

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей
104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та
наноматеріали, 114.08 Середня освіта (фізика)

Видання третє, виправлене

Івано-Франківськ
2021

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)» (протокол № 1 від 28 серпня 2021 року).

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-технічного факультету Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника,

Дмитришин Р. І., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Гой Т. П., Махней О. В.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник. Вид. 3-тє, випр. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2021. 248 с.

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь. Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)». Може бути корисним для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

©Т. П. Гой, О. В. Махней, 2021

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	9
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	11
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь	11
1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь	11
2. Основні означення й поняття	17
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	19
Питання до лекції 1	21
Вправи до лекції 1	22
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)	23
1. Основні означення й поняття	23
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	24
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку	27
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	29
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	30
Питання до лекції 2	32
Вправи до лекції 2	33
Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах	33
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	33
2. Однорідні рівняння	38
3. Рівняння, звідні до однорідних	41
Питання до лекції 3	45

Вправи до лекції 3	45
Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах (продовження)	46
1. Лінійні рівняння	46
2. Рівняння Бернуллі	50
3. Рівняння у повних диференціалах	54
4. Інтегрувальний множник	57
Питання до лекції 4	59
Вправи до лекції 4	60
Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	61
1. Основні означення й поняття	61
2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку	64
3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	68
Питання до лекції 5	71
Вправи до лекції 5	71
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	73
Лекція 6. Диференціальні рівняння вищих порядків	73
1. Основні означення й поняття	73
2. Неповні рівняння	77
3. Однорідні рівняння	83
Питання до лекції 6	85
Вправи до лекції 6	86
Лекція 7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	87
1. Основні означення й поняття	87
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	89
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	91
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння	94
5. Формула Остроградського–Ліувілля	96

6. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку	98
Питання до лекції 7	99
Вправи до лекції 7	100
Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	102
1. Основні означення й поняття	102
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	103
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	106
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	108
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів . . .	109
Питання до лекції 8	113
Вправи до лекції 8	114
Лекція 9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	115
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	115
2. Метод варіації довільних сталих	117
3. Метод невизначених коефіцієнтів	120
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	125
Питання до лекції 9	129
Вправи до лекції 9	130
РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	131
Лекція 10. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	131
1. Основні означення й поняття	131
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	137

3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	138
4. Лінійні однорідні системи	141
Питання до лекції 10	144
Вправи до лекції 10	145
Лекція 11. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	145
1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій	145
2. Формула Остроградського–Якобі	149
3. Теорема про побудову загального розв’язку лінійної однорідної системи	150
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	151
Питання до лекції 11	160
Вправи до лекції 11	160
Лекція 12. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	161
1. Структура загального розв’язку лінійної неоднорідної системи	161
2. Метод варіації довільних сталих	163
3. Метод невизначених коефіцієнтів	166
Питання до лекції 12	170
Вправи до лекції 12	170
РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	171
Лекція 13. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку	171
1. Зв’язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик	171
2. Побудова загального розв’язку лінійного однорідного рівняння	175
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння	178
Питання до лекції 13	180

Вправи до лекції 13	180
Лекція 14. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку .	181
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку	181
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	184
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	187
Питання до лекції 14	190
Вправи до лекції 14	190
РОЗДІЛ 5. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ	191
Лекція 15. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування	191
1. Основні означення й поняття	191
2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	193
3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь	196
4. Принцип стискаючих відображень	202
Питання до лекції 15	206
Вправи до лекції 15	206
Лекція 16. Лінійні інтегральні рівняння	207
1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма	207
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри	211
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма	214
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри	218
Питання до лекції 16	221
Вправи до лекції 16	222

Лекція 17. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду	223
1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття . . .	223
2. Теорема Фредгольма	225
3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду	234
Питання до лекції 17	238
Вправи до лекції 17	238
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	239
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	241
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	246

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування, а також вчителів фізики.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів спеціальностей «фізика та астрономія», «прикладна фізика та наноматеріали», «середня освіта (фізика)», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних закладів вищої освіти.

Метою посібника є ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 17 лекцій, які умовно можна поділити на 5 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Інтегральні рівняння».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції, відповідного практичного заняття або як матеріал для самостійної роботи. Значна частина навчального матеріалу з посібника має пропонуватись здобувачам вищої освіти для самостійного опрацювання.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Перше видання цього посібника вийшло у 2012 році. Другому виданню було надано гриф Міністерства освіти і науки України (лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.), надруковано воно у 2014 році у видавництві «Навчальна книга – Богдан» (м. Тернопіль). У представленому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Розділ 1

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь.
2. Основні означення й поняття.
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих.

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Використання математичних моделей є одним з найбільш ефективних методів вивчення різноманітних фізичних процесів і явищ. Математичні моделі допомагають зрозуміти фізичний процес, дають можливість отримати якісні та кількісні характеристики його стану, з їх використанням можна передбачити подальший розвиток процесу без натуральних експериментів, проведення яких у багатьох випадках є надто дорогим або просто неможливим.

Вивчаючи фізичні явища, не завжди вдається безпосередньо знайти закони або формули, які пов'язують між собою величини фізичного процесу, але часто можна виявити певну функціональну залежність між невідомими характеристиками процесу, швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять похідні невідомих характеристик процесу. Такі рівняння називають *диференціальними*, а знаходження невідомої функції (розв'язку) — *інтегруванням* диференціального рівняння.

Розв'язування задачі дослідження певного фізичного явища чи процесу можна розділити на два етапи:

1. Складання диференціального рівняння, яке при певних припущеннях описує сутність явища чи процесу.

2. Знаходження розв'язку диференціального рівняння, тобто функціональної залежності між величинами, які характеризують фізичне явище.

Для складання диференціальних рівнянь природничих наук використовують фізичний зміст першої та другої похідних, а також додаткові умови та закони, притаманні конкретній галузі науки, такі як-от:

– другий закон Ньютона¹⁾ ($F = ma$, де m — маса тіла, a — прискорення руху, F — сума сил, що діють на тіло);

– закон всесвітнього тяжіння ($F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$, де m_1, m_2 — маси двох тіл, r — відстань між ними);

– закон Кірхгофа (алгебрична сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю);

– закон Фур'є ($q = -\lambda(T) \frac{dT}{dx}$, де q — питомий потік теплоти, $\lambda(T)$ — коефіцієнт теплопровідності середовища, $\frac{dT}{dx}$ — швидкість зміни температури T);

– закон Ньютона про охолодження тіла (швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища);

– закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину у певний момент часу);

– закон Гука (сила пружності пружини пропорційна її видовженню) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів досліду та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Зауважимо, що багато розділів фізики значною мірою можна розглядати як різні розділи теорії диференціальних рівнянь. Перш за все це виявляється в аналітичній механіці, яку багато вчених розглядають як математичну дисципліну. Основним апаратом сучасної теоретичної фізики також є диференціальні рівняння.

¹⁾Бібліографічні дані про вчених, прізвища яких зустрічаються у посібнику, можна знайти на с. 241–245.

Розглянемо декілька прикладних задач, які приводять до диференціальних рівнянь.

Задача 1. Матеріальна точка P рухається по прямій, яку приймемо за вісь x , і в момент часу t займає положення x (рис. 1.1). Відома швидкість руху $v(t)$. Знайти закон руху точки, тобто залежність x від t , $x = x(t)$, якщо відомо, що у момент часу $t = t_0$ точка P займає положення $x = x_0$.

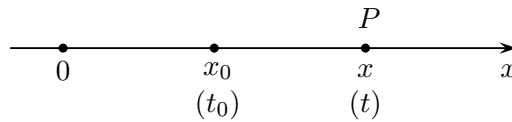


Рис. 1.1

Розв'язання. З курсу математичного аналізу відомо, що швидкість точки у момент часу t дорівнює похідній $x'(t)$ (фізичний зміст похідної), тобто

$$x'(t) = v(t). \quad (1.1)$$

Співвідношення (1.1) є диференціальним рівнянням руху точки P і задає закон її руху в диференціальній формі. Інтегруючи рівняння (1.1), одержуємо:

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt + C, \quad (1.2)$$

де C — довільна стала (стала інтегрування).

За умовою задачі, $x(t_0) = x_0$. Підставляючи в (1.2) $x = x_0$ і $t = t_0$, одержуємо, що $C = x_0$. Отже, шуканим розв'язком (рухом) є

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt + x_0. \blacksquare$$

Задача 2. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 400$ м/с, пробиває стіну товщиною $h = 0,2$ м і вилітає з неї зі швидкістю

$v_1 = 100$ м/с. Вважаючи, що сила опору стіни пропорційна квадрату швидкості кулі, знайти тривалість руху кулі у стіні.

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $ma = F$, де m — маса кулі, $a = \frac{dv}{dt}$ — її прискорення (похідна швидкості v за часом t), F — сила, яка діє на кулю. За умовою задачі, $F = -kv^2$, де знак мінус указує на те, що сила опору стіни спрямована у бік, протилежний до напрямку швидкості кулі. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2. \quad (1.3)$$

З (1.3) одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} dt &\Rightarrow \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int dt + C \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m} t + C &\Rightarrow v = \frac{m}{kt - Cm}. \end{aligned}$$

З умови $v(0) = v_0 = 400$ знаходимо $C = -\frac{1}{400}$, а тому

$$v = \frac{400m}{400kt + m}. \quad (1.4)$$

Якщо тепер підставити у рівняння (1.4) $t = T$ (T — шуканий час), а також $v = v_1 = 100$, то

$$\frac{400m}{400kT + m} = 100 \Rightarrow T = \frac{3k_1}{400},$$

де позначено $k_1 = m/k$. Сталу k_1 знайдемо з рівняння (1.4), яке, враховуючи, що $v = \frac{dx}{dt}$, запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{400k_1}{400t + k_1}.$$

Звідси

$$x = \int \frac{400k_1}{400t + k_1} dt + C \Rightarrow x = k_1 \ln(400t + k_1) + C.$$

Якщо $t = 0$, то $x = 0$ (куля входить у стіну), а тому $C = -k_1 \ln k_1$. Якщо $t = T$, то $x = h = 0,2$ (куля вилітає зі стіни), а тому, враховуючи, що $T = 3k_1/400$, одержуємо:

$$0,2 = k_1 \ln 4k_1 - k_1 \ln k_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{0,2}{\ln 4}.$$

Таким чином,

$$T = \frac{3k_1}{400} = \frac{3 \cdot 0,2}{400 \ln 4} \approx 0,001 \text{ с.} \blacksquare$$

Задача 3. Визначити форму дзеркала, яке збирає в одну точку спрямований на нього потік паралельних променів.

Розв'язання. Зробимо переріз дзеркала площиною Oxy , щоб точка, в яку збираються промені (фокус), була початком координат, а вісь Ox — паралельною до променів, які падають на дзеркало. У перерізі одержуємо деяку криву $y = f(x)$ (рис. 1.2).

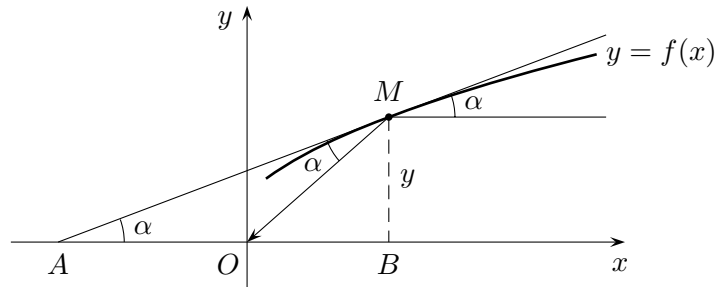


Рис. 1.2

Використаємо закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює куту його відбиття (на рисунку цей кут позначено через α). Нехай $M(x, y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$. Проведемо у цій точці дотичну MA до кривої $y = f(x)$. Трикутник MOA — рівнобедрений. Оскільки $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (геометричний зміст похідної), то, вважаючи, що $y > 0$, одержуємо

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

або, якщо помножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x^2 + y^2} - x$,

$$y' = \frac{1}{y} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right). \quad (1.5)$$

Диференціальне рівняння (1.5) описує форму перерізу дзеркала площиною Oxy . З (1.5) одержуємо:

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = x + C,$$

де C — довільна стала. Таким чином, маємо рівняння осевого перерізу дзеркала площиною Oxy : $y^2 = 2Cx + C^2$. З геометричної точки зору одержали сім'ю парабол з вершинами у точках $(-C/2; 0)$. Отже, поверхня дзеркала як поверхня обертання осевого перерізу навколо осі Ox має вигляд

$$y^2 + z^2 = 2Cx + C^2,$$

тобто шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання. ■

Зауважимо, що якщо параболічне дзеркало, рівняння якого отримане у задачі 3, спрямувати на сонце, то усі відбиті промені проходять через фокус, де матимемо високу температуру (звідки і латинська назва focus — вогнище). Параболічні дзеркала використовують також у радіолокації.

Задача 4. Знайти закон розпаду радію, якщо відомо, що швидкість розпаду прямо пропорційна його масі і через 1600 років початкова маса радію зменшиться вдвічі.

Розв'язання. Нехай m_0 — початкова маса радію, $m(t)$ — маса радію у момент часу t . Швидкість розпаду радію як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон розпаду можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$m'(t) = -k m(t), \quad (1.6)$$

де $k > 0$, k — коефіцієнт пропорційності (знак мінус вказує на те, що маса радію з часом зменшується, а тому $m'(t) < 0$).

Диференціальне рівняння (1.6) разом з умовою $m(0) = m_0$ є математичною моделлю розпаду радію. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що $m'(t) = \frac{dm}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} + km &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} + k dt = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad d(\ln m + kt) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \ln m + kt = C_1 \quad \Rightarrow \quad m = e^{C_1 - kt}. \end{aligned}$$

Оскільки C_1 — довільна стала, то можна позначити e^{C_1} через C . Отже,

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

За умовою задачі, $m(0) = m_0$, а тому $C = m_0$. З умови $m(1600) = 0,5m_0$ знаходимо коефіцієнт k :

$$\begin{aligned} m(1600) = m_0 e^{-1600k} &\Rightarrow 0,5m_0 = m_0 e^{-1600k} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow k &= \frac{\ln 2}{1600} \approx 0,00043. \end{aligned}$$

Отже, закон зміни маси радію від часу наближено подається формулою

$$m(t) = m_0 e^{-0,00043t}. \blacksquare$$

2. Основні означення й поняття. Звичайним диференціальним рівнянням називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.7)$$

між незалежною змінною x , шуканою функцією $y = y(x)$ і похідними $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Позначення, які використані в означенні, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через t , шукана функція — через s , f , F тощо.

Порядком звичайного диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння.

У рівнянні n -го порядку (1.7) вважається, що похідна n -го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, а наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + y'^3, \quad y'' + y = \cos x,$$

$$y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перше з наведених рівнянь має перший порядок, друге рівняння — другий порядок, третє рівняння — четвертий порядок, четверте — десятий порядок.

Якщо диференціальне рівняння містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають **рівнянням з частинними похідними**. Наведемо приклади таких рівнянь:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ — рівняння, яке описує рух частинок за інерцією;
 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — рівняння, яке описує закон поширення у часі та розподілу за довжиною температури нагрітого стержня;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — рівняння, яке описує різноманітні коливальні процеси;

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ — рівняння, якому задовольняє потенціал $u(x, y, z)$ електростатичного поля, де $\rho(x, y, z)$ — густина зарядів.

Надалі, якщо не буде сказано про інше, розглядатимемо тільки звичайні диференціальні рівняння, причому як незалежну змінну, так і шукану функцію вважатимемо дійсними.

Розв'язком рівняння (1.7) на деякому інтервалі (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, називають функцію $y = y(x)$, яка має на цьому інтервалі похідні до порядку n включно та задовольняє рівняння (1.7). Це означає, що для всіх $x \in (a, b)$ справджується тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Наприклад, функція $y = e^x$ є розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' - y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Окрім неї, розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також $y = e^{-x}$, $y = 3e^x$, $y = 3e^x + 4e^{-x}$ і, взагалі, всі функції вигляду $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

На одній з наступних лекцій буде встановлено, що звичайне диференціальне рівняння n -го порядку у загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від n довільних сталих. Наприклад, усі розв'язки диференціального рівняння $y^{(n)} = 0$ містяться у формулі $y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$, де C_1, \dots, C_n — довільні сталі.

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають *інтегральною кривою*. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають *сім'єю інтегральних кривих*. Наприклад, розв'язки рівняння $y'' = 2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y = x^2 + C_1 x + C_2$, кожна з яких є інтегральною кривою.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають *інтегруванням* цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у *квадратурах* (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване *у скінченному вигляді*. Розглядатимемо в основному саме такі рівняння, хоча значно більше диференціальних рівнянь не інтегруються у скінченному вигляді й для представлення їхніх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею теорії інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їхніх властивостей.

3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих. Нехай маємо рівняння сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра C :

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (1.8)$$

Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (1.8), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього здиференціюємо за змінною x обидві частини

рівності (1.8), враховуючи, що $y = y(x)$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.9)$$

Якщо співвідношення (1.9) не містить C , то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна усім кривим сім'ї (1.8) (наприклад, якщо $y = x + C$, то $y' = 1$). У загальному випадку рівність (1.9) залежатиме від параметра C . Тоді, виключаючи цей параметр із системи (1.8), (1.9), одержимо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) виражає спільну властивість кривих (1.8) незалежно від сталої C , його називають *диференціальним рівнянням сім'ї кривих* (1.8).

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають осі симетрії, паралельні до осі ординат.

Розв'язання. Сім'ю парабол з умови задачі можна описати з допомогою формули $y = x^2 - Cx$, де C — довільна стала. Складемо систему

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу C . Для цього знайдемо C з першого рівняння системи і підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y}{x}.$$

Відповідь: $xy' = x^2 + y$.

Аналогічно, маючи сім'ю кривих

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

залежну від n довільних сталих, можна при певних умовах одержати диференціальне рівняння, для якого згадані криві будуть

інтегральними. Для цього потрібно здиференціювати співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ n разів за змінною x і виключити з нього та отриманих унаслідок диференціювання n рівнянь сталі C_1, C_2, \dots, C_n . У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї усіх кіл з одиничним радіусом на площині.

Розв'язання. Рівнянням усіх кіл з радіусом 1 і з центром у довільній точці площини (C_1, C_2) є

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1. \quad (1.11)$$

Двічі здиференціюємо (1.11):

$$\begin{aligned} 2(x - C_1) + 2(y - C_2)y' &= 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' &= 0. \end{aligned}$$

Виключаючи тепер із системи

$$\begin{cases} (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1, \\ x - C_1 + (y - C_2)y' = 0, \\ 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' = 0 \end{cases}$$

сталі C_1, C_2 , одержуємо:

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'\right)^2 + \left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1 + y'^2)^3 = y''^2. \quad \blacksquare$$

Рекомендована література: [8, с. 6–12], [9, с. 4–8], [17, с. 6–15], [18, с. 3–13, 22–25], [19, с. 9–19], [21, с. 4–8].

Питання до лекції 1

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим відрізняються звичайні диференціальні рівняння від рівнянь з частинними похідними?

2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння? Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння?

4. Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

5. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціального рівняння?

6. У чому полягає математичне моделювання реальних фізичних процесів, яка його роль у вивченні процесу? Наведіть приклади використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання фізичних процесів та явищ.

7. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)? Як знайти диференціальне рівняння заданої сім'ї однопараметричних кривих (n -параметричних кривих)?

Вправи до лекції 1

1. Перевірте, чи є функції

$$\text{а) } y = \cos x + \sin x + 5e^{-x}; \quad \text{б) } y = x \cdot \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{в) } y = 3x + \ln x + 2$$

розв'язками відповідних диференціальних рівнянь

$$\text{а) } y' + y = 2 \cos x; \quad \text{б) } xy' = y + x \sin x; \quad \text{в) } x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0.$$

2. Знайдіть криві, в яких кожний відрізок дотичної, який лежить між координатними осями, точкою дотику ділиться навпіл.

3. Складіть диференціальне рівняння сім'ї кривих:

$$\text{а) } x^2 + y^2 = C; \quad \text{б) } y = \cos(x + C); \quad \text{в) } y = C_1 x^2 + C_2 e^x.$$

4. Складіть диференціальне рівняння:

а) усіх кіл, які дотикаються до осі абсцис;

б) усіх прямих на площині;

в) парабол, які проходять через точку $(1; 2)$ і мають вісь, паралельну до осі абсцис.

5. Знайдіть криві, нормалі до яких в усіх точках проходять через початок координат.

Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку.
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків.
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків.

1. Основні означення й поняття. Диференціальне рівняння першого порядку в загальному випадку можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2.1)$$

де x — незалежна змінна, y — невідома функція від x , $F(x, y, y')$ — задана функція змінних $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо рівняння (2.1) можна розв'язати відносно похідної, то його записуватимемо у вигляді

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

Таку форму запису диференціального рівняння називають **нормальною**.

Найпростішим з диференціальних рівнянь у нормальній формі є рівняння $y' = f(x)$. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі (a, b) , то, як відомо з математичного аналізу, $y = \int f(x)dx + C$, де C — довільна стала.

У багатьох випадках рівняння (2.2) зручно записувати як $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ або у вигляді $dy - f(x, y)dx = 0$, який є окремим випадком рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.3)$$

де $M(x, y)$, $N(x, y)$ — відомі функції (*коефіцієнти рівняння*). Рівняння (2.3) зручне тим, що змінні x і y у ньому рівноправні, тобто кожен з них можна розглядати як функцію від іншої.

Розв'язком диференціального рівняння (2.2) на інтервалі (a, b) називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння (2.2) у тотожність, тобто $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Розв'язок рівняння (2.2) може бути заданий не тільки явно, тобто як $y = y(x)$, але й у неявному вигляді $\Phi(x, y) = 0$ (у вигляді, не розв'язаному відносно y) або у параметричній формі: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Наприклад, функція $y = \sqrt{1 - x^2}$, де $x \in (-1; 1)$, є розв'язком рівняння $y' = -x/y$, однак цей самий розв'язок можна подати у неявному вигляді $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, а також у параметричній формі $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 < t < \pi$.

2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Вже зазначалось, що диференціальні рівняння зазвичай мають безліч розв'язків. Однак у багатьох задачах теоретичного і прикладного характеру часто серед усіх розв'язків диференціального рівняння (2.2) потрібно знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.4)$$

де x_0, y_0 — задані числа, тобто розв'язок, який для заданого значення незалежної змінної $x = x_0$ набуває заданого значення y_0 .

Задачу відшукування розв'язку рівняння (2.2), який задовольняє умову (2.4), називають *задачею Коші* (або *початковою задачею*). Умову (2.4) називають *початковою*, а числа x_0, y_0 — *початковими даними* задачі (2.2), (2.4).

З геометричної точки зору задача Коші (2.2), (2.4) полягає у відшуванні інтегральної кривої рівняння (2.2), яка проходить через наперед задану точку (x_0, y_0) площини Oxy .

Відповідь на питання про те, за яких умов задача Коші (2.2), (2.4) має розв'язок, дає теорема Пеано, доведення якої можна знайти, наприклад, в [7, с. 44–46].

Теорема 1 (Пеано). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D площини Oxy , то існує неперервна разом зі своєю*

похідною першого порядку функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, де $(x_0, y_0) \in D$.

Однак для багатьох задач важливо знати не тільки факт існування розв'язку диференціального рівняння, але також і те, чи є цей розв'язок єдиним. Відповідь на це питання має виняткове значення як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для багатьох її застосувань. Дійсно, якщо знати, що розв'язок задачі Коші єдиний, то, знайшовши розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, дослідник може бути впевненим, що інших розв'язків, які задовольняють ті самі початкові умови, немає. У задачах природознавства це приводить до одержання єдиного закону явища, який визначається тільки диференціальним рівнянням і початковими умовами. Ілюстрацією до цього можуть бути задачі фізичного змісту з лекції 1.

Виявляється, що умова неперервності функції $f(x, y)$ з теореми Пеано не гарантує єдиності розв'язку задачі Коші (2.2), (2.4). Розглянемо, наприклад, рівняння $y' = 2\sqrt{y}$. Його права частина визначена і неперервна у верхній частині площини Oxy ($y \geq 0$). З допомогою підстановки легко переконатись, що інтегральними кривими є півпараболи $y = (x + C)^2$, де $x \geq -C$, а також пряма $y = 0$ (вісь Ox). Очевидно, що у кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox єдиність розв'язку порушується, бо через цю точку проходять дві інтегральні криві, а саме: парабола $y = (x - x_0)^2$ і пряма $y = 0$ (рис. 2.1).

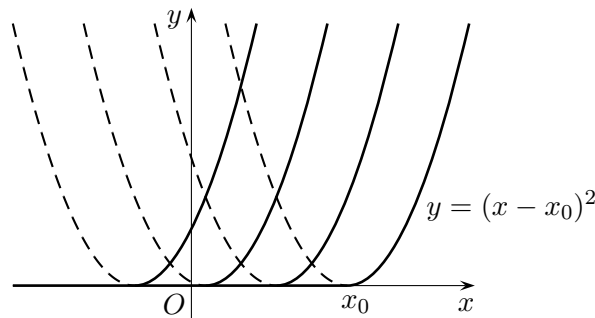


Рис. 2.1

Основною теоремою, яка забезпечує не тільки існування, але й єдиність розв'язку задачі Коші, є теорема Коші, доведення якої можна знайти, наприклад, в [11, с. 39–46].

Теорема 2 (Коші). *Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику*

$$G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad a, b > 0,$$

і задовольняє у ньому такі умови:

1) $f(x, y)$ неперервна, а, отже, й обмежена, тобто

$$|f(x, y)| \leq M, \quad M > 0;$$

2) частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ існує та обмежена.

Тоді задача Коші (2.2), (2.4) має єдиний розв'язок принаймні на відрізьку $|x - x_0| \leq h$, де

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

За виконання умов теореми Коші можна гарантувати, що через кожну внутрішню точку області G проходить єдина інтегральна крива.

Одним з методів доведення теореми Коші є метод Пікара, який дає можливість побудувати розв'язок задачі Коші як границю послідовних наближень $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, визначених рекурентними формулами (**формулами Пікара**)

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теорема Коші має велике значення в теорії звичайних диференціальних рівнянь, бо дозволяє за виглядом правої частини рівняння (2.2) відповісти на питання про існування та єдиність розв'язку цього рівняння при заданих початкових умовах. Це особливо важливо у тих випадках, коли неможливо вказати точну формулу, що визначає розв'язок рівняння, а тому потрібно застосовувати методи наближеного розв'язування диференціального рівняння.

3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння (2.2) у деякій області G площини Oxy називають функцію

$$y = y(x, C), \quad (2.5)$$

яка залежить від однієї довільної сталої C , якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (2.2) для довільного фіксованого значення сталої C ;

2) для довільної початкової умови (2.4), де $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = y(x, C_0)$ задовольняє умову (2.4).

Якщо неможливо знайти загальний розв'язок у вигляді (2.5), його шукають у неявному вигляді $F(x, y, C) = 0$. Такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Часто загальний інтеграл одержують як $\Psi(x, y) = C$, тобто у вигляді, розв'язаному відносно довільної сталої C . Функцію $\Psi(x, y)$ у цьому випадку називають *інтегралом* диференціального рівняння. Аналогічно визначають сім'ю інтегральних кривих (розв'язків) рівняння, залежну від довільної сталої C , у параметричній формі $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$ як *загальний розв'язок у параметричній формі*.

Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку проходять декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодної інтегральної кривої (розв'язок не існує). Такі точки називають *особливими точками* диференціального рівняння.

Шукати особливі точки потрібно серед точок, у яких має розрив функція $f(x, y)$ або її частинна похідна $f'_y(x, y)$, а потім, аналізуючи загальний розв'язок, необхідно перевірити, чи будуть ці точки особливими. Така перевірка обов'язкова, бо теорема Коші дає лише достатні умови і, отже, може існувати єдиний розв'язок задачі Коші (2.2), (2.4) навіть тоді, коли в точці (x_0, y_0) не виконується одна або обидві умови теореми.

Розглянемо приклади.

1. $y' = y \sin x + e^x$. Функція $f(x, y) = y \sin x + e^x$ неперервна, а

похідна $f'_y = \sin x$ обмежена в усіх точках площини Oxy . Згідно з теоремою Коші через кожену точку площини Oxy проходить одна інтегральна крива.

2. $y' = \sqrt{1-y^2}$. Права частина визначена і неперервна в усіх точках площини Oxy , де $-1 \leq y \leq 1$. Частинна похідна $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ стає необмеженою, якщо $y \rightarrow \pm 1$. Легко переконалися, що кожна з функцій $y = \sin(x+C)$ є розв'язком рівняння. Окрім того, маємо також розв'язки $y = \pm 1$. Таким чином, через кожену точку прямих $y = \pm 1$ проходять принаймні дві інтегральні криві, а тому у точках цих прямих порушується єдиність розв'язку (рис. 2.2).

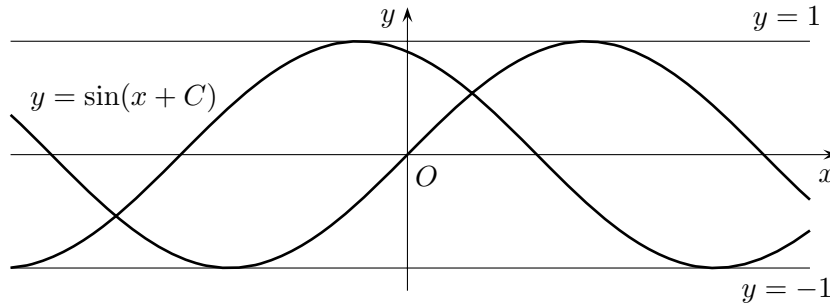


Рис. 2.2

3. $y' = y^{-2}$. У кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox функції $f(x, y) = y^{-2}$, $f'_y = -2y^{-3}$ розривні й необмежені при $y \rightarrow 0$, але через кожну таку точку проходить єдина інтегральна крива $y = \sqrt[3]{3(x-x_0)}$. Рисунок інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = y^{-2}$ пропонуємо читачам зробити самостійно.

Частинним розв'язком рівняння (2.2) в області G називають функцію $y = y(x, C_0)$, утворену з загального розв'язку (2.5) при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо кожна точка розв'язку диференціального рівняння є особливою, то такий розв'язок називають **особливим**. Особливий розв'язок неможливо отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному конкретному значенні сталої C .

З геометричної точки зору загальним розв'язком $y = y(x, C)$ є сім'я інтегральних кривих на площині Oxy , яка залежить від однієї довільної сталої C , а частинний розв'язок — це одна інтегральна крива цієї сім'ї, що проходить через задану точку. Графіком особливого розв'язку є інтегральна крива, яка у кожній своїй точці має загальну дотичну з однією з інтегральних кривих. Таку інтегральну криву називають *обвідною* сім'ї інтегральних кривих. Наприклад, для рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ обвідною є пряма $y = 0$, тобто вісь Ox (рис. 2.1), а для рівняння $y' = \sqrt{1 - y^2}$ обвідними є прямі $y = \pm 1$ (рис. 2.2).

4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. У фізиці часто використовують поняття векторного поля, тобто функції, яка кожній точці деякої області ставить у відповідність певний вектор. Наприклад, вивчаючи течію рідини, кожній точці можна поставити у відповідність вектор швидкості течії у цій точці. Вивчаючи системи електричних або магнітних зарядів, кожній точці площини ставлять у відповідність вектор сили, з якою ця система діє на одиничний (пробний) заряд, розміщений у згаданій точці; ці вектори утворюють лінії індукції магнітного поля заданої системи зарядів.

Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то диференціальне рівняння (2.2) встановлює зв'язок між координатами довільної точки $M(x, y)$ площини і кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до інтегральної кривої у цій точці (рис. 2.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Якщо функція $f(x, y)$ визначена в області G , то кожній точці $M(x, y)$ цієї області відповідає деякий напрям, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$. Вказуючи цей напрям вектором (для визначеності вважатимемо його одиничним) з початком у точці M , одержимо в області G *поле напрямів*, визначене рівнянням (2.2) (рис. 2.4).

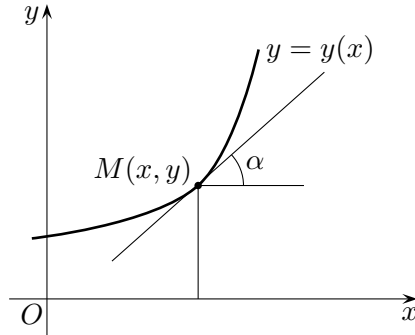


Рис. 2.3

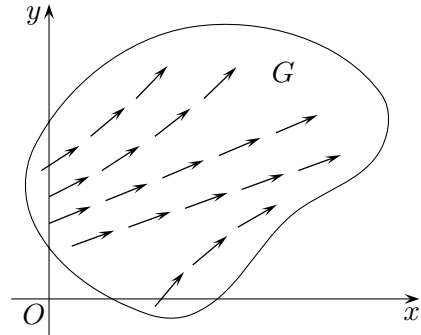


Рис. 2.4

Інтегральна крива, яка проходить через точку $M(x, y) \in G$, має ту властивість, що у кожній її точці напрям дотичної збігається з напрямом поля у цій точці. Тому з геометричної точки зору інтегрування диференціального рівняння (2.2) полягає у знаходженні кривих, дотичні до яких у кожній своїй точці збігаються з напрямом поля.

У фізиці розглядають лінії індукції заданого магнітного поля, тобто лінії, напрями яких у кожній точці збігаються з напрямом цього поля (рис. 2.5). З точки зору теорії диференціальних рівнянь лінії індукції магнітного поля є інтегральними кривими.

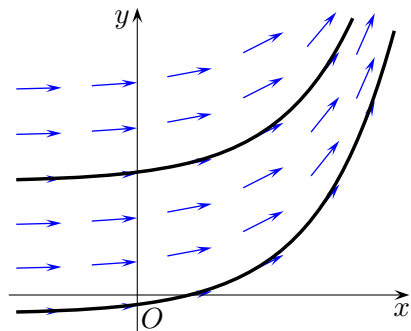


Рис. 2.5

Якщо у деякій точці (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ стає нескінченно великою, то напрям поля буде паралельний до осі Oy . Якщо $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) перетворюється в невизначеність $0/0$, то через цю точку не проходить жодна інтегральна крива.

5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Розглянемо задачу про рух матеріальної точки P вздовж осі Ox (задача 1 з лекції 1). Позначимо швидкість точки P через $v(t, x)$ — функцію, залежну від часу t і положення x , яке займає точка у момент часу t .

Диференціальним рівнянням цього руху буде

$$\frac{dx}{dt} = v(t, x). \quad (2.6)$$

Будь-який розв'язок $x = x(t)$ рівняння (2.6) визначає певний закон руху (його називатимемо просто **рухом**). Задача Коші для рівняння (2.6) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який визначається рівнянням (2.6) і задовольняє початкову умову $x(t_0) = x_0$.

Руху $x = x(t)$ відповідає на площині (t, x) крива M_0M_1 (рис. 2.8), яка зображує залежність x від t . Цю криву називають **графіком руху** (не треба плутати графік руху з траєкторією руху точки P — відрізком P_0P_1 на рис. 2.8).

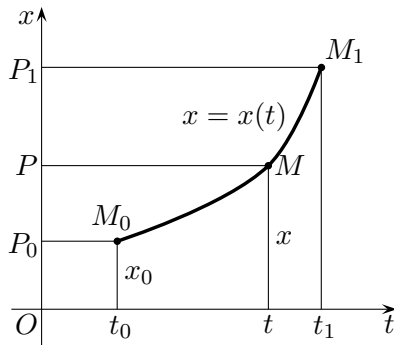


Рис. 2.8

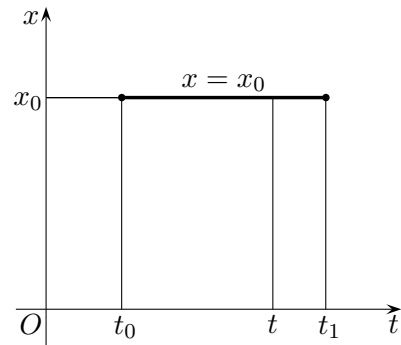


Рис. 2.9

Розглянемо окремі випадки рівняння (2.6):

- 1) функція $v(t, x)$ не залежить від x , тобто $\frac{dx}{dt} = v(t)$;
- 2) функція $v(t, x)$ не залежить від t , тобто

$$\frac{dx}{dt} = v(x). \quad (2.7)$$

Рівняння (2.7) називають **стаціонарним** або **автономним**. У ньому швидкість залежить тільки від положення точки.

Якщо права частина рівняння (2.6) перетворюється в нуль при $x = x_0$ для всіх значень t , що розглядаються, тобто швидкість руху у точці x_0 в будь-який момент часу дорівнює нулю,

то рівняння (2.6) має розв'язок $x = x_0$ (рис. 2.9). Цьому руху відповідає *стан спокою*. Траєкторією цього руху є точка x_0 , яку називають *точкою спокою* або *точкою рівноваги*.

Рекомендована література: [7, с. 9–11, 36–59], [14, с. 7–14], [18, с. 14–22, 25–27, 97–104], [21, с. 8–25, 76–85].

Питання до лекції 2

1. Який загальний вигляд має звичайне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком цього рівняння на заданому інтервалі (a, b) ?

2. Яку форму звичайного диференціального рівняння першого порядку називають нормальною? Як звести рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ до нормальної форми?

3. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний і механічний зміст?

4. Сформулюйте теорему Пеано. Чи можуть інтегральні криві рівняння $y' = f(x, y)$ з неперервною правою частиною перетинатися або дотикатися одна до одної?

5. Чи гарантує неперервність функції $f(x, y)$ існування єдиного розв'язку задачі Коші для рівняння $y' = f(x, y)$? Сформулюйте теорему Коші. Чи може існувати єдиний розв'язок цієї задачі при невиконанні будь-якої умови теореми Коші?

6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ у деякій області існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Який розв'язок називають загальним інтегралом? Що називають загальним розв'язком у параметричній формі?

7. Що таке частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$? Який розв'язок називають особливим? Дайте їхнє геометричне тлумачення.

8. Який геометричний зміст мають рівняння $y' = f(x, y)$ та його розв'язки? Як визначити нахил інтегральної кривої у заданій точці за виглядом правої частини рівняння? Як побудувати поле напрямів, визначене рівнянням $y' = f(x, y)$? У чому полягає геометричний зміст інтегрування цього рівняння?

9. Який механічний зміст мають диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ та його розв'язки? Як пов'язаний між собою графік руху (розв'язку), визначений цим рівнянням, і траєкторія цього руху? Який рух називають станом спокою, якими є графік і траєкторія цього руху?

Вправи до лекції 2

1. Розв'яжіть задачі Коші:

а) $y' + x^2 = 1, y(0) = 3$; б) $y' = \operatorname{tg} x, y(0) = 5$; в) $y' = \ln x, y(e) = 1$.

2. Визначіть закон руху тіла, яке рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 5t - t^2$ і $s(2) = 4$.

3. Користуючись теоремою Коші, виділіть області, в яких диференціальні рівняння мають єдиний розв'язок:

а) $y' = \sin y - x^2$; б) $y' = \sqrt{x^2 - y} + \cos x$; в) $y' = 2y\sqrt{y} + x^2$.

4. Знайдіть з допомогою формул Пікара наближення $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ до розв'язку задачі Коші $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$.

5. Знайдіть інтегральну криву рівняння $y' = xe^{x^2}$, яка проходить через початок координат.

Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах

План

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.
2. Однорідні рівняння.
3. Рівняння, звідні до однорідних.

1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (3.1)$$

де кожен з коефіцієнтів біля диференціалів є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від x , а інша — тільки від y . Рівняння (3.1) називають *рівнянням з відокремлюваними змінними*.

