ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2008. Вип.68. С.152-157 *Ser.Mech-Math. 2008. Vol.68. P.152-157*

УДК 515.12

ПРОСТІР ФАКТОРОБ'ЄКТІВ КОМПАКТНОГО ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ

Катерина КОПОРХ

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника,
76000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57

Наведено топологізацію множини фактороб'єктів компактного топологічного простору, породжену топологією Вайсмана на множині всіх замкнених підалгебр алгебри неперервних функцій.

Ключові слова: топологія Вайсмана, простір фактороб'єктів.

Гіперпростори $\exp(X)$ топологічних просторів широко застосовують у різних галузях математики. Кожен елемент A гіперпростору $\exp(X)$ – це підоб'єкт в X, який природно інтерпретують як клас еквівалентності вкладень у простір X. Є.В. Щепін [1] розглядав дуальний до $\exp(X)$ об'єкт $\Phi(X)$ – множину факторвідображень заданого компакта X; така множина відіграє суттєву роль у його теорії незліченних обернених спектрів. Мета нашої праці – топологізація простору $\Phi(X)$, породжена топологією Вайсмана на множині всіляких можливих непорожніх замкнених множин в функціональних просторах $C(X)$, наділених sup-нормою.

Головний результат – побудова контраваріантного функтора Φ з категорії Comp компактних просторів і неперервних відображень в категорію Top топологічних просторів і неперервних відображень.

Надалі всі апріорно задані відображення вважаємо неперервними. Під "компактом" розуміємо "компактний гаусдорфовий простір".

1. ***Множина CL(X)***. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Позначимо через $CL(X)$ множину всіх непорожніх замкнених підмножин простору X. На множині $CL(X)$ можна ввести різні топологізації. Для наших потреб знадобиться топологія Вайсмана [2]. Базисним околом елемента $A \in CL(X)$ буде множина

$$O(A; x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon) = \{B \in CL(X) \quad | \quad | \rho(x_i, A) - \rho(x_i, B) | < \varepsilon\},$$

де $x_1, x_2, ..., x_n \in X, \varepsilon > 0$. Топологію Вайсмана в $CL(X)$ позначаємо τ_w.

2. ***Алгебра C(X)***. Нехай X-компакт. Як звичайно, через $C(X)$ позначаємо алгебру всіх дійснозначних неперервних функцій на X. Множина $C(X)$ є метричним простором щодо метрики, індукованої sup-нормою. Метрику в $C(X)$, породжену sup-нормою, будемо позначати ρ.

Якщо $f : X \to Y$ – неперервне відображення, то через $f_* : C(Y) \to C(X)$ ми позначаємо індуковане відображення, $f_*(\varphi) = \varphi \circ f, \varphi \in C(Y)$. Через $A(X)$ позначимо множину всіх замкнених підалгебр алгебри $C(X)$.

Твердження 1. *Нехай X – компакт. Множина $A(X)$ замкнена в просторі $CL(C(X))$.*

Доведення. Розглянемо множину $CL(C(X)) \setminus A(X)$. Нехай $M \in (CL(C(X)) \setminus A(X))$, тобто множина M не є алгеброю в просторі $C(X)$. Тоді існують елементи $m_1, m_2 \in M$ і $\alpha \in R$ такі, що або $m_1 + m_2$, або $\alpha \times m_i, i = 1, 2$, або $m_1 \cdot m_2$ не належить M. Покажемо, що існує окіл $O(M)$ елемента M такий, що $O(M) \cap A(X) = \emptyset$, тобто $O(M) \subset CL(C(X)) \setminus A(X)$. Далі доведення розбивається на три випадки.

1. Припустимо, що існують елементи $m_1, m_2 \in M$ такі, що $(m_1 + m_2) \notin M$. Тоді існують околи $U_\delta(m_1), U_\delta(m_2), U_\varepsilon(m_1 + m_2)$ такі, що:

а) $U_\delta(m_1) + U_\delta(m_2) \subset U_\varepsilon(m_1 + m_2)$; б) $M \cap U_\varepsilon(m_1 + m_2) = \emptyset$.

