ФІЗИКА І ХІМІЯ ТВЕРДОГО ТІЛА
Т. 8, № 2 (2007) С. 240-249

PHYSICS AND CHEMISTRY OF SOLID STATE
V. 8, № 2 (2007) P. 240-249

УДК 539.2

ISSN 1729-4428

А.В. Константинович[1], І.А. Константинович[2]

Спектр випромінювання чотирьох електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі

[1]Чернівецький національний університет, вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012, Україна,
E-mail: theormyk@chnu.cv.ua; aconst@hotbox.ru
[2]Інститут термоелектрики Національної академії наук і Міністерства освіти і науки України,
вул. Дубинська 9а, Чернівці, 58027, Україна

Вдосконаленим методом сили самодії Лоренца послідовно досліджено спектральний розподіл середньої потужності випромінювання систем електронів, що рухаються в магнітному полі. Вперше отримана і досліджена тонка структура спектра випромінювання чотирьох невзаємодіючих електронів, що рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії в прозорому середовищі.

Ключові слова: синхротронне випромінювання, синхротронно-черенковське випромінювання, фактор когерентності, система електронів, прозоре середовище.

Стаття поступила до редакції 10.09.2006; прийнята до друку 15.03.2007.

Вступ

Минуло сто років з дня опублікування в 1907 р. роботи видатного англійського фізика Шотта [1–3], в якій строго в рамках класичної електродинаміки досліджено спектр випромінювання систем електронів, що рухаються по колу. Він застосував ці методи для дослідження спектрів випромінювання електронів в атомі. Шотт припускав, що теорія спектрів – це найбільш важлива задача теорії матерії. Важливість робіт Шотта не до кінця осмислена та розкрита ще й сьогодні. В останній час можна отримати нові результати в цій області, використовуючи аналітичні та числові методи досліджень високої точності.

Дослідження Шотта знайшли подальше застосування в областях електроніки, астрофізики, фізиці плазми, фізиці накопичувальних кілець тощо.

Спектр випромінювання систем невзаємодіючих заряджених частинок, що рухаються вздовж гвинтової лінії у вакуумі, досліджено в роботах [3–11]. В цих роботах розглянуто вплив фактора когерентності на спектральний розподіл потужності випромінювання.

Тонка структура спектра випромінювання систем електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі, досліджена в роботах [12-15]. Встановлено, що зумовлене ефектом Доплера розширення дискретних гармонік у смуги, визначає вигляд функції спектрального розподілу потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються у середовищі.

Метою даної роботи є послідовне дослідження вдосконаленим методом сили самодії Лоренца явищ когерентності у спектрі випромінювання системи невзаємодіючих електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії один за одним в диспергуючому прозорому ізотропному середовищі. Використовуючи точні інтегральні співвідношення для спектрального розподілу потужності випромінювання чотирьох електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії, аналітичними та числовими методами досліджено тонку структуру спектра електромагнітного випромінювання в прозорому середовищі. Досліджено вплив ефекта Доплера на особливості спектра випромінювання чотирьох електронів, що рухаються по гвинтовій лінії в прозорих ізотропних середовищах.

I. Випереджаючі та запізнюючі потенціали заряджених частинок, що рухаються в прозорому ізотропному середовищі

Запізнюючі та випереджаючі скалярний $\Phi^{ret,\,adv}(\vec{r},t)$ та векторний $\vec{A}^{ret,\,adv}(\vec{r},t)$ потенціали заряджених частинок, що рухаються в прозорому ізотропному середовищі, враховуючи частотну дисперсію діелектричної $\varepsilon(\omega)$ та магнітної $\mu(\omega)$ проникностей, визначаються через [12, 16–18]

$$\Phi^{ret,adv}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)}\times$$
$$\times\frac{\exp\{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')\}}{k^2-\frac{n^2(\omega)}{c^2}(\omega\pm i\alpha)^2}, \qquad (1)$$

$$\vec{A}^{ret,adv}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\mu(\omega)\frac{\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\times$$
$$\times\frac{\exp\{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')-i\omega(t-t')\}}{k^2-\frac{n^2(\omega)}{c^2}(\omega\pm i\alpha)^2}. \qquad (2)$$

Тут α-нескінченно мала величина, яка перетворюється в нуль після розрахунку інтегралу, показник заломлення $n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$.

Для прозорих однорідних ізотропних середовищ, враховуючи парність залежності функцій $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ і $n(\omega)$ від частоти, проінтегруємо по частоті методом теорії лишків [19].

Для запізнюючих потенціалів замкнемо контур C^{ret} в нижній напівплощині комплексної площини ω (рис.1). Для випадку, коли $\mathrm{Re}\{i\omega(t'-t)\}<0$ при $t>t'$ інтеграл по нескінченному напівколу в нижній напівплощині не дає внеску.

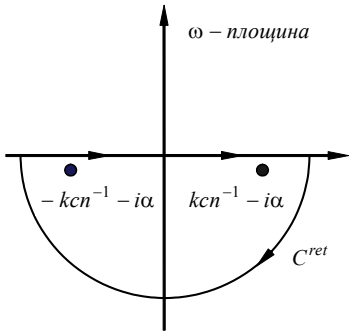

Рис.1. Контур у випадку запізнюючих потенціалів

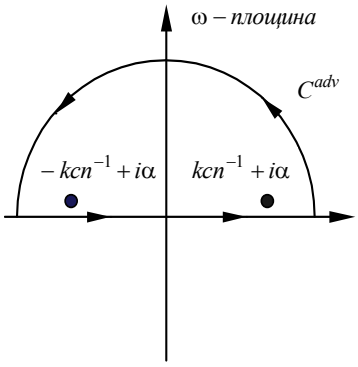

Рис. 2. Контур у випадку випереджаючих потенціалів

У випадку випереджаючих потенціалів замкнемо контур C^{adv} у верхній напівплощині комплексної площини ω (рис.2). Для випадку $\mathrm{Re}\{i\omega(t'-t)\}>0$ при $t'>t$ інтеграл по нескінченному напівколу у верхній напівплощині ω не дає внеску.