Для інтегрування рівняння (3.1) потрібно домогтися того, щоб коефіцієнт біля dx залежав тільки від x , а коефіцієнт біля dy — тільки від y . Це досягається діленням обох частин рівняння на добуток $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, звичайно, що $M_2(x) \neq 0$ і $N_1(y) \neq 0$. Після цього одержуємо:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) можна розглядати як рівність диференціалів, тому інтегралі від диференціалів відрізняються на сталу, тобто

$$\int_{x_0}^x \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int_{y_0}^y \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C, \quad (3.3)$$

де C — довільна стала, x_0, y_0 — деякі числа з області задання і неперервності коефіцієнтів рівняння (3.2). Співвідношення (3.3) є загальним інтегралом рівняння (3.1). Його можна записати також у вигляді

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

бо визначені інтегралі зі змінної верхньою межею й невизначені інтегралі є первісними для одних і тих самих підінтегральних функцій, а тому відрізняються лише сталими, які можна включити в C .

Якщо a — розв'язок рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (3.1), бо $dx = 0$, а $M_2(a) = 0$. Так само, якщо b — корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ — розв'язок рівняння (3.1).

Диференціальне рівняння (3.2) можна записати у більш загальному вигляді:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (3.4)$$

Рівняння (3.4) називають **рівнянням з відокремленими змінними**, а перехід від рівняння (3.1) до рівняння вигляду (3.4) — **відокремленням змінних**.

Загальним інтегралом рівняння (3.4) є

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

Рівняння з відокремленими змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y). \quad (3.5)$$

Для інтегрування рівняння (3.5) потрібно поділити обидві його частини на $f_2(y)$ (якщо $f_2(y) \neq 0$) і помножити на dx (врахувавши, що $dy = y'dx$). Отже,

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx,$$

а після інтегрування одержуємо загальний інтеграл рівняння (3.5):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Тут, як і для рівняння (3.1), якщо $f_2(a) = 0$, то $y = a$ є розв'язком рівняння (3.5).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0.$$

Розв'язання. Для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $x(y^2 - 1)$. Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x} dx + \frac{y}{y^2 - 1} dy &= 0 \quad (x \neq 0, \quad y \neq \pm 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{x^2 + 1}{x} dx + \int \frac{y}{y^2 - 1} dy &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 - 1)}{y^2 - 1} &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| &= C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |x^2(y^2 - 1)| = 2C - x^2 \Rightarrow |x^2(y^2 - 1)| &= e^{2C} e^{-x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2(y^2 - 1) = C e^{-x^2}, \end{aligned}$$

де, враховуючи довільність сталої C , перепозначено $\pm e^{2C}$ через C . Надалі у такій ситуації використовуватимемо знак $:=$, наприклад, $C := \pm e^{2C}$.

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є

$$y^2 = 1 + Cx^{-2}e^{-x^2}. \quad (3.6)$$

З'ясуємо тепер можливість появи особливих розв'язків заданого рівняння. Легко перевірити, що функції $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останніх (їх можна отримати з формули (3.6), якщо $C = 0$). Функція $x = 0$ є особливим розв'язком.

Відповідь: $y^2 = 1 + Cx^{-2}e^{-x^2}$, $x = 0$.

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by), \quad (3.7)$$

де a, b — деякі сталі. Справді, якщо виконати заміну $z = ax + by$, то

$$y = \frac{z - ax}{b} \Rightarrow y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$$

і для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = bf(z) + a$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y' = \cos(x + y)$.

Розв'язання. Нехай $z = x + y$. Тоді

$$z' = 1 + y' \Rightarrow y' = z' - 1 \Rightarrow z' - 1 = \cos z \Rightarrow z' = 1 + \cos z.$$

Звідси, якщо $1 + \cos z \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{dz}{1 + \cos z} = dx &\Rightarrow \int \frac{dz}{1 + \cos z} = x + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{2 \cos^2 \frac{z}{2}} = x + C &\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{z}{2} = x + C. \end{aligned}$$

Отже, загальним інтегралом є $x - \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = C$.

Якщо $1 + \cos z = 0$, тобто $z = \pi + 2\pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$, то $y = -x + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Ці розв'язки є особливими, бо їх не

можна одержати із загального інтеграла при жодному значенні сталої C .

Відповідь: $x - \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = C$, $y = -x + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

До розв'язування рівнянь з відокремлюваними змінними приводять багато задач прикладних наук. Розглянемо одну з них (див. також задачі 2, 4 з лекції 1).

Задача 1. Посудина об'ємом 30 л наповнена повітрям (80% азоту і 20% кисню). У посудину закачується 0,2 л азоту в секунду, який неперервно перемішується з повітрям. З посудини витікає така сама кількість суміші. Через який час у посудині буде 90% азоту?

Розв'язання. Позначимо через $y = y(t)$ кількість азоту в посудині у момент часу t . Розглянемо деякий проміжок часу $\Delta t = dt$ і знайдемо зміну кількості азоту в посудині за цей проміжок, уважаючи, що процес рівномірний. Якщо за 1 с закачується 0,2 л азоту, то через dt с в посудину потрапить $0,2 dt$ л азоту. За цей час із посудини витече така сама кількість суміші. Оскільки в 30 л повітря міститься y л азоту, то у 1 л суміші міститься $\frac{y}{30}$ л азоту, а в $0,2 dt$ л суміші $\frac{y}{30} \cdot 0,2 dt$ л азоту. Отже,

$$dy = 0,2 dt - \frac{y}{30} \cdot 0,2 dt \quad \Rightarrow \quad 150 dy = (30 - y) dt. \quad (3.8)$$

Таким чином, одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{30 - y} = \frac{dt}{150} &\Rightarrow -\ln|30 - y| = \frac{t}{150} + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(t) = 30 + Ce^{-t/150}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Формула (3.9) визначає загальний розв'язок рівняння (3.8). З (3.9), використовуючи початкову умову (за умовою задачі, $y(0) = 0,8 \cdot 30 = 24$ л), знаходимо значення сталої C : $30 + C = 24$, а отже, $C = -6$.

Підставляючи $C = -6$ у (3.9), одержуємо формулу для знаходження вмісту азоту в повітрі у будь-який момент часу t :

$$y(t) = 30 - 6e^{-t/150}.$$

Використовуючи цю функцію, визначимо час T , коли в посудині буде 90% азоту (27 л):

$$\begin{aligned} 30 - 6e^{-T/150} = 27 &\Rightarrow e^{-T/150} = 0,5 \Rightarrow \\ \Rightarrow T = -150 \cdot \ln 0,5 &\approx 104 \text{ с. } \blacksquare \end{aligned}$$

2. Однорідні рівняння. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією виміру m* , якщо для будь-яких x, y, t справджується тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Наприклад, $f_1(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + 2y^3}$, $f_2(x, y) = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ є однорідними функціями вимірів 1 і 0 відповідно, бо

$$\begin{aligned} f_1(tx, ty) &= \sqrt[3]{(tx)^3 + 2(ty)^3} = t \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2y^3} = t^1 \cdot f_1(x, y), \\ f_2(tx, ty) &= \arcsin \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)^2 - (ty)^2} = \arcsin \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = t^0 \cdot f_2(x, y). \end{aligned}$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{3.10}$$

називають *однорідним*, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Покажемо, що однорідне рівняння можна звести до рівняння з відокремленими змінними. Якщо права частина рівняння (3.10) — однорідна функція виміру 0, то, за означенням, $f(tx, ty) = f(x, y)$. Якщо підставити $t = 1/x$, то $f(x, y) = f(1, y/x)$, а тому рівняння (3.10) можна записати у вигляді $y' = f(1, y/x)$, звідки видно, що в однорідних рівняннях вигляду (3.10) права частина фактично залежить тільки від частки y/x . З огляду на це виконаємо заміну $u = y/x$, тобто

$$y = ux,$$

де $u = u(x)$ — нова шукана функція. Тоді

$$y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = f(1, u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Зінтегруємо його:

$$\begin{aligned} \frac{du}{f(1,u)-u} &= \frac{dx}{x} \quad (f(1,u) \neq u, \quad x \neq 0) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \frac{du}{f(1,u)-u} = \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Якщо позначити $F(u) \equiv \int \frac{du}{f(1,u)-u}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (3.10) можемо записати у вигляді

$$F(y/x) = \ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (3.10) можуть бути також функції $y = ax$ ($x \neq 0$), де $f(1,a) = a$, та $x = 0$ ($y \neq 0$), які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть бути особливими.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $x^2y' - y^2 + xy - x^2 = 0$.
Розв'язання. Записавши рівняння у вигляді

$$y' = (y^2 - xy + x^2)/x^2,$$

переконуємось, що воно є однорідним, бо його права частина є однорідною функцією виміру 0. Виконаємо заміну $y = ux$. Тоді $y' = u'x + u$ і, підставляючи ці вирази для y і y' у рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{x^2 + u^2x^2 - x^2u}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x \frac{du}{dx} = 1 + u^2 - 2u \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x} \quad (u \neq 1, \quad x \neq 0) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y}{x} = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \quad \Rightarrow \quad y = x \left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C} \right). \end{aligned}$$

Якщо $u = 1$, то $y = x$ — особливий розв'язок, а $x = 0$ — не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $y = x \left(1 - \frac{1}{\ln|x|+C}\right)$, $y = x$.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку записане у вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

то воно буде однорідним, якщо $M(x, y)$, $N(x, y)$ є однорідними функціями однакового виміру. Пропонуємо читачам самостійно переконатись, що диференціальні рівняння

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0, \quad 2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

є однорідними.

Зауважимо, що диференціальне рівняння

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}, \quad (3.11)$$

одержане в лекції 1 у задачі 3 про форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку, є однорідним. Розв'яжемо його з допомогою заміни $y = ux$. Тоді

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - x}{ux} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{1 + u^2} - 1}{u} - u \Rightarrow \\ &\int \frac{u du}{\sqrt{1 + u^2} - 1 - u^2} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \\ &\frac{1}{2} \int \frac{d(1 + u^2)}{\sqrt{1 + u^2} - 1 - u^2} = \ln|x| + C. \end{aligned}$$

В інтегралі $\int \frac{d(1+u^2)}{\sqrt{1+u^2}-1-u^2}$ виконаємо заміну $p^2 = 1 + u^2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d(1 + u^2)}{\sqrt{1 + u^2} - 1 - u^2} &= \int \frac{2p dp}{p - p^2} = 2 \int \frac{dp}{1 - p} = \\ &= -2 \ln|p - 1| = -2 \ln|\sqrt{1 + u^2} - 1|. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} -\ln \left| \sqrt{1+u^2} - 1 \right| &= \ln |x| + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{1+u^2} - 1 &= C/x \Rightarrow u^2 = (C/x)^2 + 2C/x \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \frac{C^2 + 2Cx}{x^2} \Rightarrow y^2 = 2Cx + C^2. \end{aligned}$$

Отже, загальним інтегралом рівняння (3.11) є $y^2 = 2Cx + C^2$ (порівняйте з результатом, одержаним у лекції 1).

3. Рівняння, звідні до однорідних. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad (3.12)$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — деякі сталі. Якщо c_1 і c_2 одночасно не дорівнюють нулю, то права частина рівняння (3.12) не є однорідною функцією виміру 0, а тому це рівняння не є однорідним. Однак, якщо

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a_1b_2 \neq a_2b_1, \quad (3.13)$$

то рівняння (3.12) можна звести до однорідного з допомогою заміни

$$x = t + \alpha, \quad y = n + \beta, \quad (3.14)$$

де сталі α і β потрібно вибрати так, щоб

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1, \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Згідно з (3.13) $\Delta \neq 0$, а тому лінійна неоднорідна система (3.15) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера. Підставляючи у (3.12) замість x і y відповідні вирази з (3.14), одержуємо рівняння

$$\frac{dn}{dt} = \frac{a_1t + b_1n + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2t + b_2n + a_2\alpha + b_2\beta + c_2},$$

або, враховуючи (3.15),

$$\frac{dn}{dm} = \frac{a_1 m + b_1 n}{a_2 m + b_2 n}. \quad (3.16)$$

Диференціальне рівняння (3.16) є, очевидно, однорідним.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y' = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$.

Розв'язання. Оскільки $\Delta \neq 0$, то виконаємо заміни $x = m + \alpha$, $y = n + \beta$, де числа α і β задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3, \\ 2\alpha + \beta = 3. \end{cases}$$

Знаходимо, що $\alpha = \beta = 1$. Таким чином, після заміни $x = m + 1$, $y = n + 1$ одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dn}{dm} = \frac{m + 2n}{2m + n}.$$

Нехай $n = um$. Тоді

$$u'm + u = \frac{1 + 2u}{2 + u} \Rightarrow \frac{2 + u}{1 - u^2} du = \frac{dm}{m} \quad (u \neq \pm 1, m \neq 0).$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right| - \frac{1}{2} \ln |1-u^2| &= \ln |m| + \ln |C_1| \Rightarrow \\ \Rightarrow 1+u &= C m^2 (1-u)^3 \quad (C := \pm C_1^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \frac{n}{m} &= C m^2 \left(1 - \frac{n}{m}\right)^3 \Rightarrow m+n = C(m-n)^3. \end{aligned}$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння є $x + y - 2 = C(x - y)^3$.

Якщо $u = 1$, то $n = m$, $m \neq 0$, тобто $y = x$, $x \neq 1$. Якщо $u = -1$, то $n = -m$, $m \neq 0$, тобто $y = -x + 2$, $x \neq 1$. Перший розв'язок є особливим, а другий — частинним. Нарешті, якщо $m = 0$, то $x = 1$, але ця функція не є розв'язком заданого рівняння.

Відповідь: $x + y - 2 = C(x - y)^3$, $y = x$.

Якщо для коефіцієнтів рівняння (3.12) не виконується умова (3.13), тобто

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \quad (3.17)$$

то $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому з рівняння (3.12) випливає, що

$$y' = \frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = f(a_2 x + b_2 y),$$

тобто одержали рівняння вигляду (3.7), яке зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними з допомогою заміни

$$z = a_2 x + b_2 y.$$

Зауважимо, що за виконання умови (3.17) для зведення рівняння (3.12) до рівняння з відокремлюваними змінними можна виконувати також заміни $z = a_1 x + b_1 y$, $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ або $z = a_2 x + b_2 y + c_2$.

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання. Задане рівняння можна звести до вигляду (3.12), але робити це не обов'язково. Оскільки $\Delta = 0$, то виконаємо заміну $z = x + y$. Тоді $dy = dz - dx$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{aligned} (z + 1)dx + (2z - 1)(dz - dx) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 - z)dx + (2z - 1)dz &= 0. \end{aligned}$$

Зінтегруємо його:

$$\begin{aligned} dx + \frac{2z - 1}{2 - z} dz = 0 \quad (z \neq 2) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dx + \int \frac{3 - 2(2 - z)}{2 - z} dz = C \quad \Rightarrow \quad x - 3 \ln |2 - z| - 2z = C. \end{aligned}$$

Замінивши z на $x + y$, знаходимо загальний інтеграл у вигляді

$$3 \ln |2 - x - y| + x + 2y = C.$$

Якщо $z = 2$, то $y = 2 - x$. Цей розв'язок є, очевидно, особливим.

Відповідь: $3 \ln |2 - x - y| + x + 2y = C$, $y = 2 - x$.

Аналогічно інтегруються рівняння більш загального вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (3.18)$$

де $f(u)$ — неперервна функція свого аргументу.

Зауважимо, що деякі рівняння можна звести до однорідних з допомогою заміни $y = z^m$, де $z = z(x)$ — нова функція, а m — деяке число. Наприклад, у рівнянні

$$y' = x + \frac{y^2}{x^3}$$

зробимо згадану заміну

$$y = z^m \Rightarrow y' = mz^{m-1}z'$$

і виберемо m таким, щоб одержане рівняння

$$mz^{m-1}z' = x + \frac{z^{2m}}{x^3} \Rightarrow mz' = \frac{x}{z^{m-1}} + \frac{z^{m+1}}{x^3}$$

було однорідним. Для цього потрібно, щоб права частина рівняння була однорідною функцією виміру 0, тобто число m повинне задовольняти рівняння $m - 1 = 1$ і $m + 1 = 3$, звідки $m = 2$. Отже, з допомогою підстановки $y = z^2$ задане рівняння вдалося звести до однорідного рівняння

$$2z' = x/z + z^3/x^3,$$

зінтегрувати яке пропонуємо читачам самостійно.

Рекомендована література: [3, с. 11–39], [9, с. 15–30], [14, с. 23–27], [17, с. 16–177], [18, с. 28–33, 56–61], [21, с. 27–37].

Питання до лекції 3

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремленими змінними? Як знайти загальний інтеграл такого рівняння?
2. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними? Як інтегрується таке рівняння? Які функції можуть виявитися особливими розв'язками?
3. З допомогою якої заміни рівняння $y' = f(ax + by)$ можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними?
4. Коли функція $f(x, y)$ буде однорідною функцією виміру m ? Наведіть приклади однорідних функцій виміру 0, 1, 2, 3, а також приклади неоднорідних функцій.
5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним? З допомогою якої заміни шуканої функції таке рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
6. Якою має бути права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було однорідним?
7. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить цього для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?
8. Якими повинні бути числа c_1 , c_2 , щоб диференціальне рівняння (3.18) було однорідним?
9. Якими повинні бути числа a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , щоб рівняння (3.18) можливо було звести до однорідного рівняння? Коли це рівняння можливо звести відразу до рівняння з відокремлюваними змінними?

Вправи до лекції 3

1. Зінтегруйте диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = e^{x+y}; \quad \text{б) } y(1-x^2)dy - x(1-y^2)dx = 0;$$

$$\text{в) } (y^2 + xy^2)y' = yx^2 - x^2; \quad \text{г) } y' = \sqrt{\frac{9y^2 - 6y + 2}{x^2 - 2x + 5}}.$$

2. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\text{а) } (1 + e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1; \quad \text{б) } y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } xy^2 dx + \frac{y^2 + 1}{\sqrt{x}} dy = 0, \quad y(1) = 1.$$

3. Зінтегруйте диференціальні рівняння, звідні до рівнянь з відокремлюваними змінними:

$$\text{а) } y' = 2x + y + 3; \quad \text{б) } (x + y)y' = 1; \quad \text{в) } y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}.$$

4. Обґрунтуйте, що рівняння є однорідними, та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0; \quad \text{б) } y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}; \quad \text{в) } y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

5. Зінтегруйте рівняння, звідні до однорідних рівнянь:

$$\text{а) } (4y - 3x - 5)y' + 7x - 3y + 2 = 0;$$

$$\text{б) } (2x + 8)dx + (3y - 5x - 11)dy = 0.$$

Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратурах (продовження)

План

1. Лінійні рівняння.
2. Рівняння Бернуллі.
3. Рівняння у повних диференціалах.
4. Інтегрувальний множник.

1. Лінійні рівняння. *Лінійним* рівнянням першого порядку називають рівняння, в яке шукана функція та її похідна входять у першому степені і не перемножуються. Отже, лінійне рівняння має такий загальний вигляд:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \quad (4.1)$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — неперервні функції. В області, де $A(x) \neq 0$, рівняння (4.1) рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4.2)$$

у якому позначено $p(x) = B(x)/A(x)$, $q(x) = -C(x)/A(x)$.

Якщо ж $A(x_0) = 0$, то розв'язком рівняння (4.1), записаного у диференціальній формі $A(x)dy + B(x)ydx + C(x)dx = 0$, є $x = x_0$, у чому легко перекоонатися з допомогою підстановки. Наприклад, розв'язками рівняння $x(x - \pi)y' + \sin x \cdot y = \operatorname{tg} x$ є $x = 0$ і $x = \pi$. Спосіб відшукування інших розв'язків лінійних рівнянь буде наведений далі.

Якщо функції $p(x)$ та $q(x)$ у рівнянні (4.2) неперервні на деякому інтервалі (a, b) , то згідно з теоремою Коші через кожну точку смуги $a < a_1 \leq x \leq b_1 < b$, $-\infty < y < +\infty$ проходить єдина інтегральна крива. Справді, якщо рівняння (4.2) записати у вигляді $y' = q(x) - p(x)y$, то його права частина $f(x, y) = q(x) - p(x)y$ є, очевидно, неперервною функцією, а частинна похідна $f'_y(x, y) = -p(x)$ обмежена у цій області. У цьому випадку рівняння (4.2) особливих розв'язків не має.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю, то рівняння (4.2) називають *лінійним однорідним*, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то *лінійним неоднорідним*.

Для розв'язування лінійних рівнянь першого порядку використаємо *метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)* (з іншими методами розв'язування цих рівнянь можна познайомитись, наприклад, у [21, с. 41–44]). Для цього зінтегруємо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y' + p(x)y = 0,$$

яке є водночас рівнянням з відокремленими змінними:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -p(x)y &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (y \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |y| = -\int p(x)dx + C &\Rightarrow \\ \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}. &\end{aligned} \quad (4.3)$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.2) шукаємо у вигляді (4.3), замінивши довільну сталу C деякою функцією $C(x)$, тобто у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (4.4)$$

Підставляючи (4.4) у рівняння (4.2), одержуємо:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + \\ + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C, \end{aligned}$$

де C — довільна стала.

Підставляючи тепер знайдену функцію $C(x)$ у (4.4), маємо формулу для загального розв'язку лінійного рівняння (4.2):

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right). \quad (4.5)$$

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y' - 2y/x = x$.

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y' - \frac{2y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |y| = 2 \ln |x| + C \Rightarrow y = Cx^2. \end{aligned}$$

Розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} C'(x)x^2 + C(x) \cdot 2x - \frac{2}{x}C(x)x^2 = x \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow C(x) = \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Отже, $y = x^2 \cdot (\ln |x| + C)$. ■

Задача 1. Знайти закон зміни сили струму I в електричному колі з опором R , самоіндукцією L , вважаючи, що напруга U є сталою, а сила струму в початковий момент дорівнює I_0 .

Розв'язання. Якщо в колі діє постійна напруга, то, за законом Ома, $U = RI$. Якщо напруга змінна, а також у моменти замикання і розмикання струму постійної напруги, в колі виникає самоіндукція, яка характеризується виникненням електрорушійної

сили, пропорційної швидкості зміни струму $\frac{dI}{dt}$. Отже, величина цієї додаткової електрорушійної сили індукції дорівнює $L\frac{dI}{dt}$, де L — коефіцієнт пропорційності, який називають коефіцієнтом самоіндукції. Як відомо з фізики, повна напруга U складається з напруги, викликаной явищем самоіндукції, і напруги, обумовленої опором кола, тому

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U,$$

звідки

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}. \quad (4.6)$$

Диференціальне рівняння (4.6) — лінійне відносно функції $I(t)$. Зінтегруємо спочатку відповідне однорідне рівняння $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$. Відокремлюючи змінні, одержуємо:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L}t + C \Rightarrow I = Ce^{-Rt/L}.$$

Нехай тепер $C = C(t)$. Підставимо $I = C(t)e^{-Rt/L}$ у рівняння (4.6). Тоді

$$\begin{aligned} C'(t)e^{-Rt/L} - \frac{R}{L}C(t)e^{-Rt/L} + \frac{R}{L}C(t)e^{-Rt/L} &= \frac{U}{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(t) &= \frac{U}{L}e^{Rt/L} \Rightarrow C(t) = \frac{U}{R}e^{Rt/L} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow I(t) &= \left(\frac{U}{R}e^{Rt/L} + C\right)e^{-Rt/L}. \end{aligned}$$

Оскільки, за умовою задачі, $I(0) = I_0$, то, як легко перевірити, $C = I_0 - U/R$ і, отже,

$$\begin{aligned} I(t) &= \left(\frac{U}{R}e^{Rt/L} + I_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-Rt/L} \Rightarrow \\ \Rightarrow I(t) &= \left(I_0 - \frac{U}{R}\right)e^{-Rt/L} + \frac{U}{R}. \end{aligned}$$

Якщо t необмежено зростає, то $e^{-Rt/L}$ швидко спадає і практично вже через короткий проміжок часу процес можна вважати

усталеним, а сила струму визначатиметься за законом Ома, тобто $I = \frac{U}{R}$.

Якщо $I_0 = 0$, то $I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ — сила струму при замиканні кола. Якщо $U = 0$, то $I(t) = I_0 e^{-Rt/L}$ — сила згасаючого струму при розмиканні кола. ■

Зауважимо, що наведений метод розв'язування лінійних рівнянь можна застосовувати також до рівнянь вигляду $(p(y)x + q(y))y' = 1$, якщо y прийняти за незалежну змінну, а x — за функцію цієї змінної. Наприклад, рівняння $(y^2 + 2x)y' = y$, в якому $y = y(x)$, є нелінійним. Однак, якщо записати його у вигляді

$$y' = \frac{y}{y^2 + 2x} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{y}{y^2 + 2x} \Rightarrow x' - \frac{2}{y}x = y,$$

то маємо лінійне рівняння з прикладу 1, якщо x — шукана функція змінної y .

2. Рівняння Бернуллі. Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (4.7)$$

де m — деяке число, називають **рівнянням Бернуллі**. Якщо $m = 0$, то одержуємо лінійне неоднорідне рівняння (4.2), а якщо $m = 1$, — то рівняння з відокремленими змінними $y' + (p(x) - q(x))y = 0$, тому надалі вважатимемо, що у (4.7) $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Для розв'язування рівняння Бернуллі, так само, як лінійного рівняння, використаємо метод варіації довільної сталої. Зінтегруємо спочатку рівняння $y' + p(x)y = 0$. Його загальний розв'язок подається формулою (4.3): $y = C e^{-\int p(x) dx}$.

Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді

$$y = C(x) e^{-\int p(x) dx}, \quad (4.8)$$

де $C(x)$ — деяка функція. Підставляючи (4.8) у рівняння (4.7),

одержуємо:

$$\begin{aligned}
 C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} &= \\
 &= q(x)C^m(x)e^{-m\int p(x)dx} \Rightarrow \\
 \Rightarrow C'(x) &= q(x)C^m(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dC(x)}{C^m(x)} &= q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow \int \frac{dC(x)}{C^m(x)} &= \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C_1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{C^{1-m}(x)}{1-m} &= \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C_1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow C(x) &= \left((1-m) \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C \right)^{\frac{1}{1-m}}.
 \end{aligned}$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ в (4.8), одержуємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left((1-m) \int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx} dx + C \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

При цьому міг бути втрачений розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$. Якщо $0 < m < 1$, то цей розв'язок буде особливим, а якщо $m > 1$, то — частинним. Для $m \leq 0$ функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння Бернуллі.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння Бернуллі

$$y' - 2y/x = -xy^3.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $y' - 2y/x = 0$ був знайдений при розв'язуванні прикладу 1: $y = Cx^2$. Розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)x^2$. Підставляючи

у рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} C'(x)x^2 + 2C(x)x - 2C(x)x &= -C^3(x)x^7 \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x) &= -C^3(x)x^5 \Rightarrow \frac{dC(x)}{C^3(x)} = -x^5 dx \quad (C(x) \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{C^{-2}(x)}{-2} &= -\frac{x^6}{6} + C \Rightarrow C(x) = \pm \sqrt{\frac{3}{x^6 + C}} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \pm x^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{x^6 + C}} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}x^2}{\sqrt{x^6 + C}}. \end{aligned}$$

Якщо $C(x) = 0$, то $y = 0$. Пропонуємо самостійно переконатися, що ця функція є особливим розв'язком.

Відповідь: $y = \pm \sqrt{3}x^2(x^6 + C)^{-1/2}$, $y = 0$.

Задача 2. Знайти криві, в яких довжина відрізка, який відтинає дотична на осі Oy , дорівнює квадрату ординати точки дотику.

Розв'язання. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканої кривої $y = f(x)$. У точці M проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$, і нехай A — точка перетину цієї дотичної з віссю Oy , B — проекція точки M на вісь Ox (рис. 4.1).

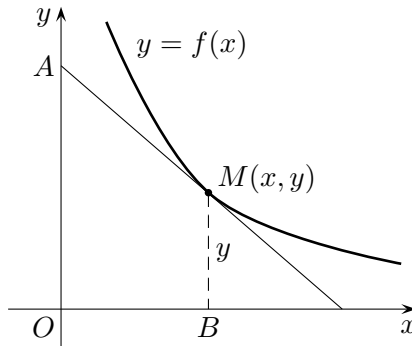


Рис. 4.1

За умовою задачі, $OA = BM^2$, причому $BM = y$. Відрізок OA знайдемо з рівняння дотичної $Y - y = f'(x) \cdot (X - x)$, у яке підставимо $X = 0$. Тоді $OA = Y = y - y'x$.

Таким чином, одержуємо рівняння Бернуллі $y - y'x = y^2$, у чому легко переконатись, якщо записати його у вигляді

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}.$$

Зінтегруємо спочатку рівняння $y' - y/x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| + C \Rightarrow y = Cx.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі шукаємо у вигляді $y = C(x)x$. Підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} C'(x)x + C(x) - C(x) &= -C^2(x)x \Rightarrow \\ \Rightarrow C'(x) &= -C^2(x) \Rightarrow \frac{dC}{C^2} = -dx \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{C(x)} &= -x + C \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x - C} \Rightarrow y = \frac{x}{x - C}. \end{aligned}$$

Отже, шуканими кривими є гіперболи $y = \frac{x}{x - C}$. ■

Зауважимо, що наведений метод розв'язування рівняння Бернуллі можна застосовувати також до рівнянь вигляду

$$(p(y)x + q(y)x^m) \cdot y' = 1,$$

якщо y прийняти за незалежну змінну, а x — за функцію цієї змінної. Наприклад, якщо рівняння $(2x - y^2x^3) \cdot y' = y$ записати у вигляді

$$y' = \frac{y}{2x - y^2x^3} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{y}{2x - y^2x^3} \Rightarrow x' - \frac{2}{y}x = -yx^3,$$

то маємо рівняння Бернуллі, розв'язане у прикладі 2 (якщо вважати, що $x = x(y)$).

3. Рівняння у повних диференціалах. Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4.9)$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y). \quad (4.10)$$

З (4.9), (4.10) випливає, що рівняння (4.9) можна записати у вигляді $dU = 0$, а тому загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах є $U(x, y) = C$.

У загальному випадку складно безпосередньо з'ясувати, чи є задане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Укажемо ознаку, яка дозволить відповісти на це питання, а також наведемо один із способів знаходження функції $U(x, y)$.

Припустимо, що функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ у рівнянні (4.9) є неперервними у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0) і не перетворюються одночасно в нуль у цій точці. Окрім того, вважатимемо, що у згаданому прямокутнику існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$.

Припустимо, що справджується умова (4.10), тобто ліва частина рівняння (4.9) є повним диференціалом. Згідно з означенням диференціала функції двох змінних $dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, а тому

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4.11)$$

Оскільки $M(x, y)$, $N(x, y)$ мають неперервні частинні похідні, то мішані похідні функції $U(x, y)$ не залежать від порядку диференціювання. Отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Звідси внаслідок рівності мішаних похідних одержуємо необхідну умову того, що (4.9) є рівнянням у повних диференціалах:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Покажемо, що умова (4.12) є також достатньою, тобто за виконання цієї умови ліва частина рівняння (4.9) є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$. Згідно з (4.11) шукана функція $U(x, y)$ повинна задовольняти умову $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$. Усі такі функції можна описати формулою

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y), \quad (4.13)$$

де $C(y)$ — довільна неперервно диференційовна функція від y . Оскільки функція $U(x, y)$ повинна також задовольняти другу умову з (4.11), то

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y). \quad (4.14)$$

Для виконання умови (4.13) потрібно відповідним чином підібрати функцію $C(y)$. Покажемо, що такий вибір за виконання умови (4.12) завжди можливий. Справді, з (4.14) маємо

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx.$$

Ліва частина цієї рівності є функцією тільки від y і, отже, права частина не залежить від x , тобто похідна за змінною x від правої частини повинна дорівнювати нулю. Переконаємось у цьому, враховуючи умову (4.12):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) = \\ &= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Наведене доведення достатності умов (4.12) дає водночас спосіб відшукування функції $U(x, y)$. Отже, спочатку потрібно знайти

функцію $U(x, y)$ за формулою (4.13), розглядаючи y як сталу, а потім з рівності (4.14) знайти $C'(y)$ і здійснити інтегрування для визначення $C(y)$. Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у формулу (4.13), матимемо функцію $U(x, y)$. Для одержання загального інтеграла рівняння у повних диференціалах (4.9), як було доведено вище, функцію $U(x, y)$ потрібно прирівняти до довільної сталої.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - y^2)dy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M(x, y) = 2xy + 3y^2$, $N(x, y) = x^2 + 6xy - y^2$ і, отже,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 6y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для знаходження функції $U(x, y)$ маємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy + 3y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy - y^2.$$

Знайдемо вираз для шуканої функції з першого рівняння системи і підставимо його у друге рівняння:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int (2xy + 3y^2) dx + C(y) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow U(x, y) &= x^2y + 3xy^2 + C(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 6xy + C'(y) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 6xy + C'(y) &= x^2 + 6xy - y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow C(y) = -y^3/3 + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що в останній формулі довільну сталу інтегрування можна прийняти рівною нулю, оскільки потрібно знайти хоча б одну функцію $U(x, y)$, диференціал якої збігається з лівою частиною заданого рівняння.

Отже, $U(x, y) = x^2y + 3xy^2 - y^3/3$, а загальним інтегралом є $x^2y + 3xy^2 - y^3/3 = C$. ■

4. Інтегровальний множник. Якщо (4.9) не є рівнянням у повних диференціалах, то завжди існує відмінна від сталого числа функція, після множення на яку ліва частина рівняння (4.9) стане повним диференціалом (доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [21, с. 54]). Цю функцію називають *інтегровальним множником* диференціального рівняння.

Нехай для коефіцієнтів рівняння (4.9) не справджується умова (4.12) і припустимо, що $\mu(x, y)$ — інтегровальний множник цього рівняння. Тоді для коефіцієнтів рівняння

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

повинна справджуватись умова

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &\Rightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким чином, інтегровальний множник $\mu(x, y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними (4.15), однак розв'язати це рівняння у загальному випадку значно складніше, ніж звичайне диференціальне рівняння (4.9). Проте в окремих випадках знайти інтегровальний множник вдається доволі легко. Розглянемо деякі з цих випадків.

1. Нехай рівняння (4.9) має інтегровальний множник, який залежить тільки від x , тобто $\mu = \mu(x)$. Тоді, враховуючи, що $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, з (4.15) маємо:

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{d\mu}{dx} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx.$$

Якщо функція у правій частині останнього рівняння залежить тільки від x , тобто

$$\frac{1}{N} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \varphi(x),$$

то, зінтегрувавши його, одержуємо

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x) dx}.$$

2. Нехай рівняння (4.9) має інтегровальний множник, який залежить тільки від y , тобто $\mu = \mu(y)$. Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$ і з (4.15) знаходимо:

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -M \frac{d\mu}{dy} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{-M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy.$$

Якщо функція у правій частині останнього рівняння залежить тільки від y , тобто

$$\frac{1}{-M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \psi(y),$$

то інтегровальним множником є

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y) dy}. \quad (4.16)$$

Приклад 4. З допомогою інтегровального множника зінтегрувати рівняння

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, а тому $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Оскільки

$$-\frac{1}{M} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{4xy - 1 - 1}{y - 2xy^2} = -\frac{2}{y} \equiv \psi(y),$$

то, скориставшись формулою (4.16), знаходимо інтегровальний множник:

$$\mu(y) = e^{-2 \int \frac{dy}{y}} = e^{-2 \ln|y|} = y^{-2}.$$

Якщо помножити обидві частини заданого рівняння на $\mu(y) = y^{-2}$, то одержуємо рівняння у повних диференціалах

$$\left(2x - \frac{1}{y} \right) dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right) dy = 0,$$

бо для нього виконується умова (4.12):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2x - \frac{1}{y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right) = y^{-2}.$$

Оскільки

$$(2x - 1/y)dx + (1 + x/y^2 + 1/y)dy = d(x^2 - x/y + y + \ln|y|),$$

то шуканим загальним інтегралом є

$$x^2 - x/y + y + \ln|y| = C. \blacksquare$$

Рекомендована література: [9, с. 30–48], [14, с. 28–41], [18, с. 69–96], [19, с. 31–36, 40–42, 90–101], [21, с. 37–57].

Питання до лекції 4

1. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку? Яка різниця між лінійними неоднорідним і однорідним рівняннями?

2. Чи має лінійне неоднорідне рівняння з неперервними коефіцієнтами особливі розв'язки? Відповідь обґрунтуйте з використанням теореми Коші.

3. У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування лінійного неоднорідного рівняння?

4. Який загальний вигляд рівняння Бернуллі? У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування цього рівняння? Чи може рівняння Бернуллі мати особливі розв'язки? Від чого це залежить?

5. Якими повинні бути функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах? Як формулюється необхідна і достатня ознака того, щоб це рівняння було у повних диференціалах?

6. Як зінтегрувати рівняння у повних диференціалах? Який вигляд має загальний інтеграл такого рівняння?

7. У чому полягає метод розв'язування диференціального рівняння з допомогою інтегрувального множника? Наведіть формули для знаходження інтегрувального множника.

Вправи до лекції 4

1. Серед наведених рівнянь відшукайте лінійне рівняння та зінтегруйте його методом варіації довільної сталої:

$$\text{а) } y' = (x - y)^2; \quad \text{б) } xy' + 2y - xy^2 = 0; \quad \text{в) } y' = 4y + e^{2x}.$$

2. Доведіть, що рівняння $y' + y = 2 \cos x$ має єдиний періодичний розв'язок, а всі інші розв'язки прямують до нього при $x \rightarrow +\infty$ (явище конвергенції).

3. Доведіть, що лінійне неоднорідне рівняння можна зінтегрувати з допомогою заміни $y = uv$, де u — частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння (метод Бернуллі).

4. Доведіть, що розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

5. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Бернуллі та зінтегруйте його:

$$\text{а) } y' + xy = y^2 \sin x; \quad \text{б) } y' + 2y = x^5; \quad \text{в) } y' = (x + y)^2.$$

6. Доведіть, що рівняння Бернуллі (4.7) можна звести до лінійного рівняння з допомогою заміни $z = y^{1-m}$. Зінтегруйте цим способом рівняння $xy' = y + x^2y^{-2}$.

7. Доведіть, що рівняння $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ (рівняння Ріккати) з допомогою заміни $y = z + y_1$, де z — нова функція, y_1 — його частинний розв'язок, зводиться до рівняння Бернуллі.

8. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння у повних диференціалах та зінтегруйте його:

$$\begin{aligned} \text{а) } (ye^x - e^y)dx &= (xe^y - e^x)dy; & \text{б) } 3x^2e^y dx + (x^3e^y - x)dy &= 0; \\ \text{в) } (y \sin 2x + x)dx &+ (y^2 - \cos 2x)dy &= 0. \end{aligned}$$

9. Знайдіть інтегрувальний множник лінійного диференціального рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ та розв'яжіть це рівняння з його допомогою (такий метод називають методом Ейлера).

Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку.
3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро.

1. **Основні означення й поняття.** *Неявним диференціальним рівнянням першого порядку* (диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної) називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (5.1)$$

де функція $F(x, y, z)$ неперервна в деякій області $D \subset \mathbf{R}^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна на інтервалі (a, b) , називають *розв'язком* рівняння (5.1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Якщо рівняння (5.1) можна розв'язати через елементарні функції відносно y' , то одержимо одне або декілька рівнянь, розв'язаних відносно похідної

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

де $f_k(x, y)$ — дійсні функції, тобто інтегрування рівняння (5.1) зводиться до інтегрування кожного з рівнянь (5.2), основні типи яких розглядались у лекціях 2–4.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'^2 - 4y = 0$.

Розв'язання. Задане рівняння розпадається на два рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = 2\sqrt{y}$ і $y' = -2\sqrt{y}$.