Розглянемо окіл $O(M; m_1, m_2, m_1 + m_2; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid \rho(N, m_1) < \delta, \rho(N, m_2) < \delta, |\rho(N, m_1+m_2) - \rho(M, m_1+m_2)| < \varepsilon\}$ елемента M. Оскільки $M \cap U_\varepsilon(m_1+ +m_2) = \emptyset$, то відстань від елемента m_1+m_2 до множини M величина додатна і позначимо її $d = \rho(M, m_1 + m_2)$. Приймемо $\varepsilon = d/3$, а δ підберемо так, щоб виконувалась умова (а). Виберемо довільно елемент N' з околу $O(M; m_1, m_2, m_1+m_2; \delta, \varepsilon)$ тоді виконуються такі умови: $\rho(N', m_1) < \delta$, $\rho(N', m_2) < \delta$, $|\rho(N', m_1+m_2) - \rho(M, m_1+m_2)| < \varepsilon$. Нехай $n_1, n_2 \in N'$ і припустимо, що $(n_1 + n_2) \in N'$. З того, що $\rho(N', m_i) < \delta$, де $i = 1; 2$ випливають такі включення: $n_1 \in U_\delta(m_1), n_2 \in U_\delta(m_2)$, тоді з умови (а) випливає $n_1 + n_2 \in U_\varepsilon(m_1 + m_2)$, тобто, $\rho(n_1 + n_2, m_1 + m_2) < \varepsilon$. Далі міркуємо так: $\rho(N', m_1 + m_2) \leqslant \rho(n_1 + n_2, m_1 + m_2) < \varepsilon$ тоді з нерівності $|\rho(N', m_1 + m_2) - -\rho(M, m_1 + m_2)| < \varepsilon$ випливає $|d/3 - d| < d/3$, тобто, $2 < 1$.

Ми прийшли до суперечності, а отже, $n_1 + n_2 \notin N'$.

2. Припустимо, що існує елемент $m \in M$ такий, що $\alpha m \notin M$ при деякому $\alpha \in R$. Тоді існують околи $U_\delta(m), U_\varepsilon(\alpha m)$ такі, що

а) $\alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$, б) $U_\varepsilon(\alpha m) \cap M = \emptyset$.

Нехай $d = \rho(M, \alpha m) > 0$, знову приймемо $\varepsilon = d/3$. Розглянемо окіл $U_\varepsilon(\alpha m)$, тоді можна підібрати таке $\delta \in R$, для якого $\alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$. Збудуємо окіл $O(M; m, \alpha m; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid |\rho(m, M) - \rho(m, N)| < \delta \Rightarrow |\rho(\alpha m, M) - -\rho(\alpha m, N)| < \varepsilon\}$ елемента M. Виберемо довільно елемент $K \in O(M; m, \alpha m; \delta, \varepsilon)$ тоді з нерівності $|\rho(m, M) - \rho(m, N)| < \delta$ випливає $\rho(m, K) < \delta$, а це означає, що знайдеться елемент $k \in K$ такий, що $k \in U_\delta(m)$. Тоді $\alpha k \in \alpha U_\delta(m) \subset U_\varepsilon(\alpha m)$. Покажемо, що $\alpha k \notin K$. Припустимо протилежне, нехай $\alpha k \in K$, тоді $\rho(\alpha m, K) \leqslant \leqslant \rho(\alpha m, \alpha k) < \varepsilon$. З умови, що K елемент околу, випишемо $|\rho(\alpha m, M) - \rho(\alpha m, N)| < \varepsilon$, але $\rho(\alpha m, M) = d, \varepsilon = d/3$ і $\rho(\alpha m, K) < d/3$, тоді $|d - d/3| < d/3$, тобто $2 < 1$ – суперечність.

Отже, $\alpha k \notin K$.