Тоді після використання методу теорії лишків (див. стор. 85 в [19]) при інтегруванні по ω вирази запізнюючих та випереджаючих потенціалів можуть бути подані у вигляді:

$$\left\{\Phi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\times$$
$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega(k))},\frac{\mu(\omega(k))\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\exp\left[i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\frac{n(\omega(k))k}{c}\left(1+\frac{\omega(k)}{n(\omega(k))}\frac{dn(\omega(k))}{d\omega(k)}\right)}\sin\left[\frac{kc}{n(\omega(k))}(t-t')\right], \qquad (3)$$

$$\left\{\Phi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{t}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{k}\times$$
$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega(k))},\frac{\mu(\omega(k))\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\exp\left[i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\frac{n(\omega(k))k}{c}\left(1+\frac{\omega(k)}{n(\omega(k))}\frac{dn(\omega(k))}{d\omega(k)}\right)}\sin\left[\frac{kc}{n(\omega(k))}(t'-t)\right]. \qquad (4)$$

Перейдемо до сферичної системи координат: $k_x=k\sin\theta\cos\varphi$, $k_y=k\sin\theta\sin\varphi$,

$$k_z=k\cos\theta,\ k=\frac{n(\omega)}{c}\omega, \qquad (5)$$

$$d\vec{k}=dk_xdk_ydk_z=J(\omega,\theta,\varphi)d\omega d\theta d\varphi,$$

$$J(\omega,\theta,\varphi)=\frac{n^3(\omega)}{c^3}\left(1+\frac{\omega}{n(\omega)}\frac{dn(\omega)}{d\omega}\right)\omega^2\sin\theta. \qquad (6)$$

Тоді перепишемо запізнюючі та випереджаючі потенціали у вигляді:

$$\left\{\Phi^{ret}(\vec{r},t),\vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{2\pi^2c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{0}^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta(\cos\varphi(x-x')+\sin\varphi(y-y'))\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t-t'), \qquad (7)$$

$$\left\{\Phi^{adv}(\vec{r},t),\vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{2\pi^2c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{t}^{\infty}dt'\int_{0}^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta(\cos\varphi(x-x')+\sin\varphi(y-y'))\right]\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t'-t). \qquad (8)$$

Проінтегруємо вирази (7) і (8) по φ, використовуючи співвідношення для функції Бесселя цілочислового індекса (див. стор. 416 в [20]):

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\left(\sin\theta\cos\varphi(x-x')+\sin\theta\sin\varphi(y-y')\right)\right]=$$

$$=2\pi J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right), \qquad (9)$$

де $J_0(x)$ - функція Бесселя нульового індекса.

Тоді отримаємо

$$\left\{\Phi^{ret}(\vec{r},t),\ \vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t-t'), \qquad (10)$$

$$\left\{\Phi^{adv}(\vec{r},t),\ \vec{A}^{adv}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{t}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\omega n(\omega)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\times$$

$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\sin\omega(t'-t). \qquad (11)$$

Проінтегруємо вирази (10) і (11) по θ за допомогою співвідношення для функцій Бесселя цілочислового індекса (див. стор. 757 в [20]):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta J_0(\alpha\sin\theta)\cos(\beta\cos\theta)=\frac{\sin\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \qquad (12)$$

Тоді

$$\left\{\Phi^{ret}(\vec{r},t),\ \vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\frac{\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec{r}-\vec{r}'|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\sin\omega(t-t'), \qquad (13)$$

$$\left\{\Phi^{adv}(\vec{r},t),\ \vec{A}^{ret}(\vec{r},t)\right\}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{t}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\frac{\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec{r}-\vec{r}'|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\sin\omega(t'-t). \qquad (14)$$

Потенціали згідно гіпотези Дірака визначаються виразами [17–18, 21–22]:

$$\Phi^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\Phi^{ret}-\Phi^{adv}\right),\ \vec{A}^{Dir}=\frac{1}{2}\left(\vec{A}^{ret}-\vec{A}^{adv}\right). \qquad (15)$$

Тоді, використовуючи співвідношення (12)–(14), отримаємо

$$\left\{\Phi^{Dir}(\vec{r},t),\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_0^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\left\{\frac{\rho(\vec{r}',t')}{\varepsilon(\omega)},\frac{\mu(\omega)\vec{j}(\vec{r}',t')}{c}\right\}\frac{\sin\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega|\vec{r}-\vec{r}'|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\sin\omega(t-t'). \qquad (16)$$

Для подальшого розвитку класичної теорії випромінювання заряджених частинок важливе значення має порівняння електродинаміки Дірака та інших можливих комбінацій запізнюючих та випереджаючих потенціалів [23].

II. Середня за часом потужність випромінювання заряджених частинок

Середню за часом потужність випромінювання $\overline{P}^{rad}$ заряджених частинок, що рухаються в прозорому ізотропному середовищі, можна визначити згідно [12, 18, 22]:

$$\overline{P}^{rad}==\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}P^{rad}(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt\times$$

$$\times\left\{\int_{\tau}\left(\vec{j}(\vec{r},t)\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}-\rho(\vec{r},t)\frac{\partial\Phi^{Dir}(\vec{r},t)}{\partial t}\right)d\vec{r}\right\}. \qquad (17)$$

Тут $\vec{j}(\vec{r},t)$ – густина струму, $\rho(\vec{r},t)$ – густина заряду. Інтегрування ведеться за виділеним об'ємом τ.

