quad (13.3)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов на концах участка,  $R$  — его сопротивление. Сопротивление проводника длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$  равно

$$R = \rho l / S, \quad (13.4)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала проводника  
Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \quad (13.5)$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $0^\circ \text{C}$ ,  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления

Закон Ома в дифференциальной форме: плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля в данной точке проводника, т. е.

$$j = \sigma E, \quad (13.6)$$

где  $\sigma = 1/\rho$  — удельная электропроводность материала.

Закон Ома для участка неоднородной (т. е. содержащей электродвижущие силы) цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \Sigma \mathcal{E}}{\Sigma R}, \quad (13.7)$$

где  $\varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов на концах участка,  $\Sigma \mathcal{E}$  — алгебраическая сумма всех электродвижущих сил (э. д. с.), имеющих на данном участке,  $\Sigma R$  — сумма всех сопротивлений участка

Закон Ома для замкнутой цепи: сила тока в замкнутой цепи пропорциональна алгебраической сумме всех э. д. с., действующих в цепи, и обратно пропорциональна ее полному сопротивлению, равному сумме сопротивлений внешнего и внутреннего участков, т. е.

$$I = \frac{\Sigma \mathcal{E}}{R_{\text{внеш}} + R_{\text{внутр}}} \quad (13.8)$$

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей:

1) алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в любом узле, равна нулю, т. е.

$$\sum I = 0, \quad (13.9)$$

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме всех э. д. с., действующих в этом контуре:

$$\sum IR = \sum \mathcal{E}. \quad (13.10)$$

Общее сопротивление  $n$  участков при их последовательном соединении равно

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (13.11)$$

Общее сопротивление  $n$  участков при их параллельном соединении определяется соотношением

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (13.12)$$

Работа электрических сил на участке цепи, на концах которого имеются разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , равна

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2) It \quad (13.13)$$

Количество теплоты, выделенное на участке цепи сопротивлением  $R$ , по которому в течение времени  $t$  идет ток силой  $I$ , определяется соотношением (закон Джоуля — Ленца)

$$Q = I^2 R t \quad (13.14)$$

Работа, совершенная источником электрической энергии за время  $t$ ,

$$A = \mathcal{E} I t = I^2 R_{\text{полн}} t = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{\text{полн}}} t, \quad (13.15)$$

где  $\mathcal{E}$  — э. д. с. источника,  $R_{\text{полн}}$  — полное сопротивление цепи.

## А. НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ. ЗАКОН ОМА

### Методические указания

1. Для вычисления силы тока и плотности тока, а также расчета сопротивлений при наличии однородных проводников применяют закон Ома в интегральной (13.3) или дифференциальной (13.6) форме. Интегральную форму закона Ома, как правило, удобно применять при расчетах, связанных с токами в проводах. Для вычисления же токов и сопротивлений при наличии проводящих безграничных сред (например, случаи заземления электродов) практически незаменимой оказывается дифференциальная форма закона Ома (см. задачу № 13-4). Существенно, что напряженность электрического поля  $E$  при наличии тока можно вычислять методами электростатики, так как она совпадает (при условии постоянства силы тока и однородности среды) с напряженностью такого электростатического поля, которое будет при том же напряжении между электродами, если среда станет непроводящей.

2. В учебной литературе одним и тем же термином «электрическое напряжение» или просто «напряжение» иногда обозначают разные физические величины. Здесь мы придерживаемся определения, получившего за последние годы распространение (см., например, учебники [3], [9]): напряжение между двумя точками электрической цепи измеряется работой, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении по цепи единичного положительного заряда из первой точки во вторую. При этом, как следует из формул (11.4), (11.5) и определения электродвижущей силы, напряжение

$$U_{12} = \int_1^2 E_l dl + \int_1^2 (E_{ст})_l dl = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12},$$

где  $E_{ст}$  — напряженность поля сторонних сил,  $\mathcal{E}_{12}$  — электродвижущая сила, действующая на участке цепи 1-2.

При отсутствии сторонних сил величины  $U_{12}$  и  $\varphi_1 - \varphi_2$  совпадают. Поэтому в задачах электростатики и задачах на ток, где рассматриваются участки цепи, не содержащие э. д. с., понятия напряжения и разности потенциалов часто отождествляют.

Из приведенного определения напряжения следует, что при наличии сторонних сил его необходимо применять всегда к конкретному участку цепи, соединяющему данные точки. Действительно, если имеется несколько участков, соединяющих точки 1, 2 и содержащих различные э. д. с., то при одной и той же величине  $\varphi_1 - \varphi_2$  напряжения на них будут различными.

Между тем в соответствии с другим определением напряжения (см., например, учебник [4]) его иногда отождествляют с разностью потенциалов даже при наличии сторонних сил. Например, говорят о напряжении на зажимах работающего гальванического элемента, включенного последовательно с подобными элементами, не указывая, к какому участку цепи, соединяющему зажимы, оно относится. Согласно принятому нами определению в этом случае правильно говорить не о напряжении на зажимах, а о разности потенциалов между ними.

3. Чтобы безошибочно применять закон Ома (13.7) для участка цепи, содержащего э. д. с., необходимо придерживаться следующих правил:

а) начертить схему и обозначить на ней полюсы всех источников, а также направление тока в цепи (если оно неизвестно, то надо указать предполагаемое направление);

б) ток считать положительным на заданном участке 1-2, если он направлен от точки 1 к точке 2;

в) э. д. с. считать положительной на участке 1-2, если она повышает потенциал в направлении от точки 1 к точке 2, т. е. при мысленном движении вдоль пути 1-2 сначала встречается отрицательный полюс источника, а затем положительный.

## Решение задач

13-1. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение  $t = 10,0$  с сила тока уменьшилась от  $I_0 = 10,0$  А до  $I = 5,00$  А? Рассмотреть два случая: 1) сила тока уменьшалась равномерно, 2) сопротивление проводника равномерно возрастало в течение указанного промежутка времени, а разность потенциалов на концах проводника поддерживалась постоянной.

**Решение.** 1. Величина заряда  $dq$ , проходящего через поперечное сечение проводника за время  $dt$ , связана с силой тока соотношением (13.1). Если в эту формулу вместо элементарных величин  $dq$  и  $dt$  подставить конечные значения  $q$  и  $t$ , то получим среднее значение силы тока  $I_{cp}$  за время  $t$ , т. е.  $I_{cp} = q/t$ . Отсюда искомый заряд

$$q = I_{cp}t.$$

Поскольку сила тока в цепи изменялась равномерно, т. е. являлась линейной функцией времени, в качестве среднего значения  $I_{cp}$  можно взять среднее арифметическое между начальным и конечным значениями силы тока за время  $t$ . Следовательно,

$$q = (I_0 + I) t/2 = 75 \text{ Кл.} \quad (1)$$

2. Теперь равномерно изменяется не сила тока, а сопротивление  $R$ . Это значит, что величина  $R$  является линейной функцией времени, т. е.

$$R = R_0 + kt, \quad (2)$$

где  $R_0$  и  $R$  — соответственно начальное и конечное сопротивления проводника,  $k$  — постоянная величина, выражающая скорость изменения сопротивления. Тогда по закону Ома для участка однородной цепи (13.3) получим

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 + kt}. \quad (3)$$

Видим, что в этом случае зависимость силы тока от времени не является линейной, поэтому соотношение (1) здесь неприменимо. Однако при любой зависимости силы тока от времени можно записать на основании (13.1)

$$dq = I dt.$$

Отсюда полный заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $t$ , выразится интегралом:

$$q = \int_0^t I dt.$$

Подставив вместо силы тока ее значение по формуле (3), выполним интегрирование:

$$q = \int_0^t \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 + kt} dt = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k} \ln \frac{R_0 + kt}{R_0}.$$

Преобразовав этот результат с учетом формулы (2) и соотношений  $R = (\varphi_1 - \varphi_2)/I$ ,  $R_0 = (\varphi_1 - \varphi_2)/I_0$ , найдем

$$q = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)t}{R - R_0} \cdot \ln \frac{R}{R_0} = \frac{I_0 I t}{I_0 - I} \cdot \ln \frac{I_0}{I}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин, получим

$$q = 69 \text{ Кл.}$$

**13-2.** Определить плотность тока в медной проволоке длиной  $l = 10$  м, если разность потенциалов на ее концах  $\varphi_1 - \varphi_2 = 12$  В.

**Решение.** Плотность тока, определяемую формулой (13.2), найдем, выразив силу тока  $I$  по закону Ома (13.3) для участка однородной цепи. Тогда с учетом (13.4) получим

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) S/\rho l.$$

Отсюда плотность тока

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho l}. \quad (1)$$

К этому же результату можно прийти, применив закон Ома в дифференциальной форме (13.6), предварительно выразив напряженность электрического поля внутри однородного проводника через разность потенциалов на концах проводника и его длину:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l.$$

Подставив это значение  $E$  в (13.6) и учитывая, что  $\sigma = 1/\rho$ , снова получим ответ (1).

Взяв из справочных таблиц значение удельного сопротивления меди  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом  $\cdot$  м и выполнив вычисление по формуле (1), найдем

$$j = 7 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2.$$

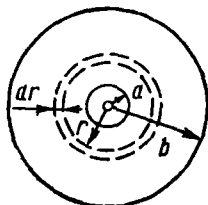


Рис. 13-1

**13-3.** Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых равны  $a$  и  $b$  (рис. 13-1), заполнено слабо проводящей однородной средой с удельным сопротивлением  $\rho$ . Определить силу тока утечки через конденсатор, если разность потенциалов между обкладками  $U$ .

**Решение.** Можно применить для решения закон Ома в интегральной форме (13.3) или дифференциальной (13.6). Воспользуемся первой формулой, быстрее приводящей к цели.

Чтобы с помощью закона Ома (13.3) найти силу тока через конденсатор, необходимо предварительно определить сопротивление среды между обкладками. Очевидно, применить непосредственно формулу (13.4), выведенную для цилиндрического проводника, вдоль которого течет ток, здесь невозможно. Однако если мысленно выделить внутри конденсатора элементарный шаровой слой радиуса  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 13-1), то, учитывая, что линии тока во всех элементах этого слоя перпендикулярны его поверхности, этот слой можно заменить эквивалентным в отношении сопротивления цилиндрическим проводником, имеющим длину  $dr$  и площадь поперечного сечения  $4\pi r^2$ . Тогда согласно формуле (13.4) сопротивление элементарного шарового слоя

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Интегрируя это выражение по всему расстоянию между обкладками конденсатора, получим полное сопротивление межэлектродного промежутка:

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Теперь по закону Ома (13.3) найдем силу тока утечки через конденсатор:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi U}{\rho (1/a - 1/b)}.$$

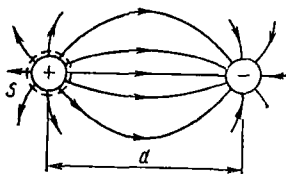


Рис 13 2

13-4. Два металлических шара одинакового радиуса  $a$  находятся на расстоянии  $d$  в безграничной однородной проводящей среде, удельное сопротивление которой  $\rho$ . Определить сопротивление среды на участке между шарами при условии  $d \gg a$ .

**Решение.** Вычислить сопротивление среды методом, который был применен в предыдущей задаче, здесь затруднительно вследствие асимметрии линий тока относительно центра каждого из двух шаров. Поэтому решим задачу с помощью закона Ома в дифференциальной форме (13.6). При этом учтем, что электрическое поле в однородной среде при наличии постоянного тока совпадает с электростатическим полем, которое существует между электродами при том же напряжении в непроводящей среде. Предположив, что между данными шарами, помещенными в такую среду, имеется некоторая разность потенциалов  $U$ , воспользуемся результатом, полученным в электростатической задаче № 11-7.

Окружим один из шаров замкнутой поверхностью  $S$ , вплотную прилегающей к нему (рис. 13-2). Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 11-7 относительно неравенства  $r \gg r_0$ , приходим к выводу, что во всех точках поверхности  $S$  напряженность  $E$  электрического поля выражается формулой (10.7а):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}. \quad (1)$$

При этом разность потенциалов между шарами равна (см. ответ к задаче № 11-7)

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{a}. \quad (2)$$

Исключив из (1) и (2) величину  $q/4\pi\epsilon_0$ , получим

$$E = U/2a. \quad (3)$$

Такой же будет и напряженность электрического поля при наличии тока, если между шарами в условиях настоящей задачи поддерживать разность потенциалов  $U$ . При этом, как следует из закона Ома (13.6), плотность тока во всех точках поверхности  $S$  будет одинаковой. Учитывая соотношения (13.2) и (3), по формуле (13.6) найдем силу тока через поверхность  $S$ :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \frac{E}{\rho} 4\pi a^2 = \frac{2\pi a}{\rho} U. \quad (4)$$

Поскольку поверхность  $S$  пересекает все линии тока (изображенные на рис. 13-2 линии, соединяющие два шара, будучи силовыми линиями электрического поля, являются и линиями тока), найденная величина  $I$  выражает силу полного тока в промежутке между шарами. Сравнив выражение (4) с законом Ома (13.3), найдем искомое сопротивление:

$$R = \rho/2\pi a.$$

Видим, что полученный результат не зависит от расстояния  $d$  между шарами (при условии  $d \gg a$ ).

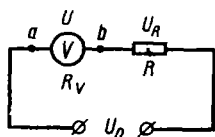


Рис. 13 3

13-5. Если вольтметр соединить последовательно с резистором сопротивлением  $R = 10,0$  кОм, то при напряжении  $U_0 = 120$  В он покажет  $U_1 = 50,0$  В (рис. 13-3). Если соединить его последовательно с резистором неизвестного сопротивления  $R_x$ , то при том же напряжении вольтметр покажет  $U_2 = 10,0$  В. Определить это сопротивление.

**Решение.** Данная цепь представляет собой последовательное соединение двух элементов: вольтметра и резистора. При последовательном соединении сила тока одинакова на всех участках цепи. Рассматриваемая цепь является однородной. Напряжения на отдельных участках такой цепи, совпадающие с разностями потенциалов на их



концах и дающие в сумме напряжение на всей цепи, распределяются всегда пропорционально сопротивлениям участков, что следует из закона Ома (13.3). Заметим, что вольтметр измеряет разность потенциалов между теми точками, к которым он подключен (точки  $a$  и  $b$  на рис. 13-3). Другими словами, вольтметр измеряет напряжение на концах того участка цепи, которым он сам является. Поэтому для двух элементов цепи — вольтметра и резистора — можно составить пропорцию:

$$U_1/R_V = (U_0 - U_1)/R, \quad (1)$$

где  $U_1$ ,  $R_V$  — напряжение на вольтметре и его сопротивление;  $U_0 - U_1 = U_R$  — напряжение на резисторе сопротивлением  $R$ . Для случая, когда включен резистор с неизвестным сопротивлением, можем также записать:

$$U_2/R_V = (U_0 - U_2)/R_x. \quad (2)$$

Исключив из уравнений (1) и (2) величину  $R_V$ , получим

$$R_x = \frac{(U_0 - U_2) U_1}{(U_0 - U_1) U_2} R = 79 \text{ кОм.}$$

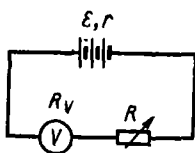


Рис. 13-4

13-6. К батарее гальванических элементов через резистор с переменным сопротивлением  $R$  подключен вольтметр (рис. 13-4). Если  $R$  уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если  $R$  уменьшить до нуля?

**Решение.** В этой задаче в отличие от предыдущей нет оснований считать постоянным напряжение  $U$  на участке цепи, состоящем из вольтметра и резистора с переменным сопротивлением. Наоборот, поскольку этот участок подключен к зажимам батареи, обладающей некоторым внутренним сопротивлением  $r$ , напряжение  $U$  должно изменяться при изменении сопротивления  $R$ . Этот вывод следует из закона Ома для замкнутой цепи (13.8), который применительно к данной задаче запишем так:

$$I = \mathcal{E} / (R_V + r + R), \quad (1)$$

где  $\mathcal{E}$  — электродвижущая сила (э. д. с.) батареи. Так как напряжение на участке вольтметр — резистор равно по закону Ома для участка однородной цепи произведению силы тока  $I$  на сумму  $R + R_V$ , то из формулы (1) найдем

$$U = I (R + R_V) = \mathcal{E} - Ir. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) видно, что при изменении  $R$  напряжение  $U$  действительно изменяется. Постоянной же величиной остается э. д. с. батареи  $\mathcal{E}$ , равная сумме напряжений на всех участках замкнутой цепи. Отсюда ясно, что для решения задачи необходимо применить закон Ома для замкнутой цепи (1). При этом учтем, что показания вольтметра, обладающего постоянным сопротивлением, пропорциональны

силе тока, проходящего по нему, а значит, и по всей цепи. Поэтому в случае, когда  $R$  уменьшилось в три раза, закон Ома для замкнутой цепи запишется в виде

$$2I = \mathcal{E} / (R_V + r + R/3); \quad (3)$$

наконец, для случая  $R = 0$  получим

$$nI = \mathcal{E} / (R_V + r), \quad (4)$$

где  $n$  — искомая величина. Хотя уравнения (1), (3), (4) содержат шесть неизвестных, этих уравнений достаточно для определения  $n$ , так как остальные неизвестные величины входят во все уравнения одинаковыми группами, что позволяет снизить число неизвестных с шести до трех. В результате несложных преобразований систему уравнений (1), (3), (4) можно записать так:

$$\begin{cases} 1 = \frac{I(R_V + r)}{\mathcal{E}} + \frac{IR}{\mathcal{E}}; \\ \frac{1}{2} = \frac{I(R_V + r)}{\mathcal{E}} + \frac{1}{3} \frac{IR}{\mathcal{E}}; \\ \frac{1}{n} = \frac{I(R_V + r)}{\mathcal{E}}. \end{cases}$$

Введя обозначения  $A = I(R_V + r)/\mathcal{E}$ ,  $B = IR/\mathcal{E}$ , получим систему трех уравнений с тремя неизвестными  $n$ ,  $A$ ,  $B$ :

$$\begin{cases} A + B = 1; \\ A + \frac{1}{3}B = \frac{1}{2}; \\ nA = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно  $n$ , найдем

$$n = 4.$$

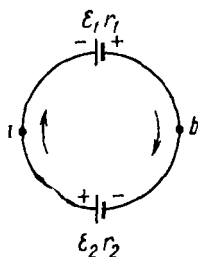


Рис. 13.5

13-7. Два гальванических элемента, имеющих э. д. с.  $\mathcal{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathcal{E} = 1,6$  В и внутренние сопротивления  $r_1 = 0,60$  Ом,  $r_2 = 0,40$  Ом, соединены разноименными полюсами (рис. 13-5). Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить разность потенциалов на зажимах элементов (между точками  $a$  и  $b$ ).

**Решение.** Точки  $a$  и  $b$  являются концами двух участков цепи:  $a\mathcal{E}_1b$  и  $a\mathcal{E}_2b$ . Оба эти участка содержат э. д. с. и, следовательно, являются участками неоднородной цепи. Поэтому применим закон Ома (13.7). Так как обе э. д. с. имеют положительные знаки при обходе

цепи по часовой стрелке (см. правило знаков, изложенное в методических указаниях), ток по цепи будет течь в том же направлении. Тогда для участка  $a\mathcal{E}_1b$  получим

$$I = [(\varphi_a - \varphi_b) + \mathcal{E}_1]/r_1. \quad (1)$$

Далее есть два пути решения задачи. Во-первых, можно применить закон Ома (13.7) для участка  $a\mathcal{E}_2b$ :

$$-I = [(\varphi_a - \varphi_b) - \mathcal{E}_2]/r_2. \quad (2)$$

Во-вторых, можно воспользоваться законом Ома (13.8) для замкнутой цепи:

$$I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2). \quad (3)$$

Взяв любые два уравнения из (1), (2), (3) и исключив из них силу тока  $I$ , найдем

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}_2 r_1 - \mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,4 \text{ В.}$$

**З а м е ч а н и е.** Если бы источники имели одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления, т. е.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ ,  $r_1 = r_2 = r$ , то, как легко видеть из последней формулы, искомая разность потенциалов оказалась бы равной нулю. Этот же результат можно получить сразу из соображений симметрии. Действительно, точки  $a$  и  $b$  расположены в цепи симметрично по отношению к одинаковым источникам напряжения, поэтому их потенциалы одинаковы. (По той же причине одинаковы потенциалы точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 в цепи, изображенной на рис. 13-6, где все источники имеют одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления.) Следовательно, если к точкам  $a$  и  $b$  (или к любым двум из шести точек на рис. 13-6) подключить

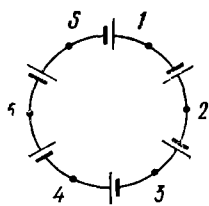


Рис. 13 6

вольтметр, то он не будет давать никаких показаний. В то же время по проводникам, соединяющим точки  $a$  и  $b$ , будет идти ток, равный согласно формуле (3)  $I = \mathcal{E}/r$ . Этот пример наглядно показывает, что закон Ома в форме (13.3) неприменим для участков цепи, содержащих э. д. с., а вольтметр, подключенный к концам таких участков, не измеряет напряжения на них. Напомним, что согласно формуле (13.7) и определению напряжения последнее равно произведению силы тока на сопротивление участка.

## Б. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦЕПИ. ПРАВИЛА КИРХГОФА

### Методические указания

1. Часто требуется рассчитать сопротивление разветвленной цепи, когда заданы сопротивления всех ее участков. Если при этом данная цепь является параллельным соединением нескольких проводников, то ее сопротивление находят по формуле (13.12). В том случае, когда

соединение проводников смешанное (ср. со смешанным соединением конденсаторов, стр. 128), его надо разложить на участки последовательного и параллельного соединений и, поочередно применяя формулы (13.11) и (13.12), найти сопротивление всей цепи. Напомним, что для последовательного соединения участков цепи характерно отсутствие узлов (разветвлений) на соединяющем их проводнике (рис. 13-7, а), а при параллельном соединении концы обоих участков подключены к одним и тем же двум точкам цепи (рис. 13-7, б).

Если заданное сложное соединение проводников нельзя разложить на участки последовательного и параллельного соединений, необходимо попробовать заменить его другим соединением, эквивалентным данному в отношении сопротивления, так, чтобы это соединение можно было разложить на участки последовательного и параллельного соединений. Здесь, так же как и в случае конденсаторов, такие эквивалентные замены основаны на возможности соединять и разъединять точки цепи, имеющие равные потенциалы.

Найти такие точки можно из соображений симметрии (см. задачу № 13-8). Если схема обладает осью симметрии, причем вход и выход (зажимы) схемы лежат на этой оси, то в цепи будет симметричное распределение токов и любые две точки, симметричные относительно этой оси, будут иметь равные потенциалы.

Сопротивление любой, сколь угодно сложной цепи можно рассчитать, используя правила Кирхгофа (13.9) и (13.10) (см. задачу № 13-11).

2. Для безошибочного употребления правил Кирхгофа необходимо выполнять следующие указания:

а) выбрать (произвольно) направления токов во всех участках разветвленной цепи, отметив их на чертеже стрелками;

б) при составлении уравнения (13.9) соблюдать правило знаков: токи, протекающие в узел, считать положительными, вытекающие из узла — отрицательными;

в) иметь в виду, что число независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, всегда на единицу меньше числа узлов, имеющих в данной цепи.

г) выбрать направление обхода контуров цепи (по часовой стрелке или против);

д) составляя уравнение (13.10), соблюдать правило знаков: токи, совпадающие с направлением обхода, записывать со знаком «+», обратные направлению обхода — со знаком «-»; считать положительными те э. д. с., которые повышают потенциал в направлении обхода, т. е., двигаясь по контуру, сначала встречаем отрицательный полюс источника, затем положительный,

е) чтобы все уравнения, составленные на основании второго правила Кирхгофа, были независимыми, необходимо каждый раз рассматривать контуры, содержащие хотя бы одну новую ветвь цепи, не входящую в уже использованные контуры;

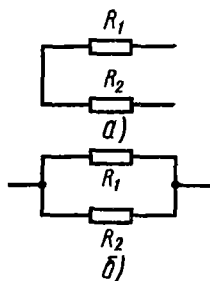


Рис 13-7

ж) для упрощения выкладок, связанных с решением полученной системы уравнений, предварительно подставить числовые значения всех известных величин;

з) если в полученном ответе какой-либо ток будет иметь знак « — », то это укажет на ошибочность первоначального выбора направления данного тока, т. е. ток в действительности течет в обратном направлении. Если же в задаче определяется сопротивление какой-либо ветви цепи и в результате решения системы уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, получится отрицательное значение сопротивления, это также свидетельствует о неправильном выборе направления тока на данном проводнике. Однако в этом случае неверным окажется и числовое значение сопротивления. Тогда необходимо, изменив на чертеже направление тока в проводнике, составить новую систему уравнений и, решив ее, определить искомое сопротивление.

### Решение задач

13-8. Вычислить сопротивление цепей, схемы которых изображены на рис. 13-8. Считать сопротивление каждого проводника, заключенного между двумя узлами, равным 1,00 Ом.

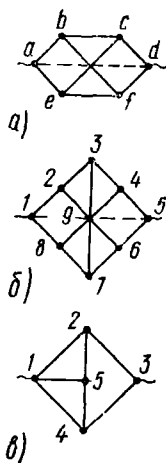


Рис. 13 8

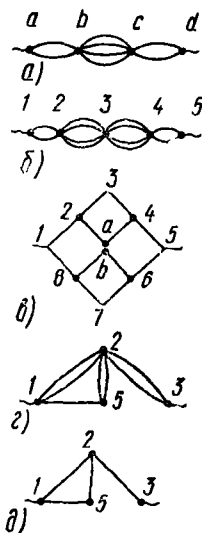


Рис. 13 9

**Решение.** Рассматривая приведенные схемы, можно убедиться в том, что ни одна из цепей не содержит ни одной пары проводников, соединенных между собой последовательно или параллельно. Однако все три схемы являются симметричными, причем точки их входа и выхода (зажимы цепи) лежат на осях симметрии. В этом ключ к расчету цепей.

Обратимся к схеме рис. 13-8, а. Здесь точка  $b$  симметрична точке  $e$  относительно оси  $ad$ , на которой лежит вход и выход цепи. Следовательно, при наличии тока в цепи потенциалы точек  $b, e$  будут одинаковыми. Если теперь соединить эти точки проводом, ток по нему не пойдет. Существовавшее до этого распределение токов в участках цепи не изменится и сопротивление цепи останется прежним. Другими словами, точки  $b, e$  можно объединить в один узел  $b$ , не изменив сопротивления цепи. По той же причине можно соединить в один узел  $c$  точки  $c$  и  $f$ . Тогда получим новую схему цепи (рис. 13-9, а), эквивалентную данной. Применяя формулы (13.11) и (13.12), найдем сопротивление цепи:

$$R = R_{ab} + R_{bc} + R_{cd} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ Ом} = 1,25 \text{ Ом}.$$

На схеме рис. 13-8, б симметричные (относительно оси 1-5) точки также обладают одинаковыми потенциалами. Следовательно,

$$\varphi_2 = \varphi_8, \varphi_4 = \varphi_6, \varphi_8 = \varphi_9 = \varphi_7.$$

Последнее тройное равенство должно выполняться, поскольку каждая из трех точек 3, 9, 7 делит путь тока, проходящего через нее от одного зажима цепи (точка 1) до другого (точка 5), на две одинаковые части. Поэтому потенциал каждой из точек 3, 9, 7 равен  $(\varphi_1 - \varphi_5)/2$ . Следовательно, в проводах 3-9 и 9-7 тока нет и их можно удалить, не изменив сопротивления цепи. Далее возможны два пути решения задачи. Соединив точки с одинаковыми потенциалами, получим схему цепи рис. 13-9, б, эквивалентную данной, и по формулам (13.11) и (13.12) найдем искомое сопротивление:

$$R = R_{1,2} + R_{2,3} + R_{3,4} + R_{4,5} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ Ом} = 1,5 \text{ Ом}.$$

Можно не соединять точки равного потенциала, а, наоборот, разъединить их в центре схемы. Тогда получим схему цепи рис. 13-9, в. Здесь точки  $a, b$  имеют тот же потенциал, что и до разъединения, поскольку они (как и точка 9 на схеме рис. 13-8, б) делят путь тока, проходящего через них от одного зажима цепи к другому, на две одинаковые части. Поэтому потенциал каждой из точек по-прежнему равен  $(\varphi_1 - \varphi_5)/2$ . Следовательно, распределение тока в цепи не изменится и схема рис. 13-9, в эквивалентна исходной. Теперь, поочередно применяя формулы (13.11) и (13.12), найдем сопротивление цепи:

$$R = [1 + (1 + 1)/2 + 1]/2 \text{ Ом} = 1,5 \text{ Ом}.$$

При рассмотрении схемы рис. 13-8, в может показаться, что потенциалы точек 2, 4, 5 одинаковы по той же причине, по которой на схеме рис. 13-8, б равны потенциалы точек 3, 9, 7. Однако данная схема отличается от предыдущей тем, что линия 2-5-4 не делит схему на две одинаковые части, поэтому в действительности ни одна из точек 2, 4, 5 не имеет потенциала, равного  $(\varphi_1 - \varphi_3)/2$ . Теперь можно лишь утверждать, что точки 2 и 4, будучи симметричными относительно прямой 1-3, на которой расположены вход и выход цепи, имеют одинаковые

потенциалы. Соединив их (перегнув чертеж по линии 1-3) в один узел 2, получим эквивалентную схему рис. 13-9, з, которую можно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Ее можно упростить, заменив каждые два одинаковых параллельно соединенных проводника на участках 1-2, 5-2 и 2-3 одним проводником вдвое меньшего сопротивления. Тогда получим схему рис. 13-9, д, после чего легко найдем ответ с помощью формул (13.11) и (13.12):

$$R = 1,375 \text{ Ом.}$$

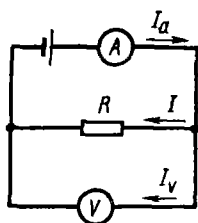


Рис. 13-10

13-9. Сопротивление  $R$  резистора измеряется вольтметром и амперметром по схеме, изображенной на рис. 13-10. Показания амперметра  $I_a = 2,40$  А; вольтметра  $U = 7,20$  В. Определить относительную ошибку, получаемую при вычислении сопротивления без учета тока, идущего через вольтметр, если его сопротивление  $R_v = 1,00$  кОм.

**Решение.** Истинное значение сопротивления по закону Ома (13.3) равно

$$R = U/I, \quad (1)$$

где  $U$  — напряжение на концах резистора, измеренное вольтметром,  $I$  — сила тока, проходящего через резистор. Амперметр в данной цепи показывает силу тока в неразветвленной ее части, равную сумме токов в параллельных ветвях, состоящих из резистора  $R$  и вольтметра:

$$I_a = I + I_v.$$

Если пренебречь током  $I_v$ , проходящим через вольтметр, и считать  $I \approx I_a$ , то получим для вычисляемого сопротивления приближенное значение

$$R' \approx U/I_a. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), видим, что  $R' < R$ . Поэтому искомая относительная ошибка равна

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R - R'}{R}. \quad (3)$$

Чтобы найти величину  $R$ , заметим, что величина  $R'$ , определяемая формулой (2), есть сопротивление участка цепи, являющегося параллельным соединением резистора и вольтметра. Поэтому согласно формуле (13.12) запишем

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_v}.$$

Выразив отсюда величину  $R$  и подставив ее в формулу (3), после ряда упрощений получим с учетом соотношения (2):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R'}{R_V} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{U}{I_a R_V} = 3,0 \cdot 10^{-3}, \quad \text{или} \quad 0,30\%.$$

Отсюда видно, что, применяя указанный метод измерения сопротивлений, можно получить достаточно точный результат лишь при условии, если сопротивление вольтметра будет достаточно велико по сравнению с измеряемым сопротивлением.

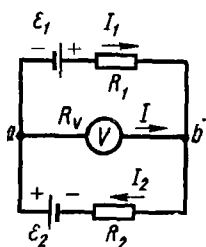


Рис. 13-11

13-10. Элементы цепи, схема которой изображена на рис. 13-11, имеют следующие значения:  $\mathcal{E}_1 = 1,50$  В,  $\mathcal{E}_2 = 1,60$  В,  $R_1 = 1,00$  кОм,  $R_2 = 2,00$  кОм. Определить показания вольтметра, если его сопротивление  $R_V = 2,00$  кОм. Сопротивлением источников напряжения и соединительных проводов пренебречь.

**Решение.** Здесь требуется найти разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$ , которую измеряет вольтметр, подключенный к этим точкам. Если бы вольтметр обладал бесконечно большим сопротивлением и тока через него не было\*, то эта задача ничем не отличалась бы от задачи № 13-7, которая решена с помощью закона Ома для участка неоднородной цепи. Однако в данном случае сопротивление  $R_V$  одного порядка с  $R_1$  и  $R_2$ , поэтому пренебречь током  $I$  в цепи вольтметра нельзя. Таким образом, здесь имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут, вообще говоря, разные токи:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$  (рис. 13-11). Задачу можно решить двумя способами, используя правила Кирхгофа для разветвленных цепей или применив первое правило Кирхгофа и закон Ома для участка неоднородной цепи. Рассмотрим оба способа.

1. Искомая разность потенциалов по закону Ома (13.3) равна

$$\varphi_a - \varphi_b = IR_V. \quad (1)$$

Чтобы определить силу тока  $I$  в цепи вольтметра, применим правила Кирхгофа (13.9), (13.10). Обозначив на рис. 13-11 направления всех токов (для тока  $I$  делаем это лишь предположительно), согласно первому правилу Кирхгофа запишем для узла  $a$ :

$$I_2 - I_1 - I = 0. \quad (2)$$

Для составления остальных двух независимых уравнений воспользуемся вторым правилом Кирхгофа. Предварительно выбрав направление обхода замкнутых контуров, например по часовой стрелке, и учи-

\* Это имеет место для вольтметров электростатической системы.



тывая правило знаков (см. стр. 155), получим соответственно для контуров  $aR_1ba$  и  $abR_2a^*$ :

$$I_1 R_1 - IR_V = \mathcal{E}_1, \quad (3)$$

$$I_2 R_2 + IR_V = \mathcal{E}_2. \quad (4)$$

Решив систему трех уравнений (2), (3), (4) с тремя неизвестными  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$  относительно тока  $I$ , найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 - \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V}. \quad (5)$$

Подставив это значение  $I$  в (1) и произведя вычисления, получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{(\mathcal{E}_2 R_1 - \mathcal{E}_1 R_2) R_V}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V} = -0,35 \text{ В.} \quad (6)$$

Знак « $-$ » в ответе означает, что  $\varphi_b > \varphi_a$  и в действительности ток в цепи вольтметра имеет направление, противоположное тому, что мы предположили, т. е. от точки  $b$  к точке  $a$ .

2. Применим закон Ома (13.7) для участка неоднородной цепи поочередно к трем участкам:  $aR_1b$ ,  $aR_2b$ ,  $aR_Vb$ . Тогда, учитывая правило знаков (см. стр. 147), запишем соответственно три уравнения:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E}_1}{R_1};$$

$$-I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_2}{R_2};$$

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_V}.$$

Подставим эти значения сил токов в уравнение (2):

$$\frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_2}{R_2} + \frac{\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R_V} = 0.$$

Решив это уравнение относительно величины  $\varphi_a - \varphi_b$ , найдем ответ, совпадающий с формулой (6).

**З а м е ч а н и е.** При  $R_V \rightarrow \infty$  можно пренебречь произведением  $R_1 R_2$  в знаменателе формулы (6). Тогда, сокращая величину  $R_V$ , получим выражение, совпадающее, как и следовало ожидать, с ответом задачи № 13-7.

\* Вместо этого контура можно было бы взять контур  $aR_1bR_2a$ .

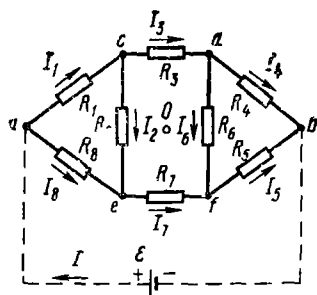


Рис 13-12

13-11. Определить сопротивление цепи  $ab$ , схема которой изображена на рис 13-12, если  $R_1 = R_5 = 1,00$  Ом,  $R_2 = R_6 = 2,00$  Ом,  $R_3 = R_7 = 3,00$  Ом,  $R_4 = R_8 = 4,00$  Ом.

**Решение.** В данной цепи, состоящей из восьми сопротивлений, нет хотя бы двух элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Кроме того, здесь в отличие от схем, рассмотренных в задаче № 13-8, отсутствует осевая симметрия.

Применим к расчету сопротивления цепи правила Кирхгофа. Для этого предположим, что к зажимам цепи  $ab$  подключен источник тока. Тогда в цепи будет ток. Сила тока  $I$  в неразветвленной части цепи зависит от э. д. с.  $\mathcal{E}$  источника, а также является некоторой функцией от величин  $R_1, R_2, \dots, R_8$  (считаем сопротивление источника равным нулю). Так как при этом, согласно закону Ома (13.8), сила тока  $I$  пропорциональна величине  $\mathcal{E}$ , можно записать

$$I = f(R_1, R_2, \dots, R_8) \mathcal{E}. \quad (1)$$

С другой стороны, из того же закона Ома следует

$$I = \mathcal{E} / R, \quad (2)$$

где  $R$  — искомое сопротивление. Сравнив формулы (1) и (2), получим

$$R = \frac{1}{f(R_1, R_2, \dots, R_8)}.$$

Следовательно, выразив силу тока  $I$  согласно формуле (1) как функцию всех данных величин сопротивлений и произвольной величины  $\mathcal{E}$  с помощью правил Кирхгофа (13.9), (13.10), найдем сопротивление  $R$  цепи.

Обозначим токи на всех участках цепи и укажем (произвольно) их направления (рис. 13-12). В данном случае имеется девять неизвестных сил токов  $I_1, I_2, \dots, I_8, I$ . Чтобы избежать громоздких вычислений, связанных с решением системы из девяти уравнений, которую мы получим, применив правила Кирхгофа, воспользуемся следующим обстоятельством. Из условия задачи видно, что данная цепь обладает симметрией с центром в точке  $O$  (рис. 13-12). Действительно, если, отсоединив цепь в точках  $a, b$  от источника, повернуть ее в плоскости чертежа вокруг точки  $O$  на  $180^\circ$  и снова соединить с источником, то в силу данных в условии равенств она совместится со своим первоначальным положением. Но теперь в резисторе  $R_6$  течет ток, который

раньше был в резисторе  $R_1$ . Перемена же знаков напряжения на зажимах цепи не может вызвать изменения силы тока ни на одном участке цепи. Значит, и раньше в резисторах  $R_5$  и  $R_1$  были токи одинаковой силы, т. е.  $I_1 = I_5$ . Аналогично можно показать, что в данной цепи должны выполняться равенства:  $I_2 = I_6$ ,  $I_3 = I_7$ ,  $I_4 = I_8$ . Таким образом, в задаче фактически имеется лишь пять различных неизвестных токов:  $I_1, I_2, I_3, I_4, I$ .

По первому правилу Кирхгофа с учетом, что  $I_4 = I_8$ ,  $I_2 = I_6$ , получим соответственно для узлов  $a, c$  и  $d$ :

$$I = I_1 + I_4; \quad (3)$$

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad (4)$$

$$I_3 = I_2 + I_4. \quad (5)$$

Легко убедиться проверкой, что аналогичные уравнения, составленные для остальных трех узлов схемы, будут повторением уже имеющихся уравнений. Недостающие два уравнения получим на основании второго правила Кирхгофа. Выбрав направление обхода контуров по часовой стрелке, запишем, например, для контуров  $acdb$  и  $acda$  соответственно:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}, \quad (6)$$

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0. \quad (7)$$

Подставив в (3) — (7) числовые значения сопротивлений из условия задачи и решив систему пяти уравнений с пятью неизвестными силами токов относительно тока  $I$ , получим

$$I = (2/7) E. \quad (8)$$

Сравнив выражения (8) и (2), найдем искомое сопротивление:

$$R = (7/2) \text{ Ом} = 3,5 \text{ Ом}.$$

## В РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА

### Методические указания

Решая задачи данного раздела, следует иметь в виду, что формулы (13.13) и (13.14), выражающие работу сил электрического поля на каком-либо участке цепи и количество теплоты, выделенное при прохождении тока по этому участку, остаются справедливыми в любом случае независимо от наличия или отсутствия э. д. с. на данном участке. Если при этом рассматриваемый участок не содержит э. д. с. и, следовательно, к нему применим закон Ома (13.3), то формулы (13.13) и (13.14) совпадают. Значит, в этом случае вся работа электрических сил идет на выделение тепла в проводнике. Если же данный участок содержит э. д. с., то соотношение (13.3) к нему неприменимо. Следовательно, величины  $A$  и  $Q$ , определяемые по формулам (13.13), (13.14), в этом случае неодинаковы. При этом знак неравенства зависит от направления тока и э. д. с. (см. задачу № 13-12).

## Решение задач

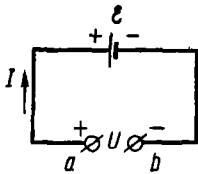


Рис. 13-13

13-12. Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое еже-секундно, в следующих случаях: 1) в резисторе, по которому идет ток силой  $I = 1,0$  А; разность потенциалов между концами резистора  $\varphi_a - \varphi_b = 2,0$  В; 2) в аккумуляторе, который заряжается током силой  $I = 1,0$  А; разность потенциалов на его зажимах  $\varphi_a - \varphi_b = 2,0$  В, э. д. с. аккумулятора  $\mathcal{E} = 1,3$  В; 3) в батарее аккумуляторов, которая дает ток силой  $I = 1,0$  А на внешнюю нагрузку; разность потенциалов на зажимах батареи  $\varphi_a - \varphi_b = 2,0$  В, ее э. д. с.  $\mathcal{E} = 2,6$  В.

**Решение.** 1. Так как рассматриваемый участок не содержит э. д. с., то по закону Ома для участка однородной цепи имеем

$$\varphi_a - \varphi_b = IR.$$

Из этого следует, что формулы (13.13) и (13.14) в данном случае совпадают. Значит, вся работа электрических сил идет на нагревание резистора:

$$A = Q = (\varphi_a - \varphi_b) It = 2 \text{ Дж.}$$

2. При зарядке аккумулятора его зажимы присоединяют к источнику, разность потенциалов на полюсах которого постоянна. При этом ток внутри аккумулятора идет от его положительного полюса к отрицательному (рис. 13-13), т. е. в направлении, обратном току разряда.

Работу электрических сил снова вычислим по формуле (13.13):

$$A = (\varphi_a - \varphi_b) It = 2 \text{ Дж.}$$

Чтобы по формуле (13.14) определить количество выделенной теплоты, найдем сопротивление  $R$  участка цепи  $a\mathcal{E}b$ . Поскольку он содержит э. д. с., применим закон Ома (13.7) для участка неоднородной цепи. Учитывая направления тока и э. д. с., запишем в соответствии с правилом знаков (см. стр. 147)

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}}{R}. \quad (1)$$

Подставив значение  $R$  из (1) в (13.14), получим

$$Q = I^2 R t = (\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}) It = 0,7 \text{ Дж.}$$

В данном случае лишь часть работы электрических сил идет на нагревание аккумулятора, остальная же часть  $A - Q = 1,3$  Дж превращается в химическую энергию заряжаемого аккумулятора.

3. Работу электрических сил также найдем по формуле (13.13). При этом обратим внимание на отличие данного случая от предыдущего. Если положительный знак разности потенциалов  $\varphi_a - \varphi_b$  сохранился,

то направление тока на участке  $a\mathcal{E}b$  изменилось на противоположное (рис. 13-14). Следовательно,

$$A = (\varphi_a - \varphi_b) (-I) t = - (\varphi_a - \varphi_b) I t = - 2 \text{ Дж.} \quad (2)$$

Отрицательный знак ответа выражает то обстоятельство, что положительные заряды движутся внутри каждого аккумулятора от его низшего потенциала к высшему, т. е. против электрических сил. При этом положительную работу совершают сторонние силы, перемещая заряды внутри аккумуляторов.

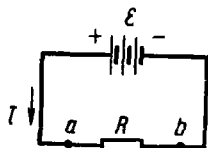


Рис 13 14

Количество теплоты, выделенное в батарее, снова определим по формуле (13.14). При этом сопротивление  $r$  батареи, как и в предыдущем случае, можно вычислить по закону Ома (13.7)

для участка неоднородной цепи  $a\mathcal{E}b$ . Теперь, учитывая направление тока и знак э. д. с., запишем

$$-I = (\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E})/r. \quad (3)$$

Сопротивление батареи можно найти также как разность между сопротивлением всей цепи и сопротивлением внешнего участка цепи. Тогда из формул (13.3) и (13.8) имеем

$$r = R_{\text{общ}} - R = \frac{\mathcal{E}}{I} - \frac{\varphi_a - \varphi_b}{I} = \frac{\mathcal{E} - (\varphi_a - \varphi_b)}{I},$$

что совпадает с формулой (3). Подставив найденное значение  $r$  в формулу (13.14), получим

$$Q = I^2 r t = [\mathcal{E} - (\varphi_a - \varphi_b)] I t = 0,6 \text{ Дж.} \quad (4)$$

Этот вариант задачи можно решить еще по-другому. По данным условия найдем работу электрических сил на внешнем участке цепи  $aRb$ :

$$A_{\text{внеш}} = (\varphi_a - \varphi_b) I t = 2 \text{ Дж.}$$

Однако работа электрических, т. е. кулоновских (но не сторонних!), сил по перемещению зарядов на замкнутом пути всегда равна нулю. Значит,

$$A_{\text{внутр}} + A_{\text{внеш}} = 0,$$

откуда

$$A_{\text{внутр}} = -A_{\text{внеш}} = -2 \text{ Дж,}$$

что совпадает с результатом (2).

Вся энергия, расходуемая батареей, превращается (посредством работы электрических сил) в тепло  $Q_{\text{общ}}$ , выделяющееся во всей цепи. Эту энергию вычислим по формуле (13.15):

$$A_{\mathcal{E}} = Q_{\text{общ}} = \mathcal{E} I t = 2,6 \text{ Дж.}$$

Так как на внешнем участке выделяется количество теплоты

$$Q_{\text{внеш}} = A_{\text{внеш}} = 2 \text{ Дж,}$$

то для батареи

$$Q = Q_{\text{общ}} - Q_{\text{внеш}} = 0,6 \text{ Дж},$$

что совпадает с результатом (4).

13-13. Э. д. с. батареи  $\mathcal{E} = 12,0 \text{ В}$ . Наибольшая сила тока, которую может дать батарея,  $I_{\text{макс}} = 5,0 \text{ А}$ . Какая наибольшая мощность  $P_{\text{макс}}$  может выделяться на подключенном к батарее резисторе с переменным сопротивлением?

**Решение.** Мощность  $P$  тока измеряется работой, совершенной электрическими силами в единицу времени. Поскольку вся работа на внешнем участке цепи идет на нагревание резистора ( $A = Q$ ), то в данном случае мощность измеряется количеством теплоты, выделяемым в резисторе в единицу времени. Поэтому на основании формулы (13.14), а также закона Ома (13.8) для замкнутой цепи получим

$$P = I^2 R = \mathcal{E}^2 R / (R + r)^2, \quad (1)$$

где  $R$ ,  $r$  — сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи соответственно. Отсюда видно, что при постоянных величинах  $\mathcal{E}$ ,  $r$  мощность  $P$  является функцией одной переменной — внешнего сопротивления  $R$ . Известно, что эта функция имеет максимум при условии  $R = r^*$ . Следовательно,

$$P_{\text{макс}} = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}. \quad (2)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию сопротивления  $r$  внутреннего участка цепи (батареи). Если учесть, что согласно закону Ома (13.8) для замкнутой цепи наибольшая сила тока  $I_{\text{макс}}$  будет при внешнем сопротивлении  $R = 0$  (ток короткого замыкания), то

$$I_{\text{макс}} = \mathcal{E}/r. \quad (3)$$

Подставив найденное из (3) значение внутреннего сопротивления  $r$  в формулу (2), получим

$$P_{\text{макс}} = \mathcal{E} I_{\text{макс}} / 4 = 15 \text{ Вт}.$$

13-14. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена одна секция, вода закипает через  $t_1 = 10$  мин, если другая, то через  $t_2 = 20$  мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить: а) последовательно? б) параллельно? Напряжения на зажимах кипятильника и к. п. д. установки считать во всех случаях одинаковыми.

**Решение.** При различных включениях секций кипятильника сопротивление цепи различно. Очевидно, искомое время нагревания воды есть некоторая функция сопротивления цепи. Чтобы найти эту функцию, воспользуемся законом Джоуля — Ленца (13.14) для теп-

\* В этом можно убедиться, применив общий метод исследования функций на экстремум с помощью производной.

лового действия тока. Поскольку речь идет об участке цепи, не содержащем э. д. с., к которому применим закон Ома (13.3), запишем формулу (13.14) так:

$$Q = I^2 R t = U^2 t / R. \quad (1)$$

Отсюда легко определить вид функции  $t = f(R)$ .

Во всех случаях для нагревания воды требуется одно и то же количество теплоты, определяемое формулой

$$Q' = cm\Delta t,$$

где  $c$ ,  $m$  — удельная теплоемкость и масса воды,  $\Delta t$  — разность температур. В силу постоянства к. п. д. установки  $\eta$  одним и тем же будет также полное количество теплоты, выделенное током, т. е.

$$Q = \frac{Q'}{\eta}.$$

Учитывая также постоянство напряжения на зажимах цепи, из формулы (1) получим

$$R = \frac{U^2}{Q} t = kt, \quad (2)$$

где  $k = U^2/Q$  — постоянная величина. Таким образом, зависимость времени от сопротивления является пропорциональной. Теперь легко найти ответы в обоих случаях.

При последовательном соединении секций общее сопротивление

$$R_{\text{посл}} = R_1 + R_2.$$

Подставив сюда значения  $R$  по формуле (2), получим

$$k t_{\text{посл}} = kt_1 + kt_2,$$

откуда

$$t_{\text{посл}} = t_1 + t_2 = 30 \text{ мин.}$$

При параллельном соединении секций на основании формулы (13.12) имеем

$$R_{\text{пар}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2).$$

Отсюда, применив соотношение (2), найдем

$$t_{\text{пар}} = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 7 \text{ мин.}$$

**13-15.** Две медные проволоки одинаковой длины  $l = 1,00$  м и диаметрами  $d_1 = 0,10$  мм и  $d_2 = 0,20$  мм, подключенные (поочередно) к зажимам гальванического элемента, нагреваются до одинаковой температуры. Определить его внутреннее сопротивление. Считать отдачу теплоты проволокой в окружающее пространство при постоянной температуре пропорциональной площади ее поверхности.

**Решение.** При установившемся тепловом режиме, когда температура проволоки перестанет повышаться, количество теплоты, выделенное током в 1 с, согласно закону сохранения энергии, должно

быть равно количеству теплоты, рассеянному за то же время проволокой в окружающее пространство, т. е. должно выполняться равенство

$$P_{\text{тока}} = P_{\text{расс}} \quad (1)$$

Мощность тока  $P_{\text{тока}} = I^2 R$  выразим через внутреннее сопротивление источника и диаметр проволоки, воспользовавшись законом Ома (13.8) для замкнутой цепи и формулой (13.4) сопротивления проводника:

$$P_{\text{тока}} = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 \rho l}{S} : \left( \frac{\rho l}{S} + r \right)^2 = \frac{4\rho l \pi d^2 \mathcal{E}^2}{(4\rho l + \pi d^2 r)^2} \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию задачи, имеем

$$P_{\text{расс}} = kS' = k\pi dl, \quad (3)$$

где  $S'$  — площадь поверхности проволоки, вычисленная как площадь боковой поверхности цилиндра,  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры проволоки. Подставив в уравнение (1) значения  $P_{\text{тока}}$  и  $P_{\text{расс}}$  по формулам (2), (3) и произведя сокращения, получим

$$\frac{d}{(4\rho l + \pi d^2 r)^2} = \frac{k}{4\rho \mathcal{E}^2} \quad (4)$$

Поскольку при постоянной температуре все величины, стоящие в правой части формулы (4), постоянны, должно выполняться равенство

$$\frac{d_1}{(4\rho l + \pi d_1 r)^2} = \frac{d_2}{(4\rho l + \pi d_2 r)^2}, \quad (5)$$

так как диаметрам проволоки  $d_1$ ,  $d_2$  соответствует по условию одинаковая температура. Чтобы решить уравнение (5) относительно неизвестного  $r$ , извлечем из обеих частей уравнения квадратный корень:

$$\frac{4\rho l + \pi d_1 r}{4\rho l + \pi d_1 r} = \pm \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}.$$

Так как все слагаемые, стоящие в левой части этого уравнения, — заведомо положительные величины, отрицательный знак перед корнем отбрасываем. Решив уравнение относительно  $r$ , найдем

$$r = \frac{4\rho l}{\pi (d_2^2 - d_1^2)} \left( \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} - 1 \right) \quad (6)$$

Взяв из таблиц значение удельного сопротивления меди, выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом · м,  $l = 1,00$  м,  $d_1 = 1,0 \cdot 10^{-4}$  м,  $d_2 = 2,0 \cdot 10^{-4}$  м. Выполнив вычисления, получим

$$r = 0,3 \text{ Ом.}$$



## § 14. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД

### Основные формулы

Плотность тока в металле

$$j = en \langle v \rangle, \quad (14.1)$$

где  $e$  — заряд электрона,  $n$  — концентрация свободных электронов (т. е. число их в единице объема),  $\langle v \rangle$  — средняя скорость направленного движения электронов

Удельная электропроводность собственных полупроводников

$$\sigma = en(u_n + u_p) \quad (14.2)$$

где  $u_n$  и  $u_p$  — подвижности электронов и дырок,  $e$  и  $n$  — то же, что и в (14.1)

Подвижность носителя заряда измеряется средней скоростью, которую он приобретает в электрическом поле с напряженностью равной единице

Зависимость удельной электропроводности собственных полупроводников от температуры:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta W / 2kT}, \quad (14.3)$$

где  $\Delta W$  — ширина запрещенной зоны\*,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\sigma_0$  — постоянная величина, определяемая природой данного полупроводника.

Плотность тока в газе при отсутствии насыщения

$$j = qn(u_+ + u_-)E. \quad (14.4)$$

где  $q$  — абсолютное значение заряда каждого иона,  $n$  — концентрация ионов (т. е. число ионов одного знака в единице объема),  $u_+$ ,  $u_-$  — подвижности положительных и отрицательных ионов  $E$  — напряженность электрического поля в газе

Плотность тока насыщения в газе между плоскими электродами, расстояние между которыми  $l$ , равно

$$j_s = q\Delta n l. \quad (14.5)$$

где  $\Delta n$  — число пар ионов, ежесекундно образуемых ионизатором в единице объема газа.

Число пар ионов, ежесекундно рекомбинирующих в единице объема газа пропорционально квадрату концентрации ионов:

$$\Delta n' = rn^2, \quad (14.6)$$

где  $r$  — коэффициент рекомбинации

Удельная электропроводность электролита

$$\sigma = \alpha n_0 (u_+ + u_-), \quad (14.7)$$

где  $n_0$  — концентрация молекул растворенного вещества,  $\alpha$  — коэффициент диссоциации, равный отношению числа диссоциированных молекул к их общему числу.

### Методические указания

1. Здесь рассмотрены задачи, связанные с электропроводностью металлов, собственных полупроводников, электролитов и газов.

2. Сила постоянного тока на различных участках неразветвленной цепи в любой среде одинакова. Это следствие закона сохранения электрического заряда. В частности, сила тока в электролите равна силе тока в подводящих проводах, несмотря на то что в электролите ток

\* Величину  $\Delta W$  называют также энергией активации.

складывается из двух токов, соответствующих движению отрицательных и положительных ионов. Каждый отрицательный ион, подходя к аноду, отдает ему свой заряд в виде избыточных электронов, которые движутся затем вдоль проводов. Одновременно положительные ионы, отходя от анода, оставляют около него нескомпенсированные отрицательные ионы, которые также отдают аноду свои избыточные электроны. Аналогичные явления происходят около катода. В результате заряд, переносимый за единицу времени через поперечное сечение подводющих проводов электронами, оказывается равным суммарному заряду, переносимому через поперечное сечение электролита положительными и отрицательными ионами.

3. В задачах на ток в газах встречаются два случая: ток в отсутствие насыщения и ток насыщения. В первом случае к газу применим закон Ома [ср. формулы (14.4) и (13.6)]. Во втором случае закон Ома неприменим: при увеличении напряжения на электродах сила тока в газе остается постоянной. Кроме того, при постоянной напряженности  $E$  поля в газоразрядном промежутке плотность тока будет в соответствии с формулой (14.5) изменяться при изменении длины этого промежутка, что противоречит закону Ома в дифференциальной форме (13.6).

### Решение задач

14-1. Определить суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной  $l = 10,0$  км при токе силой  $I = 400$  А.

**Решение** Ток в металле представляет собой направленное движение свободных электронов. Оно характеризуется определенным импульсом (количеством движения). Чтобы найти этот импульс  $K$ , просуммируем импульсы отдельных электронов:

$$K = \sum_{i=1}^N mv_i = m \sum_{i=1}^N v_i = mN \langle v \rangle, \quad (1)$$

где  $m$  — масса электрона,  $N$  — число свободных электронов в проводнике,  $\langle v \rangle$  — средняя скорость их направленного движения.

Скорость  $\langle v \rangle$  выразим через данную в условии силу тока  $I$  по формуле (14.1), учитывая, что плотность тока  $j = I/S$ :

$$\langle v \rangle = I/enS. \quad (2)$$

Подставив это значение  $\langle v \rangle$  в формулу (1) и имея в виду, что отношение  $N/n$  равно объему  $V$  провода, получим

$$K = \frac{mNI}{enS} = \frac{mVI}{eS} = \frac{mIl}{e}.$$

Из справочных таблиц находим значения заряда и массы электрона:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Подставив в формулу значения величин, выраженные в единицах СИ, произведем вычисление:

$$K = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,00 \cdot 10^4 \cdot 400}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

**14-2.** Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление  $\rho = 0,48 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Определить концентрацию дырок, если подвижности электронов  $u_n = 0,36 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и дырок  $u_p = 0,16 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

**Решение.** Так как в собственном полупроводнике концентрация дырок равна концентрации свободных электронов, воспользуемся формулой (14.2). Учитывая, что величины  $\rho$  и  $\sigma$  взаимно обратны, запишем

$$(1/\rho) = en (u_n + u_p),$$

откуда для концентрации дырок получим

$$n = 1/e (u_n + u_p) \rho.$$

Подставив числовые значения величин и вычислив, найдем

$$n = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

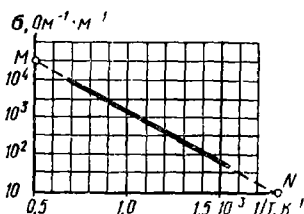


Рис. 14 1

**14-3.** На рис. 14-1 изображена экспериментально полученная зависимость удельной электропроводности кремния от величины, обратной абсолютной температуре  $T$ . Определить ширину запрещенной зоны  $\Delta W$  (в электронвольтах) для кремния.

**Решение.** Как видно из рисунка, величина  $\sigma$  отложена по оси ординат в логарифмической шкале. Следовательно, данный график выражает линейную зависимость между величинами  $\ln \sigma$  и  $1/T$ . Воспользуемся уравнением (14.3). Прологарифмировав его, получим

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta W}{2k} \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Так как величины  $\sigma_0$ ,  $\Delta W$ ,  $k$  — постоянные, то уравнение (1), так же как и график, выразит линейную зависимость между  $\ln \sigma$  и  $1/T$ . Следовательно, угловой коэффициент в (1) должен быть равен тангенсу угла наклона графика функции  $\ln \sigma = f(1/T)$  к оси абсцисс:

$$-\frac{\Delta W}{2k} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда ширина запрещенной зоны равна

$$\Delta W = -2ktg \alpha. \quad (2)$$

Для вычисления  $\operatorname{tg} \alpha$  продолжим график до пересечения с осями (в точках  $M$  и  $N$ ). Так как  $\ln 10 = 2,3$ , то точке  $M$  соответствует

$$\ln \sigma = 4 \cdot (2,3) + 2,3 : 2 = 10,35.$$

По графику находим, что точке  $N$  соответствует значение  $1/T$ , равное  $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ . Тогда получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{OM}{ON} = -\frac{10,35 - 2,3}{(1,8 - 0,5) \cdot 10^{-3}} = -6,2 \cdot 10^3.$$

Подставив в (2) это значение  $\operatorname{tg} \alpha$  и постоянную Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  и учитывая наименование величин, отложенных по осям графика, найдем ответ:

$$\Delta W = 1,7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,1 \text{ эВ}.$$

**14-4.** Определить коэффициент диссоциации водного раствора хлористого калия ( $\text{KCl}$ ) с концентрацией  $c = 0,10 \text{ г/см}^3$ . Удельное сопротивление такого раствора  $\rho = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  при  $18^\circ \text{C}$ , а подвижности ионов  $\text{K}^+$  и  $\text{Cl}^-$  при этой температуре соответственно равны:  
 $u_+ = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ,  $u_- = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

**Решение.** Для определения коэффициента диссоциации электролита воспользуемся формулой (14.7), в которую входит эта величина. При этом учтем, что  $\rho = 1/\sigma$ , где  $\sigma$  — удельная электропроводность, и что ионы  $\text{K}^+$  и  $\text{Cl}^-$  одновалентны, следовательно, заряд каждого из них численно равен заряду электрона  $e$ . Теперь, чтобы из формулы (14.7) можно было найти величину  $\alpha$ , остается определить концентрацию молекул  $n_0$ , выразив ее через данную концентрацию раствора  $c$ . Так как концентрация молекул есть число молекул в единице объема, т. е.

$$n_0 = N/V,$$

а концентрация раствора измеряется массой растворенного вещества в единице объема раствора:

$$c = m/V,$$

то из двух последних равенств имеем

$$n_0 = cN/m. \quad (1)$$

Учтем, что величина  $N$  связана с постоянной Авогадро  $N_A$  и числом молей растворенного вещества  $\nu$  так:

$$N = N_A \nu = N_A (m/\mu).$$

Подставим это значение  $N$  в формулу (1):

$$n_0 = cN_A/\mu. \quad (2)$$

Теперь перепишем (14.5), учитывая соотношение (2), а также соображения, изложенные выше:

$$\frac{1}{\rho} = e\alpha \frac{cN_A}{\mu} (u_+ + u_-).$$

Отсюда найдем коэффициент диссоциации электролита:

$$\alpha = \mu/\rho e c (u_+ + u_-) N_A. \quad (3)$$

Взяв из таблицы значение молярной массы для хлористого калия ( $\mu = 0,074$  кг/моль), подставим в (3) числовые значения входящих в нее величин, выраженные в единицах СИ. Произведя вычисления по (3), получим

$$\alpha = 0,8.$$

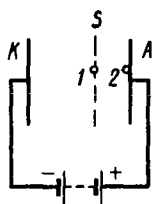


Рис. 14-2

14-5. По цепи, схема которой изображена на рис. 14-2, идет постоянный ток вследствие ионизации рентгеновскими лучами воздуха между пластинами конденсатора. Считая, что в каждой единице объема воздуха ежесекундно возникает одинаковое число пар ионов, определить, какую часть полного тока составляет ток, обусловленный движением отрицательных ионов через сечение  $S$ , отстоящее от анода на расстоянии вдвое меньшем, чем от катода. Рассмотрим два случая, соответствующие току, далекому от насыщения, и току насыщения.

**Решение.** Если пренебречь искажением поля у краев конденсатора, то можно считать площадь  $S$  поперечного сечения газоразрядного промежутка одинаковой по всей его длине. Поэтому между силами токов, связанных с движением положительных и отрицательных ионов, будет то же соотношение, что и между плотностями этих токов.

1. Если ток в газе далек от насыщения, его плотность определяется соотношением (14.4), которое перепишем в виде

$$j = qn_{+} E + qn_{-} E,$$

где  $j_{+} = qn_{+} E$  и  $j_{-} = qn_{-} E$  — плотности токов соответственно положительных и отрицательных ионов. Отсюда находим искомое отношение токов:

$$\frac{I_{-}}{I} = \frac{j_{-}}{j} = \frac{qn_{-} E}{qn(u_{+} + u_{-}) E} = \frac{u_{-}}{u_{+} + u_{-}}.$$

Взяв из справочных таблиц значения подвижностей положительных и отрицательных ионов, произведем вычисление:

$$\frac{I_{-}}{I} = \frac{1,9}{1,4 + 1,9} = 0,6$$

Заметим, что в данном случае полученный результат не зависит от того, где находится сечение  $S$ .

2. Как видно из соотношения (14.5), плотность тока насыщения в газе пропорциональна длине  $l$  газоразрядного промежутка. Это связано с возрастанием плотности тока отрицательных ионов на пути от катода  $K$  к аноду  $A$  и с увеличением плотности тока положительных ионов на пути от анода к катоду. При этом плотность каждого тока возрастает

пропорционально расстоянию рассматриваемой точки от начального электрода (рис. 14-3). Следовательно, между плотностями тока отрицательных ионов  $j_{-}^{(1)}$ ,  $j_{-}^{(2)}$  в точках 1 и 2 (см. рис. 14-2), расстояния от которых до катода по условию относятся как 2 : 3, должно быть соотношение

$$j_{-}^{(1)} : j_{-}^{(2)} = 2 : 3 \quad (1)$$

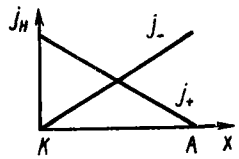


Рис. 14-3

Но, поскольку вблизи анода (в точке 2) плотность тока положительных ионов  $j_{+}^{(2)}$  равна нулю, здесь выполняется равенство

$$j = j_{+}^{(2)} + j_{-}^{(2)} = j_{-}^{(2)}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем ответ:

$$\frac{j_{-}^{(1)}}{l} = \frac{j_{-}^{(1)}}{l} = \frac{j_{-}^{(1)}}{j_{-}^{(2)}} = \frac{2}{3}.$$

14-6. В условии предыдущей задачи получен ток насыщения плотностью  $j_n = 2,5$  мкА при расстоянии между пластинами  $l = 0,50$  м. Определить концентрацию ионов, которая установится в воздухе, если конденсатор отсоединить от источника. Коэффициент рекомбинации для воздуха  $r = 1,6 \cdot 10^{-12}$  м<sup>3</sup> · с<sup>-1</sup>. Возникающие ионы считать одновалентными.