3. Припустимо, що існують елементи $m_1, m_2 \in M$ такі, що $(m_1 \cdot m_2) \notin M$. Тоді існують околи $U_\delta(m_1), U_\delta(m_2)$ і $U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$ такі, що:

а) $U_\delta(m_1) \cdot U_\delta(m_2) \subset U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$; б) $M \cap U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2) = \emptyset$.

Розглянемо окіл $O(M; m_1, m_2, m_1 \cdot m_2; \delta, \varepsilon) = \{N \in CL(C(X)) \mid \rho(N, m_1) < \delta, \rho(N, m_2) < \delta, |\rho(N, m_1 \cdot m_2) - \rho(M, m_1 \cdot m_2)| < \varepsilon\}$ елемента M. Оскільки $M \cap U_\varepsilon(m_1 \times \times m_2) = \emptyset$, то відстань від елемента $m_1 \cdot m_2$ до множини M величина додатна і позначимо її $d = \rho(M, m_1 \cdot m_2)$. Приймемо $\varepsilon = d/3$, а δ підберемо так, щоб виконувалась умова (a). Виберемо довільно елемент K з околу $O(M; m_1, m_2, m_1 \cdot m_2; \delta, \varepsilon)$. Тоді з умов $\rho(K, m_1) < \delta$ і $\rho(K, m_2) < \delta$ випливає, що існують $k_1, k_2 \in K$ такі, що $k_1 \in U_\delta(m_1), k_2 \in U\delta(m_2)$. Тоді з умови (a) одержуємо $k_1 \cdot k_2 \in U_\delta(m_1) \cdot U_\delta(m_2) \subset$ $\subset U_\varepsilon(m_1 \cdot m_2)$. Припустимо, що $(k_1 \cdot k_2) \in K$, а отже, $\rho(K, m_1 \cdot m_2) \leqslant \rho(k_1 \cdot k_2, m_1 \cdot m_2) < \varepsilon$ тоді з нерівності $|\rho(K, m_1 \cdot m_2) - \rho(M, m_1 \cdot m_2)| < \varepsilon$ випливає $|d/3 - d| < d/3$, тобто $2 < 1$.

Ми прийшли до суперечності, а отже, $k_1 \cdot k_2 \notin K$. Отож, якщо елемент M не є алгеброю, то можна збудувати такий окіл $O(M)$ цього елемента, що всі елементи цього околу теж не утворюють алгебр. Отже, множина $A(X)$ замкнена підмножина простору $(CL(C(X)), \tau_w)$.

3. ***Множина Φ(X) та її топологізація***. Нехай X – компакт. Розглянемо множину M всіх сюр'єктивних неперервних відображень простору X. Кожне сюр'єктивне неперервне відображення $f\colon X \to Z$ породжує деяке розбиття простору X на "шари а саме $(f^{-1} \circ f)$ є відображенням з X в $CL(X)$, яке кожній точці $x \in X$ ставить у відповідність певний "шар який її містить. Відображення $(f^{-1} \circ f)$ є факторвідображенням, яке відображає X у простір, породжений розшаруванням відображення f.

Два відображення називаємо еквівалентними $f_1 \sim f_2$, де $f_1\colon X \to Z_1$ і $f_2\colon X \to Z_2$, якщо існує гомеоморфізм $h\colon Z_1 \to Z_2$ такий, що $f_2 = h \circ f_1$, тобто діаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & Z_1 \arrow[d, "h"] \\ & Z_2 \end{tikzcd}$$