Миттєва потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_1(t,\omega,\theta,\varphi)$ заряджених частинок, з урахуванням співвідношень (7), (8), (16), (17) набуває вигляду:

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta W_1(t,\omega,\theta,\varphi), \qquad (18)$$

$$W_1(t,\omega,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\times$$

$$\times\cos\left\{\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\left[\cos\varphi(x-x')+\sin\varphi(y-y')\right]\right\}\times$$

$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$

$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t')\right]. \qquad (19)$$

Миттєву потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектрально-кутовий розподіл потужності випромінювання $W_2(t,\omega,\theta)$, можна отримати з (18), (19) за допомогою співвідношення (9). Тоді знаходимо:

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta W_2(t,\omega,\theta) \qquad (20)$$

$$W_2(t,\omega.\theta)=\frac{1}{2\pi c^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega^2\mu(\omega)n(\omega)\times$$
$$\times J_0\left(\frac{n(\omega)}{c}\omega\sin\theta\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)\times$$
$$\times\cos\left[\frac{n(\omega)}{c}\omega\cos\theta(z-z')\right]\cos\omega(t-t')\times$$
$$\times\left[\vec{j}(\vec{r},t)j(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right]. \qquad (21)$$

Миттєву потужність випромінювання $P^{rad}(t)$, яка виражена через спектральний розподіл потужності випромінювання $W_3(t,\omega)$, можна отримати з (20), (21) за допомогою співвідношення (12):

$$P^{rad}(t)=\int_0^{\infty}d\omega W_3(t,\omega), \qquad (22)$$

$$W_3(t,\omega)=\frac{1}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\int_{-\infty}^{\infty}d\vec{r}\,'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\omega\mu(\omega)\frac{\sin\left[\frac{n(\omega)\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\times$$
$$\times\cos\omega(t-t')\left\{\vec{j}(\vec{r},t)\vec{j}(\vec{r}\,',t')-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}\,',t')\right\}. \qquad (23)$$

Отримані в даній роботі співвідношення (19), (21) для спектрально-кутових розподілів потужності випромінювання заряджених частинок, що рухаються в прозорих середовищах, шляхом послідовного урахування дисперсії, після інтегрування по кутах приводять до співвідношення для спектрального розподілу потужності випромінювання $W_3(t,\omega)$, дослідженого Швінгером та іншими [24] методом теорії джерел. Співвідношення (19), (21), (23) для спектрально-кутових та спектрального розподілів потужності випромінювання заряджених частинок дають можливість досліджувати спектр випромінювання різноманітних розподілів заряджених частинок, у тому числі систем точкових заряджених частинок, які рухаються в електромагнітних полях в ізотропному прозорому середовищі та у вакуумі.

III. Спектральний розподіл середньої потужності випромінювання системи електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у середовищі

Густина струму $\vec{j}(\vec{r},t)$ та густина заряду $\rho(\vec{r},t)$ N невзаємодіючих точкових електронів визначаються співвідношеннями:

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\vec{V}_l(t)\rho_l(\vec{r},t),\ \rho(\vec{r},t)=\sum_{l=1}^{N}\rho_l(\vec{r},t),$$
$$\rho_l(\vec{r},t)=e\delta(\vec{r}-\vec{r}_l(t)), \qquad (24)$$

де $\vec{r}_l(t)$ –, $\vec{V}_l(t)$ – закон руху та швидкість l–ї частинки.

Ми дослідимо випадок системи N електронів, що рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі. Закон руху та швидкість l-го електрона в цьому випадку визначаються співвідношеннями:

$$\vec{r}_l(t)=r_0\cos[\omega_0(t+\Delta t_l)]\vec{i}+r_0\sin[\omega_0(t+\Delta t_l)]\vec{j}+V_{||}(t+\Delta t_l)\vec{k},$$
$$\vec{V}_l(t)=\frac{d\vec{r}_l(t)}{dt}. \qquad (25)$$

Тут $r_0=V_{\perp}\omega_0^{-1}$, $\omega_0=ceB^{ext}\tilde{E}^{-1}$, $\tilde{E}=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$, вектор магнітної індукції $\vec{B}^{ext}||0Z$, $V_{\perp}$, $V_{||}$ – компоненти швидкості, $\vec{p}$, $\tilde{E}$ – імпульс та енергія електрона, e і m_0 – заряд і маса спокою електрона, c – швидкість світла у вакуумі.

Середню потужність випромінювання N електронів ми отримаємо, підставляючи (24) і (25) в (22) і (23). Тоді знаходимо

$$\overline{P}^{rad}=\int_0^{\infty}W(\omega)d\omega, \qquad (26)$$

$$W(\omega)=\frac{2e^2}{\pi c^2}\int_0^{\infty}dx\omega\mu(\omega)S_N(\omega)\frac{\sin\left\{n(\omega)\omega\tilde{n}^{-1}\eta(x)\right\}}{\eta(x)}\cos(\omega x)\times$$
$$\times\left[V_{\perp}^2\cos(\omega_0 x)+V_{||}^2-\frac{c^2}{n^2|\omega|}\right]. \qquad (27)$$

де $\eta(x)=\sqrt{V_{||}^2x^2+4\frac{V_{\perp}^2}{\omega_0^2}\sin^2\left(\frac{\omega_0}{2}x\right)}$, $\mu(\omega)$ – магнітна проникність, $n(\omega)$ – показник заломлення, ω – циклічна частота, c – швидкість світла у вакуумі. Фактор когерентності

$$S_N(\omega)=\sum_{l,j=1}^{N}\cos\left\{\omega(\Delta t_l-\Delta t_j)\right\}, \qquad (28)$$

де Δt_l – зсув в часі l-го електрона. Фактор когерентності одного електрона $S_1(\omega)=1$. Фактор когерентності чотирьох електронів $S_4(\omega)$ визначається виразом

$$S_4(\omega)=4+2\cos(\omega\Delta t_{12})+2\cos(\omega\Delta t_{23})+2\cos(\omega\Delta t_{34})+$$
$$+2\cos\{\omega(\Delta t_{12}+\Delta t_{23})\}+2\cos\{\omega(\Delta t_{23}+\Delta t_{34})\}+$$
$$+2\cos\{\omega(\Delta t_{12}+\Delta t_{23}+\Delta t_{34})\}. \qquad (29)$$

Тут Δt_{12}, Δt_{23}, Δt_{34} – зсуви у часі між першим і другим електронами, між другим і третім електронами, між третім і четвертим електронами.