Загальним розв'язком першого з них є $y = (x + C)^2$, де $x \geq -C$, а другого — $y = (x + C)^2$, де $x \leq -C$. З геометричної точки зору це означає, що кожна парабола

$$y = (x + C)^2$$

є інтегральною кривою. Окрім того, розв'язком рівняння є $y = 0$ (рис. 5.1).

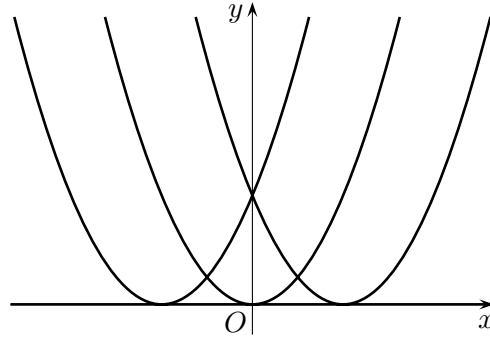


Рис. 5.1

Задане рівняння має також безліч розв'язків, які можна «склеїти» з частин наведених вище розв'язків. Наприклад, такими розв'язками будуть функції

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 1, \\ (x-1)^2, & \text{якщо } x > 1, \end{cases} \quad y = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{якщо } x < -1, \\ 0, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

графіки яких зображені на рис. 5.2 і 5.3 відповідно. Однак надалі такі розв'язки ми не розглядатимемо.

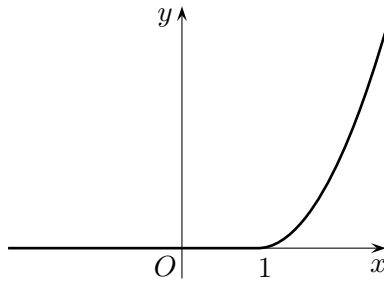


Рис. 5.2

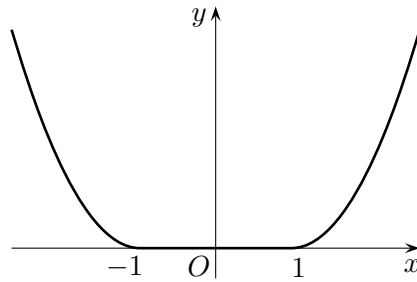


Рис. 5.3

Відповідь: $y = (x + C)^2$, $y = 0$.

Неявне диференціальне рівняння (5.1), так само, як і рівняння, розв'язане відносно похідної, визначає на площині Oxy деяке

поле напрямів. Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямів поля, бо, розв'язуючи рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$ відносно y' , зазвичай одержуємо декілька дійсних розв'язків. Наприклад, рівняння з прикладу 1 визначає у кожній точці (x_0, y_0) , де $y_0 > 0$, два напрями поля: $y'_1 = 2\sqrt{y_0}$ і $y'_2 = -2\sqrt{y_0}$. У кожній точці $(x_0, 0)$ осі Ox це рівняння визначає тільки один напрям поля: $y'_1|_{(x_0,0)} = 0$.

Задача Коші для рівняння (5.1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язаного відносно похідної, а саме: потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (5.1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.3)$$

При цьому, якщо розв'язків, які задовольняють початкову умову (5.3), не більше, ніж кількість напрямів поля, визначеного рівнянням (5.1) у цій точці, тобто не більше від кількості розв'язків y'_0 рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$, то кажуть, що задача Коші (5.1), (5.3) має єдиний розв'язок. Інакше вважають, що єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y'_0 — один з дійсних коренів рівняння (5.1). З'ясуємо умови, за яких існує єдина інтегральна крива рівняння (5.1), що проходить через точку (x_0, y_0) , причому дотична до неї у цій точці утворює з додатним напрямом Ox кут α_0 , тангенс якого дорівнює y'_0 .

Теорема. *Нехай ліва частина рівняння (5.1) задовольняє такі умови:*

1) *функція $F(x, y, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y'_0) ;*

2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$.

Тоді рівняння (5.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційований у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y'_0$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, в [21, с. 63–64].

Для відшукування обвідної сім'ї інтегральних кривих можна скористатись таким правилом ([21, с. 82–85]):

1) складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

де $\Phi(x, y, C) = 0$ — загальний інтеграл диференціального рівняння (5.1);

2) із системи (5.4) з допомогою виключення параметра C знаходимо криву $\varphi(x, y) = 0$;

3) з кривої $\varphi(x, y) = 0$ вилучаємо точки, де Φ'_x і Φ'_y одночасно дорівнюють нулю. Решта кривої $\varphi(x, y) = 0$ і буде обвідною заданої сім'ї інтегральних кривих.

2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо деякі типи неявних диференціальних рівнянь вигляду (5.1), для яких існують загальні методи розв'язання. Найпростішим з них є *рівняння, яке містить тільки похідну*, тобто рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \quad (5.5)$$

Нехай рівняння (5.5) має деяку (скінченну або нескінченну) кількість дійсних розв'язків $y' = k_j$, $j = 1, 2, \dots$, де k_j — сталі. Далі, оскільки

$$y' = k_j \quad \Rightarrow \quad y = k_j x + C \quad \Rightarrow \quad k_j = \frac{y - C}{x},$$

то одержуємо загальний інтеграл цього рівняння у вигляді

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \quad (5.6)$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y'^3 - 3y'^2 + 2 = 0$.

Розв'язання. Згідно з формулою (5.6) одержуємо загальний інтеграл:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 2 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y-C)^3 - 3x(y-C)^2 + 2x^3 &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Диференціальне рівняння вигляду

$$(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y)y' + a_n(x, y) = 0 \quad (5.7)$$

називають **рівнянням першого порядку степеня n** . Згідно з основною теоремою алгебри рівняння (5.7) визначає n значень для y' . Якщо не враховувати комплексні корені, то матимемо m ($m \leq n$) диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \dots, \quad y' = f_m(x, y). \quad (5.8)$$

Сукупність загальних розв'язків $y = \varphi_k(x, C)$ або загальних інтегралів $\Phi_k(x, y, C) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, рівнянь (5.8) є загальним інтегралом рівняння (5.7). Його можна записати також у вигляді

$$(y - \varphi_1(x, C)) \cdot (y - \varphi_2(x, C)) \cdot \dots \cdot (y - \varphi_m(x, C)) = 0$$

або

$$\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \dots \cdot \Phi_m(x, y, C) = 0.$$

Якщо хоча б одне з рівнянь (5.8) має особливі розв'язки, то вони будуть також особливими розв'язками рівняння (5.7).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $y'^2 - 2yy'/x - 1 = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння як квадратне відносно y' , одержуємо два однорідні диференціальні рівняння (лекція 3):

$$y' = y/x \pm \sqrt{(y/x)^2 + 1}.$$

Виконуючи заміну $y = ux$, маємо два рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x = \sqrt{u^2 + 1} \quad \text{і} \quad u'x = -\sqrt{u^2 + 1}.$$

Зінтегруємо перше з них:

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dx}{x} &\Rightarrow \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1} \right| = \ln |x| + C \Rightarrow \\ \Rightarrow u + \sqrt{u^2 + 1} = Cx &\Rightarrow u^2 + 1 = (Cx - u)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow u = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} &\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} \Rightarrow y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C}. \end{aligned}$$

Аналогічно можна показати, що загальним розв'язком рівняння $u'x = -\sqrt{u^2 + 1}$ є $y = \frac{C^2 - x^2}{2C}$, де C — довільна стала.

Відповідь: $y = (C^2x^2 - 1)/(2C)$, $y = (C^2 - x^2)/(2C)$.

Нехай рівняння (5.1) можна розв'язати відносно y , тобто воно має вигляд

$$y = f(x, y'). \quad (5.9)$$

Тоді можна використати *метод уведення параметра*. Позначимо $y' = p(x)$, тоді з (5.9) маємо співвідношення $y = f(x, p)$, диференціюючи яке, одержуємо:

$$\begin{aligned} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp &\Rightarrow y' dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp \Rightarrow \\ \Rightarrow p dx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp. & \quad (5.10) \end{aligned}$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $x = \varphi(p, C)$ рівняння (5.10). Тоді, підставляючи його у $y = f(x, p)$, одержимо загальний розв'язок рівняння (5.9) у параметричній формі

$$x = \varphi(p, C), \quad y = f(\varphi(p, C), p).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (5.10) у вигляді $p = h(x, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (5.9) у явному вигляді $y = f(x, h(x, C))$.

Якщо рівняння (5.10) має особливий розв'язок $p = \psi(x)$, то $y = f(x, \psi(x))$ може бути особливим розв'язком рівняння (5.9).

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y = y'^2 - 3xy' + 3x^2$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = p^2 - 3xp + 3x^2. \quad (5.11)$$

Здиференціюємо (5.11), враховуючи, що $dy = y'dx = p dx$:

$$\begin{aligned} dy &= 2p dp - 3x dp - 3p dx + 6x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow p dx &= (2p - 3x) dp - (3p - 6x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow (2p - 3x) dp - 2(2p - 3x) dx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2p - 3x)(dp - 2dx) &= 0 \Rightarrow dp = 2dx \text{ або } 2p - 3x = 0. \end{aligned}$$

Отже, одержали два рівняння. З першого із них знаходимо $p = 2x + C$. Підставляючи знайдене значення p у (5.11), одержуємо загальний розв'язок

$$y = (2x + C)^2 - 3x(2x + C) + 3x^2 \Rightarrow y = x^2 + Cx + C^2.$$

З рівняння $2p - 3x = 0$ знаходимо $p = 3x/2$, а тому $y = 3x^2/4$. Цей розв'язок — особливий.

Відповідь: $y = x^2 + Cx + C^2$, $y = 3x^2/4$.

Нехай рівняння (5.1) можна розв'язати відносно x , тобто

$$x = f(y, y'). \quad (5.12)$$

Це рівняння також розв'яжемо методом введення параметра. Позначимо $y' = p(y)$. Тоді, враховуючи, що $dx = \frac{dy}{y'}$, маємо:

$$\begin{aligned} x = f(y, p) \Rightarrow dx &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{p} &= \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Припустимо, що знайдено загальний розв'язок $y = \varphi(p, C)$ рівняння (5.13). Тоді, підставляючи його у $x = f(y, p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння (5.12) у параметричній формі

$$x = f(\varphi(p, C), p), \quad y = \varphi(p, C).$$

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок рівняння (5.13) у вигляді $p = h(y, C)$, то отримаємо загальний розв'язок рівняння (5.12) у явному вигляді $x = f(y, h(y, C))$.

Якщо рівняння (5.13) має особливий розв'язок $p = \psi(y)$, то $x = f(y, \psi(y))$ може бути особливим розв'язком рівняння (5.12).

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння $x = y'^3 + 4y'$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді $x = p^3 + 4p$. Далі маємо:

$$\begin{aligned} dx = 3p^2 dp + 4dp &\Rightarrow \frac{dy}{p} = 3p^2 dp + 4dp \Rightarrow \\ \Rightarrow dy = (3p^3 + 4p)dp &\Rightarrow y = \frac{3p^4}{4} + 2p^2 + C. \end{aligned}$$

Відповідь: $x = p^3 + 4p$, $y = 3p^4/4 + 2p^2 + C$.

3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро. Окремим випадком рівняння (5.9) є рівняння вигляду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \quad (5.14)$$

Якщо функція $\varphi(y')$ тотожно не збігається з y' , то (5.14) називають **рівнянням Лагранжа**. Як бачимо, рівняння Лагранжа лінійне відносно x і y .

Нехай $y' = p$. Тоді

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \quad (5.15)$$

Здиференціюємо (5.15), беручи до уваги, що $dy = p dx$:

$$\begin{aligned} dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp &\Rightarrow \\ \Rightarrow (p - \varphi(p))dx = (x\varphi'(p) + \psi'(p))dp \quad (p \neq \varphi(p)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \end{aligned}$$

Останнє рівняння є лінійним відносно функції $x(p)$. Інтегруючи його за формулою (4.5) з лекції 4, одержимо $x = \omega(p, C)$, що разом з (5.15) визначатиме загальний розв'язок рівняння Лагранжа у параметричній формі.

Якщо рівняння $p = \varphi(p)$ має дійсні корені $p = p_i$, то, підставляючи їх у рівняння (5.14), одержуємо $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$. Ці розв'язки рівняння Лагранжа (з геометричної точки зору — прямі) можуть бути особливими.

Приклад 6. Зінтегрувати рівняння $y = 2xy' + y'^2$.

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$\begin{aligned} y = 2xp + p^2 &\Rightarrow dy = 2xdp + 2pdx + 2pdp \Rightarrow \\ \Rightarrow pdx = 2(x+p)dp + 2pdx &\Rightarrow 2(x+p)dp + pdx = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -2 \quad (p \neq 0). \end{aligned}$$

Розв'язуючи одержане лінійне рівняння (див. лекцію 4), знаходимо, що $x = -2p/3 + C/p^2$. Підставляючи цей вираз x у рівність $y = 2xp + p^2$, після нескладних перетворень знаходимо, що $y = 2C/p - p^2/3$. Отже, загальним розв'язком у параметричній формі є

$$x = -\frac{2}{3}p + \frac{C}{p^2}, \quad y = \frac{2C}{p} - \frac{1}{3}p^2.$$

Якщо $p = 0$, то підставляючи його у $y = 2xp + p^2$, одержуємо розв'язок $y = 0$, який є особливим, бо його не можна отримати з загального при жодному значенні сталої C .

Відповідь: $x = -2p/3 + C/p^2$, $y = 2C/p - p^2/3$; $y = 0$.

Розглянемо окремий випадок рівняння Лагранжа, коли $\varphi(y') \equiv y'$:

$$y = xy' + \psi(y'). \quad (5.16)$$

Рівняння (5.16) називають **рівнянням Клеро**. Інтегруючи його за тією самою схемою, що і рівняння Лагранжа, маємо:

$$\begin{aligned} y' = p &\Rightarrow y = xp + \psi(p) \Rightarrow \\ \Rightarrow pdx = xdp + pdx + \psi'(p)dp &\Rightarrow \\ \Rightarrow dp \cdot (x + \psi'(p)) = 0 &\Rightarrow dp = 0 \quad \text{або} \quad x + \psi'(p) = 0. \end{aligned}$$

З першого рівняння знаходимо $p = C$ і, підставляючи у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо загальний розв'язок рівняння

Клеро:

$$y = xC + \psi(C). \quad (5.17)$$

Легко бачити, що з геометричної точки зору загальний розв'язок рівняння Клеро є однопараметричною сім'єю прямих, а для його одержання потрібно у рівнянні (5.16) замінити похідну y' на сталу C .

З рівняння $x + \psi'(p) = 0$ знаходимо $x = -\psi'(p)$. Підставляючи цей вираз у формулу $y = xp + \psi(p)$, одержуємо, що $y = \psi'(p)p + \psi(p)$. Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = \psi'(p) \cdot p + \psi(p). \end{cases} \quad (5.18)$$

Розв'язок (5.18) зазвичай є особливим, і у цьому випадку з геометричної точки зору маємо обвідну сім'ї (5.17). Справді, відшукуючи криву, підозрілу на обвідну сім'ї (5.17), за правилом, указаним наприкінці першого пункту цієї лекції, маємо систему

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C), \\ 0 = x + \psi'(C), \end{cases}$$

друге рівняння якої одержане з першого диференціюванням за параметром C . Звідси знаходимо

$$\begin{cases} x = -\psi'(C), \\ y = -\psi'(C)C + \psi(C), \end{cases}$$

тобто систему, яка відрізняється від (5.18) тільки позначенням параметра.

Приклад 7. *Зінтегрувати рівняння $y = xy' + 2y^2$.*

Розв'язання. Нехай $y' = p$. Тоді

$$\begin{aligned} y = xp + 2p^2 &\Rightarrow dy = xdp + pdx + 4pdp \Rightarrow \\ \Rightarrow (x + 4p)dp = 0 &\Rightarrow dp = 0 \text{ або } x + 4p = 0. \end{aligned}$$

З рівняння $dp = 0$ знаходимо, що $p = C$. Підставляючи $p = C$ у рівність $y = xp + 2p^2$, одержуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = Cx + 2C^2.$$

Якщо $x = -4p$, то $y = -4p^2 + 2p^2 = -2p^2$. Таким чином, особливим розв'язком є $x = -4p$, $y = -2p^2$. Виключивши звідси параметр p , одержуємо особливий розв'язок у явному вигляді: $y = -x^2/8$.

Відповідь: $y = Cx + 2C^2$, $y = -x^2/8$.

Рекомендована література: [7, с. 59–67], [9, с. 51–68], [11, с. 68–82], [14, с. 42–49], [18, с. 112–131], [21, с. 58–76, 86–89].

Питання до лекції 5

1. Який загальний вигляд має неявне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком неявного диференціального рівняння першого порядку?

2. Як побудувати поле напрямів, задане неявним диференціальним рівнянням першого порядку?

3. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку? Коли розв'язок цієї задачі єдиний?

4. Як формулюється теорема про існування єдиного розв'язку задачі Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?

5. Яке неявне диференціальне рівняння називають рівнянням першого порядку степеня n ? Як воно інтегрується?

6. Який вигляд має загальний інтеграл рівняння $F(y') = 0$?

7. Які заміни використовуються для інтегрування неявних рівнянь $y = f(x, y')$, $x = f(y, y')$? Чи можуть ці рівняння мати особливі розв'язки?

8. Який вигляд має рівняння Лагранжа? Яку заміну використовують для інтегрування цього рівняння? Які криві можуть бути його особливими розв'язками?

9. Який вигляд має рівняння Клеро? Як знайти загальний і особливий розв'язки цього рівняння?

Вправи до лекції 5

1. Зінтегруйте рівняння та виділіть інтегральні криві, які проходять через задану точку:

$$\text{а) } y'^2 = 4y, \quad M(1, 0); \quad \text{б) } yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0, \quad M(1, 1).$$

2. Знайдіть за виглядом рівнянь криві, підозрілі на особливі розв'язки, і перевірте, чи будуть вони особливими розв'язками:

$$\text{а) } y'^2 = 4y; \quad \text{б) } y^2(y'^2 + 1) = 1.$$

3. Зінтегруйте рівняння:

а) $e^{y'} + y' = 1$; б) $y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$; в) $y'^2 + (3x + y)y' + 3xy = 0$.

4. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Лагранжа та зінтегруйте його:

а) $y' = 2xy - y'^2$; б) $y = 2xy' - y'^2$; в) $y = xy' - 2y'^2$.

5. Серед наведених рівнянь відшукайте рівняння Клеро та зінтегруйте його:

а) $y' = 2xy + y'^2$; б) $y = xy' + xy'^2$; в) $y - xy' - \sqrt{1 - y'^2} = 0$.

Розділ 2

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Лекція 6. Диференціальні рівняння вищих порядків

План

1. Основні означення й поняття.
2. Неповні рівняння.
3. Однорідні рівняння.

1. Основні означення й поняття. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (6.1)$$

Якщо рівняння (6.1) можна розв'язати відносно старшої похідної, то його запишемо у вигляді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6.2)$$

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційовна n разів на інтервалі (a, b) , називають **розв'язком** рівняння (6.2) на цьому інтервалі, якщо вона для всіх $x \in (a, b)$ перетворює це рівняння у тотожність.

Для рівняння (6.2) **задача Коші** формулюється так: серед усіх розв'язків цього рівняння знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який для $x = x_0$ задовольняє умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (6.3)$$

Число x_0 називають **початковим значенням незалежної змінної**, числа $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — **початковими значеннями розв'язку** $y = y(x)$, сукупність чисел $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ —

початковими даними розв'язку $y = y(x)$, а умови (6.3) — *початковими умовами*.

Зокрема, для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.4)$$

задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y = y(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (6.5)$$

З геометричної точки зору задача Коші (6.4), (6.5) полягає у знаходженні такої інтегральної кривої, яка проходить через точку (x_0, y_0) і має у цій точці заданий напрям дотичної y'_0 , тобто $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$.

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n -го порядку (6.2) не означає, що через точку (x_0, y_0) проходить тільки одна інтегральна крива, як це було для рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної (лекція 2). Наприклад, єдиність розв'язку задачі Коші (6.4), (6.5) означає, що через кожну точку (x_0, y_0) проходить єдина інтегральна крива рівняння (6.4), дотична до якої у цій точці утворює з додатним напрямом осі Ox кут α_0 , для якого $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$. Водночас, крім цієї інтегральної кривої через точку (x_0, y_0) можуть проходити й інші інтегральні криві, але з іншим нахилом дотичної у цій точці.

Розглянемо питання про механічне трактування диференціального рівняння другого порядку, його розв'язків та задачі Коші. Нехай матеріальна точка з масою m рухається по прямій, яку прийемо за вісь Ox , під дією сили $F(t, x, \frac{dx}{dt})$, залежної від часу t , положення x і швидкості $\frac{dx}{dt}$ у момент часу t . Згідно з другим законом Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

де $\frac{d^2x}{dt^2}$ — прискорення точки в момент часу t , або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (6.6)$$

де $f = F/m$.

Кожному розв'язку $x = x(t)$ рівняння (6.6) відповідає певний **закон руху**, тому часто розв'язок $x = x(t)$ називають **рухом**, який визначений рівнянням (6.6). Задача інтегрування рівняння (6.6) полягає у знаходженні всіх рухів, визначених цим рівнянням, та у вивченні їхніх властивостей.

З механічної точки зору задача Коші для рівняння (6.6) полягає у знаходженні такого руху $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x'_0,$$

тобто в початковий момент часу $t = t_0$ точка повинна займати задане положення x_0 і мати задану швидкість x'_0 .

Достатня умова існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку поширюється і на випадок рівняння n -го порядку: *для існування (неперервного разом з похідними до порядку n включно) розв'язку задачі Коші (6.2), (6.3) досить припустити, щоб права частина рівняння (6.2) була неперервною в околі початкових даних (теорема Пеано).*

Відповідь на питання про існування єдиного розв'язку задачі Коші (6.2), (6.3) дає така теорема [21, с. 93–99].

Теорема (Коші). *Якщо функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ у рівнянні (6.2):*

1) *неперервна за всіма аргументами у деякому околі точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$;*

2) *має обмежені частинні похідні за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в околі точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$,*

то існує єдиний розв'язок задачі Коші (6.2), (6.3), який визначений і неперервний разом з похідними до порядку n включно на деякому відрізку $|x - x_0| \leq h$.

Загальним розв'язком рівняння (6.2) називають сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від n довільних сталих:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Загальний розв'язок рівняння (6.2) у неявному вигляді $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ називають **загальним інтегралом** цього рівняння.

У деяких випадках, інтегруючи рівняння (6.2), шукають сім'ю інтегральних кривих, яка залежить від n довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n , у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y = \psi(p, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

Таку сім'ю інтегральних кривих називають **загальним розв'язком у параметричній формі**.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (6.2) називають **частинним**, якщо його можна одержати з формули загального розв'язку при певних числових значеннях сталих C_1, C_2, \dots, C_n . Розв'язок, який не можна одержати з загального розв'язку при жодних значеннях сталих C_1, C_2, \dots, C_n , називають **особливим**.

Зауважимо, що диференціальне рівняння n -го порядку може мати сім'ю особливих розв'язків, залежну від довільних сталих, кількість яких може бути $n - 1$. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 1. *Зінтегрувати рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.*

Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція. Тоді

$$\begin{aligned} z' = 2\sqrt{z} &\Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx \quad (z \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{z} = x + C_1 &\Rightarrow z = (x + C_1)^2 \Rightarrow y' = (x + C_1)^2. \end{aligned}$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок

$$y = \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2.$$

Особливому розв'язку $z = 0$ рівняння $z' = 2\sqrt{z}$ відповідає сім'я особливих розв'язків $y = C$ рівняння $y'' = 2\sqrt{y'}$.

Відповідь: $y = (x + C_1)^3/3 + C_2, y = C$.

У задачі Коші умови, з допомогою яких можна виділити певний частинний розв'язок диференціального рівняння, задаються

в одній (початковій) точці. Проте у багатьох прикладних задачах умови на невідому функцію та її похідні часто задаються у двох точках, наприклад, на кінцях відрізка, де шукається розв'язок задачі. Такі умови називають **крайовими**. Задачу відшукування розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє крайові умови, називають **крайовою**. Розв'язок крайової задачі не завжди існує і є єдиним, він також може не існувати або бути неєдиним.

2. Неповні рівняння. Розглянемо деякі класи звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку, загальний розв'язок (загальний інтеграл) яких можна знайти з допомогою квадратур. Зведення до квадратур виконується або з допомогою спеціальних прийомів, або шляхом попереднього зниження порядку рівняння.

Розглянемо спочатку неповні рівняння. Найпростішими з них є рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (6.7)$$

Припустимо, що (6.7) можна розв'язати відносно $y^{(n)}$. Тоді

$$y^{(n)} = f(x). \quad (6.8)$$

Рівняння (6.8) з неперервною функцією $f(x)$ завжди інтегрується у квадратурах. Справді, інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

Далі аналогічно одержуємо:

$$\begin{aligned} y^{(n-2)} &= \iint f(x) dx dx + C_1 x + C_2, \\ y^{(n-3)} &= \iiint f(x) dx dx dx + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ разів}} f(x) dx dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n, \quad (6.9)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі.

Формула (6.9) визначає загальний розв'язок рівняння (6.8).

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y'' = \sin^2 3x$.

Розв'язання. Інтегруючи обидві частини рівняння, одержуємо

$$y' = \int \sin^2 3x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C_1.$$

Інтегруючи ще один раз, знаходимо загальний розв'язок:

$$y = \int \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 6x}{12} + C_1 \right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 6x}{72} + C_1 x + C_2,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі, $C_1 := C_1/2$.

Відповідь: $y = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 6x}{72} + C_1 x + C_2$.

У динаміці матеріальної точки рівняння вигляду $x'' = f(t)$, де t — час, $x = x(t)$, зустрічається при вивченні прямолінійного руху, якщо сила, що діє на цю точку, залежить тільки від часу.

Задача 1. Знайти закон руху $x(t)$ матеріальної точки з масою m , яка рухається вздовж прямої під дією сили, що змінюється за формулою $F = k e^{-pt}$, де $p > 0$, якщо початкові положення та швидкість руху дорівнюють нулю.

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона

$$m x'' = k e^{-pt} \quad \Rightarrow \quad x'' = \frac{k}{m} e^{-pt},$$

тобто маємо рівняння вигляду $x'' = f(t)$. Двічі інтегруючи, одержуємо:

$$x' = -\frac{k}{mp} e^{-pt} + C_1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{mp^2} e^{-pt} + C_1 t + C_2.$$

Оскільки, за умовою задачі, $x(0) = 0$, $v(0) = x'(0) = 0$, то $C_1 = \frac{k}{mp}$, $C_2 = -\frac{k}{mp^2}$, а тому

$$x = \frac{k}{mp^2}e^{-pt} + \frac{k}{mp}t - \frac{k}{mp^2} \Rightarrow x(t) = \frac{k}{mp^2}(e^{-pt} + pt - 1).$$

Зауважимо, що оскільки $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$, то для великих значень t знайдений рух наближається до рівномірного руху

$$x(t) = \frac{k}{mp}t - \frac{k}{mp^2}.$$

Відповідь: $x(t) = \frac{k}{mp^2}(e^{-pt} + pt - 1)$.

Розглянемо диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції та кількох її послідовних перших похідних, тобто рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (6.10)$$

де $1 \leq k < n$. Уведемо нову невідому функцію $z = z(x)$ за формулою

$$y^{(k)} = z. \quad (6.11)$$

З (6.10), (6.11) випливає, що функція z є розв'язком рівняння

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (6.12)$$

Звичайно, рівняння (6.12) не обов'язково інтегрується у скінченному вигляді, але його порядок на k одиниць менший від порядку рівняння (6.10). Якщо $z = \omega(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ — загальний розв'язок рівняння (6.12), то для знаходження функції y одержуємо рівняння k -го порядку

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

яке легко інтегрується (це рівняння вигляду (6.8)).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $y'' = \sqrt{2 - 3y'}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z(x)$. Тоді для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремленими змінними

$$z' = \sqrt{2 - 3z}.$$

Зінтегруємо його:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\sqrt{2-3z}} = dx \quad (2-3z \neq 0) &\Rightarrow -\frac{2}{3}\sqrt{2-3z} = x + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4}{9}(2-3z) = (x+C_1)^2 &\Rightarrow z = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x+C_1)^2. \end{aligned}$$

Оскільки $z = y'$, то

$$y' = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}(x+C_1)^2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}(x+C_1)^3 + C_2.$$

Окрім того, якщо $z = 2/3$, то $y = 2x/3 + C$. Ці розв'язки є особливими.

Відповідь: $y = 2x/3 - (x+C_1)^3/4 + C_2$, $y = 2x/3 + C$.

Задача 2. Точка з масою m рухається по прямій під дією сили, яка змінюється за формулою $F_1 = A \sin \omega t$. Вважаючи, що опір середовища пропорційний швидкості точки, тобто $F_2 = -kv$, вивести закон руху $x(t)$ точки, якщо її початкові положення та швидкість дорівнюють нулю.

Розв'язання. За умовою задачі, $F = F_1 + F_2$. Згідно з другим законом Ньютона

$$ma = A \sin \omega t - kv,$$

а оскільки $v = x'$, $a = x''$, то одержуємо диференціальне рівняння вигляду (6.10):

$$mx'' + kx' = A \sin \omega t.$$

Початковими умовами є $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ (за умовою задачі, початкові положення та швидкість точки дорівнюють нулю).

Уводимо нову функцію $x' = u$ (тоді $x'' = u'$) і одержуємо лінійне рівняння першого порядку

$$u' + \frac{k}{m}u = \frac{A}{m} \sin \omega t$$

з початковою умовою $u(0) = 0$. Розв'язок цього рівняння можна знайти за формулою (4.5) з лекції 4. Пропонуємо читачам самостійно переконатися в тому, що

$$u = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

З умови $u(0) = 0$ знаходимо сталу $C_1 = \frac{Am\omega}{k^2 + \omega^2 m^2}$, а тому

$$u = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right).$$

Оскільки $u = x'$, то функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$x' = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\omega e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right),$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$x(t) = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(-\frac{m\omega}{k} e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m\omega} \cos \omega t - \sin \omega t \right) + C_2.$$

Оскільки $x(0) = 0$, то

$$C_2 = \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\frac{m\omega}{k} + \frac{k}{m\omega} \right) \Rightarrow C_2 = \frac{A}{k\omega}.$$

Таким чином,

$$x(t) = \frac{A}{k\omega} - \frac{Am}{k^2 + \omega^2 m^2} \left(\frac{m\omega}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m\omega} \cos \omega t + \sin \omega t \right). \blacksquare$$

Розглянемо тепер диференціальне рівняння, яке явно не містить незалежної змінної, тобто рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (6.13)$$

Покажемо, що порядок цього рівняння можна знизити на одиницю. Для цього введемо нову функцію z за формулою $y' = z$,

уважаючи y новою незалежною змінною, тобто $z = z(y)$. Виразимо похідні y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$ через функцію z та її похідні за змінною y :

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) \frac{dy}{dx} = (z''z + z'^2)z, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y^{(n)} &= \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Отже, для знаходження функції z одержали диференціальне рівняння $(n-1)$ -го порядку

$$F\left(y, z, z'z, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})\right) = 0. \quad (6.14)$$

Якщо $z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ — загальний розв'язок рівняння (6.14), то загальний інтеграл рівняння (6.13) можемо знайти, розв'язавши рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Зауважимо, що приймаючи y за незалежну змінну, можна втратити розв'язки рівняння (6.13) вигляду $y = C$. Безпосередньою підстановкою у рівняння (6.13) потрібно з'ясувати, чи має воно такі розв'язки.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $yy'' = y'^2 - y'^3$.

Розв'язання. Нехай $y' = z(y)$. Тоді $y'' = z'z$ і, підставляючи в рівняння, маємо:

$$\begin{aligned} yz \frac{dz}{dy} = z^2 - z^3 &\Rightarrow z \left(y \frac{dz}{dy} - z + z^2 \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z = 0 \quad \text{або} \quad y \frac{dz}{dy} &= z - z^2. \end{aligned}$$

З першого рівняння випливає, що $y' = 0$ і, отже, $y = C$, а з другого:

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{dy} = z - z^2 &\Rightarrow \int \frac{dz}{z - z^2} = \int \frac{dy}{y} \quad (z - z^2 \neq 0, y \neq 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z} \right) dz = \int \frac{dy}{y} &\Rightarrow \ln|z| - \ln|1-z| = \ln|y| + C_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z}{1-z} = C_1 y &\Rightarrow z = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}. \end{aligned}$$

Оскільки $z = y'$, то

$$\begin{aligned} y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1 + C_1 y}{y} dy = C_1 dx \quad (y \neq 0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} + C_1 \right) dy = C_1 x + C_2 &\Rightarrow \ln|y| + C_1 y = C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Якщо $z - z^2 = 0$, то $z = 0$ або $z = 1$. Випадок $z = 0$ уже розглянуто, а якщо $z = 1$, то $y' = 1$, $y = x + C$. Усі ці прямі є особливими розв'язками.

Відповідь: $\ln|y| + C_1 y = C_1 x + C_2$, $y = x + C$, $y = C$.

3. Однорідні рівняння. Диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6.15)$$

називають **однорідним** відносно шуканої функції та її похідних, якщо його ліва частина для довільного $t \neq 0$ справджує умову

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad (6.16)$$

де число m — вимір однорідності функції F . Покажемо, що з допомогою підстановки

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y = e^{\int z(x) dx}, \quad (6.17)$$

де $z = z(x)$ — нова невідома функція, порядок рівняння (6.15) можна знизити на одиницю. Справді, оскільки

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

$$y''' = y \cdot (z'' + 3zz' + z^3), \quad \dots, \quad y^{(n)} = y \cdot g(z, z', \dots, z^{(n-1)}),$$

то, підставляючи ці вирази в (6.15), маємо співвідношення

$$F(x, y, yz, y \cdot (z^2 + z'), \dots, y \cdot g(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0,$$

яке, враховуючи (6.16), можемо записати у вигляді

$$y^m \cdot F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Після скорочення на y^m ($y \neq 0$) одержуємо диференціальне рівняння $(n - 1)$ -го порядку:

$$F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, g(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0. \quad (6.18)$$

Якщо $z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ — загальний розв'язок рівняння (6.18), то, беручи до уваги (6.17), знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (6.15):

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) dx},$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі.

Функція $y = 0$ теж є розв'язком рівняння (6.15), але цей розв'язок можна отримати із загального при $C_n = 0$.

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння $x^2 y y'' - (y - x y')^2 = 0$.

Розв'язання. Легко переконалися, що ліва частина рівняння є однорідною функцією (виміру 2), а тому задане рівняння є однорідним. Нехай $y' = yz$. Тоді $y'' = (z' + z^2)y$ і, підставляючи у рівняння, одержуємо:

$$x^2 y^2 (z' + z^2) - (y - x y z)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 (z' + z^2) - (1 - x z)^2 = 0 \quad (y \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 z' + 2x z = 1 \quad \Rightarrow \quad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}.$$

Отже, маємо лінійне рівняння першого порядку (лекція 4). Його загальним розв'язком є $z = 1/x + C_1/x^2$. Далі маємо:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln |y| = \ln |x| - \frac{C_1}{x} + C_2 &\Rightarrow y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}. \end{aligned}$$

Розв'язок $y = 0$ є частинним (його можна одержати із загального розв'язку при $C_2 = 0$).

Відповідь: $y = C_2 x e^{-C_1/x}$.

Рекомендована література: [9, с. 69–81], [14, с. 15–17, 50–58], [17, с. 227–287], [18, с. 136–161], [21, с. 91–113].

Питання до лекції 6

1. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної?

2. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку? Яка достатня умова існування розв'язку такої задачі? Наведіть теорему Коші про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Який геометричний зміст має ця задача для диференціального рівняння другого порядку?

3. Який механічний зміст диференціального рівняння другого порядку та його розв'язків?

4. Що називають загальним розв'язком (загальним інтегралом) диференціального рівняння n -го порядку? Який розв'язок називають частинним, а який — особливим? Чи може диференціальне рівняння n -го порядку мати безліч особливих розв'язків?

5. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною?

6. З допомогою якої заміни можна знизити порядок диференціального рівняння, що не містить шуканої функції, і рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних?

7. Як знизити порядок диференціального рівняння, яке не містить незалежної змінної?

8. Яку умову має справджувати ліва частина диференціального рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, щоб воно було однорідним відносно шуканої функції та її похідних? Яка заміна виконується у такому рівнянні?

Вправи до лекції 6

1. Зінтегруйте рівняння:

$$\text{а) } y'' = 2x; \quad \text{б) } y''' = \sin x \cos x; \quad \text{в) } y^{(4)} = 2x^{-2}.$$

2. Знайдіть частинний розв'язок рівняння $y''' = \cos x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = -5$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

3. Визначте тип рівнянь та зінтегруйте їх:

$$\text{а) } xy'' + xy'^2 + y' = 0; \quad \text{б) } y' + y''^2 = xy'; \quad \text{в) } 4\sqrt{y}y'' = 1.$$

4. Знайдіть розв'язок рівнянь, які задовольняють задані початкові умови, дослідивши попередньо питання про існування та єдиність шуканого розв'язку:

$$\text{а) } y'' = (1 + y'^2)^{3/2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{б) } 4y' + y''^2 = 4xy'', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

5. Відшукайте рівняння, однорідне відносно шуканої функції та її похідних, та зінтегруйте його:

$$\text{а) } x^2y^2 - y''^2 + yy'^2 = 0; \quad \text{б) } xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2;$$

$$\text{в) } xyy'' + xy'^2 - \sqrt{y}y' = 0.$$

6. Знайдіть інтегральну криву рівняння $yy'' + y'^2 = 1$, яка проходить через точку $(0, 1)$ і дотикається у цій точці до прямої $y = 1 - x$. Обґрунтуйте єдиність такої інтегральної кривої.

Лекція 7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку

План

1. Основні означення й поняття.
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції.
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.
5. Формула Остроградського–Ліувілля.
6. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку.

1. Основні означення й поняття. У багатьох прикладних задачах як самі функції, що вивчаються, так і їхні похідні набувають настільки малих значень, що їхніми квадратами, кубами і вищими степенями можна знехтувати. Це дозволяє замінити довільні залежності між величинами залежностями лінійними. Застосовуючи зазначену операцію лінеаризації до диференціальних рівнянь, що описують певний процес чи явище, одержують диференціальні рівняння, в які шукана функція та її похідні входять лінійно. Такі рівняння називають лінійними.

Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку називають рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (7.1)$$

Вважатимемо, що функції $p_1(x)$, $p_2(x)$, \dots , $p_n(x)$ (*коефіцієнти* рівняння) і права частина $f(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b) .

Якщо $f(x) \equiv 0$ на інтервалі (a, b) , то рівняння (7.1) називають *лінійним однорідним*. Воно має вигляд

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (7.2)$$

Якщо функція $f(x)$ тотожно відмінна від нуля на інтервалі (a, b) , то рівняння (7.1) називають *лінійним неоднорідним*.

Розглянемо питання про існування розв'язку рівняння (7.1). Розв'язавши його відносно старшої похідної, маємо:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y. \quad (7.3)$$

На підставі зроблених припущень стосовно коефіцієнтів та правої частини рівняння (7.1) переконаємось, що права частина рівняння (7.3) є неперервною функцією на інтервалі (a, b) і має неперервні, а, отже, й обмежені на відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ частинні похідні за змінними $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ (ними є функції $-p_n(x), -p_{n-1}(x), \dots, -p_1(x)$ відповідно). Таким чином, з теореми Коші (лекція 6) випливає, що для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a, b)$, рівняння (7.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$. Цей розв'язок n разів диференційовний на інтервалі (a, b) . Особливих розв'язків рівняння (7.1) не має.