**Решение.** Если отключить источник, ток между пластинами конденсатора прекратится. Теперь ионы, создаваемые ионизатором, не будут нейтрализовываться на электродах, а будут рекомбинироваться по всему объему газа. Следовательно, должно установиться равновесие между числом пар ионов  $\Delta n$ , ежесекундно образуемых ионизатором в единице объема газа, и числом пар ионов  $\Delta n'$ , ежесекундно рекомбинирующих в единице объема газа:

$$\Delta n' = \Delta n. \quad (1)$$

Независимо от того, есть ли ток в газоразрядном промежутке, концентрация  $n$  ионов всегда связана с числом  $\Delta n$  и коэффициентом рекомбинации  $r$  формулой (14.6). Отсюда с учетом соотношения (1) имеем

$$n = \sqrt{\Delta n' / r} = \sqrt{\Delta n / r}. \quad (2)$$

Теперь остается найти величину  $\Delta n$ . Поскольку эта величина определяется лишь действием ионизатора, она не изменится после исчезновения тока. Поэтому с помощью формулы (14.5) для плотности тока насыщения находим

$$\Delta n = \frac{I_n}{ql} = \frac{I_n}{e'l},$$

где  $e$  — заряд одновалентного иона, численно равный заряду электрона. Подставив это значение  $\Delta n$  в формулу (2), получим ответ:

$$n = \sqrt{I_n / e'l r} = 1,4 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

## Глава 5

### ЭЛЕКТРОМАГНИТИЗМ

#### § 15. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

##### Основные формулы

Сила, действующая на элемент длины проводника с током  $I$ , помещенного в магнитное поле, (сила Ампера)

$$dF = I |d\mathbf{l}\mathbf{B}|. \quad (15.1)$$

где  $d\mathbf{l}$  — вектор элемента длины проводника, проведенный в направлении тока,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции

Сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле, (сила Лоренца)

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (15.2)$$

где  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция поля

Закон Био — Савара: вектор индукции магнитного поля, созданного элементом проводника  $d\mathbf{l}$ , по которому идет ток  $I$ , равен

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} |d\mathbf{l}\mathbf{r}|, \quad (15.3)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента  $d\mathbf{l}$  до той точки в которой определяется индукция поля;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м — магнитная постоянная. В скалярной форме

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}})}{r^2}. \quad (15.4)$$

Магнитная индукция в произвольной точке  $A$  (рис. 15-1) поля, созданного прямолинейным проводником с током  $I$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad (15.5)$$

где  $a$  — расстояние от точки  $A$  до проводника;  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы, образованные радиусом-вектором, проведенным в точку  $A$  соответственно из начала и конца проводника, с направлением тока.

Магнитная индукция в центре дуги окружности длиной  $L$ , обтекаемой током  $I$ ,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IL}{R^2}, \quad (15.6)$$

где  $R$  — радиус окружности.

Циркуляция вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  вдоль замкнутого контура  $L$  равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром, умноженной на  $\mu_0$ :

$$\oint_L (\mathbf{B}d\mathbf{l}) = \oint_L B dl \cos(\mathbf{B}, d\mathbf{l}) = \mu_0 \Sigma I. \quad (15.7)$$

Магнитная индукция на оси длинного соленоида с током  $I$  в точках, близких к его середине,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 nI, \quad (15.8)$$

где  $n = N/l$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида

Магнитный момент замкнутого плоского контура, обтекаемого током  $I$ ,

$$p_M = IS, \quad (15.9)$$

где  $S$  — вектор, численно равный площади, ограниченной контуром; направление этого вектора совпадает с положительным направлением нормали к плоскости контура и связано с направлением тока в контуре правилом правого винта.

Механический момент, действующий на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ ,

$$M = [p_M B]. \quad (15.10)$$

Поток вектора магнитной индукции  $B$  (магнитный поток) сквозь поверхность  $S$  определяется интегралом

$$\Phi = \int_S B_n dS, \quad (15.11)$$

где  $B_n$  — проекция вектора  $B$  на направление нормали к элементу площади  $dS$ .

Работа сил магнитного поля по перемещению замкнутого контура с постоянным током  $I$  равна

$$A = I\Delta\Phi, \quad (15.12)$$

где  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  — изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

### Методические указания

1. Основной характеристикой магнитного поля служит вектор магнитной индукции  $B$ . Его модуль и направление устанавливаются формулами (15.1) или (15.2), выражающими силу Ампера или силу Лоренца соответственно.

Задачи по электромагнетизму на расчет магнитной индукции  $B$  при заданном распределении токов, создающих магнитное поле, решают с помощью закона Био — Савара (15.3), (15.4) и принципа суперпозиции магнитных полей. В силу этого принципа магнитная индукция  $B$  в любой точке магнитного поля проводника с током равна векторной сумме магнитных индукций  $dB$ , созданных в этой точке всеми элементами  $dl$  проводника с током, т. е.

$$B = \int_l dB, \quad (1)$$

где интегрирование проводится по всей длине проводника\*.

Из принципа суперпозиции полей следует также, что если магнитное поле создано несколькими проводниками с током, то вектор  $B$

\* Этот метод применяется лишь в тех случаях, когда для расчета поля нельзя воспользоваться формулами (15.5), (15.6), (15.8) и другими, выведенными с помощью закона Био — Савара или соотношения (15.7).



в какой-либо точке этого поля равен векторной сумме магнитных индукций, созданных в этой точке каждым током в отдельности, т. е.

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i, \quad (2)$$

где  $n$  — число проводников с токами.

Чтобы, применяя соотношения (1) и (2), получить правильный результат, необходимо знать направления складываемых векторов  $d\mathbf{V}$  или  $\mathbf{V}_i$ . Как это следует из закона Био — Савара (15.3), вектор  $d\mathbf{V}$  всегда нормален к плоскости, содержащей векторы  $d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}$ . Поэтому в тех случаях, когда проводник с током и точка, в которой находят вектор  $\mathbf{V}$ , лежат в одной плоскости, все элементарные векторы  $d\mathbf{V}$  направлены вдоль одной прямой. Тогда геометрическое сложение заменяется алгебраическим. В остальных случаях складываемые векторы  $d\mathbf{V}$  не лежат на одной прямой. Тогда для вычисления интеграла (1) поступают таким же образом, как и в аналогичных задачах электростатики при вычислении вектора  $\mathbf{E}$  (смотрите стр. 104). В частности, если магнитное поле обладает осевой симметрией и точка, в которой отыскивают магнитную индукцию, лежит на этой оси, то искомым вектор  $\mathbf{V}$  направлен вдоль этой оси. Его величина определяется интегралом, взятым по всей длине  $l$  проводника:

$$V = \int_l dB_x,$$

где  $dB_x$  — составляющая вектора  $d\mathbf{V}$  вдоль оси симметрии поля.

2. Расчеты *симметричных* магнитных полей значительно упрощаются благодаря применению теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции [см. формулу (15.7)]. При этом важно, чтобы через точку, в которой требуется определить вектор  $\mathbf{V}$ , можно было провести такой замкнутый контур  $L$ , совпадающий с линией индукции поля, для всех точек которого выполнялось бы соотношение  $V = \text{const}$ . В этом случае для всех элементов контура  $\cos(\mathbf{V}, \hat{dl}) = 1$  и уравнение (15.7) приобретает простой вид:

$$BL = \mu_0 \Sigma I.$$

3. Вектор напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля является вспомогательной величиной, которую вводят для описания поля в *магнитных средах* (см. § 17). Если все же в задаче требуется вычислить напряженность магнитного поля в *вакууме*, то, найдя одним из описанных выше методов магнитную индукцию  $\mathbf{V}$ , легко определить и напряженность поля  $\mathbf{H}$ , используя соотношение

$$\mathbf{H} = \mathbf{V}/\mu_0,$$

вытекающее из формулы (17.2) или (17.3).

4. Если требуется определить силу, с которой заданное магнитное поле действует на проводник с током, то сначала по формуле (15.1) находят силу  $d\mathbf{F}$ , действующую на произвольный элемент  $dl$  длины про-

водника (силу Ампера), а затем интегрируют полученное выражение по всей длине проводника, учитывая направление складываемых векторов  $d\mathbf{F}$ .

Когда в задаче рассматривается *замкнутый контур*, находящийся в магнитном поле, то различают два случая:

1) магнитное поле однородно. Тогда на контур с током действует вращающий момент, определяемый формулой (15.9). Под влиянием этого момента контур поворачивается так, что угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{p}_m$ ,  $\mathbf{B}$  уменьшается. При  $\alpha = 0$  наступает состояние устойчивого равновесия контура в магнитном поле;

2) магнитное поле неоднородно. В этом случае на контур с током кроме вращающего момента действует сила, определяемая формулой, приводимой, например, в учебниках [3], [6]:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos(\widehat{\mathbf{p}_m, \mathbf{B}})$$

(здесь  $x$  — направление быстреешего изменения величины  $B$ ). Следует иметь в виду, что эта формула справедлива только при следующих условиях: а) магнитное поле таково, что направления оси  $x$  и вектора  $\mathbf{B}$  совпадают (таково, например, поле соленоида в точках, лежащих на его оси вблизи концов соленоида); б) контур с током достаточно мал для того, чтобы во всех точках ограниченной им плоскости можно было считать величину  $B$  приблизительно одинаковой.

Общий метод нахождения силы, действующей на контур с током в неоднородном магнитном поле, основанный на законе сохранения энергии, применен в задаче № 15-5.

### Решение задач

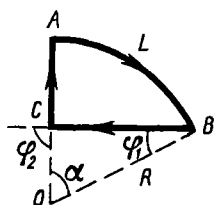


Рис. 15-2

15-1. По контуру, изображенному на рис. 15-2, идет ток силой  $I = 10,0$  А. Определить магнитную индукцию в точке  $O$ , если радиус дуги  $R = 10,0$  см,  $\alpha = 60^\circ$ .

**Решение.** В силу принципа суперпозиции полей магнитная индукция  $\mathbf{B}$  в точке  $O$  равна векторной сумме магнитных индукций, созданных всеми элементами контура с током. Разобьем весь контур на три участка — дугу  $AB$  и прямолинейные отрезки  $BC$ ,  $CA$ , чтобы для вычисления их магнитных полей можно было воспользоваться формулами (15.5) и (15.6). Тогда получим

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{AB} + \mathbf{B}_{BC} + \mathbf{B}_{CA}. \quad (1)$$

Сначала вычислим модули всех трех слагаемых. Поскольку угол  $\alpha = 60^\circ$ , дуга  $AB$  составляет  $1/6$  часть окружности, т. е.  $L = 2\pi R/6 = \pi R/3$ . Подставив это значение  $L$  в (15.6), найдем

$$B_{AB} = \frac{\mu_0}{12} \frac{I}{R}. \quad (2)$$

Далее по формуле (15.5) определим величину  $B_{BC}$ . Из рис. 15-2 видно, что углы, входящие в эту формулу, равны:  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Расстояние от точки  $O$  до провода  $BC$  равно  $a = OC = R \sin \varphi_1 = R/2$ . Подставив значения  $a$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  в формулу (15.5), имеем

$$B_{BC} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R}. \quad (3)$$

Попробуем применить выражение (15.5) для вычисления магнитной индукции, созданной проводником  $CA$  в точке  $O$ . Поскольку точка  $O$  лежит на продолжении проводника  $CA$ , каждый из углов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  равен  $\pi$ . Следовательно, числитель формулы (15.5) равен нулю. Нулю равен и знаменатель этой формулы, так как расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Таким образом, выражение (15.5) оказывается непригодным для расчета величины  $B_{CA}$ .

Обратимся непосредственно к уравнению (15.4), выражающему в скалярной форме закон Био — Савара, с помощью которого выведена формула (15.5). Для любого элемента  $dl$  проводника  $CA$  угол, образованный этим элементом (взятым по направлению тока) и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным от элемента в точку  $O$ , равен  $\pi$ . Следовательно,  $\sin(\widehat{dl, \mathbf{r}}) = 0$ . Однако при этом знаменатель формулы (15.4) отличен от нуля. Таким образом,  $dB = 0$  для любого элемента проводника  $CA$ . Отсюда ясно, что и весь проводник  $CA$  не создает в точке  $O$  магнитного поля. Тогда соотношение (1) упростится:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{AB} + \mathbf{B}_{BC}. \quad (4)$$

Поскольку точка  $O$  и контур  $ABC$  лежат в одной плоскости, оба вектора  $\mathbf{B}_{AB}$ ,  $\mathbf{B}_{BC}$ , будучи перпендикулярными этой плоскости [это следует из формулы (15.3)], оказываются расположенными вдоль одной прямой — нормали к плоскости чертежа, проходящей через точку  $O$ . При этом, согласно правилу правого винта, вектор  $\mathbf{B}_{AB}$  направлен от наблюдателя, вектор  $\mathbf{B}_{BC}$  — к наблюдателю. Приняв одно из этих направлений (например, второе) за положительное, можно вместо (4) написать скалярное равенство

$$B = B_{BC} - B_{AB},$$

или с учетом (2) и (3)

$$B = \left( \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right) \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Подставив в эту формулу величины, выраженные в единицах СИ:  $I = 10,0 \text{ А}$ ,  $R = 0,100 \text{ м}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$ , и произведя вычисления, получим

$$B = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ Т} = 6,9 \text{ мкТ.}$$

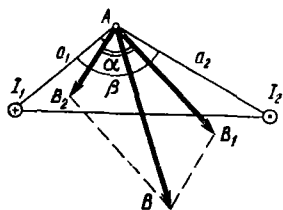


Рис 15 3

15-2. По двум длинным параллельным проводам текут в противоположных направлениях токи силой  $I_1 = I_2 = I = 10,0 \text{ А}$ . Расстояние между проводами  $a = 0,30 \text{ м}$ . Определить магнитную индукцию в точке  $A$ , удаленной от первого и второго проводов соответственно на расстояния  $a_1 = 0,15 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0,20 \text{ м}$ .

**Решение.** Согласно принципу суперпозиции полей магнитная индукция в точке  $A$  равна векторной сумме магнитных индукций, созданных каждым током в отдельности:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Однако здесь в отличие от предыдущей задачи точка  $A$ , в которой надо определить поле, и оба параллельных провода не лежат в одной плоскости (в противном случае имело бы место одно из двух равенств  $a = a_1 + a_2$ ;  $a = |a_1 - a_2|$ ). Поэтому векторы  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  не коллинеарны. Пусть они образуют угол  $\alpha$ . Тогда модуль вектора  $\mathbf{B}$  на основании теоремы косинусов равен

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

Величины  $B_1$ ,  $B_2$  можно найти по формуле (15.5). Так как в условии задачи речь идет о *длинных* проводниках, то ясно, что точка  $A$  удалена от концов каждого провода на значительно большее расстояние, чем от самого провода. Из рис. 15-1 видно, что в этом случае в формуле (15,5) следует положить:  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = \pi$ . Тогда получим

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}. \quad (2)$$

Чтобы определить  $\cos \alpha$ , входящий в формулу (1), учтем, что каждый из векторов  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  лежит в плоскости, перпендикулярной соответствующему проводнику с током. Поэтому на рис. 15-3, выполненном в плоскости, содержащей векторы  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ , оба проводника проектируются в точки. В соответствии с принятым обозначением ток  $I_1$  показан направленным от наблюдателя, ток  $I_2$  — к наблюдателю. Векторы  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  изображены на рисунке так, что их направление связано с направлением соответствующих токов правилом правого винта.

Пусть угол между отрезками  $a_1$ ,  $a_2$  равен  $\beta$ . Поскольку каждый из векторов  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  перпендикулярен соответствующему отрезку, должно выполняться равенство

$$\alpha + \beta = \pi. \quad (3)$$

По теореме косинусов имеем

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos \beta. \quad (4)$$

Из соотношений (3), (4) следует

$$\cos \alpha = -\cos \beta = \frac{a^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}. \quad (5)$$

Подставив в (1) значения  $B_1$ ,  $B_2$ , определяемые по формуле (2), а также  $\cos \alpha$  из (5), найдем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{2}{a_1 a_2} \left( \frac{a^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \right)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ia}{a_1 a_2}.$$

Подставив числовые значения величин (все они даны в СИ) и произведя вычисление, получим ответ:

$$B = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 20 \text{ мкТ}.$$

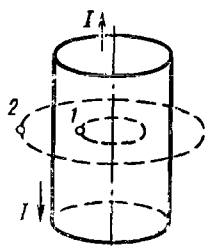


Рис 15 4

15-3. Коаксиальный кабель представляет собой длинную металлическую тонкостенную трубку радиуса  $R = 10$  мм, вдоль которой расположен тонкий провод. Силы токов в трубке и проводе равны, направления противоположны. Определить магнитную индукцию в точках 1 и 2 (рис. 15-4), удаленных соответственно на расстояния  $r_1 = 8,0$  мм и  $r_2 = 15$  мм от оси кабеля, если сила тока  $I = 0,50$  А.

**Решение.** Магнитная индукция в каждой из точек 1 и 2 равна векторной сумме магнитных индукций, созданных двумя токами: трубки и осевого провода. Индукция тока осевого провода выражается формулой (15.5) или, точнее, формулой (2) задачи № 15-2 для *длинного* прямолинейного проводника с током. Разбив трубку на тонкие полоски, параллельные осевому проводу, можно представить ток трубки как совокупность параллельных токов, идущих по этим полоскам. Поле каждого такого тока определяется формулой (15.5). Таким образом, задачу можно решить суммированием (интегрированием) магнитных индукций  $d\mathbf{B}$  элементарных прямолинейных проводников с током. Однако этот метод неудобен, так как хотя магнитное поле тока, текущего по коаксиальному кабелю, является осесимметричным (его ось симметрии совпадает с осью кабеля), точки 1 и 2 не лежат на этой оси. Поэтому при суммировании векторов  $d\mathbf{B}$ , имеющих различное направление, нельзя воспользоваться соображениями симметрии.

Симметрия магнитного поля тока коаксиального кабеля позволяет решить задачу, применив теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля. Действительно, из соображений симметрии следует, что линии индукции магнитного поля тока кабеля, являясь замкнутыми, должны иметь форму окружностей, центры которых лежат на оси кабеля и плоскости которых перпендикулярны этой оси. При этом из

тех же соображений симметрии вытекает, что во всех точках одной и той же линии индукции величина  $B$  одинакова. В этом случае целесообразно применить формулу (15.7) (см. п. 2 методических указаний).

В качестве контура интегрирования рассмотрим линию индукции, проходящую через точку  $I$ . Учитывая, что для всех элементов этой линии  $\cos(\mathbf{B}_1, \hat{dl}) = 1$ , запишем

$$\oint B_1 dl \cos(\mathbf{B}_1, \hat{dl}) = B_1 \oint dl = 2\pi r_1 B_1 = \mu_0 I,$$

откуда

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_1}.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м,  $I = 0,50$  А,  $r_1 = 5,0 \cdot 10^{-3}$  м. Выполнив вычисление, найдем

$$B_1 = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 20 \text{ мкТ}.$$

Аналогично определим величину  $B_2$ . Для этого в качестве контура интегрирования возьмем линию индукции, проходящую через точку 2. Поскольку контур интегрирования охватывает два тока, равных по модулю и противоположно направленных, то

$$\oint B_2 dl \cos(\mathbf{B}_2, \hat{dl}) = B_2 \oint dl = 2\pi r_2 B_2 = \mu_0 (I - I) = 0,$$

откуда

$$B_2 = 0.$$

**З а м е ч а н и е.** Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы: 1. Магнитное поле тока, идущего по коаксиальному кабелю, сосредоточено целиком внутри кабеля. 2. Это поле таково, как если бы его создавал один ток, идущий по осевому проводу [такое заключение можно сделать, сравнив ответ для  $B_1$  с формулой (2) задачи № 15-2]. Следовательно, ток, идущий по трубке кабеля (тонкостенному длинному цилиндру), не создает внутри нее магнитного поля. 3. Отсутствие результирующего поля вне кабеля свидетельствует о численном равенстве (и противоположном направлении) магнитных индукций токов трубки и осевого провода. Другими словами, магнитное поле тока, идущего по длинному цилиндру, для точек, лежащих вне цилиндра, можно рассчитывать, заменив цилиндр линейным проводником, расположенным вдоль оси цилиндра.

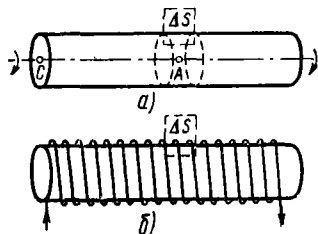


Рис. 15-5

**15-4.** Длинный цилиндр из диэлектрика, по поверхности которого равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью  $\tau = 10,0$  мкКл/м, вращается вокруг своей оси, совершая  $n_0 = 1,00 \times 10^2$  об/с. Определить индукцию магнитного поля в двух точках: в середине оси цилиндра и в центре одного из его оснований.

**Р е ш е н и е.** Прежде всего заметим, что круговое движение электрических зарядов при вращении данного цилиндра соответствует току, проходящему по виткам соленоида, имеющего такие же размеры, что и цилиндр. Следовательно, магнитное поле данного вращающегося цилиндра эквивалентно магнитному полю длинного соленоида с током. Поэтому индукцию магнитного поля в середине цилиндра вычислим по формуле (15.8).

Чтобы выразить произведение  $nI$  через заданные в условии величины  $n_0$ ,  $\tau$ , рассмотрим прямоугольную площадку  $\Delta S$ , сторона которой, параллельная оси цилиндра, имеет единичную длину (рис. 15-5, а). За каждый оборот цилиндра через эту площадку проходит весь заряд, расположенный на поверхности цилиндра единичной длины, т. е. заряд, численно равный величине  $\tau$ . Следовательно, через площадку  $\Delta S$  за промежуток времени  $\Delta t$  пройдет заряд, численно равный

$$q' = n_0 \tau \Delta t. \quad (1)$$

В случае соленоида через такую же площадку  $\Delta S'$  (рис. 15-5, б) за промежуток времени  $\Delta t$  пройдет заряд, численно равный

$$q'' = nI \Delta t. \quad (2)$$

Магнитные поля токов соленоида и вращающегося цилиндра эквивалентны при условии  $q'' = q'$ . Приравнивая правые части формул (1), (2), получаем

$$nI = n_0 \tau.$$

Подставив это значение  $nI$  в формулу (15.8), найдем индукцию магнитного поля в середине вращающегося цилиндра:

$$B_A = \mu_0 n_0 \tau. \quad (3)$$

Чтобы определить магнитную индукцию в центре одного из оснований цилиндра, учтем, что в задаче идет речь о *длинном* цилиндре, длина которого значительно превышает его диаметр. Если мысленно разделить цилиндр пополам плоскостью, перпендикулярной оси вращения, и удалить одну половину, например правую, то индукция в точке  $A$  уменьшится вдвое и станет равной

$$B'_A = \mu_0 n_0 \tau / 2.$$

Это вытекает из принципа суперпозиции полей, в силу которого каждая половина вращающегося цилиндра вносит одинаковый вклад в магнитное поле в точке  $A$ . В то же время индукция  $B_C$  в точке  $C$  (рис. 15-5, а) не изменится при удалении правой половины цилиндра, так как при большой длине левой половины цилиндра вклад, вносимый в магнитное поле в точке  $C$  правой половиной, был пренебрежимо мал. Но из соображений симметрии следует, что магнитные поля у концов оставшейся половины должны быть одинаковыми. Таким образом, получаем

$$B_C = B'_A = \mu_0 n_0 \tau / 2. \quad (4)$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, в формулы (3) и (4), произведем вычисление:

$$B_A = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1,00 \cdot 10^{-5} \text{ Т} = 12,6 \cdot 10^{-10} \text{ Т},$$

$$B_C = (4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 1,00 \cdot 10^{-5}/2) \text{ Т} = 6,3 \cdot 10^{-10} \text{ Т}.$$

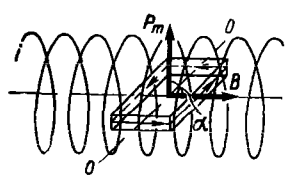


Рис 15 6

15-5. В центре длинного соленоида, имеющего  $n = 5000$  витков на метр, помещена рамка, состоящая из  $N = 50$  витков провода площадью  $S = 4,0 \text{ см}^2$  каждый. Рамка может вращаться вокруг оси  $OO'$ , перпендикулярной оси соленоида, и удерживается в равновесии спиральной пружиной так, что при этом ее плоскость параллельна оси соленоида (рис 15-6). При пропускании тока по рамке и соленоиду, соединенных последовательно, рамка повернулась на угол  $\varphi = 60^\circ$ . Определить силу тока, если жесткость пружины  $k = 6,00 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м/рад}$ . (Жесткость спиральной пружины измеряется вращающим моментом, необходимым для закручивания пружины на угол  $\alpha = 1 \text{ рад}$ )

**Решение.** При появлении тока рамка оказывается в однородном магнитном поле соленоида. На нее будет действовать вращающий момент  $M$ , под действием которого рамка повернется, закручивая пружину. Рамка установится в таком положении, когда момент магнитных сил  $M$  уравновесится моментом упругих сил  $M_{\text{упр}}$  пружины, т. е.

$$M = M_{\text{упр}}. \tag{1}$$

Момент  $M$  найдем по формуле (15.10), которую запишем в скалярной форме:

$$M = p_m B \sin(\widehat{p_m, B}), \tag{2}$$

где  $p_m, B$  выражаются формулами (15.9), (15.8). Учитывая, что в (15.9) дан магнитный момент *одного* витка, на основании соотношения (2) получим

$$M = NIS\mu_0 nI \sin(\widehat{p_m, B}) = \mu_0 nNI^2 S \sin \alpha, \tag{3}$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $p_m, B$ . Заметим, что вначале, когда тока нет,  $\alpha = \pi/2$ .

При устойчивом равновесии свободной рамки вектор  $p_m$  всегда параллелен вектору  $B$  и при этом  $\alpha = 0$ . Поэтому под действием момента магнитных сил  $M$  рамка поворачивается так, что угол  $\alpha$  уменьшается. Пусть рамка повернулась на угол  $\varphi$ . Возникающий при этом момент упругих сил  $M_{\text{упр}}$  пружины согласно закону Гука равен

$$M_{\text{упр}} = k\varphi, \tag{4}$$



где  $k$  — жесткость пружины. Приравняв на основании (1) правые части формул (3), (4) и учитывая, что  $\alpha = \pi/2 - \varphi$ , получим

$$\mu_0 n N I^2 S \cos \varphi = k \varphi,$$

откуда

$$I = \sqrt{k \varphi / \mu_0 n N S \cos \varphi}.$$

Выразив все величины в единицах СИ, произведем вычисление:

$$I = \sqrt{\frac{6,00 \cdot 10^{-6} \cdot \pi / 3}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 4,0 \cdot 10^{-4} \cdot 0,50}} \text{ А} = 1,0 \text{ А}.$$

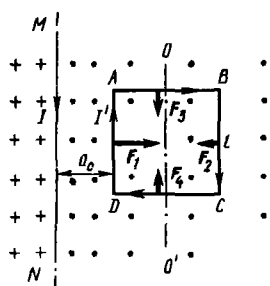


Рис 15-7

15-6. Рядом с длинным прямым проводом  $MN$ , по которому идет ток силой  $I$ , расположена квадратная рамка со стороной  $l$ , обтекаемая током силой  $I'$ . Рамка лежит в одной плоскости с проводом  $MN$  так, что ее сторона, ближайшая к проводу, находится от него на расстоянии  $a_0$  (рис. 15-7). Определить магнитную силу, действующую на рамку, а также работу этой силы при удалении рамки из магнитного поля. Считать, что при движении рамки токи  $I, I'$  поддерживаются постоянными,

**Решение.** Здесь в отличие от предыдущей задачи рамка с током находится в *неоднородном* магнитном поле, так как магнитная индукция  $\mathbf{B}$  убывает при удалении от провода  $MN$ . В этом случае на контур кроме вращающего момента действует сила. Перемещая контур, эта сила совершает работу.

Возможны два способа решения задачи, отличающиеся последовательностью нахождения неизвестных величин — силы и работы. Рассмотрим оба способа.

1. На каждый элемент длины контура  $ABCD$ , расположенного в магнитном поле тока  $I$ , действует сила Ампера, выражаемая формулой (15.1). Направление этой силы зависит, в частности, от направления вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в том месте, где находится этот элемент. Направления линий индукции, определяемые правилом правого винта, изображены на рисунке крестиками (от наблюдателя) и точками (к наблюдателю). Применяв правило левой руки, найдем направления сил, действующих на все стороны рамки. Так как стороны  $AB, DC$  расположены одинаково относительно провода  $MN$ , действующие на них силы  $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$  должны быть численно равны. Будучи противоположно направленными, они уравниваются. Следовательно, равнодействующая всех сил, приложенных к рамке, равна

$$F = F_1 - F_2 \quad (1)$$

и направлена в сторону от провода.

Вычислим силы  $F_1$ ,  $F_2$ , действующие на стороны рамки  $AD$ ,  $BC$ . Для этого перепишем формулу (15,1) для силы Ампера в скалярной форме:

$$dF_A = I' dl B \sin(\widehat{dl}, \mathbf{B}). \quad (2)$$

Учтем, что для всех элементов  $dl$  одной и той же стороны рамки  $\sin(\widehat{dl}, \mathbf{B}) = 1$  и величина  $B$  одинакова. Поэтому силу, действующую на каждую из сторон  $AD$ ,  $BC$ , на основании (2) выразим так:

$$F_A = \int_0^l I' B dl = I' B \int_0^l dl = I' Bl. \quad (3)$$

Магнитная индукция длинного прямого провода с током дается формулой (15.5), если в ней положить  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}. \quad (4)$$

Подставив это значение  $B$  в (3), найдем

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II' l}{a}. \quad (5)$$

Выразив в соотношении (1) каждую из сил  $F_1$ ,  $F_2$  по формуле (5), определим результирующую силу:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} II' l \left( \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0 + l} \right). \quad (6)$$

При удалении рамки от провода за пределы магнитного поля тока  $I$  силы  $F_1$ ,  $F_2$ , которые теперь будем рассматривать как переменные величины, совершат работу: сила  $F_1$  — положительную работу  $A_1$ , сила  $F_2$  — отрицательную работу  $A_2$ . Считая каждую из величин  $A_1$ ,  $A_2$  работой переменной силы, найдем полную работу, совершенную при этом магнитными силами:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{a_0}^{\infty} F_1 da - \int_{a_0 + l}^{\infty} F_2 da. \quad (7)$$

Чтобы вычислить каждый из этих интегралов, надо знать, как зависит сила от расстояния до провода  $MN$ . Формула (5) дает эту зависимость, однако она верна лишь для *длинного* провода. При значительном удалении от провода условия  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi$  перестают выполняться и формула (5) оказывается неверной. Однако найти разность интегралов, стоящую в формуле (7), можно. Для этого воспользуемся тем, что сила  $F_1$ , переместив проводник  $AD$  на расстояние  $l$ , в дальнейшем совершит точно такую же по абсолютному значению работу, что и сила  $F_2$ , перемещающая проводник  $BC$ , так как проводник  $AD$ , пройдя путь  $l$ , затем в точности повторит движение проводника  $BC$ . Имея противоположные знаки, эти два значения работы дают в сумме нуль.

Следовательно, искомая работа  $A$  равна работе силы  $F_1$  при перемещении проводника  $AD$  из его начального положения на расстояние  $l$ . Поэтому, учитывая формулу (5), получим

$$A = \int_{a_0}^{a_0+l} F_1 da = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \int_{a_0}^{a_0+l} \frac{da}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \ln \frac{a_0+l}{a_0}.$$

2. Для вычисления работы по удалению рамки  $ABCD$  из магнитного поля воспользуемся формулой (15.12), выражающей работу магнитных сил через изменение магнитного потока  $\Phi - \Phi_0$  сквозь замкнутый контур, где  $\Phi_0$  — магнитный поток сквозь рамку в ее начальном положении. Очевидно, магнитный поток  $\Phi$  сквозь рамку, находящуюся вне магнитного поля, равен нулю. Таким образом, работа сил магнитного поля

$$A = (\Phi - \Phi_0) I' = -\Phi_0 I', \quad (8)$$

Найдем поток  $\Phi_0$  по формуле (15.11). Так как положительное направление нормали к контуру с током связано с направлением тока правилом правого винта, то нормаль к контуру  $ABCD$  направлена от наблюдателя. Следовательно, для всех элементов  $dS$  поверхности, ограниченной контуром, вектор  $\mathbf{B}$  составляет с нормалью угол  $\pi$ , поэтому  $B_n = -B$ , поток  $\Phi_0$ , определяемый формулой (15.11), является отрицательным, а работа  $A$ , выражаемая формулой (8), — положительной.

Чтобы вычислить величину  $\Phi_0$ , разобьем поверхность, ограниченную контуром  $ABCD$ , на элементарные полоски, параллельные проводу  $MN$ , длиной  $l$  и шириной  $da$ . Магнитный поток сквозь такую полоску, расположенную от провода  $MN$  на расстоянии  $a$ , равен с учетом формулы (4)

$$d\Phi = B_n dS = -B l da = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \frac{da}{a}.$$

Тогда поток сквозь весь контур  $ABCD$

$$\Phi_0 = \int_S B_n dS = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \int_{a_0}^{a_0+l} \frac{da}{a} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \frac{a_0+l}{a_0}. \quad (9)$$

Подставив это значение  $\Phi_0$  в формулу (8), получим

$$A = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \ln \frac{a_0+l}{a_0}.$$

Для отыскания силы, действующей на рамку, предположим, что рамка под влиянием этой силы переместилась из своего начального положения, причем ее расстояние от провода возросло на малую величину  $\Delta a$ . При этом сила  $F$  совершит работу

$$\Delta A = F \Delta a,$$

С другой стороны, согласно формуле (15.12) эту работу можно выразить через изменение магнитного потока  $\Delta\Phi$  сквозь рамку при ее перемещении на  $\Delta a$ :

$$\Delta A = I' \Delta\Phi.$$

Из двух последних равенств, переходя к пределу, получаем

$$F = I' \frac{d\Phi}{da}. \quad (10)$$

Чтобы выполнить дифференцирование, выразим  $\Phi$  как функцию переменной величины  $a$  — расстояние от провода  $MN$  до стороны рамки  $AD$ . Для этого запишем формулу (9) в виде

$$\Phi = -\frac{\mu_0}{2\pi} I l \ln \frac{a+l}{a}.$$

Подставим это значение  $\Phi$  в (10) и произведем дифференцирование:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} I I' l \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right).$$

При  $a = a_0$  этот результат совпадает с формулой (6).

**З а м е ч а н и я:** 1. В данной задаче оба рассмотренных метода оказались одинаково целесообразными, однако второй метод более универсален. Действительно, вычисление работы первым способом было основано на предположении, что рамка с током, удаляясь от провода  $MN$ , двигалась поступательно, оставаясь все время в одной и той же плоскости, а вычисление работы вторым способом остается верным для любого движения рамки. Как это следует из формулы (15.12), важны лишь начальное и конечное положения контура. Кроме того, второй метод более удобен, поскольку он позволяет не рассматривать силы, действующие на отдельные элементы контура. Как видно из формулы (10), достаточно вычислить производную от магнитного потока по перемещению контура в каком-либо направлении, чтобы узнать силу, действующую в этом направлении на контур.

2. При удалении рамки от провода  $MN$  магнитный поток сквозь нее возрастал, поскольку начальный поток  $\Phi_0 < 0$ , и, согласно (15.12), силы поля, перемещая рамку, совершали положительную работу. Однако магнитные силы выталкивают рамку с током из поля провода  $MN$  лишь до тех пор, пока сохраняется первоначальная ориентация рамки относительно провода. Если же представить, что рамка повернулась вокруг оси  $OO'$  (рис. 15-7) на небольшой угол, то силы  $F_1$ ,  $F_2$  уже не будут лежать на одной прямой. Они создадут вращающий момент, в результате чего рамка повернется на угол  $\pi$  (при этом магнитный поток сквозь рамку станет положительным). Таким образом, рамка, удерживаемая осью  $OO'$  в положении, изображенном на рисунке, находится в неустойчивом равновесии. Поэтому в действительности рамка  $ABCD$ , если она свободная, сначала повернется вокруг оси  $OO'$  на угол  $\pi$ , а затем начнет притягиваться к проводнику  $MN$ . Последнее легко понять, если определить направления сил, которые теперь будут действовать на стороны рамки  $AD$ ,  $BC$ . Это следует также из формулы

(10): теперь магнитный поток сквозь рамку положителен. Следовательно, он возрастает ( $d\Phi > 0$ ) при приближении рамки к проводу ( $da < 0$ ). Значит, производная  $d\Phi/da$ , а с ней и сила  $F$  — величины отрицательные, что соответствует притяжению рамки к проводу  $MN$ .

Во всех случаях рамка с током перемещается под действием силы  $F$  так, что при этом магнитный поток сквозь нее возрастает.

## § 16. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### Основные формулы

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея): при всяком изменении магнитного потока сквозь контур в нем возникает электродвижущая сила индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока, т. е.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (16.1)$$

Количество электричества, протекающего по контуру сопротивлением  $R$  при изменении магнитного потока сквозь контур на величину  $\Delta\Phi$ ,

$$q = - \frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (16.2)$$

Магнитный поток сквозь контур и сила тока в нем связаны соотношением

$$\Phi = LI, \quad (16.3)$$

где  $L$  — индуктивность контура.

Индуктивность длинного соленоида с немагнитным сердечником

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V, \quad (16.4)$$

где  $n = N/l$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $V$  — его объем.

Сила тока в цепи, обладающей постоянными сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  и содержащей постоянную э. д. с.  $\mathcal{E}$ , изменяется при замыкании и размыкании цепи по закону

$$I = I_0 e^{-Rt/L} + \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}). \quad (16.5)$$

При замыкании цепи начальная сила тока  $I_0 = 0$ ; при размыкании  $\mathcal{E} = 0$ .

### Методические указания

1. В явлениях электромагнитной индукции магнитный поток сквозь контур может изменяться как при движении контура или отдельных его участков, так и при изменении во времени магнитного поля. В обоих случаях для определения э. д. с. индукции пользуются законом Фарадея (16.1). Однако при движении проводников в магнитном поле этот закон применим лишь в тех случаях, когда рассматриваемый контур проходит через *одни и те же* точки движущегося проводника. Например, в случае на рис. 15-7 контур  $abcd$  проходит внутри материа-

ла одной и той же движущейся рамки, на рис. 16-1 контур  $abcd$  проходит внутри одной и той же движущейся проволоки  $ad$ . В противном случае формула (16.1) приводит к неверному результату. Тогда э. д. с. индукции находят, исследуя силы Лоренца, действующие на свободные заряды в движущемся проводнике (см. задачу № 16-2). В связи с этим напомним, что действующая в цепи э. д. с. измеряется работой сторонних сил (т. е. сил неэлектростатического происхождения) при перемещении вдоль замкнутой цепи единичного положительного заряда, т. е.

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L (\mathbf{F}_{\text{ст}} d\mathbf{l}),$$

где  $q$  — перемещенный заряд.

2. Если в задаче требуется найти разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле, то надо иметь в виду, что искомая разность потенциалов численно равна э. д. с., индуцируемой в проводнике. Найти э. д. с. индукции в движущемся проводнике всегда можно методом, изложенным в п. 1, если дополнить этот проводник до замкнутого контура. При этом все части контура, кроме данного проводника, должны оставаться неподвижными.

Если замкнутый контур находится в изменяющемся во времени магнитном поле, то, поскольку при этом возникает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}_{\text{ст}}$  с замкнутыми силовыми линиями, понятие потенциала здесь вообще неприменимо. Подставив в последнюю формулу для э. д. с. вместо  $\mathbf{F}_{\text{ст}}$  произведение  $q\mathbf{E}_{\text{ст}}$ , получим согласно (16.1)

$$\mathcal{E} = \oint_L (\mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l}) = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (16.6)$$

В этом случае можно говорить не о разности потенциалов двух точек контура, а о напряжении на участке контура, соединяющем эти точки (см. определение напряжения на стр. 147):

$$U = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l}) = \int_1^2 (\mathbf{E}_{\text{ст}})_t dl.$$

Если к двум точкам контура подключить вольтметр, его показания будут зависеть от расположения прибора (см. задачу № 16-3).

3. В формуле (16.3) величина  $\Phi$  означает *полный* магнитный поток, или *потокосцепление*, и измеряется суммой магнитных потоков, пронизывающих каждый виток соленоида. Для длинного соленоида величина  $\Phi$  в  $N$  раз больше ( $N$  — число витков) магнитного потока  $\Phi'$ , проходящего через любое сечение соленоида, взятое вблизи его середины.

## Решение задач

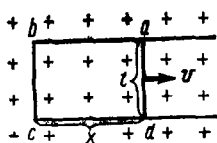


Рис 16-1

16-1. В однородном магнитном поле с индукцией  $10,0 \cdot 10^{-2}$  Т расположена прямоугольная рамка  $abcd$ , подвижная сторона которой  $ad$  длиной  $l = 0,100$  м перемещается со скоростью  $v = 25$  м/с перпендикулярно линиям индукции поля (рис. 16-1). Определить э. д. с. индукции, возникающую в контуре  $abcd$ .

**Решение.** Задачу можно решить двумя способами, применив закон Фарадея для электромагнитной индукции или рассматривая силы, действующие на свободные электроны в движущейся проволоке (силы Лоренца).

1. При движении проводника  $ad$  площадь рамки увеличивается, магнитный поток  $\Phi$  сквозь рамку возрастает, а значит, согласно закону Фарадея (16.1), в рамке должна при этом действовать э. д. с. индукции. Чтобы ее найти, сначала выразим магнитный поток  $\Phi$  через индукцию поля  $B$  и стороны рамки  $l$ ,  $x$ . Согласно формуле (15.11), имеем

$$\Phi = BS = Blx.$$

Подставив это значение  $\Phi$  в (16.1) и учитывая, что  $B$ ,  $l$  — величины постоянные, запишем:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt},$$

где  $dx/dt = v$  — скорость перемещения проводника  $ad$ . Поэтому

$$\mathcal{E} = -Blv. \quad (1)$$

Сделав подстановку числовых значений величин  $B$ ,  $l$ ,  $v$  (все даны в единицах СИ), получим ответ:

$$\mathcal{E} = -2,5 \cdot 10^{-2} \text{ В} = -25 \text{ мВ}.$$

Знак «—» в формуле (1) показывает, что э. д. с. индукции  $\mathcal{E}$  действует в контуре  $abcd$  в таком направлении, при котором связанная с ним правилом правого винта нормаль к контуру противоположна вектору  $\mathbf{B}$  (т. е. направлена к наблюдателю на рис. 16-1). Отсюда заключаем, что э. д. с. индукции, а значит, и индукционный ток направлены в контуре  $abcd$  против часовой стрелки. К такому же результату придем, применив правило правой руки для проводника  $ad$ .

Заметим, что если бы проводник  $ad$  двигался влево, то положительному приращению времени соответствовало бы отрицательное приращение (убыль) величины  $x$ . Следовательно, знак  $dx/dt$ , а значит, и знак  $\mathcal{E}$  изменились бы. В этом случае индукционный ток направлен по часовой стрелке.

2. Согласно определению (см. стр. 189), э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L (\mathbf{F}_{ст} dl), \quad (2)$$

где  $q$  — величина заряда,

При движении в магнитном поле проводника  $ad$  вместе с ним движутся со скоростью  $v$  его свободные заряды (электроны). Поэтому на каждый из них действует сила Лоренца, выполняющая роль сторонней силы  $F_{ст}$ , входящей в формулу (2). Поскольку  $v \perp B$ , то согласно (15.2) сила Лоренца равна

$$F = qvB.$$

Так как она действует только вдоль участка  $ad$  длиной  $l$ , интеграл, стоящий в (2), равен

$$\oint_L (\mathbf{F}_{ст} d\mathbf{l}) = Fl = qvBl.$$

Подставив это значение интеграла в формулу (2), получим

$$\mathcal{E} = Blv, \quad (3)$$

что совпадает (по абсолютному значению) с формулой (1). Чтобы найти направление тока, учтем, что оно всегда определяется направлением движения положительных зарядов в цепи. Согласно (15.2), сила Лоренца, действующая на положительный заряд в проводнике  $ad$ , направлена от  $d$  к  $a$ . Таким образом, снова получаем: ток в рамке  $abcd$  направлен против часовой стрелки (конечно, на самом деле электроны в контуре движутся по часовой стрелке).

**З а м е ч а н и е.** При решении задачи в обоих случаях допущена неточность: не принималось в расчет магнитное поле, созданное индукционным током. Это поле образует некоторый поток  $\Phi'$  сквозь рамку. При движении проводника  $ad$  поток  $\Phi'$  изменяется, что приводит к появлению дополнительной э. д. с. Очевидно, этот эффект тем слабее, чем меньше сила тока. Поскольку она обратно пропорциональна сопротивлению цепи, можно сказать, что оба рассмотренных метода дают правильный ответ при условии достаточно большого сопротивления цепи.

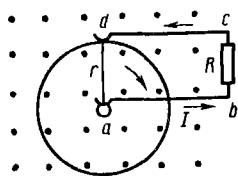


Рис. 16 2

**16-2.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B$  вращается в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, медный диск радиуса  $r$ , совершая  $n$  оборотов в секунду. При помощи скользящих контактов диск подключен к цепи, сопротивление которой  $R$  (рис. 16-2). Определить э. д. с. индукции, возникающую при вращении диска, количество электричества  $q$ , протекающего по цепи, а также количество теплоты  $Q$ , выделенное в цепи за время, в течение которого диск совершил  $N$  оборотов.

**Р е ш е н и е.** Как показывает опыт, при вращении диска в магнитном поле в контуре  $abcd$  (рис. 16-2) появляется ток, а значит, возникает э. д. с. индукции. Очевидно, магнитный поток сквозь этот контур не меняется. Следовательно, закон Фарадея, выражаемый формулой (16.1), здесь не дает правильного результата. При движении проводни-



ков в магнитном поле закон Фарадея применяется лишь для контура, проходящего через *одни и те же* точки движущегося проводника (что было, например, в предыдущей задаче). Здесь же участок контура проходит все время через *различные* радиусы вращающегося диска.

В контуре *abcd* должна возникнуть э. д. с., так как его участок *ad* представляет собой движущийся проводник, и поэтому на его свободные электроны, движущиеся вместе с диском, действуют силы Лоренца. Эти силы будут перемещать электроны относительно диска от точки *a* к точке *d*. Поэтому воспользуемся результатом, полученным в предыдущей задаче (второй способ). Чтобы найти э. д. с. индукции, подставим значение силы Лоренца, определяемой по формуле  $F = evB$  (здесь  $e$  — заряд электрона), в формулу (2) предыдущей задачи. Учítывая при этом, что сила  $F$  действует в контуре *abcd* только на участке *ad*, запишем

$$\mathcal{E} = \frac{1}{c} \int_0^r F dl = \int_0^r v B dl = B \int_0^r v dl. \quad (1)$$

Находясь в различных точках участка *ad*, электроны имеют разную скорость  $v$ . Для электрона, находящегося на расстоянии  $l$  от центра диска,

$$v = \omega l = 2\pi n l.$$

Подставив это значение  $v$  в формулу (1), получим

$$\mathcal{E} = 2\pi n B \int_0^r l dl = \pi r^2 n B. \quad (2)$$

Таким образом, при равномерном вращении диска ( $n = \text{const}$ ) в цепи действует постоянная э. д. с., создавая постоянный ток.

Количество электричества  $q$ , перемещенное индукционным током, определяется формулой (16.2). Однако эта формула имеет смысл только в тех же случаях, что и закон Фарадея. Поэтому вычислим  $q$  иным путем, используя известные соотношения для цепи постоянного тока:

$$q = It = \mathcal{E}t/R.$$

Подставив вместо  $\mathcal{E}$  ее значение по формуле (2) и учитывая, что  $t = N/n$ , найдем

$$q = \pi r^2 NB/R. \quad (3)$$

Количество теплоты  $Q$ , выделенное в цепи постоянного тока, с учетом формул (2), (3) выразим так:

$$Q = \mathcal{E} It = \mathcal{E} q = \pi^2 r^4 n NB^2/R.$$

Видим, что при заданном числе оборотов  $N$  величина  $q$  не зависит от скорости вращения диска, тогда как величина  $Q$ , будучи пропорциональной  $n$ , зависит.

**З а м е ч а н и е.** При решении задачи в качестве сторонних сил, действующих на свободные электроны во вращающемся диске, рассмат-



потенциала здесь теряет смысл, поскольку работа по перемещению заряда на замкнутом пути в таком поле не равна нулю. Вольтметр же в нашей задаче должен давать показания. Действительно, пусть вольтметр сначала включен в положении I. При этом контуры  $Al_1Bl_2A$ ,  $AVBl_2A$  пронизываются переменным магнитным потоком и в каждом из них должна действовать одна и та же э. д. с. индукции, равная

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt = 30 \text{ В.}$$

Следовательно, по всем проводникам, в том числе и вольтметру, должен течь индукционный ток. Согласно правилу Ленца, э. д. с.  $\mathcal{E}$  в каждом контуре направлена по часовой стрелке (убывающий магнитный поток  $\Phi$  на рисунке направлен от наблюдателя). Этим и объясняется указанное на рисунке направление токов  $I_1$ ,  $I_2$ . Ток  $I_V$  направлен от  $A$  к  $B$ .

Показание вольтметра всегда пропорционально току, проходящему через него, т. е.

$$U = I_V R_V,$$

где  $U$  — напряжение на участке цепи, которым является сам вольтметр, равное линейному интегралу напряженности  $E_{\tau}$  электрического поля, взятому вдоль данного участка (определение напряжения см на стр. 147).

Величину  $I_V R_V$  найдем, применив правила Кирхгофа для разветвленных цепей. По первому правилу Кирхгофа имеем для узла  $A$

$$I_1 + I_V = I_2. \quad (1)$$

Выбрав направление обхода контуров по часовой стрелке, получим согласно второму правилу Кирхгофа соответственно для контуров  $Al_1Bl_2A$  и  $AVBl_2A$ , учитывая, что сквозь последний контур магнитный поток не проходит:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}, \quad (2)$$

$$I_V R_V - I_1 R_1 = 0. \quad (3)$$

Из последнего уравнения находим показание вольтметра:

$$U = I_1 R_1 = I_1 R_1 \quad (4)$$

Таким образом, измеряя напряжение на себе самом, вольтметр измеряет также напряжение на том участке витка, с которым он образует контур, не пронизываемый магнитным потоком.

Если известны величины  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_V$ ,  $\mathcal{E}$ , то, решив систему (1), (2), (3), найдем все токи и показание вольтметра. В нашей задаче величины  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_V$  не даны, зато выполняются соотношения:  $R_V \gg \gg R_1$ ,  $R_V \gg R_2$ . Они позволяют пренебречь силой тока  $I_V$  в цепи вольтметра по сравнению с величинами  $I_1$ ,  $I_2$ . Тогда из уравнений (1), (2) получим

$$I_1 = I_2 = I = \mathcal{E} / (R_1 + R_2).$$

Подставив это значение  $I_1$  в формулу (4) и учитывая, что сопротивление проволоки пропорционально ее длине, найдем первый ответ:

$$U = I_1 R_1 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E} l_1}{l_1 + l_2} = \frac{\mathcal{E}}{3} = 10 \text{ В}$$

Когда вольтметр включен в положении II, он измеряет напряжение на участке  $Bl_2A$  (так как с ним образует контур, не пересекаемый магнитным потоком). Следовательно,

$$U' = I_2 R_2 = \mathcal{E} - I_1 R_1 = 20 \text{ В.}$$

Таким образом, в случае индукционных токов показания вольтметра зависят не только от положения точек, к которым он подключен, но и от расположения самого прибора.

**16-4.** По длинному соленоиду с немагнитным сердечником сечением  $S = 5,0 \text{ см}^2$ , содержащему  $N = 1200$  витков, течет ток силой  $I = 2,00 \text{ А}$ . Индукция магнитного поля в центре соленоида  $B = 10,0 \text{ мТ}$ . Определить его индуктивность.

**Решение.** Задача решается двумя способами.

1. Индуктивность длинного соленоида выражается формулой (16.4). Неизвестную величину  $l$  найдем, воспользовавшись формулой (15.8) для магнитной индукции внутри длинного соленоида, откуда

$$l = \mu_0 N I / B.$$

Подставив это значение  $l$  в (16.4) и произведя сокращения, получим ответ:

$$L = NBS / I.$$

Выразим входящие в формулу величины в единицах СИ:  $N = 1200$ ,  $B = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ Т}$ ,  $S = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $I = 2,00 \text{ А}$ . Выполнив вычисление, найдем

$$L = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ Г} = 3,0 \text{ мГ.}$$

2. Задачу можно решить, исходя из общего определения индуктивности контура (16.3) как коэффициента пропорциональности между током в контуре и собственным магнитным потоком  $\Phi$  сквозь него. При этом надо учесть, что в случае соленоида  $\Phi$  в формуле (16.3) является *полным магнитным потоком (потокосцеплением)*, равным сумме потоков, проходящих сквозь каждый виток соленоида. Поскольку сквозь каждый виток длинного соленоида проходит один и тот же магнитный поток  $\Phi' = BS$  (ослаблением поля у концов соленоида пренебрегаем), то полный поток равен

$$\Phi = N\Phi' = NBS.$$

Подставив это значение  $\Phi$  в (16.3), найдем индуктивность соленоида:

$$L = NBS / I.$$

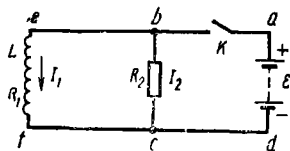


Рис. 16-4

16-5. В цепи, схема которой изображена на рис. 16-4,  $R_1 = 5,0$  Ом,  $R_2 = 95$  Ом,  $L = 0,34$  Г;  $\mathcal{E} = 38$  В. Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. Определить силу тока в резисторе  $R_2$  в трех случаях: 1) до размыкания цепи, 2) в первый момент после размыкания, 3) через 0,01 с после размыкания.

**Решение.** 1. Силу постоянного тока  $I_2$  до размыкания цепи находим по второму правилу Кирхгофа, применив его для контура  $abcd$  (рис. 16-4):

$$I_2 R_2 + I r = \mathcal{E},$$

где  $I$  — сила тока в батарее,  $r$  — внутреннее сопротивление источника. Поскольку величиной последнего можно пренебречь, получим

$$I_2 = \mathcal{E} / R_2 = 0,40 \text{ А.}$$

2. Найдем силу тока  $I_2'$  в резисторе  $R_2$  сразу же после размыкания ключа  $K$ . Если в первом случае участки цепи  $bc$ ,  $ef$  были соединены между собой параллельно, то после отключения батареи они, образуя один неразветвленный контур  $befcb$ , оказываются соединенными последовательно. Значит, теперь по ним должен течь одинаковый ток. Так как из двух участков только один участок  $ef$  обладает индуктивностью, то именно ток  $I_1$ , проходивший до размыкания цепи по этому участку, должен сохраниться. Такой результат приобретает простой физический смысл: поскольку индуктивность является мерой инертности тока в проводнике, то ток  $I_2$  в резисторе  $R_2$ , практически лишенный инертности, сразу исчезнет после отключения батареи и по всему контуру  $befcb$  потечет ток, равный  $I_1$ . Таким образом, получаем ответ на второй вопрос задачи:

$$I_2' = I_1 = \mathcal{E} / R_1 = 7,6 \text{ А.}$$

3. Так как теперь цепь отключена от батареи, ток начнет убывать. Его величину  $I_2''$  в заданный момент  $t = 0,01$  с можно определить по формуле (16.5) для изменения тока при замыкании и размыкании, положив в ней  $\mathcal{E} = 0$  (случай размыкания), а также  $I_0 = I_1$ . Тогда получим

$$I_2'' = I_1 e^{-Rt/L} = I_1 e^{-(R_1 + R)t/L}.$$

Подставив числовые значения величин  $I_1$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $t$  в формулу и произведя вычисление, найдем

$$I_2'' = 0,4 \text{ А.}$$

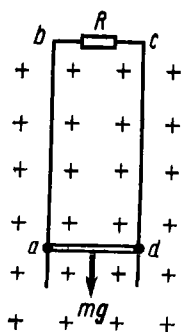


Рис. 16-5

16-6. Резистор сопротивлением  $R$  присоединен к верхним концам двух вертикальных медных стержней, отстоящих на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 16-5). Стержни замкнуты медной переключкой массы  $m$ , которая без трения может скользить по ним. В окружающем пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , перпендикулярное плоскости, в которой расположены стержни. Переключку отпустили, после чего она начала падать без нарушения электрического контакта. Пренебрегая сопротивлением стержней и переключки, найти установившуюся скорость  $v$  последней. Принять индуктивность единицы длины системы стержней равной  $k$ .

**Решение.** При падении переключки площадь контура  $abcd$  растет и магнитный поток сквозь него увеличивается. Согласно закону Фарадея, в контуре появляется э. д. с. индукции, вызывающая индукционный ток. Следовательно, на переключку  $ad$  кроме силы тяжести  $mg$  действует со стороны магнитного поля сила Ампера  $F_A$ , определяемая формулой (15.1). Так как для всех элементов длины переключки, по которой идет ток силой  $I$ ,  $\sin(\widehat{dl, \mathbf{B}}) = 1$  и  $\mathbf{B} = \text{const}$ , то

$$F_A = IBl.$$

Согласно правилу Ленца, сила  $F_A$  направлена против силы  $mg$ . С ростом скорости падения переключки увеличиваются э. д. с. индукции, сила тока  $I$  и, следовательно, сила Ампера  $F_A$ . Скорость перестанет возрастать, когда наступит равновесие сил  $mg$  и  $F_A$ , т. е.

$$mg = IBl. \quad (1)$$

Из условия (1) можно найти силу тока  $I$ , а последнюю связать с искомой скоростью, применив закон Ома и закон электромагнитной индукции. По закону Ома для замкнутой цепи,

$$I = \mathcal{E}'R, \quad (2)$$

где  $\mathcal{E}'$  — э. д. с., действующая в контуре  $abcd$  и равная сумме:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_s. \quad (3)$$

Величина  $\mathcal{E}_i$  — э. д. с. индукции, возникающая при изменении сквозь контур магнитного потока  $\Phi_i$  вектора  $\mathbf{B}$ . Используя результат, полученный при решении задачи № 16-1, запишем для абсолютного значения  $\mathcal{E}_i$

$$|\mathcal{E}_i| = Blv. \quad (4)$$

Величина  $\mathcal{E}_s$  — э. д. с. самоиндукции. Она появляется при изменении сквозь контур  $abcd$  магнитного потока  $\Phi_s$ , созданного индукционным током. Этот поток изменяется вследствие роста площади контура.

Чтобы определить величину  $\mathcal{E}_s$ , учтем, что в данном случае индуктивность контура — величина переменная. Действительно, индуктивность  $L = kx$ , где  $x$  — длина вертикальных стержней, измеренная на участке, по которому идет ток. При падении перемычки величины  $x$  и  $L$  возрастают. На основании формул (16.1) и (16.3) запишем для э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}. \quad (5)$$

Так как при установившейся скорости падения перемычки  $I = \text{const}$ , то первое слагаемое в (5) равно нулю и тогда

$$|\mathcal{E}_s| = I \frac{dL}{dt} = I \frac{d(kx)}{dt} = Ik \frac{dx}{dt} = Ikv. \quad (6)$$

Величины  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_s$  имеют в данном случае противоположные знаки, поскольку соответствующие им магнитные потоки  $\Phi_1$  и  $\Phi_s$  направлены, согласно правилу Ленца, противоположно; при этом оба потока растут по абсолютному значению. Учитывая это, из уравнений (2)—(4) и (6) найдем

$$I = (Blv - Ikv)/R. \quad (7)$$

Исключив из формул (1) и (7) силу тока  $I$ , определим установившуюся скорость перемычки:

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2 - mgk}. \quad (8)$$

Проанализируем полученный результат.

1. Если  $k = 0$ , то  $v = mgR/B^2 l^2$  и направлена вниз. Так как при наличии индуктивности скорость, будучи величиной конечной, направлена также вниз, то приходим к выводу, что формула (8) верна лишь при значениях заданных величин, удовлетворяющих неравенству

$$B^2 l^2 > mgk. \quad (9)$$

Выясним физический смысл этого соотношения. Из (1) следует, что значение  $I$ , необходимое для равновесия приложенных к перемычке сил, равно

$$I = mg/Bl. \quad (10)$$

Однако индуктивность цепи ограничивает рост силы тока в контуре, происходящий при увеличении скорости перемычки. Действительно, из (7) находим

$$I = \frac{Bl}{R/v + k}.$$

Отсюда получим, положив  $v \rightarrow \infty$ , предельную силу тока:

$$I_{\text{пред}} = Bl/k. \quad (11)$$

Сопоставляя формулы (9)—(11), видим, что неравенство (9) эквивалентно очевидному условию  $I_{\text{пред}} > I$ . Следовательно, если соотношение (9) не выполняется, то это означает, что сила тока в контуре,

ограниченная в процессе самоиндукции величиной  $I_{\text{пред}}$ , не достигает значения, необходимого для равновесия сил  $mg$  и  $F_{\text{л}}$ , приложенных к переключке, ни при каких конечных значениях ее скорости. Другими словами, скорость переключки неограниченно возрастает и ее установившееся значение недостижимо.

2. Если  $R \rightarrow \infty$ , то  $v \rightarrow \infty$ . В этом случае ток по контуру не идет и переключка падает под действием силы тяжести с ускорением  $g$ .

3. Если  $R = 0$  и выполняется условие (9), то  $v = 0$ : переключка будет неподвижно висеть в магнитном поле, несмотря на действие силы тяжести. Этот парадоксальный результат можно осуществить, если охладить проводники контура  $abcd$ , помещенного в достаточно сильное магнитное поле, до сверхпроводящего состояния.

## § 17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### Основные формулы

Намагниченность (вектор намагничивания)  $\mathbf{J}$  измеряется магнитным моментом единицы объема магнетика:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{m,i}, \quad (17.1)$$

где  $N$  — число частиц, содержащихся в физически бесконечно малом объеме  $\Delta V$ ;  $\mathbf{p}_{m,i}$  — магнитный момент  $i$ -й частицы

Вектором напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля называется линейная комбинация векторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}. \quad (17.2)$$

Векторы магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности  $\mathbf{H}$  связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (17.3)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость среды (для вакуума  $\mu = 1$ ).

Циркуляция вектора напряженности  $\mathbf{H}$  вдоль замкнутого контура  $L$  равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром:

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_L H dl \cos(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{a}}\mathbf{l}) = \Sigma I. \quad (17.4)$$

Магнитная индукция внутри длинного соленоида с магнитным сердечником

$$B = \mu_0 \mu n I \quad (17.5)$$

где  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида,  $I$  — сила тока, протекающего по нему,  $\mu$  — магнитная проницаемость вещества сердечника.

Индуктивность длинного соленоида объемом  $V$  с магнитным сердечником

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (17.6)$$

Энергия магнитного поля тока  $I$  в контуре, обладающем индуктивностью  $L$ ,

$$W = LI^2/2. \quad (17.7)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия, отнесенная к единице объема)

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (17.8)$$



## Методические указания

1. Расчеты магнитных полей при наличии магнитных сред значительно упрощаются введением вектора напряженности  $\mathbf{H}$  как характеристики магнитного поля, определяемой через векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  соотношением (17.2). Особенность вектора  $\mathbf{H}$  состоит в том, что его циркуляция по *любому* замкнутому контуру равна, согласно формуле (17.4), алгебраической сумме токов, охваченных этим контуром. Другими словами, циркуляция вектора  $\mathbf{H}$  не зависит от магнитных свойств среды, через которую проходит выбранный контур. Поэтому соотношение (17.4) широко применяется для расчета магнитных цепей, выбирая контуром интегрирования одну из замкнутых линий индукции, идущих вдоль магнитной цепи.

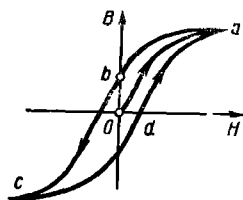


Рис 17-1

Однако сам вектор  $\mathbf{H}$  в отличие от его циркуляции зависит от магнитных свойств среды. Например, напряженность магнитного поля как в воздушном зазоре между полюсами электромагнита, так и внутри его железного сердечника зависит не только от силы тока в обмотке электромагнита, но и от магнитных свойств железа. (Это видно из решения задачи № 17-3.

См. также замечание к задаче.) Лишь в двух случаях — когда сердечник электромагнита является сплошным кольцом (тором) или бесконечно длинным стержнем — вектор  $\mathbf{H}$  не зависит от магнитных свойств среды и определяется только током в обмотке (см. задачи № 17-1, 17-2).

2. Чтобы решить уравнение, полученное в результате применения теоремы о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , часто бывает необходимо знать связь между векторами  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  [кроме той, что выражена формулой (17.2)]. Эта связь устанавливается соотношением (17.3):  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ . Однако отсюда не следует пропорциональной зависимости между векторами  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  в ферромагнетике. Магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнетика сама зависит от магнитного поля внутри вещества, являясь переменной величиной. Таким образом, между векторами  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  существует нелинейная зависимость, различная для разных ферромагнетиков. В справочниках эта зависимость дается в виде полученных экспериментально *кривых намагничивания* железа и других ферромагнетиков.

Вследствие явления магнитного гистерезиса кривая *намагничивания* ферромагнетика (линия  $Oa$  на рис. 17-1) не совпадает с кривой его *размагничивания* (линия  $abc$ ). Поэтому для отыскания связи между векторами  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  в ферромагнетике пользуются кривой намагничивания только в тех случаях, когда известно, что рассматриваемое в задаче состояние ферромагнетика возникло в процессе его намагничивания. При этом необходимо, чтобы в начале этого процесса ферромагнетик не имел остаточной намагниченности, иначе кривая намагничивания не будет проходить через точку  $O^*$  и, следовательно, не совпадет с основной кривой намагничивания  $Oa$ , приводимой в справочниках.