комутативна. Отож, множина M сюр'єктивних неперервних відображень, розіб'ється на класи еквівалентних відображень. Позначимо множину класів $\hat{\Phi}(X) =$ $= \{[f] \mid f\colon X \to Z\}$. Нехай $[f] \in \hat{\Phi}(X)$, де $f\colon X \to Z$ – неперервне відображення. Розглянемо всілякі можливі неперервні дійснозначні функції на Z, позначимо множину цих відображень $C(Z) = \{\varphi\colon Z \to R\}$. Кожне відображення $f\colon X \to Z$ породжує деяке дуальне відображення $f_*\colon C(Z) \to C(X)$, яке діє за правилом $f_*(\varphi) = \varphi \circ f$, де $\varphi \in C(Z)$. Якщо f сюр'єктивне, то відображення $f_*\colon C(Z) \to C(X)$ є вкладенням. Тобто образ $f_*(C(Z))$ є замкнутою підмножиною в просторі $C(X)$, а отже, є елементом простору $CL(C(X))$. Отож, кожному класу еквівалентності (елементу множини $\hat{\Phi}(X)$) ставимо у відовідність елемент простору $CL(C(X))$, отже, ми задаємо деяке відображення $e\colon \hat{\Phi}(X) \to CL(C(X))$, яке є ін'єктивним відображенням і діє так: $e([f]) = f_*(C(Z))$. Отже, множину $\hat{\Phi}(X)$ можна розглядати як деяку підмножину простору $CL(C(X))$. Приймемо $\Phi(X) = e(\hat{\Phi}(X))$. На множині $\Phi(X)$ розглядаємо топологію, індуковану вкладенням $e\colon \hat{\Phi}(X) \to CL(C(X))$, де $CL(C(X))$ наділяють топологією Вайсмана.

Лема 1. *Кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкненою підалгеброю в $C(X)$.*

Доведення. Розглянемо деякий клас еквівалентності $[\varphi] \in \Phi(X) \subset CL(C(X))$; всі функції цього класу породжують у просторі X те саме розбиття. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in [\varphi]$ і елементи $x, y \in X$ належать до того самого елемента розбиття множини X, тобто $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$ і $\varphi_2(x) = \varphi_2(y)$. Тоді будуть справджуватися такі рівності:

1) $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y)$ тобто $(\varphi_1 + \varphi_2) \in [\varphi]$;

2) $\forall\alpha \in R$ правильно $\alpha\varphi_i(x) = \alpha\varphi_i(y)$, де $i = 1; 2$, отже, $\alpha\varphi_i \in [\varphi]$;

3) $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \varphi_1(y) \cdot \varphi_2(y)$, тобто $(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \in [\varphi]$.

Отже, кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкнутою підалгеброю простору $C(X)$.

З твердження 1 випливає, що кожен елемент множини $\Phi(X)$ є замкнутою підалгеброю простору $C(X)$.

Твердження 2. *Множина* $\Phi(X)$ *замкнена в* $A(X)$.

Доведення. Нехай $F = \{f \mid f\colon X \to \mathbb{R}\} \in \overline{\Phi(X)}$, тоді F – алгебра в $C(X)$. Позначимо для кожного $f \in F$ через $R_f = f(X)$. Розглядаємо добуток $Z = \prod\limits_{f\in F} R_f$ і задаємо відображення $\psi\colon X \to Z$. Покажемо, що правильна рівність $F = \psi_*(C(Z))$. Справді, для кожного $f \in F$ існує $f' \in C(Z)$ таке, що $f = f' \circ \psi$, тобто, кожен елемент з F міститься в $\psi_*(C(Z))$, а отже, $F \subset \psi_*(C(Z))$.

Виберемо довільно елемент $\varphi \in \psi_*(C(Z))$ і перевіримо виконання включення $\varphi \in F$. Для всіх $\varphi \in \psi_*(C(Z))$ позначимо через $\hat{\varphi}$ такий елемент з $C(Z)$, що виконується рівність $\varphi = \hat{\varphi} \circ \psi$. Розглянемо множину $\hat{F} = \{\hat{\varphi} | \varphi \in F\}$. Зрозуміло, що $\hat{F} \subset C(Z)$. Множина F є замкненою підалгеброю простору $C(X)$. Тому $\hat{F}$ замкнута підмножина простору $C(Z)$ як прообраз замкнутої множини $\hat{F} = \{\hat{\varphi} | \varphi \in F\} = \psi_*^{-1}(F)$. Покажемо, що $\hat{F}$ є алгеброю в $C(Z)$. З того, що F є підалгеброю простору $C(X)$, одержуємо виконання таких співвідношень: $\varphi_1 + \varphi_2 \in F; \alpha\varphi \in F$ і $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in F$, де $\varphi_1, \varphi_2, \varphi \in F$ і $\alpha \in R$. Далі нехай x – довільний елемент простору X, тоді