Із співвідношень (26) та (27), після деяких нескладних перетворень, внесок окремих гармонік у

середню потужність випромінювання системи електронів можна подати у вигляді:

$$\overline{P}^{rad} = \frac{e^2}{c^3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\omega\mu(\omega)n(\omega)\omega^2 S_N(\omega)\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \times$$

$$\times\delta\left\{\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_{\parallel}\cos\theta\right)-m\omega_0\right\}\times$$

$$\times\left\{V_{\perp}^2\left[\frac{m^2}{q^2}J_m^2(q)+J_m'^2(q)\right]+\left(V_{\parallel}^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)J_m^2(q)\right\}, \quad (30)$$

де $q=\frac{n(\omega)}{c}\frac{\omega}{\omega_0}V_{\perp}\sin\theta$, $J_m(q)$, $J_m'(q)$ – функція Бесселя цілочислового індекса та її похідна відповідно.

Кожна гармоніка представляє набір частот, які є розв'язком рівняння

$$\omega\left(1-\frac{n(\omega)}{c}V_{\parallel}\cos\theta\right)-m\omega_0=0. \quad (31)$$

У випадку системи, що складається з одного електрона ($S_1(\omega)=1$) співвідношення (30) переходить у вираз, отриманий методом сили самодії в [25], та методом охоплюючих поверхонь в [26].

Проінтегруємо (30) за θ, тоді знаходимо спектральний розподіл потужності випромінювання N електронів за гармоніками

$$\overline{P}^{rad} = \frac{e^2}{c^2V_{\parallel}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} d\omega\mu(\omega)\omega S_N(\omega)\,\eta\left(u^2(m)\right)\times$$

$$\times\left\{V_{\perp}^2\left[\frac{m^2}{q_1^2u^2(m)}J_m^2(q_1u(m))+J_m'^2(q_1u(m))\right]+\right.$$

$$\left.+\left(V_{\parallel}^2-\frac{c^2}{n^2(\omega)}\right)J_m^2(q_1u(m))\right\}, \quad (32)$$

де

$$\eta\left(u^2(m)\right)=\begin{cases}1, & u^2(m)>0\\ 0, & u^2(m)<0\end{cases},\quad q_1=\frac{n(\omega)V_{\perp}}{c}\frac{\omega}{\omega_0},$$

$$u^2(m)=1-\frac{c^2(m\omega_0-\omega)^2}{n^2(\omega)V_{\parallel}^2\omega^2}. \quad (33)$$

Межі смуг визначаються функцією $\eta\left(u^2(m)\right)$.

Розглянемо середовище зі сталими ε та μ. Тоді при $V_{\parallel}<\frac{c}{n}$ спектральні розподіли потужності випромінювання на окремих смугах визначаються співвідношенням

$$\overline{P}^{rad} = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\omega_m^{\min}}^{\omega_m^{\max}} d\omega W_m(\omega), \quad (34)$$

$$W_m(\omega)=\frac{e^2\mu}{c^2V_{\parallel}}\omega S_N(\omega)\left\{V_{\perp}^2\left[\frac{m^2}{q_m^2}J_m^2(q_m)+J_m'^2(q_m)\right]+\right.$$

$$\left.+\left(V_{\parallel}^2-\frac{c^2}{n^2}\right)J_m^2(q_m)\right\}, \quad (35)$$

де

$$\omega_m^{\min}=\frac{m\omega_0}{1+\frac{nV_{\parallel}}{c}},\quad \omega_m^{\max}=\frac{m\omega_0}{1-\frac{nV_{\parallel}}{c}},$$

$$q_m=\frac{nV_{\perp}}{c}\frac{\omega}{\omega_0}\sqrt{1-\frac{c^2(m\omega_0-\omega)^2}{n^2V_{\parallel}^2\omega^2}}. \quad (36)$$

Необхідно особливо підкреслити, що лише в області частот, де перекриття відсутнє, для спектральних функцій розподілу потужності випромінювання має місце рівність

$$W(\omega)=W_m(\omega). \quad (37)$$

Як випливає із співвідношень (34), (35), лише на межах першої гармоніки спектральна функція потужності випромінювання відмінна від нуля і дорівнює

$$W_1(\omega_{\min})=\frac{e^2\mu V_{\perp}^2}{2c^2V_{\parallel}}S_N\left(\omega_1^{\min}\right)\frac{\omega_0}{1+\frac{nV_{\parallel}}{c}},$$

$$W_1(\omega_{\max})=\frac{e^2\mu V_{\perp}^2}{2c^2V_{\parallel}}S_N\left(\omega_1^{\max}\right)\frac{\omega_0}{1-\frac{nV_{\parallel}}{c}}. \quad (38)$$

Перейдемо до кутового розподілу потужності випромінювання на окремих гармоніках за допомогою заміни

$$\omega=\frac{m\omega_0}{1-\frac{nV_{\parallel}}{c}\cos\theta}. \quad (39)$$

Тоді із співвідношень (34), (35) знаходимо кутовий розподіл потужності випромінювання системи електронів ($\varepsilon=const$ і $\mu=1$) за гармоніками:

$$\overline{P}^{rad} = \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\, P(m,\theta), \quad (40)$$

$$P(m,\theta)=\frac{e^2\mu\, n}{c^3}\frac{m^2\omega_0^2}{\left(1-\frac{nV_{\parallel}}{c}\cos\theta\right)^3}S_N(m,\theta)\times$$

$$\times\left\{V_{\perp}^2\left[\frac{m^2}{q_{0m}^2}J_m^2(q_{0m})+J_m'^2(q_{0m})\right]+\left(V_{\parallel}^2-\frac{c^2}{n^2}\right)J_m^2(q_{0m})\right\}, \quad (41)$$