Для скорочення записів позначимо ліву частину рівняння (7.1) через $L(y)$:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \quad (7.4)$$

Таким чином, $L(y)$ — це результат виконання над функцією y операцій, указаних у правій частині формули (7.4), а саме: знаходження похідних функції y до порядку n включно, множення $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ на коефіцієнти рівняння й додавання отриманих добуток. Сукупність цих операцій позначимо через L :

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

і називатимемо **лінійним диференціальним оператором n -го порядку**.

Відзначимо основні властивості оператора L , які випливають з аналогічних властивостей похідних.

Властивість 1. *Сталий множник можна винести за знак лінійного диференціального оператора, тобто*

$$L(Cy) = C L(y).$$

Властивість 2. *Лінійний диференціальний оператор від суми функцій дорівнює сумі лінійних диференціальних операторів від доданків, тобто*

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Використовуючи оператор L , лінійне неоднорідне рівняння (7.1) і лінійне однорідне рівняння (7.2) можна записувати відповідно як $L(y) = f(x)$ і $L(y) = 0$.

2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння. Для знаходження дійсних розв'язків лінійного диференціального рівняння іноді використовують його комплексні розв'язки.

Комплексну функцію $y(x) = u(x) + i v(x)$, де $i = \sqrt{-1}$, дійсної змінної x називають **комплексним розв'язком** рівняння (7.2) на інтервалі (a, b) , якщо її підстановка перетворює це рівняння у тотожність $L(y(x)) \equiv 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Покажемо, що якщо комплексна функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (7.2), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього ж рівняння. Справді, нехай функція $y(x) = u_1(x) + i u_2(x)$ є розв'язком рівняння (7.2), тобто $L(y(x)) \equiv 0$. Використовуючи властивості 1, 2 оператора L , одержуємо, що

$$L(y(x)) = L(u_1(x) + i u_2(x)) = L(u_1(x)) + i L(u_2(x)).$$

Отже, $L(u_1(x)) + i L(u_2(x)) \equiv 0$, звідки й випливає, що

$$L(u_1(x)) \equiv 0, \quad L(u_2(x)) \equiv 0.$$

Очевидно, кожне лінійне однорідне рівняння (7.2) має нульовий розв'язок $y \equiv 0$, який називають **тривіальним**.

Нижче буде показано, що знання частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння спрощує процес побудови загального розв'язку, а іноді дозволяє повністю розв'язати задачу інтегрування цього рівняння. Це є можливим завдяки тому, що частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння мають низку цікавих властивостей, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо y_1 — частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння (7.2), то $y = Cy_1$, де C — довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Оскільки $L(y_1) \equiv 0$, $a < x < b$, то, використовуючи властивість 1 оператора L , одержуємо, що

$$L(Cy_1) = CL(y_1) \equiv 0$$

і, отже, Cy_1 є розв'язком рівняння (7.2). Теорему доведено.

Таким чином, знаючи один частинний розв'язок рівняння (7.2), можемо без квадратур одержати відразу сім'ю розв'язків цього рівняння, залежну від одного параметра (сталі C).

Теорема 2. Якщо y_1 і y_2 — два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння (7.2), то їхня сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.

Доведення. Оскільки $L(y_1) \equiv 0$, $L(y_2) \equiv 0$, то, використовуючи властивість 2 оператора L , одержуємо, що

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0.$$

Теорему доведено.

З теорем 1, 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. Якщо y_1, y_2, \dots, y_n — частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння (7.2), то

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n,$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.

Для ілюстрації теореми 3 розглянемо рівняння $y'' + y = 0$. Воно, як легко переконатись, має розв'язки $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$, а тому його розв'язком є також кожна функція сім'ї $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Природно виникає питання: якими повинні бути n частинних розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n рівняння (7.2), щоб їхня лінійна комбінація $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, яка містить n довільних сталих

C_1, C_2, \dots, C_n , була загальним розв'язком цього рівняння? Для відповіді на це важливе питання введемо поняття лінійної залежності (лінійної незалежності) функцій.

3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, визначені на інтервалі (a, b) , називають *лінійно незалежними* на цьому інтервалі, якщо співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0, \quad (7.5)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — сталі, виконується для всіх $x \in (a, b)$ тільки тоді, коли всі $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Якщо у співвідношенні (7.5) хоча б одна зі сталих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відмінна від нуля, то функції y_1, y_2, \dots, y_n називають *лінійно залежними* на інтервалі (a, b) .

Розглянемо приклади.

1. Функції $y_1 = 1, y_2 = x, \dots, y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ і, взагалі, на довільному інтервалі. Справді, рівність $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, в якій не всі α_j дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно, бо є алгебричним рівнянням $(n-1)$ -го степеня, яке, як відомо з алгебри, не може мати більше $(n-1)$ різних коренів.

2. Функції $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ лінійно незалежні на будь-якому інтервалі, бо співвідношення $\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0$, де α_1 і α_2 одночасно не дорівнюють нулю, не може виконуватись тотожно на жодному інтервалі.

3. Функції $y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x, y_3 = 3$ лінійно залежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо $3 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos^2 x + (-1) \cdot 3 \equiv 0$.

Зауважимо, що у випадку лінійної залежності функцій одну з них можна лінійно виразити через інші. Наприклад, якщо функції y_1, y_2, \dots, y_n лінійно залежні і $\alpha_n \neq 0$, то з (7.5) одержуємо:

$$y_n = -\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}).$$

Для встановлення ознак лінійної залежності та лінійної незалежності функцій y_1, y_2, \dots, y_n розглянемо визначник, складений з цих функцій та їхніх похідних до порядку $n-1$ включно:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (7.6)$$

Визначник (7.6) називають **визначником Вронського** або **вронскіаном** функцій y_1, y_2, \dots, y_n .

Теорема 4 (необхідна умова лінійної залежності n функцій). *Якщо функції y_1, y_2, \dots, y_n лінійно залежні на деякому інтервалі (a, b) , то їхній вронскіан тотожно дорівнює нулю на цьому інтервалі.*

Доведення. Згідно з умовою теореми для $a < x < b$ маємо:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0, \quad (7.7)$$

де не всі числа $\alpha_j, j = 1, 2, \dots, n$, дорівнюють нулю. Диференціюючи співвідношення (7.7) $(n - 1)$ разів, одержуємо лінійну однорідну систему відносно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' = 0, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Оскільки хоча б одне число α_j відмінне від нуля, то система (7.8) має ненульовий розв'язок. Отже, визначник цієї системи, який є вронскіаном функцій y_1, y_2, \dots, y_n , дорівнює нулю в кожній точці інтервалу (a, b) . Теорему доведено.

З теореми 4 випливає важливе твердження: *якщо $W(x) \neq 0$ хоча б в одній точці інтервалу (a, b) , то функції y_1, y_2, \dots, y_n є лінійно незалежними на цьому інтервалі.* Наприклад, функції $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}$ лінійно незалежні на (a, b) , якщо k_1, k_2, k_3 — різні

числа. Справді,

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = \\ &= e^{(k_1+k_2+k_3)x} (k_3 - k_1)(k_3 - k_2)(k_2 - k_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Наголошуємо, що тотожність $W(x) \equiv 0$ є тільки необхідною умовою лінійної залежності функцій y_1, y_2, \dots, y_n , тобто з того, що $W(x) \equiv 0$, взагалі кажучи, не випливає, що функції y_1, y_2, \dots, y_n лінійно залежні (див. вправу 9 до цієї лекції). Однак, якщо y_1, y_2, \dots, y_n є не довільними функціями, а частинними розв'язками лінійного однорідного рівняння (7.2), то справджується таке твердження.

Теорема 5 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку). *Якщо розв'язки y_1, y_2, \dots, y_n лінійного однорідного рівняння (7.2) лінійно незалежні на інтервалі (a, b) , то їхній вронскіан відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.*

Доведення. Припустимо, що у деякій точці $x_0 \in (a, b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему рівнянь, уважаючи числа C_j за невідомі:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (7.9)$$

Визначником системи (7.9) є $W(x_0)$, а оскільки, за припущенням, $W(x_0) = 0$, то ця система має ненульовий розв'язок, який позначимо через $C_1 = \tilde{C}_1, C_2 = \tilde{C}_2, \dots, C_n = \tilde{C}_n$.

Складемо лінійну комбінацію розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n :

$$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \dots + \tilde{C}_n y_n. \quad (7.10)$$

Згідно з теоремою 3 функція (7.10) є розв'язком рівняння (7.2), а з системи (7.9) випливає, що у точці $x = x_0$ розв'язок (7.10)

перетворюється в нуль разом з усіма похідними до порядку $n - 1$ включно. Але ці самі умови задовольняє також тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння (7.2) і, отже, згідно з теоремою Коші (про єдиність розв'язку) обидва розв'язки збігаються, тобто

$$\tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + \dots + \tilde{C}_n y_n \equiv 0,$$

причому не всі числа \tilde{C}_j дорівнюють нулю. Це означає, що функції y_1, y_2, \dots, y_n лінійно залежні на інтервалі (a, b) , що суперечить умові теореми. Отже, припущення про те, що $W(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, хибне. Теорему доведено.

З теорем 4, 5 випливає ознака лінійної незалежності n частинних розв'язків рівняння (7.2): *для того, щоб n розв'язків лінійного однорідного рівняння (7.2) були лінійно незалежними на інтервалі (a, b) , необхідно і достатньо, щоб їхній вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Будь-яку сукупність n розв'язків лінійного однорідного рівняння (7.2), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b) , називають **фундаментальною системою розв'язків** цього рівняння на інтервалі (a, b) .

Наприклад, функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо вони є розв'язками цього рівняння і лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Але це рівняння має й інші фундаментальні системи розв'язків, наприклад, кожна пара функцій вигляду $y_1 = k \cos x$, $y_2 = k \sin x$, де k — довільна стала, відмінна від нуля, також буде фундаментальною системою розв'язків.

Можна довести (див., наприклад, [21, с. 118–119]), що кожне лінійне однорідне диференціальне рівняння має фундаментальну систему розв'язків, а як видно з наведеного прикладу, таке рівняння може мати безліч фундаментальних систем розв'язків.

Знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок рівняння (7.2), який містить n довільних сталих, причому цей розв'язок буде загальним.

Теорема 6. Якщо y_1, y_2, \dots, y_n — фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння (7.2), то загальний розв'язок цього рівняння визначається формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (7.11)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні числа.

Доведення. Покажемо, що завжди можна вибрати сталі C_1, C_2, \dots, C_n так, щоб формула (7.11) визначала розв'язок рівняння (7.2), який задовольняє будь-які наперед задані початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (7.12)$$

Для визначення C_1, C_2, \dots, C_n одержуємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y'_0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (7.13)$$

Визначником системи (7.13) є $W(x_0)$. Згідно з теоремою 5 $W(x_0) \neq 0$ і, отже, система (7.13) має єдиний розв'язок $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$. Функція (7.11) є розв'язком рівняння (7.2) згідно з теоремою 3. Вираз (7.11), в якому $C_i = \tilde{C}_i, i = 1, 2, \dots, n$, очевидно, задовольняє початкові умови (7.12). Теорему доведено.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Вище було показано, що функції $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, а тому згідно з теоремою 6 функція $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ є загальним розв'язком наведеного рівняння.

5. Формула Остроградського–Ліувілля. Нехай маємо n лінійно незалежних частинних розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n лінійного однорідного рівняння (7.2). Тоді це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \quad (7.14)$$

бо рівняння (7.14) має ті самі лінійно незалежні розв'язки, що й (7.2). Справді, якщо підставити в (7.14) замість y одну з функцій y_1, y_2, \dots, y_n , то одержимо визначник, який має два однакові стовпці і тому тотожно рівний нулю. Звідси випливає, що загальні розв'язки рівнянь (7.2) і (7.14) однакові, а самі рівняння відрізняються лише множником. Розкладаючи визначник з (7.14) за елементами останнього стовпця, запишемо рівняння (7.14) у вигляді

$$\begin{aligned} & \Delta_0(x)y^{(n)} - \Delta_1(x)y^{(n-1)} + \Delta_2(x)y^{(n-2)} - \dots \\ & \dots + (-1)^k \Delta_k(x)y^{(n-k)} + \dots + (-1)^n \Delta_n(x)y = 0, \end{aligned} \quad (7.15)$$

де $\Delta_i(x)$ — визначник, утворений викреслюванням останнього стовпця і $(n+1-i)$ -го рядка у визначнику з (7.14).

Оскільки рівняння (7.15) збігається з рівнянням (7.2), то прирівнюючи коефіцієнти біля однакових похідних і враховуючи, що $\Delta_0(x) = W(x)$, одержуємо:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\frac{\Delta_1(x)}{W(x)}, \\ p_2(x) &= \frac{\Delta_2(x)}{W(x)}, \quad \dots, \quad p_n(x) = (-1)^n \frac{\Delta_n(x)}{W(x)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Здиференціюємо тепер вронскіан (7.6), використовуючи таке правило: похідна від визначника n -го порядку дорівнює сумі n визначників, які одержуємо з нього почерговою заміною елементів першого, другого, \dots , n -го рядка їхніми похідними. Усі ці

визначники, крім останнього, дорівнюють нулю (бо вони мають два однакові рядки), а тому

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Легко бачити, що $W'(x) = \Delta_1(x)$, а якщо врахувати першу формулу з (7.16), то

$$\frac{W'(x)}{W(x)} = -p_1(x),$$

звідки, інтегруючи, знаходимо

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}, \quad (7.17)$$

де $x = x_0$ — довільна точка з інтервалу (a, b) . Формулу (7.17) називають **формулою Остроградського–Ліувілля**. Вона дозволяє знайти вронскіан фундаментальної системи розв'язків рівняння (7.2), не маючи самої системи.

З формули Остроградського–Ліувілля випливають такі **властивості вронскіана** розв'язків лінійного однорідного рівняння:

1. Якщо вронскіан n розв'язків y_1, y_2, \dots, y_n рівняння (7.2) дорівнює нулю в деякій точці $x_0 \in (a, b)$, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.

2. Якщо вронскіан n розв'язків рівняння (7.2) відмінний від нуля хоч в одній точці $x_0 \in (a, b)$, то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.

Формулу (7.14) можна використовувати для побудови диференціального рівняння, якщо відомою є його фундаментальна система розв'язків.

Приклад 1. Побудувати диференціальне рівняння, яке має фундаментальну систему розв'язків $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x - 1$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (7.14):

$$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 & y \\ 2x & 1 & y' \\ 2 & 0 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник за елементами третього стовпця, маємо:

$$\begin{aligned} y \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

6. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку. Якщо відомо один нетривіальний частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (7.2), то це рівняння можна зінтегрувати з використанням формули Остроградського–Ліувілля.

Згідно з теоремою 6 цієї лекції для того, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (7.2), потрібно знати фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Нехай $y_2(x)$ — такий розв'язок рівняння (7.2), що $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Використовуючи формулу Остроградського–Ліувілля у вигляді $W(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$ (формула (7.17)), одержуємо:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= e^{-\int p(x) dx} \quad (\text{якщо } C = 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 &= e^{-\int p(x) dx}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Отже, для знаходження функції $y_2(x)$ маємо рівняння (7.18) — лінійне рівняння першого порядку. Зінтегруємо його. Для цього поділимо обидві частини цього рівняння на y_1^2 ($y_1 \neq 0$):

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx.$$

Оскільки функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ за побудовою утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (7.2), то шуканим загальним розв'язком є

$$y = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx \right).$$

Останню формулу називають **формулою Абеля**.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що $y_1(x) = x$ є частинним розв'язком заданого рівняння. Оскільки $p(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, то, використовуючи формулу (7.18), одержуємо:

$$\begin{aligned} y_1 y_2' - y_1' y_2 &= e^{\int \frac{-2x}{x^2+1} dx} \Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{\ln(x^2+1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} &= \frac{x^2 + 1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{x^2 + 1}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 &= x \left(x - \frac{1}{x} \right) = x^2 - 1. \end{aligned}$$

Отже, загальним розв'язком є $y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)$. ■

Рекомендована література: [9, с. 88–100], [11, с. 93–106], [14, с. 91–102], [15, с. 27–41], [18, с. 174–197], [21, с. 113–121].

Питання до лекції 7

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n -го порядку? Чим відрізняється лінійне однорідне рівняння від лінійного неоднорідного?

2. Що називають лінійним диференціальним оператором n -го порядку і які його основні властивості? Як можна записати лінійні однорідне і неоднорідне рівняння з використанням лінійного диференціального оператора?

3. Що називають комплексним розв'язком лінійного однорідного рівняння? Доведіть, що дійсна і уявна частини комплексного розв'язку також є розв'язками цього рівняння.

4. Чи є лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння розв'язком цього ж рівняння?

5. Які функції називають лінійно незалежними та лінійно залежними на інтервалі? Наведіть приклади таких функцій.

6. Що називають вронскіаном функцій y_1, y_2, \dots, y_n ? Як формулюється необхідна умова лінійної залежності функцій y_1, y_2, \dots, y_n ?

7. Як формулюється необхідна і достатня умова лінійної незалежності n частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння?

8. Що таке фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння? Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, знаючи його фундаментальну систему розв'язків?

9. Який вигляд має формула Остроградського – Ліувілля? Наведіть властивості вронскіана розв'язків лінійного однорідного рівняння, які впливають з цієї формули.

10. Як, маючи один частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку, зінтегрувати це рівняння у квадратурах? Який вигляд має формула Абеля?

Вправи до лекції 7

1. Знайдіть $L(e^x)$, $L(e^{2x})$, $L(x^2)$, якщо L — лінійний диференціальний оператор, заданий формулою

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} - 4 \frac{d}{dx} + 3.$$

2. З'ясуйте, розв'язком якого рівняння є функція $y = x^2 e^x$:

а) $y''' - 2y'' = x e^x$; б) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; в) $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$.

3. Знайдіть вронскіан функцій:

а) $y_1 = x^2$, $y_2 = \sqrt{x}$; б) $y_1 = e^x$, $y_2 = 4e^x$;

в) $y_1 = \cos^2 x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = 1$.

Чи можна, знаючи вронскіан, зробити висновок про лінійну залежність (лінійну незалежність) цих функцій?

4. Дослідіть на лінійну залежність функції:

а) $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = x^2$; б) $y_1 = 3x + 5$, $y_2 = 9x + 15$;

в) $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$, $y_3 = 4^x$.

5. Доведіть, що $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $y'' + y' - 6y = 0$.

6. Доведіть, що функції y_1, y_2 лінійно залежні на деякому інтервалі (a, b) , якщо $\frac{y_1}{y_2} \equiv \text{const} \neq 0, a < x < b$.

7. Доведіть, що якщо серед функцій y_1, y_2, \dots, y_n хоч одна тотожно дорівнює нулю, то вони лінійно залежні.

8. Запишіть лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке має фундаментальну систему розв'язків:

$$\text{а) } y_1 = \sin x, y_2 = \cos 2x; \quad \text{б) } y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}.$$

9. Доведіть, що вронскіан функцій

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ x^2, & \text{якщо } x \in [0, 1], \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in [-1, 0], \\ 0, & \text{якщо } x \in [0, 1], \end{cases}$$

тотожно дорівнює нулю, але вони лінійно незалежні на відріжку $[-1, 1]$.

10. Зінтегруйте рівняння, знаючи їхні частинні розв'язки $y_1(x)$:

$$\text{а) } (2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y_1(x) = e^{-2x};$$

$$\text{б) } x(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x.$$

Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

План

1. Основні означення й поняття.
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел.
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел.
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.

1. Основні означення й поняття. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами — важливий клас диференціальних рівнянь. Їхні розв'язки виражаються через елементарні функції або у квадратурах. До таких рівнянь зводиться багато прикладних задач, зокрема з теоретичної механіки і електрики.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння n -го порядку

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

де коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n — дійсні числа, а права частина $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) функція (зокрема, вона може бути й сталою).

Розглянемо спочатку питання про побудову загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння

$$L(y) = 0. \tag{8.1}$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (8.1) потрібно знати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ цього рівняння. Тоді згідно з теоремою 6 лекції 7 загальним розв'язком цього рівняння буде

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі.

Легко переконатися, що лінійне однорідне рівняння першого порядку $y' + ay = 0$, де a — дійсна стала, має частинний розв'язок $y_1 = e^{-ax}$. Спробуємо й для лінійного однорідного рівняння n -го порядку (8.1) частинний розв'язок відшукати у вигляді

$$y = e^{kx}, \quad (8.2)$$

де k — деяке, поки що невизначене, число (дійсне або комплексне). Підставляючи (8.2) в ліву частину рівняння (8.1), одержуємо:

$$L(e^{kx}) = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n) \cdot e^{kx}. \quad (8.3)$$

З (8.3) випливає, що функція (8.2) буде розв'язком диференціального рівняння (8.1) тоді і тільки тоді, коли число k є коренем алгебричного рівняння

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (8.4)$$

Багаточлен $P(k)$ називають *характеристичним багаточленом*, рівняння (8.4) — *характеристичним рівнянням*, яке відповідає рівнянню (8.1), а корені рівняння (8.4) — *характеристичними числами* рівняння (8.1). Легко бачити, що складаючи характеристичне рівняння, досить замінити в (8.1) похідні різних порядків відповідними степенями k .

2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел. Структура фундаментальної системи розв'язків, а отже, і загального розв'язку рівняння (8.1) залежить від характеристичних чисел. Припустимо, що всі характеристичні числа k_1, k_2, \dots, k_n дійсні та прості (різні). Тоді згідно з (8.2) функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{k_n x} \quad (8.5)$$

є частинними розв'язками рівняння (8.1). Покажемо, що вони є лінійно незалежними. Для цього обчислимо вронскіан функцій (8.5):

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = \\
 &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Визначник у правій частині останньої рівності є визначником Вандермонда і, як відомо з курсу алгебри, дорівнює добутку множників вигляду $k_j - k_i$, де $1 \leq i < j \leq n$. За припущенням, $k_j \neq k_i$ ($j \neq i$), тому $W(x) \neq 0$. Таким чином, функції (8.5) утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (8.1), а тому згідно з теоремою 6 (лекція 7) функція

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x},$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (8.1).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$. Його коренями є $k_1 = 1$ і $k_2 = 2$. Отже, загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, де C_1, C_2 — довільні сталі. ■

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y''' - 7y'' + 12y' = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 7k^2 + 12k = 0$ має прості корені $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$. Отже, загальним розв'язком є $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{4x}$, де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі. ■

Розглянемо випадок, коли всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні. Нехай $a + bi$ — одне з таких чисел. Відомо, що коли алгебричне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то воно має також і спряжений з

ним корінь. Отже, характеристичне рівняння у випадку, який розглядаємо, має також комплексно-спряжений корінь $a - bi$.

Характеристичному числу $a + bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x}$. Але, оскільки за формулою Ейлера

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$

то дійсна та уявна частини, тобто функції $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ також є розв'язками рівняння (8.1) (див. п. 2 лекції 7), причому ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$ (пропонуємо самостійно переконатися, що їхній вронскіан відмінний від нуля). Спряженому кореню $a - bi$ відповідають також два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки $e^{ax} \cos bx$, $-e^{ax} \sin bx$, але розв'язок $-e^{ax} \sin bx$ лінійно залежний з $e^{ax} \sin bx$ і, отже, спряжений корінь не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, якщо всі характеристичні числа різні, але серед них є комплексні, то кожному дійсному кореню k відповідає розв'язок e^{kx} , а кожній парі комплексно-спряжених коренів $a \pm bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки вигляду $e^{ax} \cos bx$ і $e^{ax} \sin bx$. Усього матимемо n дійсних частинних розв'язків вигляду

$$e^{kx}, \quad e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx, \quad (8.6)$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків. Згідно з теоремою 6 з лекції 7 загальний розв'язок рівняння (8.1) одержимо у вигляді лінійної комбінації усіх частинних розв'язків (8.6) з довільними сталими C_1, C_2, \dots, C_n .

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$. **Розв'язання.** Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 9k + 13 = 0$ має один дійсний і два комплексно-спряжені корені: $k_1 = -1$, $k_2 = 2 + 3i$, $k_3 = 2 - 3i$. Тому функції e^{-x} , $e^{2x} \cos 3x$, $e^{2x} \sin 3x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком є

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x. \quad \blacksquare$$

3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел. Нехай k_1 — дійсне або комплексне характеристичне число кратності s . Тоді, як відомо з алгебри,

$$P(k_1) = P'(k_1) = \dots = P^{(s-1)}(k_1) = 0, \quad P^{(s)}(k_1) \neq 0, \quad (8.7)$$

де $P(k)$ — характеристичний багаточлен (див. (8.4)).

Для знаходження розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1 , здиференціюємо тотожність (8.3), записану у вигляді

$$L(e^{kx}) = P(k) \cdot e^{kx},$$

m разів за змінною k , використовуючи формулу Лейбніца для m -ї похідної від добутку двох функцій:

$$(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^m C_m^j u^{(j)} v^{(m-j)},$$

де $C_m^j = \frac{m!}{(m-j)!j!}$ — кількість сполучень з m елементів по j . Маємо:

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{j=0}^m C_m^j P^{(j)}(k) x^{m-j} e^{kx}.$$

Тепер, враховуючи (8.7), приходимо до висновку, що $L(x^m e^{k_1 x}) \equiv 0$ для $m = 0, 1, \dots, s-1$. Це означає, що функції

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{k_1 x} \quad (8.8)$$

є розв'язками рівняння (8.1). Вони, як легко показати, є лінійно незалежними на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому число k_1 є дійсним, то функції (8.8) також будуть дійсними. Таким чином, кожному дійсному характеристичному числу k_1 кратності s відповідає s дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (8.8).

Якщо маємо комплексне характеристичне число $a + bi$ кратності s , то характеристичним числом тієї ж кратності буде також спряжене число $a - bi$. Згідно з (8.8) числу $a + bi$ відповідають s комплексних розв'язків:

$$e^{(a+ib)x}, x e^{(a+ib)x}, x^2 e^{(a+ib)x}, \dots, x^{s-1} e^{(a+ib)x}.$$

Виділяючи в них дійсні та уявні частини, одержуємо $2s$ дійсних розв'язків:

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, & xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{s-1}e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, & xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{s-1}e^{ax} \sin bx. \end{cases} \quad (8.9)$$

Нескладно довести, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$.

Так само, як і для випадку простого комплексного характеристичного числа, кратне характеристичне число $a - bi$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Таким чином, кожній парі комплексно-спряжених характеристичних чисел $a \pm bi$ кратності s відповідають $2s$ дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (8.9).

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 7k^2 + 15k - 9 = 0$ має один простий корінь $k_1 = 1$ і один кратний корінь $k_2 = k_3 = 3$. Цим кореням відповідають розв'язки e^x , e^{3x} , xe^{3x} , а $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x}$ є загальним розв'язком. ■

Приклад 5. Зінтегрувати рівняння $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ має кратний дійсний корінь $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Отже, задане рівняння має три лінійно незалежні розв'язки e^x , xe^x , x^2e^x , а його загальним розв'язком є $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$. ■

Приклад 6. Зінтегрувати рівняння $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$ має один простий корінь $k_1 = 1$ і два кратні комплексно-спряжені корені $k_2 = k_3 = 2i$, $k_4 = k_5 = -2i$. Отже, загальним розв'язком є

$$y = C_1e^x + C_2 \cos 2x + C_3x \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5x \sin 2x. \quad \blacksquare$$

4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які з допомогою заміни незалежної змінної можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Рівнянням Ейлера називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \quad (8.10)$$

де a_1, a_2, \dots, a_n — сталі дійсні числа.

Побудуємо загальний розв'язок рівняння Ейлера для $x > 0$ (якщо $x < 0$, то в усіх наступних викладках потрібно замінити x на $-x$). Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$. Тоді

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \\ y''_{x^2} &= (y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}) e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}, \\ y'''_{x^3} &= (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t) e^{-3t}, \quad \dots, \\ y^{(n)}_{x^n} &= \left(y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! y'_t \right) e^{-nt}. \end{aligned}$$

Підставляючи $x = e^t$ і знайдені вирази для $y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$ у (8.10), одержимо лінійне однорідне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайшовши загальний розв'язок цього рівняння і підставивши у нього $t = \ln x$, матимемо загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Приклад 7. Зінтегрувати рівняння $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну незалежної змінної за формулою $x = e^t$ ($t = \ln x$). Тоді, як було доведено, $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}$. Підставляючи ці вирази у початкове рівняння, для знаходження функції $y = y(t)$ одержуємо:

$$\begin{aligned} e^{2t} (y'' - y') e^{-2t} - 2e^t y' e^{-t} + 2y &= 0 \Rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= C_1 e^t + C_2 e^{2t} \text{ (див. приклад 1)} \Rightarrow y = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{2 \ln x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = C_1 x + C_2 x^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Узагальненням рівняння Ейлера є *рівняння Лагранжа*. Так називають диференціальне рівняння вигляду

$$(ax + b)^n y^{(n)} + p_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(ax + b)y' + p_n y = 0, \quad (8.11)$$

де $a, b, p_1, p_2, \dots, p_n$ — сталі.

Якщо використати підстановку $ax + b = q$ і позначити $q = e^t$ або відразу зробити заміну незалежної змінної за формулою $ax + b = e^t$, то рівняння Лагранжа (8.11) зведеться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Припустимо, що матеріальна точка з масою m прямолінійно рухається вздовж осі Ox під дією трьох сил:

1) сили F_1 , що притягує точку до початку координат; цю силу вважатимемо пропорційною віддалі x точки від початку координат, тобто $F_1 = -ax$, де $a > 0$;

2) сили F_2 опору середовища, яку припускатимемо пропорційною швидкості руху точки (це припущення близьке до дійсності для незначних швидкостей), тобто $F_2 = -bx'$, де $b \geq 0$;

3) збурювальної (зовнішньої) сили, що спрямована вздовж осі Ox і дорівнює $F_3(t)$ у момент часу t .

Тоді згідно з другим законом Ньютона $F = ma$, де $F = F_1 + F_2 + F_3$, $a = x''(t)$, маємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$mx'' = -ax - bx' + F_3(t)$$

або

$$x'' + 2px' + q^2x = f(t), \quad (8.12)$$

де $p = b/(2m) \geq 0$ — *коефіцієнт опору*, $q = \sqrt{a/m} > 0$ — *коефіцієнт відхилення*, $f(t) = F_3(t)/m$.

Рівняння (8.12) є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Зінтегрувавши його, знайдемо закон руху матеріальної точки.

Оскільки найбільший інтерес становлять випадки, коли рух, який визначений рівнянням (8.12), є коливанням точки біля положення $x = 0$, то рівняння (8.12) називають **рівнянням коливань**. При цьому, якщо збурювальна сила відсутня, тобто $f(t) \equiv 0$, то рівняння (8.12) називають **рівнянням вільних коливань** і воно має вигляд

$$x'' + 2p x' + q^2 x = 0. \quad (8.13)$$

Диференціальне рівняння (8.12), у якому права частина тотожно відмінна від нуля, називають **рівнянням вимушених коливань**.

Розглянемо рівняння (8.13) і з'ясуємо, як коефіцієнти p , q впливають на характер руху матеріальної точки. Проаналізуємо окремі випадки рівняння (8.13).

Випадок 1. *Рух відбувається в середовищі без опору ($p = 0$).* Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2 x = 0. \quad (8.14)$$

Зауважимо, що рівняння (8.14) описує вертикальні рухи тіла, підвішеного на пружині, під впливом сили пружності пружини і сили ваги, малі коливання маятника, коливання повітря в акустичному резонаторі та інші явища коливної природи.

Характеристичним рівнянням для (8.14) є $k^2 + q^2 = 0$, характеристичними числами — комплексно-спряжена пара $k_1 = qi$, $k_2 = -qi$, а тому загальним розв'язком рівняння (8.14) є

$$x = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt.$$

Замість довільних сталих C_1 , C_2 введемо нові сталі A і φ ($A > 0$) за формулами $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$. Тоді

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2} \quad (C_2 \neq 0), \\ x &= A \sin \varphi \cos qt + A \cos \varphi \sin qt \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = A \sin(qt + \varphi). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Рух, який описується формулою (8.15), називають *гармонічним коливанням*. Він є, очевидно, періодичним рухом з *періодом* $T = 2\pi/q$ і *частотою* q . Число A називають *амплітудою коливання* (8.15) (це максимальне відхилення точки від стану рівноваги). Величину $qt + \varphi$ називають *фазою коливання*. Значення фази коливання при $t = 0$, тобто кут φ , називають *початковою фазою* коливання (8.15).

З формули (8.15) випливає, що всі рухи, визначені рівнянням (8.14), обмежені, бо при $t \rightarrow +\infty$ $|x(t)| \leq A$. Графік кожного конкретного руху можна одержати з допомогою елементарних перетворень графіка функції $x = \sin t$ (рис. 8.1).

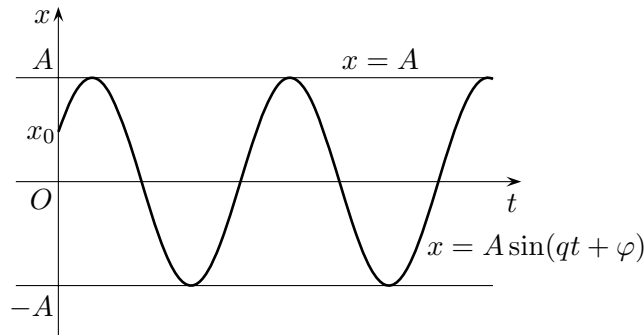


Рис. 8.1

Будь-яким початковим умовам $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$ згідно з теоремою про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння n -го порядку (лекція 6) відповідає єдиний рух з формули (8.15). Знайдемо цей рух. Оскільки $x' = Aq \cos(qt + \varphi)$, то відповідні значення амплітуди A і початкової фази φ одержуємо із системи

$$\begin{cases} A \sin \varphi = x_0, \\ Aq \cos \varphi = x'_0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{q} \sqrt{q^2 x_0^2 + x'_0{}^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{qx_0}{x'_0}.$$

Випадок 2. Рух відбувається в середовищі з опором $p > 0$. Характеристичним рівнянням для (8.13) є $k^2 + 2pk + q^2 = 0$, а характеристичними числами — числа

$$k_1 = -p + \sqrt{p^2 - q^2} \quad \text{і} \quad k_2 = -p - \sqrt{p^2 - q^2}.$$

Якщо $p^2 - q^2 < 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = -h^2$, загальний розв'язок рівняння (8.13) можемо записати як

$$x = e^{-pt}(C_1 \cos ht + C_2 \sin ht),$$

де $h = \sqrt{q^2 - p^2}$, або, враховуючи позначення, які використовувались при виведенні формули (8.15), у вигляді

$$x(t) = Ae^{-pt} \sin(ht + \varphi). \quad (8.16)$$

Рух точки, який описується формулою (8.16), називають **згасаючим гармонічним коливанням** з періодом $T = 2\pi/h$, частотою h , амплітудою Ae^{-pt} , початковою фазою φ (рис. 8.2). На відміну від гармонічного коливання (8.15) тут амплітуда є величиною змінною. Але вона обмежена, бо $Ae^{-pt} \leq A$, і прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$. Число A називають **початковою амплітудою**, а p — **коефіцієнтом згасання**. Множник e^{-pt} характеризує швидкість згасання коливання.

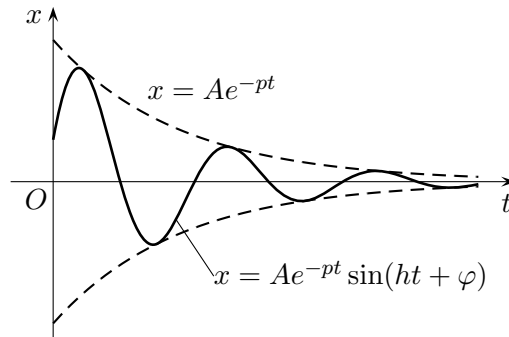


Рис. 8.2

Якщо $p^2 - q^2 > 0$, то, позначивши $p^2 - q^2 = h^2$, загальний розв'язок рівняння (8.13) запишемо у вигляді

$$x(t) = C_1 e^{(h-p)t} + C_2 e^{-(h+p)t}. \quad (8.17)$$

Оскільки $h < p$, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Нарешті, якщо $p^2 - q^2 = 0$, то $k_1 = k_2 = -p$, а загальним розв'язком є

$$x(t) = e^{-pt}(C_1 + C_2 t), \quad (8.18)$$

причому знову $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Рухи, які описуються формулами (8.17) і (8.18), називають **аперіодичними згасаючими рухами**. Із зростанням t відхилення $x(t)$ асимптотично наближається до нуля, і коливань навколо положення $x = 0$ немає. Усі розглянуті рухи називають **вільними** або **власними коливаннями**.

Таким чином, наявність опору середовища ($p > 0$) видозмінює характер коливань, причому, якщо опір p порівняно невеликий ($p < q$), то рухи залишаються періодичними, згасаючи при $t \rightarrow +\infty$, а при великому опорі середовища ($p \geq q$) рухи стають аперіодичними.

Рекомендована література: [9, с. 110–132], [14, с. 129–137, 387–389], [15, с. 82–85], [16, с. 145–150], [17, с. 292–322, 330–349], [18, с. 220–241], [21, с. 131–138, 144–148, 158–162].

Питання до лекції 8

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Що називають характеристичним рівнянням? Яку назву мають корені характеристичного рівняння?
3. Який вигляд має формула загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n -го порядку у випадку простих дійсних характеристичних чисел?
4. Які два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають парі комплексних характеристичних чисел $a \pm bi$?
5. Які лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння відповідають дійсному характеристичному числу k кратності s ?
6. Який вигляд має рівняння Ейлера? З допомогою якої заміни незалежної змінної його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?
7. Який вигляд має рівняння Лагранжа? З допомогою якої заміни його можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?
8. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі без опору? Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння? Що називають гармонічним коливанням, його амплітудою, періодом, частотою, фазою і початковою фазою? Як залежать амплітуда і початкова фаза від початкових значень шуканої функції та її похідної?

9. Як інтегрується рівняння вільних коливань у середовищі з опором? Що називають згасаючим гармонічним коливанням, його періодом, частотою, амплітудою і початковою фазою? Яка поведінка амплітуди при $t \rightarrow +\infty$? Як впливає наявність опору середовища на характер коливань?

Вправи до лекції 8

1. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння другого порядку:

а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 2y' + 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

2. Зінтегруйте лінійні однорідні рівняння:

а) $y''' - y'' = 0$; б) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$; в) $y^{IV} - y = 0$.

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

а) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
 б) $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$;
 в) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

4. Зінтегруйте рівняння Ейлера та рівняння Лагранжа:

а) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$; б) $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$;
 в) $(2x + 3)^2y'' + (4x + 6)y' - 4y = 0$.

5. Для яких значень p і q усі розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ будуть обмежені на півосі $x \geq 0$?

6. Складіть лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами якомога меншого порядку, яке має задані частинні розв'язки:

а) $y_1 = xe^x$; б) $y_1 = x^2e^{2x}$; в) $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$.

Лекція 9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку

План

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.

1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (9.1)$$

і відповідне однорідне рівняння

$$L(y) = 0. \quad (9.2)$$

Виявляється, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (9.1) завжди можна знайти, якщо відомі загальний розв'язок рівняння (9.2) і будь-який частинний розв'язок рівняння (9.1). Це впливає з такої теореми.

Теорема 1. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (9.1) дорівнює сумі будь-якого його частинного розв'язку та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (9.2).*

Доведення. Нехай $Y = Y(x)$ — відомий частинний розв'язок рівняння (9.1), тобто $L(Y) \equiv f(x)$. Уведемо нову невідому функцію $z = z(x)$ і покладемо

$$y = z + Y. \quad (9.3)$$

Підставляючи (9.3) в (9.1) та враховуючи лінійність оператора L , одержуємо $L(y) = L(z + Y) = L(z) + L(Y) = f(x)$. Оскільки $L(Y) = f(x)$, то

$$L(z) = 0, \quad (9.4)$$

тобто z — розв'язок лінійного однорідного рівняння (9.2).