\* Это следует из соотношения (17.2): если намагниченность  $J \neq 0$ , то не могут одновременно выполняться равенства  $H = 0$ ,  $B = 0$ .

## Решение задач

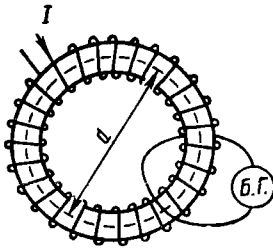


Рис. 17-2

17-1. На стальном немагнитном кольце (торе), средний диаметр которого  $d = 30$  см и площадь поперечного сечения  $S = 1,6$  см<sup>2</sup>, имеется обмотка, содержащая  $N = 800$  витков (рис. 17-2). Когда по обмотке пустили ток силой  $I = 1,80$  А, баллистический гальванометр Б.Г. дал отброс, соответствующий заряду, прошедшему через прибор,  $q = 0,24$  мКл. Зная, что сопротивление цепи гальванометра  $R = 0,80$  Ом, определить напряженность поля  $H$  и магнитную индукцию  $B$  внутри кольца, намагниченность кольца, а также магнитную проницаемость стали при заданном токе в обмотке. Считать зависимость  $B$  от  $H$  для данного сорта стали неизвестной.

**Решение.** Когда по обмотке тороида пойдет ток, в стальном кольце возникнет магнитное поле, замкнутые линии индукции которого будут проходить вдоль кольца. Это поле явится результатом наложения двух полей: тока и теперь уже намагниченного материала кольца. Однако напряженность  $H$  магнитного поля внутри кольца зависит только от тока в обмотке тороида. Действительно, применив теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  (17.4), где в качестве контура интегрирования возьмем среднюю длину окружности кольца  $l = \pi d$ , и учитывая, что в силу соображений симметрии во всех точках этого контура должно быть

$$H = \text{const}, \quad (1)$$

получим

$$Hl = NI,$$

откуда

$$H = NI/l = NI/\pi d. \quad (2)$$

Из формулы видно, что  $H$  зависит от  $d$ , а поэтому будет различной в различных точках одного и того же тороида, расположенных на различных расстояниях от центра. Однако, учитывая числовые значения величин  $d$ ,  $S$ , видим, что относительное различие между наружным и внутренним диаметрами кольца мало, поэтому приближенно можно считать, что формула (2) выражает величину  $H$  для всех точек кольца.

Соотношение (2) можно также получить на основании формул (17.5) и (17.3), рассматривая тороид как длинный соленоид, согнутый в кольцо

Чтобы вычислить магнитную индукцию, воспользуемся простой в данном случае связью между величиной  $B$  и магнитным потоком  $\Phi$  внутри тороида:

$$\Phi = BS. \quad (3)$$

При включении тока магнитный поток в тороиде возрос от нуля до значения, равного  $\Phi$ , что привело к появлению индукционного тока в контуре баллистического гальванометра, сцепленном с магнитным потоком. Заряд  $q$ , прошедший по этому контуру, определяется соотношением (16.2), откуда (опуская знак « $\rightarrow$ ») имеем

$$\Delta\Phi = \Phi = qR. \quad (4)$$

Из формул (3), (4) следует, что

$$B = qR/S. \quad (5)$$

Теперь, зная величины  $B$ ,  $H$ , легко ответить на остальные вопросы задачи. Из соотношений (17.2), (17.3) с учетом (1), (4) получим:

$$J = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{qR}{\mu_0 S} - \frac{NI}{\pi d}; \quad (6)$$

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{qR\pi d}{\mu_0 SNI}. \quad (7)$$

Выразим в единицах СИ данные величины:  $d = 0,30$  м,  $S = 1,6 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $N = 800$ ,  $I = 1,80$  А,  $q = 2,4 \cdot 10^{-4}$  Кл,  $R = 0,80$  Ом. Подставив эти значения в формулы (2), (5)—(7) и выполнив вычисление, найдем:

$$H = 1,5 \cdot 10^3 \text{ А/м}; \quad B = 1,2 \text{ Т}; \quad J = 1,0 \cdot 10^6 \text{ А/м}, \quad \mu = 6 \cdot 10^3.$$

**17-2.** При выключении тока в обмотке тороида в цепи, схема которой изображена на рис. 17-2, через баллистический гальванометр прошел заряд  $q' = 80$  мкКл. Используя условие предыдущей задачи, определить остаточную намагниченность  $J'$  стального кольца, а также остаточную индукцию и напряженность поля внутри кольца после исчезновения тока в обмотке.

**Решение.** Неизвестные величины будем находить в той же последовательности, что и в предыдущей задаче. Повторив приведенные там рассуждения, снова придем к соотношению (2). Но теперь  $I = 0$ . Следовательно,

$$H = NI/\pi d = 0.$$

Чтобы определить остаточную индукцию  $B'$  внутри кольца, напишем уравнение (16.2) для заряда  $q'$ , перемещенного индукционным током по контуру баллистического гальванометра при выключении тока в обмотке:

$$q' = \frac{\Phi - \Phi'}{R} = \frac{BS - B'S}{R},$$

где  $\Phi$ ,  $\Phi'$  — магнитный поток в кольце соответственно до и после исчезновения тока в обмотке тороида. Отсюда

$$B - B' = q'R/S.$$

Подставив сюда вместо  $B$  его значение по формуле (5) предыдущей задачи, получим

$$B' = (q - q') R / S. \quad (1)$$

Наконец, из соотношения (17.2) в учетом, что  $H = 0$ , определим остаточную намагниченность кольца:

$$J' = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{(q - q') R}{\mu_0 S}. \quad (2)$$

Подставив в формулы (1) и (2) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, и выполнив вычисление, найдем:

$$B' = 0,8 \text{ Т}; \quad J' = 6 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

**З а м е ч а н и е.** Решив задачу, мы получили парадоксальный результат: напряженность магнитного поля внутри намагниченного кольца равна нулю! Этот результат является следствием того, что напряженность магнитного поля в кольце пропорциональна силе тока в обмотке и не зависит от магнитных свойств материала кольца [см. формулу (2) задачи № 17-1]. Такой же результат получился бы, если вместо кольца взять *длинный* стержень, вставленный внутрь *длинного* соленоида (см. текст петитом в предыдущей задаче). Однако на все остальные случаи этот результат не распространяется. Например, внутри намагниченного кольца с *воздушным зазором*  $H \neq 0$  даже при отсутствии тока в обмотке (см. задачу № 17-4).

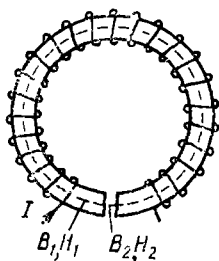


Рис. 17-3

**17-3.** Торойд с железным ненамагниченным сердечником, длина которого по средней линии  $l_1 = 1,00$  м, имеет воздушный зазор  $l_2 = 3,0$  мм (рис. 17-3). По обмотке торойда, содержащей  $N = 1300$  витков, пустили ток, в результате чего индукция в зазоре стала  $B_2 = 1,00$  Т. Определить силу тока.

**Р е ш е н и е.** Поскольку в задаче идет речь о магнитной цепи, применим теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию торойда  $L$ . Эта задача отличается от предыдущих тем, что здесь из-за воздушного зазора условие (1) задачи № 17-1 выполняется уже не для всех точек контура  $L$ . В этом можно убедиться, сравнив магнитные индукции в железе  $B_1$  и воздухе  $B_2$  и учитывая, что линии вектора  $\mathbf{B}$  всегда замкнуты. Так как воздушный зазор в торойде узкий, то рассеянием линий индукции можно пренебречь. Следовательно, линии индукции будут проходить так же, как и в сплошном торе, который уже рассматривался. Поэтому через **любое** поперечное сечение нашего торойда, в том числе и через сечение, взятое в воздушном зазоре, проходит один и тот же магнитный

поток  $\Phi$ . А так как и площадь любого сечения  $S$  одна и та же, то одинаковы и магнитные индукции в любой точке контура  $L$ :

$$B_1 = B_2 = B = \Phi/S = 1,00 \text{ Т.} \quad (1)$$

Поскольку магнитные индукции в железе и воздушном зазоре одинаковы, а магнитные проницаемости этих веществ разные, то напряженности магнитного поля в железе и зазоре различны [см. формулу (17.3)]. Поэтому, применив теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  к контуру  $L$ , запишем

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \quad (2)$$

где  $H_1, H_2$  — напряженности магнитного поля в железе и зазоре.

Так как для воздуха  $\mu = 1$ , то из (17.3) имеем

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1,00}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ А/м.} \quad (3)$$

Величину  $H_1$  найдем по графику намагничивания, выражающему зависимость между величинами  $B, H$  в железе (этот график приводится в задачниках и справочниках по физике):

$$H_1 = 200 \text{ А/м.}$$

Теперь из уравнения (2) получим для силы тока

$$I = (H_1 l_1 + H_2 l_2)/N = 2,0 \text{ А.}$$

**З а м е ч а н и е.** Допустим, что имеется обратная задача, в которой дана сила тока  $I$ , но требуется определить магнитную индукцию в зазоре  $B_2$  (или в железе  $B_1$ , что то же самое). Оказывается, такая задача решается несколько иным путем. Теперь, не зная ни одной из характеристик магнитного поля ни в воздушном зазоре, ни в железе, мы лишены возможности применить график намагничивания железа. Однако воспользоваться зависимостью

$$B_1 = f(H_1), \quad (4)$$

выражаемой этим графиком, все-таки можно. Для этого надо уравнение (2) переписать с учетом соотношений (1), (3) так, чтобы оно также выражало зависимость между величинами  $B_1$  и  $H_1$ :

$$H_1 l_1 + B l_2 / \mu_0 = NI. \quad (5)$$

Если бы зависимость (4) была задана уравнением, достаточно было бы алгебраически решить систему уравнений (4), (5) относительно неизвестных  $B_1, H_1$ . Но зависимость (4) задана графиком. Следовательно, надо применить графический метод решения системы двух уравнений. На графике функции  $B_1 = f(H_1)$  строят прямую (5). Координаты точки пересечения двух линий укажут искомые величины  $B_1, H_1$ .

**17-4.** После выключения тока в обмотке тороида из предыдущей задачи остаточная индукция в зазоре стала  $B = 4,2$  мТ. Определить остаточную намагниченность  $J$  сердечника, а также напряженность  $H_1$  поля в железе.

**Решение.** Было бы ошибкой воспользоваться для отыскания величины  $H_1$  кривой намагничивания железа, как это было сделано в предыдущей задаче. Состояние железа, в котором оно рассматривается в данной задаче, возникло в результате неполного размагничивания железа. Однако вследствие явления магнитного гистерезиса кривые намагничивания и размагничивания железа не совпадают (см. рис. 17-1).

Единственно правильный путь решения задачи состоит в применении теоремы о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ . Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 17-3, снова получим соотношения (1), (2). Но теперь  $I = 0$ , поэтому

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0. \quad (1)$$

По-прежнему величины  $H_2$ ,  $B$  в воздушном зазоре связаны соотношением (17.3), где  $\mu = 1$ . Отсюда

$$H_2 = B/\mu_0.$$

Подставив это значение  $H_2$  в (1), получим напряженность магнитного поля в железе:

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1} = -\frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{l_2}{l_1}. \quad (2)$$

Знак « $\rightarrow$ » в формуле показывает, что векторы  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  в намагниченном железе при отсутствии тока в обмотке направлены противоположно (соответствующие участки петли гистерезиса на рис. 17-1 лежат во второй и четвертой четвертях).

Из соотношения (17.2) определим остаточную намагниченность железа:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}_1,$$

или, учитывая противоположные направления  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}_1$ , запишем в скалярной форме

$$J = B/\mu_0 + H_1.$$

Подставив вместо  $H_1$  его абсолютное значение из формулы (2), найдем,

$$J = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}. \quad (3)$$

Подставив в формулы (2), (3) числовые значения величин (предварительно выразив  $B$  в теслах) и выполнив вычисление, получим:

$$H_1 = -10 \text{ А/м}, J = 3,4 \cdot 10^3 \text{ А/м}.$$

17-5. По обмотке тороида с немагнитным железным сердечником пустили ток силой 0,60 А. Витки провода диаметром  $d = 0,40$  мм с весьма тонкой изоляцией плотно прилегают друг к другу. Определить индуктивность тороида при данных условиях, а также энергию магнитного поля в сердечнике, если площадь его сечения  $S = 4,0$  см<sup>2</sup>, а диаметр средней линии  $D = 30,0$  см.

**Решение.** Учитывая числовые значения  $S$ ,  $D$ , видим, что длина средней линии тороида значительно превышает диаметр его витков. Поэтому индуктивность можно рассчитать по формуле (17.6), рассматривая данный тороид как длинный соленоид, согнутый в кольцо. Тогда, используя геометрические соотношения  $V = \pi DS$ ,  $n = 1/d$ , получим

$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu \pi DS / d^2. \quad (1)$$

Так как  $\mu_0 \mu = B/H$ , найдем величины  $H$ ,  $B$ , характеризующие магнитное поле в сердечнике. Напряженность магнитного поля внутри тороида уже была вычислена [см. формулу (2) задачи № 17-1]. В данном случае

$$H = (N/l) I = nI = I/d = 1,5 \cdot 10^9 \text{ А/м}. \quad (2)$$

По кривой намагничивания железа находим магнитную индукцию в сердечнике:

$$B = 1,35 \text{ Т}.$$

Теперь, поскольку величины  $B$  и  $H$  уже известны, запишем первый ответ на основании (1):

$$L = \frac{\pi DS B}{d^2 H}. \quad (3)$$

Зная индуктивность тороида и силу тока в обмотке, по формуле (17.7) найдем с учетом формул (3), (2) энергию магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\pi DS I^2}{2d^2 H} = \frac{\pi I^2 SBH}{2}. \quad (4)$$

Такой же результат можно получить, применив формулу (17.8) для объемной плотности энергии магнитного поля:

$$W = \omega V = \frac{BH}{2} \pi DS.$$

Подставляя в формулы (3), (4) числовые значения всех величин, выраженные в единицах СИ, получим:

$$L = 2,1 \text{ Г}; \quad W = 0,4 \text{ Дж}.$$

## § 18. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

### Основные формулы

Сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в электрическом и магнитном полях,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (18.1)$$

где  $q$  — заряд частицы,  $\mathbf{v}$  — ее скорость,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция.

Зависимость массы движущейся частицы от ее скорости  $v$ :

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (18.2)$$

Здесь  $m_0$  — масса покоящейся частицы,  $\beta = v/c$ , где  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме.

Полная энергия частицы массой  $m$  равна

$$W = mc^2 \quad (18.3)$$

(здесь исключена потенциальная энергия во внешнем силовом поле).

**Общие замечания.** Частица называется *классической*, если ее скорость пренебрежимо мала по сравнению со скоростью света ( $v \ll c$ ). В противном случае частица называется *релятивистской*. Движение классической частицы описывается уравнениями классической механики (гл. 1). Для релятивистских частиц необходимо учитывать соотношения теории относительности: зависимость массы от скорости (18.2), связь между массой и полной энергией частицы (18.3).

Из-за методических соображений материал настоящего параграфа разбит на два раздела: в первом рассматривается движение классических частиц, во втором — релятивистских. Нередко при решении задач приходится самостоятельно выяснять вопрос о том, классической или релятивистской следует считать данную частицу. Если при этом известной величиной является не скорость частицы, а ее импульс (количество движения)  $p$  или кинетическая энергия  $T$ , то надо иметь в виду следующее. Частицу считают классической только в том случае, если  $p \ll m_0 c$  или  $T \ll m_0 c^2$ . Полезно запомнить, что для электрона  $m_0 c^2 = 0,511$  МэВ.

### А. ДВИЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

#### Методические указания

1. Задачи на движение классических заряженных частиц ( $v \ll c$ ) в электрическом и магнитном полях по существу решаются методами, рассмотренными в гл. 1 «Механика». Различие лишь в природе сил, действующих на частицу. Если в механике движение частиц происходит под действием гравитационных сил, упругих сил и сил трения, то здесь заряженные частицы движутся лишь под действием силы



$F$ , определяемой по (18.1) и состоящей из двух частей: электрической силы  $F_{эл} = qE$  и магнитной (лоренцовой) силы  $F_M = q[vB]^*$ .

2. Для решения задачи, как правило, необходимо записать уравнение движения частицы — второй закон Ньютона. Чтобы перейти от векторной формы записи второго закона (2.1) к скалярной, надо определить направления векторов  $F_{эл}$ ,  $F_M$ . Учтем, что в формуле (18.1)  $q$  — алгебраическая величина. В частности, для электрона  $q < 0$ , поэтому векторы  $F_{эл}$ ,  $E$  направлены противоположно. Магнитная сила  $F_M$ , как это следует из (18.1), всегда перпендикулярна векторам  $v$ ,  $B$ . Поэтому она сообщает движущейся заряженной частице только нормальное ускорение, не изменяя ее скорости и, следовательно, не совершая работы. Наоборот, сила  $F_{эл}$  при перемещении частицы всегда (за исключением случаев, когда  $v \perp E$ ) совершает работу, равную, согласно формуле (11.3), изменению кинетической энергии частицы.

### Решение задач

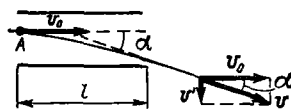


Рис 18-1

18-1. Пучок электронов влетает со скоростью  $v_0 = 3,0 \cdot 10^6$  м/с в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам длиной  $l = 5,00 \cdot 10^{-2}$  м (рис. 18-1). Напряженность электрического поля конденсатора  $E = 200$  В/м. Определить угол отклонения пучка в результате его прохождения через конденсатор

**Решение.** На каждый электрон, обладающий зарядом  $e$ , во время его движения в электрическом поле конденсатора действует, согласно (18.1), постоянная сила  $F = eE$ , направленная вдоль силовых линий (т. е. по вертикали\*\*) и сообщающая электрону ускорение

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} \quad (1)$$

в ту же сторону. Поэтому, имея начальную горизонтальную скорость  $v_0$ , он начнет двигаться по параболе с вершиной в точке  $A$  (рис. 18-1). Выйдя из поля конденсатора, электрон снова будет двигаться прямолинейно под углом  $\alpha$  к скорости  $v_0$ .

Как видно из чертежа,

$$\operatorname{tg} \alpha = v'/v_0, \quad (2)$$

\* Обычно заряженная частица, движущаяся в электромагнитном поле, находится также и в гравитационном поле (например, Земли). Поэтому кроме силы  $F$ , определяемой по (18.1), на частицу массы  $m$  действует также сила тяготения  $F_G = mG$ , где  $G$  — напряженность гравитационного поля. Однако, как показывает расчет, для электронов, протонов и других заряженных микрочастиц, движущихся даже в слабых электрических и магнитных полях, величиной  $F_G$  можно пренебречь.

\*\* Так как заряд электрона отрицательный, то направление этой силы противоположно направлению силовых линий.

где  $\alpha$  — искомый угол,  $v'$  — вертикальная составляющая скорости, приобретенная электроном под действием силы  $F$ . Учитывая, что по вертикали электрон движется равноускоренно без начальной скорости, а по горизонтали — равномерно со скоростью  $v_0$ , найдем по известным формулам кинематики

$$v' = at = al/v_0. \quad (3)$$

Теперь с учетом (3) и (1) перепишем формулу (2):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{eEl}{mv_0^2}.$$

Взяв из справочных таблиц значения заряда и массы электрона:  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, подставим в последнюю формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ. Выполнив вычисление, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,19; \quad \alpha = 11^\circ.$$

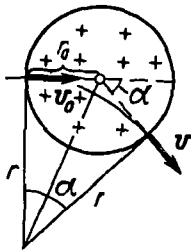


Рис 18 2

18-2. Пучок электронов влетает со скоростью  $v_0$  ( $v_0 \ll c$ ) в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции  $B$ . Определить угол  $\alpha$  отклонения пучка магнитным полем, если занятая им область представляет собой в сечении плоскость, нормальную к силовым линиям, окружность радиуса  $r_0$ , а скорость  $v_0$  направлена по диаметру этой окружности (рис. 18-2).

**Решение.** Выясним характер движения электронов в магнитном поле. Согласно (18.1), на влетевший в магнитное поле электрон действует сила Лоренца

$$F = e [v_0 B]. \quad (1)$$

Так как сила  $F$  нормальна к скорости  $v$ , она изменяет лишь направление вектора скорости, но не его модуль, т. е. сообщает электрону только центростремительное (нормальное) ускорение. При этом вектор скорости остается перпендикулярным вектору  $B$ . Следовательно, сила  $F$ , определяемая по (1), сохраняет свое численное значение, сообщая электрону постоянное по модулю центростремительное ускорение. Это значит, что электрон движется в магнитном поле по дуге окружности.

Пусть  $r$  — радиус этой окружности. Как видно из чертежа, искомый угол  $\alpha$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} (\alpha/2) = r_0/r. \quad (2)$$

Чтобы найти величину  $r$ , запишем уравнение движения электрона в магнитном поле, т. е. второй закон Ньютона (2.1). Поскольку  $v \perp B$ , уравнение (1) можно записать в скалярной форме так:

$$F = ev_0 B,$$

или, используя формулу центростремительного ускорения (1.8),

$$ev_0B = mv_0^2/r.$$

Отсюда получим

$$r = mv_0/eB. \quad (3)$$

Подставив это значение  $r$  в (2), найдем ответ:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} (r_0 eB/mv_0).$$

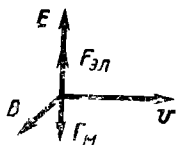


Рис. 18-3

18-3. Однородное магнитное поле, индукция которого  $B = 10,0$  мТ, направлено перпендикулярно однородному электрическому полю напряженностью  $E = 17$  кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 15$  кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно (рис. 18-3). Определить отношение  $q/m$  для этого иона.

**Решение.** Прежде чем попасть в область, занятую обоими полями, ион двигался ускоренно. Силы электрического поля (не изображенного на рисунке), совершают работу над ионом, определяемую по (11.3), при этом его кинетическая энергия увеличивается. Полагая начальную кинетическую энергию иона равной нулю, запишем  $qU = mv^2/2$ . Отсюда получим

$$\frac{q}{m} = \frac{v^2}{2U}. \quad (1)$$

Мы здесь считаем ион классической частицей по следующим соображениям. Так как заряд иона одного порядка с зарядом электрона, то заведомо  $qU \ll 0,51$  МэВ, т. е. кинетическая энергия иона пренебрежимо мала по сравнению с энергией покоя электрона. Тем более можно пренебречь этой величиной по сравнению с энергией покоя самого иона, полагая таким образом частицу классической.

Теперь задача сводится к определению скорости движения иона в области, занятой электрическим и магнитным полями. Из характера этого движения следует, что действующая на ион сила (18.1) равна нулю. Значит, взаимная ориентация и модули трех векторов  $v$ ,  $B$ ,  $E$  в данном случае таковы, что электрическая  $F_{эл}$  и магнитная  $F_{м}$  силы, действующие на ион, уравновешиваются\*. Отсюда, учитывая, что  $\sin(\hat{v}, \hat{B}) = 1$ , запишем скалярное уравнение:

$$qE = qvB. \quad (2)$$

\* На рис. 18-3 изображены силы, действующие на движущийся положительный ион. Для случая отрицательного иона векторы  $F_{эл}$ ,  $F_{м}$  на рисунке следует поменять местами.

Исключив из уравнений (1), (2) величину  $v$ , найдем ответ:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{2UB^2}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин и выполнив вычисление, получим

$$q/m = 1,0 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг.}$$

18-4. Электрон влетает со скоростью  $v_0 = 1,00 \cdot 10^7$  м/с в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам, длина которых  $l = 5,0$  см. Напряженность электрического поля конденсатора  $E = 10,0$  кВ/м. При вылете из него электрон попадает в однородное магнитное поле, направленное вдоль вектора  $v_0$ . Магнитная индукция этого поля  $B = 15$  мТ. Определить траекторию электрона в магнитном поле.

**Решение.** Повторив рассуждения, приведенные в задаче № 18-1, можно показать, что скорость  $v$  электрона при вылете из конденсатора может быть представлена в виде суммы двух составляющих: горизонтальной скорости  $v_0$  и вертикальной скорости  $v'$  (рис. 18-1), равной

$$v' = at = \frac{eE}{m} \frac{l}{v_0}. \quad (1)$$

При этом скорость  $v_0$  направлена вдоль линий вектора  $\mathbf{B}$ , а скорость  $v'$  перпендикулярна им.

Когда электрон попадет в магнитное поле, на него действует сила Лоренца, равная, согласно (18.1),  $F_m = e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , или в скалярной форме

$$F_m = evB \sin(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{B}) = ev' B.$$

Если бы электрон обладал только скоростью  $v'$ , то под действием силы Лоренца он двигался бы по окружности (см. задачу № 18-2). Радиус ее, согласно формуле (3) задачи № 18-2 и формуле (1) настоящей задачи, равен

$$r = \frac{mv'}{eB} = \frac{El}{v_0 B}. \quad (2)$$

Так как у электрона есть еще и скорость  $v_0$ , перпендикулярная плоскости этой окружности, он будет двигаться по винтовой линии, характеризуемой радиусом и шагом. Радиус винтовой линии определяется формулой (2). Шаг винтовой линии представляет собой то расстояние, на которое переместится электрон, двигаясь равномерно со скоростью  $v_0$  за время, в течение которого он совершит один оборот радиуса  $r$ , т. е. за время одного периода. Период  $T$  с учетом соотношения (2) равен

$$T = \frac{2\pi r}{v'} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Следовательно, шаг винтовой линии

$$h = v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулы (2), (3):  $E = 1,00 \cdot 10^4$  В/м,  $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$  Т,  $l = 5,0 \cdot 10^{-2}$  м,  $v_0 = 1,00 \times 10^7$  м/с,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг. Подставив эти значения и выполнив вычисление, получим:

$$r = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 3,3 \text{ мм}; \quad h = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,4 \text{ см.}$$

## Б. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

### Методические указания

1. Составляя уравнение движения для релятивистской частицы, надо учитывать зависимость массы частицы от скорости, а значит и от времени. Вследствие этого второй закон Ньютона для такой частицы записывают не в форме (2.1), а в виде

$$\Sigma F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}, \quad (18.4)$$

где  $p = mv$  — импульс частицы. Согласно формуле (18.2), релятивистский импульс

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (18.5)$$

2. Кинетическая энергия  $T$  релятивистской частицы вычисляется как разность между полной энергией частицы  $W = mc^2$  и энергией ее покоя  $W_0 = m_0 c^2$ :

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (18.6)$$

где учтена формула (18.2).

### Решение задач

18-5. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы приобрести скорость, равную  $0,90 c$ ?

**Решение.** Здесь, как и в задаче № 18-3, силы электрического поля, перемещая заряженную частицу (в данном случае электрон), совершают работу, определяемую по (11.3). По-прежнему полагая начальную кинетическую энергию частицы равной нулю, получим, что работа сил электрического поля равна кинетической энергии, приобретенной электроном, когда он пройдет искомую разность потенциалов  $U$ , т. е.

$$eU = T. \quad (1)$$

Так как в данном случае скорость частицы близка к скорости света, то классическое выражение кинетической энергии  $mv^2/2$  заменяется релятивистской формулой (18.6), где  $\beta = 0,90$ . Подставив в (1) вместо  $T$  ее значение по (18.6) и выполнив вычисление, найдем\*

$$U = \frac{m_0 c^4}{e} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = 6,6 \cdot 10^5 \text{ В} = 0,66 \text{ МВ.}$$

18-6. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 5,0 \cdot 10^{-2}$  Т по окружности радиуса  $r = 4,0 \cdot 10^{-2}$  м. Определить кинетическую энергию электрона

**Решение** Чтобы найти кинетическую энергию частицы (независимо от того, является ли она классической или релятивистской), необходимо знать ее массу покоя  $m_0$  и скорость  $v$  или массу  $m_0$  и импульс  $p$ . Так как масса покоя электрона — величина известная, задача сводится к определению скорости или импульса электрона. Для этого запишем уравнение движения электрона в магнитном поле, т. е. второй закон Ньютона. Учтявая зависимость массы частицы от скорости, этот закон следует, вообще говоря, записывать в форме (18.4). Но, так как при движении электрона в магнитном поле действующая на него сила Лоренца все время перпендикулярна вектору  $v$ , модуль скорости не изменяется. Следовательно, остается постоянной во время движения и масса частицы. Поэтому в данном случае независимо от того, классической или релятивистской является частица, второй закон Ньютона может быть записан в «обычной» форме (2.1):

$$evB = mv^2/r.$$

Отсюда найдем импульс электрона:

$$p = mv = eBr. \quad (1)$$

Теперь, чтобы выразить кинетическую энергию  $T$  электрона через его импульс  $p$ , необходимо выяснить: классической или релятивистской частицей следует считать электрон в условиях данной задачи, так как в этих двух случаях зависимость между величинами  $p$ ,  $T$  различная. Для этого вычислим импульс  $p$  по формуле (1):

$$\begin{aligned} p &= 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \cdot 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = \\ &= 3,2 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}. \end{aligned}$$

Вместе с тем для электрона имеем

$$m_0 c = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 2,73 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Отсюда видно, что неравенство  $p \ll m_0 c$ , необходимое для того, чтобы частицу можно было считать классической, в данной задаче не выполняется и электрон — релятивистская частица. Поэтому, чтобы выразить его кинетическую энергию  $T$  через импульс  $p$ , вос-

\* При вычислении  $U$  учтем, что так как для электрона  $m_0 c^2 = 0,51$  МэВ, то, очевидно,  $m_0 c^2/e = 0,51$  МВ =  $5,1 \cdot 10^5$  В.

пользуемся формулами (18.5) и (18.6). Исключив из них величину  $\beta$ , найдем

$$T = m_0 c^2 \{ \sqrt{1 + (p/m_0 c)^2} - 1 \}. \quad (2)$$

Так как для электрона  $m_0 c^2 = 0,51$  МэВ, а величины  $p$ ,  $m_0 c$  уже вычислены, то по (2) получим

$$T = 0,28 \text{ МэВ}$$

**18-7.** Радиус орбиты электронов, ускоряемых бетатроном,  $r = 300$  мм. Среднее по площади орбиты значение магнитной индукции  $B_{cp}$  поля, создаваемого магнитом бетатрона, изменяясь со временем приблизительно по линейному закону, возрастает от нуля до  $B_1 = 0,200$  Т. Определить скорость, приобретенную за это время электронами.

**Решение.** В магнитном поле бетатрона под действием лоренцевых сил электроны движутся по окружности. При изменении магнитного поля изменяется магнитный поток  $\Phi$  сквозь контур, совпадающий с орбитой электронов, что порождает вихревое электрическое поле. Так как электроны движутся вдоль одной из силовых линий электрического поля, то под действием последнего скорость их будет возрастать.

Напряженность  $E$  вихревого электрического поля в точках орбиты электронов найдем по закону электромагнитной индукции (см. формулу (16.6)):

$$\mathcal{E} = \oint E_t dl = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

где контур интегрирования совпадает с одной из линий вектора  $E$ , имеющей форму окружности радиуса  $r$ . Поэтому  $E_t = E = \text{const}$  для всех точек контура и, следовательно,

$$\oint E_t dl = E \cdot 2\pi r. \quad (2)$$

Так как магнитный поток изменяется равномерно в течение  $t$  от нуля до значения  $\Phi_{\text{макс}}$ , то скорость его изменения можно выразить так:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_{\text{макс}}}{t} = \frac{B_1 \pi r^2}{t}. \quad (3)$$

Из (1)—(3) получим для модуля вектора  $E$

$$E = B_1 r / 2t.$$

Значит, на каждый электрон, движущийся в магнитном поле по окружности, будет действовать со стороны вихревого электрического поля постоянная по модулю сила, равная

$$F = eE = \frac{B_1 r e}{2t} \quad (4)$$

и направленная вдоль вектора скорости, а потому сообщающая электрону *тангенциальное* ускорение.

Чтобы найти скорость, приобретенную электроном в результате действия на него в течение времени  $t$  силы  $F$ , применим к нему второй закон Ньютона, записав его для *касательного* к траектории направления. Поскольку в бетатроне электроны разгоняются, как правило, до скоростей, близких к скорости света, запишем уравнение движения электрона в форме (18.4) с учетом (18.2):

$$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Интегрируя это уравнение и принимая, что  $v = 0$  при  $t = 0$ , найдем

$$Ft = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

откуда

$$v = \frac{Fct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}. \quad (5)$$

Наконец, подставив в уравнение (5) значение  $F$  из формулы (4), определим

$$v = \frac{B_1 r e c}{\sqrt{4m_0^2 c^2 + B_1^2 r^2 e^2}}.$$

Выразим в единицах СИ величины, входящие в формулу:  $B_1 = 0,200$  Т,  $r = 0,300$  м;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с. Выполнив вычисление, получим

$$v = 0,999 c.$$



## Глава 6

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

#### § 19. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

##### Основные формулы

Смещение, скорость и ускорение при гармоническом колебании определяются уравнениями

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (19.1)$$

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (19.2)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \quad (19.3)$$

где  $A$  — амплитуда колебания,  $\omega$  — циклическая частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза

Циклическая частота  $\omega$ , период колебаний  $T$  и частота  $\nu$  связаны соотношениями

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \quad (19.4)$$

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода, амплитуда которого  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются уравнениями:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (19.5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad (19.6)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды складываемых колебаний,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — их начальные фазы

Сила, действующая на тело при свободном гармоническом колебании (*квазиупругая сила*), всегда пропорциональна смещению и направлена в сторону, противоположную смещению:

$$F = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x = -kx \quad (19.7)$$

где  $k = m\omega_0^2$  — коэффициент квазиупругой силы, измеряемый силой, вызывающей смещение  $x$ , равное единице.

При отсутствии сопротивления среды циклическая частота  $\omega_0$  свободных гармонических колебаний, называемая *собственной циклической частотой* и период  $T$  равны:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (19.8)$$

Период колебаний математического маятника длиной  $l$  равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (19.9)$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgd}, \quad (19.10)$$

где  $I$  — момент инерции маятника относительно оси качаний,

$d$  — расстояние от оси до его центра тяжести

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, постоянна и равна

$$W = m\omega^2 A^2/2. \quad (19.11)$$

Уравнение смещения в затухающих колебаниях при наличии силы сопротивления  $F_{\text{сопр}}$  пропорциональной скорости ( $F_{\text{сопр}} = -rv$ , где  $r$  — коэффициент сопротивления), имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (19.12)$$

Здесь  $A_0 e^{-\beta t}$  — убывающая во времени амплитуда смещения;  $\beta$  — коэффициент затухания;  $\omega$  — циклическая частота;  $A_0$ ,  $\varphi_0$  — начальные амплитуда и фаза (определяются из начальных условий). Величины  $\beta$ ,  $\omega$  выражаются через параметры системы  $r$ ,  $m$ ,  $k$  формулами:

$$\beta = r/2m, \quad (19.13)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{k/m - r^2/4m^2}. \quad (19.14)$$

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln(A_1/A_2) = \beta T, \quad (19.15)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды двух последовательных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = h / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}, \quad (19.16)$$

где  $h$  есть отношение амплитуды вынуждающей силы к массе тела;  $\omega_0$  — собственная циклическая частота;  $\omega$  — циклическая частота вынуждающей силы.

Резонансная циклическая частота равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (19.17)$$

## А. КИНЕМАТИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### Методические указания

1. Уравнения гармонического колебания можно записать двумя способами, основанными на простой связи между синусом и косинусом:

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2), \quad \sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2).$$

Поэтому смещение, скорость и ускорение *того же самого* гармонического колебания, которое описывается формулами (19.1)—(19.3), всегда можно записать в виде уравнений:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi'),$$

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi'),$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi') = -\omega^2 x,$$

где  $\varphi' = \varphi_0 - \pi/2$ . Начальные фазы  $\varphi_0$  или  $\varphi'$  при решении задач находят из начальных условий (см. задачу № 19-1).

2. Из системы (19.1)—(19.3) следует, что максимальному смещению при гармоническом колебании соответствуют нулевая скорость и максимальное ускорение, направленное противоположно смещению (в сторону равновесия). Наоборот, в положении равновесия ( $x = 0$ ) скорость максимальная, а ускорение равно нулю.

3. При сложении  $n$  ( $n > 2$ ) одинаково направленных гармонических колебаний равных периодов амплитуду и начальную фазу результирующего колебания можно находить по формулам (19.5) и (19.6), по-

следовательно применяя их  $n - 1$  раз. Однако более эффективным в этом случае является метод векторных диаграмм (см. задачу № 9-3).

4. В задачах на определение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, следует исключать время  $t$  из уравнений складываемых колебаний, представленных в виде:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Если при этом  $\omega_1 = \omega_2$ , то результирующей траекторией движущейся точки будет эллипс.

Способ нахождения скорости и ускорения точки в любой момент ее движения по траектории рассмотрен в решении задачи № 19-5.

### Решение задач

19-1. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой  $\nu = 500$  Гц и амплитудой  $A = 0,020$  см. Определить средние значения скорости  $\langle v \rangle$  и ускорения  $\langle a \rangle$  точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальные значения этих величин:  $v_{\text{макс}}$  и  $a_{\text{макс}}$ .

**Решение.** По определению средней скорости имеем

$$\langle v \rangle = \Delta l / \Delta t, \quad (1)$$

где  $\Delta l$  — путь, пройденный за время  $\Delta t$ . В данном случае  $\Delta l = A$ ;  $\Delta t = T/4$ , поскольку за время периода  $T$  колеблющаяся точка проходит путь, равный четырем амплитудам. Подставив эти значения  $\Delta l$  и  $\Delta t$  в (1) и учитывая соотношение (19.4), получим

$$\langle v \rangle = 4A/T = 4\nu A. \quad (2)$$

По формуле (19.2), положив  $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ , найдем максимальную скорость:

$$v_{\text{макс}} = \omega A = 2\pi\nu A. \quad (3)$$

Согласно определению среднего ускорения, запишем

$$\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t, \quad (4)$$

где  $\Delta v = v - v_0$ . В данном случае начальная скорость  $v_0 = 0$ , конечная скорость  $v = v_{\text{макс}} = \omega A$ . Подставим значения  $\Delta v$  и  $\Delta t = T/4$  в формулу (4), используя соотношение (19.4):

$$\langle a \rangle = 4\omega A/T = 8\pi\nu^2 A. \quad (5)$$

По формуле (19.3), приняв  $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$ , найдем максимальное ускорение:

$$a_{\text{макс}} = \omega^2 A = 4\pi^2\nu^2 A. \quad (6)$$

Подставив в формулы (2), (3), (5), (6) числовые значения величин и выполнив вычисление, получим:

$$\langle v \rangle = 40 \text{ см/с}, \quad v_{\text{макс}} = 63 \text{ см/с}, \quad \langle a \rangle = 1,2 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2, \\ a_{\text{макс}} = 2,0 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2.$$

**З а м е ч а н и е.** Проверкой легко убедиться в том, что средние величины  $\langle v \rangle$  и  $\langle a \rangle$  на пути от крайнего положения до положения равновесия колеблющейся точки не равны среднему арифметическому между начальными и конечными значениями этих величин. Методом среднего арифметического для нахождения  $\langle v \rangle$  и  $\langle a \rangle$  здесь пользоваться нельзя, поскольку скорость и ускорение при гармоническом колебании, как это следует из (19.2), (19.3), не являются линейными функциями времени (см стр 11).

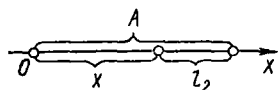


Рис 19 1

19-2. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный: 1) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; 2) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

**Р е ш е н и е.** 1. Путь  $l_1 = A/2$ , пройденный точкой в гармоническом колебании при движении от положения равновесия к крайнему положению, равен смещению  $x$ , определяемому уравнением (19.1), которое с учетом (19.4) запишем так:

$$x = A \sin (2 \pi t/T + \varphi_0). \quad (1)$$

Чтобы найти начальную фазу  $\varphi_0$ , воспользуемся начальными условиями задачи:  $x = 0$  при  $t = 0$ . Подставив эти значения  $x$  и  $t$  в (1), получим  $\varphi_0 = 0$ , следовательно\*,

$$x = A \sin (2 \pi t/T). \quad (2)$$

Подставив в (2) значение  $x = A/2$ , получим искомое время, выраженное в долях периода:

$$t = T/12.$$

2. Точка движется из крайнего положения, поэтому начальные условия будут такие:  $x = A$  при  $t = 0$ . Подставив эти значения  $x$  и  $t$  в уравнение (1), получим  $\varphi_0 = \pi/2$ . Следовательно,

$$x = A \sin \left( \frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos (2\pi t/T). \quad (3)$$

Чтобы избежать ошибки, учтем, что исходное уравнение (19.1) выражает смещение  $x$  точки при гармоническом колебании, отсчитанное от положения равновесия (точка  $O$  на рис. 19-1), но не путь, прой-

\* Вместо (1) можно было записать:  $x = A \cos (\omega t + \varphi')$ . Из начальных условий имеем  $x = 0$  при  $t = 0$ . Подставив эти значения в уравнение, найдем начальную фазу  $\varphi' = \pm \pi/2$ . Считая, что точка начинает движение в сторону положительных значений  $x$ , должны взять  $\varphi' = -\pi/2$ . Следовательно,  $x = A \cos (\omega t - \pi/2) = A \sin \omega t$ , что совпадает с (2).

денный точкой; лишь в частном случае движения точки из положения равновесия к крайнему положению эти величины численно равны (этим мы воспользовались в первом случае). Если точка, двигаясь из крайнего положения, прошла путь  $l_2 = A/3$ , то, как видно из рис 19-1, ее смещение равно

$$x = A - l_2 = 2/3 A.$$

Подставив это значение  $x$  в формулу (3), получим  $\cos(2\pi t/T) = 2/3$ . Отсюда, пользуясь таблицей косинусов, найдем искомое время в долях периода:

$$\frac{2\pi}{T} t = 48^\circ, \quad t = \frac{48^\circ}{360^\circ} T = \frac{T}{7,5}.$$

19-3. Материальная точка участвует в трех колебаниях, происходящих по одной прямой и выраженных уравнениями:

$$x_1 = 3 \cos t, \quad (1)$$

$$x_2 = 3 \cos(t + \pi/3), \quad (2)$$

$$x_3 = 3 \sin(t + 7\pi/6) \quad (3)$$

(смещения даны в сантиметрах). Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Написать его уравнение.

**Решение.** Точка участвует в трех гармонических колебаниях, так как смещения  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  являются синусоидальными (косинусоидальными) функциями времени. Результирующее колебание точки также будет гармоническим. Его амплитуду и начальную фазу можно найти по формулам (19.5) и (19.6). Однако они выведены для случая, когда уравнения слагаемых колебаний содержат одну и ту же тригонометрическую функцию: синус или косинус. Поэтому перепишем уравнение (3), выразив  $x_3$  через косинус:

$$x_3 = 3 \cos(t + 2\pi/3). \quad (3a)$$

Сравнив (1), (2), (3a) с общим уравнением смещения гармонических колебаний, видим, что складываемые колебания характеризуются следующими величинами: амплитуды  $A_1 = A_2 = A_3 = 3$  см; циклические частоты  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$  рад/с; начальные фазы  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi/3$ ,  $\varphi_3 = 2\pi/3$ .

С помощью формул (19.5) и (19.6) можно сначала сложить любые два из трех заданных колебаний. Затем, еще раз применив эти формулы, найти амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi$  результирующего колебания.

К этому же результату придем быстрее, применив *метод векторных диаграмм*. Сущность его в том, что амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\varphi$  результирующего колебания находят путем сложения векторов. Длина каждого вектора берется равной амплитуде соответствующего колебания, а угол, образованный вектором с осью  $x$ , — начальной фазе. Величины  $A$  и  $\varphi$  определяются длиной результирующего вектора и углом его наклона к оси  $x$ .

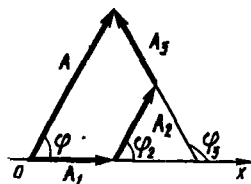


Рис. 19-2

На рис. 19-2 построена векторная диаграмма по данным задачи. Из чертежа сразу получаем:  $\varphi = \pi/3$ ,  $A = 2 A_1$ , т. е.  $A = 6$  см. Теперь запишем уравнение результирующего колебания:

$$A = 6 \cos(t + \pi/3).$$

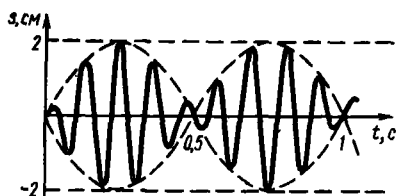


Рис. 19-3

19-4. Известно, что сложное колебание, график которого дан на рис. 19-3, состоит из двух синусоидальных колебаний. Найти их частоты и амплитуды.

**Решение.** Приведенный график изображает гармоническое колебание с медленно периодически изменяющейся амплитудой. Такие колебания, называемые *биениями*, получаются в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с мало различающимися частотами. При этом частота сложных колебаний  $\nu$  оказывается равной полусумме частот слагаемых колебаний  $\nu_1$  и  $\nu_2$ :

$$\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2, \quad (1)$$

а частота изменения амплитуды, называемая *частотой биений*, равна разности частот:

$$\nu_{\text{ампл}} = |\nu_1 - \nu_2|. \quad (2)$$

Из графика видно, что за одну секунду произошло девять полных колебаний, значит,  $\nu = 9$  Гц. За это же время совершилось два полных цикла изменения амплитуды, следовательно,  $\nu_{\text{ампл}} = 2$  Гц. Подставив в (1) и (2) значения  $\nu$ ,  $\nu_{\text{ампл}}$  и решив эту систему уравнений, найдем:

$$\nu_1 = 8 \text{ Гц}; \quad \nu_2 = 10 \text{ Гц}.$$

Амплитуда сложного колебания в каждый момент определяется формулой (19:5). При этом ее максимальное значение при  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  равно

$$A_{\text{макс}} = A_1 + A_2. \quad (3)$$

Минимальное значение амплитуды получим при  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ :

$$A_{\text{мин}} = A_1 - A_2. \quad (4)$$

Но из графика видно, что  $A_{\text{макс}} = 2$  см,  $A_{\text{мин}} = 0$ . Подставив эти значения  $A_{\text{макс}}$  и  $A_{\text{мин}}$  в (3) и (4), найдем

$$A_1 = A_2 = 1 \text{ см.}$$

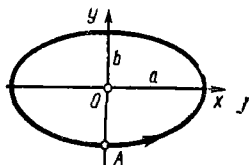


Рис 19 4

19-5. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выраженных уравнениями  $x = 2 \sin \pi t$ ;  $y = -\cos \pi t$  (смещения даны в сантиметрах). Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже. Показать направление движения точки. Определить скорость и ускорение точки в момент  $t = 0,5$  с.

**Решение.** Так как циклические частоты слагаемых колебаний одинаковы, траекторией точки будет эллипс. Исключив время  $t$  из двух заданных уравнений, получим

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями  $a = 2$  см и  $b = 1$  см (рис. 19-4). Чтобы определить направление движения точки, учтем, что в момент  $t = 0$  имеем  $x = 0$ ,  $y = -1$  см и, следовательно, точка находится в положении  $A$  (рис. 19-4). При возрастании  $t$  увеличивается также  $x$ , значит, точка движется по траектории против часовой стрелки

Скорость точки  $v$  при ее движении по эллипсу равна векторной сумме скоростей  $v_x$  и  $v_y$  в слагаемых колебаниях. Поскольку эти колебания взаимно перпендикулярны, то

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1)$$

Аналогично определим искомое ускорение:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad (2)$$

где  $a_x$ ,  $a_y$  — ускорения точки в слагаемых колебаниях.

По формулам (19.2) и (19.3) имеем:

$$\begin{aligned} v_x &= 2\pi \cos \pi t; & v_y &= \pi \sin \pi t; \\ a_x &= -2\pi^2 \sin \pi t; & a_y &= \pi^2 \cos \pi t. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в формулы (1) и (2), найдем:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \pi t + \pi^2 \sin^2 \pi t}; \\ a &= \sqrt{4\pi^4 \sin^2 \pi t + \pi^4 \cos^2 \pi t}. \end{aligned}$$

Взяв  $t = 0,5$  с и выполнив вычисление, получим:  $v = 3,14$  см/с,  $a = 19,7$  см/с<sup>2</sup>.

**З а м е ч а н и е.** Было бы ошибкой искать ускорение  $a$  как производную  $dv/dt$ . Величина  $dv/dt$  в соответствии с формулой (1.7) выражает тангенциальное ускорение  $a_t$  движущейся точки, но не полное ускорение  $a$ . В криволинейном движении  $a_t \neq a$ .

## Б. ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### Методические указания

1. Если тело совершает колебания под действием квазиупругой силы, то независимо от природы этой силы циклическая частота и период колебаний (они будут гармоническими) всегда определяются формулами (19.8), где  $k$  — коэффициент квазиупругой силы. В частности, если колебания обусловлены упругой силой пружины, то коэффициент  $k$  называется *жесткостью* пружины, а формулы (19.8) выражают циклическую частоту и период колебаний пружинного маятника.

2. Циклическая частота  $\omega$  затухающих колебаний, как это следует из соотношения (19.14), всегда меньше циклической частоты свободных колебаний при отсутствии сопротивления, т. е. собственной частоты  $\omega_0$ . Таким образом, сопротивление среды приводит к уменьшению частоты и к увеличению периода колебаний. Однако во многих задачах, когда сопротивление среды незначительно, его влиянием можно пренебречь и рассчитывать частоту и период слабо затухающих колебаний по формулам (19.8). Это можно делать при выполнении следующих неравенств:

$$1) \beta^2 \ll \omega_0^2 \text{ или } 2) \lambda^2 \ll 4\pi^2.$$

Первое условие вытекает непосредственно из формулы (19.14); второе выведено при решении задачи № 19-10. Оба условия эквивалентны друг другу.

### Решение задач

**19-6.** Шар, радиус которого  $R = 5,00$  см, подвешен на нити длиной  $l_0 = 10,0$  см. Определить относительную погрешность, которую допускают, если, вычисляя период колебаний маятника, принимают его за математический маятник длиной  $l = 15,0$  см.

**Решение.** Шар, висющий на нити, представляет собой физический маятник. Его период  $T_{\text{ф}}$  выражается формулой (19.10). Если принять маятник за математический, то его период  $T_{\text{м}}$  надо находить по формуле (19.9), полагая согласно условию длину  $l$  равной расстоянию от точки подвеса до центра тяжести шара:

$$l = l_0 + R = d. \quad (1)$$

Таким образом, считая маятник математическим, мы заменяем шар материальной точкой, расположенной в его центре, что вызывает некоторую погрешность в вычислении периода.



С помощью формул (19.9), (19.10) найдем отношение периодов  $T_\Phi$  и  $T_M$ , учитывая соотношение (1):

$$\frac{T_\Phi}{T_M} = \sqrt{\frac{I}{md^2}}. \quad (2)$$

Момент инерции шара относительно оси качаний согласно формулам (4.5в) и (4.6) равен

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + md^2.$$

Подставив это значение  $I$  в (2), получим

$$\frac{T_\Phi}{T_M} = \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5d^2}} = \sqrt{1,044} = 1,022.$$

Отсюда найдем относительную погрешность в вычислении периода:

$$\frac{\Delta T}{T_\Phi} = \frac{T_\Phi - T_M}{T_\Phi} \approx 0,022, \text{ или } 2,2\%.$$

19-7. Тело, неподвижно висящее на цилиндрической пружине, растягивает ее на  $x_0 = 5,0$  см. Затем тело было смещено из положения равновесия по вертикали и отпущено, в результате чего оно стало совершать колебания. Найти их период.

**Решение.** Если бы тело совершало колебания только под действием упругой силы пружины  $F_{\text{упр}} = -kx$ , их период можно было бы определить по формуле (19.8). В данном случае на тело еще действует сила тяжести  $mg$ . Чтобы выяснить ее влияние на колебания груза, рассмотрим силы, действующие на тело, в двух положениях:

1) тело неподвижно висит на пружине. Равнодействующая сил, приложенных к телу,  $F_1 = 0$ . Приняв направление вниз за положительное, запишем

$$F_1 = mg - kx_0 = 0; \quad (1)$$

2) тело смещено из положения равновесия на  $x'$ . Будем считать  $x'$  величиной алгебраической. Пружина в этом случае растянулась на  $x_0 + x'$ . Равнодействующая сил, приложенных к телу, равна

$$F_2 = mg - k(x_0 + x').$$

Раскрывая скобки и учитывая (1), получим

$$F_2 = -kx'. \quad (2)$$

Из (2) видно, что равнодействующая сил  $F_{\text{упр}}$  и  $mg$  пропорциональна растяжению пружины и противоположна ему по направлению, если только это растяжение отсчитывать от положения равновесия висящего на пружине груза. Следовательно, и при наличии силы тяжести тело будет совершать гармонические колебания. По формуле (19.8), где согласно (1)  $k = mg/x_0$ , найдем период этих колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}} = 6,28 \sqrt{\frac{5,0}{980}} \text{ с} = 0,45 \text{ с}.$$

**19-8.** Ареометр массы 55 г, плавающий в растворе серной кислоты, указывает, что плотность жидкости  $\rho = 1,27 \text{ г/см}^3$ . Если прибор сместить из положения его равновесия немного по вертикали и отпустить, он начнет колебаться. Считая колебания незатухающими, определить их период, если радиус цилиндрической трубки ареометра, в которой заключена его шкала, равен  $r = 0,30 \text{ см}$ .

**Решение.** На погруженный в жидкость ареометр действуют две силы: сила тяжести  $mg$  и выталкивающая, архимедова, сила  $F_A$ , равная весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_A = P_{\text{ж}} = m_{\text{ж}}g = \rho Vg,$$

где  $V$  — объем вытесненной жидкости, равный объему погруженной части ареометра. Как и в предыдущей задаче, выясним соотношение между действующими на тело силами в двух случаях:

1) ареометр находится в равновесии. Приложенные к нему силы уравновешиваются. Приняв направление вниз за положительное, запишем

$$mg - \rho gV = 0;$$

2) ареометр смещен из положения равновесия по вертикали на величину  $x$  ( $x$  — алгебраическая величина). Поскольку изменится объем погруженной части прибора, выталкивающая сила также изменится. К ареометру будет приложена равнодействующая, направленная по вертикали и равная

$$F = mg - \rho g(V + \Delta V), \quad (2)$$

где  $\Delta V = \pi r^2 x$  — изменение объема погруженной части прибора. Подставив в (2) это значение  $\Delta V$  и раскрыв скобки, получим с учетом (1)

$$F = -\pi r^2 \rho g x = -kx, \quad (3)$$

где  $k = \pi r^2 \rho g$  — постоянная величина. Видим, что на ареометр действует сила, пропорциональная смещению, взятому с обратным знаком, т. е. квазиупругая сила. Следовательно, он совершает гармонические колебания, период которых найдем по (19.8):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\pi r^2 \rho g}} = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{m}{\rho g}} = 2,5 \text{ с.}$$

**19-9.** Энергия затухающих колебаний маятника, происходящих в некоторой среде, за время  $t = 2,00$  мин уменьшилась в  $N = 100$  раз. Определить коэффициент сопротивления, если масса маятника  $m = 0,100 \text{ кг}$ .

**Решение.** Коэффициент сопротивления  $r$  связан с коэффициентом затухания  $\beta$  и массой  $m$  тела соотношением (19.13):

$$r = 2 m\beta, \quad (1)$$

Чтобы найти величину  $\beta$ , обратимся к уравнению затухающих колебаний (19.12). Стоящий в нем множитель

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (2)$$

выражает уменьшающуюся со временем амплитуду колебаний. Из (19.11) следует, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, обозначив начальную и конечную энергию колебаний через  $W_0$  и  $W$ , можно записать:

$$N = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2; \quad \frac{A_0}{A} = \sqrt{N} = 10,0. \quad (3)$$

Теперь из (2) и (3) имеем  $e^{-\beta t} = 10$ . Логарифмируя, находим:

$$\beta t = \ln 10,0; \quad \beta = (\ln 10,0)/t.$$

Подставив найденное значение  $\beta$  в (1), получим ответ:

$$r = 2 m (\ln 10,0)/t.$$

Учитывая, что  $m = 0,100$  кг,  $t = 120$  с,  $\ln 10,0 = 2,3$ , выполним вычисление:

$$r = \frac{2 \cdot 0 \cdot 100 \cdot 2,3}{120} \text{ кг/с} = 0,0038 \text{ кг/с}.$$

**19-10.** Гиря массы 0,500 кг подвешена к пружине, жесткость которой  $k = 32,0$  Н/м, и совершает затухающие колебания. Определить их период в двух случаях: 1) за время, в течение которого произошло  $n_1 = 88$  колебаний, амплитуда уменьшилась в  $N_1 = 2,00$  раза; 2) за время двух колебаний ( $n_2 = 2,00$ ) амплитуда уменьшилась в  $N_2 = 20$  раз.

**Решение.** Сопротивление среды уменьшает частоту свободных колебаний. Циклическая частота затухающих колебаний определяется по (19.14), откуда период равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1)$$

Собственную циклическую частоту  $\omega_0$  выразим сразу по (19.8), зная массу  $m$  гири и жесткость  $k$  пружины:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 8,0 \text{ рад/с}. \quad (2)$$

Коэффициент же затухания  $\beta$  нельзя найти непосредственно из условия задачи. Согласно (19.15) он равен

$$\beta = \lambda/T. \quad (3)$$

Чтобы найти величину  $\lambda$ , обратимся к уравнению затухающих колебаний (19.12). Уменьшающуюся со временем амплитуду с учетом (3) выразим так:

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\lambda t/T}. \quad (4)$$

Пользуясь введенными в условии обозначениями, можно записать:  $A_0/A = N$ ;  $t/T = n$ . Тогда из (4) следует  $e^{\lambda n} = N$ , откуда, логарифмируя, имеем

$$\lambda = (\ln N)/n.$$

Подставив числовые значения  $N$  и  $n$  для двух случаев, выполним вычисление:

$$\lambda_1 = 0,0079; \quad \lambda_2 = 1,5.$$

Теперь перепишем формулу (1) с учетом (3):

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2/T^2}}.$$

Получилось квадратное уравнение относительно периода  $T$ . Решив его, найдем (огбрасывая отрицательный корень)

$$T = \sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}/\omega_0. \quad (5)$$

Приступая к вычислениям периода, заметим, что в первом случае  $\lambda^2 \ll 4\pi^2$ . Поэтому, сохраняя достаточно высокую точность вычислений, можно в формуле (5) пренебречь членом  $\lambda^2$  и тогда

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{8,0} = 0,78 \text{ с.}$$

Во втором случае нельзя отбросить величину  $\lambda^2$ . Тогда производя вычисления по (5), получим

$$T_2 = 0,81 \text{ с.}$$

**19-11** Чему равна амплитуда вынужденных колебаний при резонансе  $A_{\text{рез}}$ , если при очень малой (по сравнению с собственной) частоте вынужденных колебаний она равна  $A_0 = 0,10$  см, а логарифмический декремент затухания  $\lambda = 0,010$ ?

**Решение.** Как видно из (19.16), амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. При некотором значении  $\omega = \omega_{\text{рез}}$ , определяемом по (19.17), наступает явление резонанса: амплитуда достигает максимального значения  $A_{\text{рез}}$ . Величину  $A_{\text{рез}}$  выразим по (19.16), подставив из (19.17)  $\omega_{\text{рез}}$  вместо  $\omega$ . После ряда упрощений найдем

$$A_{\text{рез}} = h/2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1)$$

Из формулы (19.16) можно также вывести простое соотношение между величинами  $A_0$  и  $h$ . Учитывая вытекающие из условия соотношения: 1)  $\omega \ll \omega_0$ ; 2)  $\lambda^2 \ll 4\pi^2$ , откуда следует, что  $\beta^2 \ll \omega_0^2$  (см. п. 2 методических указаний на стр. 223), отбросим члены  $\omega^2$  и  $4\beta^2\omega^2$  в (19.16):

$$A_0 = h/\omega_0^2.$$

Подставив это значение  $h$  в формулу (1) и пренебрегая величиной  $\beta^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$ , получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_0 \omega_0^2}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{A_0 \omega_0}{2\beta}. \quad (2)$$

Выразим собственную частоту  $\omega_0$  и коэффициент затухания  $\beta$  по формулам (19.4) и (19.15):

$$\omega_0 = 2\pi/T_0; \quad \beta = \lambda/T.$$

Здесь  $T_0$  — период свободных колебаний при отсутствии сопротивления;  $T$  — период затухающих колебаний, которые начались бы после прекращения действия вынуждающей силы. Подставив эти значения  $\omega_0$  и  $\beta$  в соотношение (2) и учитывая, что при слабом затухании ( $\lambda^2 \ll 4\pi^2$ )  $T \approx T_0$ , найдем окончательный ответ:

$$A_{\text{рез}} = \pi A_0/\lambda = 31 \text{ см.}$$

## § 20. ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ. ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ

### Основные формулы

Уравнение бегущей волны, распространяющейся со скоростью  $c$  в направлении оси  $Oy$ :

$$x = A \sin [\omega (t - y/c) + \varphi_0], \quad (20.1)$$

где  $x$  — смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии  $y$  от источника гармонических колебаний, характеризующихся амплитудой  $A$ , циклической частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\varphi_0$ .

Длина волны  $\lambda$  и ее скорость  $c$  связаны соотношением

$$\lambda = cT = c/\nu, \quad (20.2)$$

где  $T$  — период колебаний;  $\nu = 1/T = \omega/2\pi$  — их частота.

Связь между разностью фаз двух точек бегущей волны и разностью хода  $y_2 - y_1$  (т. е. разностью расстояний этих точек от источника колебаний):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi (y_1 - y_2)/\lambda \quad (20.3)$$

В результате интерференции волн амплитуда достигает максимального значения при условии

$$|y_2 - y_1| = \Delta = 2k (\lambda/2) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (20.4)$$

и минимального значения при условии

$$\Delta = (2k + 1) (\lambda/2) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (20.5)$$

Явление Доплера: если источник и приемник звука перемещаются относительно среды, в которой распространяется звук, то частота звуковых колебаний  $\nu'$ , регистрируемая приемником звука, связана с частотой колебаний  $\nu$  источника соотношением

$$\nu' = \nu \frac{c + v}{c - u}, \quad (20.6)$$

где  $c$ ,  $u$ ,  $v$  — скорости соответственно звука, его источника и приемника. Формула (20.6) относится к случаю, если источник и приемник звука движутся по одной прямой. При этом величины  $u$ ,  $v$  — алгебраические:  $u > 0$ , если источник движется к приемнику;  $u < 0$ , если источник удаляется от приемника. Аналогично,  $v > 0$ , если приемник приближается к источнику;  $v < 0$ , если приемник движется от источника.

### Скорость продольных волн в тонких стержнях

$$c := \sqrt{E/\rho}, \quad (20.7)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\rho$  — плотность материала стержня.

Скорость звука в газах

$$c = \sqrt{\gamma p/\rho}, \quad (20.8)$$

где  $p$  и  $\rho$  — давление и плотность газа, не возмущенного волной;  $\gamma$  — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Амплитуда звукового давления  $\Delta p_0$  и амплитуда скорости  $v_0$  частиц в звуковой волне связаны соотношением

$$\Delta p_0 = c\rho v_0. \quad (20.9)$$

Интенсивность звука  $I$ , т. е. энергия, переносимая звуковой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, выражается через амплитуду звукового давления:

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2c\rho}, \quad (20.10)$$

где  $\rho$  — плотность газа.

Уровень интенсивности звука (в децибелах) определяется формулой

$$L = 10 \lg (I/I_0), \quad (20.11)$$

где  $I$  — интенсивность данного звука;  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> — интенсивность звука на пороге слышимости при стандартной частоте  $\nu = 1000$  Гц.

Уровень громкости звука (в фонах) вычисляется по формуле

$$L_N = 10 \lg (I_N/I_0), \quad (20.12)$$

где  $I_N$  — интенсивность звука частоты  $\nu = 1000$  Гц, равногромкого с исследуемым звуком.

### Методические указания

1. Уравнение бегущей волны (20.1) выражает смещение от положения равновесия любой частицы как функцию расстояния  $y$  до источника колебаний и времени  $t$ . При этом предполагается, что амплитуда смещения всех частиц на пути волны одинакова. Это может быть лишь в случае плоских волн, распространяющихся в одном направлении при отсутствии поглощения энергии волн средой. Наоборот, в случае сферических волн, распространяющихся во всех направлениях от источника колебаний, амплитуда смещения частиц среды зависит от расстояния до источника колебаний (см. задачу № 20-5).

Уравнение бегущей волны может быть также выражено формулой [см. (20.1)]

$$x = A \cos [\omega (t - y/c) + \varphi'], \quad (20.1a)$$

где  $\varphi' = \varphi_0 - \pi/2$ . Начальную фазу  $\varphi_0$  (или  $\varphi'$ ) при решении задач находят из начальных условий (см. задачу № 20-1). В учебной литературе часто приводят уравнение бегущей волны, полагая  $\varphi_0 = 0$  (или  $\varphi' = 0$ ). Такое уравнение уже не является общим, а соответствует определенным начальным условиям: при  $t = 0$ ,  $y = 0$  должно быть  $x = 0$  в случае (20.1) и  $x = A$  в случае (20.1a). Если в задаче не содержится начальных условий, найти однозначно смещение  $x$

по уравнению бегущей волны нельзя. (Таковы, например, задачи № 12.63, 12.64 из задачника [10].)

2. Следует различать две физические величины, выражаемые формулами (20.11), (20.12), — уровень интенсивности звука и уровень его громкости. Уровень интенсивности звука является его *объективной* характеристикой, не зависящей от звукового ощущения. Уровень громкости звука, как *субъективная* характеристика его, зависит не только от интенсивности звука  $I$ , но и от частоты  $\nu$ , так как ухо человека обладает разной чувствительностью к звукам разной частоты. Сравнивая формулы (20.11) и (20.12), видим, что для звука частоты  $\nu = 1000$  Гц уровень громкости  $L_N$  в фонах равен уровню интенсивности  $L$  в децибелах. Однако при других частотах  $L_N \neq L$ . Различие между этими величинами особенно велико при очень низких звуковых частотах.