де

$$q_{0m}=\frac{nV_{\perp}}{c}\frac{m\sin\theta}{1-\frac{nV_{\parallel}}{c}\cos\theta}, \quad (42)$$

$$S(m,\theta)=\sum_{l,j=1}^{N}\cos\left\{m\omega_0\left(1-\frac{nV_{\parallel}}{c}\cos\theta\right)^{-1}\left(\Delta t_l-\Delta t_j\right)\right\}. \quad (43)$$

Для кутів $\theta\to 0$ та $\theta\to\pi$ $q_{0m}\to 0$, а кутовий розподіл потужності випромінювання на першій гармоніці, згідно з (41), визначається співвідношенням:

$$P(m=1,\theta)=\frac{e^2\mu n}{2c^3}S(m=1,\theta)\frac{\omega_0^2 V_\perp^2}{\left(1-\frac{nV_\parallel}{c}\cos\theta\right)^3}. \quad (44)$$

Для випадку руху одного електрона у вакуумі вирази (40), (41), (44) переходять у співвідношення, наведені в працях [27], [28].

Для випадку одного електрона ($S_1(\omega)=1$), підсумовуючи ряди в (40), (41) по функціях Бесселя цілочислового індекса та інтегруючи по θ, отримаємо повну потужність випромінювання одного електрона [29]:

$$P_{med}^{tot}=\frac{2}{3}\frac{e^2\mu n}{c^3}\omega_0^2 V_\perp^2\left(1-\frac{n^2V^2}{c^2}\right)^{-2}, \quad (45)$$

де

$$\omega_0=\frac{eB^{ext}}{m_0c}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \quad (46)$$

Підкреслимо, що основні формули, які визначають спектр випромінювання системи невзаємодіючих електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії в прозорих ізотропних середовищах, отримані послідовним врахуванням дисперсії.

IV. Тонка структура спектра випромінювання чотирьох електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії у прозорому середовищі

Тонка структура спектра випромінювання чотирьох електронів, що рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії в прозорому ізотропному середовищі, отримана числовим методом високої точності. Функції спектрального розподілу потужності випромінювання електронів розраховані згідно співвідношень (26)–(29) при $B^{ext}=1$ Гс, $\mu=1$, $V_{\perp med}=0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\parallel med}=0{,}15\cdot10^{10}$ см/с, $r_{0j}=1530$ см, $\omega_{0j}=0{,}1307\cdot10^8$ рад/с (j=1, 2, 3,...,9), $c=0{,}2997925\cdot10^{11}$ см/с (див. рис. 3-9).

При дослідженні спектра синхротронного випромінювання нижче черенковського бар'єра ($V<c/n$) числові розрахунки проведено при $n=1{,}3$, $V_{\perp med}=0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\parallel med}=0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. При малому зміщенні у часі між електронами $\Delta t_{12}^2=\Delta t_{23}^2=\Delta t_{34}^2=0{,}001\cdot\pi/\omega_{02}$ (крива 2 на рис. 3) фактор когерентності $S_4(\omega)\cong16$, а чотири електрони випромінюють як заряджена частинка з зарядом $4e$ і масою $4m_0$, тобто в шістнадцять разів більше, ніж один електрон ($P_{med2}^{\text{int}}\cong16P_{med1}^{\text{int}}$).

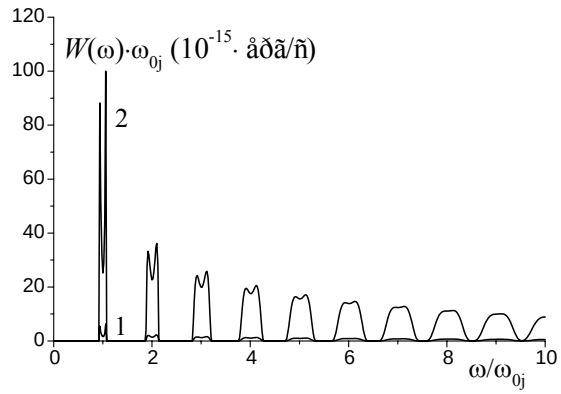

Рис. 3. Спектральний розподіл потужності синхротронного випромінювання на низьких гармоніках при $n=1{,}3$, $V_{\perp med}=0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\parallel med}=0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 1 відповідає одному електрону з $P_{med1}^{\text{int}}=0{,}3992\cdot10^{-14}$ ерг/с, крива 2 – чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^2=\Delta t_{23}^2=\Delta t_{34}^2=0{,}001\cdot\pi/\omega_{02}$ з потужністю $P_{med2}^{\text{int}}=0{,}6384\cdot10^{-13}$ ерг/с.

Визначена згідно (38) потужність випромінювання на межах першої гармоніки у випадку одного електрона при $n=1{,}3$ (крива 1 на рис. 3) на нижній межі дорівнює $W_1\left(\omega_1^{\min}\right)=0{,}5491\cdot10^{-14}$ ерг/с, а на верхній – $W_1\left(\omega_1^{\max}\right)=0{,}6255\cdot10^{-14}$ ерг/с. Ці величини добре узгоджуються з потужністю, що розрахована згідно співвідношень (26)–(29).

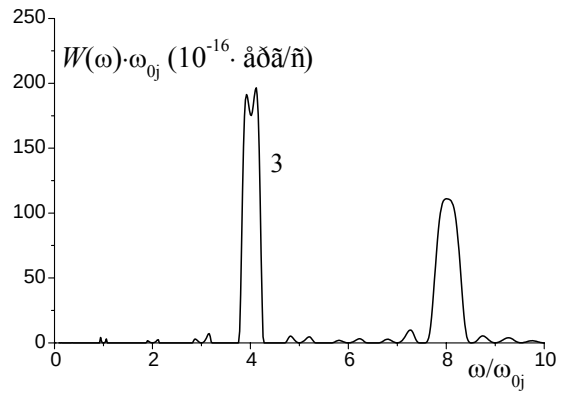

Рис.4. Спектральний розподіл потужності синхротронного випромінювання на низьких гармоніках при $n=1{,}3$, $V_{\perp med}=0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\parallel med}=0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 3 відповідає чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^3=\Delta t_{23}^3=\Delta t_{34}^3=\pi/(2\,\omega_{03})$ з потужністю $P_{med3}^{\text{int}}=0{,}1357\cdot10^{-13}$ ерг/с.