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \hat{\varphi_1} \circ \psi(x) + \hat{\varphi_2} \circ \psi(x) = (\hat{\varphi_1} + \hat{\varphi_2}) \circ \psi(x),$$

отже, існує такий елемент $\varphi_1+\varphi_2 \in F$, що $(\varphi_1+\varphi_2)=(\hat{\varphi_1}+\hat{\varphi_2}) \circ \psi$, тобто $(\hat{\varphi_1}+\hat{\varphi_2})\in\hat{F}$. Аналогічними міркуваннями покажемо, що $\alpha\hat{\varphi} \in \hat{F}$ і $(\hat{\varphi_1} \cdot \hat{\varphi_2}) \in \hat{F}$. Саме з $\alpha\varphi(x) = \alpha(\hat{\varphi} \circ \psi)(x) = (\alpha\hat{\varphi}) \circ \psi(x)$ випливає $\alpha\hat{\varphi} \in \hat{F}$. І з співвідношення $(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \hat{\varphi_1} \circ \psi(x) \cdot \hat{\varphi_2} \circ \psi(x) = (\hat{\varphi_1} \cdot \hat{\varphi_2}) \circ \psi(x)$ випливає $(\hat{\varphi_1} \cdot \hat{\varphi_2}) \in \hat{F}$. Це означає, що $\hat{F}$ – підалгебра в $C(Z)$.

Нехай $\hat{a}$ – деяка стала функція з $C(Z)$ і знайдеться така функція $a \in C(X)$, що $a = \hat{a} \circ \psi$. Припустимо, що $a \notin F \in \overline{\Phi(X)}$ і відповідно $\hat{a} \notin \hat{F}$. Тоді $\rho(a, F) = d > 0$. Побудуємо окіл $O(F; a; \varepsilon) = \{K \in CL(C(X)) || \rho(a, K) - \rho(a, F)| < \varepsilon\}$ елемента F. З умови $|\rho(a, K) - \rho(a, F)| < \varepsilon$ випливає $d - \varepsilon < \rho(a, K) < d + \varepsilon$ приймемо $\varepsilon = d/2$ і отримаємо $d/2 < \rho(a, K) < 3d/2$, отже, існує окіл $O(F; a; d/2)$ елемента $F \in \overline{\Phi(X)}$ такий, що $O(F; a; d/2) \cap \Phi(X) = \emptyset$, а це означає, що $F \notin \overline{\Phi(X)}$. Отже, наше припущення не правильне $a \in F$ і $\hat{a} \in \hat{F}$. Отож, множина $\hat{F}$ містить всі константи.

Покажемо, що $\hat{F}$ розділяє точки в Z. Нехай $z_1, z_2 \in Z$ такі, що $z_1 \neq z_2$. Оскільки $Z = \psi(X)$, то знайдуться такі елементи $x_1, x_2 \in X$, що $z_1 = \psi(x_1)$ і $z_2 = \psi(x_2)$, отже, $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$. За побудовою відображення ψ маємо $\psi(x_1) = (f(x_1))_{f\in F}$ і $\psi(x_2) = (f(x_2))_{f\in F}$. Тобто знайдеться такий елемент $f \in F$, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, але $f = \psi_*(\hat{f}) = \hat{f} \circ \psi$, тому $\hat{f} \circ \psi(x_1) \neq \hat{f} \circ \psi(x_2)$ далі $\hat{f}(\psi(x_1)) \neq \hat{f}(\psi(x_2))$ звідси випливає $\hat{f}(z_1) \neq \hat{f}(z_2)$. Отже, $\hat{F}$ розділяє точки в Z.