3. Чтобы рассчитать уровень громкости звука, используют *кривые равной громкости*, показывающие зависимость интенсивности звука от частоты при постоянных уровнях громкости. Такие графики в виде семейства кривых, каждая из которых соответствует некоторому уровню громкости, имеются в некоторых задачниках (см., например, задачник [15]) и учебных пособиях по курсу общей физики.

Если в задаче, связанной с определением уровня громкости звука, не указана частота звуковых колебаний, имеется в виду, что речь идет о звуке, частота которого близка к стандартной частоте  $\nu = 1000$  Гц.

### Решение задач

20-1. В незатухающей бегущей волне задана точка  $M$ , отстоящая от источника колебаний на расстоянии  $y = \lambda/12$  в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний  $A = 0,050$  м. Считая в начальный момент времени смещение точки  $P$ , находящейся в источнике, максимальным, определить смещение от положения равновесия точки  $M$  для момента  $t = T/6$ , а также разность фаз колебаний точек  $M$  и  $P$ .

**Решение.** Смещение точки  $M$  можно найти с помощью уравнения бегущей волны (20.1). Используя условие задачи, преобразуем это уравнение так, чтобы в него вошли длина волны  $\lambda$  и период  $T$  колебаний. Учитывая соотношение  $\omega = 2\pi/T$  и равенство (20.2), получим

$$x = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \quad (1)$$

Чтобы найти начальную фазу  $\varphi_0$ , воспользуемся начальными условиями задачи: если  $t = 0$ ,  $y = 0$ , то  $x = A$ . При этих значениях  $t$ ,  $y$ ,  $x$  из уравнения (1) имеем  $\sin \varphi_0 = 1$ , откуда  $\varphi_0 = \pi/2$ .

Теперь, подставив числовые значения величин  $A$ ,  $t/T$ ,  $y/\lambda$ ,  $\varphi_0$  в (1), получим первый ответ:

$$x = 0,050 \cdot \sin \left[ 2\pi \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 0,050 \cdot 0,87 \text{ м} = 0,044 \text{ м}.$$

Для вычисления разности фаз  $\varphi_M - \varphi_P$  колебаний точек  $M$ ,  $P$  учтем, что для точки  $P$  координата  $y = 0$ . Следовательно, в любой момент  $t$  фаза точки  $P$ , т. е. аргумент синуса в (1), равна  $2\pi t/T + \varphi_0$ . Тогда

$$\varphi_M - \varphi_P = \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] - \left[ 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right] = -2\pi \frac{y}{\lambda}. \quad (2)$$

Этот же результат можно получить сразу из формулы (20.3), если положить в ней  $y_1 - y_2 = -y$ . Подставив в (2) числовое значение отношения  $y/\lambda$ , найдем

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi \cdot (1/12) = -\pi/6.$$

Таким образом, колебания точки  $M$  отстают по фазе от колебаний источника на угол  $\pi/6$ .

20-2. Для определения частоты звуковых колебаний был применен интерференционный прибор, изображенный на рис. 20-1, где  $T$  — источник звука;  $A, B$  — два колена, представляющие собой полые металлические трубки (колено  $B$  — выдвигнётся);  $M$  — слуховая трубка. В зависимости от положения колена  $B$  наблюдатель регистрирует с помощью слуховой трубки усиление или ослабление звука. Для того чтобы перейти от одного минимума звука к следующему, перемещают выдвинутое колено на расстояние  $l = 5,5$  см. Считая скорость звука в воздухе при температуре опыта равной  $c = 340$  м/с, найти частоту звуковых колебаний.

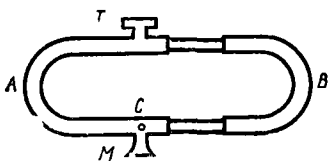


Рис 20 1

**Решение.** В точке  $C$  (рис. 20-1) происходит интерференция звуковых волн, приходящих сюда от источника  $T$  различными путями:  $TAC$  и  $TBC$ . Результат интерференции волн выражается условиями (20.4), (20.5).

Переместив колено  $B$  на расстояние  $l$ , изменяют тем самым разность хода волн  $\Delta = TBC - TAC$  на величину  $2l$ :

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2l, \quad (1)$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  — разность хода волн в начальном и конечном положениях колена. Так как в обоих положениях громкость звука и связанная с ней амплитуда звуковых колебаний минимальны, то каждая из величин  $\Delta_1, \Delta_2$  определяется формулой (20.5):

$$\Delta_1 = (2k_1 + 1) (\lambda/2), \quad \Delta_2 = (2k_2 + 1) (\lambda/2). \quad (2)$$

При этом, поскольку перемещение колена  $B$  соответствует двум соседним минимумам звука, должно выполняться соотношение

$$k_2 - k_1 = 1. \quad (3)$$



Учитывая (3), вычтем почленно уравнения (2) друг из друга. Тогда получим

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda \quad (4)$$

Сравнивая выражения (1) и (4), имеем

$$\lambda = 2l.$$

Теперь из соотношения (20.2) найдем частоту звуковых колебаний:

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин, получим

$$v = 3,1 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 3,1 \text{ кГц}.$$

**20-3.** Медный стержень длиной  $l = 0,50$  м закреплен в середине. Найти частоты возможных собственных продольных колебаний стержня.

**Решение.** Если какой-либо частице упругого тела сообщить начальный импульс (например, ударить молотком по торцу стержня), то все частицы тела придут в колебательное движение — в теле установятся собственные колебания. Процесс распространения колебаний в закрепленном стержне представляет собой *стоячие* волны. Эти волны являются результатом интерференции двух встречных систем бегущих волн: падающих на границу данного тела с окружающей средой и отраженных от этой границы.

Частота  $v$  собственных колебаний в стержне связана с длиной  $\lambda$  бегущей волны соотношением (20.2). При этом скорость  $c$  продольных волн в медном стержне можно найти по формуле (20.7). Тогда получим

$$v = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Величины  $E$ ,  $\rho$  для меди табличные, и наша задача сводится к определению длин волн, соответствующих собственным колебаниям стержня. Этим колебаниям всегда отвечает такое распределение по длине тела стоячих волн, которое удовлетворяет граничным условиям: на закрепленном конце тела должен быть узел смещений, на свободном — пучность. Следовательно, на концах данного стержня должны быть пучности смещений, а посередине его — узел смещений, так как в этом месте стержень закреплен. Один из возможных вариантов распределения стоячих волн по длине стержня изображен на рис. 20-2. Здесь по оси  $x$  отложены расстояния точек стержня от его левого конца, по оси  $y$  — смещения точек стержня от положения равновесия, которые они имеют в некоторый момент времени, участ-

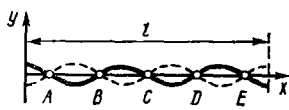


Рис 20-2

взя в продольных колебаниях\* (пунктиром изображен график смещения спустя промежуток времени, равный  $T/2$ ). Точки  $A, B, C, D, E$  — узлы стоячей волны.

Из графика видно, что на всей длине стержня (от  $A$  до  $E$ ) должно укладываться четное число полуволи и еще две четверти волны. Таким образом, имеем

$$l = (2k + 1)(\lambda/2),$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  Отсюда

$$\lambda = 2l/(2k + 1).$$

Подставив это значение  $\lambda$  в формулу для частоты, получим ответ:

$$v = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} (2k + 1).$$

Взяв из таблиц значения  $E = 12 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и произведя вычисления, найдем

$$v = 3,7 \cdot 10^3 (2k + 1) \text{ Гц.}$$

Значение  $k = 0$  дает основную частоту собственных колебаний  $v_0 = 3,7 \cdot 10^3$  Гц; значения  $k = 1, 2, 3, \dots$  соответствуют высшим гармоническим частотам.

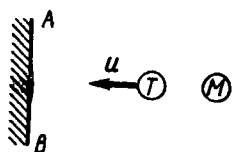


Рис. 20-3

20-4. Источник  $T$  звука частоты  $v = 400$  Гц движется со скоростью  $u = 2,0$  м/с, удаляясь от неподвижного приемника  $M$  звука и приближаясь при этом к стене  $AB$  (рис. 20-3). Определить частоту биений, регистрируемых приемником звука. Скорость звука  $c = 340$  м/с.

**Решение.** Биения возникают в результате сложения колебаний с мало различающимися частотами; при этом частота биений равна разности частот слагаемых колебаний (см. задачу № 19-4). Выясним происхождение биений в данном случае.

Приемника  $M$  достигают звуковые волны непосредственно от источника  $T$ , а также волны, отраженные от стены. Дойдя до приемника, эти две системы волн возбудят в нем колебания разных частот. Действительно, источник  $T$  звука удаляется от неподвижного приемника  $M$ . Вследствие эффекта Доплера приемник зарегистрирует колебания частоты  $v' \neq v$ . Положив в формуле (20.6)  $v = 0$  и учитывая, что, согласно вышеизложенному правилу знаков, скорость источника  $u < 0$ , поскольку источник *удаляется* от приемника, получим

$$v' = v \frac{c}{c + |u|}. \quad (1)$$

\* Для поперечных колебаний приведенный график можно рассматривать как «моментальную фотографию» колеблющегося стержня.

В то же время источник звука *приближается* к стене. Поэтому частоту колебаний  $\nu''$ , воспринимаемых стеной, найдем опять по формуле (20.6), где по-прежнему  $u=0$ . Однако теперь  $u > 0$ , следовательно,

$$\nu'' = \nu \frac{c}{c - |u|}. \quad (2)$$

Воспринимая колебания частоты  $\nu''$ , стена сама становится источником звуковых волн такой же частоты  $\nu''$ , которые, дойдя до приемника  $M$ , возбуждают в нем колебания частоты  $\nu''$ . Эти колебания наложатся на колебания частоты  $\nu'$  и в результате возникнут бения, частоту которых  $\nu_G = \nu'' - \nu'$  найдем, используя формулы (1), (2):

$$\nu_G = \frac{2c|u|}{c^2 - u^2} \nu = 4,7 \text{ Гц.}$$

20-5. От источника, расположенного у поверхности Земли, распространяются звуковые волны. Через какой промежуток времени они достигнут высоты  $h = 10,0$  км, если температура воздуха у поверхности Земли  $t_0 = 16^\circ\text{C}$ , а градиент температуры в атмосфере  $\Delta T/\Delta h = -7,0 \cdot 10^{-3}$  К/м.

**Решение.** Чтобы найти время распространения волны, зная ее перемещение  $h$ , выясним сначала, какова скорость звука в вертикальном направлении. Скорость звука в воздухе определяется формулой (20.8), где  $\gamma = 1,4$  (см. задачу № 8-3). Можно показать, что при этом скорость зависит от температуры воздуха. Действительно, поскольку  $p = mV$ , то, применив уравнение газового состояния, получим

$$c = \sqrt{\gamma p V / m} = \sqrt{\gamma R T / \mu}. \quad (1)$$

По условию задачи температура воздуха зависит от высоты. Эту зависимость можно записать так:

$$T = T_0 + ah, \quad (2)$$

где  $T$  — температура на высоте  $h$ ;  $a = \Delta T/\Delta h$  — градиент температуры, показывающий прирост (в данном случае отрицательный) температуры на каждый метр высоты. Подставив значение  $T$  из (2) в (1), имеем

$$c = \sqrt{\gamma R (T_0 + ah) / \mu}. \quad (3)$$

Таким образом, скорость звука зависит от высоты. Чтобы найти искомое время, будем рассматривать движение звуковой волны как переменное. В таком движении скорость в любой момент времени равна  $c = dh/dt$ , откуда с учетом формулы (3)

$$dt = \frac{dh}{\sqrt{\gamma R (T_0 + ah) / \mu}}.$$

Это дифференциальное уравнение, выражающее зависимость времени от высоты. При изменении времени от 0 до  $t$  высота изменяется от 0 до  $h$ . Следовательно,

$$\int_0^t dt = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R}} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{T_0 + ah}}.$$

откуда

$$t = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma R}} (\sqrt{T_0 + ah} - \sqrt{T_0}).$$

Подставим в формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $h = 10,0 \cdot 10^3$  м,  $T_0 = 289$  К,  $a = -7,0 \cdot 10^{-3}$  К/м,  $\mu = 0,029$  кг/моль,  $R = 8,3$  Дж/(моль · К),  $\gamma = 1,4$ . Выполнив вычисление, получим

$$t = 30 \text{ с.}$$

**20-6.** Источник звука небольших размеров имеет мощность 1,00 Вт при частоте  $\nu = 400$  Гц. Считая, что звук распространяется от источника одинаково во все стороны в воздухе, находящемся при нормальных условиях, и пренебрегая поглощением звука, определить амплитуду звукового давления, а также амплитуды скорости и смещения частиц воздуха на расстоянии  $r = 100$  м от источника звука.

**Решение.** Амплитуда звукового давления  $\Delta p_0$  (т. е. амплитуда колебаний давления воздуха в каждой точке, через которую проходит звуковая волна) связана соотношением (20.10) с интенсивностью звука  $I$ , которая в свою очередь связана с мощностью  $N$  источника:

$$I = N/4\pi r^2, \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние от источника до точки, в которой определяется величина  $I$ . Формула (1) вытекает из определения интенсивности звука (см. стр. 229). При этом важно, что, согласно условию задачи, от источника звука распространяются *сферические* волны. Поэтому в знаменателе формулы (1) стоит площадь поверхности сферы, сквозь которую проходит вся звуковая энергия, испускаемая источником.

Приравнивая правые части формул (20.10) и (1), имеем

$$\Delta p_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{Nc\rho}{2\pi}}. \quad (2)$$

В общем случае величины  $c$ ,  $\rho$  вычисляются по формулам (20.8) и (6.1). Так как по условию задачи воздух находится при нормальных условиях, то значения  $c$  и  $\rho$  возьмем из таблиц и по формуле (2) рассчитаем величину  $\Delta p_0$ .

Теперь, используя соотношение (20.9) и учитывая результат (2), получим амплитуду скорости частиц в звуковой волне:

$$v_0 = \frac{\Delta p_0}{\rho v} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{N}{2\pi c \rho}}. \quad (3)$$

Принимая во внимание связь между величинами  $A$ ,  $v_0$  в гармоническом колебании, вытекающую из формулы (19.2):  $v_0 = \omega A = 2\pi \nu A$ , найдем амплитуду смещения частиц воздуха в звуковой волне  $A$ :

$$A = \frac{v_0}{2\pi \nu} = \frac{1}{2\pi \nu r} \sqrt{\frac{N}{2\pi c \rho}}. \quad (4)$$

Подставим в формулы (2) — (4) числовые значения величин:  $N = 1,00$  Вт,  $\nu = 400$  Гц,  $r = 100$  м,  $c = 332$  м/с,  $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>. Выполнив вычисление, получим:

$$\Delta p_0 = 8,3 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \quad v_0 = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}; \quad A = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

20-7. На расстоянии  $r_1 = 10$  м от источника сферических звуковых волн частоты 1000 Гц уровень громкости  $L_{N1} = 40$  фон. Найти наибольшее расстояние  $r_2$ , на котором звук еще слышен.

**Решение.** Прежде всего заметим, что в задаче дан звук стандартной частоты  $\nu = 1000$  Гц. Поэтому формулу (20.12) для уровня громкости звука можно записать так.

$$L_N = 10 \lg (I/I_0), \quad (1)$$

где  $I$  — интенсивность данного звука. Таким образом, в нашей задаче уровень громкости звука  $L_N$  совпадает с уровнем его интенсивности  $L$ , выражаемым формулой (20.11).

Так как каждому из двух расстояний  $r_1$ ,  $r_2$  соответствуют некоторая интенсивность звука  $I$  и, следовательно, определенный уровень громкости  $L_N$ , то запишем:

$$L_{N1} = 10 \lg (I_1/I_0), \quad (2)$$

$$L_{N2} = 10 \lg (I_2/I_0). \quad (3)$$

По-прежнему считая, что звук распространяется одинаково во все стороны, воспользуемся формулой (1) предыдущей задачи. Из этой формулы следует, что интенсивность звука  $I$  обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника. Поэтому

$$I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2. \quad (4)$$

Выразив из системы (2), (3) отношение  $I_2/I_1$  и подставив его в формулу (4), получим

$$10^{0,1(L_{N2}-L_{N1})} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (5)$$

Так как расстояние  $r_2$  по условию задачи соответствует порогу слышимости, надо в формуле (3) считать  $I_2 = I_0$ . Следовательно,  $L_{N2} = 0$ . Тогда из (5) найдем ответ:

$$r_2 = r_1 \cdot 10^{0,05 L_{N1}} = 10 \cdot 10^4 \text{ м} = 1,0 \text{ км.}$$

**З а м е ч а н и е.** Если в задаче будет идти речь о звуке, частота которого существенно отличается от  $\nu = 1000$  Гц, приведенное решение окажется неверным. Действительно, тогда для уровня громкости  $L_N$  вместо (1) надо будет записать соотношение (20.12):

$$L_N = 10 \lg (I_N/I_0)$$

и во всех формулах данной задачи величины  $I_1, I_2$  заменить соответственно величинами  $I_{N1}, I_{N2}$ . Но теперь в отличие от равенства (4) будет

$$I_{N2}/I_{N1} \neq r_1^2/r_2^2,$$

поскольку величина  $I_N$  является также функцией частоты звука (так как ухо человека неодинаково чувствительно к звукам разных частот).

Правильный путь решения задачи для случая любой звуковой частоты связан с использованием соотношения (4) и графика, на котором представлено семейство кривых равного уровня громкости. Пусть, например, частота звука равна 100 Гц. Тогда по графику уровней громкости, зная частоту и уровень громкости ( $L_{N1} = 40$  фон), определим интенсивность звука  $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>. Затем по тому же графику, рассмотрев кривую, соответствующую порогу слышимости, найдем, что при частоте 100 Гц интенсивность звука  $I_2 = 8 \cdot 10^{-9}$  Вт/м<sup>2</sup>. Подставив эти значения  $I_1, I_2$  в формулу (4) и произведя вычисление, получим

$$r_2 = 0,25 \text{ км.}$$

## § 21. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### Основные формулы

При свободных колебаниях в контуре, содержащем конденсатор емкостью  $C$ , катушку индуктивностью  $L$  и резистор с омическим сопротивлением  $R$ , соединенных последовательно, заряд на обкладках конденсатора изменяется во времени по закону

$$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (21.1)$$

где  $q_0 e^{-\beta t}$  — амплитуда затухающих колебаний;  $\beta$  — коэффициент затухания;  $\omega$  — циклическая частота;  $q_0, \varphi_0$  — начальные амплитуда и фаза (определяются из начальных условий). Величины  $\beta, \omega$  выражаются через параметры контура  $R, L, C$  формулами:

$$\beta = R/2L, \quad (21.2)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}; \quad (21.3)$$

здесь

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} \quad (21.4)$$

— циклическая частота свободных незатухающих колебаний, которые устанавливаются в контуре при условии  $R \rightarrow 0$ .

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln(a_1/a_2) = \beta T, \quad (21.5)$$

где  $a_1, a_2$  — амплитудные значения в двух последовательных колебаниях любой из величин  $q, U, I$  ( $U$  — напряжение на конденсаторе  $I$  — сила тока в колебательном контуре);  $T$  — период колебаний

Добротность колебательного контура  $Q$  связана с логарифмическим декрементом затухания:

$$Q = \pi/\lambda. \quad (21.6)$$

Если в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора с омическим сопротивлением  $R$ , действует периодическая э. д. с.  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ , то в такой цепи устанавливаются вынужденные колебания тока той же частоты  $\omega$ :

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (21.7)$$

при этом величины  $I_0, \varphi$  выражаются формулами:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}, \quad (21.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - 1/C\omega}{R}. \quad (21.9)$$

Амплитуда тока  $I_0$  при вынужденных колебаниях достигает максимального значения (явление резонанса), если частота  $\omega$  вынужденных колебаний совпадает с частотой  $\omega_0$  свободных незатухающих колебаний, определяемой по (21.4). Таким образом, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{1/LC}. \quad (21.10)$$

В цепи переменного синусоидального тока действующие (эффективные) значения силы тока  $I_{\text{д}}$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_{\text{д}}$  связаны с их амплитудными значениями  $I_0, \mathcal{E}_0$  соотношениями:

$$I_{\text{д}} = I_0/\sqrt{2}, \quad \mathcal{E}_{\text{д}} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2} \quad (21.11)$$

Скорость электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (21.12)$$

где  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с — скорость электромагнитных волн в вакууме

Плотность потока энергии (или интенсивность излучения) электромагнитных волн, т. е. количество энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}\mathbf{H}], \quad (21.13)$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

### Методические указания

1. Методы решения задач на электромагнитные колебания сходны с методами решения задач на механические колебания. В основе этого сходства лежит одинаковая структура уравнений, описывающих оба этих вида колебаний. Так, например, формулы (21.1)–(21.5) настоящего параграфа, характеризующие свободные электромагнитные колебания, аналогичны формулам (19.12)–(19.15), (19.8) для свободных механических колебаний. При этом заряд  $q$  соответствует смещению  $x$ , омическое сопротивление  $R$  — коэффициенту сопротивления среды  $r$ ,

индуктивность  $L$  — массе  $m$ , емкость  $C$  — величине, обратной коэффициенту квазиупругой силы  $k$ . Все сказанное в п. 2 методических указаний раздела «Динамика колебательного движения» (см. стр. 223) справедливо в отношении электромагнитных колебаний, если слова «сопротивление среды» заменить словами «омическое сопротивление».

Сходство уравнений приводит к сходству решений задач, основанных на этих уравнениях. Так, в задачах № 19-9, 19-10 на затухающие механические колебания легко найти их электрические аналоги. В связи с этим заметим, что формуле (19.11), которая была использована при решении задачи № 19-9, соответствует аналогичная формула для энергии электромагнитных колебаний

$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\omega^2 q_0^2}{2}.$$

(Эта формула вытекает из решения задачи № 21-1.)

2 Если в формуле (21.8), выражающей связь между амплитудами тока и э. д. с. при вынужденных колебаниях в контуре, заменить амплитудные значения  $I_0$ ,  $\mathcal{E}_0$  их действующими значениями  $I_d$ ,  $\mathcal{E}_d$  по формулам (21.11), то получим закон Ома для цепи переменного тока

$$I_d = \mathcal{E}_d / Z,$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$$

— полное (действующее) сопротивление цепи. Оно состоит из сопротивлений омического  $R$ , индуктивного  $L\omega$  и емкостного  $1/C\omega$ . Обратите внимание: отсутствие в цепи переменного тока конденсатора означает отсутствие емкостного сопротивления, т. е.  $1/C\omega = 0$ , следовательно,  $C = \infty$  (!).

3. Законы последовательного и параллельного соединений в цепях постоянного тока не годятся для переменного тока, если его характеризовать не мгновенными значениями величин  $I$ ,  $U$ ,  $\mathcal{E}$ , а действующими  $I_d$ ,  $U_d$ ,  $\mathcal{E}_d$  (или амплитудными  $I_0$ ,  $U_0$ ,  $\mathcal{E}_0$ ). Так, при последовательном соединении сумма напряжений на отдельных участках замкнутой цепи оказывается не равной электродвижущей силе (см. задачу № 21-3), а при параллельном — сумма токов в ветвях не равна току в неразветвленной части цепи (задача № 21-4). Величины  $I$ ,  $U$ ,  $\mathcal{E}$ , определяющие электрические процессы во всей цепи и на ее отдельных участках, совершают гармонические колебания, находясь в различных фазах [см. формулу (21.9)]. Поэтому напряжения (и токи) складываются по правилу сложения векторных величин с учетом угла (разности фаз) между ними точно так же, как складываются, например, амплитуды смещения при механических колебаниях равных периодов [(см. формулу (19.5)].



## Решение задач

**21-1.** Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $C = 5,0$  мкФ и катушки индуктивностью  $L = 0,200$  Г. Определить максимальную силу тока  $I_0$  в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора  $U_0 = 90$  В. Сопротивлением контура  $R$  пренебречь.

**Решение.** Рассмотрим два способа решения задачи. Первый из них основан на исследовании уравнения свободных электромагнитных колебаний (21.1), второй — на законе сохранения энергии.

1. Если в колебательном контуре сопротивление  $R$  пренебрежимо мало, то в уравнении (21.1), выражающем заряд конденсатора как функцию времени, можно положить коэффициент затухания  $\beta = 0$ . Тогда, согласно (21.3), получим  $\omega = \omega_0$ . Следовательно, в контуре будут незатухающие колебания, при этом

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

Сила тока есть производная от заряда по времени. Поэтому, дифференцируя обе части (1) по времени, получим для силы тока в контуре уравнение

$$I = \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Величина  $I_0 = \omega_0 q_0$  является амплитудным, т. е. максимальным, значением тока в контуре. Подставив значение  $\omega_0$  из формулы (21.4) и учитывая соотношение  $q_0 = CU_0$ , определим искомую величину:

$$I_0 = \omega_0 q_0 = V \sqrt{LC} CU_0 = U_0 \sqrt{C/L}.$$

2. В процессе незатухающих электромагнитных колебаний полная электромагнитная энергия контура, равная сумме энергий электрического поля конденсатора  $CU^2/2$  и магнитного поля катушки  $LI^2/2$ , остается постоянной. При этом в те моменты, когда конденсатор максимально заряжен ( $U = U_0$ ), сила тока равна нулю. Следовательно, полная энергия контура

$$W = CU_0^2/2. \quad (2)$$

В то время, когда конденсатор разряжен ( $U = 0$ ), сила тока достигает максимального значения  $I_0$ . Тогда полная энергия контура

$$W = LI_0^2/2. \quad (3)$$

Приравняв правые части формул (2), (3), найдем

$$I_0 = U_0 \sqrt{C/L}.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $C = 5,0 \cdot 10^{-6}$  Ф,  $L = 0,200$  Г,  $U_0 = 90$  В, и произведя вычисления, получим

$$I_0 = 0,45 \text{ А.}$$

21-2. Добротность колебательного контура  $Q = 5,0$ . Определить, на сколько процентов отличается частота  $\omega$  свободных колебаний контура от его собственной частоты  $\omega_0$ .

**Решение.** Во всяком реальном колебательном контуре, обладающем сопротивлением  $R$ , частота свободных электромагнитных колебаний  $\omega$  меньше собственной частоты контура  $\omega_0$  (т. е. частоты колебаний при  $R \rightarrow 0$ ). В задаче требуется найти величину

$$x = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (1)$$

Добротность контура выразим через величины  $\omega$ ,  $\omega_0$ , используя формулы (21.6), (21.5), (21.3) и соотношение  $T = 2\pi/\omega$ :

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\lambda} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (2)$$

Введя обозначение  $\alpha = \omega/\omega_0$ , из (2) имеем

$$Q^2 = \frac{\omega^2}{4(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{\alpha^2}{4(1 - \alpha^2)}.$$

Определив отсюда величину  $\alpha$ , на основании (1) найдем

$$x = 1 - \alpha = 1 - 2Q/\sqrt{1 + 4Q^2}. \quad (3)$$

Переходя к вычислению, учтем, что в данном случае  $4Q^2 \gg 1$ . Поэтому формулу (3) можно упростить. Разделив числитель и знаменатель на  $2Q$  и применив формулы приближенного вычисления, получим

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4Q^2}} \approx 1 - \frac{1}{1 + 1/8Q^2} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) = \\ &= \frac{1}{8Q^2} = 0,50 \cdot 10^{-2}, \text{ или } x = 0,50 \%. \end{aligned}$$

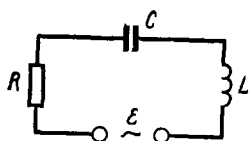


Рис. 21-1

21-3. В цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора сопротивлением  $R = 20$  Ом, катушки индуктивностью  $L = 1,0$  мГ и конденсатора емкостью  $C = 0,10$  мкФ, действует синусоидальная э. д. с.  $\mathcal{E}$  (рис. 21-1). Определить частоту  $\omega$  э. д. с., при которой в цепи наступит резонанс. Найти также действующие значения силы тока  $I$  и напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  на всех элементах цепи при резонансе, если при этом действующее значение э. д. с.  $\mathcal{E} = 30$  В.

**Решение.** Под действием переменной э. д. с. в данной цепи, представляющей собой колебательный контур, установятся вынужденные электромагнитные колебания. При этом амплитудные значения тока  $I_0$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_0$  связаны соотношением (21.8). Из формул (21.11)

видно, что между действующими значениями тока  $I_d$  и э. д. с.  $\mathcal{E}_d$  существует то же соотношение, что и между величинами  $I_0, \mathcal{E}_0$ . Поэтому (опуская для простоты индексы у величин  $I_d, \mathcal{E}_d$ ) запишем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}}. \quad (1)$$

Очевидно, максимальному току при резонансе  $I_{рез}$  соответствует такое значение  $\omega$ , при котором выражение, стоящее в скобках в формуле (1), обратится в нуль. Отсюда определим резонансную циклическую частоту\*:

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{1/LC} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ рад/с}. \quad (2)$$

При этом сила тока равна

$$I_{рез} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = 1,5 \text{ А}.$$

Зная силу тока  $I_{рез}$ , найдем действующие значения напряжения на каждом из элементов контура  $R, L, C$ , применив закон Ома для каждого из этих участков:

$$\begin{aligned} U_R &= I_{рез} R = \mathcal{E} = 30 \text{ В}, \\ U_L &= I_{рез} L\omega = \mathcal{E} L\omega/R = 150 \text{ В}; \\ U_C &= I_{рез} (1/C\omega) = U_L = 150 \text{ В}. \end{aligned}$$

Равенство  $U_C = U_L$  следует из равенства емкостного и индуктивного сопротивлений при резонансе.

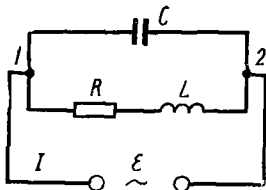


Рис 21-2

21-4. Определить действующие значения силы тока на всех участках цепи, изображенной на рис. 21-2, если  $R = 1,0 \text{ Ом}$ ,  $L = 1,00 \text{ мГ}$ ,  $C = 0,110 \text{ мкФ}$ ,  $\mathcal{E} = 30 \text{ В}$ ,  $\omega = 1,00 \cdot 10^5 \text{ рад/с}$ .

**Решение.** Эта цепь отличается от предыдущей (рис. 21-1) способом включения источника переменной э. д. с. (внутренним сопротивлением которого мы пренебрегаем). Если раньше все элементы цепи были включены последовательно, то в данном случае имеем разветвленную цепь переменного тока. участок 1-2 является параллельным соединением двух ветвей, одна из которых содержит конденсатор  $C$ , а другая - элементы  $R, L$ , соединенные последовательно между собой. Каждая из ветвей вместе с источником э. д. с. образует колебательный (неполный) контур. Поэтому силу тока в каждой ветви снова найдем по формуле (21.8), заменив амплитудные величины  $I_0, \mathcal{E}_0$  их

\* Соотношение (2) можно также получить сразу из условия резонанса (21.10).

действующими значениями  $I$ ,  $\mathcal{E}$ . Тогда для силы тока в ветви  $IC2$ , где  $R = 0$ ,  $L = 0$ , получим

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{1/C\omega} = \mathcal{E}C\omega = 0,33 \text{ А.} \quad (1)$$

В ветви  $IRL2$ , где отсутствует емкостное сопротивление  $1/C\omega$ , сила тока с учетом соотношения  $R^2 \ll L^2\omega^2$  равна

$$I_{RL} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \approx \frac{\mathcal{E}}{L\omega} = 0,30 \text{ А.} \quad (2)$$

Если бы переменные токи в обеих ветвях имели одинаковые фазы, то сила тока в неразветвленной части цепи была бы равна сумме сил токов  $I_C$ ,  $I_{RL}$ . Однако эти токи имеют различные фазы: между каждым из них и э. д. с.  $\mathcal{E}$  существует сдвиг фаз, определяемый формулой (21.9). Применим эту формулу для каждой ветви. Для ветви  $IC2$   $R = 0$ ,  $L = 0$ . Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi_C = -\infty; \quad \varphi_C = -\pi/2.$$

Для ветви  $IRL2$ , учитывая, что  $1/C\omega = 0$ , получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_{RL} = L\omega/R = 100; \quad \varphi_{RL} \approx \pi/2.$$

В формуле (21.7) величина  $\varphi$  стоит со знаком «—»; это означает, что ток  $I_C$  опережает по фазе э. д. с.  $\mathcal{E}$  на  $\pi/2$ , а ток  $I_{RL}$  отстает по фазе от э. д. с.  $\mathcal{E}$  на  $\pi/2$ .

На рис. 21-3 изображена векторная диаграмма, построенная в соответствии с полученными фазовыми соотношениями. Сложив векторы, изображающие токи  $I_C$  и  $I_{RL}$ , найдем вектор, изображающий ток  $I$  в неразветвленной части цепи. Таким образом,

$$I = I_C - I_{RL} = 0,03 \text{ А.} \quad (3)$$

Такой же результат можно получить с помощью формулы (19.5), положив в ней  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ .

**З а м е ч а н и е.** В данной задаче величины  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$  были связаны соотношением  $R \ll L\omega$ . Именно поэтому переменные токи в параллельных ветвях оказались в противоположных фазах ( $\Delta\varphi \approx \pi$ ). Если при этом величины  $\omega$ ,  $C$ ,  $L$  оказались бы связанными соотношением (21.10), то, как это видно из формул (1), (2), величины  $I_C$ ,  $I_{RL}$  приблизительно одинаковы и, согласно формуле (3),  $I = I_C - I_{RL} \approx 0$ . Точнее: при  $R \rightarrow 0$   $I \rightarrow 0$  и, следовательно, полное сопротивление переменному току всего участка 1-2  $R_{1,2} \rightarrow \infty$ . Это *резонанс токов* (в отличие от *резонанса напряжений*, рассмотренного в задаче № 21-3). Таким образом, при наличии неравенства  $R \ll L\omega$  условие резонанса токов совпадает с условием резонанса напряжений (21.10).

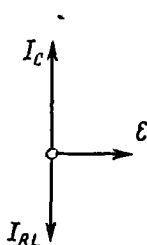


Рис. 21-3

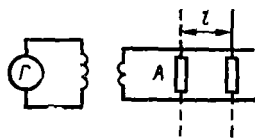


Рис 21 4

21-5. Два параллельных провода, погруженные в бензол, индуктивно соединены с генератором  $G$  высокочастотных электромагнитных колебаний (рис. 21-4). При частоте  $\nu = 1,00 \cdot 10^8$  МГц в системе устанавливаются стоячие электромагнитные волны. Перемещая вдоль проводов газоразрядную трубку  $A$ , по ее свечению определяют положения пучностей напряженности электрического поля. Расстояние между соседними пучностями оказалось равным  $l = 1,00$  м. Найти диэлектрическую проницаемость бензола.

**Решение.** Стоячие электромагнитные волны возникают в результате интерференции волн, распространяющихся по двухпроводной линии от генератора в прямом направлении, с волнами, отраженными от конца линии (ср. с задачей № 20-3). Учтем, что при данной высокой частоте электромагнитных колебаний основные процессы, связанные с распространением электромагнитных волн вдоль линии, происходят не в проводах, а в окружающей их среде\*.

По теории Максвелла, скорость электромагнитных волн в среде связана с их скоростью в вакууме формулой (21.12). Отсюда, учитывая, что для бензола  $\mu \approx 1$ , найдем его диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = c^2/v^2.$$

Скорость электромагнитных волн связана с длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu$  соотношением  $v = \lambda\nu$ . Поскольку расстояние между соседними пучностями в стоячей волне равно половине длины волны, т. е.  $\lambda = 2l$ , то получим

$$\epsilon = \frac{c^2}{v^2} = \frac{c^2}{\lambda^2 \nu^2} = \frac{c^2}{4l^2 \nu^2}.$$

Подставив числовые значения величин:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с,  $l = 1,00$  м,  $\nu = 1,00 \cdot 10^8$  Гц — и выполнив вычисление, найдем  $\epsilon = 2,2$ .

21-6. Определить энергию, которую переносит за время  $t = 1,00$  мин плоская синусоидальная электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, через площадку  $S = 10,0$  см<sup>2</sup>, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны. Амплитуда напряженности электрического поля волны  $E_0 = 1,00$  мВ/м. Период волны  $T \ll t$ .

**Решение.** Энергия, переносимая электромагнитной волной за единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны, определяется вектором Пойнтинга  $\mathbf{P}$ . Учитывая, что в электромагнитной волне  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , получим для модуля вектора  $\mathbf{P}$  согласно (21.13)

$$P = EH. \quad (1)$$

\* Вследствие скин-эффекта переменный ток частоты  $\nu = 10^8$  Гц течет практически лишь по поверхности проводов.

Поскольку обе величины  $E$ ,  $H$ , характеризующие электромагнитную волну, в каждой ее точке меняются во времени по закону синуса, находясь в одинаковых фазах, соотношение (1) можно записать так:

$$P = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

Таким образом, величина  $P$  является функцией времени, и формулы (1), (2) дают лишь *мгновенное* значение величины  $P$ . Поэтому, согласно определению вектора плотности потока энергии, запишем

$$P = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{S}.$$

Отсюда энергия  $dW$ , переносимая волной через площадку  $S$  за время  $dt$ , с учетом формулы (2), равна

$$dW = P S dt = E_0 H_0 S \sin^2 \omega t dt. \quad (3)$$

Здесь неизвестна величина  $H_0$ . Воспользуемся тем, что между величинами  $E$ ,  $H$ , характеризующими электромагнитную волну в *одной и той же точке*, существует простое соотношение. Его найдем, учитывая, что, согласно теории электромагнитных волн, плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени равны, т. е.

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (4)$$

Так как, по условию,  $\epsilon = \mu = 1$ , то из (4) получим

$$H = E \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}.$$

Так же связаны между собой амплитудные значения  $H_0$ ,  $E_0$ . Тогда уравнение (3) примет вид

$$dW = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0^2 S \sin^2 \omega t dt.$$

Отсюда полная энергия, переносимая волной за время  $t$ ,

$$W = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega t dt = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right). \quad (5)$$

Так как циклическая частота  $\omega$  неизвестна, воспользуемся данным в условии неравенством  $T \ll t$  для оценки значения дроби  $(\sin 2\omega t) / 4\omega$ . Учитывая соотношение  $\omega = 2\pi / T$ , имеем

$$\frac{\sin 2\omega t}{4\omega} = \frac{1}{8\pi} T \sin \left( \frac{4\pi t}{T} \right) \leq \frac{T}{8\pi}.$$

Теперь ясно, что в силу неравенства  $T \ll t$  членом  $(\sin 2\omega t / 4\omega)$  в формуле (5) можно пренебречь. Тогда получим

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 S t.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Г/м,  $S = 10,0 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $t = 60$  с,  $E_0 = 1,00 \cdot 10^{-3}$  В/м, и выполнив вычисление, найдем

$$W = 8,0 \cdot 10^{-11} \text{ Дж.}$$

## Глава 7

### ОПТИКА

#### § 22. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА И ФОТОМЕТРИЯ

##### Основные формулы

При прохождении света через границу раздела двух сред выполняется закон преломления:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (22.1)$$

где  $i$  — угол падения,  $r$  — угол преломления,  $n_{21}$  — постоянная для данных двух сред величина, называемая показателем преломления (относительным) второй среды относительно первой,  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления сред, т. е. их показатели преломления относительно вакуума

При преломлении света на сферической поверхности, разделяющей две среды с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , выполняется соотношение

$$\frac{n_2}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (22.2)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $R$  — расстояния от вершины поверхности до светящейся точки ее изображения и центра сферы. Здесь соблюдается *правило знаков*: каждое из расстояний  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $R$  берется со знаком «+», если оно отсчитывается по направлению распространения света, и со знаком «-» в противоположном случае

Для плоской поверхности ( $R = \infty$ )

$$\frac{a_1}{n_1} = \frac{a_2}{n_2}. \quad (22.3)$$

Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f} = \Phi, \quad (22.4)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  — расстояния от оптического центра линзы до светящейся точки и ее изображения;  $f$ ,  $\Phi$  — фокусное расстояние линзы и ее оптическая сила. Для собирающих линз  $\Phi > 0$ ,  $f > 0$ , для рассеивающих  $\Phi < 0$ ,  $f < 0$ .

Оптическая сила тонкой линзы выражается через радиусы кривизны ее поверхностей  $R_1$ ,  $R_2$  и показатели преломления вещества линзы  $n_{л}$  и окружающей среды  $n_{ср}$  соотношением

$$\Phi = \left( \frac{n_{л}}{n_{ср}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (22.5)$$

В формулах (22.3)–(22.5) к величинам  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  применяется то же правило знаков, что и в (22.2).

Оптическая сила системы, состоящей из двух тонких сложенных вплотную линз, равна

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (22.6)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  — оптические силы линз.

Увеличение оптического прибора, вооружающего глаз,

$$\Gamma = \frac{l}{l_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad (22.7)$$

где  $l, l_0$  — линейные размеры изображения на сетчатке вооруженного и невооруженного глаза;  $\varphi, \varphi_0$  — углы зрения, под которыми глаз видит предмет через прибор и без него.

Увеличение телескопа

$$\Gamma = f_{об}/f_{ок}, \quad (22.8)$$

где  $f_{об}, f_{ок}$  — фокусные расстояния объектива и окуляра.

Световым потоком называется поток излучения (т. е. энергия, переносимая через данную площадку за единицу времени), оцениваемый по зрительному ощущению:

$$\Phi = dW/dt. \quad (22.9)$$

Сила света источника равна отношению светового потока, излучаемого в данном направлении, к телесному углу, в котором он распространяется:

$$I = d\Phi/d\omega. \quad (22.10)$$

Освещенность измеряется отношением светового потока, падающего на поверхность, к ее площади:

$$E = d\Phi/dS. \quad (22.11)$$

Освещенность поверхности, создаваемая источником силой света  $I$  в точке, удаленной от него на расстояние  $r$ , выражается формулой

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}, \quad (22.12)$$

где  $\alpha$  — угол падения лучей.

Светимость  $R$  измеряется световым потоком, излучаемым единицей площади светящейся поверхности. Если светимость тела обусловлена его освещенностью, то выполняется соотношение

$$R = \rho E, \quad (22.13)$$

где  $\rho$  — коэффициент рассеяния (отражения), показывающий, какая доля светового потока, упавшего на поверхность данного тела, рассеивается им.

Яркость равна отношению силы света  $dI$  источника в данном направлении к площади  $dS_n$  проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную этому направлению (т. е. к площади видимой светящейся поверхности):

$$B = \frac{dI}{dS_n} = \frac{dI}{dS \cos \varphi}, \quad (22.14)$$

где  $\varphi$  — угол между нормалью к элементу поверхности  $dS$  и данным направлением.

Если тело излучает по закону Ламберта, согласно которому яркость не зависит от направления, то светимость и яркость связаны соотношением

$$R = \pi B. \quad (22.15)$$

## А. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

### Методические указания

1. Задачи, в которых требуется определить ход светового луча при наличии одной или нескольких преломляющих плоскостей (например, ход луча через призму), решают с помощью закона преломления (22.1), применяя его поочередно к каждому случаю преломления



на границе двух сред и используя геометрические соотношения, вытекающие из условия задачи. Если, по условию, луч падает на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды ( $n_1 > n_2$ ), то вычисления могут дать значения синуса угла преломления больше единицы. Это будет означать, что луч не преломляется на данной границе, а полностью отражается от нее.

2. Решая задачи, в которых требуется найти изображение светящейся точки, получаемое в результате преломления на плоской поверхности, следует помнить, что при этом гомоцентричность световых пучков\*, вообще говоря, не сохраняется. Так, продолжения трех преломленных лучей 1, 2, 3 пересекаются в точках А, В, С (рис. 22-1).

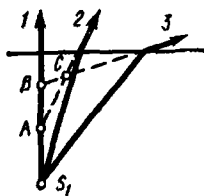


Рис. 22-1

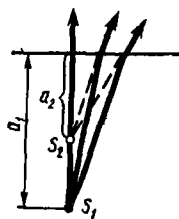


Рис. 22-2

Здесь не существует такой единственной точки  $S_2$ , которая являлась бы изображением светящейся точки  $S_1$ . В случае же узких световых пучков, падающих нормально на границу двух сред (рис. 22-2), их гомоцентричность сохраняется. Расстояния от светящейся точки  $S_1$  и ее мнимого изображения  $S_2$  до преломляющей плоскости связаны формулой (22.3). Одинаковые знаки величин  $a_1, a_2$  показывают, что точки  $S_1$  и  $S_2$  лежат всегда по одну сторону преломляющей плоскости.

С помощью формулы (22.3) можно также найти изображение при наличии нескольких параллельных плоскостей, разделяющих среды с различными показателями преломления. В таких случаях изображение, образованное при первом преломлении, принимают за предмет и по формуле (22.3) находят новое изображение, полученное при следующем преломлении.

### Решение задач

22-1. Две среды разделены плоскопараллельной пластинкой (рис. 22-3). Показатели преломления первой среды, второй среды и пластинки соответственно равны  $n_1, n_2, n$  ( $n > n_1$ ). Луч света падает из первой среды на пластинку под углом  $i_1$ . Определить угол  $i_2$ , под которым луч выйдет из пластинки.

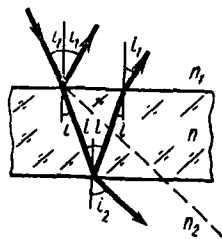


Рис. 22-3

\* Гомоцентрическим называется пучок лучей, пересекающихся в одной точке.

**Решение.** Проходя через пластинку, световой луч дважды преломляется на ее гранях согласно закону (22.1). В случае падения света на границу первой среды с пластинкой имеем

$$n_1 \sin i_1 = n \sin i, \quad (1)$$

а при падении света на границу пластинки со второй средой

$$n \sin i = n_2 \sin i_2. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) получаем

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (3)$$

Таким образом, искомый угол  $i_2$  определяется соотношением

$$\sin i_2 = n_1 \sin i_1 / n_2. \quad (4)$$

Если  $n_1 > n_2$ , то может оказаться, что  $\sin i_2$ , вычисленный по (4), превысит единицу. Это будет означать, что луч не выйдет во вторую среду, а *полностью отразится* от границы пластинки со второй средой. Легко видеть, что при этом луч снова окажется в первой среде, выйдя из пластинки под углом  $i_1$ .

**З а м е ч а н и е.** Очевидно, равенства (3), (4) остались бы в силе, если убрать пластинку и привести две среды в непосредственный контакт. Следовательно, введение пластинки не меняет направления луча во второй среде, он только несколько смещается (на рис. 22-3 пунктиром изображен ход преломленного луча, если бы пластинки не было). При достаточно малой толщине пластинки этим смещением можно пренебречь. В этом случае пластинка (или тонкий слой) вообще не влияет на геометрический ход лучей\*.

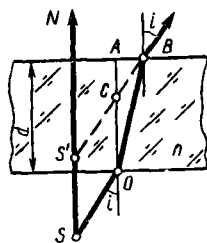


Рис 22 4

22-2. Наблюдатель рассматривает светящуюся точку через плоскопараллельную стеклянную пластинку ( $n = 1,5$ ) толщиной  $d = 3,0$  см так, что луч зрения нормален к пластинке. Определить расстояние между точкой  $S$  и ее изображением  $S'$  (рис. 22-4).

**Решение.** В глаз наблюдателя попадает световой пучок, лучи которого образуют между собой весьма малые углы. Продолжения этих лучей пересекаются в одной точке  $S'$ , являющейся изображением светящейся точки  $S$ .

Пусть два луча выходят из точки  $S$  и попадают в глаз. Один из них — луч  $SN$  — падает на пластинку нормально. Другой — луч

\* Это не относится к интенсивности света в отраженных и преломленных световых пучках. Здесь тонкая пластина (тонкий слой) играет существенную роль из-за явления интерференции света.

$SO$  — падает под произвольным весьма малым углом  $i$ . Этот луч, дважды преломившись, выйдет из пластинки параллельно отрезку  $SO$ . Чтобы определить положение точки  $S'$ , в которой пересекутся продолжения этих двух лучей, проведем отрезок  $OA$ , параллельный лучу  $SN$ . Из параллелограмма  $SS'CO$  следует

$$SS' = OC = d - h. \quad (1)$$

При этом отрезок  $h = AC$  можно выразить через величины  $d, n$ . Для этого заметим, что, если бы в точке  $O$  находился источник света, его изображением явилась бы точка  $C$ , так как здесь пересекались бы лучи, выходящие из точки  $O$ , после преломления на верхней грани пластинки. Следовательно, применив формулу (22.3), где  $a_1 = AO = d$ ,  $a_2 = AC = h$ ,  $n_1 = n$ ,  $n_2 = 1$  (воздух), получим

$$h = d/n. \quad (2)$$

Подставив это значение  $h$  в (1), найдем

$$SS' = (n - 1) d/n = 1,0 \text{ см.}$$

Как видно из чертежа, изображение  $S'$  смещено относительно предмета  $S$  на 1,0 см в сторону наблюдателя

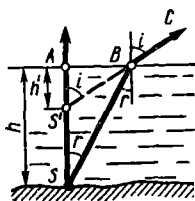


Рис. 22-5

22-3 Человек, стоящий на берегу пруда, смотрит на камень, находящийся на дне. Глубина пруда  $h = 1,00$  м. На каком расстоянии  $h'$  от поверхности воды увидит человек камень, если луч зрения составляет с вертикалью угол  $i = 60^\circ$ ?

**Решение.** Восприятие глубины пространства, т. е. расстояния до рассматриваемого объекта, обусловлено преломлением двумя глазами. Наблюдение светящейся точки одним глазом не дает ощущения глубины, а позволяет лишь судить о том, в каком направлении находится точка. При наблюдении двумя глазами светящаяся точка кажется расположенной там, где пересекаются лучи зрения, соответствующие обоим глазам наблюдателя.

Но лучи, выходящие из какой-либо точки  $S$  камня, после преломления на поверхности воды уже не образуют гомоцентрического пучка: продолжения разных пар лучей пересекаются в различных точках  $S'$ . Следовательно, кажущаяся глубина пруда зависит от расположения глаз.

Полагая, что оба глаза стоящего человека находятся на одной горизонтали, можно найти положение точки  $S'$ . Пусть луч  $BC$  (рис. 22-5) попадает в один глаз наблюдателя. Чтобы этот луч попал в другой глаз, надо повернуть весь чертеж вокруг вертикали  $N$  на некоторый угол, зависящий от расстояния между глазами. После поворота продолжение луча  $BC$  пересечет вертикаль в той же точке, что

и до поворота. Следовательно, эта точка и является искомой точкой  $S'$  — видимым изображением точки  $S$ .

Из чертежа следует:

$$AB = h \operatorname{tg} r = h' \operatorname{tg} i.$$

Отсюда, учитывая, что показатель преломления воды  $n = \sin i / \sin r$ , получим

$$h' = h \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = h \left( \frac{\sin r}{\cos r} : \frac{\sin i}{\cos i} \right) = \frac{h}{n} \frac{\cos i}{\sqrt{1 - (\sin^2 i)/n^2}}. \quad (1)$$

Подставив в формулу числовые значения величин (для воды  $n = 1,33$ ), найдем

$$h' = 0,50 \text{ м}$$

**З а м е ч а н и я:** 1. Если луч зрения направить по нормали к поверхности воды, т. е. если  $i = 0$ , то из формулы (1) следует:  $h' = h/n$ , что совпадает с результатом (2) предыдущей задачи. При  $i \rightarrow \pi/2$  получим  $h' \rightarrow 0$ .

2. Если оба глаза и точка  $S$  будут расположены в одной *вертикальной плоскости*, точка  $S'$  окажется в ином месте. На рис. 22-1 ей соответствует точка  $C$ , если лучи 2 и 3 попадают в глаза наблюдателя. В этом случае, считая угол между лучами весьма малым, так что  $i_1 \approx i_2 \approx i$ , можно прийти к соотношению

$$h' = \frac{h}{n} \left( \frac{\cos i}{\sqrt{1 - (\sin^2 i)/n^2}} \right)^2. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2), совпадая в предельных случаях (при  $i = 0$  получим  $h' = h/n$ , при  $i = \pi/2$  имеем  $h' = 0$ ), в промежуточных случаях дают существенно различные результаты.

## Б. ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

### Методические указания

1. При преломлении света на сферических поверхностях только параксиальные пучки (т. е. пучки, все лучи которых составляют достаточно малые углы с главной оптической осью) сохраняют гомоцентричность. Во всех задачах п. Б пучки света предполагаются параксиальными.

2. В учебной литературе соотношения (22.2), (22.4) и (22.5) часто записывают иначе:

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}; \quad (22.2a)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} = \Phi, \quad (22.4a)$$

$$\Phi = \left( \frac{n_2}{n_{\text{сп}}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (22.5a)$$

Эти формулы дают правильный результат, если пользоваться следующим правилом знаков, справедливым только для них:

1) расстояния  $a_1$ ,  $a_2$  и  $f$ , отсчитываемые от вершины преломляющей поверхности (или от оптического центра тонкой линзы) до светящейся точки, ее изображения и главного фокуса линзы, считают положительными, если эти точки действительные. Если предмет, изображение или главный фокус — мнимые, то соответствующие расстояния считают отрицательными;

2) в формуле (22.2а) полагают  $R > 0$ , если поверхность обращена навстречу лучу выпуклой стороной, и  $R < 0$ , если — вогнутой;

3) в формуле (22.5а) радиус выпуклой поверхности берется со знаком «+», а радиус вогнутой — со знаком «-».

В данном пособии при решении задач формулы для сферической поверхности и линзы записаны только в форме (22.2)—(22.5) с соблюдением соответствующего этим формулам правила знаков (см. стр. 246).

3. Формулы (22.4) и (22.5) имеют смысл лишь для случаев, когда по обе стороны линзы находится одна и та же среда. Это относится и к формуле (22.6): система сложенных вплотную линз должна быть окружена одной средой; если при этом между линзами имеется зазор (например, в случае двух двояковыпуклых линз), он также должен быть заполнен этой средой. Если по обе стороны линзы (или системы линз) расположены различные среды, всегда можно найти положение изображения с помощью формулы (22.2), поочередно применяя ее для каждой сферической поверхности (см. задачу № 22-6).

### Решение задач

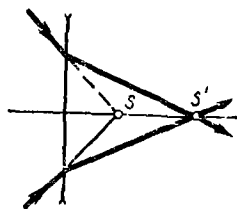


Рис 22 6

22-4. На тонкую двояковогнутую линзу с оптической силой  $\Phi = -5,0$  дп падает сходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются за линзой в точке S, лежащей на главной оптической оси на расстоянии 12,0 см от линзы. Где находится точка пересечения лучей после их преломления в линзе?

**Решение.** Из соображений симметрии ясно, что искомая точка  $S'$  должна лежать на главной оптической оси. Чтобы применить формулу линзы (22.4), будем считать S светящейся точкой (в данном случае — мнимой). Тогда точка  $S'$  будет изображением светящейся точки S. Искомое расстояние определим по формуле (22.4):

$$a_2 = a_1 / (1 + \Phi a_1). \quad (1)$$

Выразив  $a_1$  в метрах и учитывая, что расстояние от линзы до точки S отсчитывается в задаче по ходу лучей, получим  $a_1 = 0,12$  м. Выполнив вычисление по формуле (1), найдем

$$a_2 = 0,30 \text{ м.}$$

Знак ответа показывает, что точка  $S'$  находится справа от линзы (рис. 22-6). Следовательно, точка  $S'$  — действительное изображение мнимой точки  $S$ .

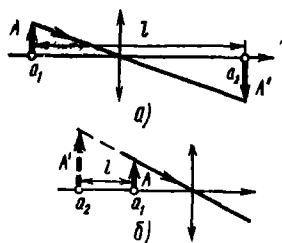


Рис. 22-7

22-5. Каково наименьшее возможное расстояние между предметом и его изображением в собирающей линзе с фокусным расстоянием  $f$ ?

**Решение.** На рис. 22-7, *a* представлено действительное изображение  $A'$  предмета  $A$ , а на рис. 22-7, *б* — мнимое. Величины  $a_1$ ,  $a_2$ , входящие в формулу линзы (22.4), являются, по существу, координатами предмета и изображения на числовой оси, совпадающей с оптической осью линзы. При этом за начало отсчета принят оптический центр линзы, а положительное направление отсчета совпадает с направлением распространения света. Поэтому расстояние между предметом и изображением, отсчитанное вдоль этой оси, как величина существенно положительная, равно:

$$\text{для случая } a \quad l = a_2 - a_1; \quad (1)$$

$$\text{для случая } б \quad l = a_1 - a_2. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2)  $l$  — функция двух переменных  $a_1$ ,  $a_2$ . Чтобы выразить  $l$  как функцию одной переменной, воспользуемся формулой (22.4). Тогда, исключив величину  $a_1$ , получим

$$l = \pm \frac{a_2^2}{a_2 - f}, \quad (3)$$

где знак «+» соответствует действительному изображению, а знак «-» — мнимому. Теперь применим обычный метод исследования функции на экстремум. Продифференцируем выражение (3) по переменной  $a_2$  и приравняем нулю производную:

$$\frac{dl}{da_2} = \pm \frac{a_2(a_2 - 2f)}{(a_2 - f)^2} = 0. \quad (4)$$

Здесь смысл знаков «+» и «-» перед дробью тот же, что в (3).

Уравнение (4) имеет два корня:

$$1) a_2 = 0; \quad 2) a_2 = 2f.$$

Если изображение действительное, то согласно (3) должно выполняться неравенство  $a_2 > f$ . Поэтому первый корень отбрасываем. Подставив значение второго корня в формулу (3), найдем

$$l_{\text{мин}} = 4f. \quad (5)$$

Если изображение мнимое, то величина  $a_2 \leq 0$ . Поэтому теперь отбрасываем второй корень. Подставив значение  $a_2 = 0$  в формулу (3), получим

$$l_{\min} = 0.$$

Это соответствует случаю, когда предмет приближен вплотную к линзе и его мнимое изображение совпадает с ним.

В том, что значения  $a_2$ , полученные при решении уравнения (4), определяют минимальное, а не максимальное значение  $l$ , можно убедиться, выяснив знак второй производной:

$$\frac{d^2 l}{da_2^2} = \pm \frac{2f^3}{(a_2 - f)^3}.$$

Стоящие перед дробью знаки «+» и «-» соответствуют неравенствам  $a_2 > f$  и  $a_2 < f$ , поэтому в любом случае имеет место  $d^2 l / da_2^2 > 0$  и, следовательно, выполняется условие минимума функции  $l = l(a_2)$ .

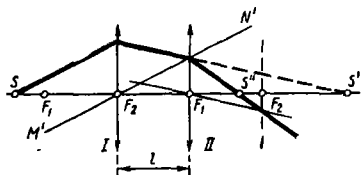


Рис. 22-8

22-6. Светящаяся точка  $S$  находится на главной оптической оси центрированной системы двух тонких линз на расстоянии 40,0 см от первой линзы (рис. 22-8). Расстояние между линзами  $l = 30,0$  см. Где получится изображение точки, если фокусное расстояние каждой из них  $f = 30,0$  см? Решить задачу построением и вычислением.

**Решение.** На рис. 22-8 точка  $S'$  — изображение светящейся точки  $S$ , созданное линзой I;  $S''$  — искомая точка, которая найдена как изображение точки  $S'$ , созданное линзой II. Здесь дважды применен способ построения преломленного луча, основанный на том, что все лучи параллельного пучка после преломления в линзе собираются в точке, лежащей на пересечении побочной оси  $M'N'$  с фокальной плоскостью.

Чтобы вычислить координату точки  $S''$  на оптической оси, применим к каждой линзе формулу (22.4). Для линзы I получим

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}, \quad (1)$$

где  $a_2$  — расстояние от линзы I точки  $S'$  (ее координата). Для линзы II координата точки  $S'$ , рассматриваемой теперь в качестве предмета, выразится величиной  $a_2 - l$  независимо от того, по какую сторону от линзы II расположена точка  $S'$ . Следовательно,

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2 - l} = \frac{1}{f}. \quad (2)$$

Здесь  $a_3$  — расстояние от линзы II до точки  $S''$  (ее координата).

Исключив из уравнений (1), (2) величину  $a_2$  и учитывая, что  $a_1 = -40,0$  см, получим

$$a_3 = \frac{(a_1 f - a_1 l - f l) f}{f^2 + 2a_1 f - f l - a_1 l} = 22 \text{ см.}$$

Знак величины  $a_3$  в ответе показывает, что точка  $S''$  расположена на расстоянии 22 см по ходу луча (т. е. справа) от линзы II.

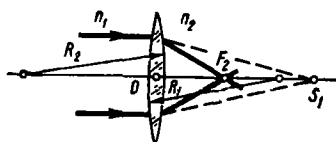


Рис. 22-9

22-7. Тонкая стеклянная ( $n = 1,5$ ) двояковыпуклая линза с одинаковыми радиусами кривизны, равными 17,0 см, разделяет две среды с показателями преломления  $n_1 = 1,33$  и  $n_2 = 1,40$ . Со стороны первой среды на линзу падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. На каком расстоянии от линзы пересекутся преломленные лучи?

**Решение.** Искомое расстояние является задним фокусным расстоянием линзы (отрезок  $OF_2$  на рис. 22-9). Здесь нельзя применить формулу оптической силы линзы (22.5), относящуюся лишь к случаю, когда с обеих сторон линзы находится одна и та же среда. Для решения задачи воспользуемся формулой (22.2), применив ее поочередно к обоим поверхностям линзы. Для первой (левой) поверхности имеем

$$\frac{n}{a_2} - \frac{n_1}{a_1} = \frac{n - n_1}{R_1}, \quad (1)$$

где  $a_2$  — расстояние от линзы до точки  $S'$ , в которой пересеклись бы лучи, если бы не было второй поверхности. Приняв точку  $S'$  за мнимый предмет, запишем формулу (22.2) для второй сферической поверхности:

$$\frac{n_2}{a_3} - \frac{n}{a_2} = \frac{n_2 - n}{R_2}, \quad (2)$$

где  $a_3 = OF_2$  — искомое расстояние. Сложив почленно уравнения (1), (2) и учитывая, что для параллельного пучка света  $a_1 = -\infty$ , получим

$$\frac{n_2}{a_3} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2}. \quad (3)$$

Запишем, соблюдая правило знаков, числовые значения величин, входящих в (3):  $R_1 = 17,0$  см,  $R_2 = -17,0$  см. Выполнив вычисления, найдем

$$a_3 = 88 \text{ см.}$$



**З а м е ч а н и е.** Если параллельный пучок лучей падает на линзу с противоположной стороны, то, обозначив через  $a'_3$  расстояние от линзы до точки пересечения преломленных лучей (т. е. переднее фокусное расстояние линзы  $OF_1$ ) и повторив все рассуждения, будем иметь

$$\frac{n_1}{a'_3} = \frac{n_1 - n}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}. \quad (4)$$

Учитывая, что теперь свет распространяется справа налево, убедимся, что в соответствии с правилом знаков правые части формул (3) и (4) одинаковы. Значит,

$$\frac{a_3}{a'_3} = \frac{OF_2}{OF_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Таким образом, фокусные расстояния линзы, по обе стороны которой *различные* среды, пропорциональны показателям преломления этих сред.



Рис. 22 10

22-8. Тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, радиус кривизны которой  $\cdot R = = 0,20$  м, плотно закрыта тонкой стеклянной пластинкой и погружена в воду (рис. 22-10). Определить оптическую силу такой системы.

**Р е ш е н и е.** Из замечания к задаче № 22-1 следует, что тонкая стеклянная пластинка практически не влияет на ход световых лучей. Поэтому можно считать, что пластинки нет, а вода и воздух граничит между собой непосредственно

Существует несколько способов решения задачи. Один из них основан на том, что, поочередно применив формулу (22.2) для всех трех преломляющих поверхностей, можно найти фокусное расстояние системы (точно так же, как это мы сделали в предыдущей задаче), а значит, и ее оптическую силу.

Применим здесь другой способ, рассматривая нашу систему как две сложенные вплотную тонкие линзы: одна из них — плосковыпуклая стеклянная, другая — плосковыпуклая воздушная. Пусть  $\Phi_{ст}$ ,  $\Phi_{возд}$  — оптические силы этих линз. Тогда на основании формулы (22.6) оптическая сила системы

$$\Phi = \Phi_{ст} + \Phi_{возд}. \quad (1)$$

С помощью формулы (22.5) определим оптические силы обеих линз, считая, что каждая из них находится в воде. Пусть  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  — коэффициенты преломления воды, стекла и воздуха соответственно. Выбрав положительное направление отсчета (направление луча) вправо, получим

$$\Phi_{ст} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{R} \right), \quad \Phi_{возд} = \left( \frac{n_3}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\infty} \right). \quad (2)$$

Из формул (1), (2) найдем

$$\Phi = (n_2 - n_1)/n_1 R.$$

Взяв из таблиц  $n_1 = 1,33$  и  $n_2 = 1,50$  и выполнив вычисление, получим

$$\Phi = -1,9 \text{ дп.}$$

Знак « $\rightarrow$ » в ответе показывает, что данная система — рассеивающая.

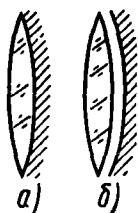


Рис. 22-11

22-9. Светящаяся точка находится на главной оптической оси тонкой стеклянной ( $n = 1,50$ ) двояковыпуклой линзы с одинаковыми радиусами кривизны, равными 20 см, на расстоянии 30 см от ее оптического центра. Задняя поверхность линзы посеребрена. Где получится изображение точки?

**Решение.** Лучи света, падая на линзу, преломляются на ее передней поверхности, отражаются от задней поверхности и снова преломляются на передней (рис. 22-11, а). Поэтому можно решить задачу, поочередно применяя формулу (22.2) и известную из школьного курса формулу сферического зеркала, рассматривая каждый раз полученное изображение в качестве предмета, чтобы найти следующее изображение.