У випадку рівномірного розподілу чотирьох електронів вздовж гвинтової лінії при зміщенні в часі

$\Delta t_{12}^{j} = \Delta t_{23}^{j} = \Delta t_{34}^{j} = \pi/(2\cdot\omega_{0j})$ (криві j=3, 6, 9 на рис. 4, 7, 9), встановлено, що на частотах $(4i-3)\omega_{0j}$, $(4i-2)\omega_{0j}$ та $(4i-1)\omega_{0j}$ (j=3, 6, 9; i=1,2,3,…,7,…) випромінювання відсутнє.

Повна потужність випромінювання одного електрона по всій частотній області $P_{med4}^{tot} = 0{,}8546\cdot10^{-14}$ ерг/с, що знайдена з виразу (45), добре узгоджується з потужністю, проінтегрованою згідно співвідношень (26) і (27): $P_{med4}^{\text{int}} = \overline{P}_4^{rad} = 0{,}8527\cdot10^{-14}$ ерг/с (див. криву 4 на рис.5). Це порівняння підтверджує високу точність числового методу розрахунку.

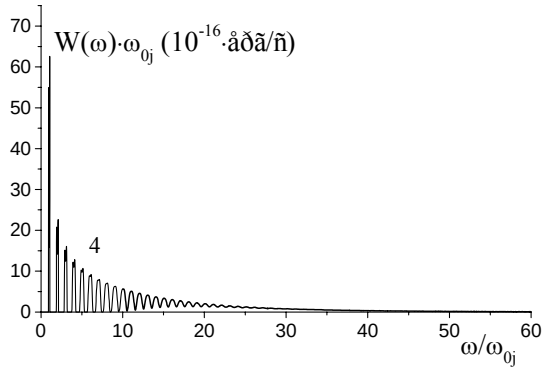

Рис. 5. Спектральний розподіл потужності синхротронного випромінювання на високих гармоніках при $n = 1{,}3$, $V_{\perp med} = 0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 4 відповідає одному електрону з $P_{med4}^{\text{int}} = 0{,}8527\cdot10^{-14}$ ерг/с.

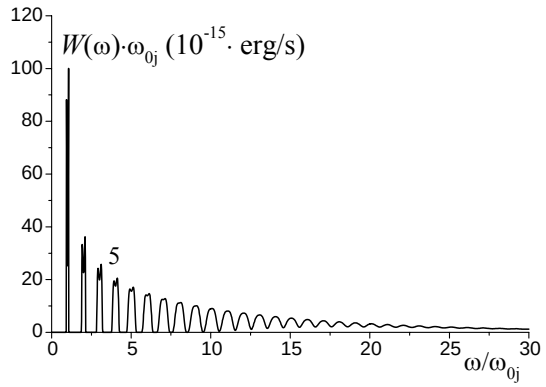

Рис. 6. Спектральний розподіл потужності синхротронного випромінювання на високих гармоніках при $n = 1{,}3$, $V_{\perp med} = 0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 5 відповідає чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^{5} = \Delta t_{23}^{5} = \Delta t_{34}^{5} = 0{,}001\cdot\pi/\omega_{05}$ з потужністю $P_{med5}^{\text{int}} = 0{,}1230\cdot10^{-12}$ ерг/с.

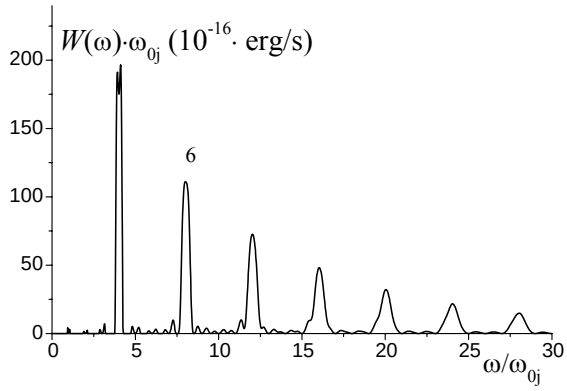

Рис.7. Спектральний розподіл потужності синхротронного випромінювання на високих гармоніках при $n = 1{,}3$, $V_{\perp med} = 0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 6 відповідає чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^{6} = \Delta t_{236}^{6} = \Delta t_{34}^{6} = \pi/(2\,\omega_{06})$ з потужністю $P_{med6}^{\text{int}} = 0{,}2827\cdot10^{-13}$ ерг/с.

При дослідженні спектра синхротронно-черенковського випромінювання вище черенковського бар'єра ($V > c/n$) числові розрахунки проведено при $n = 1{,}7$, $V_{\perp med} = 0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15\cdot10^{10}$ см/с.

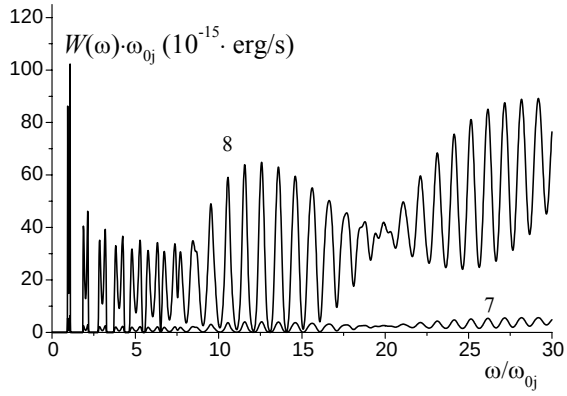

Рис. 8. Спектральний розподіл потужності синхротронно-черенковського випромінювання за гармоніками при $n = 1{,}7$, $V_{\perp med} = 0{,}2\cdot10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15\cdot10^{10}$ см/с. Крива 1 відповідає одному електрону з $P_{med7}^{\text{int}} = 0{,}5946\cdot10^{-13}$ ерг/с, крива 2 – чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^{8} = \Delta t_{23}^{8} = \Delta t_{34}^{8} = 0{,}001\cdot\pi/\omega_{08}$ з потужністю $P_{med8}^{\text{int}} = 0{,}9455\cdot10^{-12}$ ерг/с.