Отож, множина $\hat{F}$ задовольняє всі умови теореми Стоуна-Вейєрштрасса (якщо A – підалгебра в $C(X)$, для компакта X, яка містить всі константи і розділяє точки, то $\overline{A} = C(X)$), отже, $\hat{F} = \overline{\hat{F}} = C(Z)$ звідки випливає $F = \psi_*(C(Z))$, що й треба було довести.

Отже, множина $\Phi(X)$ є замкненою підмножиною в $A(X)$, але $A(X)$ замкнена підмножина $(CL(C(X)), \tau_w)$, тобто $\Phi(X) = \overline{\Phi(X)}$ в просторі $(CL(C(X)), \tau_w)$.

4. *Приклад*. Нехай $X = [0,1]$, виберемо деяке $t \in [0,1]$ і приймемо $Z_t = [t,1]$. Визначимо відображення $f_t \colon X \twoheadrightarrow Z_t$, отож $f_t(s) = \max\{s,t\}$. Розглянемо відповідні елементи $[f_t] = \{(f_t)_*(C(Z_t))\}$ простору $(\Phi(X), \tau_w)$.

Виберемо послідовність $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, елементів відрізка $[0,1]$ збіжну до деякого елемента $t_0 \in [0,1]$ при $i \to \infty$, і покажемо, що відповідна послідовність $\{[f_{t_i}]\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до елемента $[f_{t_0}]$ при $i \to \infty$. Тобто, для кожного елемента φ з простору $C(X)$ правильне співвідношення $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \to \rho(\varphi, [f_{t_0}])$ при $i \to \infty$.

Припустимо, що послідовність $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ збігається до елемента t_0 знизу, тобто $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_0 =$. Якщо це не так, то зі збіжної послідовності $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ можна виділити дві збіжні підпослідовності, одна з яких збігатиметься до елемента t_0 знизу, а інша – зверху.

Розглянемо довільний елемент $\varphi \in C(X)$. Нехай $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) = a$, де $a > 0$. Тобто, для кожного $\varepsilon \geqslant 0$ знайдеться такий елемент $\psi_\varepsilon \in [f_{t_0}]$, що $\| \varphi - \psi_\varepsilon \| < a + \varepsilon$. В множині $[f_{t_0}]$ містяться функції сталі на інтервалі $[0, t_0]$, отже, $\psi_\varepsilon |_{[0,t_0]} = const$, а звідси випливає, що $\psi_\varepsilon |_{[0,t_i]} = const$, тобто $\psi_\varepsilon \in [f_{t_i}]$ для кожного $i \in N$. Отож, для кожного $i \in N$ відстань від елемента φ до класу $[f_{t_i}]$ не перевищує $a + \varepsilon$ для всіх $\varepsilon \geqslant 0$. Тобто, при $\varepsilon = 0$ отримаємо $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leqslant a$ для кожного $i \in N$, звідки випливає $\lim\limits_{i\to\infty} \rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leqslant a$.

Припустимо $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) < a$, тобто знайдеться деяке $a' < a$ таке, що $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) \leqslant a'$ для всіх $i \in N$. Зафіксуємо деяке значення a'' таке, що $a'' = (a - a')/2$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що в кожному класі $[f_{t_i}]$ існує елемент ψ_i такий, що $\| \psi_i - \varphi \| \leqslant a''$. Знайдеться номер $i \in N$ такий, що коливання функції φ на інтервалі $[t_i, t_0]$ не перевищуватиме деякого наперед заданого числа η. Приймемо $\eta = (a - a'')/2$, тоді $\omega(\varphi, [t_i, t_0]) = \eta$. Розглянемо функцію $\widetilde{\varphi} \in C(X)$ задану так:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(t_0), & \text{якщо } x \in [0, t_0]; \\ \varphi(x), & \text{якщо } x \in (t_0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно $\widetilde{\varphi} \in [f_{t_0}]$. Оцінимо відстань $\rho(\varphi, \widetilde{\varphi}) = \| \varphi - \widetilde{\varphi} \| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)|$. Розглянемо такі випадки: якщо $x \in [0, t_i]$, то

$$\| \varphi - \widetilde{\varphi} \| = |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \leqslant |\varphi(x) - \psi_i(x)| + |\psi_i(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \leqslant a'' + \eta.$$