Тоді згідно з теоремою 6 (лекція 7) загальним розв'язком рівняння (9.4) є $z = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, де y_1, y_2, \dots, y_n — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а $C_j, j = 1, 2, \dots, n$, — довільні сталі. Підставимо отриманий розв'язок рівняння (9.4) у (9.3):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y \quad (9.5)$$

і покажемо, що формула (9.5) визначає загальний розв'язок рівняння (9.1). Згідно з означенням загального розв'язку диференціального рівняння n -го порядку для цього потрібно показати, що з (9.5) при належному виборі сталих $C_j, j = 1, 2, \dots, n$, можна одержати розв'язок, який задовольняє довільні початкові умови, тобто

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Послідовно диференціюючи (9.5), знаходимо:

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + Y, \\ y' = C_1y'_1 + C_2y'_2 + \dots + C_ny'_n + Y', \\ \dots \dots \dots \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Якщо підставити в цю систему $x = x_0$, то матимемо неоднорідну систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_j, j = 1, 2, \dots, n$, визначником якої є $W(x_0)$. Оскільки y_1, y_2, \dots, y_n — фундаментальна система розв'язків, то $W(x_0) \neq 0$. Таким чином, сталі $C_j, j = 1, 2, \dots, n$, з отриманої системи визначаються однозначно, а тому розв'язок (9.5) справді є загальним. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай права частина лінійного неоднорідного рівняння (9.1) є сумою двох доданків, тобто*

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \quad (9.6)$$

Якщо y_1 — частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x)$, а y_2 — частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (9.6).

Доведення теореми випливає з того, що

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Розглянемо, наприклад, рівняння $y'' + 2y = 2 + e^x$. Рівняння $y'' + 2y = 2$ має частинний розв'язок $y_1 = 1$, а рівняння $y'' + 2y = e^x$ — частинний розв'язок $y_2 = e^x/3$. Згідно з теоремою 2 функція $y = 1 + e^x/3$ є частинним розв'язком рівняння $y'' + 2y = 2 + e^x$, у чому легко переконатись перевіркою.

Зауваження. Теорема 2 поширюється і на випадок, коли права частина рівняння є сумою довільної скінченної кількості доданків.

2. Метод варіації довільних сталих. Розглянемо загальний метод знаходження частинних розв'язків неоднорідного рівняння (9.1) — *метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)*.

Нехай маємо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (9.2):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (9.7)$$

де y_1, y_2, \dots, y_n — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі.

Частинний розв'язок рівняння (9.1) шукаємо у вигляді (9.7), вважаючи C_1, C_2, \dots, C_n не сталими, а невідомими функціями від x , тобто

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n. \quad (9.8)$$

Виберемо тепер функції $C_j = C_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, так, щоб функція (9.8) була розв'язком рівняння (9.1). Диференціюючи (9.8), одержуємо:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n' + C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n.$$

Накладемо умову, що $C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0$. Тоді

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \dots + C_ny_n'.$$

Диференціюючи ще один раз, одержуємо:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n'.$$

Нехай $C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0$, тоді

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n''.$$

Продовжуючи диференціювати і вибираючи функції C_1, C_2, \dots, C_n так, щоб

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

одержуємо:

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}.$$

І, нарешті,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + \\ &+ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Підставимо тепер у рівняння (9.1) вирази для y та її похідних:

$$\begin{aligned} &C_1 \left(y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y_1' + p_n y_1 \right) + \\ &+ C_2 \left(y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y_2' + p_n y_2 \right) + \dots \\ &\dots + C_n \left(y_n^{(n)} + p_1 y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y_n' + p_n y_n \right) + \\ &+ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{aligned}$$

Множники в дужках тотожно дорівнюють нулю, бо функції y_1, y_2, \dots, y_n є частинними розв'язками рівняння (9.2). Отже, останнє рівняння запишеться так:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, шукані функції $C_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, задовольняють систему

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + C'_2 y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Маємо неоднорідну систему n лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, \dots , $C'_n(x)$. Оскільки визначником цієї системи є відмінний від нуля вронскіан функцій y_1, y_2, \dots, y_n , то вона має єдиний розв'язок $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, \dots , $C'_n(x)$. Інтегруючи, знайдемо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, \dots , $C_n(x)$, після чого залишиться підставити їх у формулу (9.8).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $y'' - y'/x = x$.

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння.

$$\begin{aligned} \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} &\Rightarrow (\ln y' - \ln x)' = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \frac{y'}{x} = \ln C &\Rightarrow y' = C_1 x \Rightarrow \\ \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2. & \end{aligned} \quad (9.9)$$

Нехай тепер $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$. Із системи

$$\begin{cases} C'_1(x)x^2 + C'_2(x) \cdot 1 = 0, \\ 2C'_1(x)x + C'_2(x) \cdot 0 = x \end{cases}$$

знаходимо

$$\begin{aligned} C'_1(x) = 1/2, \quad C'_2(x) = -x^2/2 &\Rightarrow \\ \Rightarrow C_1(x) = x/2 + C_1, \quad C_2(x) = -x^3/6 + C_2. \end{aligned}$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (9.9), одержуємо загальний розв'язок $y = C_1 x^2 + C_2 + x^3/3$. ■

3. Метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (9.10)$$

де a_j — дійсні числа, функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b) .

До рівняння (9.10) можна застосувати метод варіації довільних сталих, викладений у п. 2 цієї лекції, однак цей метод має суттєві недоліки: розв'язання алгебричної системи з досить складними коефіцієнтами та взяття громіздких інтегралів. Тому, якщо можливо, методу варіації довільних сталих уникають і вдаються до так званого *методу невизначених коефіцієнтів*, який при певній структурі правої частини рівняння $f(x)$ дозволяє досить легко знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (9.10).

Розглянемо окремі випадки, пов'язані з виглядом правої частини рівняння (9.10).

Випадок 1. Нехай функція $f(x)$ є добутком багаточлена на показникову функцію, тобто

$$L(y) = P_m(x)e^{\alpha x}, \quad (9.11)$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m$ є багаточленом з дійсними або комплексними коефіцієнтами (він може вироджуватись у сталу), α — дійсне або комплексне число.

Будуючи частинний розв'язок рівняння (9.11), виділятимемо два випадки.

Випадок 1.1. Число α не є характеристичним числом, тобто $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ — характеристичний багаточлен, див. лекцію 8). Тоді частинний розв'язок $Y = Y(x)$ шукатимемо у вигляді

$$Y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (9.12)$$

де $Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m$ — багаточлен m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти багаточлена $Q_m(x)$ визначаються після підстановки (9.12) у рівняння (9.11) і прирівнювання коефіцієнтів біля однакових степенів x в обох частинах отриманої рівності. Переконаємось, що коефіцієнти багаточлена $Q_m(x)$ у цьому випадку знайдуться однозначно. Підставляючи (9.12) в (9.11) та враховуючи властивості оператора L , одержуємо:

$$\begin{aligned} L(Y) &= L(Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}) = \\ &= L((q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) \cdot e^{\alpha x}) = \\ &= q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \dots + q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + \\ &+ q_m L(e^{\alpha x}) = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Скористаємось тепер формулами

$$L(e^{\alpha x}) = P(\alpha) e^{\alpha x}, \quad L(x^s e^{\alpha x}) = \sum_{j=0}^s C_s^j P^{(j)}(\alpha) x^{s-j} e^{\alpha x},$$

які були виведені у п. 3 лекції 8. Після скорочення на $e^{\alpha x}$ маємо:

$$\begin{aligned} q_0 \sum_{j=0}^m C_m^j P^{(j)}(\alpha) x^{m-j} + q_1 \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j P^{(j)}(\alpha) x^{m-1-j} + \dots \\ \dots + q_{m-1} \sum_{j=0}^1 C_1^j P^{(j)}(\alpha) x^{1-j} + q_m P(\alpha) = \\ = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів x :

$$\left. \begin{array}{l} x^m \left| \begin{array}{l} q_0 P(\alpha) = p_0, \\ q_0 m P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = p_1, \\ \dots \dots \dots \\ q_0 P^{(m)}(\alpha) + q_1 P^{(m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P'(\alpha) + \\ + q_m P(\alpha) = p_m. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (9.13)$$

Оскільки $P(\alpha) \neq 0$, то із системи (9.13) послідовно можна однозначно визначити всі коефіцієнти q_0, q_1, \dots, q_m , наприклад, $q_0 = p_0/P(\alpha)$, $q_1 = (p_1 - q_0 m P'(\alpha))/P(\alpha)$ і т. д.

Випадок 1.2. Число α є характеристичним числом кратності k , тобто

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

У цьому випадку частинний розв'язок Y у вигляді (9.12) побудувати неможливо, бо $P(\alpha) = 0$. Шукатимемо його у вигляді

$$Y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}, \quad (9.14)$$

де $Q_m(x)$ — багаточлен m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами, які визначаються так само, як і випадку 1.1. Підставляючи (9.14) в (9.11), одержуємо:

$$\begin{aligned} L(Y) &= L(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}) = \\ &= L\left(\sum_{j=0}^m q_j x^{k+m-j} e^{\alpha x}\right) = \sum_{j=0}^m q_j L(x^{k+m-j} e^{\alpha x}) = \\ &= \sum_{j=0}^m q_j \sum_{s=k}^{k+m-j} C_{k+m-j}^s P^{(s)}(\alpha) x^{k+m-j-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^m p_j x^{m-j} e^{\alpha x} \end{aligned}$$

або, після скорочення на $e^{\alpha x}$,

$$\sum_{j=0}^m q_j \sum_{s=0}^{m-j} C_{k+m-j}^{k+s} P^{(k+s)}(\alpha) x^{m-j-s} = \sum_{j=0}^m p_j x^{m-j}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x , одержуємо систему

$$\begin{array}{l|l} x^m & q_0 C_{k+m}^k P^{(k)}(\alpha) = p_0, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ x^1 & q_0(k+m)P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1(k+m-1)P^{(k+m-2)}(\alpha) + \dots \\ & \dots + q_{m-1}(k+1)P^{(k)}(\alpha) = p_{m-1}, \\ x^0 & q_0 P^{(k+m)}(\alpha) + q_1 P^{(k+m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P^{(k+1)}(\alpha) + \\ & + q_m P^{(k)}(\alpha) = p_m, \end{array}$$

з якої, оскільки $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$, можна однозначно визначити всі коефіцієнти q_0, q_1, \dots, q_m .

Випадок 2. Нехай права частина рівняння (9.10) має вигляд

$$f(x) = e^{ax} \left(P_m^{(1)}(x) \cos bx + P_m^{(2)}(x) \sin bx \right), \quad (9.15)$$

де $P_m^{(1)}(x)$ та $P_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степенів, не вищих від m , причому хоча б один з них має степінь m (вони можуть бути й сталими числами, один з них може бути тотожно рівним нулю).

Якщо скористатись формулами Ейлера

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i},$$

то (9.15) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} f(x) &= P_m^{(1)}(x) e^{ax} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + P_m^{(2)}(x) e^{ax} \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = \\ &= \tilde{P}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{P}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}, \end{aligned}$$

де $\tilde{P}_m^{(1)}(x)$, $\tilde{P}_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m , тобто $f(x)$ є сумою двох доданків, які розглядались у випадку 1.

Випадок 2.1. Нехай $a + bi$ не є характеристичним числом. Згідно з теоремою 2 у цьому випадку частинний розв'язок знаходиться у вигляді

$$Y(x) = \tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x},$$

де $\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами. Перейшовши до дійснозначних функцій, одержуємо остаточне правило знаходження частинного розв'язку рівняння (9.10) з правою частиною вигляду (9.15): *якщо $a + bi$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок знаходиться у вигляді*

$$Y(x) = e^{ax} \left(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \right),$$

де $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ — багаточлени степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2.2. Нехай $a + bi$ є k -кратним характеристичним числом. У цьому випадку частинний розв'язок знаходиться у вигляді

$$Y(x) = x^k \left(\tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x} \right)$$

або

$$Y(x) = x^k e^{ax} \left(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \right).$$

В обох випадках коефіцієнти багаточленів $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ визначаються після підстановки $Y(x)$ у рівняння (9.10).

Зауважимо, що схема знаходження частинного розв'язку $Y(x)$ рівняння (9.10) не зміниться, якщо $P_m^{(1)}(x) \equiv 0$ або $P_m^{(2)}(x) \equiv 0$ (формула (9.15)). А якщо

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x),$$

де $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ мають вигляд (9.15) або правої частини рівняння (9.12) із різними $\alpha, a + bi$, то згідно з теоремою 2 матимемо: $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k$, де $Y_j = Y_j(x)$ — частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $y''' - 2y'' = -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^3 - 2k^2 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 0, k_3 = 2$, тому загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y_0 = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$. Праву частину неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, де $f_1(x) = (-24x^2 + 24x - 4)e^{0x}$, $f_2(x) = -2e^x$.

Оскільки $\alpha = 0$ є характеристичним числом кратності 2, а $\alpha = 1$ не є характеристичним числом, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$Y = x^2(Ax^2 + Bx + C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Підставляючи Y у задане рівняння, одержуємо тотожність

$$\begin{aligned} -24Ax^2 + (24A - 12B)x + (6B - 4C) - De^x &\equiv \\ &\equiv -24x^2 + 24x - 4 - 2e^x, \end{aligned}$$

з якої, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x , знаходимо A, B, C, D :

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \\ e^x \end{array} \left| \begin{array}{l} -24A = -24, \\ 24A - 12B = 24, \\ 6B - 4C = -4, \\ -D = -2 \end{array} \right. \Rightarrow A = 1, B = 0, C = 1, D = 2.$$

Отже, $Y = x^4 + x^2 + 2e^x$, а тому загальним розв'язком є

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + x^4 + x^2 + 2e^x. \blacksquare$$

4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів. Розглянемо диференціальне рівняння вимушених коливань (лекція 8)

$$x'' + 2px' + q^2x = f(t). \quad (9.16)$$

Згідно з теоремою 1 про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння усі рухи, які визначаються рівнянням (9.16), утворюються з сукупності усіх рухів, визначених відповідним однорідним рівнянням $x'' + 2px' + q^2x = 0$ (рівнянням **вільних коливань точки**), і будь-якого одного руху, визначеного неоднорідним рівнянням (9.16).

Розглянемо випадок, коли збурювальна сила $f(t)$ періодична і має синусоїдальний характер.

Випадок 1. *Рух відбувається в середовищі без опору ($p = 0$).* Тоді рівняння руху має вигляд

$$x'' + q^2x = M \sin \omega t, \quad (9.17)$$

де M — деяке число.

Власні коливання $x_0(t)$, які визначаються відповідним однорідним рівнянням $x'' + q^2x = 0$, є гармонічними (див. формулу (8.15) з лекції 8):

$$x_0(t) = A \sin(qt + \varphi). \quad (9.18)$$

Залишається знайти частинний розв'язок рівняння (9.17). Вигляд цього розв'язку залежить від того, чи є число $a + ib = i\omega$ коренем характеристичного рівняння $k^2 + q^2 = 0$. Оскільки $k_{1,2} = \pm iq$, то вигляд розв'язку залежить від того, чи збігається частота збурювальної сили з частотою власних коливань (*резонансний випадок*), чи маємо незбіг цих частот (*нерезонансний випадок*).

Розглянемо спочатку нерезонансний випадок, тобто коли $\omega \neq q$. Частинний розв'язок рівняння (9.17) $X(t)$ шукаємо у вигляді $X(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$, де B і C — деякі сталі, які визначимо згодом (випадок 2.1 п. 3 цієї лекції). Тоді

$$\begin{aligned} X'(t) &= -B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t, \\ X''(t) &= -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

і, підставляючи в (9.17), одержуємо рівняння

$$-B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t + q^2(B \cos \omega t + C \sin \omega t) = M \sin \omega t.$$

З нього, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ відповідно, маємо:

$$\begin{cases} -B\omega^2 + Bq^2 = 0, \\ -C\omega^2 + Cq^2 = M \end{cases} \Rightarrow B = 0, \quad C = \frac{M}{q^2 - \omega^2}.$$

Таким чином, $X(t) = \frac{M}{q^2 - \omega^2} \sin \omega t$, а загальним розв'язком рівняння (9.17) є

$$x(t) = \frac{M}{q^2 - \omega^2} \sin \omega t + A \sin(qt + \varphi).$$

Вимушені коливання, визначені цим загальним розв'язком, називають *накладеними гармонічними коливаннями*.

Розглянемо рівняння вимушених коливань

$$x'' + q^2 x = M \sin qt, \quad (9.19)$$

яке є окремим випадком рівняння (9.17), коли $\omega = q$, тобто коли частота збурювальної сили збігається з частотою власних коливань (*резонанс*). У цьому випадку частинний розв'язок має

ВИГЛЯД

$$X(t) = t(B \cos qt + C \sin qt),$$

бо iq є простим характеристичним числом (випадок 2.2 п. 3 цієї лекції). Тоді

$$X'(t) = B \cos qt + C \sin qt + tq(-B \sin qt + C \cos qt),$$

$$X''(t) = -2Bq \sin qt + 2Cq \cos qt - tq^2(B \cos qt + C \sin qt)$$

і, підставляючи в (9.19), одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} -2Bq \sin qt + 2Cq \cos qt - q^2 t(B \cos qt + C \sin qt) + \\ + q^2 t(B \cos qt + C \sin qt) &= M \sin qt \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow -2Bq \sin qt + 2Cq \cos qt &= M \sin qt. \end{aligned}$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля $\cos qt$, $\sin qt$ відповідно, знаходимо, що $B = -\frac{M}{2q}$, $C = 0$. Таким чином,

$$X(t) = -\frac{M}{2q} t \cos qt. \quad (9.20)$$

Частинний розв'язок (9.20) є вимушеним коливанням і має необмежену амплітуду при $t \rightarrow +\infty$. Графік цього коливання розташований між прямими $x = \frac{M}{2q}t$ і $x = -\frac{M}{2q}t$ (рис. 9.1).

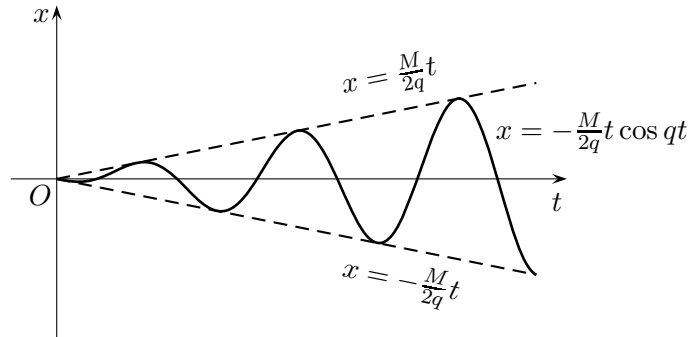


Рис. 9.1

У реальних фізичних системах коливання ніколи не можуть зростати необмежено, бо коливання з необмеженою амплітудою або стримуються опором, або призводять до руйнування системи.

Загальним розв'язком рівняння (9.19) є

$$x(t) = A \sin(qt + \varphi) - \frac{M}{2q} t \cos qt.$$

Вимушені коливання, визначені цим розв'язком, утворюються накладанням гармонічних коливань (9.18) і коливань з необмеженою амплітудою (9.20).

Випадок 2. *Рух відбувається в середовищі з малим опором* ($p < q$). Припустимо, що збурювальна сила має синусоїдальний характер. Тоді рівнянням руху є

$$x'' + 2p x' + q^2 x = M \sin \omega t. \quad (9.21)$$

Згідно з формулою (8.16) власні коливання $x_0(t)$ мають вигляд

$$x_0(t) = A e^{-pt} \sin(\sqrt{q^2 - p^2} t + \varphi).$$

Частинний розв'язок $X(t)$ рівняння (9.21) шукаємо у вигляді

$$X(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t, \quad (9.22)$$

де сталі B і C знайдемо, підставляючи (9.22) в (9.21):

$$\begin{aligned} & -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t + 2p(-B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t) + \\ & + q^2(B \cos \omega t + C \sin \omega t) = M \sin \omega t \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow (-B\omega^2 + 2pC\omega + Bq^2) \cos \omega t + \\ & + (-C\omega^2 - 2pB\omega + q^2C) \sin \omega t = M \sin \omega t \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} B(q^2 - \omega^2) + 2p\omega C = 0, \\ -2pB\omega + (q^2 - \omega^2)C = M \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow B = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}, \quad C = \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$X(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin \omega t, \quad (9.23)$$

а загальний розв'язок рівняння (9.21) має вигляд

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin \omega t + \\ + Ae^{-pt} \sin(\sqrt{q^2 - p^2} t + \varphi).$$

Оскільки при $t \rightarrow +\infty$ останній доданок прямує до нуля, то для достатньо великих t можна вважати, що

$$x(t) = \frac{-2p\omega M}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{M(q^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin \omega t,$$

тобто власними (згасаючими) коливаннями можна знехтувати.

Амплітуда \tilde{A} вимушеного коливання (9.23) виражається формулою

$$\tilde{A} = \frac{M}{\sqrt{(\omega^2 - q^2)^2 + 4p^2\omega^2}},$$

а якщо опір p дуже малий, то $\tilde{A} \approx \frac{M}{|\omega^2 - q^2|}$. Звідси випливає, що при наближенні ω до q амплітуда \tilde{A} є доволі значною навіть для малого значення M .

Рекомендована література: [8, с. 176–212], [9, с. 100–110], [14, с. 103–108, 138–148], [16, с. 151–154], [18, с. 243–261], [21, с. 125–130, 138–144, 148–150].

Питання до лекції 9

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку?

2. Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо його права частина є сумою двох або більшої кількості доданків?

3. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку?

4. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами? Якого вигляду має бути права частина рівняння, щоб можна було використати цей метод?

5. Який вигляд має рівняння вимушених коливань у середовищі без опору у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Як інтегрується це рівняння? Який вигляд має загальний розв'язок у нерезонансному і резонансному випадках?

6. Як інтегрується рівняння вимушених коливань у середовищі з малим опором у випадку періодичної збурювальної сили синусоїдального характеру? Який вигляд має графік частинного розв'язку цього рівняння?

Вправи до лекції 9

1. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом варіації довільних сталих:

$$\text{а) } y'' + 3y' + 2y = \frac{2}{e^x + 1}; \quad \text{б) } y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}; \quad \text{в) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

2. Зінтегруйте лінійні неоднорідні рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

$$\text{а) } y'' - y = x^2 + 3x; \quad \text{б) } y'' - 4y' = x + 2; \quad \text{в) } y'' + y' = 2 \sin x + x \cos x.$$

3. Знайдіть розв'язки задач Коші:

$$\begin{aligned} \text{а) } y'' + y &= e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2; \\ \text{б) } y'' + 2y' + 2y &= xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{aligned}$$

4. Для кожного рівняння запишіть частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами, не шукаючи їх:

$$\begin{aligned} \text{а) } y'' - 2y' + 2y &= 5x^2e^x + 2 \cos x; \quad \text{б) } y'' + 4y = \sin 2x + \cos 3x; \\ \text{в) } y'' + 7y' + 10y &= xe^{-2x} \sin 5x. \end{aligned}$$

Розділ 3

СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 10. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків.
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача.
4. Лінійні однорідні системи.

1. Основні означення й поняття. Розв'язуючи багато проблем сучасної фізики та техніки, доводиться визначати відразу декілька невідомих функцій з відповідної кількості диференціальних рівнянь, тобто мати справу із системою диференціальних рівнянь. Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

де y_1, y_2, \dots, y_n — шукані функції незалежної змінної x , називають **системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку**.

Якщо (10.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (10.2)$$

яку називають **нормальною**.

Розв'язком системи (10.2) на деякому інтервалі (a, b) називають упорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x), \quad (10.3)$$

визначених і неперервно диференційованих на цьому інтервалі, якщо вона перетворює всі рівняння системи (10.2) у тотожності, які справджуються для всіх значень $x \in (a, b)$. Криву в $(n + 1)$ -вимірному просторі $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, яка відповідає розв'язку (10.3), називають **інтегральною кривою** системи (10.2).

Задача Коші для системи (10.2) формулюється так: серед усіх розв'язків цієї системи знайти розв'язок (10.3), який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}, \quad (10.4)$$

де $x = x_0$ — довільна точка з проміжку (a, b) , а $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ — довільні наперед задані дійсні числа (їх називають **початковими даними розв'язку**). Сукупність чисел $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ називають **початковими даними системи** (10.2), а умови (10.4) — **початковими умовами** системи (10.2).

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуванні серед усіх інтегральних кривих системи (10.2) такої кривої, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$.

Розглядаючи задачу Коші (10.2), (10.4), природно виникає питання про існування та єдиність її розв'язку. Виявляється, що для існування неперервно диференційованого розв'язку цієї задачі досить припустити, щоб *праві частини системи* (10.2) *були неперервними в деякому околі початкових даних* (**теорема Пеано**). Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (10.2), (10.4) (доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [21, с. 93–99]).

Теорема (Коші). *Нехай праві частини системи* (10.2) *визначені в* $(n + 1)$ -*вимірному паралелепіпеді*

$$G = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, \quad |y_j - y_{j0}| \leq b, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

де $a > 0, b > 0$, і задовольняють у ньому такі умови:

1) вони неперервні, а, отже, й обмежені, тобто

$$|f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad M > 0;$$

2) частинні похідні $\frac{\partial f_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, існують та обмежені.

Тоді задача Коші (10.2), (10.4) має єдиний розв'язок принаймні на відрізку $|x - x_0| \leq h$, де $h = \min(a, b/M)$.

Нехай G — область простору зміни змінних x, y_1, \dots, y_n , у кожній точці якої задача Коші (10.2), (10.4) має єдиний розв'язок. Сукупність функцій

$$y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10.5)$$

які визначені в деякій області зміни x, C_1, C_2, \dots, C_n і мають неперервні частинні похідні за змінною x , називають **загальним розв'язком** системи (10.2) в області G , якщо:

1) систему (10.5) можна розв'язати в області G відносно довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n , тобто

$$C_j = \psi_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (10.6)$$

2) для всіх значень $(x, y_1, \dots, y_n) \in G$ формули (10.6) визначають такі значення C_1, C_2, \dots, C_n , для яких сукупність функцій (10.5) є розв'язком системи (10.2).

Розв'язок системи (10.2), в кожній точці якого виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші, називають **частинним**. З означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, які утворюються з нього для конкретних значень довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n , є частинними. Розв'язок системи, у кожній точці якого порушується умова єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, називають **особливим**.

Неперервно диференційовну і незвідну до сталої функцію $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ називають **інтегралом** системи (10.2), якщо вона тотожно перетворюється у сталу вздовж довільного частинного розв'язку цієї системи. Звідси випливає, що $d\psi = 0$ внаслідок системи (10.2), тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n =$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 dx + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n dx \equiv 0.$$

Рівність $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$, де C — довільна стала, називають **першим інтегралом** системи (10.2). Наприклад, кожна з рівностей (10.6) є першим інтегралом системи (10.2).

Сукупність n перших інтегралів системи (10.2)

$$\psi_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

називають **загальним інтегралом** цієї системи, якщо інтеграли $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ є **незалежними**, тобто між $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ не існує співвідношення вигляду $F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0$ для жодної функції F . З математичного аналізу відомо, що для незалежності в області G функцій $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, які мають частинні похідні $\frac{\partial \psi_j}{\partial y_k}$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, необхідно і достатньо, щоб визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

в області G був відмінний від нуля.

Можна показати, що нормальна система n рівнянь не може мати більше, ніж n незалежних інтегралів системи (10.2).

Будь-які n перших інтегралів називають **незалежними**, якщо відповідні їм інтеграли незалежні. Отже, задача побудови загального інтеграла системи буде розв'язаною, якщо буде знайдено n незалежних перших інтегралів.

Загального способу знаходження перших інтегралів не існує. Однак у багатьох випадках вдається знайти перший інтеграл шляхом деяких перетворень системи, в результаті чого отримується диференціальне рівняння, яке легко інтегрується. Кожне таке рівняння називають **інтегрованою комбінацією**. Кожна інтегрована комбінація породжує перший інтеграл. Однак серед них можуть виявитись і залежні інтеграли, а тому, одержуючи новий перший інтеграл, потрібно перевірити, чи буде він незалежним з раніше отриманими.

Приклад 1. Зінтегрувати систему⁷⁾

$$\begin{cases} y' = z(y - z)^{-2}, \\ z' = y(y - z)^{-2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Поділивши перше рівняння системи на друге, одержуємо інтегровну комбінацію $\frac{dy}{dz} = \frac{z}{y}$, звідки, відокремлюючи змінні, знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} = \frac{z}{y} &\Rightarrow ydy - zdz = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 - z^2 = C_1. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Віднімаючи від другого рівняння заданої системи перше, одержимо ще одну інтегровну комбінацію $\frac{d(z-y)}{dx} = \frac{-1}{z-y}$, звідки

$$(z - y)^2 = -2x + C_2. \quad (10.8)$$

Кожне із співвідношень (10.7), (10.8) є першим інтегралом, а оскільки вони є незалежними (у цьому пропонуємо переконатися самостійно), то їхня сукупність є загальним інтегралом системи.

Відповідь: $y^2 - z^2 = C_1$, $(z - y)^2 = -2x + C_2$.

Як уже згадувалось, до систем диференціальних рівнянь зводяться різноманітні задачі прикладного характеру. Розглянемо одну з них.

Задача. Визначити траєкторію руху гарматного снаряда, який вилітає з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту.

Розв'язання. За початок координат візьмемо точку вильоту снаряда (рис. 10.1). На снаряд діє сила його ваги $P = mg$, її складова на осі x дорівнює нулю, бо сила перпендикулярна до цієї осі. Припустимо, що опір повітря пропорційний швидкості руху. Тоді диференціальними рівняннями руху вздовж координатних осей є

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mk \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk \frac{dy}{dt}.$$

⁷⁾ Якщо у системі дві невідомі функції, то позначатимемо їх через y, z .

Якщо знехтувати опором повітря, то ці рівняння після скорочення на m матимуть вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (10.9)$$

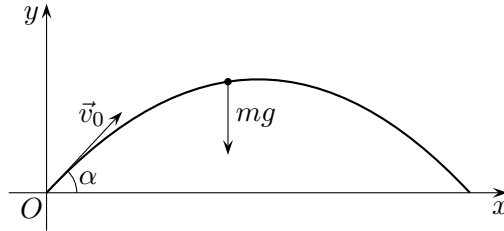


Рис. 10.1

Отже, задача звелася до інтегрування системи двох диференціальних рівнянь. Інтегруючи кожне рівняння системи (10.9), одержуємо:

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt} = C_1, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt} = -gt + C_2, \quad (10.10)$$

де v_x , v_y — складові швидкості $v = v(x, y)$ на осях. У початковий момент часу $t_0 = 0$ компонентами швидкості є $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = v_0 \sin \alpha$ і, отже,

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha.$$

Враховуючи ці формули, з (10.10) знаходимо

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + C_4,$$

але оскільки $x(0) = y(0) = 0$, то $C_3 = C_4 = 0$. Остаточню маємо:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Виключаючи з цих рівнянь t , одержуємо траєкторію руху (параболу)

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Дальність x_1 польоту снаряда знайдемо з рівняння $y = 0$, тобто

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Максимальною дальністю польоту буде тоді, коли $\sin 2\alpha = 1$, звідки знаходимо відповідний кут вильоту $\alpha = \pi/4$. ■

2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків. Нормальній системі (10.2) та її розв'язкам можна надати механічне тлумачення. Розглянемо систему

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (10.11)$$

де t — час, x_1, x_2, \dots, x_n — координати точки n -вимірного простору. Цей простір називають **фазовим**. Для $n = 1$ фазовим простором є вісь t (**фазова пряма**), для $n = 2$ — площина (t, x) , яку називають **фазовою**.

Кожний розв'язок (інтегральна крива)

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t) \quad (10.12)$$

системи (10.11) виражає **закон руху** точки у фазовому просторі. Тому розв'язок (10.12) називатимемо **рухом** у n -вимірному просторі \mathbf{R}^n , який визначений системою (10.11), а криву, яку описує рухом точка у фазовому просторі, — **траєкторією руху**.

Ліві частини системи (10.11) є складовими (за осями координат) швидкості руху точки, тому кажуть, що ця система задає поле швидкостей рухів, тобто точка може проходити у момент часу t через положення (x_1, x_2, \dots, x_n) тільки із заданою швидкістю.

Якщо швидкість, з якою точка проходить через положення (x_1, x_2, \dots, x_n) , не залежить від моменту часу проходження, тоб-

то система (10.11) має вигляд

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (10.13)$$

то її називають **автономною (стаціонарною)**, а рух, що описується такою системою, — **усталеним**.

Якщо у деякій точці $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ праві частини системи (10.13) дорівнюють нулю для всіх значень часу t , тобто $f_j(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то ця система має розв'язок

$$x_1 \equiv x_{10}, \quad x_2 \equiv x_{20}, \quad \dots, \quad x_n \equiv x_{n0}, \quad (10.14)$$

адже, підставляючи його в (10.11), одержимо тотожності. Рух (10.14) називають **станом спокою**. Траєкторією цього руху є точка $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, яку називатимемо **точкою спокою**.

Задача Коші для системи (10.11) полягає у знаходженні руху (10.12), який задовольняє початкові умови

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{n0},$$

де $t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ — задані числа (**початкові дані**), тобто шукають такий рух (10.12), при якому рухома точка знаходиться у заданій точці $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ фазового простору в заданий момент часу t . При цьому $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ називають **початковою точкою руху** (10.12). Зауважимо, що якщо початковою точкою руху (10.12) є точка спокою $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, то одним з розв'язків задачі Коші буде стан спокою (10.14).

3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача. Диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (10.15)$$

завжди можна звести до нормальної системи n диференціальних рівнянь. З цією метою позначимо

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n.$$

Тоді

$$\begin{aligned} y_1' = y' = y_2, \quad y_2' = y'' = y_3, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n, \\ y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

тобто функції y_1, y_2, \dots, y_n задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (10.16)$$

Система (10.16) — це нормальна система, рівносильна диференціальному рівнянню (10.15). Зведення одного диференціального рівняння довільного порядку, розв'язаного відносно старшої похідної, до рівносильної нормальної системи рівнянь у багатьох випадках спрощує задачу знаходження загального розв'язку або розв'язку задачі Коші.

Розглянемо обернену задачу, тобто задачу про зведення нормальної системи (10.2), в якій f_j — $(n-1)$ разів диференційовні функції, до одного диференціального рівняння. Для цього послідовно здиференціюємо $(n-1)$ разів одне з рівнянь системи (10.2) (наприклад, перше), замінюючи після кожного диференціювання похідні y_1', y_2', \dots, y_n' виразами для них із системи (10.2), і виключимо з першого рівняння цієї системи і отриманих $(n-1)$ -го рівняння функції y_2, y_3, \dots, y_n . При цьому для знаходження функції y_1 , очевидно, одержимо диференціальне рівняння n -го порядку вигляду

$$y_1^{(n)} = f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}),$$

і якщо вдасться знайти його загальний розв'язок, то функції y_2, y_3, \dots, y_n знайдуться без квадратур.

Метод розв'язування нормальної системи рівнянь зведенням її до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної, називають *методом виключення*.

У деяких випадках зведення нормальної системи до одного рівняння можна здійснювати з відхиленням від описаної загальної схеми.

Приклад 2. Зінтегрувати методом виключення систему

$$\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння виразимо z через y і підставимо у друге рівняння системи:

$$\begin{aligned} z = y' - 2y &\Rightarrow (y' - 2y)' = 3y + 4(y' - 2y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y'' - 6y' + 5y = 0. \end{aligned}$$

Загальним розв'язком одержаного рівняння є $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$. Підставляючи цей вираз у перше рівняння системи, маємо:

$$z = (C_1 e^x + C_2 e^{5x})' - 2(C_1 e^x + C_2 e^{5x}) = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}.$$

Відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$, $z = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}$.

Приклад 3. Зінтегрувати методом виключення систему

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + y_3 + 2y_1, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Розв'язання. Здиференціюємо третє рівняння системи і підставимо замість y_1' , y_2' відповідні вирази з початкової системи:

$$\begin{aligned} y_3'' &= y_1' - y_2' + 2y_3' = 2y_1 - y_2 + y_3 - (y_1 + 2y_2 - y_3) + \\ &+ 2(y_1 - y_2 + 2y_3) = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3. \end{aligned}$$

Диференціюючи отримане співвідношення і знову використовуючи рівняння системи, одержуємо рівняння

$$y_3''' = 3y_1' - 5y_2' + 6y_3' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3.$$

Із системи

$$\begin{cases} y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3'' = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3, \\ y_3''' = 7y_1 - 19y_2 + 20y_3 \end{cases}$$

виключимо y_1 і y_2 . Для цього достатньо, наприклад, розв'язати систему, утворену з першого і другого рівнянь, відносно y_1 і y_2 .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_3'' = 3y_1 - 5y_2 + 6y_3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 = y_3' - 2y_3, \\ 3y_1 - 5y_2 = y_3'' - 6y_3 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{5}{2}y_3' - 2y_3, \quad y_2 = -\frac{1}{2}y_3'' + \frac{3}{2}y_3'. \end{aligned}$$

Підставивши знайдений розв'язок у третє рівняння, одержимо

$$y_3''' - 6y_3'' + 11y_3' - 6y_3 = 0.$$

Оскільки характеристичними числами, як легко перевірити, є $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, то загальний розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

Після цього знаходимо y_1 , y_2 :

$$y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x}, \quad y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Відповідь: $y_1 = C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$, $y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}$, $y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$.

Потрібно мати на увазі, що при розв'язуванні систем (як і рівнянь) відповідь може бути записана у різній формі, але зазвичай її можна звести від одного до іншого вигляду перепозначенням сталих.

4. Лінійні однорідні системи. *Лінійною* системою диференціальних рівнянь першого порядку називають систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots \dots \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (10.17)$$

яку скорочено можна записати у вигляді

$$y'_k = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Уважатимемо, що функції $p_{kj}(x)$, $f_k(x)$, $k, j = 1, 2, \dots, n$, неперервні на деякому інтервалі (a, b) . Тоді згідно з теоремою Коші (п. 1) система (10.17) має єдиний розв'язок (10.3), який задовольняє початкові умови (10.4). Цей розв'язок буде визначений на деякому відрізку $[a_1, b_1] \subset (a, b)$. Особливих розв'язків система (10.17) не має.

Якщо на інтервалі (a, b) всі $f_k(x) \equiv 0$, то систему (10.17) називають **лінійною однорідною**. Вона має вигляд

$$y'_k = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)y_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10.18)$$

Якщо у системі (10.17) не всі функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю, то її називають **лінійною неоднорідною**.

Очевидно, кожна лінійна однорідна система має нульовий розв'язок

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0,$$

який називають **тривіальним**.

Розв'язки лінійної однорідної системи (10.18) мають деякі характерні властивості, які аналогічні до відповідних властивостей розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку (лекція 7, п. 2).

Властивість 1. Якщо $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, \dots , $y_n = \varphi_n(x)$ — розв'язок однорідної системи (10.18), то

$$y_1 = C\varphi_1(x), \quad y_2 = C\varphi_2(x), \quad \dots, \quad y_n = C\varphi_n(x),$$

де C — довільна стала, також є розв'язком цієї системи.

Властивість 2. Якщо задано t розв'язків системи (10.18):

$$\begin{aligned} 1\text{-й розв'язок} &: y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ 2\text{-й розв'язок} &: y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ t\text{-й розв'язок} &: y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tn}, \end{aligned}$$

то їхня лінійна комбінація з довільними сталими C_1, C_2, \dots, C_m

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_m y_{m1}, \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_m y_{m2}, \\ &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \dots + C_m y_{mn}, \end{aligned}$$

або, скорочено,

$$y_k = \sum_{i=1}^m C_i y_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (10.19)$$

також є розв'язком системи (10.18).