Применим другой, быстрее приводящий к цели способ. Он основан на расчете оптической силы данной системы, которую можно заменить другой системой, эквивалентной данной.

Представим, что зеркало отделили от линзы и между ними появился тонкий воздушный слой одинаковой толщины (рис. 22-11, б). Рассматривая каждый малый элемент такого слоя как плоскопараллельную пластинку, можно убедиться в том, что наличие этого слоя при его достаточно малой толщине не влияет на ход отраженных световых лучей внутри линзы, так как смещение луча, полученное в результате его прохождения через плоскопараллельную пластинку, пропорционально толщине последней. Следовательно, системы, изображенные на рис. 22-11, а, б, эквивалентны. Но теперь свет будет проходить через всю линзу, преломляясь на обеих ее поверхностях, затем отражаться от сферического зеркала и, наконец, еще раз проходить через линзу. Пусть  $\Phi_n$ ,  $\Phi_z$  — оптические силы линзы и зеркала. Тогда, обобщая формулу (22.6) на случай зеркала, запишем для оптической силы всей системы:

$$\Phi = \Phi_n + \Phi_z + \Phi_n = 2\Phi_n + \Phi_z. \quad (1)$$

Оптическая сила зеркала  $\Phi_z = 2/R$ . Оптическую силу линзы вычислим по формуле (22.5), обозначив  $n_n = n$  и учитывая, что  $n_{cp} = 1$  (воздух):

$$\Phi_n = 2(n - 1)/R.$$

Подставив значения  $\Phi_n$  и  $\Phi_s$  в формулу (1), найдем

$$\Phi = (4n - 2)/R.$$

Теперь, зная  $\Phi$  и расстояние  $a_1$  от системы до предмета, по формуле (22.4) определим искомое расстояние  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{a_1 R}{(4n - 2) a_1 - R}.$$

Подставив числовые значения величин:  $a_1 = -30$  см,  $R = 20$  см и выполнив вычисление, получим\*

$$a_2 = 6 \text{ см.}$$

Знак «+» в ответе показывает, что изображение светящейся точки удалено на 6 см от системы по ходу отраженного луча, т. е. лежит на расстоянии 6 см перед системой.

## В. ЭЛЕМЕНТЫ ФОТОМЕТРИИ

### Методические указания

1. Основой расчетов освещенности служит закон освещенности (22.12). Он применим лишь для *точечных* источников, поскольку лишь к таким источникам относится понятие силы света. Освещенность, созданная системой точечных источников, равна сумме освещенностей от каждого источника.

Если на поверхность падают лучи не непосредственно от точечного источника, а после преломления в линзе, то для определения освещенности надо найти изображение, даваемое линзой, и затем рассматривать его как светящуюся точку. Силу света  $I_2$  изображения можно определить, зная силу света  $I_1$  источника, из соотношения (22.10). Считая, что линза полностью пропускает падающий на нее световой поток  $\Phi$ , и ограничиваясь параксиальными пучками, получим,

$$\Phi = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2, \quad (1)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  — телесные углы, в которых распространяются пучки света: падающий на линзу ( $\omega_1$ ) и преломленный ( $\omega_2$ ). Как следует из геометрических соображений,  $\omega_1 : \omega_2 = a_2^2 : a_1^2$ , где  $a_1, a_2$  — расстояния от линзы до предмета и изображения. Все сказанное в отношении линз применимо и к зеркалам. В частности, плоское зеркало, отражая свет, не меняет телесного угла, в котором распространяется световой поток. Тогда в формуле (1)  $\omega_1 = \omega_2$  и, следовательно,  $I_1 = I_2$  (при условии, что коэффициент отражения  $\rho = 1$ ).

---

\* Для собирающих (вогнутых) зеркал величины  $R, f, \Phi$  считают положительными, для рассеивающих (выпуклых) — отрицательными.

Постоянство светового потока при преломлении и отражении света можно использовать для определения освещенности также с помощью формулы (22.11). Зная освещенность  $E$  линзы (зеркала), а также ее площадь  $S$  и площадь  $S'$  светового пятна на экране, можно найти освещенность  $E'$  экрана из соотношения

$$\Phi = ES = E'S'.$$

2. Характеристикой *протяженных* источников света служит яркость  $B$ , определяемая соотношением (22.14). Чтобы найти освещенность, созданную протяженным источником, надо разбить его поверхность на элементарные участки  $dS$ . Вычислив с помощью соотношения (22.14) силу света  $dI$  каждого участка:

$$dI = BdS_n = B \cos \varphi dS, \quad (2)$$

и рассчитав по формуле (22.12) освещенность  $dE$ , созданную элементом  $dS$ , надо проинтегрировать полученное выражение по всей площади источника. Обычно при этом рассматриваются лишь такие случаи, когда все элементы источника имеют одинаковую яркость по всем направлениям; это упрощает вычисления.

Часто протяженный источник не слишком больших размеров с заданной яркостью и площадью светящейся поверхности все же можно считать точечным и применять к нему сразу закон освещенности (22.12), где сила света согласно формуле (2) равна

$$I = B \int dS_n = BS_n.$$

При этом ошибка в расчетах получается незначительной (менее 1%) даже в тех случаях, когда линейные размеры источника достигают 10% расстояния от источника до освещаемой поверхности.

3. Яркость *изображения* протяженного источника света, созданного оптической системой, никогда не может превысить яркость источника, если только изображение и источник находятся в одной и той же среде и изображение рассматривается непосредственно (без экрана). Наличие экрана, на который проектируется изображение, существенно меняет дело (см. задачу № 22-13).

Оптические приборы, вооружающие глаз (лупа, микроскоп, телескоп), дают мнимые изображения. При этом действительное изображение получается на сетчатке глаза. Освещенность сетчатки на месте изображения определяет ощущение яркости, так называемую субъективную яркость. Иногда в задаче требуется сравнить яркости объекта и его мнимого изображения при наблюдении объекта глазом, вооруженным прибором. При этом подразумевают именно субъективные яркости (см., например, задачу № 4.32 из задачника [12]). В этом случае задача сводится к сравнению освещенностей сетчатки глаза невооруженного и глаза, вооруженного оптическим прибором (см. задачу № 22-14).

## Решение задач

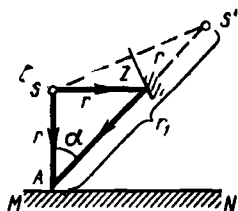


Рис 22-12

22-10. Точечный источник света  $S$  освещает горизонтальную поверхность  $MN$  (рис. 22-12). Как изменится освещенность в точке  $A$ , находящейся под источником, если сбоку  $S$  на таком же расстоянии, как и освещаемая поверхность, поместить плоское зеркало  $Z$ , отражающее свет в  $A$ ?

**Решение.** Очевидно, вследствие отражения от зеркала светового потока освещенность поверхности в точке  $A$  увеличивается. Чтобы выполнить необходимые расчеты, учтем, что отраженные от зеркала лучи пройдут так, словно вышли из точки  $S'$ , расположенной симметрично точке  $S$  относительно плоскости зеркала. Значит, можно считать, что зеркала нет, но имеется два источника света:  $S$  и  $S'$ . Так как плоское зеркало, отражая свет, не меняет угла  $d\omega$ , в котором распространяется световой поток  $d\Phi$ , то в соответствии с формулой (22.10) следует положить силу света источников  $S$  и  $S'$  одинаковой.

Используя вытекающие из построения равенства

$$AS' = r_1 = (\sqrt{2} + 1)r, \quad \cos \alpha = 1/\sqrt{2}$$

и применив закон освещенности (22.12), найдем освещенности в точке  $A$  в отсутствие зеркала:

$$E_0 = I/r^2$$

и при наличии зеркала:

$$E = E_0 + E' = \frac{I}{r^2} + \frac{I \cos \alpha}{r_1^2} = \frac{I}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^2} \right].$$

Из этих равенств получим

$$E = 1,12 E_0.$$

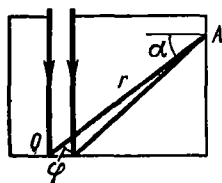


Рис 22-13

22-11. Через отверстие в крышке ящика на его дно, покрытое листом белой бумаги, падает узкий пучок света, образующий световое пятно («зайчик») площадью  $S = 1,0 \text{ см}^2$  и освещенностью  $E = 1,0 \cdot 10^4 \text{ лк}$ . Считая, что бумага рассеивает свет по закону Ламберта, и приняв коэффициент рассеяния  $\rho = 0,8$ , найти освещенность стенки ящика в точке  $A$ , удаленной от «зайчика» на расстояние  $r = 0,40 \text{ м}$ , если угол падения лучей  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 22-13).

**Решение.** Приняв «зайчик» за точечный источник света, можно найти освещенность стенки по закону освещенности (22.12). Так как величины  $r$ ,  $\alpha$  известны, задача сводится к нахождению силы света источника. Рассеивая падающие лучи, бумага является источником света. Очевидно, сила света этого источника зависит от коэффи-

коэффициента рассеяния  $\rho$ , который вместе с освещенностью бумаги определяет, согласно формуле (22.13), светимость «зайчика». Но, используя условие задачи, можно перейти от светимости к силе света. В самом деле, так как бумага рассеивает свет по закону Ламберта, то по светимости «зайчика» можно найти его яркость. Из формул (22.15), (22.13) получим яркость

$$B = \rho E / \pi. \quad (1)$$

Зная яркость «зайчика» и определив его видимую из точки  $A$  площадь  $S_n$ , с помощью формулы (22.14) найдем силу света «зайчика» по направлению  $OA$  (рис. 22-13). Так как яркость «зайчика» одинакова для всех точек его поверхности, элементарные величины  $dI$ ,  $dS_n$  в формуле заменим конечными  $I$ ,  $S_n$ . Тогда

$$I = BS_n = BS \cos \varphi, \quad (2)$$

где угол  $\varphi$ , как это видно из чертежа, связан с углом  $\alpha$  так:

$$\varphi = \pi/2 - \alpha. \quad (3)$$

Наконец, из закона освещенности (22.12) с учетом соотношений (1)—(3) найдем освещенность поверхности в точке  $A$ :

$$E_A = \frac{I \cos \alpha}{r^2} = \frac{\rho E S \sin \alpha \cos \alpha}{\pi r^2}.$$

Подставив числовые значения величин (предварительно выразив площадь  $S$  в  $\text{м}^2$ ) и выполнив вычисление, получим

$$E_A = 0,7 \text{ лк.}$$

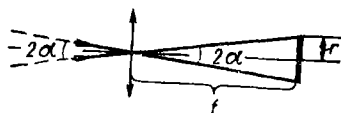


Рис 22 14

22-12. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 15,0$  см и диаметром  $D = 5,0$  см дает изображение Солнца на экране, расположенном нормально к солнечным лучам (рис. 22-14). Пренебрегая потерями света в линзе, найти среднюю освещенность изображения, если яркость Солнца  $B_c = 1,5 \cdot 10^9$  кд/м<sup>2</sup>.

**Решение.** Среднюю освещенность  $E_{\text{ср}}$  определим из соотношения (22.11), заменив элементарные величины  $d\Phi$ ,  $dS$  конечными величинами  $\Phi$ ,  $S$ :

$$E_{\text{ср}} = \Phi / S, \quad (1)$$

где  $\Phi$  — световой поток, создающий на экране изображение Солнца,  $S$  — площадь изображения. Поскольку изображение создается теми же лучами, которые сначала упали на линзу, то можно искать  $\Phi$  как световой поток, падающий на поверхность линзы  $S_d$ . Поэтому на основании той же формулы (22.11) получим

$$\Phi = ES_d = E\pi D^2/4, \quad (2)$$

где  $E$  — освещенность поверхности линзы солнечными лучами. Выразим ее через данную в условии яркость Солнца, воспользовавшись законом освещенности (22.12) и соотношением (22.14):

$$E = \frac{l}{R^2} = \frac{\pi r_c^2 B_C}{R}, \quad (3)$$

где  $r_c$  — радиус Солнца,  $\pi r_c^2$  — площадь *видимой* его поверхности (площадь круга, а не полусферы!),  $R$  — расстояние от Земли до Солнца. Учитывая, что угловые (видимые) размеры Солнца очень малы, можно принять  $r_c/R = \alpha$  (рис. 22-14). Тогда, подставив значение  $E$ , определяемое по (3), в формулу (2), получим

$$\Phi = \pi^2 \alpha^2 B_C D^2 / 4. \quad (4)$$

Чтобы вычислить площадь  $S$  изображения Солнца, учтем, что оно будет лежать в фокальной плоскости линзы. Поэтому

$$S = \pi r^2 = \pi (f\alpha)^2. \quad (5)$$

Теперь по формуле (1) с учетом (4), (5) имеем

$$E_{\text{ср}} = \frac{\pi}{4} B_C \left( \frac{D}{f} \right)^2. \quad (6)$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ, и выполнив вычисление, найдем

$$E_{\text{ср}} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ лк.}$$

**З а м е ч а н и е.** Так как в *фотоаппарате* изображение обычно получается вблизи фокальной плоскости объектива, то формула (6) выражает освещенность изображения на фотопленке фотоаппарата (без учета потерь света в объективе). При этом освещенность пропорциональна яркости  $B$  объекта и квадрату относительного отверстия  $D/f$  объектива.

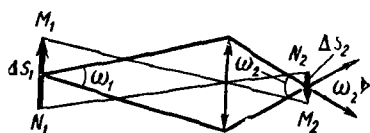


Рис. 22-15

22-13. Как зависит от диаметра  $D$  тонкой собирающей линзы яркость действительного изображения, если его рассматривать в двух случаях: 1) на белом экране, рассеивающем по закону Ламберта; 2) непосредственно?

**Р е ш е н и е.** 1. Яркость  $B$  поверхности, рассеивающей свет по закону Ламберта, связана с ее освещенностью  $E$  соотношением

$$B = \rho E / \pi,$$

вытекающим из формул (22.15) и (22.13), т. е. яркость изображения на экране пропорциональна его освещенности. В свою очередь освещенность изображения, полученного линзой, пропорциональна величине  $D^2$ , как это видно из формулы (6) предыдущей задачи. Следовательно, яркость изображения на экране пропорциональна квадрату диаметра линзы.

2. На рис 22-15  $M_1N_1$  — предмет;  $M_2N_2$  — его действительное изображение;  $\omega_1$  — телесный угол, в котором распространяется световой поток  $\Delta\Phi$ , испускаемый весьма малым элементом  $\Delta S_1$  поверхности предмета и падающий на линзу;  $\omega_2$  — телесный угол, в котором распространяется этот же световой поток, падая на соответствующий элемент  $\Delta S_2$  изображения (потери света в линзе пренебрегаем). Очевидно, под таким же углом  $\omega_2$  лучи, создав элемент изображения  $\Delta S_2$ , будут расходиться. Заметим, что изображение  $M_2N_2$  в отличие от предмета  $M_1N_1$  видно не со всех сторон. Чтобы наблюдатель видел элемент  $\Delta S_2$  изображения, его глаз должен находиться внутри телесного угла  $\omega_2$ . Следовательно, лишь в направлении одного из лучей, лежащих внутри угла  $\omega_2$ , имеет смысл говорить о яркости  $B$  элемента изображения  $\Delta S_2$ . В других направлениях его яркость равна нулю.

Чтобы найти величину  $B$ , учтем, что, согласно определениям яркости и силы света, яркость измеряется световым потоком, испускаемым единицей площади видимой светящейся поверхности внутри единичного телесного угла. Поэтому для яркости элемента  $\Delta S_2$  можно записать:

$$B = \Delta\Phi / \Delta S_2 \omega_2. \quad (1)$$

Так как при изменении диаметра объектива величины  $\Delta\Phi$ ,  $\omega_2$  будут изменяться пропорционально  $D^2$ , то отношение  $\Delta\Phi / \omega_2$  останется постоянным. Таким образом, яркость  $B$  изображения, рассматриваемого непосредственно, не зависит от диаметра линзы.

**З а м е ч а н и е.** Пренебрегая потерями света в линзе, можно показать, что яркость  $B$  изображения независимо от диаметра объектива равна яркости  $B_0$  предмета, определяемой отношением

$$B_0 = \Delta\Phi / \Delta S_1 \omega_1. \quad (2)$$

Действительно, величины  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  можно выразить через  $a_1$ ,  $a_2$  — расстояния от линзы до предмета и изображения:

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

Перемножив почленно эти два равенства, получим  $\Delta S_2 \omega_2 = \Delta S_1 \omega_1$ . Отсюда следует равенство яркостей:  $B = B_0$ .

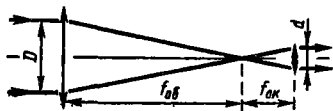


Рис. 22-16

22-14. Как изменится освещенность изображения проявленного объекта (например, планеты) на сетчатке глаза при переходе от наблюдения невооруженным глазом к наблюдению в телескоп с увеличением  $\Gamma$ , диаметр объектива которого  $D$ . Рассмотреть два случая: 1)  $\Gamma > D/d_0$  и 2)  $\Gamma < D/d_0$ , где  $d_0$  — диаметр зрачка. Потери света в телескопе пренебречь.



**Решение.** На рис. 22-16 показан ход лучей в телескопе, исходящих из элемента объекта, расположенного на оптической оси телескопа. На основании формул (22.7), (22.8) и чертежа выразим увеличение телескопа рядом отношений:

$$\Gamma = \frac{l}{l_0} = \frac{l_{об}}{l_{ок}} = \frac{D}{d}, \quad (1)$$

где  $d$  — диаметр выходящего из окуляра светового пучка.

Обозначим освещенности изображений на сетчатке невооруженного глаза через  $E_0$  и глаза, вооруженного телескопом, — через  $E$ . Для каждой из величин  $E_0$ ,  $E$ , согласно определению освещенности, запишем:

$$E_0 = k\Phi_0/S_0; \quad E = k\Phi/S,$$

где  $\Phi_0$ ,  $\Phi$  — световые потоки, входящие через зрачок в глаз, не вооруженный и вооруженный телескопом;  $k$  — коэффициент, показывающий, какая доля вошедшего в глаз светового потока достигла сетчатки;  $S_0$ ,  $S$  — площади изображений на сетчатке невооруженного и вооруженного глаза. Разделим почленно эти два равенства и, основываясь на том, что площадь изображения пропорциональна квадрату его линейных размеров, получим с учетом формулы (1)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{S_0}{S} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \frac{1}{\Gamma^2}. \quad (2)$$

Таким образом, задача сводится к определению отношения  $\Phi/\Phi_0$ . Рассмотрим оба заданных случая.

1.  $\Gamma > D/d_0$ . Из равенства (1) следует, что при этом  $d < d_0$ . Значит, *вся* световой поток, улавливаемый объективом, выйдя из окуляра, попадет в глаз наблюдателя. Так как объект создает одинаковую освещенность на поверхностях объектива и невооруженного глаза, то отношение  $\Phi/\Phi_0$  можно заменить отношением площадей объектива и зрачка, равным в свою очередь отношению квадратов их диаметров. Тогда из формулы (2) получим

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{D}{d_0}\right)^2 \frac{1}{\Gamma^2}.$$

Так как, по условию,  $\Gamma > D/d_0$ , то  $E < E_0$ . Значит, в этом случае освещенность  $E$  изображения на сетчатке вооруженного глаза, будучи пропорциональной квадрату диаметра объектива, остается меньше освещенности  $E_0$  изображения на сетчатке невооруженного глаза.

2.  $\Gamma < D/d_0$ . Из равенства (1) следует:  $d > d_0$ . Значит, теперь лишь *часть* светового потока, выходящего из телескопа, попадет в глаз. Чтобы в этом случае найти отношение  $\Phi/\Phi_0$ , учтем, что телескоп, преобразуя падающий на объектив световой пучок, согласно формуле (1) уменьшает его диаметр в  $\Gamma$  раз. При этом площадь поперечного сечения пучка уменьшается в  $\Gamma^2$  раз, а плотность светового потока в пучке (т. е. отношение светового потока к площади поперечного сечения пучка) увеличивается в  $\Gamma^2$  раз. Поэтому при вооружении глаза

телескопом световой поток, входящий через зрачок в глаз, возрастает в  $\Gamma^2$  раз. Значит, теперь по формуле (2) имеем

$$\frac{E}{E_0} = \Gamma^2 \cdot \frac{1}{\Gamma^2} = 1.$$

Отсюда следует, что при условии  $\Gamma < D/d_0$  вооружение глаза телескопом не приводит к изменению освещенности изображения на сетчатке.

**З а м е ч а н и е.** Полученные в обоих случаях результаты оказываются неверными при наблюдении в телескоп звезды. Угловые размеры звезды меньше предела разрешения телескопа, определяемого явлением дифракции света (см. задачу № 24-5). Это значит, что глаз, вооруженный телескопом, по-прежнему видит звезду *светящейся точкой*. В этом случае величины  $S, S_0$ , входящие в формулу (2) и представляющие собой площади дифракционных изображений звезды, приблизительно равны друг другу, а так как  $\Phi \gg \Phi_0$ , то  $E \gg E_0$ . Таким образом, телескоп всегда значительно увеличивает освещенность изображения звезды на сетчатке глаза.

## § 23. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

### Основные формулы

Оптическая длина пути, проходимого световым лучом в однородной среде с показателем преломления  $n$ , равна

$$L = ns, \quad (23.1)$$

где  $s$  — геометрическая длина пути луча.

Оптическая разность хода двух световых лучей

$$\Delta = L_2 - L_1 \quad (23.2)$$

Результат интерференции света от двух когерентных источников при совпадении начальных фаз световых колебаний зависит от величины

$$\Delta = \pm m (\lambda_0/2) \quad (23.3)$$

где  $\lambda_0$  — длина световой волны в вакууме,  $m$  — целое число. Четному  $m$  ( $m = 2k$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) соответствует максимальное значение интенсивности света (интерференционный максимум), нечетному  $m$  ( $m = 2k + 1$ ) — минимальное (интерференционный минимум).

Расстояние между интерференционными полосами на экране, полученными от двух когерентных источников света,

$$x = l/d, \quad (23.4)$$

где  $l$  — расстояние от экрана до источников,  $d$  — расстояние между источниками ( $d \ll l$ ).

Оптическая разность хода световых лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пластинки, по обе стороны которой находятся одинаковые среды, равна

$$\Delta = 2hn \cos r - \lambda_0/2, \quad (23.5)$$

где  $h$  — толщина пластинки,  $n$  — показатель преломления (абсолютный) вещества пластинки,  $r$  — угол преломления,  $\lambda_0$  — длина световой волны в вакууме.

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете определяются формулой

$$\rho_k = \sqrt{kR\lambda} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (23.6)$$

а радиусы светлых — формулой

$$\rho_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda/2} \quad (k=1, 2, 3, \dots). \quad (23.7)$$

Здесь  $R$  — радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной пластинкой,  $\lambda$  — длина световой волны в среде между линзой и пластинкой,  $k$  — порядковый номер кольца ( $k=0$  соответствует центральному темному пятну).

### Методические указания

1. Интерференция возможна лишь в случае когерентных волн. Так как два любых независимых источника света не являются когерентными, то интерференция света возникает лишь в тех случаях, когда световая волна, испускаемая одним источником, разделяется некоторой оптической системой на две части. Соответствующие две волны, пройдя различные пути, встречаются на экране (или на сетчатке глаза), создавая интерференционную картину. Последнюю нередко удается объяснить, заменив данную оптическую систему другой, эквивалентной, считая при этом, что имеется не один, а два когерентных источника.

Задачи на интерференцию света делятся в основном на две группы: задачи, связанные с интерференцией волн от двух когерентных источников, и задачи на интерференцию в тонких пластинках (пленках). К задачам первой группы относятся случаи интерференции, полученной с помощью зеркал Френеля, зеркала Ллойда, бипризмы Френеля, а также в опыте Юнга. Для расчета интерференционной картины используют формулы (23.3), (23.4), предварительно определив (если это необходимо) положение двух когерентных источников (см. задачи № 23-1, 23-2). Вторую группу составляют задачи на интерференцию как в плоскопараллельных, так и в клинообразных тонких слоях, а также задачи на кольца Ньютона. В этих случаях соотношение (23.5) позволяет вычислить оптическую разность хода  $\Delta$  двух интерферирующих лучей, отраженных от обеих поверхностей слоя. Затем по условию (23.3) определяют результат интерференции.

2. Решая задачи, связанные с интерференцией света в тонких пластинках (пленках), обратите внимание на то, что формула (23.5) для оптической разности хода двух лучей, отраженных от передней и задней поверхности пластинки, выведена для случая, когда пластинка окружена одинаковыми средами. При этом один из двух лучей отражается от границы с оптически менее плотной средой, другой — от границы с оптически более плотной средой. В последнем случае фаза светового колебания при отражении скачкообразно изменяется на противоположную. Очевидно, такое явление можно трактовать и как уменьшение, и как увеличение фазы на  $\pi$ . Это изменение фазы соответствует изменению оптической разности хода лучей  $\Delta$  на  $\pm \lambda_0/2$ .

Действительно, если в формуле (20.3) положить  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi$ , то для разности хода лучей получим

$$\Delta = y_2 - y_1 = \pm \lambda/2.$$

Отсюда ясно, что в формуле (23.5) член  $\lambda_0/2$ , выражающий «потерю» полуволны при отражении, можно записывать с любым знаком, т. е. величину  $\Delta$  можно выразить и так:

$$\Delta = 2 hn \cos r + \lambda_0/2.$$

Если тонкая пластинка окружена *различными* средами, то в зависимости от соотношения между показателями преломления сред  $n_1$ ,  $n_2$  и пластинки  $n$  возможны следующие случаи: а)  $n > n_1, n > n_2$ , при этом только луч 1, отраженный от границы с оптически более плотной средой, «теряет» полуволну (рис. 23-1); б)  $n < n_1, n < n_2$  — «теряет» полуволну только луч 2; в)  $n_1 < n < n_2$  — оба луча «теряют» полуволну; г)  $n_1 > n > n_2$  — ни один луч не «теряет» полуволны. Очевидно, для первых двух случаев соотношение (23.5) остается в силе. Так как «потеря» полуволны *обоими* лучами не скажется на их разности хода, то в последних двух случаях в формуле (23.5) величину  $\lambda_0/2$  надо отбросить. Тогда получим

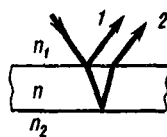


Рис. 23-1

$$\Delta = 2 hn \cos r.$$

При интерференции света, известной под названием *колец Ньютона*, роль тонкой пленки играет прослойка (обычно воздушная) между пластинкой и выпуклой поверхностью прижатой к ней линзы. Формулы (23.6), (23.7) для радиусов колец выведены в предположении, что эта прослойка окружена *одинаковыми* средами, т. е. пластинка и линза должны иметь одинаковые показатели преломления. В этом отношении дело обстоит здесь так, как и с формулой (23.5). Поэтому, приняв на рис. (23-1)  $n_1, n, n_2$  за показатели преломления линзы, прослойки и пластинки и повторив вышеприведенные рассуждения, полагая, что прослойка окружена *различными* средами ( $n_1 \neq n_2$ ), придем к выводу, что формулы (23.6), (23.7) остаются верными в случаях а и б. Если выполняется условие в или г, то величина  $\Delta$  будет отличаться от той, что была в случаях а и б, на  $\lambda_0/2$ . Это вызывает обращение интерференционной картины: светлые и темные кольца поменяются местами. Теперь формула (23.6) будет определять радиусы светлых колец, а (23.7) — темных.

3. В условиях задач обычно приводятся значения длин световых волн, настолько округленные, что нмп с равным успехом можно пользоваться как в случае распространения света в воздухе, так и в вакууме, поскольку  $\lambda_0 = 1,00029 \lambda$ .

## Решение задач

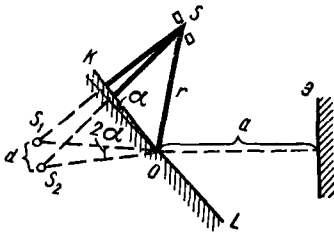


Рис 23 2

23-1. На зеркалах Френеля, угол между которыми  $\alpha = 10'$ , падает монохроматический свет от узкой щели  $S$ , находящейся на расстоянии  $r = 0,10$  м от линии их пересечения (рис. 23-2). Отраженный от зеркал свет дает интерференционную картину на экране  $\mathcal{E}$ , отстоящем на расстоянии  $a = 2,7$  м от линии их пересечения, причем расстояние между интерференционными полосами равно  $x = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м. Определите длину волны  $\lambda$  света.

**Решение.** После отражения от зеркал  $OK$ ,  $OL$  световые волны распространяются так, будто вышли из двух когерентных источников  $S_1$ ,  $S_2$ , являющихся мнимыми изображениями щели  $S$  (рис. 23-2). Пусть расстояние между источниками  $S_1$ ,  $S_2$  равно  $d$ , а расстояние от них до экрана  $l$ . Величины  $l$ ,  $d$ ,  $x$ ,  $\lambda$  связаны соотношением (23.4), откуда

$$\lambda = xd/l. \quad (1)$$

Чтобы найти  $d$  и  $l$ , учтем, что точки  $S_1$  и  $S_2$  симметричны точке  $S$  относительно соответствующих зеркал. Поэтому  $S_1O = S_2O = r$  и  $\angle S_1OS_2 = 2\alpha$ . Так как угол  $\alpha$  весьма мал и экран обычно располагается параллельно отрезку  $S_1S_2$ , то можно записать:

$$d = 2\alpha r, \quad l = r + a.$$

Подставив эти значения  $d, l$  в формулу (1), получим

$$\lambda = 2\alpha rx/(r + a).$$

После подстановки числовых значений величин (предварительно выразив угол  $\alpha$  в радианах) найдем

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,6 \text{ мкм}.$$

23-2 Для измерения показателей преломления прозрачных веществ используют интерферометр, схема которого дана на рис. 23-3. Здесь  $S$  — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом ( $\lambda_0 = 0,589$  мкм),  $1$  и  $2$  — две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых  $l = 10,0$  см;  $D$  — диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в трубке 2 заменили аммиаком, то ранее наблюдавшаяся на экране  $\mathcal{E}$  интерференционная картина сместилась вверх на  $N = 17$  полос. Определить показатель преломления  $n'$  аммиака, если для воздуха  $n = 1,00029$ .

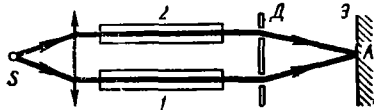


Рис 23 3

**Решение.** Согласно принципу Гюйгенса, две щели в освещаемой диафрагме можно рассматривать как вторичные источники световых волн. Так как при этом на диафрагму падает свет от *одного* источника  $S$ , то обе щели являются *когерентными* источниками и на экране возникает интерференционная картина. Результат интерференции света в какой-либо точке  $A$  экрана определяется из соотношения (23.3), где  $\Delta = L_2 - L_1$  — оптическая разность хода лучей  $S1A$ ,  $S2A$ . Так, для светлых интерференционных полос имеем

$$\Delta = \pm 2k(\lambda_0/2) = \pm k\lambda_0, \quad (1)$$

где  $k$  — номер данной полосы (отсчет ведется от центральной полосы, для которой  $k = 0$ ).

Замена воздуха аммиаком в трубке 2 вызвала, согласно формуле (23.1), изменение оптической длины пути  $L_2$  светового луча  $S2A$  на величину

$$\delta = n'l - nl. \quad (2)$$

На столько же изменилась величина  $\Delta = L_2 - L_1$ . При этом согласно формуле (23.3) изменилось условие интерференции света в точке  $A$ .

В процессе замены воздуха аммиаком, когда величина  $\Delta$  непрерывно изменялась, в точке  $A$  экрана постепенно сменяли друг друга светлые и темные интерференционные полосы — интерференционная картина перемещалась по экрану. Ее смещению на одну полосу соответствует в формуле (1) изменение числа  $k$  на единицу и, следовательно, изменение  $\Delta$  на величину  $\pm\lambda_0$ . Значит, при смещении интерференционной картины на  $N$  полос оптическая разность хода  $\Delta$  изменилась на величину  $\pm N\lambda_0$ . Но это изменение выражается формулой (2), поэтому

$$n'l - nl = \pm N\lambda_0. \quad (3)$$

Знак в правой части (3) определяется направлением смещения интерференционной картины на экране. Действительно, рассмотрим центральную интерференционную полосу ( $k = 0$ ). Когда в обеих трубках был воздух, она располагалась на экране на равных расстояниях от щелей в диафрагме. Перемещение полосы вверх в процессе замены воздуха в трубке 2 аммиаком свидетельствует, как это видно из чертежа, об увеличении оптической длины пути  $L_1$  луча  $S1A$ . Но для центральной интерференционной полосы, как бы она ни перемещалась по экрану, всегда  $\Delta = L_2 - L_1 = \pm k\lambda = 0$ . Следовательно, оптическая длина пути  $L_2$  луча  $S2A$  также увеличилась. Очевидно, это могло произойти только вследствие неравенства  $n' > n$ . Таким образом, отбросив знак «—» в правой части (3), получим

$$n' = n + N\lambda_0/l = 1,00039.$$

**23-3.** Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива ( $n_2 = 1,7$ ) нанесена тонкая прозрачная пленка ( $n = 1,3$ ). При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление отраженного света, длина волны которого приходится на среднюю часть видимого спектра ( $\lambda_0 = 0,56 \text{ мкм}$ )? Считать, что лучи падают нормально к поверхности объектива.

**Решение.** Свет, падая на объектив, отражается как от передней, так и от задней поверхностей тонкой пленки. Ход лучей для случая их наклонного падения изображен на рис. 23-1. Отраженные лучи 1, 2 интерферируют. Условие минимума интенсивности света при интерференции выражается формулой (23.3), где  $m$  — нечетное число, т. е.

$$\Delta = \pm (2k + 1) \lambda_0 / 2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Оптическая разность хода лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки, окруженной одинаковыми средами, определяется формулой (23.5). В данном случае пленка окружена различными средами — воздухом ( $n_1 = 1,00$ ) и стеклом ( $n_2 = 1,7$ ). Из неравенства  $n_1 < n < n_2$  следует, что оба луча 1, 2, отражаясь от границы с оптически более плотной средой, «теряют» полуволну. Так как это не влияет на их разность хода, то в (23.5) следует отбросить член  $\lambda_0/2$ . Кроме того, полагая  $r = 0$ , получим

$$\Delta = 2hn. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) находим толщину пленки:

$$h = \pm (2k + 1) \lambda_0 / 4n.$$

Учитывая, что  $h$  — существенно положительная величина и что значению  $h_{\text{мин}}$  соответствует  $k = 0$ , получим

$$h_{\text{мин}} = \lambda_0 / 4n = 0,11 \text{ мкм}.$$

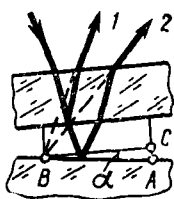


Рис 23 4

**23-4.** Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками заключен очень тонкий воздушный клин. На пластинки нормально падает монохроматический свет ( $\lambda_0 = 0,50 \text{ мкм}$ ). Определить угол  $\alpha$  между пластинками, если в отраженном свете на протяжении  $l = 1,00 \text{ см}$  наблюдается  $N = 20$  интерференционных полос.

**Решение.** В данном случае интерферируют лучи 1 и 2, отраженные от двух поверхностей тонкого воздушного клина (на рис. 23-4, чтобы лучше различить эти лучи, угол падения луча на верхнюю пластинку взят отличным от нуля). Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы будут полосами *равной толщины*, представляя собой геометрическое место точек, соответствующих одина-

ковой толщине клина. Очевидно, эти полосы располагаются параллельно ребру клина и перпендикулярно плоскости чертежа.

Пусть точки  $A$ ,  $B$  соответствуют двум соседним интерференционным полосам. Проведем прямую  $BC$ , параллельную верхней пластинке, и учитывая, что искомый угол весьма мал, имеем

$$\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{(h_A - h_B)N}{l}, \quad (1)$$

где  $h_A$ ,  $h_B$  — толщины воздушного клина в точках  $A$ ,  $B$ . Предположим для определенности, что  $AB$  — расстояние между *темными* интерференционными полосами. Тогда обе величины  $h_A$ ,  $h_B$  найдем, приравняв правые части формул (23.3), (23.5) и взяв  $m = 2k + 1$ . Так как  $r = 0$ ,  $n = 1,00$  (воздух) и  $h > 0$ , то

$$h = (k + 1) \lambda_0 / 2. \quad (2)$$

Поскольку величины  $h_A$ ,  $h_B$  относятся к *соседним* полосам, то в формуле (2) числа  $k$ , соответствующие величинам  $h_A$ ,  $h_B$ , должны отличаться на единицу. Следовательно,

$$h_A - h_B = \frac{(k_A + 1) \lambda_0}{2} - \frac{(k_B + 1) \lambda_0}{2} = (k_A - k_B) \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (3)$$

Легко убедиться, что к такому же результату придем, предположив, что  $AB$  есть расстояние между соседними *светлыми* полосами. Теперь из формулы (1) с учетом результата (3) найдем

$$\alpha = \lambda_0 N / 2l$$

Подставив числовые значения величин:  $\lambda_0 = 0,50 \cdot 10^{-6}$  м,  $l = 1,00 \cdot 10^{-2}$  м,  $N = 20$  — и выполнив вычисление, получим

$$\alpha = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'40''.$$

**23-5.** Сферическая поверхность плосковыпуклой линзы ( $n_1 = 1,52$ ) соприкасается со стеклянной пластинкой ( $n_2 = 1,70$ ). Пространство между линзой, радиус кривизны которой  $R = 1,00$  м, и пластинкой заполнено жидкостью. Наблюдая козыца Ньютона в отраженном свете ( $\lambda_0 = 0,589$  мкм), измерили радиус  $\rho$  десятого темного кольца. Определить показатель преломления жидкости  $n_{ж}$  в двух случаях: 1)  $\rho = 2,05$  мм, 2)  $\rho = 1,90$  мм

**Решение.** Искомый показатель преломления  $n_{ж}$  не входит в явном виде в формулы (23.6), (23.7) для колец Ньютона. Однако его легко ввести в эти формулы, если воспользоваться соотношением между длиной волны  $\lambda$ , скоростью света  $c$  и частотой колебаний  $\nu$ , а также зависимостью скорости  $c$  от показателя преломления среды:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n_{ж} \nu} = \frac{\lambda_0}{n_{ж}}, \quad (1)$$

где  $c_0$  — скорость света в вакууме.



Прежде чем подставить значение  $\lambda$  из (1) в формулу (23.6) для темных колец, обратим внимание на то, что эта формула выведена для случая, когда показатели преломления линзы и пластинки одинаковы. В данной задаче это условие не соблюдено. Так как, кроме того, неизвестен показатель преломления жидкости, мы не можем сейчас решить вопрос о том, какая из формул (23.6), (23.7) относится к *темным* кольцам (см. методические указания, стр. 267).

Предположим, что показатель преломления жидкости  $n_{ж}$  удовлетворяет одному из двух неравенств:

$$n_{ж} < n_1 < n_2; \quad n_1 < n_2 < n_{ж}. \quad (2)$$

Тогда для темных колец будет верна формула (23.6). Отсюда, учитывая соотношение (1), получим

$$n_{ж} = kR\lambda_0/\rho_k^2. \quad (3)$$

Выполнив вычисление, найдем:

$$1) n_{ж1} = 1,41; \quad 2) n_{ж2} = 1,63.$$

Теперь сделаем единственно возможное другое предположение относительно величины  $n_{ж}$ : пусть\*

$$n_1 < n_{ж} < n_2. \quad 4)$$

В этом случае для темных колец верна формула (23.7). Вместе с соотношением (1) она дает

$$n_{ж} = \frac{(2k-1)R\lambda_0}{2\rho_k^2}. \quad (5)$$

Выполнив вычисление по формуле (5), получим:

$$1) n_{ж1} = 1,34, \quad 1) n_{ж2} = 1,55$$

Сравнив результаты вычислений по формулам (3), (5) для обоих случаев (очевидно, соответствующих двум разным жидкостям), видим, что в первом случае ( $n_{ж1} = 1,41$ ,  $n_{ж1} = 1,34$ ) значения показателя преломления жидкости удовлетворяют одному из неравенств (2), но не удовлетворяют неравенству (4). Следовательно, из двух формул (3), (5) правильный ответ дает формула (3), т. е. для первой жидкости  $n_{ж1} = 1,41$ . Во втором случае ( $n_{ж2} = 1,63$ ;  $n_{ж2} = 1,55$ ) выполняется только неравенство (4). Следовательно, теперь правильный ответ дает формула (5), т. е. для второй жидкости  $n_{ж2} = 1,55$ .

## § 24. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### Основные формулы

Радиусы зон Френеля для сферической поверхности световой волны, испускаемой точечным изотропным источником  $S$ , вычисляются по формуле

$$\rho_k = \sqrt{\frac{Rr_0}{R+r_0}} k\lambda. \quad (24.1)$$

\* Нельзя предположить, что  $n = n_1$  или  $n = n_2$ , так как в этих случаях свет отражается лишь от одной поверхности слоя жидкости и колец Ньютона не будет.

Здесь  $\rho_k$  — радиус внешней границы  $k$ -й зоны ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ),  $R$  — радиус волновой поверхности,  $r_0$  — расстояние от вершины волновой поверхности до точки  $P$ , для которой построены зоны Френеля (рис 24-1)

В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели положение минимумов освещенности на экране определяется углом  $\varphi$ , отсчитанным от нормали к плоскости щели и удовлетворяющим условию

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (24\ 2)$$

где  $a$  — ширина щели,  $\lambda$  — длина световой волны,  $k$  — порядок минимума.

При нормальном падении света на дифракционную решетку положение главных максимумов определяется углами  $\varphi$  отсчитанными от нормали к плоскости решетки и выражаемыми формулой

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (24\ 3)$$

где  $d$  — постоянная (период) решетки, равная расстоянию между серединами двух соседних щелей,  $k$  — порядок максимума

Разрешающая сила спектрального прибора

$$R = \lambda/\delta\lambda, \quad (24\ 4)$$

где  $\delta\lambda$  — наименьшая разность длин волн ( $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda + \delta\lambda$ ) двух близких спектральных линий, при которых они еще разрешаются прибором (т. е. могут восприниматься отдельно)

Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = kN, \quad (24\ 5)$$

где  $k$  — порядок спектра,  $N$  — число щелей решетки.

Разрешающей силой  $A$  объектива оптического прибора называется величина, обратная наименьшему угловому расстоянию  $\delta\varphi$  между двумя точками, при котором они еще разрешаются прибором (т. е. их дифракционные изображения, созданные объективом, могут восприниматься отдельно) Разрешающая сила объектива телескопа определяется его диаметром  $D$  и длиной волны  $\lambda$  света, падающего на прибор, по формуле

$$A = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{D}{1,22\lambda}. \quad (24\ 6)$$

### Методические указания

1. В явлении дифракции световые волны огибают оптические неоднородности, встречающиеся на пути их распространения. Падая на экран, волны дают распределение освещенности на нем, отличное от того, которое должно быть согласно законам геометрической оптики.

Решить дифракционную задачу — значит найти относительное распределение освещенности на экране в зависимости от размеров и формы неоднородностей, вызывающих дифракцию. Решение этой задачи в общем случае является весьма сложным. В курсе общей физики рассматривают лишь случаи, в которых соображения симметрии упрощают расчет, например дифракцию от круглого отверстия, от узкой щели, а также дифракционную решетку.

2. В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели для максимумов освещенности на экране не существует столь про-

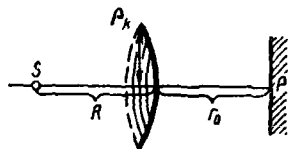


Рис. 24-1

стого соотношения, как формула (24.2), определяющая положение дифракционных минимумов. Иногда пишут формулу

$$a \sin \varphi' = \pm (2k + 1) (\lambda/2) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $\varphi'$  — угол, соответствующий дифракционному максимуму  $k$ -го порядка. Однако эта формула неточная — она дает завышенные значения для угла  $\varphi'$ . При  $k = 1$  ошибка для  $\sin \varphi'$  составляет около 5%, при увеличении  $k$  ошибка убывает.

3. При использовании в задачах формулы (24.6), определяющей разрешающую силу объектива телескопа, следует иметь в виду, что  $\delta\varphi$  — угловое расстояние между двумя точками, при котором их дифракционные изображения в фокальной плоскости объектива располагаются так, что еще *могут быть* восприняты раздельно.

Однако, для того чтобы они *фактически* воспринимались раздельно, необходимы дополнительные условия. Так, при визуальном наблюдении в телескоп требуется достаточное увеличение прибора, чтобы полученные два дифракционных изображения были разрешены также глазом (см задачу № 24.5). При фотографировании объектов необходимо, чтобы размер зерен эмульсии фотопленки был существенно меньше расстояния между центрами дифракционных изображений. Последнее условие должно выполняться и при фотографировании удаленных объектов *фотоаппаратом*, разрешающая сила объектива которого в этом случае также определяется формулой (24.6).

### Решение задач

24-1. Между точечным источником света ( $\lambda = 0,50$  мкм) и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием радиуса  $r = 1,0$  мм. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны соответственно  $R = 1,00$  м и  $r_0 = 2,00$  м. Как изменится освещенность экрана в точке  $P$ , лежащей против центра отверстия, если диафрагму убрать?

**Решение.** В результате дифракции света на краях отверстия диафрагмы и интерференции вторичных волн на экране возникнет дифракционная картина — чередующиеся светлые и темные кольца. При этом в точке  $P$ , являющейся центром картины, будет светлое или темное пятно в зависимости от числа зон Френеля, укладывающихся в поверхности волнового фронта, ограниченной краями отверстия. Четному числу зон соответствует темное пятно, нечетному — светлое. Найдем это число. Полагая в формуле (24.1) величину  $\rho_k$  равной радиусу  $r$  отверстия в диафрагме, получим

$$k = \frac{r^2 (R + r_0)}{R r_0 \lambda} = 3,0.$$

Таким образом, в точке  $P$  будет светлое пятно. Чтобы ответить на вопрос задачи, заметим следующее. В силу соотношений  $r \ll R$ ,  $r \ll r_0$  световые колебания, приходящие в точку  $P$  от каждой из трех

вон Френеля, имеют приблизительно одинаковые амплитуды. При этом колебания, приходящие от любых двух соседних зон, будучи противоположными по фазе, гасят друг друга и весь эффект сводится к действию одной зоны, например первой. Известно также, что действие всей волны (когда диафрагмы нет) равно половине действия первой зоны Френеля. Следовательно, удаление диафрагмы приведет к уменьшению амплитуды световых колебаний в точке  $P$  в два раза. Так как освещенность пропорциональна квадрату амплитуды световых колебаний, то она уменьшится в четыре раза.

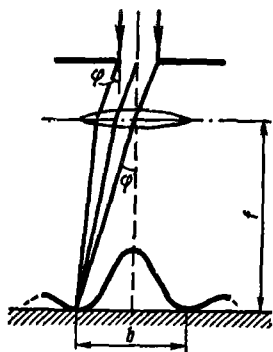


Рис. 24-2

24-2. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Расположенная за щелью линза с фокусным расстоянием  $f = 2,00$  м проектирует на экран дифракционную картину в виде чередующихся светлых и темных полос. Ширина центральной светлой полосы  $b = 5,0$  см. Как надо изменить ширину щели, чтобы центральная полоса занимала весь экран при любой ширине последнего?

**Решение.** Изображенная на рис. 24-2 кривая показывает распределение интенсивности света на экране. Центральная светлая полоса заключена между двумя минимумами первого порядка. Ее ширина  $b$  зависит от угла дифракции  $\varphi$ , соответствующего первому минимуму. В свою очередь угол  $\varphi$  связан с шириной щели  $a$  формулой (24.2), где  $k = 1$ . Так как при изменении ширины щели от  $a_1$  до  $a_2$ , величины  $\lambda$ ,  $k$  остаются постоянными, то из (24.2) следует:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}, \quad (1)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — углы первых дифракционных минимумов, соответствующих размерам щели  $a_1$ ,  $a_2$ .

Из условия видно, что угол  $\varphi_1$  весьма мал. Поэтому  $\sin \varphi_1 \approx \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = b/2f$ . С другой стороны, чтобы центральная полоса занимала весь экран при любой ширине последнего, должно выполняться соотношение  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\sin \varphi_2 = 1$ . Подставив найденные значения  $\sin \varphi_1$ ,  $\sin \varphi_2$  в (1), получим

$$a_2 = \frac{b}{2f} a_1 = \frac{a_1}{40}.$$

Таким образом, ширину щели следует уменьшить в 40 раз.

24-3. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,20$  мкм, если угол между максимумами первого и второго порядков спектра  $\Delta\varphi = 15^\circ$ .

**Решение.** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы дифракции, соответствующие максимумам первого ( $k = 1$ ) и второго ( $k = 2$ ) порядков. По условию,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi. \quad (1)$$

Из формулы дифракционной решетки (24.3) следует:

$$d \sin \varphi_1 = \lambda, \quad (2)$$

$$d \sin \varphi_2 = 2 \lambda. \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2), (3) содержит три неизвестных:  $\varphi_1, \varphi_2, \lambda$ . Разделив почленно (2), (3), получим  $\sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1$ , или, учитывая (1),

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1.$$

Решив это тригонометрическое уравнение относительно  $\sin \varphi_1$ , найдем

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}. \quad (4)$$

Теперь из (2) с учетом (4) определим искомую величину:

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}. \quad (5)$$

Подставив в (5) числовые значения величин ( $\sin \Delta\varphi = 0,259$ ,  $\cos \Delta\varphi = 0,966$ ), получим

$$\lambda = 0,54 \text{ мкм.}$$

24-4. При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом  $d = 2,9$  мкм можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ( $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$  и  $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ )?

**Решение.** Число штрихов  $N$  решетки связано с ее разрешающей силой  $R$  и порядком спектра  $k$  соотношением (24.5), откуда следует:  $N = R/k$ . Минимальному значению  $N_{\text{мин}}$  соответствует минимальное значение  $R_{\text{мин}}$  и максимальное число  $k$ , т. е.

$$N_{\text{мин}} = R_{\text{мин}}/k_{\text{макс}}. \quad (1)$$

Минимальная разрешающая сила решетки  $R_{\text{мин}}$ , необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через величины  $\lambda_1, \lambda_2$  по формуле (24.4):

$$R_{\text{мин}} = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1). \quad (2)$$

Число  $k_{\text{макс}}$  найдем из формулы дифракционной решетки (24.3), если положим в ней  $\sin \varphi = 1$  и  $\lambda = \lambda_2$  (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым номером  $k_{\text{макс}}$

будут видны). Учитывая при этом, что  $k$  — целое число, и введя функцию  $E(x) =$  целую часть числа  $x^*$ , получим

$$k_{\text{макс}} = E\left(\frac{d}{\lambda_2}\right) = E\left(\frac{2,9 \cdot 10^4 \text{ \AA}}{5896 \text{ \AA}}\right) = E(4,9) = 4. \quad (3)$$

Подставив значения  $R_{\text{мин}}$  и  $k_{\text{макс}}$  из (2), (3) в соотношение (1), найдем

$$N_{\text{мин}} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{5890}{4 \cdot 6} = 2,5 \cdot 10^2.$$

24-5. При каком увеличении  $\Gamma$  телескопа разрешающая сила его объектива диаметром  $D$  будет полностью использована, если диаметр зрачка  $d_0$ . Рассмотреть два случая, указанных в условии задачи № 22-14.

**Решение.** Дифракционные явления, происходящие как в телескопе, так и в глазу, ограничивают их разрешающую способность. Из (24.6) для разрешающей силы объектива телескопа имеем

$$\delta\varphi_{\text{об}} = 1,22 \lambda/D. \quad (1)$$

Формулу (24.6) можно также применить и для разрешающей силы глаза, заменив диаметр объектива диаметром зрачка  $d_0$ :

$$\delta\varphi_{\text{гл}} = 1,22 \lambda/d_0, \quad (2)$$

где  $\delta\varphi_{\text{гл}}$  — наименьшее угловое расстояние между двумя точками объекта (или его действительного изображения), которое может разрешить глаз.

Так как  $d_0 < D$ , то  $\delta\varphi_{\text{гл}} > \delta\varphi_{\text{об}}$ . Для полного использования разрешающей силы объектива при визуальном наблюдении необходимо, чтобы угол  $\delta\varphi_{\text{об}}$ , увеличенный оптической системой телескопа в  $\Gamma$  раз, оказался не меньше угла  $\delta\varphi_{\text{гл}}$ , т. е.

$$\delta\varphi_{\text{об}} \cdot \Gamma \geq \delta\varphi_{\text{гл}}; \quad (3)$$

в противном случае изображения двух точек объекта, разрешенных объективом, не будут разрешены глазом, т. е. сольются на сетчатке в одно дифракционное изображение. Из формулы (3) с учетом (1), (2) находим

$$\Gamma \geq D/d_0. \quad (4)$$

Условие (4) дает ответ на вопрос задачи: при  $\Gamma \geq D/d_0$  разрешающая сила объектива используется полностью, при  $\Gamma < D/d_0$  — частично.

**З а м е ч а н и е.** Сравнив результаты, полученные в задачах № 22-14 и 24-5, можно сделать следующий вывод. При наблюдении в телескоп протяженных объектов увеличение, равное

$$\Gamma_0 = D/d_0,$$

\* Например,  $E(1) = 1$ ;  $E(\pi) = 3$ ;  $E(5,9) = 5$ .

является оптимальным в отношении освещенности изображения и использования разрешающей силы объектива. Действительно, только при увеличении  $\Gamma = \Gamma_0$  одновременно сохраняется освещенность и полностью используется разрешающая сила объектива.

## § 25. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

### Основные формулы

При отражении света от границы раздела двух диэлектриков имеют место соотношения (формулы Френеля):

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}, \quad (25.1)$$

$$I'_{\parallel} = I_{\parallel} \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}, \quad (25.2)$$

где  $I_{\perp}$ ,  $I'_{\perp}$  — интенсивности падающего и отраженного света, у которого колебания светового вектора (т. е. вектора напряженности  $E$  электрического поля световой волны) перпендикулярны плоскости падения;  $I_{\parallel}$ ,  $I'_{\parallel}$  — интенсивности падающего и отраженного света, у которого колебания светового вектора параллельны плоскости падения,  $i$  — угол падения,  $r$  — угол преломления.

Закон Брюстера: луч, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, полностью поляризован, если угол падения  $i_B$  удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} i_B = n, \quad (25.3)$$

где  $n$  — относительный показатель преломления

Закон Малюса: интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор, пропорциональна квадрату косинуса угла  $\phi$  между их главными плоскостями, т. е.

$$I = I_0 \cos^2 \phi, \quad (25.4)$$

где  $I_0$  — интенсивность поляризованного света, падающего на анализатор  
Степень поляризации света

$$P = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (25.5)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — максимальная и минимальная интенсивности света, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям световых колебаний в луче.

### Методические указания

1. Задачи, в которых рассматривается поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков, решаются с помощью формул Френеля (25.1), (25.2). Их частным случаем является закон Брюстера (см. задачу № 25-1). Обратите внимание: в формуле (25.3), выражающей закон Брюстера,  $n$  — относительный показатель преломления двух диэлектриков, на границе которых происходит отражение света.

Для расчетов величин  $I'_{\perp}$ ,  $I'_{\parallel}$  по формулам (25.1), (25.2) необходимо знать углы падения  $i$  и преломления  $r$ . При падении света на границу двух сред со стороны оптически более плотной среды может случиться, что вычисления дадут для угла преломления  $\sin r = (\sin i)/n > 1$ . Так как угла  $r$ , удовлетворяющего этому неравен-

ству, не существует, такой результат должен означать, что свет не будет преломляться на данной границе, т. е. возникнет *полное внутреннее отражение*. В этом случае  $I'_{\perp} = I_{\perp}$ ,  $I'_{\parallel} = I_{\parallel}$  и полная интенсивность отраженного луча  $I' = I'_{\perp} + I'_{\parallel}$  равна интенсивности падающего луча  $I = I_{\perp} + I_{\parallel}$ .

2. Главной плоскостью (главным направлением) поляризатора называют плоскость, в которой происходят колебания световых векторов в плоскополяризованном луче, выходящем из прибора. Этими же терминами характеризуют анализатор, который представляет собой тот же прибор, что и поляризатор, но служит для анализа поляризованного света. Следовательно, величина  $\varphi$  в формуле (25.4) является одновременно углом между плоскостями, в которых колеблются световые векторы двух плоскополяризованных лучей: падающего на анализатор и выходящего из него.

### Решение задач

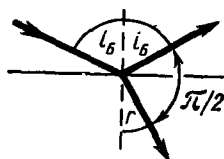


Рис. 25-1

25-1. Вывести закон Брюстера с помощью формул Френеля (25.1), (25.2).

**Решение.** Предварительно заметим, что при падении света под углом Брюстера  $i_B$ , определяемым по (25.3), отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. Действительно, с учетом закона преломления света формулу (25.3) можно переписать так:

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{\sin i_B}{\cos i_B} = \frac{\sin i_B}{\sin r},$$

где  $r$  — угол преломления. Следовательно,  $\cos i_B = \sin r$ . Поскольку углы  $i_B$ ,  $r$  — острые, то отсюда следует

$$i_B + r = \pi/2, \quad (1)$$

что означает взаимную перпендикулярность отраженного и преломленного лучей (рис. 25-1). Очевидно, обратив приведенные рассуждения, можно из соотношения (1) получить равенство (25.3), выражающее закон Брюстера.

Теперь обратимся к формулам Френеля. Из (25.2) при условии (1) сразу получаем  $I'_{\parallel} = 0$ . Это значит, что при угле падения  $i_B$ , определяемом по (25.3), в отраженном луче останутся световые колебания лишь одного направления (перпендикулярные плоскости падения), т. е. отраженный луч будет полностью поляризован. Но в этом и состоит закон Брюстера, являющийся, таким образом, следствием формул Френеля.



25-2. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла ( $n = 1,6$ ). Определить коэффициент отражения.

**Решение.** Коэффициент отражения  $\rho$  показывает, какую долю от интенсивности падающего света  $I$  составляет интенсивность отраженного света  $I'$ , т. е.

$$\rho = I'/I. \quad (1)$$

Свет, отраженный от диэлектрика под углом Брюстера, полностью поляризован. При этом в отраженном луче присутствуют лишь световые колебания, перпендикулярные плоскости падения (см. задачу № 25-1). Поэтому на основании формулы (25.1) и соотношения (1) задачи № 25-1 получим

$$I' = I'_\perp = I_\perp \sin^2 (i_B - r). \quad (2)$$

Так как в естественном свете величина  $I_\perp$  составляет половину от полной интенсивности  $I$ , то из (1), (2) следует

$$\rho = (I'_\perp/I) \sin^2 (i_B - r) = 0,5 \sin^2 (i_B - r). \quad (3)$$

Углы  $i_B$ ,  $r$  можно найти, зная показатель преломления стекла  $n$ . По закону Брюстера,  $\operatorname{tg} i_B = n = 1,6$ . Отсюда  $i_B = 58^\circ$ ,  $r = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ ;  $i_B - r = 26^\circ$ . Теперь из (3) получим

$$\rho = 0,5 \sin^2 26^\circ = 0,10, \text{ или } 10\%.$$

25-3. Определить с помощью формул Френеля коэффициент отражения естественного света при нормальном падении на поверхность стекла ( $n = 1,50$ ).

**Решение.** Коэффициент отражения (см. задачу № 25-2) равен

$$\rho = I'/I.$$

Во всех случаях, кроме рассмотренного в предыдущей задаче, отраженный свет содержит колебания как параллельные, так и перпендикулярные плоскости падения. Следовательно, пользуясь обозначениями формул (25.1), (25.2), можно записать

$$\rho = (I'_\perp + I'_\parallel)/(I_\perp + I_\parallel). \quad (1)$$

Так как на стекло падает естественный свет, то

$$I_\perp = I_\parallel. \quad (2)$$

Для отраженного света, вообще говоря, как это следует из формул (25.1), (25.2),  $I'_\perp \neq I'_\parallel$ . Однако при нормальном падении света, когда плоскость падения становится неопределенной (так как эта плоскость проходит через падающий луч и нормаль к поверхности), отраженный луч остается естественным. Поэтому, выбрав произвольно плоскость падения, запишем

$$I'_\perp = I'_\parallel. \quad (3)$$

Из формул (1) — (3) получаем

$$\rho = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \frac{I'_{\parallel}}{I_{\parallel}}. \quad (4)$$

Любое из двух отношений (4) выражается соответствующей формулой Френеля. Однако при нормальном падении света, когда  $i = 0$ ,  $r = 0$ , формулы (25.1), (25.2) становятся неопределенными. Чтобы раскрыть неопределенность, будем считать углы  $i$ ,  $r$  весьма малыми, но отличными от нуля (так, будто свет падает почти нормально). Тогда с помощью любой из формул (25.1), (25.2) можно найти  $\rho$ . Например, заменив в (25.1) синусы малых углов углами, имеем

$$\rho = \frac{I'_{\perp}}{I_{\perp}} = \left( \frac{i-r}{i+r} \right)^2.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на  $r$  и учитывая, что для малых углов  $i/r = n$ , получим ответ:

$$\rho = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2 = 4,0 \cdot 10^{-2}, \text{ или } 4,0 \ \%.$$

**25-4.** Параксиальный пучок света проходит через центрированную оптическую систему, состоящую из  $N = 5$  стеклянных линз ( $n = 1,50$ ). Используя результат, полученный в задаче № 25-3, определить, какая доля света пройдет через прибор. Поглощением света в стекле пренебречь.

**Решение.** Из условия следует, что свет, проходя оптическую систему, падает нормально или почти нормально на поверхности всех линз. Проходя каждую линзу, свет дважды отражается: один раз — на передней (по ходу света) поверхности линзы, второй раз — на задней поверхности. Очевидно, доля света, прошедшего всю систему, зависит от коэффициентов отражения света на обеих поверхностях каждой линзы.

Отражение света от передней поверхности линзы (имеется в виду, что каждая линза окружена воздухом) соответствует случаю, рассмотренному в задаче № 25-3, поэтому для коэффициента отражения имеем

$$\rho = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2, \quad (1)$$

где  $n$  — показатель преломления стекла относительно воздуха.

При отражении света от задней поверхности линзы среды стекло — воздух меняются ролями. Теперь, если в (1) вместо  $n$  подставить обратную величину  $n' = 1/n$ , где  $n'$  — показатель преломления воздуха относительно стекла, то найдем

$$\rho' = \left( \frac{n'-1}{n'+1} \right)^2 = \left( \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n}+1} \right)^2 = \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^2. \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), видим, что  $\rho' = \rho$ . Таким образом, для всех  $2N$  поверхностей  $N$  линз коэффициенты отражения одинаковы.

Пусть  $I$ ,  $I_1$  — интенсивности света, падающего на систему линз, и света прошедшего первую границу. Из определения коэффициента отражения (см. задачу № 25-2) следует, что интенсивность света, отраженного от первой границы, равна  $\rho I$ . Так как по закону сохранения энергии  $\rho I + I_1 = I$ , то

$$I_1 = I - \rho I = I(1 - \rho).$$

Аналогично, интенсивность света, прошедшего вторую границу,

$$I_2 = I_1(1 - \rho) = I(1 - \rho)^2$$

и т. д. Отсюда получим интенсивность света, прошедшего всю систему:

$$I_{2N} = I(1 - \rho)^{2N}.$$

Взяв значение  $\rho$  из задачи № 25-3, получим ответ:

$$I_{2N}/I = (1 - \rho)^{2N} = (0,96)^{40} = 0,7.$$

25-5. На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол  $\varphi = 60^\circ$  из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в  $\delta = 3,0$  раза. Найти степень поляризации падающего света.

**Решение** Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николь всегда пропускает половину падающего на его естественного света (превращая его в плоскополяризованный). Степень пропускания поляризованного света, падающего на николю, зависит, согласно закону Малюса (25.4), от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николю,

$$I = 0,5 I_n + I_p \cos^2 \varphi, \quad (1)$$

где  $I_n$ ,  $I_p$  — интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николю. Чтобы воспользоваться формулой (25.5), заметим, что входящие в нее величины согласно (1) равны:

$$I_{\text{макс}} = 0,5 I_n + I_p, \quad (2)$$

$$I_{\text{мин}} = 0,5 I_n. \quad (3)$$

По условию,  $I_{\text{макс}} = \delta I$ , или, согласно формулам (1) — (3),

$$I_{\text{макс}} = \delta [I_{\text{мин}} + (I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}) \cos^2 \varphi]. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит два неизвестных:  $I_{\text{макс}}$ ,  $I_{\text{мин}}$ . Достаточно найти их отношение  $\alpha = I_{\text{макс}}/I_{\text{мин}}$ , так как степень поляризации  $P$ , определяемую по (25.5), можно выразить через величину  $\alpha$ :

$$P = (1 - \alpha)/(1 + \alpha). \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (4) на  $I_{\text{макс}}$ , имеем

$$I = \delta [\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi].$$

Выразив отсюда  $\alpha$  и подставив в (5), получим ответ:

$$P = \frac{\delta - 1}{1 + \delta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = 0,8.$$

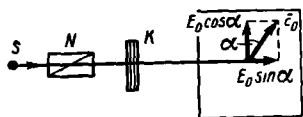


Рис. 25-2

25-6. Из кварца нужно вырезать пластинку, параллельную оптической оси кристалла, толщиной около 0,6 мм так, чтобы плоскополяризованный луч желтого света ( $\lambda = 0,589$  мкм), пройдя пластинку, стал поляризованным по кругу. Рассчитать толщину пластинки, если для желтых лучей в кварце показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно равны:  $n_o = 1,544$ ,  $n_e = 1,553$ .

**Решение.** Скорость света в кристалле зависит от угла  $\alpha$  между вектором световых колебаний  $E$  и оптической осью кристалла. Так, в кварце при  $\alpha = \pi/2$  скорость света — наибольшая, следовательно, показатель преломления  $n_o$  — наименьший\*; при  $\alpha = 0$  скорость света — наименьшая, а показатель преломления — наибольший. Поэтому если на пластинку кварца  $K$ , вырезанную параллельно оптической оси кристалла, падает плоскополяризованный луч (например, испущенный источником  $S$  и прошедший через николю  $N$ , рис. 25-2), световые колебания которого имеют амплитуду  $E_0$  и составляют угол  $\alpha$  с оптической осью кристалла, то внутри пластинки будут распространяться по одному направлению, но с разной скоростью два луча — две компоненты поляризованного света. В одном луче — обыкновенном — колебания перпендикулярны оптической оси и имеют амплитуду  $E_0 \sin \alpha$ , в другом — необыкновенном — колебания параллельны оптической оси и имеют амплитуду  $E_0 \cos \alpha$ . Заметим, что при  $\alpha = 45^\circ$  амплитуды обоих лучей равны.