Визначена згідно (38) потужність випромінювання на межах першої гармоніки у випадку одного електрона при $n = 1{,}7$ (крива 7 на рис. 8) на нижній межі дорівнює $W_1\left(\omega_1^{\min}\right) = 0{,}5390\cdot10^{-14}$ ерг/с, а на верхній –

$W_1\left(\omega_1^{\max}\right) = 0{,}6392 \cdot 10^{-14}$ ерг/с.

У випадку чотирьох електронів, що рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії, при $n = 1{,}7$ та $\Delta t_{12}^8 = \Delta t_{23}^8 = \Delta t_{34}^8 = 0{,}001 \cdot \pi / \omega_{08}$, залежність функції спектрального розподілу потужності випромінювання набуває більш немонотонного характеру (див. криві 8 та 9 на рис. 8 і 9).

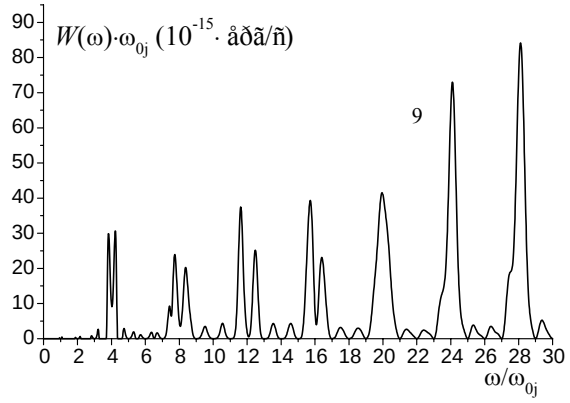

Рис.9. Спектральний розподіл потужності синхротронно-черенковського випромінювання за гармоніками при $n = 1{,}7$, $V_{\perp med} = 0{,}2 \cdot 10^{11}$ см/с, $V_{\|med} = 0{,}15 \cdot 10^{10}$ см/с. Крива 9 відповідає чотирьом електронам, що рухаються один за одним при $\Delta t_{12}^9 = \Delta t_{236}^9 = \Delta t_{34}^9 = \pi/(2\,\omega_{09})$ з потужністю $P_{med9}^{\text{int}} = 0{,}2353 \cdot 10^{-12}$ ерг/с.

З проведених розрахунків (див. рис. 3-9) випливає, що на низьких гармоніках смуги випромінювання електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії, мають дискретний характер у випадку малої поздовжньої компоненти швидкості (компонента, що паралельна вектору магнітної індукції). На вищих гармоніках максимуми в спектральному розподілі зумовлені переважно накладанням m–ї гармоніки та $m+1$–ї гармоніки, а також внеском інших гармонік. Ці результати узгоджуються з дослідженнями, наведеними у праці [15].

Синхротронно-черенковське випромінювання чотирьох електронів являє собою єдиний процес і набуває осцилюючого характеру при збільшенні величини поперечної складової швидкості електрона.

Висновки

1. Для малої поздовжньої компоненти швидкості, на низьких гармоніках смуги випромінювання електронів, що рухаються вздовж гвинтової лінії, мають дискретний характер у випадку малої поздовжньої компоненти швидкості. На вищих гармоніках максимуми в спектральному розподілі зумовлені переважно накладанням m–ї та $m+1$–ї гармонік, а також внеском інших гармонік
2. Вплив ефекту Доплера визначає межі смуг окремих гармонік у спектрі випромінювання чотирьох електронів, що рухаються один за одним вздовж гвинтової лінії у середовищі.
3. При малому зміщенні у часі чотири електрони випромінюють як заряджена частинка з зарядом $4e$ і масою спокою $4m_0$, тобто в шістнадцять разів більше, ніж один електрон.
4. У випадку рівномірного розподілу чотирьох електронів вздовж гвинтової лінії при зміщенні в часі $\Delta t_{12}^j = \Delta t_{23}^j = \Delta t_{34}^j = \pi/(2 \cdot \omega_{0j})$ (j=3, 6, 9) на частотах $(4i-3)\,\omega_{0j}$ $(4i-2)\,\omega_{0j}$ і $(4i-1)\,\omega_{0j}$ (j=3, 6, 9; i=1,2,…,7,…) випромінювання відсутнє.
5. Синхротронно-черенковське випромінювання являє єдиний процес. Вплив ефекта Доплера на особливості спектрального розподілу потужності випромінювання електрона суттєвий поблизу черенковського бар'єра.

Автори висловлюють щиру подяку доктору фізико-математичних наук, професору Вавруху М.В. за корисні вказівки.

Константинович А.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Константинович І.А. – кандидат фізико-математичних наук, асистент.

[1] G.A. Schott. The Radiation of Electrons Groups// *Annalen der Physik* , .**24 (**14), pp.. 635–660 (1907).
[2] G.A. Schott. Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions arising from It, Cambridge, University Press, 1912, 330p.
[3] И.М. Тернов. Синхротронное излучение // *УФН*, **165**(4), сс. 429–456 (1995).
[4] А.В. Константинович, В.В. Фортуна. К теории излучения невзаимодействующих зарядов, движущихся в постоянном магнитном поле в вакууме // *Известия высших учебных заведений. Физика*, № 12, сс. 102-104 (1983).
[5] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Radiation Power Spectral Distribution of Electrons Moving in a Spiral in Magnetic Fields // *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, **5**(5), pp. 1423–1431 (2003).
[6] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Radiation Spectra of Charged Particles Moving in a Spiral in Magnetic Fields // *Proceedings of the Romanian Academy,* **4**(3), pp. 175–182 (2003).
[7] A.V. Konstantinovich, I.A. Konstantinovich. Radiation Spectra of Charged Particles Moving in Magnetic Fields in Vacuum and in Medium // *Romanian Journal of Optoelectronics*, **12**(3), pp. 13-25 (2004).