Доведення. Підставляючи (10.19) в (10.18), одержуємо:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m C_i y_{ik} \right)' &= \sum_{j=1}^n p_{kj}(x) \left(\sum_{i=1}^m C_i y_{ij} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^m C_i y'_{ik} &= \sum_{i=1}^m C_i \sum_{j=1}^n p_{kj}(x) y_{ij}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Доведення властивості випливає з тотожного виконання рівностей

$$y'_{ik} \equiv \sum_{j=1}^n p_{kj}(x) y_{ij}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

які є результатом підставлення i -го розв'язку в систему (10.18). Властивість доведено.

Так само, як і для лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку, для знаходження дійсних розв'язків системи (10.2) часто використовують її комплексні розв'язки. Скупність функцій

$$y_j(x) = u_j(x) + i v_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де $u_j(x), v_j(x), j = 1, 2, \dots, n$, — дійсні функції, називають **комплексним розв'язком** системи (10.2) на інтервалі (a, b) , якщо

вона перетворює всі рівняння цієї системи у тотожності. При цьому легко показати, що впорядковані сукупності, складені окремо з дійсних та з уявних частин цього розв'язку, є дійсними розв'язками системи (10.2) ([11, с. 184]).

Рекомендована література: [9, с. 151–166], [11, с. 51–53, 168–184], [14, с. 18–22, 65–70, 91–92], [18, с. 322–340], [21, с. 93–99, 164–179].

Питання до лекції 10

1. Який загальний вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку? Що називають розв'язком цієї системи на деякому інтервалі (a, b) ?

2. Який вигляд має нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку? Як формулюється задача Коші для нормальної системи? Який її геометричний та механічний зміст? Яку нормальну систему називають автономною?

3. Який механічний зміст має нормальна система та її розв'язок? Що таке фазовий простір, фазова площина, фазова пряма? Як пов'язані між собою рух, який описується системою диференціальних рівнянь, та його траєкторія? Який рух називають станом спокою, яка його траєкторія? Що таке поле швидкостей, визначене системою диференціальних рівнянь? Дайте механічне тлумачення задачі інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь.

4. Як формулюється теорема Коші про достатні умови існування та єдиності неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь?

5. Що називають загальним розв'язком (інтегралом) нормальної системи диференціальних рівнянь у деякій області існування та єдиності розв'язків задачі Коші? Що називають частинним та особливим розв'язками нормальної системи диференціальних рівнянь? Як вони пов'язані з загальним розв'язком системи?

6. Що таке інтегровні комбінації і як вони використовуються для знаходження загального інтеграла?

7. Як диференціальне рівняння n -го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, можна звести до рівносильної йому нормальної системи диференціальних рівнянь?

8. Який вигляд має лінійна система диференціальних рівнянь? Чим відрізняється лінійна неоднорідна система від однорідної? Які властивості мають розв'язки лінійної однорідної системи?

Вправи до лекції 10

1. Зінтегруйте системи, використовуючи інтегровні комбінації:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 2(y^2 + z^2)x, \\ z' = 4yzx; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = \sin y \cos z, \\ z' = \cos y \sin z. \end{cases}$$

2. Зінтегруйте методом виключення системи:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 10y - 6z, \\ z' = 18y - 11z; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = y - 2z - xe^x, \\ z' = 5y - z - (x+1)e^x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y'_1 = -2y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y'_2 = -6y_1 + 2y_2 - 2y_3, \\ y'_3 = -6y_1 - 2y_2 - y_3. \end{cases}$$

Лекція 11. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій.
2. Формула Остроградського–Якобі.
3. Теорема про побудову загального розв'язку лінійної однорідної системи.
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.

1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій.

Нехай задано m сукупностей функцій

$$\left. \begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ \dots \dots \dots \\ y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}, \end{array} \right\} \quad (11.1)$$

у кожній з яких по n функцій, визначених і неперервних на деякому інтервалі (a, b) . Сукупності функцій (11.1) називають

лінійно незалежними на інтервалі (a, b) , якщо тотожності

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + \dots + \alpha_m y_{m1} &\equiv 0, \\ \alpha_1 y_{12} + \alpha_2 y_{22} + \dots + \alpha_m y_{m2} &\equiv 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_1 y_{1n} + \alpha_2 y_{2n} + \dots + \alpha_m y_{mn} &\equiv 0,\end{aligned}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ — сталі, виконуються тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. В іншому випадку сукупності функцій (11.1) називають *лінійно залежними* на інтервалі (a, b) .

Зокрема, дві сукупності функцій $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$ і $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$ будуть лінійно незалежними на (a, b) , якщо не існує співвідношення вигляду

$$\frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \dots = \frac{y_{2n}}{y_{1n}} = k \neq 0, \quad a < x < b.$$

Наприклад, сукупності функцій

$$y_{11} = 3e^{3x}, \quad y_{12} = 2e^{3x}, \quad y_{13} = e^{3x}$$

і

$$y_{21} = e^{3x}, \quad y_{22} = 2e^{3x}, \quad y_{23} = 3e^{3x}$$

є лінійно незалежними на $(-\infty, +\infty)$, а сукупності функцій

$$y_{11} = 2e^{3x}, \quad y_{12} = e^{3x}, \quad y_{13} = -e^{3x}$$

і

$$y_{21} = 4e^{3x}, \quad y_{22} = 2e^{3x}, \quad y_{23} = -2e^{3x}$$

лінійно залежні на $(-\infty, +\infty)$.

Установимо необхідну умову лінійної залежності довільних n сукупностей функцій. Отже, нехай маємо n сукупностей функцій

$$\left. \begin{aligned} &y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ &y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ &\dots \dots \dots \\ &y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Визначником Вронського або **вронскіаном** сукупностей функцій (11.2) називають визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \quad (11.3)$$

Теорема 1 (необхідна умова лінійної залежності n сукупностей функцій). Якщо n сукупностей функцій (11.2) лінійно залежні на інтервалі (a, b) , то $W(x) \equiv 0$ на цьому інтервалі.

Доведення. Оскільки n сукупностей функцій (11.2) лінійно залежні, то, за означенням,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad a < x < b, \quad (11.4)$$

де не всі α_i дорівнюють нулю. Розглядаючи (11.4) як однорідну лінійну систему алгебричних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, бачимо, що вона має ненульовий розв'язок, а тому визначник цієї системи дорівнює нулю. Цим визначником є вронскіан, отже, $W(x) \equiv 0$ в усіх точках інтервалу (a, b) . Теорему доведено.

Теорему 1 можна сформулювати інакше: якщо вронскіан n сукупностей функцій (11.2) на деякому інтервалі (a, b) відмінний від нуля, то ці сукупності функцій лінійно незалежні на цьому інтервалі.

Нехай тепер кожна з сукупностей функцій (11.2) є розв'язком лінійної однорідної системи

$$y'_k = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x) y_j, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (11.5)$$

коефіцієнти $p_{kj}(x)$, $k, j = 1, 2, \dots, n$, якої неперервні на деякому інтервалі (a, b) .

Теорема 2 (необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь). Якщо n розв'язків (11.2) системи (11.5) лінійно незалежні на інтервалі (a, b) , то їхній вронскіан не перетворюється в нуль у жодній точці цього інтервалу.

Доведення теореми проведемо від супротивного. Нехай $W(x_0) = 0$ для деякої точки $x_0 \in (a, b)$. Складемо систему n алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n C_i y_{ik}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.6)$$

Оскільки визначник однорідної системи (11.6) дорівнює нулю (ним є $W(x_0)$), то вона має ненульовий розв'язок $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, \dots , $C_n = C_n^{(0)}$.

Побудуємо розв'язок

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.7)$$

Оскільки $C_i^{(0)}$ задовольняють систему (11.6), то розв'язок (11.7) має нульові початкові значення у точці $x = x_0$, тобто $y_1(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0$, \dots , $y_n(x_0) = 0$. Але ці самі початкові умови задовольняє також тривіальний розв'язок, тому згідно з теоремою Коші (п. 1, лекція 10) ці розв'язки збігаються, тобто

$$\sum_{i=1}^n C_i^{(0)} y_{ik} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Отримали, що розв'язки (11.2) лінійно залежні на (a, b) , що суперечить умові теореми. Теорему доведено.

З теорем 1 і 2 випливає: для того, щоб n розв'язків системи (11.5) були лінійно незалежними на інтервалі (a, b) , **необхідно і достатньо**, щоб їхній вронскіан не перетворювався в нуль у жодній точці цього інтервалу.

2. Формула Остроградського–Якобі. Ця формула дозволяє з точністю до сталого множника виразити вронскіан розв’язків лінійної однорідної системи (11.5) через діагональні коефіцієнти цієї системи, а саме:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x (p_{11}(x) + p_{22}(x) + \dots + p_{nn}(x)) dx}, \quad (11.8)$$

де $x = x_0$ — довільна точка інтервалу (a, b) . Формулу (11.8) називають **формулою Остроградського–Якобі**. Для доведення формули (11.8) знайдемо похідну від вронскіана (11.3), диференціюючи його за стовпцями. У цьому випадку похідна від визначника n -го порядку дорівнює сумі n визначників, які отримуються з нього по черговому заміною елементів першого, другого, ..., n -го стовпця їхніми похідними, тобто

$$W'(x) = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & y'_{1k} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & y'_{2k} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & y'_{nk} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінімо похідні y'_{1k} , y'_{2k} , ..., y'_{nk} їхніми виразами з (11.5). Тоді

$$W'(x) = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,k-1} & \sum_{j=1}^n p_{kj} y_{1j} & y_{1,k+1} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,k-1} & \sum_{j=1}^n p_{kj} y_{2j} & y_{2,k+1} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,k-1} & \sum_{j=1}^n p_{kj} y_{nj} & y_{n,k+1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо розкласти кожен з визначників справа на суму n визначників, то всі вони дорівнюватимуть нулю (кожен з них матиме два пропорційні стовпці), крім визначника, який відповідає $j = k$. У цьому випадку k -й визначник справа дорівнює $p_{kk}(x)W(x)$, а тому $W'(x) = \sum_{k=1}^n p_{kk}(x)W(x)$, звідки інтегруванням отримуємо формулу (11.8) (порівняйте з виведенням формули Остроградського–Ліувілля з лекції 7).

З формули Остроградського–Якобі, зокрема, випливають такі властивості:

1. Якщо $W(x) = 0$ хоч у одній точці інтервалу (a, b) , то $W(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.

2. Якщо $W(x) \neq 0$ у деякій точці інтервалу (a, b) , то $W(x) \neq 0$ в усіх точках цього інтервалу.

3. Теорема про побудову загального розв'язку лінійної однорідної системи. Сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи (11.5), визначених і лінійно незалежних на інтервалі (a, b) , називають **фундаментальною системою розв'язків** на цьому інтервалі.

З п. 1, 2 цієї лекції випливає таке твердження: сукупність n розв'язків лінійної однорідної системи (11.5) буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли вронскіан цих розв'язків відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу (a, b) .

Так само, як і для лінійних однорідних рівнянь n -го порядку (лекція 7), знання фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати загальний розв'язок лінійної однорідної системи (11.5).

Теорема 3. Якщо сукупності функцій (11.2) утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійної однорідної системи (11.5) на інтервалі (a, b) , то формули

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1}, \\ y_2 &= C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{n2}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_n &= C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \dots + C_n y_{nn}, \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — довільні сталі, визначають загальний розв'язок системи (11.5) в усій її області задання.

Доведення. Неоднорідну систему (11.9) можна розв'язати відносно C_1, C_2, \dots, C_n , бо її визначник відмінний від нуля (ним є $W(x)$). Крім того, сукупність функцій (11.9) є розв'язком системи (11.5) для всіх значень довільних сталих C_1, C_2, \dots, C_n

(властивість 2 з п. 4 лекції 10). Тому згідно з означенням загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь сукупність функцій (11.9) є загальним розв'язком системи (11.5). Теорему доведено.

4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера. Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{cases} \quad (11.10)$$

де a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, — дійсні сталі, і покажемо, що її завжди можна зінтегрувати у скінченному вигляді (тобто через елементарні функції або у квадратурах).

Згідно з теоремою 3 для побудови загального розв'язку системи (11.10) досить знайти хоча б одну її фундаментальну систему розв'язків. Частинний розв'язок системи (11.10) шукаємо у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{kx}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{kx}, \quad \dots, \quad y_n = \gamma_n e^{kx}, \quad (11.11)$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ і k — деякі сталі, причому $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ не дорівнюють нулю одночасно (інакше матимемо очевидний тривіальний розв'язок, який не може належати фундаментальній системі розв'язків). Якщо підставити (11.11) в систему (11.10), скоротити e^{kx} і перенести усі доданки у ліву частину, то одержуємо однорідну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - k)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - k)\gamma_n = 0. \end{cases} \quad (11.12)$$

Ненульовий розв'язок системи (11.12) існує лише тоді, коли її

визначник дорівнює нулю. Позначивши його через $\Delta(k)$, маємо:

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (11.13)$$

Рівняння (11.13) називають *характеристичним рівнянням* системи (11.10), його корені — *характеристичними числами*, а визначник $\Delta(k)$ — *характеристичним визначником*.

Нехай усі характеристичні числа k_1, k_2, \dots, k_n прості. Тоді, як відомо з алгебри,

$$\Delta(k_j) = 0, \quad \Delta'(k_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Покажемо, що ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - k_j & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k_j & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k_j \end{pmatrix},$$

складеної з коефіцієнтів системи, яку одержуємо з (11.12) після заміни у ній k на k_j , дорівнює $n - 1$. Для цього знайдемо $\Delta'(k)$:

$$\begin{aligned} \Delta'(k) &= \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} - k & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} + \dots \\ &\dots + \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -\Delta_{11}(k) - \Delta_{22}(k) - \dots - \Delta_{nn}(k), \end{aligned} \quad (11.14)$$

де $\Delta_{jj}(k)$ — алгебричне доповнення елемента $a_{jj} - k$ визначника $\Delta(k)$. Оскільки $\Delta'(k_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то з (11.14) випливає, що хоча б один з визначників $\Delta_{jj}(k_i)$ (а це визначники $(n-1)$ -го порядку) відмінний від нуля. Отже, ранг матриці A дорівнює $n-1$, а тому одне з рівнянь системи (11.12) є наслідком інших і ця система має ненульовий розв'язок, який визначається з точністю до довільного множника P_i :

$$\gamma_{i1} = P_i m_{i1}, \quad \gamma_{i2} = P_i m_{i2}, \quad \dots, \quad \gamma_{in} = P_i m_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11.15)$$

Якщо у формулах (11.15) зафіксувати множник P_i , то одержимо конкретний розв'язок системи (11.12).

Підставляючи тепер у (11.11) замість k послідовно характеристичні числа k_1, k_2, \dots, k_n , а замість $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — відповідні їм розв'язки системи (11.12), визначені формулами (11.15) при фіксованих множниках P_i , одержуємо n розв'язків системи (11.10):

$$\begin{cases} y_{11} = \gamma_{11} e^{k_1 x}, & y_{12} = \gamma_{12} e^{k_2 x}, & \dots, & y_{1n} = \gamma_{1n} e^{k_n x}, \\ y_{21} = \gamma_{21} e^{k_1 x}, & y_{22} = \gamma_{22} e^{k_2 x}, & \dots, & y_{2n} = \gamma_{2n} e^{k_n x}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} = \gamma_{n1} e^{k_1 x}, & y_{n2} = \gamma_{n2} e^{k_2 x}, & \dots, & y_{nn} = \gamma_{nn} e^{k_n x}. \end{cases} \quad (11.16)$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на $(-\infty, +\infty)$. Якщо при цьому всі числа k_1, k_2, \dots, k_n дійсні, то розв'язки (11.16) також будуть дійсними.

Таким чином, для простих дійсних характеристичних чисел система (11.10) має n дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду (11.16). Тому згідно з теоремою 3 формули

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \gamma_{11} e^{k_1 x} + C_2 \gamma_{21} e^{k_2 x} + \dots + C_n \gamma_{n1} e^{k_n x}, \\ y_2 = C_1 \gamma_{12} e^{k_1 x} + C_2 \gamma_{22} e^{k_2 x} + \dots + C_n \gamma_{n2} e^{k_n x}, \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n = C_1 \gamma_{1n} e^{k_1 x} + C_2 \gamma_{2n} e^{k_2 x} + \dots + C_n \gamma_{nn} e^{k_n x} \end{cases}$$

визначають загальний розв'язок системи (11.10).

Припустимо, що характеристичні числа k_1, k_2, \dots, k_n прості, але серед них є комплексні. Нехай $a + ib$ і $a - ib$ — пара комплексно-спряжених характеристичних чисел. Числу $a + ib$

згідно з (11.11) відповідає розв'язок

$$y_1 = \gamma_1 e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{(a+ib)x}, \quad \dots, \quad y_n = \gamma_n e^{(a+ib)x},$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — комплексні числа. Покладаючи

$$\gamma_1 = \gamma_{11} + i\gamma_{21}, \quad \gamma_2 = \gamma_{12} + i\gamma_{22}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n},$$

одержуємо комплексний розв'язок

$$y_1 = (\gamma_{11} + i\gamma_{21})e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = (\gamma_{12} + i\gamma_{22})e^{(a+ib)x}, \quad \dots, \\ y_n = (\gamma_{1n} + i\gamma_{2n})e^{(a+ib)x}.$$

Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, маємо два дійсні розв'язки:

$$y_{11} = e^{ax}(\gamma_{11} \cos bx - \gamma_{21} \sin bx), \\ y_{12} = e^{ax}(\gamma_{12} \cos bx - \gamma_{22} \sin bx), \quad \dots, \\ y_{1n} = e^{ax}(\gamma_{1n} \cos bx - \gamma_{2n} \sin bx)$$

i

$$y_{21} = e^{ax}(\gamma_{11} \sin bx + \gamma_{21} \cos bx), \\ y_{22} = e^{ax}(\gamma_{12} \sin bx + \gamma_{22} \cos bx), \quad \dots, \\ y_{2n} = e^{ax}(\gamma_{1n} \sin bx + \gamma_{2n} \cos bx).$$

Легко показати, що ці розв'язки лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Очевидно також, що спряжений корінь $a - ib$ не породжує нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Приклад 1. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z, \\ z' = 4y + 5z. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-k & 4 \\ 4 & 5-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 10k + 9 = 0,$$

знаходимо $k_1 = 1$, $k_2 = 9$, отже, характеристичні числа дійсні і прості.

Складемо систему для знаходження чисел γ_1 і γ_2 , які відповідають характеристичному числу k_1 . Матрицю коефіцієнтів цієї системи отримуємо з матриці

$$\begin{pmatrix} 5 - k & 4 \\ 4 & 5 - k \end{pmatrix}$$

заміною k на k_1 . Отже, шукана система має вигляд

$$\begin{cases} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = -\gamma_2.$$

Нехай $\gamma_1 = 1$, тоді $\gamma_2 = -1$. Таким чином, характеристичному числу $k_1 = 1$ відповідає розв'язок $y_1 = e^x$, $z_1 = -e^x$.

Аналогічно, розв'язуючи систему, яка відповідає $k_2 = 9$:

$$\begin{cases} -4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0, \\ 4\gamma_1 - 4\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо, що $\gamma_1 = \gamma_2$. Якщо взяти $\gamma_1 = 1$, то $\gamma_2 = 1$, а тому цьому характеристичному числу відповідає розв'язок $y_2 = e^{9x}$, $z_2 = e^{9x}$.

Загальний розв'язок записуємо згідно з теоремою 3:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \quad z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - k & -1 \\ 1 & 2 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 5 = 0$$

має комплексно-спряжені корені $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Розв'язок, який відповідає k_1 , має вигляд $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, де числа γ_1 , γ_2 знайдемо із системи:

$$\begin{cases} -i\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Покладаючи $\gamma_1 = 1$, знаходимо $\gamma_2 = -i$, а тому шуканим розв'язком є $y = e^{(2+i)x}$, $z = -i e^{(2+i)x}$. Відокремлюючи у цьому розв'язку дійсні та уявні частини, одержуємо два дійсні розв'язки: $y_1 = e^{2x} \cos x$, $z_1 = e^{2x} \sin x$ і $y_2 = e^{2x} \sin x$, $z_2 = -e^{2x} \cos x$. Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, а тому загальним розв'язком є

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \quad z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x). \quad \blacksquare$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то метод, викладений вище, застосовувати не можна. Однак і у цьому випадку вдається побудувати фундаментальну систему розв'язків через елементарні функції. Зауважимо перш за все, що якщо k_1 — просте характеристичне число, то, незалежно від того, чи будуть серед інших характеристичних чисел зустрічатися кратні чи ні, йому завжди відповідає один частинний розв'язок вигляду $y_1 = \gamma_1 e^{k_1 x}$, $y_2 = \gamma_2 e^{k_1 x}$, \dots , $y_n = \gamma_n e^{k_1 x}$, де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — деякі сталі, які визначаються з точністю до сталого множника.

Таким чином, задача зводиться до того, щоб знайти частинні розв'язки, які відповідають кратному кореню. При цьому, так само, як і для лінійного однорідного рівняння n -го порядку, виявляється, що одному характеристичному числу кратності s відповідає s лінійно незалежних частинних розв'язків.

Теорема 4. *Якщо k_1 — характеристичне число кратності s , то йому відповідає розв'язок системи (11.10)*

$$y_1 = P_1(x)e^{k_1 x}, \quad y_2 = P_2(x)e^{k_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = P_n(x)e^{k_1 x}, \quad (11.17)$$

де $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ — багаточлени степеня не вищого, ніж $s - 1$, які мають у сукупності s довільних коефіцієнтів.

Доведення теореми можна знайти, наприклад, в [7, с. 196–207].

З практичної точки зору розв'язок, що відповідає характеристичному числу k_1 , потрібно шукати у вигляді (11.17), вважаючи $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ багаточленами $(s - 1)$ -го степеня з невизначеними коефіцієнтами, і, підставляючи їх в (11.10), виразити всі коефіцієнти через s з них, які залишаються довільними. Покладаючи по черзі один з цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а решта рівними нулю, побудуємо s лінійно незалежних розв'язків, які відповідають характеристичному числу k_1 . Усі ці частинні розв'язки будуть утворені з добутків функції $e^{k_1 x}$ на багаточлени від x , степені яких не перевищують $s - 1$. Якщо багаточлени $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ у формулі (11.17) вироджуються у сталі, то одержимо s лінійно незалежних частинних розв'язків такого ж вигляду, як і для випадку простого характеристичного числа.

Якщо система (11.10) має комплексне характеристичне число $a + bi$ кратності s , то вона має також спряжене характеристичне число $a - bi$ тієї ж кратності. Побудувавши s лінійно незалежних комплексних розв'язків, які відповідають числу $a + bi$ і відокремивши в них дійсні та уявні частини, одержимо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Отже, у загальному випадку кожному простому дійсному характеристичному числу відповідає один частинний розв'язок, кожній парі простих комплексно-спряжених характеристичних чисел відповідає два дійсні лінійно незалежні розв'язки, дійсному характеристичному числу кратності s відповідає s дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків, а для кожної пари комплексно-спряжених характеристичних чисел кратності s маємо $2s$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків. Усього матимемо n дійсних розв'язків, які утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Загальний розв'язок системи (11.10) одержимо згідно з теоремою 3.

Приклад 3. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 6y + z, \\ z' = -16y - 2z. \end{cases} \quad (11.18)$$

Розв'язання. Розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6 - k & 1 \\ -16 & -2 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 4 = 0, \Rightarrow k_1 = k_2 = 2.$$

Згідно з теоремою 4 загальний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = (Ax + B)e^{2x}, \quad z = (Cx + D)e^{2x}. \quad (11.19)$$

Оскільки

$$y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}, \quad z' = (2Cx + 2D + C)e^{2x},$$

то після підстановки (11.19) в (11.18) маємо:

$$\begin{cases} (2Ax + 2B + A)e^{2x} = 6(Ax + B)e^{2x} + (Cx + D)e^{2x}, \\ (2Cx + 2D + C)e^{2x} = -16(Ax + B)e^{2x} - 2(Cx + D)e^{2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4A + C)x - A + 4B + D = 0, \\ (16A + 4C)x + 16B + 4D + C = 0. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x , отримуємо систему

$$\begin{cases} 4A + C = 0, \\ -A + 4B + D = 0, \\ 16A + 4C = 0, \\ 16B + 4D + C = 0. \end{cases}$$

У цій системі є лише два лінійно незалежних рівняння, наприклад, перше і друге. Вважатимемо у них вільними невідомими, приміром, A і B і надамо їм довільних значень: $A = C_1$, $B = C_2$. Тоді $C = -4C_1$, $D = C_1 - 4C_2$, а загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = (C_1x + C_2)e^{2x}, \quad z = (-4C_1x + C_1 - 4C_2)e^{2x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо характеристичні числа системи:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 - 3k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 2, k_{2,3} = -1.$$

Числу $k_1 = 2$ відповідає система двох рівнянь (третє є наслідком двох перших):

$$\begin{cases} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Один з її розв'язків $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 1$. Тому $y_1^{(1)} = e^{2x}$, $y_2^{(1)} = e^{2x}$, $y_3^{(1)} = e^{2x}$ є розв'язком заданої системи.

Характеристичним числом $k_{2,3} = -1$ відповідає одне рівняння (друге і третє збігаються з ним): $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Виберемо два лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, наприклад, $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1$ і $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 1$. Кожному з них відповідає один розв'язок:

$$\begin{aligned} y_1^{(2)} &= e^{-x}, & y_2^{(2)} &= 0, & y_3^{(2)} &= -e^{-x}, \\ y_1^{(3)} &= 0, & y_2^{(3)} &= -e^{-x}, & y_3^{(3)} &= e^{-x}. \end{aligned}$$

Оскільки вронскіан знайдених трьох розв'язків відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & -e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

то вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком є

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, & y_2 &= C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x}, \\ y_3 &= C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Рекомендована література: [7, с. 134–144, 191–209], [9, с. 115–132], [11, с. 185–188, 192–199], [14, с. 91–102, 109–128], [18, с. 341–356], [21, с. 198–205, 210–214, 222–227].

Питання до лекції 11

1. Які сукупності функцій називають лінійно незалежними (лінійно залежними) на деякому інтервалі? Наведіть приклади таких сукупностей функцій.

2. Що таке вронскіан розв'язків лінійної однорідної системи n рівнянь? Як з допомогою вронскіана визначити, чи є задані n сукупностей функцій лінійно незалежними?

3. Як формулюється необхідна умова лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи n диференціальних рівнянь? Сформулюйте необхідну і достатню умову лінійної незалежності n розв'язків лінійної однорідної системи на інтервалі (a, b) .

4. Який вигляд має формула Остроградського–Якобі? Які властивості впливають з цієї формули?

5. Що називають фундаментальною системою розв'язків лінійної однорідної системи на деякому інтервалі? Яка її роль у побудові загального розв'язку лінійної однорідної системи?

6. Який вигляд має лінійна однорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами? Що називають характеристичним визначником, характеристичним рівнянням, характеристичними числами такої системи?

7. У чому полягає метод Ейлера інтегрування лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Як залежить структура фундаментальної системи розв'язків такої системи від вигляду характеристичних чисел?

Вправи до лекції 11

1. Зінтегруйте методом Ейлера системи:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 6y + 7z; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = -5y - 4z, \\ z' = 10y + 7z; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = -2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ y_3' = 4y_1 + 2y_2 + 3y_3; \end{cases} \quad г) \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

2. Знайдіть розв'язки задач Коші (системи зінтегрувати методом Ейлера):

$$а) \begin{cases} y' = 11y - 2z, \\ z' = 18y - z; \\ y(0) = 1, z(0) = 0, \end{cases} \quad б) \begin{cases} y_1' = 2y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = -y_2 - y_3; \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = -1. \end{cases}$$

Лекція 12. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь

План

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи.
2. Метод варіації довільних сталих.
3. Метод невизначених коефіцієнтів.

1. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи. Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (12.1)$$

або, у скороченому записі,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.2)$$

Припустимо, що нам відомий деякий частинний розв'язок цієї системи

$$y_1 = y_1^{(1)}, \quad y_2 = y_2^{(1)}, \quad \dots, \quad y_n = y_n^{(1)}$$

і, отже,

$$\frac{dy_k^{(1)}}{dx} \equiv \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)y_j^{(1)} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.3)$$

Уведемо нові невідомі функції $z_1 = z_1(x)$, $z_2 = z_2(x)$, \dots , $z_n = z_n(x)$ і покладемо

$$y_k = y_k^{(1)} + z_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.4)$$

Підставляючи функції (12.4) в систему (12.1), одержуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{dy_k^{(1)}}{dx} + \frac{dz_k}{dx} = \\ & = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)y_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)z_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Враховуючи (12.3), з (12.5) для знаходження функцій z_1 , z_2 , \dots , z_n отримуємо лінійну однорідну систему

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{j=1}^n p_{kj}(x)z_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.6)$$

Однорідну систему (12.6) називають *відповідною неоднорідній системі* (12.2).

Згідно з теоремою 3 (лекція 11) загальний розв'язок системи (12.6) визначається формулою

$$z_k = \sum_{j=1}^n C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.7)$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, — деяка фундаментальна система розв'язків системи (12.6), C_j , $j = 1, 2, \dots, n$, — довільні сталі.

Підставляючи (12.7) у (12.4), одержуємо, що

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{j=1}^n C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.8)$$

Формула (12.8) визначає загальний розв'язок системи (12.1) в усій області її задання.

Таким чином, для знаходження загального розв'язку неоднорідної системи (12.1) достатньо знайти будь-який її частинний розв'язок і додати до нього загальний розв'язок відповідної однорідної системи (12.6).

2. Метод варіації довільних сталих. Для знаходження частинного розв'язку, а разом з тим і загального розв'язку лінійної неоднорідної системи у випадку, коли вдається зінтегрувати відповідну однорідну систему, часто використовують *метод варіації довільних сталих* (*метод Лагранжа*).

Розв'язок лінійної неоднорідної системи (12.1) шукаємо у вигляді

$$y_k = \sum_{j=1}^n C_j(x) z_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.9)$$

де $z_{jk} = z_{jk}(x)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, — деяка фундаментальна система розв'язків однорідної системи (12.6), а $C_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, — деякі неперервно диференційовні функції.

Виберемо у (12.9) функції $C_j(x)$ так, щоб ця формула визначала розв'язок системи (12.1). Підставляючи (12.9) в (12.1), одержуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^n C_j(x) z'_{jk} = \\ & = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) \sum_{j=1}^n C_j(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{j=1}^n C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^n C_j(x) z'_{jk} = \\ & = \sum_{j=1}^n C_j(x) \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) z_{jl} + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{j=1}^n C_j'(x) z_{jk} + \sum_{j=1}^n C_j(x) \left(z'_{jk} - \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) z_{jl} \right) = \end{aligned}$$

$$= f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.10)$$

Оскільки z_{jk} — фундаментальна система розв'язків однорідної системи (12.6), то вираз у дужках у формулі (12.10) дорівнює нулю, а тому для знаходження функцій $C_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, маємо систему

$$\sum_{j=1}^n C_j'(x) z_{jk} = f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.11)$$

Визначник системи (12.11) відмінний від нуля для всіх $x \in (a, b)$ (ним є вронскіан $W(x)$), а тому вона має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера:

$$C_j'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.12)$$

де $W_{kj}(x)$ — алгебричне доповнення елемента z_{kj} вронскіана $W(x)$. Інтегруючи (12.12), знаходимо:

$$C_j(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_{kj}(x)}{W(x)} f_k(x) dx + C_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де C_j — довільні сталі, а x_0 — довільна точка з інтервалу (a, b) .

Підставляючи знайдені вирази для $C_j(x)$ у формулу (12.9), одержуємо:

$$y_k = \sum_{j=1}^n z_{jk} \sum_{s=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x) dx + \sum_{j=1}^n C_j z_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.13)$$

Підставляючи в (12.13) $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, маємо частинний розв'язок

$$y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^n z_{jk} \sum_{s=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_{sj}(x)}{W(x)} f_s(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

а тому (12.13) можна записати у вигляді (12.8). Отже, розв'язок, який визначається формулою (12.13), є загальним розв'язком лінійної неоднорідної системи (12.1).

Приклад 1. З допомогою методу варіації довільних сталих зінтегрувати систему

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z + 4xe^x. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідну однорідну систему зінтегруємо методом виключення:

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -y + 2z \end{cases} \Rightarrow y = 2z - z',$$

$$2z' - z'' = 2(2z - z') - z \Rightarrow z'' - 4z' + 3z = 0.$$

Оскільки характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, то

$$\begin{aligned} z_0 &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} \Rightarrow y_0 = 2(C_1 e^x + C_2 e^{3x}) - \\ &- (C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}) \Rightarrow y_0 = C_1 e^x - C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

Розв'язок заданої неоднорідної системи шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x - C_2(x)e^{3x}, \quad z = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{3x}, \quad (12.14)$$

де функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ знайдемо із системи вигляду (12.11):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{3x} = 4xe^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = 2x, \quad C_2'(x) = 2xe^{-2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x^2 + C_1, \quad C_2(x) = -xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C_2.$$

Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ у (12.14), одержуємо загальний розв'язок заданої системи:

$$\begin{aligned} y &= (x^2 + C_1)e^x - (-xe^{-2x} - 0,5e^{-2x} + C_2)e^{3x} = \\ &= C_1 e^x - C_2 e^{3x} + (x^2 + x + 0,5)e^x, \\ z &= (x^2 + C_1)e^x + (-xe^{-2x} - 0,5e^{-2x} + C_2)e^{3x} = \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + (x^2 - x - 0,5)e^x. \end{aligned}$$

Після зведення подібних доданків і перепозначення сталої ($C_1 := C_1 + 0,5$) маємо:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x - C_2 e^{3x} + (x^2 + x)e^x, \\ z &= C_1 e^x + C_2 e^{3x} + (x^2 - x - 1)e^x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Метод невизначених коефіцієнтів. У п. 1 цієї лекції встановлено, що інтегрування лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь зводиться до необхідності побудови фундаментальної системи розв'язків відповідної однорідної системи. Тому особливий інтерес становлять такі лінійні неоднорідні системи, в яких фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи виражається через елементарні функції. До таких систем належать, передовсім, системи зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases}$$

або, у скороченому записі,

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{kj}y_j + f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12.15)$$

Якщо функції $f_k(x)$ у системі (12.15) складаються з сум і добутків багаточленів $P_m(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_mx^m$ та функцій $e^{\alpha x}$, $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, то її розв'язок можна шукати **методом невизначених коефіцієнтів**. Це робиться за такими ж правилами, що і для одного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (лекція 9), але з певними змінами. Зокрема, якщо

$$f_k(x) = P_{m_k}(x)e^{\alpha x},$$

де $P_{m_k}(x)$ — багаточлен степеня m_k , то частинний розв'язок системи (12.15) потрібно шукати не у вигляді $x^s Q_m(x)e^{\alpha x}$ (як це було для лінійного рівняння), а як

$$y_i = Q_{m+s}^{(i)}(x)e^{\alpha x}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.16)$$

де $Q_{m+s}^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — багаточлени степеня $m + s$ з невідомими коефіцієнтами, $m = \max_{k=1, \dots, n} m_k$; $s = 0$, якщо α не є характеристичним числом, і s дорівнює кратності цього числа, якщо α є характеристичним числом (якщо точніше, число $m + s$ на m одиниць більше від найвищого зі степенів багаточленів, на які множаться експоненти $e^{\alpha x}$ у загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти багаточленів $Q_{m+s}^{(i)}(x)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставлення (12.16) у систему (12.15).

Аналогічно визначаються степені багаточленів у випадках, коли функції $f_k(x)$ у системі (12.15) містять функції $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$, а число $\alpha + \beta i$ є або не є характеристичним.

Приклад 2. Зінтегрувати систему методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} y' = y - 2z + e^x, \\ z' = y + 4z + e^{2x}. \end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи метод Ейлера (лекція 11), знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - k & -2 \\ 1 & 4 - k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Характеристичному числу $k_1 = 2$ відповідає система

$$\begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки, наприклад, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -1$. Числу $k_2 = 3$ відповідає система

$$\begin{cases} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Отже, загальним розв'язком однорідної системи є:

$$y_0 = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad z_0 = -C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x}.$$

Враховуючи вигляд функцій $f_1(x) = e^x$ і $f_2(x) = e^{2x}$, частинний розв'язок y_1, z_1 неоднорідної системи через невизначені коефіцієнти запишемо у вигляді

$$y_1 = Ae^x + (Bx + C)e^{2x}, \quad z_1 = De^x + (Ex + F)e^{2x}. \quad (12.17)$$

Підставляючи (12.17) у задану систему, одержуємо:

$$\begin{aligned} & Ae^x + 2(Bx + C)e^{2x} + Be^{2x} = \\ & = Ae^x + (Bx + C)e^{2x} - 2De^x - 2(Ex + F)e^{2x} + e^x, \\ & De^x + 2(Ex + F)e^{2x} + Ee^{2x} = \\ & = Ae^x + (Bx + C)e^{2x} + 4De^x + 4(Ex + F)e^{2x} + e^{2x}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля e^x , e^{2x} і xe^{2x} в обох частинах цих тотожностей, одержуємо відповідно:

$$\begin{array}{l|l} e^x & A = A - 2D + 1, \\ e^{2x} & 2C + B = C - 2F, \\ xe^{2x} & 2B = B - 2E, \end{array} \quad \begin{array}{l|l} e^x & D = A + 4D, \\ e^{2x} & 2F + E = C + 4F + 1, \\ xe^{2x} & 2E = B + 4E. \end{array}$$

Звідси

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = 2, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = -1, \quad F = -1,$$

а тому частинним розв'язком неоднорідної системи є

$$y_1 = -\frac{3}{2}e^x + 2xe^{2x}, \quad z_1 = \frac{1}{2}e^x - (x + 1)e^{2x},$$

а загальним розв'язком —

$$y = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{3}{2} e^x + 2x e^{2x},$$

$$z = -C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x - (x+1) e^{2x}. \blacksquare$$

Приклад 3. Записати частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (не шукаючи їх) системи

$$\begin{cases} y' = 4y - z + x e^{3x} + e^{3x} \sin x, \\ z' = y + 2z + x e^{3x} \cos x. \end{cases} \quad (12.18)$$

Розв'язання. Знайдемо характеристичні числа відповідної однорідної системи:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3.$$

У системі (12.18) для функцій $x e^{3x}$, $e^{3x} \sin x$, $x e^{3x} \cos x$ числа $\alpha + \beta i$ відповідно дорівнюють 3 , $3 + i$, $3 + i$. Тому окремо знайдемо частинні розв'язки систем

$$\begin{cases} y' = 4y - z + x e^{3x}, \\ z' = y + 2z \end{cases} \quad (12.19)$$

і

$$\begin{cases} y' = 4y - z + e^{3x} \sin x, \\ z' = y + 2z + x e^{3x} \cos x. \end{cases} \quad (12.20)$$

Для системи (12.19) $\alpha + \beta i = k_1 = k_2 = 3$, $s = 2$, $m = 1$. Згідно з (12.16) її частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{3x},$$

$$z_1 = (fx^3 + gx^2 + hx + p)e^{3x}.$$

Для системи (12.20) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq k_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$, а тому її частинний розв'язок має вигляд

$$y_2 = (Ax + B)e^{3x} \sin x + (Cx + D)e^{3x} \cos x,$$

$$z_2 = (Ex + F)e^{3x} \sin x + (Gx + H)e^{3x} \cos x.$$

Тоді частинний розв'язок системи (12.18) запишеться у вигляді:

$$y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2. \quad \blacksquare$$

Рекомендована література: [7, с. 144–146, 209–214], [8, с. 244–264], [14, с. 103–107, 138–144], [18, с. 370–385], [21, с. 206–210].