Обладая разными скоростями, обыкновенный и необыкновенный лучи, пройдя пластинку  $K$ , приобретут некоторую разность фаз  $\varphi$ , которая согласно формуле (20.3) связана с оптической разностью хода лучей  $\Delta$  соотношением

$$\varphi = 2 \pi \Delta / \lambda, \quad (1)$$

где величина  $\Delta$  определяется формулами (23.1), (23.2):

$$\Delta = l (n_e - n_o). \quad (2)$$

Из (1), (2) получим разность фаз обоих лучей:

$$\varphi = 2\pi l (n_e - n_o) / \lambda. \quad (3)$$

\* Известно, что  $n = c_0/c$ , где  $c_0$ ,  $c$  — скорости света в вакууме и данной среде соответственно.

В результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых периодов, но разных фаз возникнут эллиптические колебания, при которых конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает эллипс. В частности, при равенстве амплитуд ( $\alpha = 45^\circ$ ) и разности фаз  $\varphi = \pi/2$  эллипс превратится в окружность. При этом свет будет поляризован по кругу.

Очевидно, к тому же результату придем, положив разность фаз равной

$$\varphi = \pi/2 + 2k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Из (3), (4) найдем толщину пластинки, необходимую для получения света с круговой поляризацией:

$$l = \frac{(k + 1/4)\lambda}{n_o - n_e}. \quad (5)$$

Подставив в (5) числовые значения  $l, \lambda, n_o, n_e$  ( $l$  принимаем равным 0,60 мм), найдем для числа  $k$  значение 8,9. Так как  $k$  — целое число, то, округлив результат до ближайшего целого числа, возьмем  $k = 9$ . Теперь, подставив  $k = 9$  в (5), определим точное значение толщины пластинки (ближайшее к 0,6 мм), необходимое для круговой поляризации света:  $l = 0,605$  мм.

## § 26. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### Основные формулы

Энергетическая светимость  $R_\alpha$  тела измеряется потоком излучения  $\Phi$ , (средней мощностью излучения за время, значительно большее периода световых колебаний) испускаемым единицей площади светящейся поверхности

$$R_\alpha = \frac{\Phi_\alpha}{S} = \frac{1}{S} \frac{dW_\alpha}{dt}, \quad (26.1)$$

где  $dW_\alpha$  — энергия, излучаемая поверхностью  $S$  за время  $dt$ .

Спектральная плотность энергетической светимости  $r_{\nu T}$ , характеризующая распределение энергии в спектре излучения тела по частотам, определяется соотношениями:

$$r_{\nu T} = \frac{dR_\alpha}{d\nu}; \quad R_\alpha = \int_0^\infty r_{\nu T} d\nu. \quad (26.2)$$

Здесь  $dR_\alpha$  — энергетическая светимость, приходящаяся на интервал частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ .

Соотношение между спектральными плотностями энергетической светимости любого тела  $r'_{\nu T}$  и абсолютно черного тела  $r_{\nu T}$  при той же температуре (закон Кирхгофа):

$$r'_{\nu T} = a_{\nu T} r_{\nu T}, \quad (26.3)$$

где  $a_{\nu T}$  — монохроматический коэффициент поглощения данного тела.  $a_{\nu T}$  — правильная дробь, показывающая, какая часть потока излучения частоты  $\nu$ , падающего на поверхность данного тела, поглощается последним.

**Закон Стефана — Больцмана:** энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, т. е.

$$R_s = \sigma T^4 \quad (26.4)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) — постоянная Стефана — Больцмана.

**Закон смещения Вина:** длина волны  $\lambda_0$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости в спектре абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре, т. е.

$$\lambda_0 T = b, \quad (26.5)$$

где  $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$  м · К — постоянная Вина

**Формула Планка** для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела

$$r_{\nu T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (26.6)$$

где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — постоянная Планка,  $k$  — постоянная Больцмана,  $c$  — скорость света в вакууме

### Методические указания

1. Наряду с величиной  $r_{\nu T}$ , определяемой по (26.2), спектральную плотность энергетической светимости тела характеризуют также величиной  $r_{\lambda T}$ , показывающей распределение энергии излучения по длинам волн и выражаемой формулой

$$r_{\lambda T} = \frac{dR_s}{d\lambda}, \quad (26.7)$$

где  $dR_s$  — энергетическая светимость, приходящаяся на интервал длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$ . Между величинами  $r_{\nu T}$  и  $r_{\lambda T}$  существует простое соотношение (см. задачу № 26-5).

2. Формулы (26.4) — (26.6) справедливы лишь для абсолютно черного тела. Для нечерных тел вместо (26.4) пишут

$$R_s = a_s R_s, \quad R_s = a_T \sigma T^4, \quad (26.8)$$

где  $a_T$  — коэффициент излучения, показывающий, какую часть составляет энергетическая светимость  $R_s$  данного тела от энергетической светимости  $R_s$  абсолютно черного тела, взятого при той же температуре. Он зависит от природы тела и его температуры.

Иногда в учебной литературе (см., например [2], [14], [11]), ссылаясь на закон Кирхгофа, заменяют в формуле (26.8) коэффициент излучения  $a_T$  коэффициентом поглощения  $a'_T$ , т. е. правильной дробью, показывающей, какая часть энергии, излученной абсолютно черным телом и падающей на поверхность данного тела, поглощается последним. При этом не указывают, о каком именно нечерном теле идет речь. Необходимо твердо помнить, что равенство коэффициентов  $a_T$ ,  $a'_T$  имеет место только для так называемого серого тела, у которого монохроматический коэффициент поглощения  $a_{\nu T}$  одинаков для всех частот и, следовательно,  $a_{\nu T} = a'_T$  (см. задачу № 26-4).

3. В физической литературе не существует единой терминологии в отношении величин, характеризующих тепловое излучение. Так,

энергетическую светимость  $R_s$ , иначе называют интегральной светимостью, или интегральной излучательной способностью, или суммарной мощностью излучения. Спектральную плотность энергетической светимости часто называют испускательной способностью, а монокроматический коэффициент поглощения — поглощательной способностью. В данном руководстве употребляются термины, рекомендованные Комитетом научно-технической терминологии Академии наук СССР [16].

### Решение задач

26-1. Электрическая печь потребляет мощность  $P = 500$  Вт. Температура ее внутренней поверхности при открытом небольшом отверстии диаметром  $d = 5,0$  см равна  $700^\circ\text{C}$ . Какая часть потребляемой мощности рассеивается стенками?

**Решение.** При установившемся тепловом режиме печи вся ежесекундно потребляемая ею электрическая энергия (т. е. мощность)  $P$  излучается наружу отверстием и стенками. Следовательно,

$$P = \Phi'_s + \Phi''_s, \quad (1)$$

где  $\Phi'_s, \Phi''_s$  — потоки излучения, испускаемые отверстием и стенками соответственно. В задаче требуется найти отношение  $\alpha = \Phi'_s/P$ . С учетом (1) его можно выразить так:

$$\alpha = \frac{P - \Phi''_s}{P} = 1 - \frac{\Phi''_s}{P}. \quad (2)$$

Рассматривая излучение печи через небольшое отверстие в ней как излучение абсолютно черного тела, из формулы (26.1) и закона Стефана — Больцмана (26.4) находим

$$\Phi''_s = R_s S = \sigma T^4 \pi D^2/4. \quad (3)$$

Теперь по формуле (2) с учетом (3) получим

$$\alpha = 1 - \frac{\pi D^2}{4} \frac{\sigma T^4}{P}.$$

Подставив в формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $P = 500$  Вт;  $d = 0,050$  м;  $T = 973$  К,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>), и выполнив вычисление, найдем ответ:

$$\alpha = 0,8.$$

26-2. Вольфрамовая нить накаливается в вакууме током силой  $I_1 = 1,00$  А до температуры  $T_1 = 1000$  К. При какой силе тока нить накалится до температуры  $T_2 = 3000$  К? Коэффициенты излучения вольфрама и его удельные сопротивления, соответствующие температурам  $T_1, T_2$ , равны:  $a_{T_1} = 0,115$ ;  $a_{T_2} = 0,334$ ;  $\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8}$  Ом · м,  $\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8}$  Ом · м.

**Решение.** Рассматривая, как и в предыдущей задаче, излучающее тело при установившейся температуре, получим

$$P = \Phi_{\lambda}, \quad (1)$$

где  $P$  — мощность, потребляемая вольфрамовой нитью от источника электрической энергии,  $\Phi_{\lambda}$  — поток излучения, испускаемый нитью. Выразим мощность  $P$  через величины  $l$ ,  $\rho$  в помощью формул (13.14), (13.4):

$$P = I^2 R = I^2 \rho l / S. \quad (2)$$

Чтобы найти поток излучения  $\Phi_{\lambda}$ , необходимо учесть, что излучение вольфрама существенно отличается от излучения абсолютно черного тела, нагретого до такой же температуры. Поэтому, используя соотношения (26.8) и (26.1), запишем

$$\Phi_{\lambda} = a_T \sigma T^4 S. \quad (3)$$

Из (1) — (3) следует

$$I^2 \rho l = a_T \sigma T^4 S^2.$$

Записав это уравнение дважды для нити, нагретой до температур  $T_1$  и  $T_2$ , получим:

$$\begin{aligned} I_1^2 \rho_1 l &= a_{T_1} \sigma T_1^4 S^2, \\ I_2^2 \rho_2 l &= a_{T_2} \sigma T_2^4 S^2. \end{aligned}$$

Разделив почленно эти два уравнения, найдем ответ:

$$I_2 = I_1 \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 \sqrt{\frac{a_{T_2} \rho_1}{a_{T_1} \rho_2}} = 7,9 \text{ А.}$$

**26-3.** В спектре Солнца максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны  $\lambda_0 = 0,47$  мкм. Приняв, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, найти интенсивность солнечной радиации (т. е. плотность потока излучения) вблизи Земли за пределами ее атмосферы.

**Решение.** Согласно определению плотности потока излучения  $I$ , называемой также интенсивностью излучения (радиации), можно записать [см. текст к формуле (21.13)]:

$$I = \frac{W_a}{St} = \frac{\Phi_a}{S}. \quad (1)$$

Здесь  $W_a$  — энергия излучения,  $\Phi_a = W_a / t$  — поток излучения сквозь поверхность  $S$ . Сравнивая (1) и (26.1), видим, что величины  $I$ ,  $R_a$  выражаются в одинаковых единицах.

Очевидно, интенсивность излучения  $I$  Солнца вблизи Земли пропорциональна энергетической светимости  $R_a$  поверхности Солнца. Чтобы найти связь между величинами  $I$ ,  $R_a$ , учтем, что весь поток



излучения, испускаемый поверхностью Солнца (пусть  $r_c$  — радиус Солнца), проходит сквозь поверхность сферы радиуса  $r$ , равного расстоянию от Солнца до Земли:

$$\Phi_0 = R_0 4\pi r_c^2 = 14\pi r^2.$$

Отсюда

$$I = R_0 r_c^2 / r^2. \quad (2)$$

Используя закон Стефана — Больцмана (26.4) и вычислив температуру солнечной поверхности по закону смещения Вина (26.5), находим

$$R_0 = \sigma T^4 = \sigma (b/\lambda_0)^4. \quad (3)$$

Так как величины  $r_c$ ,  $r$  — табличные, то, записав в (2) вместо  $R_0$  ее значение из (3), определим искомую величину:

$$I = \sigma \left( \frac{b}{\lambda_0} \right)^4 \left( \frac{r_c}{r} \right)^4$$

Подставим в формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $\lambda_0 = 0,47 \cdot 10^{-6}$  м,  $r_c = 6,95 \cdot 10^8$  м,  $r = 1,50 \times 10^{11}$  м,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>),  $b = 2,90 \cdot 10^{-3}$  м · К. Выполним вычисление, получим

$$I = 1,8 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 1,8 \text{ кВт/м}^2.$$

**З а м е ч а н и е.** В действительности, как показывает опыт, величина  $I = 1,4$  кВт/м<sup>2</sup>. Неточность найденного значения объясняется тем, что излучение Солнца отличается от излучения абсолютно черного тела. Поэтому формулы (26.4), (26.5) оказываются в данном случае приближенными.

26-4. Используя результат, полученный в задаче № 26-3, определить установившуюся температуру тонкой пластинки, расположенной вблизи Земли за пределами ее атмосферы перпендикулярно лучам Солнца. Считать температуру пластинки одинаковой во всех ее точках. Рассмотреть два случая, считая пластинку телом: 1) абсолютно черным; 2) серым.

**Р е ш е н и е.** Независимо от свойств пластинки ее температура установится тогда, когда поток излучения  $\Phi_{01}$ , испускаемый нагретой пластинкой, станет равным потоку излучения  $\Phi_{02}$  Солнца, поглощаемому пластинкой, т. е.

$$\Phi_{01} = \Phi_{02}. \quad (1)$$

1. Если пластинка обладает свойствами абсолютно черного тела, то она поглощает весь падающий на нее поток излучения. Поэтому на основании формулы (1) задачи № 26-3 имеем

$$\Phi_{02} = IS, \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поверхности пластинки, обращенной к Солнцу.

Поток излучения  $\Phi_{\text{э1}}$  пластинки найдем по закону Стефана — Больцмана, учитывая, что излучают обе стороны пластинки:

$$\Phi_{\text{э1}} = \sigma T^4 2S. \quad (3)$$

Из (1) — (3) находим

$$IS = \sigma T^4 2S, \quad (4)$$

откуда

$$T = \sqrt[4]{I/2\sigma} = 3,3 \cdot 10^2 \text{ К.}$$

2. Не являясь черным телом, пластинка будет поглощать и излучать меньше энергии, чем в первом случае. Поэтому теперь вместо (4) запишем

$$a'_T IS = a_T \sigma T^4 2S, \quad (5)$$

где  $a'_T$  — коэффициент поглощения,  $a_T$  — коэффициент излучения (см. стр. 285). Но для серого тела  $a'_T = a_T$ . Действительно, умножая обе части (26.3) на  $dv$  и интегрируя по всем частотам, имеем

$$\int_0^{\infty} r_{vT} dv = \int_0^{\infty} a_{vT} r_{vT} dv.$$

Для серого тела

$$a_{vT} = a'_T = \text{const} \quad (6)$$

для всех частот. Поэтому, вынося величину  $a_{vT} = a'_T$  за знак интеграла и учитывая (26.2), получим связь между энергетическими светимостями серого тела  $R'_s$  и абсолютно черного тела  $R_s$ :

$$R'_s = a'_T R_s. \quad (7)$$

Сравнивая (7) и (26.8), видим, что  $a'_T = a_T$ . Значит, уравнение (5) приводит к прежнему ответу, т. е. температуры серой и черной пластинок одинаковы.

**З а м е ч а н и е.** Для общего случая нечерного тела, обладающего избирательным поглощением, условие (6) не выполняется. Теперь коэффициент поглощения  $a'_T$  зависит не только от свойств и температуры пластинки, но и от распределения энергии в спектре Солнца. Поэтому  $a'_T \neq a_T$  и температура нечерного тела не равна температуре абсолютно черного тела. Знак неравенства зависит от того, к какой части солнечного спектра принадлежит излучение, преимущественно поглощаемое пластинкой. Наиболее высокой будет температура пластинки в том случае, если это излучение относится к интервалу частот, соответствующему наибольшему значению спектральной плотности энергетической светимости Солнца.

**26-5.** Исходя из определяющих формул (26.2) и (26.7), найти соотношение между величинами  $r_{\nu T}$ ,  $r_{\lambda T}$ , характеризующими спектральную плотность энергетической светимости тела. Записать формулу Планка для величины  $r_{\lambda T}$ .

**Решение.** Всякий элементарный участок спектра излучения можно характеризовать как интервалом частот  $d\nu$ , так и интервалом длин волн  $d\lambda$ . Так как величины  $\nu$ ,  $\lambda$  связаны известным соотношением

$$\nu = c/\lambda, \quad (1)$$

$$\text{то} \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что величины  $d\nu$ ,  $d\lambda$  имеют противоположные знаки.

Одному и тому же участку спектра соответствует одна и та же величина  $|dR_0|$  в формулах (26.2) и (26.7). Поэтому, учитывая знаки величин  $d\nu$ ,  $d\lambda$ , получим

$$r_{\nu T} d\nu = -r_{\lambda T} d\lambda. \quad (3)$$

Из (3) и (2) находим ответ на первый вопрос задачи:

$$r_{\lambda T} = -r_{\nu T} \frac{d\nu}{d\lambda} = r_{\nu T} \frac{c}{\lambda^2}. \quad (4)$$

Для того чтобы в формуле Планка (26.6) перейти к величине  $r_{\lambda T}$ , достаточно воспользоваться соотношениями (1) и (4):

$$r_{\lambda T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu T} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{2\pi h (c/\lambda)^3}{c^2} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1},$$

или

$$r_{\lambda T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (5)$$

**26-6.** Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость  $\Delta R_0$  абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн  $\Delta\lambda = 10 \text{ \AA}$ , соответствующий максимуму спектральной плотности энергетической светимости при температуре тела  $T = 3000 \text{ K}$ .

**Решение.** Из соотношения (26.7), поскольку речь идет об узком интервале длин волн, следует

$$\Delta R_0 = r_{\lambda_0} \Delta\lambda, \quad (1)$$

где  $r_{\lambda_0}$  — максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре.

Чтобы определить величину  $r_{\lambda_0}$  по формуле Планка, надо кроме температуры  $T$  знать длину волны, соответствующую величине  $r_{\lambda_0}$ . Эту длину волны  $\lambda$  найдем по закону смещения Вина (26.5):

$$\lambda = \lambda_0 = b/T.$$

Теперь, подставив это значение  $\lambda$  в формулу Планка для  $r_{\lambda}$ , выведенную в задаче № 26-5, получим

$$r_{\lambda_0} = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) находим ответ:

$$\Delta R_0 = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \frac{\Delta \lambda}{e^{hc/bk} - 1}. \quad (3)$$

Приступая к вычислению, обратим внимание, что уравнение (2), полученное нами из формулы Планка и закона смещения Вина, выражает пропорциональную зависимость между величинами  $r_{\lambda_0}$  и  $T^5$ . Его иногда называют *вторым законом Вина*, записывая в виде

$$r_{\lambda_0} = b' T^5.$$

При этом значение константы

$$b' = \frac{2\pi hc^2}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}$$

можно найти в таблицах. В таком случае расчетная формула (3) упрощается:

$$\Delta R_0 = b' T^5 \Delta \lambda.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $b' = 1,30 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м<sup>3</sup> · К<sup>5</sup>),  $T = 3000$  К,  $\Delta \lambda = 1,0 \cdot 10^{-9}$  м, и выполнив вычисление, получим

$$\Delta R_0 = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2 = 3,2 \text{ кВт/м}^2.$$

## § 27. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

### Основные формулы

Энергия фотона

$$e = h\nu = hc/\lambda, \quad (27.1)$$

где  $\nu$  — частота света,  $\lambda$  — длина световой волны,  $h$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света в вакууме.

Масса и импульс фотона соответственно равны:

$$m = \frac{e}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}; \quad (27.2)$$

$$p = mc = h/\lambda. \quad (27.3)$$

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + T, \quad (27.4)$$

где  $h\nu$  — энергия поглощенного фотона,  $A$  — работа выхода электрона,  $T$  — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона.

Давление света, падающего нормально на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho$ , равно

$$P = \frac{E_3}{c} (1 + \rho), \quad (27.5)$$

где  $E_3$  — энергетическая освещенность поверхности, измеряемая световой энергией, падающей на единицу поверхности за единицу времени [сравните с формулами (22.9), (22.11)].

При комптоновском рассеянии изменение длины волны рентгеновских лучей

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta), \quad (27.6)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния,  $m_0$  — масса покоя электрона. Величина  $\lambda_c = h/m_0 c$  называется *комптоновской длиной волны* частицы массой  $m_0$ . Для электрона  $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ .

### Методические указания

1. Здесь рассмотрены задачи на взаимодействие фотонов с веществом (давление света) или с отдельными электронами (фотоэффект, явление Комптона), которое подчиняется законам сохранения энергии и импульса. Так, закон сохранения импульса, примененный к взаимодействию фотонов с веществом, приводит к формуле (27.5) для светового давления; закон сохранения энергии, записанный для взаимодействия фотона с электроном, связанным в атоме металла, есть уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (27.4), а совместное применение этих законов для взаимодействия фотона со свободным электроном дает формулу Комптона (27.6).

2. Вычисляя скорость электрона, считаем его классической частицей, если кинетическая энергия электрона  $T \ll W_0$ , где  $W_0 = = m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$  — энергия покоя электрона (см. § 18). Так как при фотоэффекте в кинетическую энергию электрона превращается лишь часть энергии фотона  $h\nu$ , то неравенство  $T \ll W_0$  будет заведомо выполняться при условии  $h\nu \ll W_0$  или  $hc/\lambda \ll W_0$ . С учетом соотношения  $W_0 = m_0 c^2$  последнее неравенство можно записать так:

$$\lambda \gg \lambda_c, \quad (1)$$

где  $\lambda_c$  — комптоновская длина волны для электрона.

Если неравенство (1) не выполняется, электрон следует считать релятивистской частицей и применять к нему соотношение (18.6).

Заметим, что значение  $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$  соответствует очень коротковолновое («жесткое») рентгеновское излучение, а также  $\gamma$ -излучение. Значит, если фотоэффект вызван излучением, относящимся к видимой части спектра, или ультрафиолетовыми лучами, то при расчете скорости фотоэлектрона его можно считать классической частицей.

3. Формула давления света (27.5) справедлива лишь для случая *нормального* падения света на поверхность. Вместо величины  $E_3$  в формуле часто пишут интенсивность света  $I$  (плотность потока излуче-

ния). Действительно, как это следует из определения величин  $E_0, I$  [см. текст к формулам (27.5) и (21.13)], в случае нормального падения света  $E_0 = I$ . Расчет давления света при наклонном падении лучей проведен в задаче № 27-5.

### Решение задач

27-1. Определить минимальную длину волны в сплошном спектре рентгеновских лучей, если рентгеновская трубка работает под напряжением  $U = 30$  кВ.

**Решение.** Сплошной рентгеновский спектр возникает вследствие торможения электронов, разогнанных в трубке электрическим полем, при их ударах об антикатод. Существование коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра вытекает из квантовой природы излучения. Действительно, подлетая к антикатоде, электрон обладает кинетической энергией  $T$ , равной работе, совершенной над ним силами электрического поля, т. е.

$$T = eU, \quad (1)$$

где  $e$  — заряд электрона. При ударе об антикатод энергия электрона  $T$  частично или полностью превращается в квант энергии  $h\nu$ . Наибольшей частоте (наименьшей длине волны) соответствует случай, когда вся энергия  $T$  превращается в квант  $h\nu$ . Тогда, согласно формуле (27.1),

$$T = h\nu_{\text{макс}} = hc/\lambda_{\text{мин}}. \quad (2)$$

Из (1), (2) следует

$$\lambda_{\text{мин}} = hc/eU. \quad (3)$$

Подставим в (3) числовые значения величин, выраженные в единицах СИ:  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $U = 3,0 \cdot 10^4$  В. Выполнив вычисление, получим

$$\lambda_{\text{мин}} = 0,41 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,41 \text{ \AA}.$$

27-2. На металлическую пластину падает монохроматический свет ( $\lambda = 0,413$  мкм). Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает  $U = 1,00$  В. Определить работу выхода в электронвольтах и красную границу фотоэффекта.

**Решение** Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (27.4), учитывая данные условия, в виде

$$hc/\lambda = A + T.$$

Так как даже самые быстрые электроны задерживаются электрическим полем, пролетев в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов  $U$ , то их начальная кинетическая энергия  $T$  связана с величиной  $U$  соотношением (1) предыдущей задачи. Следовательно,

$$hc/\lambda = A + eU.$$

Отсюда найдем работу выхода:

$$A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,0 \text{ эВ}.$$

Красной (длинноволновой) границе фотоэффекта  $\lambda_{\text{кр}}$  в уравнении Эйнштейна соответствует  $T = 0$ . Поэтому, полагая  $\lambda = \lambda_{\text{кр}}$ , получим

$$\lambda_{\text{кр}} = hc/A = 0,62 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 0,62 \text{ мкм}.$$

27-3. Определить максимальную скорость электронов, вылетающих из металла под действием  $\gamma$ -излучения длиной волны  $\lambda = 0,030 \text{ \AA}$ .

**Решение.** Снова применим уравнение Эйнштейна (27.4). Обратим внимание на то, что длина волны  $\gamma$ -излучения близка к комптоновской длине волны  $\lambda_c$  для электрона и, следовательно, энергия  $\gamma$ -фотона  $h\nu$  есть величина одного порядка с энергией покоя электрона  $W_0 = 0,511 \text{ МэВ}$  (см. методические указания, п. 2). Так как при этом работа выхода  $A$  электрона из металла (любого) измеряется всего лишь несколькими электронвольтами, то величиной  $A$  в (27.4) можно пренебречь, а электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, кинетическая энергия которой выражается формулой (18.6). Таким образом, имеем

$$\frac{hc}{\lambda} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

или, введя комптоновскую длину волны для электрона,

$$\frac{\lambda_c}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1. \quad (1)$$

Из (1) найдем относительную скорость электрона  $\beta = v/c$ , учитывая, что  $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ :

$$\beta = \frac{\sqrt{\lambda_c(\lambda_c + 2\lambda)}}{\lambda_c + \lambda} = 0,86.$$

Отсюда для скорости  $v$  получим

$$v = \beta c = 0,86 \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

27-4. Монохроматический ( $\lambda = 0,662$  мкм) пучок света падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho = 0,80$ . Определить количество фотонов, ежесекундно поглощаемых  $1 \text{ см}^2$  поверхности, если давление света на поверхность  $P = 1,00$  мкПа.

**Решение.** Так как условие задачи позволяет найти энергию фотона  $h\nu$ , то выразим искомое число  $N$  поглощенных фотонов как отношение энергии света  $W$ , поглощенного  $1 \text{ см}^2$  поверхности за  $1 \text{ с}$ , к энергии  $h\nu$  одного фотона, т. е.

$$N = \frac{W}{h\nu} = \frac{W\lambda}{c} . \quad (1)$$

Чтобы связать величину  $W$  с данным давлением  $P$  света, воспользуемся формулой (27.5). Входящую в нее энергетическую освещенность  $E_s$ , согласно определению, выразим так:

$$E_s = W_0/St, \quad (2)$$

где  $W_0$  — энергия света, падающего на площадку  $S$  за время  $t$ .

Из определения коэффициента отражения  $\rho$  следует, что между величинами  $W$ ,  $W_0$  имеется соотношение:

$$W = W_0 (1 - \rho). \quad (3)$$

Таким образом, с учетом (2), (3) формула (27.5) примет вид

$$P = \frac{W}{cSt} \frac{1+\rho}{1-\rho} . \quad (4)$$

Исключив величину  $W$  из уравнений (1) и (4), получим ответ:

$$N = \frac{P\lambda St}{h} \frac{1-\rho}{1+\rho} .$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $P = 1,00 \cdot 10^{-6}$  Па,  $\lambda = 0,662 \cdot 10^{-6}$  м,  $S = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $t = 1,00$  с,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с,  $\rho = 0,80$ . Выполнив вычисление, найдем

$$N = 1,0 \cdot 10^{21}.$$

27-5. Параллельный пучок света с интенсивностью  $I = 0,20$  Вт/см<sup>2</sup> падает под углом  $\varphi = 60^\circ$  на плоское зеркало с коэффициентом отражения  $\rho = 0,90$ . Определить давление света на зеркало.

**Решение.** Если бы свет падал на зеркало нормально ( $\varphi = 0$ ), световое давление  $P_0$  выражалось бы формулой (27.5). Так как при этом  $E_s = I$  (см. методические указания, п. 3), то можем записать

$$P_0 = I (1 + \rho)/c. \quad (1)$$

Используя квантовые представления о свете, выясним зависимость светового давления  $P$  от угла падения  $\varphi$ . Исходя из определения давления и применив к зеркалу второй закон Ньютона, запишем

$$P = \frac{F_n}{S} = \frac{F_n \Delta t}{S \Delta t} = \frac{(\Delta mv)_n}{S \Delta t} .$$



где  $(\Delta mv)_n$  — проекция импульса  $\Delta mv$ , сообщенного фотонами за время  $\Delta t$  зеркалу, на направление нормали к нему;  $S$  — площадь освещенной поверхности. По закону сохранения импульса величина,  $\Delta mv$  численно равна суммарному изменению импульса  $\Delta p$  всех фотонов при их взаимодействии с зеркалом за время  $\Delta t$ . Следовательно,

$$P = \frac{(\Delta p)_n}{S \Delta t}. \quad (2)$$

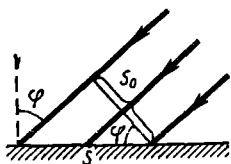


Рис 27-1

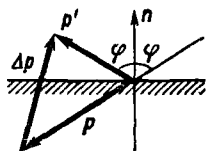


Рис 27-2

Величины  $S$ ,  $(\Delta p)_n$  зависят от угла падения  $\varphi$ . Действительно, как это видно из рис. 27-1,

$$S = S_0 / \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $S_0$  — площадь поперечного сечения светового пучка. На рис. 27-2 изображены суммарные импульсы фотонов, падающих на зеркало и отраженных от него (за время  $\Delta t$ ):  $p$  и  $p'$ , так что

$$\Delta p = p' - p.$$

Отсюда, переходя к проекциям на направление нормали  $n$  к зеркалу и учитывая противоположные направления проекций  $p_n$ ,  $p'_n$ , запишем

$$(\Delta p)_n = p'_n - p_n = p' \cos \varphi + p \cos \psi = (p' + p) \cos \varphi. \quad (4)$$

Из (2) — (4) найдем

$$P = \frac{(p' + p)}{S_0 \Delta t} \cos^2 \varphi.$$

Так как  $P = P_0$  при  $\varphi = 0$ , где давление  $P_0$  определяется формулой (1), то окончательно имеем

$$P = \frac{I}{c} (1 + \rho) \cos^2 \varphi.$$

Выразим в единицах СИ входящие в формулу величины:  $I = 2,0 \cdot 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  м/с,  $\rho = 0,90$ ,  $\cos \varphi = 0,50$ . Выполвив вычисление, получим

$$P = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па.}$$

27-6. Фотон с частотой  $\nu_0$  испущен с поверхности звезды, масса которой  $M$  и радиус  $r_0$ . Найти величину гравитационного смещения частоты фотона  $\Delta\nu/\nu_0$  на очень большом расстоянии от звезды.

**Решение.** Выясним причину изменения частоты фотона при его удалении от звезды. Обладая электромагнитной энергией  $h\nu$ , фотон имеет связанную с ней массу  $m$ , определяемую формулой (27.2):

$$m = h\nu/c^2. \quad (1)$$

Поэтому в гравитационном поле звезды на него действует сила тяготения

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{Mh\nu}{c^2 r^2}, \quad (2)$$

где  $r$  — расстояние от центра звезды до фотона. Так как эта сила направлена противоположно перемещению фотона, то она совершает отрицательную работу, вследствие чего уменьшается его электромагнитная энергия (подобно тому, как из-за действия силы тяжести уменьшается кинетическая энергия брошенного вверх камня). Поскольку электромагнитная энергия фотона пропорциональна его частоте, то при удалении фотона от звезды его частота уменьшается.

По закону сохранения энергии, полная энергия фотона, равная сумме его электромагнитной энергии  $h\nu$  и потенциальной энергии тяготения, есть величина постоянная. Однако для решения задачи нельзя воспользоваться формулой (5.4) потенциальной энергии тяготения, так как она выведена для постоянных величин  $m_1$  и  $m_2$ . Масса же фотона, как это видно из (1), уменьшается вместе с частотой при удалении от звезды. Поэтому, учитывая соотношение (2), вычислим работу силы тяготения  $F$ , совершенную при элементарном перемещении  $dr$  фотона:

$$dA = Fdr = Fdr \cos \pi = -\gamma \frac{Mh\nu}{c^2 r^2} dr$$

и приравняем ее, согласно закону сохранения, изменению электромагнитной энергии фотона:  $d(h\nu) = dA$ , т. е.

$$hd\nu = -\gamma \frac{Mh\nu}{c^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Отсюда, разделив переменные, получим

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\gamma \frac{M}{c^2} \frac{dr}{r^2}.$$

Так как при изменении расстояния  $r$  в заданных условиях пределах от значения  $r_0$  до  $\infty$  частота изменяется от  $\nu_0$  до  $\nu$ , то

$$\int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\nu} = -\gamma \frac{M}{c^2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Интегрирование дает

$$\ln \frac{\nu}{\nu_0} = -\gamma \frac{M}{c^2} \frac{1}{r_0}, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = e^{-\gamma M/c^2 r_0}.$$

Отсюда найдем ответ:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\nu}{\nu_0} - 1 = e^{-\gamma M/c^2 r_0} - 1.$$

Полученный результат — величина отрицательная при любых значениях  $M$ ,  $r_0$ , что означает уменьшение частоты фотона ( $\nu < \nu_0$ ).

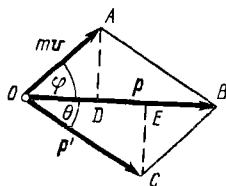


Рис. 27-3

27-7. Фотон рентгеновского излучения с энергией  $\epsilon = 0,15$  МэВ испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны увеличилась на  $\Delta\lambda = 0,015 \text{ \AA}$ . Найти угол  $\varphi$ , под которым вылетел комптоновский электрон отдачи.

**Решение.** Увеличение длины волны рентгеновских лучей при их рассеянии веществом (*явление Комптона*) объясняется упругим столкновением фотонов с электронами. При упругом ударе фотон в соответствии с законами сохранения передает свободному электрону часть импульса и энергии. Уменьшение энергии фотона означает согласно формулам (27.1) уменьшение частоты рентгеновского излучения и увеличение его длины волны.

По закону сохранения импульса импульс  $p$  падающего фотона равен векторной сумме импульса  $p'$  рассеянного фотона и импульса  $mv$  свободного электрона, который он приобрел в результате соударения с фотоном (рис. 27-3). Заметим, что угол рассеяния  $\theta$  на рис. 27-3 можно определить из формулы Комптона (27.6). Следовательно, чтобы найти угол  $\varphi$ , необходимо знать еще два линейных элемента параллелограмма  $OABC$ , например  $p$  и  $p'$ . Проведя  $AD \perp OB$ , имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AD}{OD} = \frac{CE}{BE} = \frac{p' \sin \theta}{p - p' \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{p/p - \cos \theta}, \quad (1)$$

где, согласно (27.6),

$$\cos \theta = 1 - \Delta\lambda/\lambda_c, \quad (2)$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\Delta\lambda(2\lambda_c - \Delta\lambda)}/\lambda_c, \quad (3)$$

Импульсы  $p$ ,  $p'$  падающего и рассеянного фотонов связаны с их энергиями  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  соотношениями (27.1), (27.3):

$$p = \epsilon/c, \quad p' = \epsilon'/c. \quad (4)$$

Предварительно найдем энергию рассеянного фотона:

$$e' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\frac{hc}{e} + \Delta\lambda} = \frac{ehc}{hc + e\Delta\lambda}.$$

Следовательно, вместо второго равенства (4) имеем

$$p' = eh/(hc + e\Delta\lambda). \quad (5)$$

Подставив в (1) вместо величин  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $p$ ,  $p'$  их значения по формулам (2) — (5), после преобразований получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_c/\Delta\lambda - 1}}{1 + e\lambda_c/ch} = \frac{\sqrt{2\lambda_c/\Delta\lambda - 1}}{1 + e/m_0 c^2}.$$

После подстановки числовых значений величин:  $\lambda_c = 0,0242 \text{ \AA}$ ,  $\Delta\lambda = 0,015 \text{ \AA}$ ,  $e = 0,15 \text{ МэВ}$ ,  $m_0 c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$  — найдем:

$$\operatorname{tg} \varphi = 1,15; \quad \varphi = 49^\circ.$$

## Глава 8

# АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

### § 28. АТОМ БОРА

#### Основные формулы

Первый постулат Бора: электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, находясь на которых они не излучают энергии. Эти орбиты определяются условием

$$mv_n r_n = n\hbar/2\pi, \quad (28.1)$$

где  $r_n$  — радиус  $n$ -й орбиты,  $mv_n r_n$  — момент импульса электрона на этой орбите,  $n$  — главное квантовое число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Второй постулат Бора: при переходе электрона с одной орбиты на другую атом излучает или поглощает квант энергии, равный

$$h\nu_{lk} = W_k - W_l, \quad (28.2)$$

где  $W_l, W_k$  — энергии электрона на соответствующих орбитах.

Формула Бальмера — Ритца для длин волн линий спектра водорода

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (28.3)$$

Здесь  $n_l, n_k$  — целые числа ( $n_k > n_l$ ). Число  $n_l$  определяет серию,  $n_k$  — отдельную линию этой серии. Величина

$$R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \quad (28.4)$$

называется постоянной Ридберга.

Серийная формула для длин волн линий спектра водородоподобных ионов

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left( \frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right), \quad (28.5)$$

где  $Z$  — порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Частоты характеристического рентгеновского излучения определяются законом Мозли:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \quad (28.6)$$

где

$$a = \sqrt{Rc(1/n_l^2 - 1/n_k^2)}, \quad (28.7)$$

$b$  — постоянная экранирования, зависящая сильно от серии (числа  $n_l$ ) и слабо — от линии данной серии (числа  $n_k$ ).

#### Методические указания

1. Имеется много задач, в которых рассматриваются спектры водорода и водородоподобных ионов (т. е. ионов, имеющих по одному электрону:  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$  и т. д.).

Чтобы с помощью формул (28.3), (28.5) находить длину волны  $\lambda$  (или частоту  $\nu = c/\lambda$ , или квант энергии  $h\nu$ ), надо прежде всего, исходя из условия задачи, определить числа  $n_i$  и  $n_k$ , входящие в эти формулы. Так, для водорода числу  $n_i = 1$  соответствует ультрафиолетовая серия (серия Лаймана);  $n_i = 2$  — видимая серия (серия Вальмера),  $n_i = 3$  — первая инфракрасная серия (серия Брэкета),  $n_i = 4$  — вторая инфракрасная серия (серия Пашена),  $n_i = 5$  — третья инфракрасная серия (серия Пфунда). Число  $n_k$  выражается формулой  $n_k = n_i + N$ , где  $N$  — номер спектральной линии в данной серии, взятый в порядке убывания длины волны. Например, для второй линии серии Пашена  $n_i = 3$ ,  $n_k = 3 + 2 = 5$ .

2. Постоянная Ридберга [см (28.4)] вычислена в предположении, что в атоме водорода (или водородоподобного иона) электрон вращается вокруг неподвижного ядра. Это возможно лишь при условии, когда масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона. Поэтому постоянную Ридберга, определяемую по (28.4), часто обозначают через  $R_\infty$ .

В действительности электрон и ядро вращаются вокруг их общего центра масс, что приводит к несколько иному значению для постоянной Ридберга. В самом деле, если умножить обе части формулы (28.5) на  $hc$  и сравнить ее с формулой (28.2), то получим

$$W_i = - \frac{RhcZ^2}{n^2},$$

т. е. при фиксированном числе  $n_i$  постоянная Ридберга оказывается пропорциональной полной энергии  $W_i$  атома. Но из законов механики следует, что между действительной полной энергией  $W$  атома и его полной энергией  $W_\infty$ , вычисленной в предположении, что ядро неподвижно, существует связь

$$W = \frac{W_\infty}{1 + m/M},$$

где  $M$  — масса ядра,  $m$  — масса электрона. А так как величина  $R$  пропорциональна полной энергии атома, можно на основании этой формулы записать для точного значения постоянной Ридберга:

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m/M}, \quad (28.8)$$

где  $R_\infty = 1,097 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$ . Таким образом, величина  $R$  несколько различна для разных атомов. Это обстоятельство надо учитывать в задачах на сравнение спектров различных атомов (см. задачи № 28-3, 28-4).

3. При вычислении частоты характеристических рентгеновских лучей по закону Мозли следует иметь в виду, что спектральные серии обозначаются теми же буквами, что и электронные слои, переход электронов на каждый из которых вызывает данное излучение. Например,  $K$ -серия обусловлена переходом электронов на  $K$ -слой. При этом се-

ряим (электронным слоям)  $K, L, M, N$  соответствуют квантовые числа  $n_i$  в формуле (28.7), равные 1, 2, 3, 4. Число  $n_k$  по-прежнему определяется формулой  $n_k = n_i + N$ , где  $N$  — номер линии в данной серии. Линии серии записываются в порядке уменьшения длины волны индексами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Например, вторая линия  $K$ -серии обозначается  $K\beta$ ; в этом случае  $n_i = 1, n_k = 1 + 2 = 3$ .

Если для решения задачи надо знать величину постоянной экранирования  $b$ , то руководствуются следующим:  $b = 1$  для линии  $K\alpha$  и  $b > 1$  для остальных линий  $K$ -серии (см. замечание к задаче № 28-5). Однако при приближенных расчетах считают величину  $b$  одинаковой для всех линий одной и той же серии. Тогда  $b \approx 1$  для серии  $K$  и  $b \approx 7,5$  для серии  $L$ .

### Решение задач

28-1. Вычислить для атома водорода радиус первой борховской орбиты и скорость электрона на ней.

**Решение.** Радиус  $n$ -й борховской орбиты  $r_n$  и скорость  $v_n$  электрона на ней связаны между собой уравнением (28.1) первого постулата Бора. Чтобы иметь еще одно уравнение, связывающее величины  $r_n, v_n$ , запишем второй закон Ньютона для электрона, движущегося под действием кулоновской силы притяжения ядра\* по круговой орбите. Учитывая, что ядром атома водорода является протон, заряд которого равен по модулю заряду электрона  $e$ , запишем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса электрона,  $v_n^2/r_n$  — центростремительное ускорение. Решив совместно (1) и (28.1), получим

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}, \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}.$$

Положив здесь  $n = 1$  и произведя вычисление, найдем:

$$r = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}; \quad v = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

28-2. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

**Решение.** Потенциалом ионизации  $U_i$  называют ту наименьшую разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с данным невозбужденным атомом ионизировать его. Работа по удалению электрона из атома  $A_i$  равна работе сил электрического поля, ускоряющего электрон,  $A_i = eU_i$ , поэтому

$$A_i = eU_i. \quad (1)$$

\* Между электроном и ядром действует также гравитационная сила. Однако, как показывает расчет, эта сила пренебрежимо мала по сравнению с кулоновской силой.

Учитывая квантовый характер поглощения энергии атомом, можно сказать, что работа ионизации  $A_i$  равна кванту энергии  $h\nu$ , поглощенному атомом водорода при переходе электрона с первой боровской орбиты на бесконечно удаленную орбиту. Тогда, применив формулу Бальмера — Ритца (28.3) и положив в ней  $n_i = 1$ ,  $n_k = \infty$ , получим

$$A_i = h\nu = hc \frac{1}{\lambda} = hcR \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = hcR. \quad (2)$$

Теперь из (1), (2) найдем

$$U_i = hcR/e = 13,6 \text{ В}. \quad (3)$$

Первый потенциал возбуждения  $U_1$  есть та наименьшая разность потенциалов, которую должен пройти в ускоряющем поле электрон, чтобы при столкновении с невозбужденным атомом перевести его в первое возбужденное состояние. Для атома водорода это соответствует переходу электрона с первой боровской орбиты на вторую. Снова приравняв работу сил ускоряющего электрического поля  $eU_1$  кванту энергии  $h\nu$ , поглощенному атомом при его переходе в первое возбужденное состояние, и положив в (28.3)  $n_i = 1$ ,  $n_k = 2$ , получим

$$eU_1 = h\nu = hcR \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) = \frac{3}{4} hcR,$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{3}{4} \frac{hcR}{e} = \frac{3}{4} \cdot 13,6 \text{ В} = 10,2 \text{ В}.$$

28-3. Найти разность ионизационных потенциалов водорода (H) и дейтерия (D).

**Решение.** Прежде всего выясним, в чем причина различия ионизационных потенциалов водорода и дейтерия. Дейтерий является одним из изотопов водорода, отличаясь от обычного водорода лишь массой ядра:  $M_D \approx 2M_H$ . Масса ядра определяет его гравитационное поле. Однако последнее не играет в атоме практически никакой роли (см. справку к задаче № 28-1). Поэтому ионизационные потенциалы атомов H и D должны были бы совпадать.

Действительно, если рассуждения предыдущей задачи, приведенные для атома водорода, повторить теперь для атома дейтерия, то снова придем к формуле

$$U = hcR'e.$$

Однако, строго говоря, необходимо учесть, что постоянная Ридберга  $R$  различна для атомов H и D: точное ее значение, вычисленное с учетом движения электрона и ядра вокруг их общего центра масс, дается формулой (28.8). Тогда для ионизационных потенциалов водорода  $U_H$  и дейтерия  $U_D$  получим:

$$U_H = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_H}, \quad U_D = \frac{hcR_\infty}{1 + m/M_D},$$

где  $m$  — масса электрона,  $M_H$ ,  $M_D$  — массы ядер водорода и дейтерия.



Учитывая, что  $m \ll M_H < M_D$ , найдем по формулам приближенного вычисления:

$$U_D - U_H = hcR_\infty \left(1 - \frac{m}{M_D}\right) - hcR_\infty \left(1 - \frac{m}{M_H}\right) = hcR_\infty \left(\frac{m}{M_H} - \frac{m}{M_D}\right).$$

Взяв из таблиц значения:  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг,  $M_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг,  $M_D = 3,35 \cdot 10^{-27}$  кг — и произведя вычисление, получим

$$U_D - U_H = 13,6 \cdot 0,000273 \text{ В} = 0,0037 \text{ В} = 3,7 \text{ мВ}.$$

**28-4.** Вычислить необходимую минимальную разрешающую силу спектрального прибора в двух случаях

- 1) чтобы разрешить первые 20 линий серий Бальмера;
- 2) чтобы при наблюдении спектра смеси водорода и ионизированного гелия разрешить первую линию серии Бальмера и вторую линию серии Пиккеринга.

**Решение** Серией Пиккеринга называют спектральную серию ионизированного гелия, соответствующую значениям квантовых чисел в (28.5):  $n_i = 4$ ,  $n_h = 5, 6, 7, \dots$  Разрешающая сила спектрального прибора определяется соотношением (24.4). Так как с увеличением номера спектральной линии одной и той же серии разность длин волн  $\delta\lambda$  соседних линий уменьшается (линии располагаются все теснее), то, очевидно, все первые 20 линий серии Бальмера будут разрешены, если будут разрешены двадцатая ( $\lambda_{20}$ ) и двадцать первая ( $\lambda_{21}$ ) линии этой серии. Поэтому согласно (24.4) для минимальной разрешающей силы спектрального прибора получим

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20} - \lambda_{21}}.$$

Длины волн  $\lambda_{20}$ ,  $\lambda_{21}$  найдем по формуле Бальмера — Ритца (28.3), положив  $n_i = 2$ ,  $n_h = 22$  (для  $\lambda_{20}$ ) и  $n_h = 23$  (для  $\lambda_{21}$ ):

$$\frac{1}{\lambda_{20}} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{22^2} \right) = \frac{R}{4,0333}; \quad \frac{1}{\lambda_{21}} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{23^2} \right) = \frac{R}{4,0305}.$$

Отсюда

$$r = \frac{\lambda_{20}}{\lambda_{20} - \lambda_{21}} = \frac{4,0333}{4,0333 - 4,0305} = 1,41 \cdot 10^3.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, выразим длину волны  $\lambda_H$  первой линии серии Бальмера по формуле (28.3), а длину волны  $\lambda_{He}$  второй линии серии Пиккеринга — по сериальной формуле (28.5), положив для гелия  $Z = 2$ . Тогда получим:

$$\frac{1}{\lambda_H} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 7,2 R; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda_{He}} = 4R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,2R. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) следует, что длины волны  $\lambda_H$ ,  $\lambda_{He}$  совпадают. Поэтому, казалось бы, разрешить соответствующие линии двух спектров нельзя. Однако в действительности величины  $\lambda_H$ ,  $\lambda_{He}$  несколько отличаются друг от друга, так как постоянная Ридберга  $R$  различна для атомов водорода и гелия вследствие различия их масс, как это следует из (28.8). Поэтому более точно формулы (1), (2) надо записать так:

$$\frac{1}{\lambda_H} = 7,2 R_H = \frac{7,2 R_\infty}{1 + m/M_H}; \quad \frac{1}{\lambda_{He}} = 7,2 R_{He} = \frac{7,2 R_\infty}{1 + m/M_{He}}$$

Отсюда

$$r = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\lambda_H}{\lambda_H - \lambda_{He}} = \frac{1 + m/M_H}{(1 + m/M_H) - (1 + m/M_{He})} = \frac{M_H + m}{M_{He} - M_H} \frac{M_{He}}{m}$$

Взяв из таблиц значения величин  $M_H = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг,  $M_{He} = 3,35 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг — и выполнив вычисление, найдем

$$r = 7,3 \cdot 10^3.$$

28-5. Анникатод рентгеновской трубки покрыт молибденом ( $Z = 42$ ). Найти приблизительно минимальную разность потенциалов, которую надо приложить к трубке, чтобы в спектре рентгеновского излучения появились линии  $K$ -серии молибдена.

**Решение.** В отличие от задачи № 27-1, где рассматривалось тормозное рентгеновское излучение со сплошным спектром, здесь речь идет о *характеристических* рентгеновских лучах, дающих линейчатый спектр. Как известно, характеристическое рентгеновское излучение обусловлено электронными переходами в глубокие электронные слои атома. Серия  $K$  возникает при переходах электронов на самый глубокий слой  $K$  ( $n = 1$ ) из менее глубоких электронных слоев  $L$  ( $n = 2$ ),  $M$  ( $n = 3$ ) и т. д. Но чтобы любой из этих переходов стал возможным, необходимо появление вакантного места в  $K$ -слое. Для этого один из двух электронов  $K$ -слоя должен быть вырван из атома (или переведен на высший, не заполненный электронами слой), так как внутренние слои  $L$ ,  $M$  и т. д. целиком заполнены электронами.

Минимальную энергию, необходимую для удаления электрона  $K$ -слоя из атома, можно приблизительно вычислить по закону Мозли. Действительно, из (28.6) и (28.7) следует, что квант энергии характеристических рентгеновских лучей равен

$$\varepsilon = h\nu = ha^2(Z - b)^2 = hcR(Z - b)^2 \left( \frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_k^2} \right). \quad (1)$$

Положив в (1)  $n_l = 1$ ,  $n_k = \infty$  и приняв приближенно, что постоянная экранирования  $b = 1$  для всех линий  $K$ -серии, найдем энергию  $\varepsilon'$  излучения атома, соответствующую переходу внешнего электрона на  $K$ -слой:

$$\varepsilon' = hcR(Z - 1)^2. \quad (2)$$

Очевидно, такую же энергию должен поглотить атом при обратном процессе — вырывании электрона из  $K$ -слоя, что необходимо для появления линий  $K$ -серии.

Эту энергию  $e'$  атом молибдена получает в результате удара об антикатод электрона, обладающего кинетической энергией  $eU$  [см. формулу (1) задачи № 27-1]. Разность потенциалов  $U$  будет минимальной, когда вся энергия электрона  $eU_{\text{мин}}$  поглощается атомом, т. е.

$$eU_{\text{мин}} = \epsilon'. \quad (3)$$

Из (3) и (2) получим

$$U_{\text{мин}} = \frac{hcR}{\epsilon} (Z - 1)^2. \quad (4)$$

Используя результат (3) задачи № 28-2, найдем

$$U_{\text{мин}} = 13,6 \cdot (42 - 1)^2 \text{ В} = 23 \cdot 10^3 \text{ В} = 23 \text{ кВ}.$$

**З а м е ч а н и е.** Вычисленный результат для  $U_{\text{мин}}$  оказался завышенным по сравнению с его истинным значением (20 кВ), так как, приняв в формуле (1) постоянную экранирования  $b = 1$ , мы учли лишь экранирующее действие одного электрона  $K$ -слоя. Это верно при электронном переходе  $L \rightarrow K$ , что соответствует  $K_{\alpha}$ -линии и числу  $n_h = 2$  в формуле (1). В данном же случае ( $n_h = \infty$ ) оказывают слабое экранирующее действие и все остальные электроны атома. Поэтому  $b > 1$ .

## § 29. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### Основные формулы

Формула де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}, \quad (29.1)$$

где  $\lambda$  — длина волны, соответствующая частице с импульсом  $p$ ;  $\hbar = h/2\pi = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar, \quad (29.2)$$

где  $\Delta x$  — неопределенность координаты частицы,  $\Delta p_x$  — неопределенность проекции импульса частицы на ось  $x$ .

Вероятность пребывания частицы в объеме  $dV$

$$dP = |\psi|^2 dV, \quad (29.3)$$

где  $\psi$  — волновая функция,  $|\psi|^2$  — плотность вероятности.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U)\psi = 0. \quad (29.4)$$

Здесь  $\psi$  — волновая функция, описывающая состояние частицы  $\Delta$  — оператор Лапласа ( $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ ).  $W$  — полная энергия частицы,  $U$  — ее потенциальная энергия.

Собственная волновая функция частицы, находящейся в бесконечно глубоко одномерном потенциальном ящике (рис 29-1),

$$\psi(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi n x / l) \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (29.5)$$

где  $l$  — длина ящика,  $x$  — координата ( $0 < x < l$ )

Коэффициент отражения волны де Бройля от низкого ( $U < W$ ) потенциального барьера бесконечной ширины (рис. 29-2) определяется формулой

$$R = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2, \quad (29.6)$$

где  $k_1, k_2$  — значения волнового числа в областях I, II (волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ ).

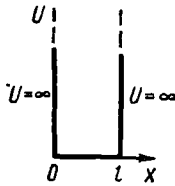


Рис. 29-1

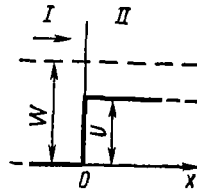


Рис 29-2

Собственная волновая функция, отвечающая  $1s$ -состоянию (основному) электрона в атоме водорода,

$$\psi(r) = e^{-r/a} / \sqrt{\pi a^3}, \quad (29.7)$$

где  $r$  — расстояние от ядра,  $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$  — радиус первой бортовской орбиты

Собственные значения энергии электрона в атоме водорода

$$W_n = -me^4/32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2, \quad (29.8)$$

где  $n$  — главное квантовое число ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Орбитальный момент импульса  $M_l$  электрона и его проекция  $M_{lz}$  на заданное направление  $z$  определяются формулами:

$$M_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (29.9)$$

$$M_{lz} = m_l \hbar, \quad (29.10)$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ),  $m_l$  — магнитное квантовое число ( $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ ).

Спиновый момент импульса  $M_s$  электрона и его проекция  $M_{sz}$  на заданное направление  $z$  выражаются формулами:

$$M_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (29.11)$$

$$M_{sz} = m_s \hbar, \quad (29.12)$$

где  $m_s = \pm s = \pm 1/2$  — спиновое квантовое число.

Результирующие орбитальный  $M_L$  и спиновый  $M_S$  моменты импульса многоэлектронного атома (имеются в виду атомы с нормальной, или рессел-саундерсовской, спин орбитальной связью):

$$M_L = \hbar \sqrt{L(L+1)}, \quad (29.13)$$

$$M_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}, \quad (29.14)$$

где  $L$  — квантовое число результирующего орбитального момента,  $S$  — квантовое число результирующего спинового момента. (Правила определения возможных значений чисел  $L$  и  $S$  изложены на стр. 317, 318.)

Полный момент импульса  $M_J$  атома определяется формулами

$$M_J = M_L + M_S, \quad (29.15)$$

$$M_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}, \quad (29.16)$$

где  $J$  — квантовое число полного момента импульса ( $J = L + S$ ,  $L + S - 1$ , ... ,  $|L - S|$ ).

## А. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ

### Методические указания

1. Нередко для решения задачи требуется выразить импульс  $p$  частицы через ее кинетическую энергию  $T$  (или наоборот). При этом, а также при вычислении скорости частицы по (29.1) надо различать случаи классических и релятивистских частиц\*. Заметим, что во всех случаях движения электрона в атоме, где его кинетическая энергия измеряется лишь несколькими электронвольтами, релятивистскими эффектами можно вполне пренебречь.

2. С помощью соотношения неопределенностей (29.2) решают не только задачи, в которых требуется определить наименьшее значение одной из двух неопределенностей  $\Delta x$ ,  $\Delta p_x$  при заданном значении другой (в этом случае в формуле пишут знак равенства), но и задачи на приближенный расчет наименьшего значения *самих величин*: линейных размеров области  $l$ , в которой находится частица, или импульса  $p$  частицы (или связанной с импульсом кинетической энергии  $T$ ). В задачах второго типа руководствуются следующими соображениями:

1) если даны линейные размеры области  $l$ , в которой находится частица, то считают  $\Delta x \approx l$ ; если известен модуль импульса  $p$ , но неизвестно его направление, то полагают  $\Delta p \approx p$  (см. задачу № 29-3);

2) искомая величина не может быть меньше наименьшей неопределенности в ее измерении, т. е. в качестве минимального значения искомой величины приближенно берут минимальную неопределенность этой величины:  $l_{\min} = (\Delta x)_{\min}$ ,  $p_{\min} = (\Delta p)_{\min}$ .

### Решение задач

29-1. Найти длину волны де Бройля для электрона, обладающего кинетической энергией: 1)  $T = 100$  эВ; 2)  $T = 3,0$  МэВ.

**Решение.** Как видно из соотношения (29.1), определяющего длину волны де Бройля, задача сводится к выражению импульса  $p$  электрона через его кинетическую энергию  $T$ . Решение задачи зависит от того, классической или релятивистской частицей следует считать электрон.

1. Так как  $T \ll m_0 c^2$ , где  $m_0 c^2 = 0,51$  МэВ — энергия покоя электрона, то в данном случае электрон является классической ча-

\* См. «Общие замечания» к § 18, а также формулы (18.2), (18.5), (18.6).

стицей. Значит, его импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Отсюда

$$p = \sqrt{2mT}. \quad (1)$$

Подставив это значение импульса в (29.1), получим

$$\lambda_1 = 2\pi\hbar / \sqrt{2mT}.$$

Заменим в формуле величины их числовыми значениями, выраженными в единицах СИ:  $2\pi\hbar = h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг,  $T = 1,00 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж. Выполнив вычисление, найдем

$$\lambda_1 = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 1,23 \text{ \AA}.$$

2. Теперь  $T > m_0c^2$ . Поэтому электрон следует считать релятивистской частицей, импульс и кинетическая энергия которой выражаются формулами (18.5), (18.6). Исключив из этих формул величину  $\beta$ , получим

$$p = \sqrt{2m_0 T (1 + T/2m_0 c^2)}, \quad (2)$$

где  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса покоя электрона. Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 T (1 + T/2m_0 c^2)}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + T/2m_0 c^2}}.$$

Взяв величины  $T$  и  $m_0c^2$  в мегаэлектронвольтах и произведя вычисление, найдем

$$\lambda_2 \approx \lambda_1/2 = 0,62 \text{ \AA}.$$

29-2. Параллельный пучок электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой  $a = 2,0$  мкм. Определить скорость электронов (считая ее одинаковой для всех частиц), если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии  $l = 50$  см, ширина центрального дифракционного максимума  $b = 80$  мкм.

**Решение.** Дифракция электронов является следствием волновой природы частиц. Поэтому для определения скорости электронов применим формулу де Бройля (29.1), откуда

$$v = 2\pi\hbar / m\lambda. \quad (1)$$

Чтобы найти длину волны де Бройля  $\lambda$ , воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении ее параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона.

Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определять по формуле (24.2), если понимать в ней под  $\lambda$  длину волны де Бройля для электрона.

Воспользуемся решением задачи № 24-2, основанным на применении формулы (24.2). По-прежнему считая, что центральный дифракционный максимум заключен между двумя минимумами первого порядка и учитывая соотношение между величинами  $b$  и  $l$ , получим (см. рис 24-2)

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = b/2l.$$

Отсюда, полагая в формуле (24.2)  $k = 1$ , имеем

$$\lambda = ab/2l.$$

Подставив это значение  $\lambda$  в (1), найдем

$$v = 4\pi h l / m a b. \quad (2)$$

Произведем вычисление по (2), предположив, что  $v \ll c$ . Считая электрон классической частицей, пренебрежем зависимостью его массы от скорости. Тогда  $m = m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг и расчет дает

$$v = 4,5 \cdot 10^6 \text{ м/с}. \quad (3)$$

• Так как в действительности масса движущегося электрона *не меньше* его массы покоя  $m_0$ , то истинное значение скорости  $v$ , определяемое по (2), будет *не больше*, чем вычисленное нами. Таким образом, предположение о том, что  $v \ll c$ , соответствует действительности и, значит, результат (3) правильный.

**З а м е ч а н и е.** Если бы полученный результат противоречил неравенству  $v \ll c$ , это означало бы, что электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, масса которой зависит от скорости. Тогда, чтобы получить ответ, надо подставить в (2) вместо  $m$  ее значение по формуле (18.2) и решить квадратное относительно  $v$  уравнение.

29-3. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей, найти наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

**Р е ш е н и е** Как следует из соотношения неопределенностей (29.2), неточность координаты частицы

$$\Delta x \geq \frac{2\pi\hbar}{\Delta p_x}. \quad (1)$$

Величина  $\Delta p_x$  неизвестна, однако сам импульс  $p$  (точнее: его среднее квадратичное значение) легко найти, поскольку нам известна средняя кинетическая энергия  $T$  электрона. Рассматривая электрон как нерелятивистскую частицу (так как  $T \ll m_0 c^2$ ), запишем выведенное в задаче № 29-1 соотношение между величинами  $p$ ,  $T$ :

$$p = \sqrt{2mT}. \quad (2)$$

Теперь сравним величины  $\Delta p_x$ ,  $p$ . Поскольку импульс  $p$  — вектор, то формула (2) позволяет лишь вычислить модуль этого вектора, тогда как его направление остается неизвестным. Поэтому проекция  $p_x$  импульса на какую-либо фиксированную ось  $x$  оказывается неопределенной: ее величина лежит в интервале  $(-p, p)$ . Это значит, что неопределенность проекции импульса на ось  $x$  равна

$$\Delta p_x = 2p \text{ или } \Delta p_x \sim p,$$

т. е. величины  $\Delta p_x$  и  $p$  одного порядка. Поэтому заменив  $\Delta p_x$  в формуле (1) величиной  $p$  и учитывая соотношение (2), получим ответ:

$$\Delta x \gtrsim \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}}. \quad (3)$$

Произведя вычисления по (3), найдем

$$\Delta x \gtrsim 10^{-10} \text{ м.}$$

Следовательно, наименьшая, допустимая соотношением неопределенностей неточность  $(\Delta x)_{\text{мин}}$ , с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка  $10^{-10}$  м.

**З а м е ч а н и е.** Сравнив полученный результат с ответом к задаче № 28-1, видим что  $(\Delta x)_{\text{мин}} = 2r$ , где  $r$  — радиус первой борновской орбиты. Отсюда следует, что борновскую орбиту нельзя представлять как траекторию, по которой движется электрон, так как он может оказаться в любом месте атома, находящегося в определенном (в данном случае — невозбужденном) состоянии, а не только на расстоянии  $r$  от ядра. Из решения задачи № 29-8 видно, что  $r$  есть *наиболее вероятное* расстояние, на котором можно встретить электрон в атоме.

## 6. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ

### Методические указания

1. Так как микрообъекты проявляют наряду с корпускулярными также и волновые свойства, состояние «частицы» в квантовой механике описывается волновой функцией  $\Psi(x, y, z, t)$ , зависящей от координат и времени. В курсе общей физики обычно рассматривают движение частиц лишь в постоянном во времени силовом поле (при этом потенциальная энергия  $U$  частицы не зависит явно от времени). В этом случае функция  $\Psi(x, y, z, t)$  распадается на два множителя, один из которых зависит только от времени, другой — только от координат:

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-iEt/\hbar} \cdot \psi(x, y, z).$$

Такая функция описывает монохроматическую стоячую волну де Бройля с амплитудой  $\psi(x, y, z)$ , квадрат модуля которой согласно (29.3) определяет вероятность  $dP$  пребывания частицы в данном элементе объема  $dV$ . Зная величину  $\psi(x, y, z)$  как функцию координат [функ-



цию  $\psi(x, y, z)$  также называют волновой функцией], можно найти вероятность пребывания частицы в заданном объеме  $V$  по формуле

$$P = \int_V |\psi|^2 dV,$$

где тройной интеграл берется по всей области изменения переменных  $x, y, z$ . Таким образом, знание волновой функции  $\psi(x, y, z)$  позволяет решать задачи на вычисление вероятности пребывания частицы в данной области.

2. Волновая функция  $\psi(x, y, z)$  может быть найдена путем решения уравнения Шредингера для стационарных состояний (29.4) (его называют также *амплитудным уравнением Шредингера*).

Решение уравнения Шредингера зависит от вида входящей в него функции  $U(x, y, z)$ . В связи с математическими трудностями, возникающими при решении уравнения, в курсе общей физики обычно ограничиваются одномерными задачами, когда  $U = U(x)$ ; при этом рассматривают лишь случаи, в которых потенциальная энергия постоянна в определенных интервалах изменения координаты  $x$ , но испытывает скачки на их границах. Эти случаи соответствуют частице, находящейся в потенциальном ящике (см. рис. 29-1), а также движению частицы при наличии низкого или высокого потенциального барьера (рис. 29-2, 29-3).