Якщо $x \in (t_i, t_0]$, то $\| \varphi - \widetilde{\varphi} \| = |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(t_0)| \leqslant \eta$. Якщо $x \in (t_0, 1]$, то $\| \varphi - \widetilde{\varphi} \| = 0$. Тобто

$$\| \varphi - \widetilde{\varphi} \| = \begin{cases} a'' + \eta, & \text{якщо } x \in [0, t_i]; \\ \eta, & \text{якщо } x \in (t_i, t_0]; \\ 0, & \text{якщо } x \in (t_0, 1]. \end{cases}$$

З іншого боку, $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) \leqslant \rho(\varphi, \widetilde{\varphi}) = \| \varphi - \widetilde{\varphi} \|$, але згідно з викладеними міркуваннями $\rho(\varphi, [f_{t_0}]) = a$, де $a > 0$. Отже, $a \leqslant \| \varphi - \widetilde{\varphi} \| \leqslant \eta$, де $\eta = (a - a'')/2 < a/2$.

Ми отримали нерівність $a \leqslant \| \varphi - \widetilde{\varphi} \| \leqslant a/2$, що неможливо. Наше припущення не правильне, отже, для кожного $\varphi \in C(X)$ виконується рівність $\rho(\varphi, [f_{t_i}]) < a$ при $i \to \infty$.

5. *Відображення* Φ_f. Нехай нам задано неперервне відображення $f\colon X \to Y$, де X і Y – метричні компакти. Визначимо відображення $\Phi_f\colon \Phi(Y) \to \Phi(X)$ так: $\Phi_f([h]) = [h \circ f] = [g] \in \Phi(X)$. Візьмемо простір $X = [0,1]$ і $Y = \{y_0, y_1\}$ – зліченний дискретний простір. Розглянемо відображення $g\colon Y \to X$, яке діє так:

$$g(y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } y = y_0; \\ 1/2, \text{ якщо } y = y_1. \end{cases}$$

Тоді відображення Φ_g діє з простору $\Phi(X), \tau_W$ в простір $\Phi(Y), \tau_W$. Для того, щоби показати, що відображення Φ_g не є неперервним, скористаємось наведеним вище прикладом. Розглянемо $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi_g([f_{t_i}]) = \lim\limits_{i\to\infty} [1_Y] = [1_Y]$. З іншого боку, отримаємо $\Phi_g(\lim\limits_{i\to\infty} [f_{t_i}]) = \Phi_g([f_{t_0}]) = [const]$. Оскільки $[1_Y] \neq [const]$, то відображення Φ_g не є неперервним.

1. *Щепин Е.В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров / *Щепин Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31, Вип.5 (191). – С.197.
2. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов / *Щепин Е.В.* // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, Вип. 3 – С. 3-61.
3. *Beer G.* Topologies on Closed and Closed Convex Sets / *Beer G.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 340 p.
4. *Федорчук В.В.* Общая топология. Основные конструкции / *Федорчук В.В, Филипов В.В.* – М.: МГУ. – 1988. – 252 с.

A SPACE OF FACTOR-OBJECTS OF COMPACT TOPOLOGICAL SPACE

Kateryna KOPORKH

Vasyl Stephanyk Precarpathian National University,
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str., 57

An topologization of set factor-objects of compact topological space generated topology Vaisman on the set of all closed subalgebras algebra of continuous functions is obtained.

Key words: topology Vaisman, space of factor-objects

Стаття надійшла до редколегії 29.09.2008

Прийнята до друку 22.10.2008