Питання до лекції 12

1. Як знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи, якщо відомий її частинний розв'язок і загальний розв'язок відповідної однорідної системи?
2. У чому полягає метод варіації довільних сталих знаходження загального розв'язку лінійної неоднорідної системи?
3. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів інтегрування лінійних неоднорідних систем зі сталими коефіцієнтами? Чи для кожної лінійної системи його можна використати?

Вправи до лекції 12

1. Зінтегруйте системи методом варіації довільних сталих:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 4y - 8z + \operatorname{tg} 4x, \\ z' = 4y - 4z; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z + \sqrt{x}e^x. \end{cases}$$

2. Зінтегруйте системи методом невизначених коефіцієнтів:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = -2y + z + 4x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = 3y + 2z - 3e^x, \\ z' = -3y - 2z - e^x; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y' = 5y - z + 5 \sin x, \\ z' = 4y + z + 2 \cos x. \end{cases}$$

Розділ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лекція 13. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик.
2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння.

1. Зв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик. Багато проблем техніки і математичної фізики (коливання струни і мембрани, теплопередача, дифузія, газова динаміка та ін.) приводять до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ми обмежимося викладом найпростіших відомостей теорії рівнянь з частинними похідними першого порядку, маючи за мету показати зв'язок таких рівнянь із системами звичайних диференціальних рівнянь і навести методи побудови загального розв'язку та розв'язку задачі Коші, які ґрунтуються на цьому зв'язку. Рівняння з частинними похідними вищих порядків інтегруються іншими методами, які у цьому посібнику не розглядаються.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називають таке співвідношення, яке містить невідому функцію від декількох змінних, незалежні змінні та частинні похідні невідомої функції за незалежними змінними. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають *поряд-*

ком рівняння. Наприклад, диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку має такий загальний вигляд:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (13.1)$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — шукана функція, $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ — її частинні похідні, Φ — задана неперервно диференційовна функція в деякій області $G \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, причому в рівнянні (13.1) принаймні одна частинна похідна входить обов'язково.

Багато фізичних явищ описуються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє рівняння Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

де $u = u(t, x)$, а в оптиці вивчається рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = f(x, y, z),$$

де $u = u(x, y, z)$, яке описує поширення світлових променів у неоднорідному середовищі з показником заломлення $f(x, y, z)$.

Розв'язком рівняння (13.1) називають неперервно диференційовну функцію $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка перетворює рівняння (13.1) у тотожність для кожної точки $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$.

Якщо $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — розв'язок рівняння (13.1), то його графік — поверхню $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ у просторі $(n+1)$ -ї змінної x_1, x_2, \dots, x_n, u — називають **інтегральною поверхнею** рівняння (13.1).

Розглянемо декілька простих прикладів відшукування розв'язків рівняння (13.1).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, де $z = z(x, y)$.
Розв'язання. Інтегруючи обидві частини за змінною y , одержуємо $z = \int (x - y) dy = xy - \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — довільна диференційовна функція змінної x . ■

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$.

Розв'язання. Інтегруючи за змінною x , маємо: $\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi(y)$, де $\varphi(y)$ — довільна диференційовна функція. Інтегруючи останню рівність за змінною y , одержуємо, що

$$z = \int (x + \varphi(y)) dy = xy + \varphi_1(y) + \varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(y) = \int \varphi(y) dy$, $\varphi_2(x)$ — довільні диференційовні функції. ■

З наведених прикладів випливає, що розв'язки диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку можуть залежати від однієї довільної функції, а розв'язки рівняння другого порядку — від двох довільних функцій. Нижче буде показано, що розв'язки рівняння (13.1) можуть залежати від однієї неперервно диференційовної функції, кількість аргументів якої $(n - 1)$.

Якщо у рівнянні (13.1) функція Φ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то його називають **лінійним**. Лінійне рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Якщо права частина рівняння (13.2) тотожно дорівнює нулю, а коефіцієнти f_1, f_2, \dots, f_n не залежать від шуканої функції u , то маємо рівняння

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \quad (13.3)$$

яке називають **лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку**. Вважаємо, що коефіцієнти f_1, f_2, \dots, f_n визначені та неперервні разом з частинними похідними за змінними x_1, x_2, \dots, x_n у деякому околі заданої

точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ і у цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль, наприклад, $f_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \neq 0$. Очевидно, що рівняння (13.3) має розв'язок $u = c$, де c — довільна стала.

Одночасно з рівнянням (13.3) розглядатимемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (13.4)$$

яка складається з $(n - 1)$ -го рівняння. Систему (13.4) називають *системою характеристик* (*характеристичною системою*). Систему характеристик можна записати також у вигляді:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1}{f_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{f_2}{f_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}. \quad (13.5)$$

Доведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (13.3) і відповідною системою характеристик (13.4).

Теорема 1. *Кожний інтеграл системи (13.4) є розв'язком рівняння (13.3).*

Доведення. Нехай $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — інтеграл системи (13.4), визначений у деякому околі точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Тоді згідно з означенням інтеграла (лекція 10, п. 1) повний диференціал функції ψ внаслідок системи (13.4) тотожно дорівнює нулю, тобто

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} dx_n \equiv 0,$$

де диференціали $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-1}$ потрібно замінити виразами, які випливають з (13.5):

$$dx_1 = \frac{f_1}{f_n} dx_n, \quad dx_2 = \frac{f_2}{f_n} dx_n, \quad \dots, \quad dx_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n} dx_n.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot \frac{f_1}{f_n} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \cdot \frac{f_2}{f_n} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \right) \cdot dx_n \equiv 0 \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow f_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + f_2 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \dots + f_n \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \equiv 0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що функція $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є розв'язком рівняння (13.3). Теорему доведено.

Теорема 2. *Кожний відмінний від сталої розв'язок рівняння (13.3) є інтегралом системи (13.4).*

Доведення. Нехай $u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — розв'язок рівняння (13.3), причому $u \neq \text{const}$. Тоді

$$f_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + f_n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (13.6)$$

Знайдемо диференціал функції ψ внаслідок системи (13.4):

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{f_1}{f_n} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{f_2}{f_n} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \frac{1}{f_n} \left(f_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) dx_n, \end{aligned}$$

звідки, враховуючи (13.6), маємо, що $d\psi \equiv 0$, тобто ψ є інтегралом системи (13.4). Теорему доведено.

Розглянемо, наприклад, рівняння з частинними похідними $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} - 3z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Їйому відповідає система характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-3z}$, яка має інтеграли $\psi_1 = x^3 z$, $\psi_2 = x/\sqrt{y}$. Отже, функції $u_1 = x^3 z$, $u_2 = x/\sqrt{y}$ є розв'язками наведеного рівняння з частинними похідними.

2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння. Наступна теорема визначає спосіб побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (13.3).

Теорема 3. *Нехай*

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

є незалежними інтегралами системи (13.4). Тоді функція

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (13.7)$$

де Φ — довільна функція, яка має неперервні похідні за змінними $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$, є розв'язком рівняння (13.3).

Доведення. Підставляючи (13.7) у рівняння (13.3) і беручи до уваги, що функції $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ є розв'язками рівняння (13.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} & f_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \\ & = f_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + f_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(f_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + f_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

а це й означає, що функція (13.7) є розв'язком рівняння (13.3). Теорему доведено.

Формулу (13.7) називають **загальним розв'язком** рівняння (13.3). Звертаємо увагу, що загальний розв'язок рівняння з частинними похідними першого порядку містить довільну функцію, а не довільні сталі, як це було для звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ і зінтегруємо її. Будемо мати: $y/x = C_1$, $z/x = C_2$, а тому інтегралами є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$. Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є

$$u = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція від часток y/x і z/x , тобто u є довільною неперервно диференційовною однорідною функцією нульового виміру незалежних змінних x, y, z . Наприклад, розв'язками заданого рівняння є функції

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}, \quad u_3 = \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad u_4 = \sin \frac{z}{x}, \quad u_5 = e^{x/z}.$$

Відповідь: $u = \Phi(y/x, z/x)$.

З теореми 3 випливає, що задача про побудову загального розв'язку рівняння (13.3) рівносильна задачі про відшукування $(n - 1)$ незалежних інтегралів відповідної йому системи характеристик (13.4).

У випадку двох незалежних змінних, позначивши шукану функцію через $z(x, y)$, маємо рівняння

$$f_1(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (13.8)$$

Відповідна система характеристик вироджується в одне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{f_1(x, y)} = \frac{dy}{f_2(x, y)}. \quad (13.9)$$

Якщо $\psi(x, y)$ — інтеграл рівняння (13.9), то $z = \Phi(\psi(x, y))$, де $\Phi(\psi)$ — довільна неперервно диференційовна функція від змінної ψ , буде загальним розв'язком рівняння (13.8).

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Розв'язання. Відповідна система характеристик вироджується у рівняння з відокремленими змінними: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, інтегралом якого є $\psi = x^2 + y^2$. Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$z = \Phi(x^2 + y^2).$$

З геометричної точки зору маємо сім'ю поверхонь обертання з віссю обертання Oz . Таким чином, задане рівняння є диференціальним рівнянням усіх поверхонь обертання з віссю обертання Oz . Інтегральними поверхнями є поверхні обертання $z = \Phi(x^2 + y^2)$. Окремими випадками цих поверхонь є $z = x^2 + y^2$ (параболіод обертання), $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (півсфера), $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (конус), $z = c$ (площина).

Відповідь: $z = \Phi(x^2 + y^2)$.

3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння. *Задача Коші* для рівняння (13.3) полягає у знаходженні розв'язку $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який для фіксованого значення однієї з незалежних змінних, наприклад x_n , перетворюється у задану неперервно диференційовну функцію решти змінних, тобто задовольняє *початкову умову*

$$u|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (13.10)$$

У випадку, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних, тобто для рівняння (13.8), задача Коші полягає у відшуванні такого розв'язку $z = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову

$$z|_{x=x_0} = \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ — задана функція. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь, які визначаються рівнянням (13.8), шукається така поверхня $z = f(x, y)$, яка проходить через задану криву $z = \varphi(y)$, яка лежить у площині $x = x_0$ (ця площина паралельна до площини Oyz).

Згідно з теоремою 3 загальний розв'язок рівняння (13.3) задається формулою (13.7), тобто

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

Підставляючи цю функцію в (13.10), бачимо, що розв'язок задачі Коші (13.3), (13.10) зводиться до визначення вигляду функції Φ , яка задовольняє умову

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Таким чином, одержуємо *правило розв'язування задачі Коші* (13.3), (13.10):

1) складаємо відповідну систему характеристик і знаходимо її $(n-1)$ незалежних інтегралів:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

2) замінюємо у знайдених інтегралах незалежну змінну x_n її початковим значенням $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_2, \\ \dots \dots \dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \quad (13.11)$$

і розв'язуємо систему (13.11) відносно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , тобто знаходимо

$$\begin{aligned} x_1 = \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \quad x_2 = \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \quad \dots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}); \end{aligned}$$

3) будуємо функцію

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})),$$

яка і буде розв'язком задачі Коші.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{x=3} = y + z.$$

Розв'язання. Інтегралами відповідної системи характеристик є $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$ (див. приклад 3). Оскільки

$$\psi_1|_{x=3} = \bar{\psi}_1 = \frac{y}{3}, \quad \psi_2|_{x=3} = \bar{\psi}_2 = \frac{z}{3},$$

то $y = 3\bar{\psi}_1$, $z = 3\bar{\psi}_2$, а тому шуканим розв'язком є

$$u = 3\psi_1 + 3\psi_2 \quad \Rightarrow \quad u = 3\frac{y+z}{x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

яка при $x = 0$ проходить через криву $z = y^2$.

Розв'язання. Оскільки $\psi(x, y) = x^2 + y^2$ (див. приклад 4), то $\bar{\psi} = \psi|_{x=0} = y^2$. Звідси $y = \pm\sqrt{\bar{\psi}}$, а тому шуканою інтегральною поверхнею є

$$z = \psi(x, y) \Rightarrow z = x^2 + y^2.$$

З геометричної точки зору маємо параболоїд обертання. ■

Рекомендована література: [7, с. 377–383], [9, с. 197–209], [14, с. 275–280], [18, с. 458–463], [21, с. 247–281].

Питання до лекції 13

1. Що називають диференціальним рівнянням з частинними похідними? Як визначити порядок такого рівняння?
2. Що називають розв'язком рівняння з частинними похідними? Який геометричний зміст має розв'язок рівняння з двома незалежними змінними?
3. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку? В якому випадку його називають однорідним?
4. Який вигляд має система характеристик для лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Який зв'язок між лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку і відповідною системою характеристик?
5. Як формулюється задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку? Який геометричний зміст вона має у випадку двох незалежних змінних?
6. Як побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як розв'язується задача Коші для цього рівняння?

Вправи до лекції 13

1. Перевірте, чи є вказані функції розв'язками заданих рівнянь з частинними похідними:

- а) $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = \sqrt{x} + \ln y;$
- б) $(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \frac{x^2 - y^2}{z^2} + 3;$
- в) $\left(x + \frac{z^4}{y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = \frac{z^2 + z^3}{y} + 2xz.$

2. Зінтегруйте однорідні рівняння з частинними похідними:

$$\begin{aligned} \text{а) } (x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= 0; & \text{б) } x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \\ \text{в) } (x^2y - x^2y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

3. Розв'яжіть задачі Коші:

$$\text{а) } x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z|_{y=1} = 2x; \quad \text{б) } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{x=1} = yz.$$

Лекція 14. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

План

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку.
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку.
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку.

1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку. Рівняння вигляду

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (14.1)$$

називають *лінійним неоднорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку*. Це рівняння називають ще *квазілінійним*. До цього ж типу будемо відносити також рівняння, в яких $F \equiv 0$, але хоча б один з коефіцієнтів f_j залежить від u . Вважаємо, що f_1, f_2, \dots, f_n, F — неперервно диференційовні функції в деякому околі заданої точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$, і нехай, наприклад, $f_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \neq 0$.

Розв'язок рівняння (14.1) шукаємо у неявному вигляді:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad (14.2)$$

де функція V має неперервні частинні похідні за усіма аргументами принаймні в деякій області зміни x_1, x_2, \dots, x_n, u , причому $V'_u|_{(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)} \neq 0$ (це гарантує те, що в цій області рівняння (14.2) визначає u як неявну функцію від x_1, x_2, \dots, x_n).

Здиференціювавши (14.2) за змінною x_k (вона входить у (14.2) явно і неявно через функцію u), одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k} &= - \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial u} \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Підставляючи вирази для частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ з (14.3) у (14.1), після простих перетворень одержуємо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots \\ \dots + f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \end{aligned} \quad (14.4)$$

відносно невідомої функції V .

Щоб зінтегрувати рівняння (14.4), утворимо відповідну *систему характеристик* (п. 1 лекції 13):

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{F} \quad (14.5)$$

і припустимо, що нам удалося відшукати n незалежних інтегралів цієї системи:

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Згідно з теоремою 3 попередньої лекції загальний розв'язок рівняння (14.4) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} V = \Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)), \end{aligned} \quad (14.6)$$

де Φ — довільна неперервно диференційовна функція своїх аргументів.

Враховуючи (14.2), одержуємо шуканий розв'язок рівняння (14.1) у неявному вигляді

$$\Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (14.7)$$

Співвідношення (14.7), де Φ — довільна неперервно диференційовна функція, називають **загальним розв'язком** рівняння (14.1). Якщо (14.7) вдасться розв'язати відносно u , то одержимо загальний розв'язок у явному вигляді: $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де u — неперервно диференційовна функція.

Систему (14.5) називають **системою характеристик** квазілінійного рівняння (14.1).

Таким чином, для знаходження загального розв'язку рівняння (14.1) потрібно утворити відповідну систему характеристик, знайти n незалежних інтегралів цієї системи і прирівняти до нуля довільну диференційовну функцію цих інтегралів. Отримана при цьому рівність вигляду (14.7) буде загальним розв'язком рівняння (14.1) у неявному вигляді. Розв'язуючи його відносно u (якщо це можливо), можна знайти загальний розв'язок у явному вигляді.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u$.
Розв'язання. Складемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}$$

і знайдемо її інтеграли: $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z/x$, $\psi_3 = u/x$. Отже, загальним розв'язком є

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0. \quad (14.8)$$

Якщо (14.8) можна розв'язати відносно u/x , то

$$\frac{u}{x} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u = x \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

де f — довільна функція, і, отже, розв'язком заданого рівняння є довільна однорідна неперервно диференційовна функція виміру 1. Такими функціями, наприклад, є

$$u_1 = x, \quad u_2 = x \cdot \frac{y}{x} = y, \quad u_3 = x \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} \right) = y + z, \\ u_4 = x \left(\frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{z^2}{x^2} \right) = \frac{y^2}{x} - 2 \frac{z^2}{x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$.

Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}.$$

З рівняння $\frac{dx}{e^x} = \frac{dy}{y^2}$ (це рівняння з відокремленими змінними) знаходимо перший інтеграл $y^{-1} - e^{-x} = C_1$, а з рівняння $\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{ye^x}$, враховуючи, що $e^x = \frac{y}{1-yC_1}$, маємо ще один перший інтеграл $z - \frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}} = C_2$. Таким чином, загальним інтегралом заданого рівняння є $\Phi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}, z - \frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}}\right) = 0$, а загальним розв'язком —

$$z = \frac{\ln|y|-x}{e^{-x}-y^{-1}} + \varphi\left(\frac{1}{y} - e^{-x}\right). \quad \blacksquare$$

2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку. *Задача Коші* для квазілінійного рівняння (14.1), так само, як і для лінійного однорідного рівняння, полягає у знаходженні такого розв'язку $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ цього рівняння, який задовольняє **початкову умову**

$$u|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (14.9)$$

де φ — задана неперервно диференційовна функція.

Покажемо, як знайти розв'язок задачі Коші для рівняння (14.1), знаючи його загальний розв'язок (14.7). Як і для однорідного рівняння, знаходження розв'язку зводиться до визначення

вигляду функції Φ . Якщо записати початкову умову (14.9) у вигляді

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$$

і порівняти її з (14.7), то бачимо, що функцію Φ потрібно вибрати так, щоб

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}) &= u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) - \\ &- \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{aligned} \quad (14.10)$$

де через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n$ позначено функції, які отримуються з інтегралів системи (14.5) заміною x_n початковим значенням x_{n0} , тобто

$$\bar{\psi}_j = \psi_j(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14.11)$$

Розв'язуючи систему (14.11) відносно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$, одержуємо:

$$\begin{aligned} x_j &= \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \\ u &= \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n). \end{aligned}$$

Якщо тепер в якості функції Φ взяти функцію

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) &= \omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \\ &- \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)), \end{aligned}$$

то умова (14.10), очевидно, справджується. Отже, формула

$$\begin{aligned} &\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \\ &- \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = 0 \end{aligned} \quad (14.12)$$

визначає розв'язок задачі Коші (14.1), (14.9) у неявному вигляді. Розв'язуючи (14.12) відносно u (якщо це можливо), одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді, тобто у вигляді

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким чином, приходимо до такого **правила розв'язування задачі Коші** для квазілінійного рівняння (14.1):

1) утворюємо відповідну систему характеристик і знаходимо n її незалежних інтегралів:

$$\psi_j(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, u), \quad j = 1, \dots, n; \quad (14.13)$$

2) замінюємо в інтегралах (14.13) незалежну змінну x_n її заданим значенням $x_n = x_{n0}$:

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \bar{\psi}_{n-1} \end{cases} \quad (14.14)$$

і розв'язуємо систему (14.14) відносно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$:

$$\begin{aligned} x_j &= \omega_j(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \quad j = 1, \dots, n; \\ u &= \omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n); \end{aligned}$$

3) утворюємо співвідношення

$$\begin{aligned} &\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) - \\ &- \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = 0, \end{aligned} \quad (14.15)$$

яке й визначатиме шуканий розв'язок задачі Коші (14.1), (14.9) у неявному вигляді. Розв'язуючи (14.15) відносно u (якщо це можливо), одержимо розв'язок задачі Коші у явному вигляді.

Приклад 3. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,$$

яка проходить через лінію $y = 1, z = x^2$.

Розв'язання. Запишемо відповідну систему характеристик:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Першими інтегралами цієї системи, як легко перевірити, є

$$yx^2 = C_1 \quad \text{і} \quad x^2/2 - y^2/4 - z = C_2.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння можна записати у вигляді $\Phi(yx^2, x^2/2 - y^2/4 - z) = 0$, а загальним розв'язком є

$$z = x^2/2 - y^2/4 + \varphi(yx^2). \quad (14.16)$$

Функція φ згідно з початковою умовою задовольняє рівняння

$$x^2 = x^2/2 - 1/4 + \varphi(x^2) \quad \text{при} \quad \varphi(t) = t/2 + 1/4.$$

Отже, $\varphi(yx^2) = yx^2/2 + 1/4$, а з (14.16) знаходимо шуканий розв'язок:

$$z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{yx^2}{2} + \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку. Розглянемо нелінійне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними (значна частина результатів може бути поширена на випадок більшої кількості змінних). У загальному випадку таке рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (14.17)$$

де $z = z(x, y)$ — шукана функція, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, F — задана неперервно диференційовна функція своїх аргументів у деякому околі початкової точки $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, яка залежить від p і q нелінійно.

Виявляється, що задача інтегрування одного рівняння вигляду (14.17) є складнішою, ніж інтегрування системи двох сумісних рівнянь вигляду (14.17).

Розглянемо систему

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ G(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

і припустимо, що у деякій області зміни x, y, z, p, q цю систему можна розв'язати відносно p і q , тобто

$$p = A(x, y, z), \quad q = B(x, y, z), \quad (14.18)$$

де функції A і B — неперервно диференційовні в деякому околі початкової точки (x_0, y_0, z_0) .

Знайдемо необхідну умову сумісності системи (14.18). Припустимо, що розв'язок $z = z(x, y)$ системи (14.18) має неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ у деякому околі точки (x_0, y_0) .

Диференціюючи рівняння системи (14.18) за змінними y і x відповідно, одержуємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot B, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} \cdot A.\end{aligned}$$

Прирівнюючи обидва вирази для другої мішаної похідної (результат не залежить від порядку диференціювання), одержуємо шукану **необхідну умову сумісності системи** (14.18):

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \quad (14.19)$$

Рівність (14.19) перетвориться у тотожність, якщо замість z підставити розв'язок $z(x, y)$ системи (14.18). Якщо умова (14.19) не виконується тотожно, то (14.19) — рівняння з трьома змінними x, y, z , яке визначає z як функцію від x і y , $z = z(x, y)$, і попередні міркування показують, що розв'язок системи (14.18), якщо він існує, не може бути іншим, ніж цією функцією. Чи є функція $z = z(x, y)$ розв'язком системи (14.18), легко перевірити з допомогою підстановки.

З'ясуємо, за яких умов система (14.18) має безліч розв'язків, тобто через кожну точку (x_0, y_0, z_0) деякої області простору проходить інтегральна поверхня, яка відповідає певному розв'язку. У цьому випадку умова (14.19) повинна виконуватись у кожній точці згаданої області, тобто тотожно для (x, y, z) .

Отже, тотожне виконання умови (14.19) необхідне для того, щоб система (14.18) мала безліч розв'язків, які залежать найменш від однієї довільної сталої. Можна показати, що тотожне виконання умови (14.19) є також достатнім для сумісності системи (14.18), тобто за виконання цієї умови знаходження спільних

розв'язків системи (14.18) зводиться до інтегрування двох звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад 4. Зінтегрувати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz.$$

Розв'язання. Складемо вираз для лівої частини рівності (14.19):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A \frac{\partial B}{\partial z} = \\ & = z + (z^2 + 2xz)(1 + y) - 2z - (z + yz)(2z + 2x) = -z(1 + z + yz). \end{aligned}$$

Знайдений вираз не дорівнює тотожно нулю. Прирівнюючи його до нуля, одержуємо, що $z = 0$ і $z = -\frac{1}{1+y}$. З допомогою підстановки переконуємось, що тільки функція $z = 0$ є розв'язком заданої системи.

Відповідь: $z = 0$.

Приклад 5. Зінтегрувати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{2z}{y} - y^2.$$

Розв'язання. Умова сумісності (14.19) виконується тотожно:

$$\frac{\partial A}{\partial y} + B \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} - A \frac{\partial B}{\partial z} = 2y - \frac{2}{y} \cdot y^2 \equiv 0.$$

Інтегруючи перше рівняння системи за змінною x , знаходимо:

$$z = \int y^2 dx = xy^2 + u(y), \quad (14.20)$$

де $u(y)$ — довільна диференційовна функція змінної y .

Підставляючи у друге рівняння системи, одержуємо:

$$2xy + u'(y) = \frac{1}{y^2} + 2xy + \frac{2u}{y} - y^2 \Rightarrow u'(y) - \frac{2u}{y} = \frac{1}{y^2} - y^2.$$

А це є лінійним рівнянням першого порядку відносно невідомої функції u . Його загальним розв'язком є

$$u = -\frac{1}{3y} - y^3 + Cy^2,$$

де C — довільна стала. Підставляючи цей вираз для u у (14.20), одержуємо загальний розв'язок системи:

$$z = xy^2 - y^3 - \frac{1}{3y} + Cy^2. \blacksquare$$

Рекомендована література: [7, с. 383–456], [9, с. 209–219], [11, с. 243–278], [14, с. 280–305], [18, с. 463–470], [21, с. 282–300].

Питання до лекції 14

1. Яке рівняння з частинними похідними першого порядку називають квазілінійним?
2. Який вигляд має система характеристик для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?
3. Як побудувати загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?
4. Як формулюється задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку? Як знайти розв'язок задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку?
5. Який загальний вигляд має система нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними? Як інтегруються така система?

Вправи до лекції 14

1. Зінтегруйте квазілінійні рівняння:

$$\text{а) } xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \text{б) } xz^3 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^3 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2.$$

2. Знайдіть інтегральні поверхні рівнянь, які проходять через задані лінії:

$$\begin{aligned} \text{а) } & y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad x = 0, \quad z = y^2; \\ \text{б) } & x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Розділ 5

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 15. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування

План

1. Основні означення й поняття.
2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь.
3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
4. Принцип стискаючих відображень.

1. Основні означення й поняття. *Інтегральним рівнянням* називають рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наведемо приклади інтегральних рівнянь:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (15.1)$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (15.2)$$

де $K(x, s)$ і $f(x)$ — задані функції, а $y(x)$ — шукана функція (вони можуть бути дійсними або комплекснозначними), λ — деяке число (дійсне або комплексне).

Функцію $K(x, s)$ називають **ядром** інтегрального рівняння, $f(x)$ — **вільним членом**. У рівняннях (15.1), (15.2) вільний член $f(x)$ визначений на відрізку $x \in [a, b]$. У рівнянні (15.1) ядро $K(x, s)$ визначене у квадраті

$$Q = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\},$$

а у рівнянні (15.2) — у трикутнику (рис. 15.1)

$$G = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}.$$

Надалі, якщо не сказано про інше, вважатимемо, що ядро $K(x, s)$ і вільний член $f(x)$ є неперервними функціями у своїх областях визначення.

Рівняння (15.1), (15.2) є *лінійними* інтегральними рівняннями, бо шукана функція входить у ці рівняння лінійно. Зустрічаються також і нелінійні інтегральні рівняння. Таким, наприклад, є рівняння

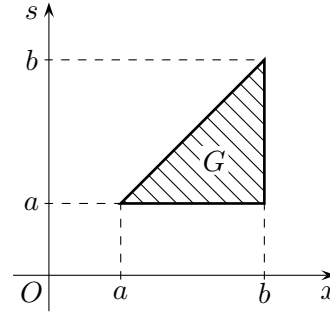


Рис. 15.1

$$y(x) = \int_0^1 e^x y^2(s) ds + 2, \quad x \in [0, 1].$$

Надалі розглядатимемо тільки лінійні інтегральні рівняння.

Якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, то відповідне рівняння називають *інтегральним рівнянням першого роду*. Такими рівняннями, наприклад, є

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (15.3)$$

$$\int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x). \quad (15.4)$$

Рівняння (15.1) і (15.2), в яких шукана функція міститься також поза знаком інтеграла, називають *інтегральними рівняннями другого роду*.

Якщо межі інтегрування фіксовані, то відповідне інтегральне рівняння називають *рівнянням Фредгольма*, а якщо одна з меж інтегрування є змінною, — то *рівнянням Вольтерри*. Отже, (15.1), (15.3) — рівняння Фредгольма, а (15.2), (15.4) — рівняння Вольтерри.

Рівняння Вольтерри можна розглядати як окремий випадок рівняння Фредгольма, вважаючи в (15.2) або (15.4), що

$K(x, s) \equiv 0$ для $s > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерри і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь суттєво різні, тому рівняння Вольтерри розглядати-мемо окремо.

Рівняння (15.1)–(15.4) називають *однорідними*, якщо $f(x) \equiv 0$, у іншому випадку — *неоднорідними*.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію $y(x)$, яка перетворює його у тотожність для $x \in [a, b]$. Наприклад, функція $y(x) = \frac{1}{\pi}x^{-1/2}$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}} ds = 1,$$

а функція $y(x) = e^{-x} - 2x$ — розв'язком рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = e^{-x} + 2 \int_0^1 xe^s y(s) ds,$$

у чому можна переконатися перевіркою (пропонуємо читачам показати це самостійно, виконуючи вправу 1 після цієї лекції).

2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні різноманітних фізичних процесів і явищ. Переважно основою для складання інтегральних рівнянь є відповідні фізичні закони. Так, наприклад, відомі закони збереження маси, імпульсу та енергії мають інтегральне формулювання і приводять до інтегральних рівнянь як моделей конкретних процесів чи явищ. Інтегральні рівняння виникають у багатьох областях науки і техніки, а також у численних застосуваннях, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії масо- і теплоперенесення, біомеханіці, геофізиці, астрономії тощо. Розглянемо деякі приклади.

Задача 1 (задача Абеля). У вертикальній площині (τ, s) знайти криву, вздовж якої матеріальна точка, почавши рух без

початкової швидкості у точці з ординатою x , під дією сили тяжіння досягає осі $O\tau$ за час $T = f(x)$, де $f(x)$ — задана функція. Тертям знехтувати.

Розв'язання. Нехай $\alpha = \alpha(s)$ — кут, який утворює дотична до шуканої кривої з віссю $O\tau$ (рис. 15.2).

Приріст кінетичної енергії точки при її переміщенні з M до N дорівнює роботі сили тяжіння, тобто

$$\frac{mv^2}{2} = mg(x - s),$$

де m — маса точки, g — прискорення земного тяжіння. Звідси одержуємо формулу для швидкості рухомої точки:

$$v = \sqrt{2g(x - s)}.$$

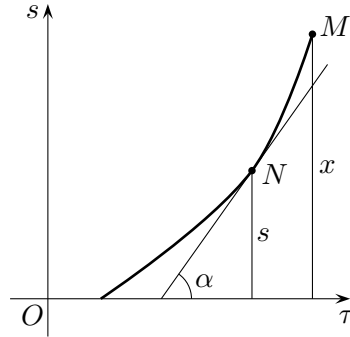


Рис. 15.2

Знаходимо складову вектора швидкості вздовж осі Os :

$$\frac{ds}{dt} = -v \sin \alpha = -\sqrt{2g(x - s)} \sin \alpha,$$

де t — поточне значення часу падіння, а знак «мінус» указує на те, що напрям швидкості протилежний до напрямку осі Os .

З попередньої рівності випливає, що

$$dt = -\frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{2g}\sqrt{x - s}}, \quad (15.5)$$

де позначено $\varphi(s) = \frac{1}{\sin \alpha(s)}$.

Зінтегрувавши рівність (15.5) у межах від 0 до x , одержуємо час T , потрібний матеріальній точці для переміщення з висоти $s = x$ до положення $s = 0$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{x - s}}.$$

Оскільки $T = f(x)$, то для знаходження функції $\varphi(s)$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри першого роду:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{x-s}} = f(x). \quad (15.6)$$

Інтегральне рівняння (15.6) називають **рівнянням Абеля**.

Якщо, розв'язавши рівняння (15.6), знайдемо функцію $\varphi(s)$, то можемо скласти рівняння шуканої кривої:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow s = \Phi(\alpha).$$

Далі маємо:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} = \operatorname{tg} \alpha &\Rightarrow d\tau = \frac{ds}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\Phi'(\alpha) d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau = \int \frac{\Phi'(\alpha) d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} &\equiv \Phi_1(\alpha). \end{aligned}$$

Таким чином, шукана крива визначається у параметричній формі:

$$\tau = \Phi_1(\alpha), \quad s = \Phi(\alpha). \quad \blacksquare$$

Задача 2. Знайти потенціальну енергію поля, в якому частинка здійснює коливання, якщо відома залежність періоду коливання частинки від її енергії.

Розв'язання. Припустимо, що потенціальна енергія поля задається функцією $u(x)$, яка є парною і монотонно зростаючою для $x > 0$. Згідно з законом збереження енергії

$$\frac{mv^2}{2} + u(x) = E \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + u(x) = E,$$

де E — енергія частинки, m — її маса. Відокремлюючи змінні, одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - u(x))} &\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}} + C, \end{aligned}$$

де C — довільна стала.

Нехай $u(0) = 0$ і $x_0(E)$ — корінь рівняння $u(x) = E$. Тоді для періоду коливань $T(E)$ маємо формулу

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \cdot \int_0^{x_0(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - u(x)}}.$$

Перейшовши під інтегралом до змінної du , одержуємо

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \cdot \int_0^E \frac{\Phi(u) du}{\sqrt{E - u}}, \quad (15.7)$$

де $\Phi(u) = \frac{dx(u)}{du}$. Якщо функція $u(x)$ невідома, але відома залежність $T(E)$ для деякого інтервалу значень E , то задача знаходження функції $u(x)$ зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (15.7) відносно функції $\Phi(u)$.

Знайшовши з (15.7) $\Phi(u)$, шукану залежність для $u(x)$ можна одержати з того, що

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{dx}{du} \right)^{-1} = \frac{1}{\Phi(u)}, \quad u(0) = 0. \blacksquare$$

3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Інтегральні рівняння Вольтерри другого роду часто використовуються для опису динаміки різноманітних процесів у системах. Прикладами динамічних систем є механізми, електричні кола, системи регулювання. До аналізу динамічних систем зводяться багато задач дослідження процесів хімії, біології, біофізики, екології, економіки тощо. Зокрема, кожену задачу Коші для лінійного диференціального рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$$

можна звести до розв'язування деякого лінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду. Покажемо це на прикладі.

Приклад 1. Скласти інтегральне рівняння, яке відповідає задачі Коші

$$y'' + 2y' + y = x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (15.8)$$

Розв'язання. Позначимо $y'' = u$. Інтегруючи це співвідношення та враховуючи початкові умови, послідовно знаходимо:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(s) ds = \int_0^x u(s) ds,$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x dp \int_0^p u(s) ds = 1 + \int_0^x (x-s)u(s) ds. \quad (15.9)$$

Підставляючи знайдені вирази для $y(x)$, $y'(x)$ у задане рівняння, одержуємо

$$u(x) + 2 \int_0^x u(s) ds + \left(1 + \int_0^x (x-s)u(s) ds \right) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2+x-s)u(s) ds. \quad (15.10)$$

Таким чином, якщо $y(x)$ — розв'язок заданої задачі Коші, то функція $u(x) = y''$ задовольняє інтегральне рівняння (15.10). І навпаки, якщо $u(x)$ — розв'язок рівняння (15.10), то функція $y(x)$, визначена формулою (15.9), є розв'язком задачі Коші (15.8). Отже, задача (15.8) рівносильна інтегральному рівнянню (15.10). ■

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

у загальному випадку рівносильна нелінійному інтегральному рівнянню Вольтерри

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(s)) ds.$$

Аналогічно, задачу Коші для довільного диференціального рівняння n -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

можна звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри.

Приклад 2. Скласти систему інтегральних рівнянь, рівносильну задачі Коші

$$y'' = -y'^2 + 2y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Позначимо $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Тоді задана задача Коші зводиться до задачі Коші для нормальної системи:

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = 2y_1 - y_2^2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

У свою чергу, отримана система диференціальних рівнянь з урахуванням початкових умов рівносильна системі інтегральних рівнянь

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(s) ds, \quad y_2(x) = \int_0^x (2y_1(s) - y_2^2(s)) ds. \quad \blacksquare$$

У багатьох випадках розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду або системи таких рівнянь може бути зведене до розв'язування деякої задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Наведемо два способи, з допомогою яких це можна зробити.

Спосіб 1. Розглянемо рівняння Вольтерри другого роду (15.2) і припустимо, що його ядро $K(x, s)$ і вільний член $f(x)$ мають неперервні похідні $\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}$ і $f'(x)$ (за цих умов інтегральне рівняння можна здиференціювати один або декілька разів за змінною x).

Приклад 3. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-s)y(s) ds, \quad (15.11)$$

звівши його до задачі Коші для диференціального рівняння.

Розв'язання. Послідовно диференціюючи (15.11), одержуємо:

$$y'(x) = -\sin x - \int_0^x \sin(x-s)y(s) ds, \quad (15.12)$$

$$y''(x) = -\cos x - \int_0^x \cos(x-s)y(s) ds. \quad (15.13)$$

Виразивши інтеграл з рівняння (15.11):

$$\int_0^x \cos(x-s)y(s) ds = y(x) - \cos x$$

і підставивши його в (15.13), одержуємо:

$$y''(x) = -\cos x - (y(x) - \cos x) \Rightarrow y'' + y = 0.$$

Загальним розв'язком одержаного рівняння зі сталими коефіцієнтами є

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (15.14)$$

З (15.11), (15.12) знаходимо початкові умови:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

з допомогою яких з формули (15.14) легко виділяємо шуканий розв'язок $y = \cos x$. ■

Очевидно, що цей спосіб завжди приводить до мети у тому випадку, коли ядро $K(x, s)$ є багаточленом за степенями $x - s$, наприклад, коли $K(x, s) = x - s$, $K(x, s) = (x - s)^2$, $K(x, s) = (x - s)^3 + 2(x - s)$ тощо.

Спосіб 2. Нехай ядро рівняння Вольтерри другого роду (15.2) є *виродженим*, тобто має вигляд

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^n p_j(x)q_j(s).$$

Отже, маємо інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_a^x \left(\sum_{j=1}^n p_j(x)q_j(s) \right) y(s) ds + f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (15.15)$$

Запишемо рівняння (15.15) інакше:

$$y(x) = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n p_j(x) \int_a^x q_j(s) y(s) ds + f(x) \quad (15.16)$$

і позначимо

$$u_1(x) = \int_a^x q_1(s) y(s) ds, \quad \dots, \quad u_n(x) = \int_a^x q_n(s) y(s) ds. \quad (15.17)$$

З допомогою функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, \dots , $u_n(x)$ з (15.17) рівняння (15.16) можна записати у вигляді

$$y(x) = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n p_j(x) u_j(x) + f(x). \quad (15.18)$$

Диференціюючи співвідношення (15.17) і підставляючи замість $y(x)$ вираз (15.18), для невідомих функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, \dots , $u_n(x)$

одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} u'_1 = \lambda q_1(x) \sum_{j=1}^n p_j(x) u_j(x) + q_1(x) f(x), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ u'_n = \lambda q_n(x) \sum_{j=1}^n p_j(x) u_j(x) + q_n(x) f(x). \end{cases}$$

Підставляючи в (15.17) $x = a$, знаходимо початкові умови:

$$u_1(a) = \dots = u_n(a) = 0.$$

Визначивши з останньої системи функції $u_1(x)$, $u_2(x)$, \dots , $u_n(x)$ і підставивши їх у (15.18), одержимо розв'язок $y(x)$ інтегрального рівняння (15.15).