[8] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Radiation Power Spectral Distribution of Two Electrons Moving in Magnetic Field // *Semiconductor Physics. Quantum Electronics & Optoelectronic*s, **8**(2), pp 253–258 (2005).
[9] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Radiation Spectra of Charged Particles Moving in Magnetic Fields // *Romanian Journal of Physics*, **50(**3–4), pp.. 347–356 (2005).
[10] Konstantinovich A.V., Konstantinovich I.A. Radiation Spectrum of Electrons Moving in Magnetic Field in Vacuum // *Romanian Reports in Physics,* **58**, No (2), pp. 101–106 (2006).
[11] A.V. Konstantinovich, I.A. Konstantinovich. Radiation Power Spectral Distribution of the System of Electrons Moving in a Spiral in Vacuum // *J. of Optoelectronics and Advanced Materials*, **8(**6), pp. 2143–2147 (2006).
[12] А.В. Константинович, С.В. Мельничук, І.М. Раренко, І.А. Константинович, В.П. Жаркой. Спектр випромінювання системи заряджених частинок, що рухаються в непоглинаючому ізотропному середовищі // *Журнал фізичних досліджень*, **4** (1), сс. 48–56 (2000).
[13] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Fine Structure of Radiation Spectrum of Charged Particles Moving in Magnetic Fields in Nonabsorbable Isotropic Media and in Vacuum // *Romanian Journal of Physics*, **48**(5–6), pp. 717–725 (2003).
[14] А.В. Константинович, І.А. Константинович. Особливості спектра випромінювання заряджених частинок, що рухаються в магнітному полі в прозорому середовищі // *Фізика і хімія твердого тіла,* **6(**4). сс. 535–541 (2005)
[15] I.A. Konstantinovich, A.V. Konstantinovich. Radiation Spectrum of Charged Particles Moving in Magnetic Field in Medium // *Romanian Journal of Physics,*. **51(**5–6), pp. 547–555 (2006).
[16] Дж. Джексон. Классическая электродинамика, Москва: Мир, 1965, 702с.
[17] А.В. Константинович, В.М. Ницович. Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // *Изв. высш. учебн. завед. Физика*. 2, сс. 59–62 (1973).
[18] А.В. Константинович, С.В. Мельничук, І.А. Константинович. Класична теорія випромінювання заряджених частинок. І. Запізнюючі і випереджаючі потенціали та напруженості електромагнітного поля і метод сили самодії Лоренца // *Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 102. Фізика. Електроніка*, Чернівці: Рута, 2001, сс. 5–13.
[19] М.А. Лаврентьев,. Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973, 736 с.
[20] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: Наука, 1971, 1108 с.
[21] P.A.M. Dirac Classical Theory of Radiating Electrons // *Proc. Roy. Soc*. A, **167**(1), pp. 148–169 (1938).
[22] J. Schwinger. On the Classical Radiation of Accelerated Electrons // *Phys. Rev.* **75**(12), pp. 1912–1925 (1949).
[23] R.G. Beils. Alternative Formulations in Classical Electrodynamics// *Phys. Rev. Ser. D*, **12(**8), pp. 2266-2268 (1975).
[24] J. Schwinger, Tsai Wu-yang, T. Erber. Classical and Quantum Theory of Synergic Synchrotron-Čerenkov Radiation // *Ann. of Phys*. **96**(2), pp. 303–332 (1976).
[25] А. В. Константинович, В. М. Ніцович. Спектральний розподіл потужності випромінювання заряду, що рухається по спіралі в диспергуючому прозорому феродіелектрику//*УФЖ,* **18**(5),сс. 853-854 (1973).
[26] А.Б. Куканов, А.В. Константинович. Об одном обобщении метода охватывающих поверхностей в классической теории излучения // *Известия высших учебных заведений. Физика,* 8, сс. 7–11 (1975).
[27] А.А. Соколов, В.Ч. Жуковский, М.М. Колесникова, Н.С. Никитина, О.Е. Шишанин. К теории синхротронного излучения при движении электрона по спирали // *Изв. высш. учебн. завед. Физика*, 2, сс. 108–116 (1969)
[28] A.V. Konstantinovich, S.V. Melnychuk, I.A. Konstantinovich. Radiation Spectrum of an Electron Moving in a Spiral in Magnetic Field in Transparent Media and in Vacuum *// Journal of Materials Science. Materials in Electronics*, **17(**4), pp. 315-320 (2006).
[29] А.В. Константинович, В.М. Ницович. Энергетические потери заряда, движущегося по спирали в прозрачном диэлектрике // *Изв. высш. учебн. завед. Физика,* 2, сс. 59–62 (1973).

A.V. Konstantinovich[1], I.A. Konstantinovich[2]

The Radiation Spectrum of Four Electrons which Move in a Spiral in a Transparent Medium

[1]Chernivtsi National University, Kotsybynsky Str.,2, Chernivtsi, 58012, Ukraine,
E-mail: theormyk@chnu.cv.ua; aconst@hotbox.ru
[2]Institute of Thermoelectricity NAS and MES of Ukraine,
Dubinska Str., 9a, Chernivtsi, 58027, Ukraine

By the improved Lorentz's self-interaction force method the spectral distribution of the average radiation power of a system of electrons, which move in magnetic field are consistently investigated. For the first time we have obtain and studied the fine structure for the radiation spectrum of four non-interacting electrons which move one by one along a spiral in transparent medium.