При  $U(x) = \text{const}$  уравнение (29.4) принимает вид

$$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0 \quad \text{при } U < W, \quad (29.17)$$

где

$$k = \sqrt{2m(W - U)}/\hbar; \quad (29.18)$$

$$\psi''(x) - k^2 \psi(x) = 0 \quad \text{при } U > W, \quad (29.19)$$

где

$$k = \sqrt{2m(U - W)}/\hbar. \quad (29.20)$$

Уравнения (29.17), (29.19) — дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Из теории дифференциальных уравнений известно, что их общие решения соответственно для (29.17) и (29.19) таковы:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx; \quad (29.21)$$

$$\psi(x) = C e^{kx} + D e^{-kx}, \quad (29.22)$$

где  $A, B, C, D$  — постоянные. Их значения (или соотношения между ними) находят, используя свойства волновой функции, обусловленные ее физическим смыслом: она должна быть однозначной, конечной и непрерывной во всей области изменения  $x$ ; ее производная  $\psi'(x)$  также должна быть непрерывной. Кроме того, волновая функция

должна отвечать условию нормировки, которое для одномерной задачи имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

3. Из перечисленных свойств волновой функции следует, что волновое число  $k$  и, значит, полная энергия частицы  $W$  могут иметь во многих случаях не любые значения, а лишь ряд определенных значений:  $k_1, k_2, k_3, \dots, W_1, W_2, W_3, \dots$ . Эти уровни энергии  $W_i$  можно найти, исследуя полученное решение уравнения Шредингера для  $\psi$ -функции. В отдельных случаях, например когда частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, уровни энергии можно определить, не решая уравнения Шредингера, а лишь используя указанные выше свойства волновой функции, рассматривая ее как амплитуду стоячих волн де Бройля (см. задачу № 29-4).

### Решение задач

29-4. Электрон находится в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной  $l$  (рис. 29-1). Вычислить наименьшую разность двух соседних энергетических уровней (в электронвольтах) электрона в двух случаях: 1)  $l = 10$  см; 2)  $l = 10 \text{ \AA}$ .

**Решение.** Задачу можно было бы решить с помощью уравнения Шредингера (29.4), однако необходимости в этом нет, достаточно использовать лишь некоторые свойства волновой функции.

Так как внутри потенциального ящика (при  $0 \leq x \leq l$ ) потенциальная энергия электрона  $U = 0$ , то его полная энергия есть кинетическая энергия  $T$ . Согласно закону сохранения энергии, при движении электрона  $T = \text{const}$ . Следовательно, сохраняется и импульс электрона  $p = \sqrt{2mT}$ . Учитывая два возможных направления движения электрона вдоль оси  $x$ , запишем для проекций импульса на ось  $x$ :

$$p_{x1} = p; p_{x2} = -p.$$

Согласно соотношению де Бройля, двум, отличающимся лишь знаком проекциям  $p_x$  импульса соответствуют две плоские монохроматические волны де Бройля, распространяющиеся в противоположных направлениях вдоль оси  $x$ . В результате их интерференции возникнут *стоячие волны* де Бройля, характеризующиеся стационарным, т. е. не зависящим от времени, распределением вдоль оси  $x$  амплитуды колебаний. Эта амплитуда и есть волновая функция  $\psi(x)$ , квадрат которой согласно формуле (29.3) определяет плотность вероятности пребывания электрона в точке с координатой  $x$ .

Так как потенциальный ящик бесконечно глубок ( $U = \infty$  при  $x < 0$  и  $x > l$ ), электрон не может оказаться за его пределами. Поэтому  $\psi(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $x > l$ . Отсюда в силу свойства непрерывности волновой функции следует

$$\psi(0) = 0, \psi(l) = 0.$$

Таким образом, амплитуда колебаний в стоячей волне де Бройля равна нулю в точках  $x = 0$ ,  $x = l$ , т. е. здесь находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны, то в потенциальном ящике могут быть лишь волны де Бройля, длина которых удовлетворяет условию

$$l = n\lambda_n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

т. е. на ширине ящика  $l$  должно укладываться целое число полуволп\*. Отсюда

$$\lambda_n = 2l/n. \quad (1)$$

Из соотношения (1) делаем вывод, что в потенциальном ящике существуют уровни энергии частицы. Действительно, полная энергия электрона в ящике с учетом (29.1) равна

$$W = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ml^2}.$$

Подставив сюда значение  $\lambda$  из (1), получим

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

Так как отношение уровней энергии  $W_1 : W_2 : W_3 \dots = 1 : 4 : 9 \dots$ , то наименьшая разность уровней

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (3)$$

Произведя вычисление по (3), найдем для двух случаев:

- 1)  $\Delta W = 1,8 \cdot 10^{-36}$  Дж =  $1,1 \cdot 10^{-16}$  эВ;
- 2)  $\Delta W = 1,8 \cdot 10^{-19}$  Дж =  $1,1$  эВ.

29-5. Частица находится в основном состоянии ( $n = 1$ ) в одномерном потенциальном ящике шириной  $l$  с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ ). Найти вероятность пребывания частицы в областях:  $0 < x < l/3$  и  $l/3 < x < 2l/3$ .

**Решение.** Вероятность  $dP$  пребывания частицы в интервале  $dx$  выразим через плотность вероятности  $|\psi(x)|^2$  при помощи формулы (29.3), которая для данного случая одномерной задачи примет вид

$$dP = |\psi(x)|^2 dx.$$

Отсюда вероятность найти частицу в области  $0 < x < l/3$  выразится интегралом:

$$P_1 = \int_0^{l/3} |\psi(x)|^2 dx. \quad (1)$$

\* Аналогичная ситуация встречалась уже в задаче № 20-3 при рассмотрении упругих волн в стержне. Данный случай соответствует стержню, закрепленному на концах.

Так как частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, то, положив  $n = 1$ , по формуле (29.5) получим для собственной волновой функции:

$$\psi(x) = \sqrt{2/l} \sin(\pi x/l).$$

Подставив это значение  $\psi(x)$  в (1), найдем

$$P_1 = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx.$$

Используя соотношение  $\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$ , вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{l} \left[ \int_0^{l/3} dx - \int_0^{l/3} \cos \frac{2\pi x}{l} dx \right] = \frac{1}{l} \left[ \frac{l}{3} - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0,195. \end{aligned}$$

Вероятность  $P_2$  пребывания частицы в области  $l/3 < x < 2l/3$  (т. е. в средней трети ящика) можно вычислить тем же способом, которым мы нашли вероятность  $P_1$ . Но можно поступить проще. Если сложить вероятности  $P_1, P_2, P_3$  пребывания частицы соответственно в первой, второй и третьей частях ящика, то получим вероятность пребывания частицы во всем ящике, которая равна единице, как вероятность достоверного события. Учитывая при этом, что в силу симметрии ящика  $P_1 = P_3$ , получим

$$P_2 = 1 - 2P_1 = 0,61.$$

**29-6.** Пучок электронов с энергией  $W = 25,0$  эВ встречается на своем пути потенциальный барьер высотой  $U = 9,0$  эВ (рис. 29-2). Определить коэффициент отражения  $R$  и коэффициент пропускания  $D$  волн де Бройля для данного барьера.

**Решение.** В силу неравенства  $U < W$  данный потенциальный барьер является *низким*. Поэтому для вычисления коэффициента отражения  $R$  воспользуемся формулой (29.6). Чтобы найти входящие в нее волновые числа  $k_1, k_2$ , выразим длины волн де Бройля  $\lambda_1, \lambda_2$ , соответствующие областям I, II, через импульсы  $p_1, p_2$  электрона, а последние — через его кинетические энергии. При этом учтем, что в области I кинетическая энергия равна полной энергии  $W$  (так как  $U = 0$ ), а в области II она, согласно закону сохранения энергии, равна  $W - U$ . Тогда получим

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{p_1} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}}, \quad (1)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{p_2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(W-U)}}. \quad (2)$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar},$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{2m(W-U)}}{\hbar}.$$

Подставив эти значения  $k_1, k_2$  в формулу (29.6) и произведя сокращение, имеем

$$R = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{W} - \sqrt{W-U}}{\sqrt{W} + \sqrt{W-U}} \right)^2 = \left( \frac{5-4}{5+4} \right)^2 = \frac{1}{81}.$$

Чтобы найти коэффициент пропускания  $D$ , выясним смысл коэффициентов  $R, D$  с корпускулярной точки зрения. Пусть за некоторый промежуток времени к барьеру подлетело  $n$  электронов. Из них  $n'$  электронов отразилось от барьера, а  $n''$  электронов прошло через барьер. Тогда

$$R = n'/n; \quad D = n''/n.$$

Так как  $n' + n'' = n$ , то

$$R + D = 1.$$

Отсюда находим

$$D = 1 - R = 1 - 1/81 = 80/81.$$

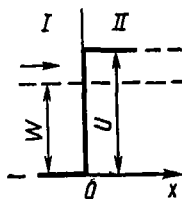


Рис. 29-3

29-7. Пучок электронов с энергией  $W = 25$  эВ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой  $U = 26$  эВ (рис. 29-3). Определить относительную плотность вероятности  $\eta$  пребывания электрона в области II на расстоянии  $x = 1,0$  Å от границы областей I, II (т. е. отношение плотности вероятности пребывания электрона в точке  $x = 1,0$  Å к плотности вероятности его пребывания на границе областей при  $x = 0$ ).

**Решение.** Здесь в отличие от предыдущей задачи дан *высокий* ( $U > W$ ) потенциальный барьер бесконечной ширины. Несмотря на то, что в этом случае коэффициент отражения  $R = 1$ , т. е. все падающие на барьер электроны отражаются, существует вероятность обнаружить электрон и в области II, за барьером. Чтобы найти эту вероятность, надо решить уравнение Шредингера (29.4). В данном случае одномерной задачи оно запишется с учетом неравенства  $U > W$  так:

$$\psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U - W)\psi(x) = 0.$$

Решение этого уравнения (см. стр. 312) дается формулой (29.22). Из нее следует: если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\psi \rightarrow \infty$ . Но волновая функция по своему физическому смыслу должна оставаться конечной при всех значениях  $x$ . Следовательно,  $C = 0$ . Поэтому из (29.22) с учетом (29.20) получим

$$\psi(x) = De^{-kx} = De^{-\sqrt{2m(U-W)}x/\hbar}.$$

Значит, плотность вероятности пребывания частицы в точке  $x$  равна

$$|\psi(x)|^2 = D^2 e^{-2\sqrt{2m(U-W)}x/\hbar}.$$

Отсюда относительная плотность вероятности

$$\eta = \frac{|\psi(x)|^2}{|\psi(0)|^2} = e^{-2\sqrt{2m(U-W)}x/\hbar}.$$

Выразим числовые значения величин, входящих в формулу, в единицах СИ:  $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг,  $U - W = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж,  $x = 1,0 \cdot 10^{-10}$  м. Произведя вычисление, найдем

$$\eta = 0,3.$$

## В СТРОЕНИЕ АТОМОВ

### Методические указания

1. В зависимости от значения орбитального квантового числа  $l$  состояния электрона в атоме записывают различными буквами. Значениям  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  соответствуют буквы  $s, p, d, f, g, h, \dots$  (далее по алфавиту); перед ними указывают значение главного квантового числа  $n$ . Например, электрон в состоянии с  $n = 2$  и  $l = 1$  обозначается символом  $2p$ .

2. Решение задач на определение результирующих орбитального  $M_L$  и спинного  $M_S$  моментов импульса многоэлектронного атома связано с вычислением возможных значений квантовых чисел  $L$  и  $S$ , входящих в формулы (29.13), (29.14). При этом руководствуются следующими правилами:

а) так как каждая из величин  $M_L$  и  $M_S$  равна нулю для заполненных оболочек атома\*, то последние не учитываются при вычислении  $L$  и  $S$ ;

б) квантовое число  $L$  принимает все целочисленные значения, заключенные между наибольшим и наименьшим значениями векторной суммы  $\sum l_i$ , где  $l_i$  — квантовые числа отдельных электронов, определяющие, согласно (29.9), их моменты импульса  $M_{l_i}$ . Так, для двух электронов с квантовыми числами  $l_1$  и  $l_2$  имеем

$$L = l_1 + l_2, l_1 + l_2 - 1, \dots, |l_1 - l_2|; \quad (29.23)$$

в) квантовое число  $S$  получается целым или полуцелым в зависимости от того, четным или нечетным является число  $N$  электронов в атоме. Число  $S$  принимает все целые или полуцелые значения, заклю-

\* Оболочку составляют электроны с одинаковыми числами  $n$  и  $l$ .

ченные между наибольшим и наименьшим значениями модуля алгебраической суммы  $\sum m_{s,i}$ , где  $m_{s,i}$  — спиновые квантовые числа электронов, равные  $\pm 1/2$ . Так, для двух электронов  $S = 1/2 + 1/2 = 1$  или  $S = 1/2 - 1/2 = 0$ , для трех электронов  $S = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$  или  $S = 1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$  и т. д.;

г) при вычислении значений  $L$  и  $S$  важно следить, чтобы полученный результат не противоречил *принципу Паули*, согласно которому в атоме не может быть хотя бы двух электронов, обладающих одинаковой совокупностью четырех квантовых чисел  $n, l, m_l, m_s$ . Например, если при определении возможных значений полного момента импульса двух эквивалентных электронов (т. е. электронов с одинаковыми числами  $n$  и  $l$ ) для числа  $L$  выбрано максимальное значение в ряду (29.23), равное  $l_1 + l_2$ , то при этом число  $S$  может иметь только одно значение:  $S = 0$ .

Действительно, равенство  $L = l_1 + l_2$  означает, что орбитальные моменты импульса двух эквивалентных электронов не только равны по модулю, но и имеют одинаковую ориентацию. Поэтому квантовые числа  $m_l$  у этих электронов будут совпадать. Но тогда их спиновые числа, как это следует из принципа Паули, должны иметь противоположные знаки, откуда  $S = 1/2 - 1/2 = 0$ .

3. Следует помнить об условности *векторной модели атома*, в которой момент импульса  $\mathbf{M}$  электрона изображают на чертеже как вектор, приписывая ему, таким образом, определенное направление в пространстве. Между тем согласно законам квантовой механики всегда существует некоторая неопределенность направления вектора  $\mathbf{M}$ . Так, например, если модуль вектора  $\mathbf{M}_l$  и его проекция  $M_{l,z}$  на заданное направление  $z$  выражаются формулами (29.9) и (29.10), то остальные проекции  $M_{l,x}, M_{l,y}$  остаются неопределенными. Вектор  $\mathbf{M}_l$  может с равной вероятностью иметь любое направление, при котором образуемый им с осью  $z$  угол  $\alpha$  находится из соотношения  $\cos \alpha = M_{l,z}/M_l$ .

### Решение задач

29-8. Атом водорода находится в  $1s$ -состоянии. Определить наиболее вероятное расстояние электрона от ядра.

**Решение.** Прежде всего уточним понятие наиболее вероятного расстояния, так как из законов теории вероятности следует, что вероятность обнаружить электрон на любом наперед заданном расстоянии от ядра равна нулю.

$1s$ -состояние электрона в атоме водорода описывается собственной волновой функцией  $\psi(r)$ , зависящей только от расстояния  $r$  до ядра и выражаемой формулой (29.7). Тогда вероятность найти электрон в элементарном объеме  $dV$ , находящемся на расстоянии  $r$  от ядра, согласно (29.3) равна

$$dP = |\psi(r)|^2 dV. \quad (1)$$

В силу сферической симметрии функции  $\psi(r)$  элементарным объемом  $dV$ , все точки которого удалены на расстояние  $r$  от ядра, будет шаровой слой радиуса  $r$  и толщиной  $dr$ , т. е.

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (2)$$

Подставив в (1) значения  $\psi(r)$  по (29.7) и  $dV$  по (2), получим

$$dP = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2 dr. \quad (3)$$

Величина  $\omega(r) = \frac{dP}{dr}$ , измеряемая отношением вероятности обнаружить частицу в шаровом слое к толщине этого слоя, называется *линейной плотностью вероятности* в шаровом слое. Тогда на основании (3) запишем

$$\omega(r) = \frac{4}{a^3} e^{-2r/a} r^2. \quad (4)$$

Функция  $\omega(r)$  имеет максимум при некотором расстоянии  $r = r_b$  (см. ниже), которое и называют *наиболее вероятным*.

Чтобы вычислить  $r_b$ , применим обычный метод исследования функций на экстремум. Найдем  $r_b$  из условия  $\omega'(r) = 0$ . Произведя дифференцирование, получим

$$2re^{-2r/a} - \frac{2r^2}{a} e^{-2r/a} = 0.$$

Отсюда

$$r_b = a.$$

Таким образом, искомое расстояние совпадает с радиусом первой бортовской орбиты.

29-9. Определить возможные значения орбитального момента импульса  $M_l$  электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения  $\epsilon = 12,09$  эВ.

**Решение.** Орбитальный момент импульса  $M_l$  электрона определяется квантовым числом  $l$  по формуле (29.9). Так как ряд возможных значений  $l$  ограничен величиной  $n - 1$ , найдем главное квантовое число  $n$  с помощью формулы (29.8), которую перепишем, учитывая, что при  $n = 1$   $W_1 = -13,6$  эВ:

$$W_n = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ.}$$

Энергия возбуждения  $\epsilon$  есть квант энергии, поглощенный атомом при переходе из основного состояния ( $n = 1$ ) в возбужденное. Следовательно,

$$W_n - W_1 = \epsilon.$$



Подставив числовые значения величин, выраженные в электрон-вольтах, получим

$$-\frac{13,6}{n^2} + 13,6 = 12,09,$$

откуда  $n = 3$ . Следовательно,  $l = 0, 1, 2$ .

Теперь по (29.9) найдем возможные значения  $M_l$ :

$$\text{при } l=0 \quad M_l=0;$$

$$\text{при } l=1 \quad M_l = \hbar\sqrt{2} = 1,49 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с};$$

$$\text{при } l=2 \quad M_l = \hbar\sqrt{6} = 2,60 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

**29-10.** Используя векторную модель атома, вычислить наименьший угол  $\alpha$ , который может образовать вектор  $M_l$  орбитального момента импульса электрона в атоме с направлением внешнего магнитного поля. Электрон в атоме находится в  $d$ -состоянии.

**Решение.** Проекция вектора  $M_l$  на направление внешнего магнитного поля определяется формулой (29.10). Поэтому, учитывая также соотношение (29.9), можно найти искомый угол из условия

$$\cos \alpha = \frac{M_{lz}}{M_l} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (1)$$

Так как  $d$ -состоянию электрона соответствует  $l = 2$ , то  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$ . Наименьшему значению  $\alpha$  соответствует наибольшее значение квантового числа  $m_l$  в формуле (1). Положив  $m_l = 2$ , получим:

$$\cos \alpha = 2/\sqrt{2 \cdot 3} = 0,82, \quad \alpha = 35^\circ 10'.$$

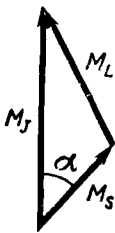


Рис 29 4

**29-11.** Атом кроме заполненных оболочек имеет три электрона ( $s, p, d$ ) и находится в состоянии с максимально возможным для этой конфигурации полным моментом импульса. Определить, используя векторную модель атома, угол между спиновым ( $M_S$ ) и полным ( $M_J$ ) моментами импульса атома.

**Решение.** Полагая, что в данном атоме существует нормальная спин-орбитальная связь, изобразим в соответствии с формулой (29.15) векторный треугольник моментов импульсов  $M_S, M_L, M_J$  (рис. 29-4). Согласно теореме косинусов получим для искомого угла

$$\cos \alpha = \frac{M_J^2 + M_S^2 - M_L^2}{2M_S M_J}, \quad (1)$$

и задача сводится к определению величин  $M_L, M_S, M_J$ .

Из формулы (29.16) видно, что величина  $J_M$  будет наибольшей при наибольшем значении квантового числа  $J$ . Последнее равно сумме наибольших значений квантовых чисел  $L$  и  $S$ :

$$J_{\text{макс}} = L_{\text{макс}} + S_{\text{макс}}. \quad (2)$$

Так как полный момент импульса заполненной электронной оболочки равен нулю, то будем рассматривать только три данных электрона. Соответствующие им квантовые числа  $l$  равны:  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 1$ ,  $l_3 = 2$ . Следовательно,  $L_{\text{макс}} = l_1 + l_2 + l_3 = 3$ .

Чтобы найти максимальное значение  $S$ , сложим спиновые квантовые числа трех электронов:  $S_{\text{макс}} = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$ . Подставив в (2) значения  $L_{\text{макс}}$  и  $S_{\text{макс}}$ , получим  $J_{\text{макс}} = 9/2$ .

Теперь по формулам (29.13), (29.14), (29.16) вычислим:

$$M_L = \sqrt{48} \hbar/2; \quad M_S = \sqrt{15} \hbar/2; \quad M_J = \sqrt{99} \hbar/2.$$

Подставив эти значения  $M_L$ ,  $M_S$ ,  $M_J$  в (1) и произведя вычисление, найдем:

$$\cos \alpha = 0,857; \quad \alpha = 31^\circ.$$

### § 30. РАДИОАКТИВНОСТЬ. ПОГЛОЩЕНИЕ $\gamma$ -ЛУЧЕЙ

#### Основные формулы

Закон радиоактивного распада: число радиоактивных ядер —  $dN$ , распадающихся за промежуток времени между  $t$  и  $t + dt$ , пропорционально этому промежутку  $dt$  и числу ядер  $N$ , еще не распавшихся к моменту  $t$ , т. е.

$$-dN = \lambda N dt, \quad (30.1)$$

где  $\lambda$  — постоянная радиоактивного распада. Интегрируя (30.1), получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (30.2)$$

где  $N_0$  — число радиоактивных ядер в момент  $t = 0$ .

Период полураспада  $T$ , т. е. промежуток времени, за который распадается половина начального числа ядер, и постоянная распада  $\lambda$  связаны соотношением

$$T\lambda = \ln 2. \quad (30.3)$$

Активность препарата измеряется числом ядер, распадающихся в единицу времени:

$$a = -\frac{dN}{dt} = \lambda N. \quad (30.4)$$

Если радиоизотоп  $A_1$  с постоянной распада  $\lambda_1$  превращается в радиоизотоп  $A_2$  с постоянной распада  $\lambda_2$ , то число ядер радиоизотопа  $A_2$  изменяется со временем по закону

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (30.5)$$

где  $N_1(0)$  — число ядер радиоизотопа  $A_1$  в момент  $t = 0$ .

Интенсивность узкого пучка монохроматических  $\gamma$ -лучей, прошедших сквозь слой вещества толщиной  $x$ , уменьшается по закону

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (30.6)$$

где  $I_0$  — интенсивность излучения, падающего на слой,  $\mu$  — линейный коэффициент ослабления.

## Методические указания

1. При решении задач на явление радиоактивности надо различать два случая:

а) имеет место радиоактивный распад *изолированного* вещества. Тогда пользуются законом радиоактивного распада в форме (30.2). Если из условия задачи следует, что время распада  $\Delta t$  пренебрежимо мало по сравнению с периодом полураспада  $T$  данного радионуклида ( $\Delta t \ll T$ ), то число нераспавшихся ядер  $N$  можно считать практически постоянным в течение всего времени  $\Delta t$  и равным их начальному числу  $N_0$ . Тогда число распавшихся ядер  $\Delta N$  можно находить по формуле (30.1), записав ее в виде

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$$

(знак «--» опущен, так как здесь под  $\Delta N$  подразумевается положительная величина  $N_0 - N$ );

б) происходит распад одного радиоактивного вещества (дочернего), взятого в смеси с другим радиоактивным веществом (материнским), из которого оно возникает. В этом случае пользуются соотношением (30.5), выражающим закон изменения со временем числа ядер дочернего вещества.

Обратим внимание на особый случай: если период полураспада  $T_1$  материнского вещества существенно превышает период полураспада  $T_2$  дочернего вещества, т. е.  $T_1 \gg T_2$ , то по истечении некоторого промежутка времени устанавливается радиоактивное равновесие между этими веществами. При этом число ежесекундно распадающихся ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого же вещества в результате распада ядер материнского вещества. Так как активности обоих веществ становятся одинаковыми, то из (30.4) и (30.3) получаем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}.$$

2. В некоторых задачах требуется найти число атомов  $N$ , содержащихся в данной массе  $m$  некоторого радионуклида  ${}^A_Z X$  (здесь под  $X$  подразумевается химический символ данного элемента,  $Z$  — атомный номер, равный числу протонов в ядре,  $A$  — массовое число, равное суммарному числу протонов и нейтронов, т. е. числу нуклонов в ядре). Для этого пользуются соотношением

$$N = N_A \nu = N_A (m/\mu), \quad (1)$$

где  $N_A$  — постоянная Авогадро,  $\nu$  — число молей, содержащихся в данном препарате,  $\mu$  — молярная масса изотопа.

Напомним, что между молярной массой  $\mu$  изотопа и его относительной атомной массой  $M_r$  существует соотношение

$$\mu = 10^{-3} M_r, \text{ кг/моль.}$$

Вычисляя по (1), следует иметь в виду, что для всякого изотопа величина  $M_r$  выражается числом, весьма близким к его массовому числу  $A$ , т. е.  $\mu \approx 10^{-3} A$  кг/моль.

## Решение задач

30-1. Зная постоянную распада  $\lambda$  ядра, определить вероятность  $P$  того, что ядро распадётся за промежуток времени от 0 до  $t$ .

**Решение.** Выясним, что следует понимать под искомой вероятностью  $P$ . Процесс радиоактивного распада носит статистический характер. Это значит: если многократно повторять опыты с радиоактивным препаратом, содержащим достаточно большое начальное число ядер  $N_0$ , то за промежуток времени от 0 до  $t$  распадётся каждый раз одна и та же доля ядер  $\Delta N/N_0$ . Эта величина, характеризующая относительную частоту события — распада ядра, и принимается за вероятность  $P$  распада ядра в течение данного промежутка времени. Таким образом,

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0},$$

где  $N$  — число нераспавшихся ядер к моменту  $t$ . Подставив в это равенство вместо  $N$  его значение по закону радиоактивного распада (30.2) и произведя сокращение, получим ответ:

$$P = 1 - e^{-\lambda t}.$$

30-2. Определить, сколько ядер в  $m_0 = 1,0$  мг радиоизотопа церия  $^{144}_{58}\text{Ce}$  распадается в течение промежутков времени: 1)  $\Delta t = 1$  с; 2)  $\Delta t = 1$  год. Период полураспада церия  $T = 285$  сут.

**Решение.** Задача решается с помощью закона радиоактивного распада.

1. Так как  $\Delta t \ll T$ , то можно считать, что в течение всего промежутка  $\Delta t$  число нераспавшихся ядер остаётся практически постоянным и равным их начальному числу  $N_0$ . Тогда для нахождения числа распавшихся ядер  $\Delta N$  применим закон радиоактивного распада в форме (30.1), записав его так:

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t,$$

или, учитывая (30.3),

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Delta t.$$

Чтобы определить начальное число ядер (атомов)  $N_0$ , умножим постоянную Авогадро  $N_A$  на число молей  $\nu$ , содержащихся в данном препарате:

$$N_0 = N_A \nu = N_A (m_0/\mu), \quad (1)$$

где  $m_0$  — начальная масса  $m_0$  препарата,  $\mu$  — молярная масса изотопа  $^{144}_{58}\text{Ce}$ , численно равная (приблизительно) его массовому числу. С учётом (1) получим

$$\Delta N = \frac{\ln 2 \cdot N_A m_0 \Delta t}{T \mu}. \quad (2)$$

Выразим числовые значения величин, входящих в формулу (2), в единицах СИ  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>,  $m_0 = 1,0 \cdot 10^{-6}$  кг,  $\Delta t = 1$  с,  $T = 285 \cdot 24 \cdot 3600$  с,  $\mu = 0,144$  кг/моль. Произведя вычисление с учетом, что  $\ln 2 = 0,693$ , найдем

$$\Delta N = 1,2 \cdot 10^{11}.$$

2 Так как теперь  $\Delta t$ ,  $T$  — величины одного порядка, то дифференциальная форма (30.1) закона радиоактивного распада здесь неприменима. Поэтому для решения задачи воспользуемся интегральной формой (30.2) закона, справедливой для любого промежутка  $\Delta t$ . Тогда получим

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}),$$

или, учитывая (30.3) и (1),

$$\Delta V = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - e^{-(\ln 2) t/T}).$$

Так как  $e^{\ln 2} = 2$ , то уравнение принимает более простой вид:

$$\Delta N = \frac{N_A m_0}{\mu} (1 - 2^{-t/T}). \quad (3)$$

Произведя вычисление по (3), найдем

$$\Delta N = 2,5 \cdot 10^{18}.$$

30.3. Радиоизотоп  $A_1$  с постоянной распада  $\lambda_1$  превращается в радиобизотоп  $A_2$  с постоянной распада  $\lambda_2$ . Считая, что в начальный момент препарат содержит только ядра изотопа  $A_1$ , найти, через сколько времени активность радиоизотопа  $A_2$  достигнет максимума?

**Решение.** Активность препарата, определяемая соотношением (30.4), пропорциональна числу наличных ядер  $N$  этого препарата. Поэтому активность  $a$  радиоизотопа  $A_2$  достигнет максимума тогда, когда максимальным будет число ядер  $N_2$  этого радиоизотопа. Закон изменения со временем числа ядер  $N_2$  выражается формулой (30.5). Для отыскания промежутка времени  $t$ , которому соответствует максимум функции  $N_2(t)$ , продифференцируем эту функцию по времени и приравняем нулю производную:

$$N_2'(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Решив это уравнение относительно  $t$ , найдем искомое время:

$$t = \frac{\ln(\lambda_1 / \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

**30-4.** Найти активность радона, образовавшегося из  $m_0 = 1,00$  г радия  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  за одни сутки. Найти также максимальную активность радона. Периоды полураспада радия и радона соответственно равны  $T_1 = 1,6 \times 10^3$  лет,  $T_2 = 3,8$  сут.

**Решение.** Используя соотношения (30.4), (30.5), запишем для искомой активности

$$a_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Входящие сюда величины  $N_1(0)$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  выразим через данные  $m_0$ ,  $\mu$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  по (30.3) и формуле (1) задачи № 30-2. Тогда, произведя сокращение, имеем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1 - T_2} (e^{-(\ln 2) \cdot t/T_1} - e^{-(\ln 2) \cdot t/T_2}), \quad (1)$$

где  $N_A$  — постоянная Авогадро. Это общая формула, выражающая закон изменения со временем активности одного радионуклида (дочернего), полученного в процессе распада другого (материнского). В данном случае формулу (1) можно упростить, если учесть вытекающие из условия соотношения  $T_1 \gg T_2$  и  $T_1 \gg t$ . Из первого неравенства следует, что можно пренебречь величиной  $T_2$  в разности  $T_1 - T_2$ . В силу второго неравенства можно принять за единицу первый член, стоящий в скобках. Тогда найдем

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} (1 - e^{-(\ln 2) \cdot t/T_2}). \quad (2)$$

Произведя расчет по (2), получим

$$a_2 = 3,7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,83) \text{ расп/с, или } a_2 = \frac{3,7 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,83)}{3,7 \cdot 10^{10}} \text{ Ки} = \\ = 0,17 \text{ Ки}$$

Чтобы вычислить максимум активности  $(a_2)_{\text{макс}}$  радона, можно, используя результат предыдущей задачи, найти промежуток времени  $t_{\text{макс}}$ , в течение которого активность радона достигнет максимума, а затем по формуле (1) определить величину  $(a_2)_{\text{макс}}$ , соответствующую времени  $t_{\text{макс}}$ . Однако можно поступить проще. Анализируя приближенную формулу (2), полученную с учетом неравенств  $T_1 \gg T_2$ ,  $T_1 \gg t$ , видим, что с ростом времени  $t$  величина, стоящая в скобках, приближается по экспоненте к единице. Следовательно,

$$(a_2)_{\text{макс}} = \frac{N_A m_0}{\mu} \frac{\ln 2}{T_1} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с} = 1,0 \text{ Ки.}$$

**З а м е ч а н и е.** Последнее равенство можно переписать, учитывая (30.4), так:

$$(a_2)_{\text{макс}} = N_1(0) \lambda_1 = a_1(0),$$

т. е. максимальная активность радона, возникающего при распаде радия, равна начальной активности самого радия.

Полученный результат легко понять, если учесть два обстоятельства: 1) вследствие весьма большой величины  $T_1$  число нераспавшихся ядер радия в течение промежутка  $t_{\text{макс}}$  остается практически постоянным. Поэтому остается постоянной и активность радия; 2) максимальной активности радона соответствует состояние *радиоактивного равновесия*, которое установится между радием и радоном через промежуток  $t_{\text{макс}}$ . При этом число ежесекундно распадающихся ядер радия (из каждого ядра радия образуется одно ядро радона) равно числу распадающихся атомов радона, а это и означает равенство активностей этих элементов.

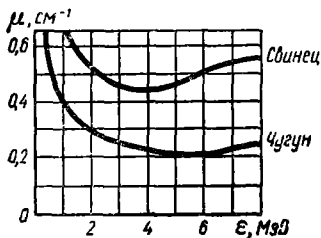


Рис 30-1

30-5. Интенсивность узкого пучка монохроматических  $\gamma$ -лучей после прохождения через слой свинца толщиной  $x = 2,00$  см уменьшается в 2,9 раза, а после прохождения через слой чугуна такой же толщины — в 1,6 раза. Используя зависимость линейного коэффициента ослабления  $\mu$   $\gamma$ -лучей от энергии  $\epsilon$   $\gamma$ -квантов (рис. 30-1), определить энергию  $\gamma$ -квантов в данном пучке.

**Решение.** Чтобы воспользоваться данным графиком, необходимо сначала найти коэффициент ослабления  $\mu$ . Из формулы (30.6) имеем

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I}. \quad (1)$$

Подставив  $x = 2,00$  см и  $I_0/I = 2,9$  и произведя вычисление, получим для свинца  $\mu_{\text{св}} = 0,54$  см $^{-1}$ . Этой величине  $\mu_{\text{св}}$  соответствуют на графике два значения энергии  $\gamma$ -квантов:  $\epsilon_1 = 1,8$  МэВ и  $\epsilon_2 = 7,0$  МэВ.

Подставив в (1)  $x = 2,00$  см и  $I_0/I = 1,6$ , вычислим величину  $\mu$  для чугуна:  $\mu_{\text{чуг}} = 0,23$  см $^{-1}$ . Теперь по графику находим:  $\epsilon_1 = 4,0$  МэВ и  $\epsilon_2 = 7,0$  МэВ.

Так как в обоих случаях через различные вещества проходят *одни и те же*  $\gamma$ -лучи, то для энергии  $\gamma$ -квантов следует принять значение  $\epsilon = 7,0$  МэВ.

## § 31. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

### Основные формулы

Энергия связи ядра, т. е. энергия, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро на составляющие его частицы без сообщения им кинетической энергии, вычисляется по формуле

$$\Delta W = c^2 \Delta m, \quad (31.1)$$

или

$$\Delta W = c^2 [Zm_p + (A-Z)m_n - m_A], \quad (31.2)$$

где  $\Delta m$  — дефект массы \* ядра, представляющий собой разность между суммой масс покоя частиц, составляющих ядро, и массой покоя ядра,  $Z$  — атомный номер (или зарядовое число), равный числу протонов в ядре,  $A$  — массовое число (суммарное число нуклонов в ядре),  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_H$  — массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

Энергия ядерной реакции (или тепловой эффект реакции)

$$Q = c^2 (\Sigma m - \Sigma m'), \quad (31.3)$$

где  $\Sigma m$ ,  $\Sigma m'$  — суммы масс покоя частиц соответственно до и после реакции.

### Методические указания

1. Решение задач на ядерные реакции основано на применении законов сохранения: 1) электрического заряда, 2) суммарного числа нуклонов, 3) энергии, 4) импульса. Первые два закона позволяют правильно записывать ядерные реакции даже в тех случаях, когда одна из частиц — участников реакции или ее продуктов — не дана. (Очевидно, записав реакцию, мы тем самым определяем неизвестную частицу.) С помощью вторых двух законов находят кинетические энергии частиц — продуктов реакции, а также направления их разлета.

Процесс столкновения бомбардирующей частицы с ядром — мезонью, при котором частица поглощается ядром, рассматривают как *неупругий удар* и применяют при этом закон сохранения импульса, как и в соответствующих задачах механики (см. § 3).

В законе сохранения энергии, записанном для ядерных реакций (в отличие от случаев, рассмотренных в § 3), под полной энергией подразумевается полная *релятивистская* энергия, определяемая формулой (18.3). Эта энергия  $mc^2$  равна сумме энергии покоя частицы  $m_0c^2$  и ее кинетической энергии  $T$ . Согласно закону сохранения полной релятивистской энергии,

$$\Sigma m_0 c^2 + \Sigma T = \Sigma m'_0 c^2 + \Sigma T', \quad (31.4)$$

где  $\Sigma m_0 c^2$  — сумма энергий покоя частиц до реакции,  $\Sigma T$  — сумма их кинетических энергий. Справа стоят величины, относящиеся к частицам после реакции.

2. Поскольку в справочных таблицах приводятся значения  $m$  с атомов, а не ядер, то удобнее вычислять энергию связи ядра не по (31.2), а по формуле

$$\Delta W = c^2 [Z m_{H1} + (A - Z) m_n - m_A], \quad (31.5)$$

где  $m_{H1}$  — масса атома водорода  ${}^1\text{H}$ ,  $m_n$  — масса данного атома. Обе формулы эквивалентны, так как, обозначив массу электрона  $m_e$ , можно записать

$$Z m_{H1} - m_A = Z (m_p + m_e) - (m_n + Z m_e) = Z m_p - m_n.$$

При вычислении энергии реакции  $Q$  по (31.3) также заменяют массы покоя ядер массами атомов. Эта замена не повлияет на величину разности, стоящей в скобках, так как уменьшаемое и вычитаемое

\* Термином «дефект массы» обозначают также другую величину  $\delta$ , равную разности между массой атома  $m_A$  (выраженной в углеродных единицах массы) и массовым числом  $A$ , т. е.  $\delta = m_A - A$ .



при этом возрастают на одну и ту же величину  $m, \Sigma Z$ , где  $\Sigma Z$  — суммарное зарядовое число всех частиц (до или после реакции).

3. Чтобы, вычисляя по формулам (31.1) — (31.5), получать значения энергии в мегаэлектронвольтах (МэВ), надо подставить в формулу взятые из справочных таблиц значения масс, выраженные в атомных единицах массы (а. е. м.), а коэффициент  $c^2$ , представляющий собой квадрат скорости света в вакууме, положить равным

$$c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$$

4. Обычно при ядерных реакциях энергия  $Q$ , выражаемая по (31.3), измеряется величинами порядка 10 МэВ, а энергия покоя даже самого легкого ядра — ядра водорода  ${}^1\text{H}$  (т. е. протона) — равна 938 МэВ. Отсюда следует, что, вычисляя скорости частиц — ядер или отдельных нуклонов, их можно заведомо считать классическими в следующих случаях: 1) если данные частицы являются продуктами ядерной реакции, вызванной столкновением медленных частиц; 2) если речь идет об определении порога реакции (см. задачу № 31.4).

Вместе с тем энергия ядерной реакции, как правило, превышает энергию покоя легких частиц — электронов и позитронов, равную 0,511 МэВ. Поэтому, находя скорости или импульсы этих частиц (если они являются продуктами реакции), следует пользоваться релятивистскими формулами (18.5), (18.6).

### Решение задач

31-1. Определить удельную энергию связи для ядра  ${}^{17}_8\text{O}$ .

**Решение.** Удельную энергию связи ядра, равную отношению его энергии связи  $\Delta W$  к массовому числу (числу нуклонов в ядре)  $A$ , найдем с помощью формулы (31.5):

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{c^2 [Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_{\text{n}} - m_{\text{a}}]}{A}.$$

Взяв из таблиц значения масс атомов водорода  ${}^1\text{H}$ , кислорода  ${}^{17}\text{O}$  и нейтрона  $n$  в атомных единицах массы и учитывая, что  $c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$ , произведем вычисление:

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{931 [8 \cdot 1,00783 + (17-8) \cdot 1,00867 - 16,99913]}{17} \text{ МэВ} = 7,76 \text{ МэВ}.$$

31-2. Найти энергию связи нейтрона в ядре  ${}^{17}_8\text{O}$ .

**Решение.** Энергией связи частицы в ядре называется та энергия, которую надо затратить, чтобы отделить частицу от ядра без сообщения ей кинетической энергии. Если отделить нейтрон  $n$  от ядра  ${}^{17}_8\text{O}$ , то в соответствии с законом сохранения заряда и числа нуклонов останется ядро  ${}^{16}_8\text{O}$ . Затраченную для отрыва энергию  $\Delta W$  можно найти по формуле (31.1), если за  $\Delta m$  принять изменение массы системы в результате отрыва нейтрона. Тогда для энергии связи нейтрона получим

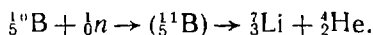
$$\Delta W = c^2 [m_{\text{O}} + m_{\text{n}}] - m_{\text{O}},$$

где  $m_{^{16}\text{O}}$ ,  $m_{^{17}\text{O}}$ ,  $m_n$  — соответственно массы покоя ядер кислорода  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$  и нейтрона. Очевидно, разность, стоящая в квадратных скобках, не изменится, если заменить массы ядер изотопов  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$  массами их атомов, значения которых приведены в таблицах. Тогда найдем ответ:

$$\Delta W = 931 [(15,99491 + 1,00867) - 16,99913] \text{ МэВ} = 4,14 \text{ МэВ}.$$

31-3. Определить энергию реакции  $^{10}\text{B} (n, \alpha) ^7\text{Li}$ , протекающей в результате взаимодействия весьма медленных нейтронов с покоящимися ядрами бора. Найти также кинетические энергии продуктов реакции.

**Решение.** Реакция  $^{10}\text{B} (n, \alpha) ^7\text{Li}$  состоит в следующем. Ядро бора  $^{10}_5\text{B}$ , поглотив медленный нейтрон  $^1_0n$ , превращается в промежуточное ядро  $^{11}_5\text{B}$ . Последнее, будучи возбужденным, испускает  $\alpha$ -частицу (т. е. ядро гелия  $^4_2\text{He}$ ), превращаясь в ядро лития  $^7_3\text{Li}$ . В развернутом виде реакция записывается так:



Энергию реакции  $Q$  найдем по формуле (31.3), которая в данном случае дает:

$$Q = c^2 [(m_{^{10}\text{B}} + m_n) - (m_{^7\text{Li}} + m_{^4\text{He}})].$$

Заменив (как и в предыдущей задаче) массы покоя ядер атомов массами покоя самих атомов, значения которых даны в таблицах, получим

$$Q = 931 \cdot (10,01294 + 1,00867 - 7,01601 - 4,00260) \text{ МэВ} = 2,80 \text{ МэВ}.$$

Чтобы найти кинетические энергии продуктов реакции — ядра лития  $^7\text{Li}$  и  $\alpha$ -частицы, применим закон сохранения релятивистской энергии, записанный в форме (31.4) с учетом (31.3):

$$\Sigma T + Q = \Sigma T'. \quad (1)$$

Из условия задачи следует, что величиной  $\Sigma T$  можно пренебречь. Тогда получим для суммы кинетических энергий частиц  $^7\text{Li}$  и  $^4\text{He}$ :

$$T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} = Q. \quad (2)$$

Чтобы составить второе уравнение, связывающее неизвестные  $T_{\text{Li}}$ ,  $T_{\text{He}}$ , применим закон сохранения импульса. Полагая суммарный импульс частиц до реакции равным нулю, приходим к выводу, что и после реакции он должен быть равен нулю:

$$\mathbf{p}_{\text{Li}} + \mathbf{p}_{\text{He}} = 0.$$

Отсюда для модулей импульсов имеем

$$p_{\text{Li}} = p_{\text{He}}.$$

Переходя от импульсов частиц к их кинетическим энергиям, найдем [см. формулу (1) задачи № 29-1)]

$$m_{\text{Li}} T_{\text{Li}} = m_{\text{He}} T_{\text{He}}. \quad (3)$$

Решив систему (2), (3), найдем:

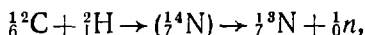
$$T_{Li} = Qm_{He}/(m_{Li} + m_{He}); \quad T_{He} = Qm_{Li}/(m_{Li} + m_{He}).$$

Округлив значения масс ядер  $m_{Li}$ ,  $m_{He}$  до целых чисел, получим:

$$T_{Li} = 4Q/11 = 1,02 \text{ МэВ}; \quad T_{He} = 7Q/11 = 1,78 \text{ МэВ}.$$

31-4. Найти порог ядерной реакции  $^{12}\text{C}(d, n)^{13}\text{N}$ .

**Решение.** Эта реакция, происходящая при поглощении ядром углерода  $^{12}\text{C}$  дейтона  $d$ , в развернутом виде запишется так:



где  ${}^4_7\text{N}$  — промежуточное ядро, которое сразу же после образования испускает нейтрон, превращаясь в ядро  ${}^7_8\text{N}$ .

*Порогом ядерной реакции* называют ту наименьшую кинетическую энергию бомбардирующей частицы (в «лабораторной» системе отсчета), при которой становится возможной ядерная реакция\*. Для определения порога реакции снова запишем уравнение (1) задачи № 31-3:

$$\Sigma T \div Q = \Sigma T',$$

или, так как мишень — ядро  $^{12}\text{C}$  — предполагается неподвижным,

$$m_d v^2/2 + Q = \Sigma T', \quad (1)$$

где  $m_d v^2/2$  — кинетическая энергия дейтона, минимальное значение которой нужно найти. Очевидно, ему соответствует минимальное значение  $\Sigma T'$ . Чтобы вычислить это значение, учтем следующее.

Если некоторому состоянию системы соответствует минимальная кинетическая энергия в одной инерционной системе отсчета, то этому же состоянию будет соответствовать ее минимум и в любой другой инерциальной системе отсчета (хотя значение самого минимума будет разным в различных системах). Действительно, из уравнения (31.4), выражающего закон сохранения полной релятивистской энергии, следует, что при минимальном значении  $\Sigma T'$  величина  $\Sigma m'_0 c^2$  будет максимальной. Но последняя не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, поскольку и масса покоя, и скорость света в вакууме — величины, инвариантные относительно выбора инерциальной системы отсчета.

Вместе с тем известно, что в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц, минимальное значение величины  $\Sigma T'$  равно нулю при нулевой относительной скорости частиц  ${}^{13}\text{N}$  и  $n$ . Значит, этому же состоянию системы соответствует минимум величины  $\Sigma T'$  и в «лабораторной» системе отсчета, в которой мы решаем задачу.

Тот факт, что порогу реакции соответствует равенство нулю относительной скорости частиц  ${}^{13}\text{N}$ ,  $n$ , означает, что в этом случае распад промежуточного ядра  ${}^{13}\text{N}$  происходит без изменения кинетической энергии системы. Следовательно, минимум величины  $\Sigma T'$  равен

\* Понятие порога относится только к эндотермическим реакциям, когда энергия реакции (тепловой эффект)  $Q < 0$ .

кинетической энергии промежуточного ядра, которую оно приобрело в процессе образования из дейтона и ядра  $^{12}\text{C}$ . Тогда из (1) получим

$$\frac{m_d v^2}{2} + Q = \frac{(m_{^{12}\text{C}} + m_d) V^2}{2}, \quad (2)$$

где  $m_{^{12}\text{C}}$  — масса ядра  $^{12}\text{C}$ ,  $m_d$  — масса дейтона,  $(m_{^{12}\text{C}} + m_d)$  — приближенное значение массы промежуточного ядра,  $V$  — его скорость.

Второе уравнение, связывающее неизвестные  $v$ ,  $V$ , запишем, применив закон сохранения импульса для неупругого соударения дейтона с ядром  $^{12}\text{C}$ :

$$m_d v = (m_{^{12}\text{C}} + m_d) V. \quad (3)$$

Исключив из системы (2), (3) величину  $V$ , найдем

$$\frac{m_d v^2}{2} = -Q \frac{m_{^{12}\text{C}} + m_d}{m_{^{12}\text{C}}}.$$

Подставив вместо величины  $Q$  ее значение по (31.3), получим ответ:

$$\frac{m_d v^2}{2} = c^2 [(m_{^{12}\text{N}} + m_n) - (m_{^{12}\text{C}} + m_d)] \frac{m_{^{12}\text{C}} + m_d}{m_{^{12}\text{C}}}.$$

Заменив массы ядер, стоящие в квадратных скобках, массами атомов (взяв их значения из таблиц) и округлив до целых чисел значений масс в дроби  $(m_{^{12}\text{C}} + m_d)/m_{^{12}\text{C}}$ , выполним вычисление:

$$\begin{aligned} \frac{m_d v^2}{2} &= 931 \cdot [(13,00574 + 1,00867) - \\ &- (12,00000 + 2,01410)] \cdot \frac{14}{12} \text{ МэВ} = 0,34 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

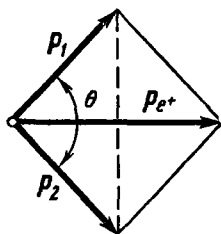
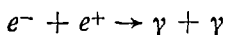


Рис. 31-1

31-5. Позитрон с кинетической энергией  $T = 0,75$  МэВ налетает на покоящийся свободный электрон. В результате аннигиляции возникает два  $\gamma$ -фотона с одинаковыми энергиями. Определить угол  $\theta$  между направлениями их разлета.

**Решение.** Процесс аннигиляции электрона  $e^-$  и позитрона  $e^+$  происходит по схеме



и подчиняется законам сохранения энергии и импульса.

Согласно закону сохранения импульса, импульс позитрона  $p_{e^+}$  равен векторной сумме импульсов  $\gamma$ -фотонов  $p_1, p_2$  (рис. 31-1):

$$p_{e^+} = p_1 + p_2.$$

При этом

$$p_1 = p_2 = e/c, \quad (1)$$

где  $e$  — энергия каждого  $\gamma$ -фотона (по условию, их энергии одинаковы). Таким образом, для угла  $\theta$  с учетом (1) получим

$$\cos(\theta/2) = \frac{p_{e^+}}{2p_1} = \frac{p_{e^+} c}{2e}. \quad (2)$$

Чтобы из (2) вычислить угол  $\theta$ , надо определить импульс позитрона  $p_{e^+}$  и энергию  $e$  каждого  $\gamma$ -фотона. Импульс позитрона найдем, зная его кинетическую энергию  $T$ . Поскольку величина  $T$  превышает энергию покоя позитрона  $m_0 c^2 = 0,511$  МэВ, то позитрон следует рассматривать как релятивистскую частицу. В этом случае импульс ее выражается через кинетическую энергию формулой (2) задачи № 29-1.

Энергию  $\gamma$ -фотона  $e$  определим с помощью закона сохранения релятивистской энергии (31.4). Учтем при этом, что масса покоя фотонов равна нулю:  $\Sigma m'_0 = 0$ , а полная энергия фотонов есть их кинетическая энергия, т. е.  $\Sigma T' = 2e$ . Учитывая, кроме того, что электрон и позитрон обладают одинаковой массой покоя  $m_0$ , получим

$$2m_0 c^2 + T = 2e. \quad (3)$$

Подставив в (2) значение  $2e$  из (3) и значение импульса  $p_{e^+}$ , определяемое формулой (2) задачи № 29-1, найдем

$$\cos(\theta/2) = \frac{c \sqrt{2m_0 T (1 + T/2m_0 c^2)}}{T + 2m_0 c^2},$$

или после упрощений

$$\cos(\theta/2) = 1/\sqrt{1 + 2m_0 c^2/T}. \quad (4)$$

Вычислив по (4), получим

$$\cos(\theta/2) = 0,651, \quad \theta = 99^\circ.$$

Задачи для самостоятельного решения

К главе 1. Механика

1.1. Рыбак, плывя на лодке вверх по реке, уронил под мостом в воду багор. Через  $t = 60$  мин он это обнаружил и, повернув назад, догнал багор на расстоянии  $s = 6,0$  км от моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

1.2. Из некоторой точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью  $v_0$  одно вертикально вверх, другое вертикально вниз. На каком расстоянии  $s$  друг от друга будут эти тела через время  $t$ ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.3. Стрелок целится в мишень, представляющую собой груз, висящий на нити. В каком направлении должен целиться стрелок, чтобы попасть в мишень, если известно, что в момент выстрела нить обрывается и груз начинает падать? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.4. Мяч брошен со скоростью  $v_0 = 20$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Во время полета он упруго ударяется о вертикальную стену, расположенную перпендикулярно плоскости, в которой лежит траектория мяча на расстоянии  $l = 30$  м от места бросания. На каком расстоянии  $s$  от стены упадет мяч? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.5. Камень брошен горизонтально со скоростью  $v_0 = 10,0$  м/с. Определить угол  $\alpha$ , который составит с вертикалью вектор скорости  $v$  камня через  $t = 2,0$  с после начала движения, а также тангенциальное  $a_t$  и нормальное  $a_n$  ускорения камня в этот момент.

1.6. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону, выражаемому формулой  $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$ . Найти модуль полного ускорения  $a$  точки, находящейся на расстоянии  $r = 0,10$  м от оси вращения, для момента времени  $t_0 = 4,0$  с. Какой угол  $\alpha$  составляет вектор  $a$  с нормалью к траектории в этот момент времени?

2.1. На гладком горизонтальном столе лежит брусок, к которому привязана нить, перекинута через блок, укрепленный на краю стола. Если за нить тянуть с силой  $F_1 = 2,0$  кгс, то брусок будет двигаться с ускорением  $a_1 = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Каковы будут ускорение  $a_2$  бруска и сила натяжения  $F_2$  нити, если к ее концу привязать груз массой  $m = 2$  кг?

2.2. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 \neq m_2$ ), общая масса которых  $m = 1,00$  кг. Грузы начинают равноускоренно двигаться и за  $t = 0,50$  с проходят путь  $s = 0,75$  м. Определить силу давления  $F$  на ось блока.

2.3. Определить скорость  $v$  велосипедиста, если при повороте по кругу радиуса  $R$  он наклоняется внутрь закругления под углом  $\alpha$  к горизонту.

2.4. Небольшой грузик подвешен на нити длиной  $l = 1,50$  м. Вследствие толчка грузик начнет двигаться в горизонтальной плоскости по окружности радиуса  $r < l$ . Какова частота вращения грузика?

2.5. С какой максимальной скоростью  $v$  может двигаться автомобиль по закруглению дороги радиуса  $R = 50$  м, если коэффициент трения скольжения между шинами и асфальтом  $\mu = 0,60$ ?

2.6. Решить задачу № 2-5 (стр. 23), полагая, что сила  $F$  приложена не к тележке, а к грузу. Рассмотреть два случая 1)  $F = 1,00$  кгс, 2)  $F = 3,00$  кгс.

2.7. Установка, изображенная на рис. 2-4, подвешена к потолку вагона, движущегося в горизонтальном направлении с постоянным ускорением  $a$ . Определить ускорения грузов  $a_1$  и  $a_2$  относительно вагона и силу натяжения  $T$  нити.

3.1. Три лодки одинаковой массой  $m$  плывут друг за другом с одинаковой скоростью  $v$ . Из средней лодки бросают одновременно в переднюю и заднюю лодки по грузу массой  $m'$  каждый со скоростью  $u$  относительно средней лодки. Каковы скорости лодок после переброски грузов?

3.2. На какую высоту  $h$  поднимется тело, скользя вверх по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 45^\circ$ , если ему сообщить скорость  $v_0 = 10,0$  м/с, а коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu = 0,20$ ? Какова будет скорость  $v$  тела, когда оно вернется в нижнюю точку?

3.3. Гирия массой  $m = 0,20$  кг вращается на нити в вертикальной плоскости. Определить разность  $\Delta F$  между наибольшим и наименьшим значениями силы натяжения нити.

3.4. Тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$  по горизонтальной поверхности, налетает на лежащий на ней клин массой  $M$  и скользит по нему вверх. Пренебрегая трением между телом и клином, а также между клином и горизонтальной поверхностью, определить наибольшую высоту  $h$  подъема тела.

3.5. Горизонтально летящая пуля массой  $m$  попадает в подвешенный на нити деревянный шар массой  $M$  и пробивает его, проходя через центр. Определить изменение  $\Delta W$  механической энергии системы в результате удара, если скорости пули до и после удара соответственно равны  $v_1$  и  $v_2$ .

4.1. Два однородных шара с массами  $m_1 = 40$  г и  $m_2 = 120$  г соединены стержнем, масса которого пренебрежимо мала. Расстояние между центрами шаров  $l = 20$  см. Определить момент инерции  $I$  системы относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через центр инерции системы. Шары считать материальными точками.

4.2. В медном диске радиуса  $R = 5,0$  см и толщиной  $h = 1,00$  мм сделаны симметрично относительно его центра два круглых выреза радиуса  $r = 2,00$  см каждый, причем их центры удалены от центра диска на  $a = 2,50$  см. Определить момент инерции  $I$  диска с вырезами относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Плотность меди  $\rho = 8,9$  г/см<sup>3</sup>.

4.3. Определить ускорения  $a_1$  и  $a_2$  грузов в задаче № 2-4 (стр. 22), учитывая момент инерции  $I$  уравнильного (неподвижного) блока и приняв его радиус равным  $R$ .

4.4. Каток в виде однородного цилиндра массой  $m = 2,00$  кг катится по горизонтальной поверхности под действием силы  $F = 10,0$  Н, приложенной к его оси. Полагая, что сила  $F$  направлена перпендикулярно оси катка и образует с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , определить ускорение  $a$ , с которым перемещается ось катка.

4.5. Массивный диск массой  $M$  плотно насажен на ось, подвешенную горизонтально на двух накрученных на нее нитях. Нити постепенно раскручиваются с оси, колесо, вращаясь вместе с осью, опускается. Найти силу натяжения  $T$  каждой из двух нитей и ускорение  $a$  центра диска, если его радиус  $R$ , а радиус оси  $r$ . Массой оси пренебречь.

4.6. Какая относительная ошибка  $\epsilon$  допущена в задаче № 2-3 (стр. 21) при вычислении ускорения вагона вследствие того, что не учтено вращение колес? Считать колеса дисками, суммарная масса которых равна  $m$ .

4.7. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках горизонтально расположенный стержень длиной  $l = 2,00$  м и массой  $m = 3,00$  кг. Скамейка с человеком вращается, совершая  $n_1 = 0,50$  об/с, при этом центр стержня находится на оси вращения. В результате поворота человеком стержня вокруг его центра в вертикальное положение частота вращения системы увеличилась до  $n_2 = 0,80$  об/с. Определить работу  $A$ , совершенную человеком для поворота стержня.

5.1. Определить приближенно ускорение силы тяжести на поверхности Марса, полагая, что его радиус вдвое меньше радиуса Земли, а масса составляет  $1/8$  от массы Земли.

5.2. Найти отношение скоростей двух космических кораблей, обращающихся вокруг Земли по круговым орбитам на расстояниях  $h_1$  и  $h_2$  от поверхности Земли.

5.3. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы забросить тело массой  $m' = 1000$  кг с поверхности Луны на Землю? Считать, что радиус Луны

в 4 раза меньше радиуса  $R$  Земли, а масса Луны составляет  $1/81$  от массы  $M$  Земли. Сравнить полученный результат с ответом к задаче № 5-4 (стр. 58).

5.4. Сколько времени  $t$  будет падать на Солнце тело с расстояния, равного радиусу земной орбиты? Начальную скорость тела принять равной нулю

## К главе 2. Молекулярная физика

6.1. Баллон емкостью  $V = 0,50$  л, содержащий воздух при нормальных условиях, герметически закрывают, после чего нагревают до температуры  $t = 400^\circ\text{C}$ . Определить давление  $p$  воздуха в баллоне при этой температуре. На сколько процентов увеличится давление газа в нагретом сосуде, если перед герметизацией в него попало  $m = 0,90$  г воды?

6.2. В баллоне емкостью  $V_1$  находится азот, а в баллоне емкостью  $V_2$  — водород. Давление и температура газов соответственно равны  $p_1, T_1, p_2, T_2$ . Баллоны соединяют трубкой пренебрежимо малого объема. Считая оба газа идеальными, найти установившееся давление  $p$  смеси после того, как в обоих баллонах газ примет температуру  $T$  окружающей среды.

6.3. Воздушный шар объемом  $V = 200$  м<sup>3</sup> наполнен гелием. При подъеме шара в атмосфере давление и температура гелия внутри шара остаются приблизительно равными давлению и температуре наружного воздуха (избыток гелия вытекает через клапан). Считая температуру воздуха не зависящей от высоты и равной  $t = 0^\circ\text{C}$ , определить максимальную высоту  $h_{\text{макс}}$  подъема шара, если масса его оболочки и снаряжения  $m = 20$  кг. Атмосферное давление у поверхности Земли принять равным  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5$  Па.

7.1. Определить максимальное число молекул азота ( $\sigma = 3,0 \cdot 10^{-10}$  м), находящихся в сферическом сосуде диаметром  $d = 5,00$  см, допускаемое состоянием вакуума.

7.2. Вычислить концентрацию молекул кислорода, если их средняя квадратичная скорость  $v_{\text{кв}} = 400$  м/с, а давление газа  $p = 760$  мм рт. ст.

7.3. В сосуде объемом  $V = 5,00$  л находится водород под давлением  $p = 1,00$  атм и при температуре  $T = 300$  К. Найти число молекул газа, скорости которых отличаются от наиболее вероятной скорости не свыше чем на 5 м/с ( $\Delta v = 10$  м/с).

8.1. Какое количество теплоты  $Q$  надо сообщить смеси газов, состоящей из  $m_1 = 100$  г водорода и  $m_2 = 200$  г гелия, для ее изохорного нагревания на  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ ?

8.2. Найти увеличение внутренней энергии  $\Delta U$  гелия при его изобарном расширении от  $V_1 = 10,0$  л до  $V_2 = 20,0$  л, если давление газа  $p = 2,0$  атм.

8.3. Воздух сжимают один раз изотермически, другой — адиабатически. Определить отношение работ сжатия газа, если в обоих случаях его объем уменьшается в  $N = 2,00$  раза.

8.4. Какое количество теплоты  $Q$  необходимо сообщить  $\nu$  молям идеального одноатомного газа, чтобы перевести его из состояния с характеризующим давлением  $p_1$ , объемом  $V_1$  и температурой  $T_1$ , в состояние с давлением  $p_2$  и объемом  $V_2$ ? Рассмотреть два случая, соответствующих путям  $abc$  и  $adc$  (см. рис. 8-2).

8.5. Выразить холодильный коэффициент  $\eta'$  (см. стр. 84) идеальной холодильной машины, работающей по обратному циклу Карно, через коэффициент полезного действия  $\eta$  тепловой машины, работающей по прямому циклу Карно в том же температурном интервале, что и данная холодильная машина.

8.6. Вода массой  $m = 2,00$  кг нагревается от  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  и при этой температуре обращается в пар. Найти изменение энтропии. Удельная теплоемкость и удельная теплота парообразования воды соответственно равны  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К),  $\lambda = 2,25 \cdot 10^6$  Дж/К.

9.1. Критическая температура углекислоты  $t_K = 31^\circ\text{C}$ , критическое давление  $p_K = 73$  атм. Определить критический объем  $V_K$  для  $\nu = 10,0$  молей углекислоты.

9.2. Две капли ртути радиусом  $r = 5,0$  мм каждая, двигаясь навстречу друг другу с одинаковой по модулю скоростью  $v = 0,50$  м/с, сливаются в одну каплю. Считая процесс слияния капель адиабатическим, определить изменение температуры  $\Delta t$  ртути. Удельная теплоемкость и коэффициент поверхностного натяжения ртути равны  $c = 0,14 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К),  $\alpha = 0,49$  Н/м.



9.3. Между двумя горизонтально расположенными стеклянными пластинами находится капля ртути массой  $m = 2,00$  г. С какой силой  $F$  надо прижимать друг к другу пластины, чтобы расстояние между ними стало равно  $h = 0,010$  мм? Считать, что ртуть полностью не смачивает стекло, а размеры пластин таковы, что при их сближении до расстояния  $h$  ртуть не доходит до краев пластин. Плотность и коэффициент поверхностного натяжения ртути равны  $\rho = 1,36 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0,49$  Н/м.

9.4. В воде на глубине  $h = 35$  см находится пузырек воздуха диаметром  $d = 0,10$  мм. Полагая атмосферное давление равным  $p_0 = 750$  мм рт. ст. и температуру воды  $t = 20^\circ$  С, определить давление  $p$  воздуха внутри пузырька.

### К главе 3. Электростатика

10.1. Сравнить силу  $F_{\text{эл}}$  электростатического взаимодействия в вакууме с силой  $F_{\text{г}}$  гравитационного взаимодействия: а) для двух однородных шаров одинаковой массы  $m = 100$  кг, по поверхности которых равномерно распределены одинаковые заряды  $q = 15$  СГС; б) для двух электронов.

10.2. Три одинаковых заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $q_0$  надо поместить в центре этого треугольника, чтобы вся система зарядов оказалась в равновесии? Будет ли устойчивым это равновесие?

10.3. Заряженная капелька масла радиусом  $r = 1,0 \cdot 10^{-3}$  мм находится в равновесии между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора, напряженность поля которого  $E = 7,85$  кВ/м. Приняв плотность масла  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>, определить заряд капельки.

10.4. Две непроводящие сферы радиусами  $R_1 = 3,0$  см и  $R_2 = 2,0$  см расположены в вакууме и несут равномерно распределенные по их поверхностям заряды  $q_1 = 1,00 \cdot 10^{-8}$  Кл и  $q_2 = -2,00 \cdot 10^{-8}$  Кл. Расстояние между центрами сфер  $r = 10,0$  см. Определить напряженность поля, созданного зарядами  $q_1$  и  $q_2$  в точке  $A$ , удаленной от центров обеих сфер соответственно на расстояния  $r_1$  и  $r_2$ . Решить задачу для двух случаев: а)  $r_1 = 9$  см,  $r_2 = 7$  см; б)  $r_1 = 2$  см,  $r_2 = 8$  см.

10.5. Две бесконечно длинные нити, расстояние между которыми  $r = 5,00$  см, равномерно заряжены с линейной плотностью заряда  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1,00 \times 10^{-8}$  Кл/м. Найти максимальное значение  $E_{\text{макс}}$  напряженности электрического поля для точек, принадлежащих плоскости симметрии нитей. Принять  $\epsilon = 1$ .

10.6. Два коаксиальных диска одинакового радиуса  $R = 10,0$  см заряжены равномерно поверхностными плотностями зарядов, равными  $\sigma_1 = 5,0$  мкКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = 0,35$  мкКл/м<sup>2</sup>, и сближены до расстояния  $d = 3,1$  мм. Определить силу электрического взаимодействия дисков, полагая, что они находятся в вакууме.

11.1. Принимая Землю за проводящий шар радиуса  $R = 6400$  км, определить заряд  $q$  и потенциал  $\phi$  Земли, если напряженность электрического поля около ее поверхности  $E = 100$  В/м. Принять для воздуха  $\epsilon = 1$ .

11.2. Из условия задачи № 10.4 определить потенциал электрического поля  $\phi$  в точке  $A$ . Решить задачу для двух случаев, указанных в условии.

11.3. Тонкое кольцо радиуса  $R$  несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью  $\tau$ . Найти потенциал  $\phi$  и напряженность  $E$  электрического поля на оси кольца как функции расстояния  $h$  от центра кольца.

11.4. Электрон с начальной энергией  $W = 500$  эВ движется издалека в вакууме по направлению к центру равномерно заряженной сферы радиуса  $R = 6,0$  см. Полагая заряд сферы  $q = -5,0$  нКл, определить минимальное расстояние  $r$ , на которое приблизится электрон к поверхности сферы.

11.5. Две одинаковые металлические пластины, имеющие положительный заряд  $Q_1$  и отрицательный заряд  $Q_2$ , сближены до расстояния, значительно меньшего их линейных размеров (рис. 11-4). Как распределятся заряды по четырем поверхностям пластин?

11.6. Точечный заряд  $q$  находится в центре уединенной сферической проводящей оболочки, внутренний и внешний радиусы которой равны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Определить ее потенциал  $\phi$ . Чему будет равен потенциал  $\phi'$  оболочки, если ее на короткое время соединить с Землей? Потенциал Земли принять равным нулю.

11.7. Точечный заряд  $q$  помещен в центр удвоенной проводящей сферической оболочки через небольшое отверстие. Полагая внутренний и внешний радиусы оболочки равными  $r_1$  и  $r_2$ , определить минимальную работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы вывести заряд наружу и удалить в бесконечность.

11.8. Решить предыдущую задачу, полагая, что проводящая оболочка заземлена. Потенциал Земли считать равным нулю.

12.1. Металлический шар радиуса  $r = 5,00$  см, несущий заряд  $q = 2,00$  нКл, покрыт слоем однородного и изотропного диэлектрика ( $\epsilon = 6,0$ ) толщиной  $a = 1,00$  см. Найти напряженности электрического поля  $E_1$  и  $E_2$  в точках, удаленных от центра шара соответственно на  $r_1 = 5,50$  см и  $r_2 = 7,00$  см, а также поверхностную плотность  $\sigma'$  связанных зарядов на внешней поверхности диэлектрика

12.2. На плоский конденсатор, в котором диэлектриком служит слюда ( $\epsilon = 7,5$ ), а расстояние между пластинами  $d = 1,00$  мм, наложено напряжение  $U = 1000$  В. Определить плотность энергии электрического поля конденсатора.

12.3. Какой энергией обладало бы электрическое поле медного шарика радиусом  $r = 1,00$  см, если бы из каждого его атома удалили по одному электрону?

12.4. Используя закон сохранения энергии, решить задачу № 11,7, полагая, что проводящая сферическая оболочка перед выведением из неё заряда  $q$  соединяется на короткое время с Землей. Потенциал Земли принять равным нулю.

12.5. Как изменится емкость плоского конденсатора, помещенного в металлическую коробку (см. задачу № 12-9, стр. 140), если последнюю соединить с одной из пластин?

12.6. Определить разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$  в цепи, изображенной на рис. 12-10, при разомкнутом ключе  $K$ . Необходимые данные взять из условия задачи № 12-11 (стр. 142)

#### К главе 4 Постоянный ток

13.1. Какой заряд пройдет по проводнику сопротивлением  $R = 1,00$  кОм при равномерном нарастании напряжения на его концах от  $U_1 = 15$  В до  $U_2 = 25$  В в течение  $t = 20$  с?

13.2. Медный диск радиуса  $r = 3,00$  см с концентрическим вырезом радиуса  $r_0 = 3,0$  мм плотно насажен на стальной цилиндрический стержень и также плотно вставлен в алюминиевую трубку. Между трубкой и стержнем через диск идет ток. Определить сопротивление  $R$  диска, если его толщина  $d = 1,00$  мм, а температура  $t = 20^\circ$  С.

13.3. Определить э. д. с. и внутреннее сопротивление гальванического элемента, если при замыкании на сопротивление  $R_1 = 1,80$  Ом он дает ток  $I_1 = 0,70$  А, а при замыкании на сопротивление  $R_2 = 2,30$  Ом — ток  $I_2 = 0,56$  А. Чему будет равен ток  $I_0$  короткого замыкания?

13.4. Сопротивление каждого ребра проводящего куба равно  $r$ . Чему равно сопротивление  $R$  куба, если он включен в цепь своими вершинами, лежащими на пространственной диагонали?

13.5. Если в схеме, изображенной на рис. 13-10, переключить вольтметр, присоединив его к зажимам источника, то амперметр будет показывать силу тока  $I$  в резисторе  $R$ . При этом вольтметр будет давать показание  $U$ , превышающее напряжение на резисторе  $R$  за счет падения напряжения на амперметре. Полагая сопротивление амперметра равным  $R_A$ , определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении сопротивления  $R$  без учета падения напряжения на амперметре.

13.6. Определить силу тока на всех участках цепи, изображенной на рис. 13-11, если точки  $a$ ,  $b$  соединить проводником пренебрежимо малого сопротивления.

13.7. При включении в сеть электроплитки с номинальной мощностью  $P_0 = 700$  Вт разность потенциалов на клеммах розетки уменьшилась, а фактическая мощность электроплитки стала  $P_1 = 580$  Вт. Какова мощность двух таких плиток, включенных параллельно в розетку? Изменением сопротивления плиток при изменении их накала пренебречь.

14.1. По медному проводнику сечением  $S = 1,00 \text{ мм}^2$  идет ток силой  $I = 60 \text{ А}$ . Определить среднюю скорость направленного движения электронов в проводнике. Считать число свободных электронов равным числу атомов меди.

14.2. На пластины плоского конденсатора наложено напряжение  $U = 500 \text{ В}$ . Гальванометр, включенный в цепь конденсатора, показывает ток силой  $I = 18 \text{ нА}$ , возникающий вследствие ионизации воздуха между пластинами рентгеновским излучением, причем насыщение не имеет места. Определить концентрацию  $n$  ионов, если площадь каждой пластины  $S = 200 \text{ см}^2$ , а расстояние между пластинами  $d = 4,00 \text{ см}$ . Ионы воздуха считать одновалентными, а их подвижности  $u_+ = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  и  $u_- = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

## К главе 5. Электромагнетизм

15.1. Часть длинного прямого провода согнута в виде полуокружности радиуса  $R = 126 \text{ мм}$ . Определить индукцию магнитного поля в центре кривизны, если по проводу идет ток силой  $I = 4,00 \text{ А}$ .

15.2. По тонкому проводу, изогнутому в виде прямоугольника со сторонами  $a = 30 \text{ см}$ ,  $b = 40 \text{ см}$ , идет ток силой  $I = 6,00 \text{ А}$ . Определить индукцию магнитного поля тока в центре симметрии фигуры.

15.3. По двум длинным параллельным проводам текут в противоположных направлениях одинаковые токи силой  $I = 15,0 \text{ А}$ . Расстояние между проводами  $a = 30 \text{ см}$ . Найти максимальное значение индукции магнитного поля для точек, принадлежащих плоскости симметрии проводов.

15.4. Решить предыдущую задачу при условии, что токи текут в одном направлении.

15.5. Тонкое металлическое полукольцо радиуса  $R = 25 \text{ см}$  помещено в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 30 \text{ мкТ}$ , так что вектор  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, содержащей полукольцо. Определить магнитную силу, действующую на полукольцо, если по нему идет ток силой  $I = 100 \text{ А}$ .

15.6. Два проводящих кольца одинакового радиуса  $R$  расположены в параллельных плоскостях на расстоянии  $a$  друг от друга. Определить силу взаимодействия между кольцами, если по ним текут одинаково направленные токи  $I_1 = I_2 = I$ , в двух случаях: 1)  $a \ll R$ , 2)  $a \gg R$ .

15.7. Используя условие задачи № 15-6 (стр. 84), определить работу  $A$ , которую совершат силы магнитного поля, приложенные к рамке, если последняя повернется вокруг оси  $OO'$  на угол  $\alpha$ .

16.1. Автомобиль едет со скоростью  $v = 72 \text{ км/ч}$  в направлении, перпендикулярном плоскости магнитного меридиана. Определить э. д. с. индукции, возникающую в установленной на машине антенне, расположенной вертикально и имеющей длину  $l = 50 \text{ см}$ , вследствие движения автомобиля в магнитном поле Земли. Принять горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли равной  $B_T = 0,05 \text{ мТ}$ . Что покажет установленный в автомобиле микровольтметр, если его присоединить к концам антенны?

16.2. Плоская прямоугольная катушка со сторонами  $a = 15 \text{ см}$  и  $b = 30 \text{ см}$  имеет  $N = 100$  витков. Катушка вращается вокруг одной из средних линий прямоугольника в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 20 \text{ мТ}$ , совершая  $n = 40 \text{ об/с}$ . Определить максимальное значение э. д. с. индукции в катушке, если ее ось вращения перпендикулярна направлению поля.

16.3. Металлический стержень длины  $l = 400 \text{ мм}$  вращается с частотой  $n = 50 \text{ об/с}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 10,0 \text{ мТ}$  в плоскости, перпендикулярной направлению поля, вокруг оси, проходящей через его середину. Определить разность потенциалов  $U$ , возникающую между одним из концов стержня и его серединой. Чему равна разность потенциалов  $U'$  между концами стержня?

16.4. Какое количество электричества  $q$  протечет по рамке  $abcd$ , рассматриваемой в условии задачи № 16-1 (стр. 190), за время  $\Delta t = 0,10 \text{ с}$ , если проводник  $ad$  двигался равномерно, а сопротивление рамки оставалось в течение промежутка  $\Delta t$  практически постоянным и равным  $R = 1,00 \text{ Ом}$ ?

16.5. Решить предыдущую задачу при условии, что сопротивление рамки равномерно возрастало в течение промежутка  $\Delta t$  от  $R_0 = 1,0 \text{ Ом}$  до  $R_t = 3,0 \text{ Ом}$ .

16.6. На цилиндрический картонный каркас длиной  $l = 25,0 \text{ см}$  и диаме-

тром  $D = 2,0$  см намотан в два слоя провод диаметром  $d = 0,20$  мм с весьма тонкой изоляцией так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность этой катушки.

16.7. Катушка с медным проводом подключена к источнику постоянного напряжения. Через какой промежуток времени  $\tau$  сила тока в катушке достигнет  $\alpha = 0,9$  установившегося значения? Необходимые данные взять из условия предыдущей задачи.

17.1. Железный тороид сечением  $S = 100$  мм<sup>2</sup> и средним диаметром  $D = = 150$  мм имеет две обмотки, состоящих из  $N_1 = 500$  и  $N_2 = 40$  витков. По первичной обмотке пропуская постоянный ток силой  $I = 0,30$  А. В цепь вторичной обмотки включен баллистический гальванометр. Если изменить направление тока в первичной обмотке, то при этом через баллистический гальванометр проходит заряд  $q = 120$  мкКл. Зная, что общее сопротивление вторичной обмотки и гальванометра  $R = 50$  Ом, определить магнитную проницаемость  $\mu$  железа при данных условиях.

17.2. Железный тороид сечением  $S = 400$  мм<sup>2</sup> и средним диаметром  $D = = 300$  мм имеет поперечную прорезь шириной  $a = 2,0$  мм. На тороид нанесена обмотка с числом витков  $N = 1800$ . Когда по обмотке пустили ток силой  $I = = 1,00$  А, индукция магнитного поля в зазоре стала  $B = 0,65$  Т. Определить магнитную проницаемость  $\mu$  железа при данных условиях.

17.3. Определить энергию магнитного поля, заключенную в сердечнике тороида из условия задачи № 17.1.

17.4. Коаксиальный кабель состоит из тонкой металлической трубки длиной  $l$  и радиуса  $R$  ( $R \ll l$ ) и расположенного вдоль ее оси провода радиуса  $r$ . Силы токов в трубке и проводе равны, направления противоположны. Определить энергию магнитного поля кабеля при силе тока, равной  $I$ . Магнитным полем внутри металла пренебречь, а магнитную проницаемость  $\mu$  среды, разделяющей проводники, принять равной единице.

18.1. Пучок электронов влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам длиной  $l = 5,00$  см. Напряженность электрического поля конденсатора  $E = 40$  кВ/м. Определить кинетическую энергию  $T$  электронов, влетающих в конденсатор, если, пройдя его, пучок отклоняется от первоначального направления на угол  $\alpha = 22^\circ$ .

18.2. Пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 2,0$  кВ, электрон влетел в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 1,6$  мТ перпендикулярно линиям индукции поля. Определить радиус  $r$  окружности, по которой будет двигаться электрон, и его момент импульса  $L$ .

18.3. В электронолуочевой трубке пучок электронов, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 15$  кВ, движется затем по направлению от анода к экрану и создает в центре последнего световое пятно. При наложении однородного магнитного поля с индукцией  $B = 0,45$  мТ, направленного перпендикулярно оси трубки, пятно на экране сместилось на  $a = 50$  мм. Зная, что экран удален от анода на  $l = 300$  мм, определить удельный заряд  $e/m$  электрона.

18.4. Электрон движется со скоростью  $v = 9,0 \cdot 10^8$  м/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,63$  мТ так, что угол между векторами  $v$ ,  $B$  весьма мал. Определить шаг  $h$  винтовой линии, по которой движется электрон.

18.5. Определить скорость  $v$  и импульс  $p$  заряженной частицы, которая прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 1,5$  МВ. Рассмотреть два случая, соответствующие: а) протону и б) электрону.

## К главе 6. Колебания и волны

19.1. Определить максимальную скорость и максимальное ускорение точки, колеблющейся по закону  $x = 2 \cos \pi(t + 1)$  (смещение дано в сантиметрах).

19.2. Точка участвует одновременно в трех колебаниях, происходящих по одной прямой и выраженных уравнениями.  $x_1 = 2 \cos t$ ;  $x_2 = -2 \sin(t - \pi/4)$ ;  $x_3 = 2 \cos(t + \pi/2)$  (смещение  $x$  дано в сантиметрах). Определить амплитуду  $A_0$  и начальную фазу  $\varphi_0$  результирующего колебания.

19.3. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выраженных уравнениями:  $x = 3 \sin 5t$ ,  $y = 2 \sin(5t + \pi/2)$ . Найти уравнение траектории и показать, в каком направлении происходит движение.

19.4. Математический маятник, подвешенный к потолку вагона, совершает колебания. Найти относительное изменение периода колебаний маятника, если вагон начнет двигаться в горизонтальном направлении с постоянным ускорением  $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ .

19.5. Тело, неподвижно висящее на цилиндрической пружине, растягивает ее на  $\Delta x = 40 \text{ мм}$ . Затем тело было смещено из положения равновесия по вертикали вниз на  $\Delta x_0 = 20 \text{ мм}$  и отпущено, в результате чего оно стало совершать гармонические колебания. Определить скорость  $v$  тела в момент прохождения им положения равновесия.

19.6. На концах тонкого стержня длиной  $l = 50 \text{ см}$  укреплены по одинаковому грузику. Под действием силы тяжести система колеблется в вертикальной плоскости вокруг оси, которая делит длину стержня в отношении  $\alpha = 4:1$ . Пренебрегая массой стержня, определить период колебаний маятника.

19.7. Тонкий диск подвешен в горизонтальной плоскости на трех параллельных нитях одинаковой длины  $l$  так, что точки подвеса расположены симметрично относительно его центра. Определить период  $T$  крутильных колебаний диска, если амплитуда их мала.

19.8. Найти время  $t$ , в течение которого энергия колебаний камертона с частотой  $\nu = 440 \text{ Гц}$  уменьшится в  $N = 1,00 \cdot 10^8$  раз, если логарифмический декремент затухания  $\lambda = 1,00 \cdot 10^{-3}$ .

20.1. Медный стержень длиной  $l = 1,00 \text{ м}$  закреплен на концах. Найти частоты собственных продольных колебаний стержня.

20.2. Наблюдатель, стоящий на шоссе, слышит звуковой сигнал проезжающего мимо автомобиля. Когда он приближается, частота звука, регистрируемого наблюдателем,  $\nu_1 = 3,00 \text{ кГц}$ ; когда удаляется, регистрируемая частота  $\nu_2 = 2,50 \text{ кГц}$ . Каковы скорость  $u$  автомобиля и частота колебаний  $\nu$  источника звука? Скорость звука принять  $c = 340 \text{ м/с}$ .

21.1. Заряженный конденсатор емкостью  $C = 40 \text{ мкФ}$  соединяют при помощи ключа с катушкой индуктивностью  $L = 100 \text{ мГ}$ . Пренебрегая омическим сопротивлением полученного колебательного контура, определить время  $t$ , по истечении которого сила тока в контуре достигнет максимального значения.

21.2. В цепи, состоящей из последовательно включенных резистора сопротивлением  $R = 1,00 \text{ кОм}$ , катушки индуктивностью  $L = 300 \text{ мГ}$  и конденсатора переменной емкости, действует синусоидальная э. д. с. с действующим значением  $\mathcal{E} = 60 \text{ В}$  и частотой  $\nu = 50 \text{ кГц}$ . Определить значение емкости  $C$  конденсатора, при котором в цепи наступит явление резонанса. Определить также действующее значение силы тока  $I_{\text{рез}}$  в цепи при резонансе.

## К главе 7. Оптика

22.1. Показать, что кажущаяся глубина водосма, если смотреть по вертикальному направлению, составляет  $3/4$  его истинной глубины.

22.2. Луч, дважды преломляясь на гранях равнобедренной призмы, выходит из нее, будучи отклоненным на  $\delta = 37^\circ 10'$  от первоначального направления. Определить преломляющий угол  $A$  призмы, если внутри призмы луч идет параллельно ее основанию. Показатель преломления  $n = 1,5$ .

22.3. Перемещая линзу между светящимся предметом и экраном, получили при одном ее положении увеличенное изображение предмета, при другом — уменьшенное. Зная, что расстояние между предметом и экраном  $l = 1000 \text{ мм}$ , а расстояние между двумя положениями линзы, соответствующими увеличенному и уменьшенному изображениям,  $s = 650 \text{ мм}$ , определить оптическую силу  $\Phi$  линзы.

22.4. Объектив телескопа состоит из двух сложенных вплотную линз собирающей с фокусным расстоянием  $f_1 = 2,00 \text{ м}$  и рассеивающей с  $f_2 = -4,00 \text{ м}$ . Какой оптической силы следует взять окуляр, чтобы телескоп давал увеличение  $\Gamma = 100$ ?

22.5. Точечный изотропный источник  $S$  света находится на высоте  $h$  над горизонтальной поверхностью. Во сколько раз изменится освещенность поверхности в точке  $A$ , находящейся под источником, если на расстоянии от  $S$ , равном  $h$ , поместить вертикально расположенное плоское зеркало, отражающее свет в  $A$ ? Коэффициент отражения принять равным единице.

22.6. Светильник в виде шара из молочного стекла создает на расстоянии  $r = 5,0$  м при нормальном падении лучей освещенность  $E = 6,0$  лк. Определить яркость  $B$  светильника, если его диаметр  $D = 20$  см

22.7. Источник света имеет форму цилиндра длиной  $l = 40$  м и диаметром  $D = 30$  мм, расположенного параллельно освещаемой им плоской поверхности на расстоянии  $h = 1,00$  м. Его яркость  $B = 4,2 \cdot 10^3$  кд/м<sup>2</sup>. Полагая, что источник излучает свет по закону Ламберта, определить освещенность  $E$  поверхности в точке, ближайшей к середине источника.

23.1. Плоскопараллельная пластинка с показателем преломления  $n = 1,50$  освещается параллельным пучком монохроматического света ( $\lambda = 0,59$  мкм). При постепенном увеличении угла  $i$  падения лучей интерференционная картина в отраженном свете изменяется. Зная, что при изменении угла  $i$  в некотором интервале имеются лишь два значения  $i_1 = 30^\circ$  и  $i_2 = 34^\circ$ , соответствующие максимальной интенсивности отраженного света, определить толщину  $h$  пластинки.

23.2. Плосковыпуклая линза ( $n = 1,50$ ) с оптической силой  $\Phi = 2,00$  дп выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус четвертого темного кольца Ньютона в отраженном свете  $\rho = 0,70$  мм. Определить длину световой волны  $\lambda$ .

24.1. Между точечным источником монохроматического света ( $\lambda = 0,50$  мкм) и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием радиусом  $r_1 = 0,75$  мм. Расстояние  $R$  от источника до диафрагмы равно расстоянию  $r_0$  от диафрагмы до экрана:  $R = r_0 = 0,75$  м. Увеличится или уменьшится освещенность экрана в точке  $P$ , лежащей против центра отверстия, если его радиус увеличить до  $r_2 = 0,87$  мм?

24.2. На дифракционную решетку, содержащую  $N = 400$  штрихов на  $\Delta l = 1,00$  мм, падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 0,60$  мкм). Найти общее число  $k_{\max}$  дифракционных максимумов, которые дает эта решетка, и угловое положение  $\varphi_{\max}$  последних максимумов

24.3. Определить максимальный размер  $a_{\max}$  зерен эмульсии фотопленки, при котором еще можно полностью использовать разрешающую силу телеобъектива фотоаппарата с относительным отверстием  $D/f = 1 : 3,5$ . Длину световой волны, на которую приходится максимум чувствительности фотопленки, принять  $\lambda = 0,55$  мкм

25.1. Угол полной поляризации при отражении от кристалла кварца соли  $\varphi = 57^\circ 05'$ . Определить скорость  $v$  распространения света в этом кристалле.

25.2. Степень поляризации частично поляризованного света  $P = 0,25$ . Найти отношение интенсивности  $I_p$  плоскополяризованной составляющей этого света к интенсивности  $I_n$  естественной составляющей.

25.3. Естественный свет падает на систему из двух последовательно расположенных николей, главные плоскости которых образуют между собой угол  $\varphi = 50^\circ$ . Зная, что при падении на каждый николь линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания  $\tau = 0,90$ , определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения данной системы.

26.1. Длины волн  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{02}$ , соответствующие максимумам спектральной плотности энергетической светимости в спектрах двух абсолютно черных тел, различаются на  $\Delta\lambda = \lambda_{02} - \lambda_{01} = 0,50$  мкм. Определить температуру  $T_2$  второго тела, если температура первого  $T_1 = 2,50 \cdot 10^3$  К.

26.2. Вольфрамовая нить диаметром  $d_1 = 0,10$  мм соединена последовательно с вольфрамовой нитью неизвестного диаметра. Нити накаливаются в вакууме током, при этом их установившиеся температуры  $T_1 = 2,00 \cdot 10^3$  К,  $T_2 = 3,00 \cdot 10^3$  К. Найти диаметр  $d_2$  второй нити. Коэффициенты полного излучения вольфрама и его удельное сопротивление, соответствующие данным температурам, равны  $a_1 = 0,260$ ,  $a_2 = 0,334$ ,  $\rho_1 = 5,91 \cdot 10^{-7}$  Ом  $\cdot$  м,  $\rho_2 = 9,62 \cdot 10^{-7}$  Ом  $\cdot$  м.

27.1. Найти длину волн  $\lambda_{\min}$  коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость электронов, подлетающих к антикатоде трубки,  $v = 0,85 c$ , где  $c$  — скорость света.

27.2. Параллельный пучок монохроматических лучей ( $\lambda = 0,662$  мкм) падает нормально на зачерненную поверхность ( $\rho = 0$ ) и производит давление  $P = 3,0 \cdot 10^{-7}$  Па. Определить концентрацию  $n$  фотонов в световом пучке.

27.3. Плоская световая волна с интенсивностью  $I$  освещает шар с зеркаль-

ной поверхностью радиуса  $R$  ( $R \gg \lambda$ ). Приняв, что коэффициент отражения  $p$  не зависит от угла падения, определить силу светового давления, действующую на шар.

### К главе 8. Атомная и ядерная физика

28.1. Вычислить частоты  $\nu_1, \nu_2$  обращения электрона на первой и второй боровских орбитах атома водорода, а также частоту  $\nu$  фотона, соответствующую переходу электрона между этими орбитами.

28.2. Найти интервал длин волн, в котором заключена спектральная серия Бальмера для атома водорода.

28.3. Определить скорость  $v$ , которую приобретает покоящийся ион гелия  $\text{He}^+$  в результате излучения фотона при переходе из первого возбужденного состояния в основное.

29.1. Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы его де-бройлевская длина волны стала  $\lambda = 1,00 \text{ \AA}$ ?

29.2. При каком значении кинетической энергии  $T$  де-бройлевская длина волны  $\lambda$  электрона равна его комптоновской длине волны  $\lambda_c$ ?

29.3. Частица находится в возбужденном состоянии ( $n = 3$ ) в одномерном потенциальном ящике шириной  $l$ . В каких точках интервала  $0 < x < l$  плотность вероятности нахождения частицы имеет экстремальные значения?

29.4. Вычислить полную энергию  $W$  и орбитальный момент импульса  $M_l$  электрона, находящегося в  $2p$ -состоянии в атоме водорода.

29.5. Найти максимально возможный полный механический момент ( $M_l$ )<sub>макс</sub> атома натрия, если его валентный электрон имеет главное квантовое число  $n = 4$ .

30.1. На какую часть уменьшится активность  $a$  изотопа  $^{235}\text{U}$  за время  $\Delta t$ ? Рассмотреть случаи: 1)  $\Delta t = 1000$  лет; 2)  $\Delta t = T$ , где  $T = 7,1 \cdot 10^8$  лет — период полураспада  $^{235}\text{U}$ ; 3)  $\Delta t = 10^9$  лет.

30.2. В урановой руде на  $m_1 = 1,00$  кг урана  $^{238}\text{U}$  приходится  $m_2 = 0,32$  кг свинца  $^{206}\text{Pb}$ . Определить возраст  $t$  урановой руды, считая, что весь свинец является конечным продуктом распада уранового ряда. Период полураспада урана-238  $T = 4,5 \cdot 10^9$  лет.

31.1. Сколько тепла выделяется при образовании  $m = 1$  г гелия в результате ядерной реакции  $^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He} + ^1_0\text{n}$ ?

31.2. Какова наименьшая энергия  $\epsilon_{\text{мин}}$  фотона, способного вызвать рождение пары позитрон—электрон, при его взаимодействии с покоившейся частицей? Рассмотреть два случая, соответствующих взаимодействию фотона со следующими частицами: а) электроном; б) протонам.

### Ответы

1.1.  $v = s/2t = 3,0$  км/ч. 1.2.  $s = 2v_0t$ . 1.4.  $s = v_0^2 \sin 2\alpha/g - l$ . У к а з а н и е: использовать симметрию задачи, обусловленную зеркальным отражением мяча от стены при упругом ударе. 1.5.  $\alpha = \arcsin (v_0/\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}) = 26^\circ$ ;  $a_n = gv_0/\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = 4,4$  м/с<sup>2</sup>;  $a_\tau = g^2t/\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = 8,8$  м/с<sup>2</sup>. 1.6.  $a = r\sqrt{(d^2\varphi/dt^2)^2 + (d\varphi/dt)_{t=t_0}^4} = 1,6$  м/с<sup>2</sup>;  $\alpha = 14^\circ$ . 2.1.  $a_2 = ma_1g/(m_1 + F_1) = 4,9$  м/с<sup>2</sup>;  $F_2 = F_1mg/(m_1 + F_1) = 1$  кгс. 2.2.  $F = mg(1 - 4s^2/g^2t^4) = 6$  Н. 2.3.  $v = \sqrt{gR \operatorname{ctg} \alpha}$ . 2.4.  $n = (1/2\pi)\sqrt{l/g} = 0,41$  с<sup>-1</sup>. У к а з а н и е: учесть, что для малых углов  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ . 2.5.  $v = \sqrt{\mu gR} = 17$  м/с; 2.6. 1)  $a = F/(M + m) = 0,33$  м/с<sup>2</sup>;  $F_{\text{тр}} = FM/(M + m) = 6,5$  Н; 2)  $F_{\text{тр}} = \mu mg = 9,8$  Н;  $a_1 = \mu mg/M = 0,5$  м/с<sup>2</sup>;  $a_2 = F/m - \mu g = 2,0$  м/с<sup>2</sup>. 2.7.  $a_1 = 2(2m_1 - m_2)\sqrt{g^2 + a^2/(4m_1 + m_2)}$ ;  $a_2 = (2m_1 - m_2)\sqrt{g^2 + a^2/(4m_1 + m_2)}$ ;  $T = 3m_1m_2\sqrt{g^2 + a^2/(4m_1 + m_2)}$ . У к а з а н и е: применить систему отсчета, связанную с вагоном. 3.1.  $v_1 = [m'(v + u) + mv]/(m + m')$ ;  $v_2 = v$ ;  $v_3 = [m'(v - u) + mv]/(m + m')$ . 3.2.  $h = v_0^2/2g(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 4,2$  м;  $v = v_0(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)/(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 8$  м/с. 3.3.  $\Delta F = 6mg = 12$  Н. 3.4.  $h = Mv^2/2(M + m)g$ . 3.5.  $\Delta W = -m[v_1^2 - v_2^2 - (v_1 - v_2)^2 m/M]/2$ . 4.1.  $l = m_1m_2l^2/(m_1 +$

+  $m_2$ ) =  $1,2 \cdot 10^4$  г · см<sup>2</sup>. 4.2.  $I = 0,5$  прл [ $R^4 - 2r^2(r^2 + a^2)$ ] =  $7,6 \cdot 10^3$  г · см<sup>2</sup>.  
 У к а з а н и е: использовать аддитивность момента инерции. 4.3.  $a_1 =$   
 $= \frac{2(m_1 - m_2)g}{4m_1 + m_2 + 4I/R_2}$ ;  $a_2 = \frac{(2m_1 - m_2)g}{4m_1 + m_2 + 4I/R_2}$ . 4.4.  $a = 2F \cos \alpha / 3m = 0,29$  м/с<sup>2</sup>.  
 4.5.  $T = MgR^2/2(R^2 + 2r^2)$ ;  $a = 2gr^2/(R^2 + 2r^2)$ . 4.6.  $v \approx m/2M$ . 4.7.  $A =$   
 $= \pi^2 m l^2 n_1 n_2 / 6 = 7,9$  Дж. 5.1.  $g_M = M_M R_3^3 g / M_3 R_M \approx 0,5$  г. 5.2.  $v_2/v_1 =$   
 $= \sqrt{(R_3 + h_1)/(R_3 + h_2)}$ . 5.3.  $A = 0,047 \gamma M m' / R \approx 0,3 \cdot 10^{10}$  Дж. 5.4.  $t =$   
 $= T/4\sqrt{2} = 65$  сут ( $T$  — период обращения Земли вокруг Солнца). У к а з а н и е:  
 рассматривая падение тела на Солнце как предельный случай движения по эллипсу,  
 применить третий закон Кеплера.

6.1.  $p = p_0 T/T_0 = 2,48 \cdot 10^5$  Па;  $\Delta p/p = mRT_0/\mu V p_0 = 2,2$  или 220%.  
 6.2.  $p = T(p_1 V_1/T_1 + p_2 V_2/T_2)/(V_1 + V_2)$ . 6.3.  $h_{\text{макс}} = (RT/\mu g) \ln[(\mu_v - \mu_r) p_0 V/mRT] = 30$  км. У к а з а н и е: применить закон Архимеда и барометрическую формулу, выразить подъемную силу  $F$  как функцию  $F(h)$ . 7.1.  $N =$   
 $= d^2/6\sqrt{2}\sigma^2 = 0,33 \cdot 10^{16}$ . 7.2.  $n = 3Rp/k\mu_{\text{кв}}^2 = 3,6 \cdot 10^{26}$  м<sup>-3</sup>. 7.3.  $\Delta N =$   
 $= 4\Delta v p V \sqrt{\mu}/\sqrt{\pi k T V 2RT} = 6,35 \cdot 10^{20}$ . 8.1.  $Q = (R/2)(i_1 m_1/\mu_1 + i_2 m_2/\mu_2)\Delta t =$   
 $= 17$  кДж. 8.2.  $\Delta U = ip\Delta V/2 = 3,0$  кДж. 8.3.  $A_2/A_1 = (1 - NV^{-1}) \times$   
 $\times [(1 - \nu) \ln N]^{-1} = 1,15$ . 8.4.  $Q_1 = (3/2) vRT_1 [(p_2 V_2 - p_1 V_1)/p_1 V_1] + p_1 (V_2 -$   
 $- V_1)$ ;  $Q_2 = (3/2) vRT_1 [(p_2 V_2 - p_1 V_1)/p_1 V_1] + p_2 (V_2 - V_1)$ . У к а з а н и е:  
 применить первое начало термодинамики. 8.5.  $\eta' = (1 - \eta)/\eta$ . 8.6.  $\Delta S =$   
 $= mc \ln(T_2/T_1) + \lambda m/T_2 = 14$  кДж/К. 9.1.  $V_{\text{к}} = 3vRT_{\text{к}}/8p_{\text{к}} = 1,3 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>.  
 9.2.  $\Delta t = [v_2 + 3(2 - \sqrt{3})\alpha/2\rho r]/c = 1,8 \cdot 10^{-3}$  К. У к а з а н и е: согласно  
 закону сохранения энергии суммарная убыль кинетической и поверхностной  
 энергии системы, происходящая в процессе слияния капель, равна приращению  
 энергии теплового движения молекул ртути. 9.3.  $F = 2\alpha m/\rho h^2 =$   
 $= 1,4$  кН. 9.4.  $p = p_0 + \rho gh + 4\alpha/d - p_{\text{насыщ}} = 793$  мм рт. ст. У к а з а н и е:  
 внутри пузырька находится смесь газов: воздуха и насыщающего пара воды.  
 По закону Дальтона,  $p_{\text{см}} = p + p_{\text{насыщ}}$ , где значение  $p_{\text{насыщ}}$  находится из  
 таблиц при  $t = 20^\circ \text{C}$   $p_{\text{насыщ}} = 17,5$  мм рт. ст.

10.1.  $F_{21}/F_c = q^2/4\pi\epsilon_0 \gamma m^2$ ; а) 0,34; б)  $4,2 \cdot 10^{44}$ . 10.2.  $q_0 = q\sqrt{3}$ ; равновесие  
 будет неустойчивым. 10.3.  $q = 4\pi r^3 \rho/3E = 4,8 \cdot 10^{-19}$  Кл. 10.4. а)  $E =$   
 $= \sqrt{[(q_1/r_1^2)^2 + (q_2/r_2^2)^2 + q_1 q_2 (r_1^2 + r_2^2 - r^2)/r_1^2 r_2^2]/4\pi\epsilon_0} = 3,6 \cdot 10^3$  В/м;  
 б)  $E = |q_2|/4\pi\epsilon_0 r_2^2 = 2,8 \cdot 10^3$  В/м. 10.5.  $E_{\text{макс}} = \tau/\pi\epsilon_0 r = 7,2$  кВ/м. У к а з а н и е:  
 выразить напряженность  $E$  электрического поля нитей в произвольной  
 точке плоскости симметрии как функцию расстояния этой точки до плоскости,  
 содержащей нити. 10.6.  $F = \pi\sigma_1 \sigma_2 R^2/2\epsilon_0 = 3,1$  мН. 11.1.  $q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E =$   
 $= 4,5 \cdot 10^6$  Кл;  $\varphi = ER = 6,4 \cdot 10^8$  В. 11.2. а)  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1/r_1 + q_2/r_2) =$   
 $= -160$  В; б)  $\varphi = (1/4\pi\epsilon_0)(q_1/R_1 + q_2/r_2) = 75$  В. 11.3.  $\varphi = \tau R/2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}$ ;  
 $E = \tau R h/2\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}$ . У к а з а н и е: сначала найти потенциал, а затем,  
 используя соотношение (11.6), — напряженность. 11.4.  $r = eq/4\pi\epsilon_0 W =$   
 $= R = 3,0$  см. 11.5.  $q_1 = q_4 = (|Q_1| - |Q_2|)/2$ ;  $q_2 = -q_3 = (|Q_1| + |Q_2|)/2$   
 (обозначения зарядов соответствуют рис. 11-4). У к а з а н и е: сначала, приме-  
 нив теорему Гаусса и свойство проводников, в силу которого  $E_{\text{внутр}} = 0$ , до-  
 казать, что  $q_2 = -q_3$ . Затем, используя метод, примененный при решении зада-  
 чи № 11-4 (стр. 117), вывести соотношение  $q_1 = q_4$ . 11.6.  $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r_2$ ;  
 $\varphi' = 0$ . У к а з а н и е: учесть заряды, индуцированные на внутренней и внеш-  
 ней поверхностях оболочки. 11.7.  $A = q^2(r_2 - r_1)/8\pi\epsilon_0 r_1 r_2$ . У к а з а н и е:  
 задачу можно решить двумя способами: 1) искомая работа равна по модулю и  
 противоположна по знаку работе сил электрического поля, индуцированных на  
 поверхностях оболочки зарядов, совершаемой по перемещению заряда  $q$ , т. е.

$$A = - \int_0^q (\varphi_1 - \varphi_2) dq, \text{ где } \varphi_1 \text{ — потенциал поля индуцированных зарядов в}$$

центре оболочки,  $\varphi_2 = \varphi_\infty = 0$ ; 2) искомая работа равна изменению энергии  
 электрического поля системы рассматриваемых тел, т. е.  $A = -\Delta W$ , где  $W =$   
 $= \int w dV$ , а объемная плотность энергии  $w$  определяется формулой (12.11). При  
 интегрировании необходимо учесть отсутствие поля внутри проводящей обо-



лочки. 11.8.  $A = q^2/8\pi\epsilon_0 r_1$ . 12.1.  $E_1 = q/e_0 r_1^2 = 0,12$  кВ/м;  $E_2 = q/e_0 r_2^2 = 0,46$  кВ/м;  $\sigma' = (e-1)q/e(r+a)^2 = 0,46$  мкКл/м<sup>2</sup>. 12.2.  $\omega = e_0 e U^2/2d^2 = 33$  Дж/м<sup>2</sup>. 12.3.  $W = 2\pi N_A^2 r^4 \rho^2/9e_0 \mu^2 = 1,4 \cdot 10^{25}$  Дж. 12.4.  $A = q^2(r_1 + r_2)/8\pi\epsilon_0 r_1 r_2$ . У к а з а н и е: учесть, что после удаления заряда  $q$  на оболочке останется индуцированный заряд  $q' = -q$ . 12.5. Увеличится в два раза. 12.6.  $\Phi_a - \Phi_b = [C_A/(C_A + C_b) - C_b/(C_1 + C_b)]U = -33$  В. 13.1.  $g = (U_1 + U_2)l/2R = 0,40$  Кл. 13.2.  $R = \rho \ln(r/r_0)/2\pi d = 6,2$  мкОм. 13.3.  $\mathcal{E} = I_1 I_2 (R_2 - R_1)/(I_1 - I_2) = 1,4$  В;  $r = (I_2 R_2 - I_1 R_1)/(I_1 - I_2) = 0,20$  Ом;  $I_0 = I_1 I_2 (R_2 - R_1)/(I_2 R_2 - I_1 R_1) = 7,0$  А. 13.4.  $R = 5r/6$ . У к а з а н и е: найти точки равного потенциала. 13.5.  $\Delta R/R = IR_A/U$ . 13.6.  $I_1 = \mathcal{E}_1/R_1 = 1,5$  мА;  $I_2 = \mathcal{E}_2/R_2 = 0,8$  мА;  $I = I_1 - I_2 = 0,7$  мА. 13.7.  $P_2 = 2P_1 P_0 / (\sqrt{2} \sqrt{P_0} - \sqrt{P_1})^2 = 980$  Вт. У к а з а н и е: учесть, что уменьшение разности потенциалов на клеммах розетки вызвано падением напряжения на подводящих проводах вследствие протекания по ним тока. При этом э. д. с. источника остается постоянной. 14.1.  $\langle v \rangle = I \mu e N_A \rho S = 0,44$  см/с. 14.2.  $n = Id/e(u_+ + u_-) SU = 1,4 \cdot 10^{12}$  м<sup>-3</sup>.

15.1.  $B = \mu_0 I/4R = 10,0$  мкТ. 15.2.  $B = 2\mu_0 I \times \sqrt{a^2 + b^2}/ab = 20$  мкТ. 15.3.  $B_{\max} = 2\mu_0 I/\pi a = 40$  мкТ. 15.4.  $B_{\max} = \mu_0 I/\pi a = 20$  мкТ. У к а з а н и е: сначала выразить величину  $B$  в произвольной точке плоскости симметрии как  $B = B(x)$ , где  $x$  — расстояние точки от плоскости, содержащей провода. 15.5.  $F = 2R/B = 1,5$  мН. 15.6. 1)  $F = \mu_0 I^2 R/a$ ; 2)  $F = 3\pi\mu_0 I^2 R^2/4a^2$ . У к а з а н и е: в первом случае соседние элементы двух колец взаимодействуют так, как если бы они принадлежали двум параллельным бесконечно длинным проводам; во втором — можно применить формулу для индукции магнитного поля на оси кругового тока в точках, удаленных от контура на расстояние  $a \gg R$ :  $B = \mu_0 \rho_m/2\pi a^2$ . Затем следует использовать метод, изложенный в решении задач № 15-6 (второй способ, стр. 186). 15.7.  $A = (\mu_0/\pi) I I' \ln(a_0 + l)/a_0$ . 16.1.  $\mathcal{E} = B_1 v_0 = 0,5$  мВ;  $U = 0$ ; 16.2.  $\mathcal{E}_{\max} = 2\pi n a b N B = 23$  В. 16.3.  $U = \pi n l^2 B/4 = 63$  мВ;  $U' = 0$ . 16.4.  $q = Blv\Delta t/R = 2,5$  мкКл. 16.5.  $q = Blv\Delta t \times \ln(R_1/R_0)/(R_1 - R_0) = 1,4$  мкКл. У к а з а н и е: использовать вытекающую из условия зависимость  $R(t)$ :  $R = R_0 + kt$ , где  $k$  — постоянная величина. 16.6.  $L = \mu_0 \pi D^2 l/d^2 = 10$  мГ. 16.7.  $\tau = -\ln(1 - \alpha) \pi \mu_0 d D/8\rho = 0,28$  мс. 17.1.  $\mu = \pi D R q^2/2I_0 N_1 N_2 I S = 1,9 \cdot 10^3$ . 17.2.  $\mu = \pi D B/(\mu_0 N I - Ba) = 0,61 \cdot 10^3$ . 17.3.  $W = N_1 q I R/4N_2 = 5,6$  мДж. 17.4.  $W = (\mu_0 I^2/4\pi) \ln(R/r)$ . У к а з а н и е: использовать результат, полученный при решении задачи № 15-3 (стр. 180), и формулу (17.8) для объемной плотности энергии магнитного поля. 18.1.  $T = eE/2 \operatorname{tg} \alpha = 2,5$  кэВ. 18.2.  $r = \sqrt{2mU/e} B = 9$  см;  $L = 2mU/B = 2,3 \cdot 10^{-24}$  кг · м<sup>2</sup>/с. 18.3.  $e/m = 8a^2 U/B^2 (l^2 + a^2)^2 = 1,8 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. 18.4.  $h = 2\pi m v_0/eB = 5,0$  см. 18.5. а)  $v = \sqrt{2eU/m_p} = 1,7 \cdot 10^7$  м/с;  $p = \sqrt{2eUm_p} = 2,83 \cdot 10^{-20}$  кг · м/с; б)  $v = c\sqrt{1 - W_0^2/(eU + W_0)^2} = 2,9 \times 10^8$  м/с;  $p = (1/c)\sqrt{eU(eU + 2W_0)} = 3,0 \cdot 10^{-21}$  кг · м/с, где  $W_0 = m_0 c^2$  — энергия покоя электрона.

19.1.  $v_{\max} = 6,28$  см/с;  $a_{\max} = 19,7$  см/с<sup>2</sup>. 19.2.  $A_0 = (1 + \sqrt{2})A = 4,82$  см;  $\varphi_0 = \pi/4$ . У к а з а н и е: применить метод векторных диаграмм. 19.3.  $x^2/9 + y^2/4 = 1$ ; точка движется по эллипсу по часовой стрелке. 19.4.  $(T - T')/T = 1 - \sqrt{g/(g^2 + a^2)^{1/2}}$ . У к а з а н и е: использовать несинерциальную систему отсчета, связанную с движущимся вагоном. 19.5.  $v = \Delta x_0 \sqrt{g/\Delta x} = 31$  см/с. 19.6.  $T = 2\pi \sqrt{l(1 + a^2)/g(1 - a^2)} = 3,0$  с. 19.7.  $T = 2\pi \sqrt{l/2g}$ . 19.8.  $t = \ln \sqrt{N}/\lambda v = 16$  с. У к а з а н и е: учесть, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. 20.1.  $v = k\sqrt{E/\rho}/2l = k \cdot 1,8 \cdot 10^3$  Гц, где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . 20.2.  $u = c(v_1' - v_2')/(v_1' + v_2') = 31$  м/с;  $v = 2v_1'v_2'/(v_1' + v_2') = 2,7$  кГц. 21.1.  $t = \pi \sqrt{LC}/2 = 3,1$  мс. 21.2.  $C = 1/4\pi^2 v^2 L = 1,3$  нФ;  $I = \mathcal{E}/R = 60$  мА.

22.2.  $A = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin(\delta/2)/[\lambda - \cos(\delta/2)]) = 60^\circ$ . 22.3.  $\Phi = 4l/(l^2 - a^2) = 6,9$  дп. 22.4.  $\Phi = \Gamma(f_1 + f_2)/f_1 f_2 = 25$  дп. 22.5.  $E_2/E_1 = 1 + 1/5\sqrt{5} = 1,09$ . 22.6.  $B = 4Er^2/\pi D^2 = 5 \cdot 10^3$  кД/м<sup>2</sup>. 22.7.  $E = \pi BD/h = 200$  лк.

У к а з а н и е: используя формулы (22.12) и (22.14), найти освещенность в заданной точке от произвольно расположенного элемента цилиндра длиной  $dl$ . Затем, рассматривая цилиндр как бесконечно длинный, проинтегрировать полученное выражение. 23.1.  $h = \lambda/2 (\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \sqrt{n^2 - \sin^2 i_2}) = 2,7$  мкм. 23.2.  $\lambda = \rho^2 \Phi/4 (n - 1) = 0,49$  мкм. 24.1. Освещенность уменьшится. 24.2.  $k_{\max} = 2E (\Delta l/N\lambda) + 1 = 2E (4,16) + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ ;  $\Phi_{\max} = 74^\circ$ . 24.3.  $a_{\max} = 1,22\lambda f/D = 2,4$  мкм. 25.1.  $v = c/\operatorname{tg} \varphi = 1,94 \cdot 10^8$  м/с. 25.2.  $I_p/I_n = P/(1 - P) = 0,33$ . 25.3.  $I_0/I = 2/\tau^2 \cos^2 \varphi = 6,0$ . 26.1.  $T_2 = bT_1/(b + T_1\Delta\lambda) = 1,75 \cdot 10^9$  К. 26.2.  $a_2 = a_1 \sqrt{a_1 \rho_2 T_1^4 / a_2 \rho_1 T^4} = 0,06$ . 27.1.  $\lambda_{\min} = \sqrt{1 - v^2/c^2}/mc (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 0,028$  Å. У к а з а н и е: электрон следует рассматривать как релятивистскую частицу, кинетическая энергия которой выражается формулой (18.6). 27.2.  $n = P\lambda/hc = 1,0 \cdot 10^{12}$  м<sup>-3</sup>. 27.3.  $F = \pi R^2/c$ . У к а з а н и е: рассмотреть две части потока фотонов, взаимодействующих с шаром: поглощаемую  $(1 - \rho)$  и отражаемую  $\rho$ . Для расчета давления во втором случае использовать результат, полученный при решении задачи № 27-5 (стр. 295). 28.1.  $n_1 = 8cR/4 = 6,58 \cdot 10^{15}$  об/с;  $n_2 = cR/4 = 0,822 \cdot 10^{15}$  об/с;  $v = 3cR/4 = 2,47 \cdot 10^{15}$  Гц. 28.2. [3650 Å, 6570 Å]. 28.3.  $v = 32^2 hR/4M = 3,2$  м/с. 29.1.  $U = h^2/2ml\lambda^2 = 0,15$  кВ. 29.2.  $T = m_0c^2 (\sqrt{2} - 1) = 0,21$  МэВ. 29.3. Максимальное значение при  $x_1 = 1/6$ ,  $x_2 = 1/2$ ,  $x_3 = 5/6$ ; минимальное при  $x_2 = 1/3$ ;  $x_4 = 2/3$ . 29.4.  $W = -3,4$  эВ;  $M_l = \sqrt{2}\hbar = 1,50 \cdot 10^{-34}$  Дж · с. 29.5.  $(M_l)_{\max} = (\sqrt{63}/2)\hbar = 4,18 \cdot 10^{-34}$  Дж/с. 30.1. 1)  $\Delta a/a = \ln 2\Delta t/T = 0,97 \cdot 10^{-6}$ ; 2)  $\Delta a/a = 1/2$ ; 3)  $\Delta a/a = 1 - 2^{-\Delta t/T} = 0,62$ . 30.2.  $t = T \ln(1 + \mu_1 m_2/\mu_2 m_1)/\ln 2 = 2,2 \cdot 10^9$  лет. 31.1.  $W = N_A m Q/\mu = 8,1 \cdot 10^7$  кДж. 31.2. а)  $\epsilon_{\min} = 4m_0c^2 = 2,04$  МэВ; б)  $\epsilon_{\min} = 2m_0c^2 (1 + m_e/m_p) = 1,02$  МэВ. У к а з а н и е. применить законы сохранения полной релятивистской энергии и импульса. Учсть, что значению  $\epsilon_{\min}$  соответствует нулевая относительная скорость частиц — продуктов реакции (см. задачу № 31-4, стр. 330).

Таблица номеров задач из задачников [10], [15]

(Звездочками отмечены задачи, к решению которых после таблицы даны указания.)

	[10]	[15]		[10]	[15]
1-1	1.4	—	4-5	3.24	3-45*
1-2	1.7	1-1	4-6	3.43	3-26
1-3	1.10	1-18	4-7	—	3.24
1-4	1.37	1-36	5-1	—	4-4
1-5	1.24	1-6	5-2	2.151	4-7
1-6	1.58	1.43	5-3	2.140	4-33
2-1	2.22	2-2	5-4	2.152	4-34
2-2	2.101	2-40	5-5	2.158	4-17
2-3	—	2-21	6-1	5.4	8-1
2-4	2.34	2-4	6-2	5.33	8.27
2-5	2.23	2.19	6-3	5.14	8-2
2-6	2.35	2.6	6-4	5.111	9.24
2-8	—	2-41	7-1	5.45	9.13
3-1	2.61	2.31	7-2	5.56	9-22
3-2	2.67	2-34*	7-3	5.97	—
3-3	2.129	2-53	7-4	5.100	—
3-4	2.118	5.20	7-5	5.117	9-41
3-5	2.108	2-62	8-1	5.160	10-1
3-6	2.90	2-78	8-2	5.173	10-15
3-7	2.82	2-73	8-3	5.185*	10-33*
4-2	3.12	3-18	8-4	5.194	10.44
4-3	3.14	3.20	8-5	5.198	10-48
4-4	3.37	3-46	8-6	5.201	10-49

8-8	[10] 5.222*	[15] 10-55*	16-4	[10] 11.113	[15] 25-29
9-1	6.5	11-4	16-5	11.128	25-45
9-2	6.6	11-5	16-6	—	25-10
9-3	6.8	—	17-1	11.123	24-14
9-4	6.22	11-3	17-2	11.124	24-15
9-5	7.33	11-9	17-3	11.53	24-22
9-6	7.40	11-12	17-5	11.112	26-9
9-7	7.49	11-22	18-1	9.70	15.54
9-8	7.65	11-15	18-2	11.72	23.7
9-9	7.1	—	18-3	11.84	23-25
10-1	9.10	13-12	18-4	11.86	23-27
10-2	9.13	14-6	18-5	17.14	33.13
10-4	9.32	14-7	18-6	—	33.22
10-5	—	14-20	19-1	12.10	6-6
10-6	9.20	14-10	19-2	12.7	6-10
10-7	9.26	14-24	19-3	12.32	6-46
11-1	9.44	15-6	19-4	12.34	6-48
11-3	9.98*	15-21*	19-5	12.41	6-53
11-4	9.52	15.25	19-6	3.50	6-26
11-5	9.42	15-38	19-7	12.27	6.16
11-6	—	14.54	19-8	12.29	6.32
11-7	—	15-35	19.9	12.48	6.34
11-8	—	51.29*	19-10	12.52*	6.38
11-9	9.38	15-55	19-11	12.54	6.40
12-1	9.85	14-28	20-1	12.62	6-56
12-2	9.89	14-29	20-3	12.66	6.62
12-3	9.86	17-9	20-4	13.26	12.15
12-4	9.118	18.6	20-5	13.12	12.7
12-5	9.126	—	20-6	—	12.29
12-7	9.112	14.42	20-7	13.19*	12.39
12-8	9.90	17-10	21-1	14.9	27-3
12-9	9.103	17-17	21-2	14.11	—
12-10	—	17-25	21-3	14.28	—
12-11	9.109	17.24	21-4	14.26	—
13-1	10.1	19-1	21-5	14.4	27.10
13-2	10.10	19.3	22-1	15.12	28.11
13-3	10.4	19-4	22-2	15.13	28.13
13-5	10.36	—	22-3	15.19	28.16
13-6	10.24	19-12	22-4	15.35	28.27
13-7	10.23	19.17	22-5	15.37	28.30
13-8	—	19-6*	22-6	—	28.33
13-9	10.21	19-11	22-7	15.33	28.23
13-10	10.33	19-21	22-8	15.36	28.34
13-11	10.83	19-24	22-9	15.45	28.35
13-12	10.46	19-25	22-10	15.54	29.9
13-13	10.50	19.27	22-11	15.66	29.15
13-14	10.64	19-29	22-12	15.52	29.5
13-15	10.70*	19.30	22-14	15.51	28.44
14-1	10.120	20-3	23-1	16.5	30.9
14-4	10.112	—	23-2	16.7	30.15
14-5	10.115	20.22	23-3	16.9	30.12
14-6	10.114	20.25	23-4	16.12	30.19*
15-1	11.15	21.30	23-5	16.17	30.24
15-2	11.22	21.20	24-1	16.32	31.3
15-3	—	24-4	24-2	16.34	31.7
15-4	11.29	21.13*	24-3	16.44	31.9
15-5	11.60	22-28	24-4	16.50	31.16
15-6	11.56	25-5	24-5	—	31.18
16-1	11.100	25-8*	25-1	16.61	32.5
16-2	11.102	25-11	25-2	16.66	—

	[10]	[15]		[10]	[15]
25-3	16 67	—	29-3	—	45-9
25-5	16 64	32 7	29 4	—	46-11
26-1	18 2	34 4	29-5	—	46 19
26-2	18 6	—	29-6	—	46-40*
26-3	18 12	34 8	29-7	—	46 60
26-4	18 19	—	29-8	—	47-6*
26-6	18 17	34-12	29-9	—	47-24
27-1	20 28	39-1	29-10	—	47-22
27-2	19 19	35-5	30-1	21 5	41-13
27-3	—	35-10	30-2	21 11	41-28
27-4	19 27	36-3	30-3	21 15	—
27-5	19 7	36-11	30-4	21 18	—
27-7	19 31	37-3	30-5	20 40	42-3
28-1	20 2	38-2	31 1	22 8	43-4
28-2	20 10	38 10	31-2	—	43-14
28-4	20 20	38 7	31-3	22 15	44-9
28-5	20 33	39 9	31 4	22 33	—
29-1	19 39	40 8*	31 5	23 13	44 28
29-2	19 10	40 10			

### Указания к решению задач

5.185. Сравнить графики двух процессов, изображенных в одной и той же системе координат  $p, V$

5.222. Применить соотношение  $dQ = c_p m dT$ , где  $c_p$  — удельная теплоемкость водорода при постоянном давлении

9.98. Сначала с помощью формулы (11.10) найти заряд внутренней сферы учитывая, что заряды обкладок конденсатора равны по величине и противоположны по знаку. Затем учесть соотношение (10.76)

10.70. Считать скорость рассеяния теплоты термостатом в течение данного промежутка времени постоянной

12.52. При аperiодическом движении  $\omega_0^2 - \beta^2 \leq 0$ .

13.19. Считать частоту звука близкой к стандартной частоте  $\nu = 1000$  Гц

2-34. Скорость сближения колькобежцев  $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ , где  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — скорости относительно Земли. Так как векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  направлены противоположно то  $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_1 + v_2$ .

3.45. Так как движение центра  $S$  обруча равноускоренное, то для определения искомого времени достаточно найти конечную скорость  $v_c$ .

10-33. Можно считать, что вышедшая из баллона половина газа перешла в другой баллон такого же объема, соединенный с первым баллоном, и, таким образом, объем газа увеличился в два раза

10-55. Применить соотношение  $dQ = c_v m dT$ , где  $c_v$  — удельная теплоемкость водорода при постоянном объеме.

15-21. 1) При соединении шара с проводящей оболочкой заряды шара перейдут на оболочку, а потенциалы шара и оболочки сравняются. 2) При заземлении проводящей оболочки ее потенциал становится равным нулю. Разность потенциалов между шаром и оболочкой можно вычислить по формуле (11.5), имея в виду условие (10.76)

19-6. Используя соображения симметрии найти в каждой схеме точки равного потенциала.

21-13. Применить формулу, выражающую индукцию магнитного поля соленоида конечной длины в произвольной точке, лежащей на его оси:  $B = \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)/2$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  — углы между направлением оси соленоида и радиусами векторами, проведенными из данной точки к его концам.

25-8. При равномерном движении проводника искомая сила уравновешивает силу Ампера  $F = IlB$ , действующую на проводник вследствие того, что по нему идет индукционный ток.

30-19. Учесть, что вдоль линии соприкосновения пластинок располагается интерференционный минимум, обусловленный изменением фазы на  $\pi/2$  при отражении световой волны от нижней пластинки.

40-8. См. текст к формуле (27.6)

46-40. Сначала найти волновое число  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ .

47-8. Условие нормировки:  $\int_V |\psi(r)|^2 dV = 1$ , где интегрирование проводится по всему пространству. Интеграл вычислить в сферических координатах.

51-29. Рассмотреть явление в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с диском.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, А. И. Ахиезер, Е. М. Лифшиц Курс общей физики. Механика и молекулярная физика М., «Наука», 1966
2. К. А. Путилов и В. А. Фабрикант Курс физики. Т. 3. М., Физматгиз, 1963.
3. И. В. Савельев. Курс физики Т. 2, изд. 4-е М., «Наука», 1970.
4. И. Е. Тамм Основы теории электричества. М., «Наука» 1976.
5. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5, 6, 7. М., «Мир», 1966.
6. С. Э. Фриш, А. В. Тиморева Курс общей физики Т. 2, изд. 9-е. М., Физматгиз 1962.
7. С. Э. Хайкин. Физические основы механики М., «Наука», 1971.
8. Э. В. Шпольский. Атомная физика Т. 1,2. М., «Наука», 1974.
9. Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М., «Наука», 1965.
10. В. С. Волькенштейн Сборник задач по общему курсу физики М., «Наука», 1973.
11. Л. Г. Гурьев, и др Сборник задач по общему курсу физики М., «Высшая школа», 1966.
12. И. Е. Иродов, И. В. Савельев, О. И. Замша. Сборник задач по общей физике. М., «Наука», 1972
13. Е. М. Новодворская. Методика проведения упражнений по физике в вузе. М., «Высшая школа», 1970
14. Д. И. Сяхаров Сборник задач по физике М., «Просвещение», 1967.
15. А. Г. Чертов, А. А. Воробьев, М. Ф. Федоров. Задачник по физике с примерами решения задач и справочными материалами. М., «Высшая школа», 1973
16. Физическая оптика. Терминология Вып. 79. М., «Наука», 1970.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие . . . . .	3	
Г л а в а 1.	<b>Механика . . . . .</b>	<b>5</b>	
	§ 1. Кинематика . . . . .	5	
	А. Прямолинейное равномерное движение. Сложение скоростей (6).		
	Б. Неравномерное движение (9). В. Вращательное движение твердого тела (15).		
	§ 2. Законы Ньютона . . . . .	17	
	А. Движение тел под действием постоянной силы тяжести и упругих сил (17). Б. Движение тел при наличии сил трения (23).		
	В. Инерциальные системы отсчета (27).		
	§ 3. Законы сохранения . . . . .	30	
	А. Закон сохранения импульса (32). Б. Работа, энергия. Закон сохранения энергии (35). В. Совместное применение законов сохранения (40).		
	§ 4. Динамика твердого тела . . . . .	42	
А. Уравнения движения твердого тела (44). Б. Законы сохранения для вращательного движения твердого тела (48).			
Г л а в а 2.	<b>Молекулярная физика и термодинамика . . . . .</b>	<b>55</b>	
	§ 5. Закон всемирного тяготения. Гравитационное поле . . . . .	61	
	§ 6. Законы идеальных газов . . . . .	61	
	§ 7. Кинетическая теория газов . . . . .	65	
	§ 8. Основы термодинамики . . . . .	73	
	А. Первое начало термодинамики в применении к идеальным газам (75). Б. Второе начало термодинамики (83).		
	§ 9. Реальные газы и жидкости . . . . .	86	
	А. Уравнение Ван-дер-Ваальса (87). Б. Поверхностное натяжение (93). В. Свойства паров (98).		
	Г л а в а 3.	<b>Электростатика . . . . .</b>	<b>102</b>
		§ 10. Электрическое поле в вакууме . . . . .	102
§ 11. Разность потенциалов. Проводники в электрическом поле . . . . .		112	
§ 12. Диэлектрики в электрическом поле. Электроемкость. Энергия поля . . . . .		127	
А. Диэлектрики в электрическом поле (128). Б. Электроемкость. Энергия поля. Пондеромоторные силы (130). Соединения конденсаторов (138).			
Г л а в а 4.		<b>Постоянный ток . . . . .</b>	<b>145</b>
	§ 13. Законы постоянного тока . . . . .	145	
	А. Неразветвленные цепи. Закон Ома (146). Б. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа (154). В. Работа и мощность тока (162).		
	§ 14. Электропроводность различных сред . . . . .	168	
Г л а в а 5.	<b>Электромагнетизм . . . . .</b>	<b>174</b>	
	§ 15. Магнитное поле в вакууме . . . . .	174	
	§ 16. Электромагнитная индукция . . . . .	188	
	§ 17. Магнитное поле в веществе. Энергия магнитного поля . . . . .	199	
	§ 18. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях . . . . .	207	
	А. Движение классических частиц (207). Б. Движение релятивистских частиц (212).		

<b>Глава 6.</b>	<b>Колебания и волны . . . . .</b>	<b>216</b>
	§ 19. Механические колебания . . . . .	216
	А. Кинематика колебательного движения (217). Б. Динамика колебательного движения (223).	
	§ 20. Волны в упругих средах. Элементы акустики . . .	228
	§ 21. Электромагнитные колебания и волны . . . . .	237
<b>Глава 7.</b>	<b>Оптика . . . . .</b>	<b>246</b>
	§ 22. Геометрическая оптика и фотометрия . . . . .	246
	А. Преломление на плоских поверхностях (247). Б. Преломление на сферических поверхностях (251). В. Элементы фотометрии (258).	
	§ 23. Интерференция света . . . . .	265
	§ 24. Дифракция света . . . . .	272
	§ 25. Поляризация света . . . . .	278
	§ 26. Тепловое излучение . . . . .	284
	§ 27. Квантовая природа света . . . . .	291
<b>Глава 8.</b>	<b>Атомная и ядерная физика . . . . .</b>	<b>300</b>
	§ 28. Атом Бора . . . . .	300
	§ 29. Элементы квантовой механики . . . . .	306
	А. Волновые свойства микрочастиц (308). Б. Простейшие случаи движения микрочастиц (311). В. Строение атомов (317).	
	§ 30. Радиоактивность. Поглощение $\gamma$ -лучей . . . . .	321
	§ 31. Ядерные реакции. Элементарные частицы . . . . .	326
<b>Приложение</b>	<b>. . . . .</b>	<b>333</b>
	Задачи для самостоятельного решения (333) Таблица номеров задач из задачников [10], [15] (345)	
<b>Литература</b>	<b>. . . . .</b>	<b>349</b>



НБ ПНУС



bn43377

Евгений Владимирович Фирганг  
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Редактор Е. С. Гридасова  
Художник А. И. Зазыкин  
Художественный редактор В. И. Пономаренко  
Технический редактор А. К. Нестерова  
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 629

---

Сдано в набор 14/II 1977 г. Подп. к печати 8/VIII 1977 г.  
Формат 60×90<sup>1/8</sup>. Бум. тип. № 3. Объем печ. л. 22. Усл. п. л. 22.  
Уч.-изд. л. 20,57. Изд. № ФМ—512. Тираж 80 000 экз. Зак 1520.  
Цена 70 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов  
издательства «Высшая школа» на 1977 г. Позиция № 45  
Издательство «Высшая школа»  
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

---

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
Москва, И-41, Б. Переяславская ул., д. № 46