Приклад 4. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = 2 + 3 \int_0^x \frac{e^s + e^{-s}}{e^x + e^{-x}} y(s) ds,$$

звівши його до задачі Коші для диференціального рівняння.

Розв'язання. Позначивши

$$u(x) = \int_0^x (e^s + e^{-s}) y(s) ds, \quad (15.19)$$

задане рівняння запишемо у вигляді

$$y(x) = 2 + \frac{3u(x)}{e^x + e^{-x}}. \quad (15.20)$$

З (15.19) і (15.20) випливає, що диференціальне рівняння для знаходження $u(x)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (e^x + e^{-x}) y(x) = (e^x + e^{-x}) \left(2 + \frac{3u(x)}{e^x + e^{-x}} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u' - 3u = 2(e^x + e^{-x}), \end{aligned}$$

тобто є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку (лекція 4). Використовуючи формулу загального розв'язку (4.5), одержуємо, що

$$\begin{aligned} u &= e^{\int 3dx} \left(\int 2(e^x + e^{-x})e^{-\int 3dx} dx + C \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u &= e^{3x} \left(2 \int (e^{-2x} + e^{-4x}) dx + C \right) \Rightarrow u = Ce^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки з (15.19) випливає, що $u(0) = 0$, то $C = \frac{3}{2}$,

$$u = \frac{3}{2}e^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2},$$

а, отже, використовуючи (15.20), одержуємо шуканий розв'язок:

$$\begin{aligned} y(x) &= 2 + \frac{3}{e^x + e^{-x}} \left(\frac{3}{2}e^{3x} - e^x - \frac{e^{-x}}{2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y(x) &= 2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3e^{3x} - 2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{9e^{3x} - 2e^x + e^{-x}}{2(e^x + e^{-x})}. \blacksquare \end{aligned}$$

4. Принцип стискаючих відображень. *Метричним простором* називають множину $W = \{x\}$ елементів x довільної природи, якщо для будь-якої пари елементів $x, y \in W$ за певним правилом уведено *метрику (відстань)*, тобто числову функцію $\rho(x, y)$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми):

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (для будь-яких $x, y, z \in W$).

Елементи метричного простору називатимемо також *точками* цього простору.

Наведемо два важливі приклади метричних просторів.

1. Множина дійсних n -вимірних векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з метрикою

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$$

є метричним простором. Його називають **n -вимірним евклідовим простором** і позначають \mathbf{R}^n .

2. Множина дійсних неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y(t)$ з метрикою

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$$

також є метричним простором. Цей простір позначають $C[a, b]$.

Для обох просторів властивості з означення метрики легко перевіряються.

Послідовність x_1, x_2, x_3, \dots елементів метричного простору W називають **фундаментальною**, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_{n+p}) = 0$ для довільного цілого p .

Метричний простір W називають **повним**, якщо у ньому будь-яка фундаментальна послідовність x_1, x_2, x_3, \dots збігається до деякого елемента цього ж простору. Можна довести, що простори \mathbf{R}^n ($n \geq 1$) і $C[a, b]$ є повними [12, с. 59].

Нехай у повному метричному просторі W заданий **оператор** (відображення, функція) A , який кожному елементу простору W ставить у відповідність елемент цього ж простору:

$$y = Ax, \quad x, y \in W.$$

Тоді кажуть, що оператор A відображає простір W у себе.

Оператор A називають **стискаючим**, якщо існує таке число α , $0 \leq \alpha < 1$, що для будь-яких елементів $x_1, x_2 \in W$

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha \rho(x_1, x_2). \quad (15.21)$$

Число α з цього означення називають **коефіцієнтом стиснення**.

Елемент $\varphi \in W$ називають *нерухомою точкою* оператора A , якщо $A\varphi = \varphi$. Інакше кажучи, нерухомі точки — це розв'язки рівняння $Ax = x$.

Відзначимо, що багато питань, пов'язаних з існуванням та єдиністю розв'язків рівнянь різних типів, можна звести до питання про існування нерухомої точки деякого відображення A метричного простору у себе. Однією з найважливіших умов існування нерухомої точки є *принцип стискаючих відображень*, уперше сформульований С. Банахом. Цей принцип є теоретичною основою *методу послідовних наближень (методу ітерацій)*, який широко використовується для наближеного розв'язування диференціальних, інтегральних та алгебричних рівнянь.

Теорема 1 (принцип стискаючих відображень). *Якщо стискаючий оператор A відображує повний метричний простір W у себе, то існує єдина нерухома точка φ цього оператора, яку знаходять за формулою*

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots),$$

причому елемент x_0 у просторі W вибирають довільно.

Доведення. Візьмемо довільний елемент $x_0 \in W$ і побудуємо послідовність елементів

$$\left. \begin{aligned} x_0, \quad x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, \quad \dots, \\ x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

Покажемо, що послідовність x_1, x_2, x_3, \dots фундаментальна. Для цього, використовуючи (15.21), оцінимо спочатку відстані між сусідніми елементами простору W :

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_2, x_1) &= \rho(Ax_1, Ax_0) \leq \alpha \rho(x_1, x_0), \\ \rho(x_3, x_2) &= \rho(Ax_2, Ax_1) \leq \alpha \rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2 \rho(x_1, x_0), \quad \dots, \\ \rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq \\ &\leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0), \quad \dots \end{aligned} \right\} \quad (15.23)$$

Використовуючи оцінки (15.23), а також $(p - 1)$ разів властивість 3 з означення метрики, одержуємо

$$\begin{aligned} & \rho(x_n, x_{n+p}) \leq \\ & \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ & \leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{n+p-1}) \rho(x_1, x_0) = \\ & = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0) \end{aligned}$$

для достатньо великого n . Отже,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_1, x_0). \quad (15.24)$$

Оскільки $0 \leq \alpha < 1$, то з (15.24) випливає, що для досить великих n величина $\rho(x_n, x_{n+p})$ є як завгодно малою, тобто $\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon$ і, отже, x_1, x_2, x_3, \dots — фундаментальна послідовність. Оскільки W — повний простір, то ця послідовність має границю, яку позначимо $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Із співвідношень

$$\begin{aligned} \rho(A\varphi, \varphi) & \leq \rho(A\varphi, x_n) + \rho(x_n, \varphi) = \rho(A\varphi, Ax_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \leq \\ & \leq \alpha \rho(\varphi, x_{n-1}) + \rho(x_n, \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

випливає, що $\rho(A\varphi, \varphi) = 0$ і, отже, $A\varphi = \varphi$, тобто φ є нерухомою точкою відображення A .

Для доведення єдиності нерухомої точки припустимо, що існує ще одна нерухома точка ψ відображення A , тобто $A\psi = \psi$. Тоді

$$\begin{aligned} \rho(\varphi, \psi) & = \rho(A\varphi, A\psi) \leq \alpha \rho(\varphi, \psi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(\varphi, \psi)(1 - \alpha) & \leq 0 \Rightarrow \rho(\varphi, \psi) = 0. \end{aligned}$$

З рівності $\rho(\varphi, \psi) = 0$ згідно з першою властивістю метрики випливає, що $\psi = \varphi$, тобто φ — єдина нерухома точка відображення A . Теорему доведено.

Елементи x_0, x_1, x_2, \dots у формулі (15.22) називають **послідовними наближеннями** нерухомої точки φ .

Наголошуємо, що вибір початкового наближення $x_0 \in W$ є довільним і впливає лише на швидкість збіжності послідовності x_1, x_2, x_3, \dots до своєї границі φ .

Рекомендована література: [8, с. 82–84], [12, с. 9–26], [13, с. 13–19, 35–38, 110–113], [14, с. 306–314], [15, с. 98–108], [18, с. 481–482].

Питання до лекції 15

1. Яке рівняння називають інтегральним? Що називають ядром інтегрального рівняння, вільним членом? Наведіть приклади інтегральних рівнянь. Що називають розв'язком інтегрального рівняння?

2. Яке інтегральне рівняння називають лінійним? Наведіть приклади лінійних та нелінійних інтегральних рівнянь. Коли інтегральне рівняння буде першого (другого) роду?

3. Яке рівняння називають рівнянням Фредгольма, рівнянням Вольтерри?

4. Яке інтегральне рівняння називають однорідним (неоднорідним)?

5. Якому інтегральному рівнянню рівносильна задача Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?

6. Що називають метричним простором? Які властивості задовольняє метрика такого простору? Наведіть приклади метричних просторів.

7. Яку послідовність елементів метричного простору називають фундаментальною? Який метричний простір називають повним?

8. Що таке оператор, заданий у повному метричному просторі? Коли оператор відображає метричний простір у себе? Який оператор називають стискаючим? Що називають нерухомою точкою оператора?

9. Як формулюється принцип стискаючих відображень? Яке його практичне значення? Чому?

Вправи до лекції 15

1. Доведіть, що задані функції є розв'язками інтегральних рівнянь:

$$\text{а) } y(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}, \quad \int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}} ds = 1;$$

$$\text{б) } y(x) = e^{-x} - 2x, \quad y(x) = e^{-x} + 2 \int_0^1 x e^s y(s) ds.$$

2. Складіть інтегральні рівняння, які відповідають задачам Коші:

$$\text{а) } y' + 2xy = e^x, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } y'' - \sin x \cdot y' + e^x y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$$

$$\text{в) } y' = x \sin y + 2, \quad y(\pi) = \pi.$$

3. Розв'яжіть інтегральні рівняння, попередньо звівши їх до звичайних диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } y(x) = e^x + \int_0^x y(s) ds; \quad \text{б) } y(x) = x - 1 + 2 \int_0^x (x-s)y(s) ds.$$

Лекція 16. Лінійні інтегральні рівняння

План

1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма.
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри.
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма.
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри.

1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad (16.1)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leq x \leq b$, а функція $K(x, s)$ (ядро) неперервна у квадраті

$$Q = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}.$$

Розглянемо *інтегральний оператор Фредгольма*

$$Ay = \int_a^b K(x, s)y(s) ds,$$

де $y \in C[a, b]$ (означення простору $C[a, b]$ наведене в попередній лекції). Тоді рівняння (16.1) можна записати в операторній формі:

$$y = \lambda Ay + f,$$

тобто

$$(I - \lambda A)y = f, \quad (16.2)$$

де I — одиничний оператор, тобто оператор, який кожному елементу простору ставить у відповідність цей самий елемент.

Розв'язком рівняння (16.2) називають неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $y = y(x)$, яка перетворює це рівняння у тотожність.

Якщо $\lambda = 0$, то зрозуміло, що $y(x) = f(x)$, тобто розв'язок рівняння (16.1) єдиний. Покажемо, що це рівняння має розв'язок (до того ж єдиний) і для довільних досить малих $|\lambda|$.

Нехай A — оператор, визначений формулою

$$Ay = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x).$$

Тоді рівняння (16.1) набуває вигляду $Ay = y$, а тому фактично йдеться про відшукування нерухомої точки оператора A . Дослідимо властивості цього оператора. Нехай $y \in C[a, b]$. Покажемо, що функція

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x)$$

також належить простору $C[a, b]$. Маємо оцінку:

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\leq |f(x+h) - f(x)| + \\ &+ |\lambda| \int_a^b |K(x+h, s) - K(x, s)| \cdot |y(s)| ds. \end{aligned} \quad (16.3)$$

З неперервності функцій $f(x)$ і $K(x, s)$ випливає, що

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } |h| < \delta_1,$$

$$|K(x+h, s) - K(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)Y|\lambda|} \text{ для } |h| < \delta_2 \quad (\forall s \in [a, b]),$$

де $Y = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$. Таким чином, з (16.3) одержуємо, що

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для } |h| < \min(\delta_1, \delta_2).$$

Отже, оператор A переводить простір $C[a, b]$ у себе.

З'ясуємо тепер, для яких значень $|\lambda|$ оператор A є стискаючим. Нехай $y_1 \in C[a, b]$, $y_2 \in C[a, b]$. Тоді

$$\begin{aligned} \rho(Ay_1, Ay_2) &= \max_{x \in [a, b]} |Ay_1 - Ay_2| = \\ &= \max_{x \in [a, b]} \left| \lambda \int_a^b K(x, s)(y_1(s) - y_2(s)) ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)| = |\lambda| M(b-a) \cdot \rho(y_1, y_2), \end{aligned}$$

де $M = \max_{(x, s) \in Q} |K(x, s)|$.

Отже, якщо

$$|\lambda| M(b-a) < 1,$$

тобто

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad (16.4)$$

то оператор A стискаючий.

Таким чином, нами доведено таке твердження.

Теорема 1. Для будь-якого λ , що задовольняє умову (16.4), інтегральне рівняння Фредгольма (16.1) з неперервним ядром і неперервним вільним членом має єдиний неперервний розв'язок

$y(x)$. Послідовні наближення $y_1(x), y_2(x), \dots$ цього розв'язку визначаються рекурентними формулами:

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y_n(s) ds + f(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $y_1(x)$ — довільна неперервна функція на відрізку $[a, b]$, причому $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Приклад 1. Знайти методом послідовних наближень розв'язок рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_0^1 xs y(s) ds + 2x.$$

Розв'язання. Ядро $K(x, s) = xs$ неперервне у квадраті $0 \leq x, s \leq 1$, причому

$$M = \max_{x, s \in [0, 1]} |xs| = 1.$$

Згідно з (16.4) розв'язок заданого рівняння можна знайти методом послідовних наближень для $|\lambda| < 1$:

$$y_1(x) = 2x, \quad y_2(x) = \lambda \int_0^1 xs \cdot 2s ds + 2x = \frac{2}{3} \lambda x + 2x = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{3} \right) x,$$

$$y_3(x) = \lambda \int_0^1 xs \cdot \left(\frac{2}{3} \lambda + 2 \right) s ds + 2x = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3} \right)^2 \right) x, \quad \dots,$$

$$y_n(x) = 2 \left(1 + \frac{\lambda}{3} + \left(\frac{\lambda}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{3} \right)^{n-1} \right) x, \quad \dots$$

Використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, одержуємо, що

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \frac{2}{1 - \frac{\lambda}{3}} x = \frac{6x}{3 - \lambda}.$$

Відповідь: $y = \frac{6x}{3 - \lambda}$.

2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри. Принцип стискаючих відображень допускає низку узагальнень. Наведемо одне з таких тверджень, доведення якого можна знайти в [14, с. 315].

Теорема 2. *Нехай оператор A , що переводить метричний простір W у себе, є неперервним, причому для деякого натурального n оператор A^n є стискаючим. Тоді оператор A має єдину нерухому точку.*

Розглянемо тепер інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad (16.5)$$

у якому функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leq x \leq b$, а ядро $K(x, s)$ неперервне у трикутнику

$$G = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}.$$

Нехай A — оператор, визначений формулою

$$Ay = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad y \in C[a, b].$$

Як і у п. 1, легко перевірити, що оператор A переводить простір $C[a, b]$ у себе.

Для довільних $y_1 \in C[a, b]$, $y_2 \in C[a, b]$ маємо:

$$|Ay_2 - Ay_1| \leq |\lambda| M(x-a) \rho(y_2, y_1) \leq |\lambda| M(b-a) \rho(y_2, y_1),$$

де $M = \max_{(x,s) \in G} |K(x, s)|$, тобто

$$\rho(Ay_2, Ay_1) \leq |\lambda| M(b-a) \rho(y_2, y_1).$$

Покажемо, що деякий степінь оператора A є стискаючим. Маємо:

$$\begin{aligned} |Ay_2 - Ay_1| &\leq (x - a)|\lambda|M\rho(y_2, y_1), \\ |A^2y_2 - A^2y_1| &= \left| \lambda \int_a^x K(x, s)(Ay_2(s) - Ay_1(s))ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda|^2 M^2 \frac{(x - a)^2}{2} \rho(y_2, y_1), \dots, \\ |A^n y_2 - A^n y_1| &\leq |\lambda|^n M^n \frac{(x - a)^n}{n!} \rho(y_2, y_1). \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} (\lambda M(b - a))^n = 0$, то для будь-якого λ число n можна вибрати настільки великим, щоб

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} (\lambda M(b - a))^n < 1.$$

Тоді оператор A^n буде стискаючим, адже

$$\rho(A^n y_2 - A^n y_1) \leq \alpha_n \rho(y_2, y_1), \quad \alpha_n < 1.$$

Виконуються всі умови теореми 2, і, отже, оператор A у просторі $C[a, b]$ має єдину нерухому точку. Таким чином, справджується таке твердження.

Теорема 3. *Якщо в інтегральному рівнянні Вольтерри (16.5) ядро і вільний член неперервні, то воно має єдиний неперервний розв'язок $y(x)$. Послідовні наближення $y_1(x), y_2(x), \dots$ цього розв'язку визначаються рекурентними формулами:*

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y_n(s)ds + f(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $y_1(x)$ — довільна функція з простору $C[a, b]$, причому $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Приклад 2. Знайти методом послідовних наближень розв'язок рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \int_0^x (s-x)y(s) ds + x, \quad x \in [0, \pi].$$

Розв'язання. Легко перевірити, що всі умови теореми 3 виконуються. Виберемо $y_1(x) = x$. Тоді

$$y_2(x) = \int_0^x (s-x)s ds + x = x - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (s-x) \left(s - \frac{s^3}{6} \right) ds + x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \dots,$$

$$y_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \dots$$

Тоді

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x.$$

Відповідь: $y = \sin x$.

Метод послідовних наближень можна застосовувати також до нелінійних рівнянь Вольтерри, наприклад, до рівняння

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, y(s)) ds + f(x). \quad (16.6)$$

При певних умовах на функції $f(x)$ і $K(x, s, y(s))$ послідовні наближення

$$y_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, y_n(s)) ds + f(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad y_1 \in C[a, b],$$

гарантовано збігаються до розв'язку рівняння (16.6).

3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма.

Розглянемо рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad (16.7)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $a \leq x \leq b$, а ядро $K(x, s)$ неперервне у квадраті Q .

Розв'язок інтегрального рівняння (16.7) шукаємо у вигляді суми степеневого ряду по λ :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\lambda^n = y_0(x) + y_1(x)\lambda + \dots + y_n(x)\lambda^n + \dots, \quad (16.8)$$

де $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ — поки що невідомі функції. Припустимо, що ряд (16.8) рівномірно збігається на відрізку $[a, b]$. Тоді його можна почленно інтегрувати і, підставляючи у (16.7), отримуємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, s)y_n(s) ds + f(x).$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів λ , знаходимо рекурентні формули

$$y_{n+1}(x) = \int_a^b K(x, s)y_n(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.9)$$

де $y_0(x) = f(x)$. Тепер покажемо, що функціональний ряд (16.8) рівномірно збігається на $[a, b]$.

Унаслідок неперервності функцій $K(x, s)$ і $f(x)$ впливає неперервність функцій $y_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, визначених формулами (16.9). Позначимо

$$M = \max_{(x,s) \in Q} |K(x, s)|, \quad N = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Тоді для всіх $x \in [a, b]$ маємо:

$$\begin{aligned} |y_0(x)| &= |f(x)| \leq N, \\ |y_1(x)| &\leq \int_a^b |K(x, s)| \cdot |y_0(s)| ds \leq N \cdot M(b-a), \\ |y_2(x)| &\leq \int_a^b |K(x, s)| \cdot |y_1(s)| ds \leq N \cdot [M(b-a)]^2, \dots, \\ |y_n(x)| &\leq \int_a^b |K(x, s)| \cdot |y_{n-1}(s)| ds \leq N \cdot [M(b-a)]^n, \dots \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функціональний ряд (16.8) має мажорантою числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Nq^n,$$

який збігається для $q = |\lambda|M(b-a) < 1$. Тоді згідно з ознакою Вейерштрасса функціональний ряд (16.8) збігається абсолютно і рівномірно для $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$ на $[a, b]$ і його сума є неперервною на $[a, b]$ функцією. Єдиність побудованого розв'язку випливає з єдиності розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду при виконанні умови (16.4) (п. 1 цієї лекції).

Формули (16.9) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \quad y_1(x) = \int_a^b K(x, s)f(s) ds, \\ y_2(x) &= \int_a^b K(x, t) \left(\int_a^b K(t, s)f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, t)K(t, s) dt \right) f(s) ds = \int_a^b K_2(x, s)f(s) ds, \end{aligned}$$

де

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)K(t, s) dt.$$

Позначимо також $K_1(x, s) = K(x, s)$. Аналогічно

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_a^b K(x, t) \left(\int_a^b K_2(t, s) f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x, t) K_2(t, s) dt \right) f(s) ds = \int_a^b K_3(x, s) f(s) ds, \end{aligned}$$

де

$$K_3(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_2(t, s) dt,$$

і так далі:

$$y_n(x) = \int_a^b K_n(x, s) f(s) ds,$$

де

$$K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (16.10)$$

Ядра $K_n(x, s)$ називають *ітерованими (повторними)*. З їхньою допомогою ряд (16.8) запишемо у вигляді

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, s) f(s) ds. \quad (16.11)$$

Функцію

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$$

називають *резольвентою* ядра $K(x, s)$.

Розв'язок рівняння (16.7), враховуючи (16.11), можна виразити через резольвенту, а саме:

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x). \quad (16.12)$$

Приклад 3. З допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) = \int_0^1 \frac{x}{s^2 + 1} y(s) ds + x^2 + 1.$$

Розв'язання. Оскільки $K(x, s) = \frac{x}{s^2 + 1}$, то, використовуючи формули (16.10) для ітерованих ядер, одержуємо:

$$\begin{aligned} K_1(x, s) &= K(x, s) = \frac{x}{s^2 + 1}, \\ K_2(x, s) &= \int_0^1 \frac{x}{t^2 + 1} \frac{t}{s^2 + 1} dt = \frac{\ln 2}{2} \frac{x}{s^2 + 1}, \\ K_3(x, s) &= \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 \frac{x}{t^2 + 1} \frac{t}{s^2 + 1} dt = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \frac{x}{s^2 + 1}, \dots, \\ K_n(x, s) &= \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{n-1} \frac{x}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Якщо $\frac{\ln 2}{2} |\lambda| < 1$, тобто $|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}$, то, використовуючи формулу для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, знайдемо резольвенту ядра:

$$\begin{aligned} R(x, s, \lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{2} \lambda\right)^{n-1} \frac{x}{s^2 + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\ln 2}{2} \lambda} \cdot \frac{x}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Для заданого рівняння $\lambda = 1 < \frac{2}{\ln 2}$ і, отже, $R(x, s, 1) = \frac{2}{2 - \ln 2} \cdot \frac{x}{s^2 + 1}$. Шуканим розв'язком на підставі (16.12) є

$$y(x) = \int_0^1 \frac{2}{2 - \ln 2} \cdot \frac{x}{s^2 + 1} (s^2 + 1) ds + x^2 + 1 = x^2 + \frac{2x}{2 - \ln 2} + 1. \blacksquare$$

4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри.

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad (16.13)$$

у якому функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, а ядро $K(x, s)$ неперервне у трикутнику $G = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}$.

Як і для інтегрального рівняння Фредгольма, розв'язок рівняння (16.13) шукаємо у вигляді степеневого ряду (16.8). Формально підставивши (16.8) у (16.13), почленно зінтегрувавши і прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів λ , отримуємо рекурентні формули

$$y_{n+1}(x) = \int_a^x K(x, s)y_n(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.14)$$

де $y_0(x) = f(x)$.

Нехай $M = \max_{(x,s) \in G} |K(x, s)|$, $N = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Тоді для всіх $x \in [a, b]$ маємо:

$$\begin{aligned} |y_0(x)| &= |f(x)| \leq N, \\ |y_1(x)| &\leq \int_a^x |K(x, s)| \cdot |y_0(s)| ds \leq N \cdot M(x - a), \\ |y_2(x)| &\leq \int_a^x |K(x, s)| \cdot |y_1(s)| ds \leq N \frac{M^2(x - a)^2}{2!}, \dots, \end{aligned}$$

$$|y_n(x)| \leq \int_a^x |K(x, s)| \cdot |y_{n-1}(s)| ds \leq N \frac{M^n (x-a)^n}{n!}, \dots$$

З цих оцінок випливає, що

$$|y_n(x)| \leq N \frac{M^n (b-a)^n}{n!},$$

а тому функціональний ряд (16.8) мажорується числовим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} N \frac{q^n}{n!}, \quad (16.15)$$

де $q = |\lambda| M(b-a)$. Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд (16.15) збігається для всіх λ , а тому ряд (16.8) збігається рівномірно на $[a, b]$ для всіх λ , а його сума є неперервною на $[a, b]$ функцією.

Змінивши порядок інтегрування (рис. 16.1), формули (16.14) можна записати у вигляді

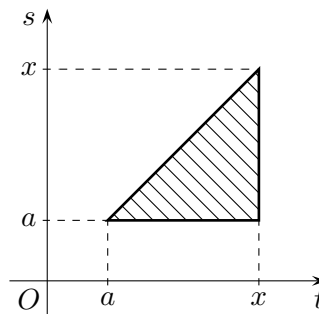


Рис. 16.1

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f(x), \quad y_1(x) = \int_a^x K(x, s) f(s) ds, \\ y_2(x) &= \int_a^x K(x, t) \left(\int_a^t K(t, s) f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_a^x \left(\int_s^x K(x, t) K(t, s) dt \right) f(s) ds = \int_a^x K_2(x, s) f(s) ds, \end{aligned}$$

де

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K(t, s) dt,$$

і так далі:

$$y_n(x) = \int_a^x K_n(x, s) f(s) ds,$$

де

$$K_n(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (16.16)$$

Позначимо також $K_1(x, s) = K(x, s)$. Ядра $K_n(x, s)$ називають *ітерованими (повторними)*. З їхньою допомогою ряд (16.8) запишемо у вигляді

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^x K_n(x, s) f(s) ds. \quad (16.17)$$

Функцію

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s). \quad (16.18)$$

називають *резольвентою* ядра $K(x, s)$.

Розв'язок рівняння (16.13), враховуючи (16.17), можна виразити через резольвенту, а саме:

$$y(x) = \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x). \quad (16.19)$$

Приклад 4. З допомогою ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x xy(s) ds.$$

Розв'язання. З рекурентних співвідношень (16.16) одержуємо:

$$K_1(x, s) = x, \quad K_2(x, s) = \int_s^x xt dt = x \cdot \frac{x^2 - s^2}{2},$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x xt \frac{t^2 - s^2}{2} dt = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^2, \dots,$$

$$K_n(x, s) = \frac{x}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Використовуючи формулу (16.18), знайдемо резольвенту

$$R(x, s, \lambda) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\lambda \frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{n-1} = x e^{\lambda \frac{x^2 - s^2}{2}}.$$

Знайдемо тепер розв'язок заданого рівняння за формулою (16.19). Оскільки $f(x) = x$ і $\lambda = -1/2$, то

$$\begin{aligned} y(x) &= x - \frac{1}{2} \int_0^x xs e^{-\frac{x^2 - s^2}{4}} ds = x - xe^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x d(e^{s^2/4}) = \\ &= xe^{-\frac{x^2}{4}} \left(e^{\frac{x^2}{4}} - 1 \right) = x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}} \right). \end{aligned}$$

Відповідь: $y = x \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}} \right)$.

Рекомендована література: [12, с. 63–115], [13, с. 20–26, 45–55, 165–173], [14, с. 314–327, 338–357].

Питання до лекції 16

1. У чому полягає метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма другого роду? За якими рекурентними формулами можна знайти послідовні наближення розв'язку цього рівняння?

2. У чому полягає метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри другого роду? За якими формулами можна знайти послідовні наближення розв'язку цього рівняння?

3. За якими формулами будуються ітеровані ядра для рівняння Фредгольма другого роду? Як з їхньою допомогою записати розв'язок цього рівняння у вигляді функціонального ряду?

4. Що називають резольвентою ядра інтегрального рівняння Фредгольма другого роду? Як з допомогою резольвенти можна виразити розв'язок цього рівняння?

5. Що називають резольвентою ядра інтегрального рівняння Вольтерри другого роду? Як з допомогою резольвенти можна виразити розв'язок цього рівняння?

Вправи до лекції 16

1. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма методом послідовних наближень:

$$\text{а) } y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 y(s) ds + \sin(\pi x); \quad \text{б) } y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 s \cdot y(s) ds - 1.$$

2. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерри методом послідовних наближень:

$$\text{а) } y(x) = \int_0^x xy(s) ds + 1 - x^2, \quad y_0(x) = 1 - x^2;$$

$$\text{б) } y(x) = \int_0^x y(s) ds - \frac{x^2}{2} - x, \quad y_0(x) = -1.$$

3. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма методом ітерованих ядер:

$$\text{а) } y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y(s) ds + \sin x; \quad \text{б) } y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xe^s y(s) ds + e^{-x}.$$

4. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерри методом ітерованих ядер:

$$\text{а) } y(x) = \int_0^x sy(s) ds - 1; \quad \text{б) } y(x) = \int_0^x xsy(s) ds + x.$$

Лекція 17. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду

План

1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття.
2. Теорема Фредгольма.
3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду.

1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття. Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + f(x), \quad x \in [a, b], \quad (17.1)$$

ядро якого є скінченною сумою добутків двох функцій, одна з яких залежить тільки від x , а інша — тільки від s , тобто

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n P_i(x)Q_i(s). \quad (17.2)$$

Ядро вигляду (17.2) називають *виродженням*.

Уважаємо, що функції $P_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, а також $Q_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$, лінійно незалежні на відрізку $[a, b]$. Якщо це не так, то кожному з цих функцій можна подати у вигляді лінійної комбінації меншої кількості лінійно незалежних функцій, а, отже, ядро (17.2) запишеться з допомогою меншої кількості доданків. Припустимо також, що $P_i \in C[a, b]$, $Q_i \in C[a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді ядро (17.2), очевидно, неперервне у квадраті $Q = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$. Інтегральні рівняння такого вигляду вдається повністю дослідити, користуючись лише засобами лінійної алгебри.

Підставляючи (17.2) у рівняння (17.1), одержуємо

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(s)y(s) ds + f(x). \quad (17.3)$$

Нехай інтегральне рівняння (17.3) має розв'язок $y(x)$, неперервний на відрізку $[a, b]$. Позначимо

$$q_i = \int_a^b Q_i(s)y(s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.4)$$

Тоді рівняння (17.3) можемо записати у вигляді

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^n q_i P_i(x) + f(x). \quad (17.5)$$

Для знаходження невідомих чисел q_i підставимо (17.5) в (17.4). Будемо мати:

$$\begin{aligned} q_i &= \int_a^b Q_i(s)y(s) ds = \int_a^b \left(\lambda \sum_{j=1}^n q_j P_j(s) + f(s) \right) Q_i(s) ds = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n q_j \int_a^b P_j(s) Q_i(s) ds + \int_a^b f(s) Q_i(s) ds. \end{aligned}$$

Позначимо

$$k_{ij} = \int_a^b P_j(s) Q_i(s) ds, \quad f_i = \int_a^b f(s) Q_i(s) ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді для знаходження невідомих q_i одержуємо систему лінійних неоднорідних алгебричних рівнянь

$$q_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.6)$$

Якщо система (17.6) несумісна, то, очевидно, інтегральне рівняння (17.3) розв'язків не має. Якщо система (17.6) має розв'язок q_1, q_2, \dots, q_n , то підставивши його в (17.5), знайдемо неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $y(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння (17.3) (у цьому легко переконатися з допомогою підстановки).

Таким чином, розв'язування інтегрального рівняння (17.1) з виродженим ядром зводиться до розв'язування відповідної системи (17.6) лінійних алгебричних рівнянь.

Позначимо визначник системи (17.6) через $D(\lambda)$:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}. \quad (17.7)$$

Визначник $D(\lambda)$ називають **визначником Фредгольма** для рівняння (17.3), а його нулі, тобто корені рівняння $D(\lambda) = 0$ — **характеристичними числами** ядра $K(x, s)$ (або рівняння (17.3)). Очевидно, що визначник $D(\lambda)$ тотожно відмінний від нуля, бо $D(0) = 1$.

2. Теорема Фредгольма. Оскільки визначник $D(\lambda)$, визначений формулою (17.7), є багаточленом відносно параметра λ степеня, не вищого від n , то згідно з основною теоремою алгебри рівняння $D(\lambda) = 0$ має не більше, ніж n різних коренів.

Розглянемо окремі випадки.

Випадок 1. Нехай $D(\lambda) \neq 0$, тобто число λ не є характеристичним. Тоді система (17.6) однозначно розв'язна для довільних правих частин f_i . Розв'язок цієї системи знаходимо, наприклад, за формулами Крамера:

$$q_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.8)$$

де $D_i(\lambda)$ — визначник, утворений з визначника (17.7) заміною i -го стовпця на стовпець правих частин f_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким чином, доведене таке твердження.

Теорема 1 (перша теорема Фредгольма). *Якщо λ не є характеристичним числом ядра $K(x, s)$, то для довільної неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ рівняння (17.3) має єдиний неперервний на відрізку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$, визначений формулою (17.5).*

Оскільки $D(\lambda) \neq 0$, то відповідне інтегральному рівнянню (17.3) однорідне рівняння

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^n P_i(x) \int_a^b Q_i(s) y(s) ds \quad (17.9)$$

має тільки тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$. Справді, якщо на відрізку $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$, то

$$f_i = \int_a^b f(s) Q_i(s) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і система лінійних рівнянь (17.6) є однорідною. Як відомо, однорідна система лінійних рівнянь з відмінним від нуля визначником має тільки тривіальний розв'язок. Отже, $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$, а тому з (17.5) випливає, що $y(x) \equiv 0$. Таким чином, теорему 1 можна сформулювати інакше: *для того, щоб рівняння (17.3) з довільною неперервною на відрізку $[a, b]$ функцією $f(x)$ мало єдиний неперервний на відрізку $[a, b]$ розв'язок $y(x)$, необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння (17.9) мало тільки тривіальний розв'язок.*

Приклад 1. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (5x - 3s) y(s) ds + 1.$$

Розв'язання. Оскільки

$$K(x, s) = 5x - 3s = P_1(x)Q_1(s) + P_2(x)Q_2(s),$$

де $P_1(x) = 5x$, $P_2(x) = -3$, $Q_1(s) = 1$, $Q_2(s) = s$, то задане рівняння запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_0^1 P_1(x)Q_1(s)y(s) ds + \lambda \int_0^1 P_2(x)Q_2(s)y(s) ds + 1 = \\ &= 5\lambda x p_1 - 3\lambda p_2 + 1, \end{aligned} \quad (17.10)$$

де

$$p_1 = \int_0^1 y(s) ds, \quad p_2 = \int_0^1 s y(s) ds. \quad (17.11)$$

Підставляючи (17.10) в (17.11) та обчислюючи інтеграли, для знаходження p_1 , p_2 одержуємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 = \int_0^1 (5\lambda p_1 s - 3\lambda p_2 + 1) ds = \frac{5\lambda}{2} p_1 - 3\lambda p_2 + 1, \\ p_2 = \int_0^1 (5\lambda p_1 s^2 - 3\lambda p_2 s + s) ds = \frac{5\lambda}{3} p_1 - \frac{3}{2} \lambda p_2 + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \frac{5\lambda}{2}) p_1 + 3\lambda p_2 = 1, \\ \frac{5\lambda}{3} p_1 - (1 + \frac{3\lambda}{2}) p_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Визначником одержаної системи є

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{5\lambda}{2} & 3\lambda \\ \frac{5\lambda}{3} & -1 - \frac{3\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{-5\lambda^2 + 4\lambda - 4}{4}.$$

Очевидно, що $D(\lambda) \neq 0$ для довільного дійсного λ , а тому, за формулами Крамера, знаходимо p_1 і p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 & 3\lambda \\ -1/2 & -1 - 3\lambda/2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5\lambda^2 - 4\lambda + 4}, \\ p_2 &= \frac{1}{D(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - 5\lambda/2 & 1 \\ 5\lambda/3 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{5\lambda + 6}{3(5\lambda^2 - 4\lambda + 4)}. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені p_1, p_2 у (17.10), після нескладних перетворень одержуємо шуканий розв'язок:

$$y(x) = \frac{20\lambda x - 10\lambda + 4}{5\lambda^2 - 4\lambda + 4}. \quad \blacksquare$$

Використовуючи формули (17.8), знайдемо розв'язок інтегрального рівняння (17.3). Для цього кожен визначник $D_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, у (17.8) розкладемо за елементами i -го стовпця правих частин:

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) f_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17.12)$$

де $D_{ik}(\lambda)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, — алгебричні доповнення, які є багаточленами відносно λ степеня, не вищого, ніж $n-1$. Враховуючи (17.12), з (17.8) маємо:

$$q_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) f_k, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Підставляючи ці значення у формулу (17.5), одержуємо:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \sum_{i=1}^n \frac{P_i(x)}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) f_k + f(x) = \\ &= \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n P_i(x) \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) \int_a^b f(s) Q_k(s) ds + f(x) = \\ &= \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) P_i(x) Q_k(s) f(s) \right) ds + f(x) \end{aligned}$$

або

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds + f(x),$$

де

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) P_i(x) Q_k(s). \quad (17.13)$$

Функцію $R(x, s, \lambda)$, визначену формулою (17.13), називають **резольвентою інтегрального рівняння** (17.3) або **резольвентою ядра** (17.2). Очевидно, що для фіксованих x, s резольвента (17.13) є дробово-раціональною функцією від параметра λ . Для всіх значень λ , відмінних від характеристичних чисел ядра $K(x, s)$, функція $R(x, s, \lambda)$ є неперервною у квадраті Q .

Випадок 2. Нехай $D(\lambda) = 0$, тобто λ є характеристичним числом ядра $K(x, s)$. Тоді, як відомо з алгебри, однорідна система, відповідна системі (17.6), має p , $p \leq n$, лінійно незалежних сукупностей розв'язків:

$$q_1^{(l)}, q_2^{(l)}, \dots, q_n^{(l)}, \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Функції

$$y_l(x) = \sum_{i=1}^n q_i^{(l)} P_i(x), \quad l = 1, 2, \dots, p,$$

а також їхні довільні комбінації є розв'язками однорідного рівняння (17.9). Нетривіальні розв'язки рівняння (17.9) називають **власними функціями** цього рівняння (або його ядра), які відповідають дійсному характеристичному числу. Число p називають **рангом (кратністю)** характеристичного числа.

Можна показати, що множина всіх власних функцій, які відповідають певному характеристичному числу, утворює лінійний простір вимірності p , базисом якого є сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x)$. Тоді довільний розв'язок однорідного рівняння (17.9) можна записати у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=1}^p \alpha_j y_j(x), \quad (17.14)$$

де α_j , $j = 1, 2, \dots, p$, — деякі сталі. Співвідношення (17.14) називають **загальним розв'язком** однорідного інтегрального рівняння (17.9).

Ядро $K^*(x, s)$ називають **спряженим** до ядра $K(x, s)$, якщо

$$K^*(x, s) = \overline{K(s, x)},$$

де риска означає комплексне спряження. Якщо $K(x, s)$ — дійснозначна функція, то $K^*(x, s) = K(s, x)$.

Інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} \int_a^b K^*(x, s)\varphi(s) ds + g(x)$$

називають **спряженим** до інтегрального рівняння (17.1).

Заради спрощення надалі будемо вважати, що ядро $K(x, s)$ і параметр λ — дійсні. Для інтегрального рівняння (17.3) з вирожденним ядром спряженим до нього є рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n Q_i(x) \int_a^b P_i(s)\varphi(s) ds + g(x).$$

Якщо $g(x) = 0$, то спряженим до (17.9) інтегральним рівнянням є рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n Q_i(x) \int_a^b P_i(s)\varphi(s) ds, \quad (17.15)$$

а його розв'язок можна записати як

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i Q_i(x),$$

де сталі \tilde{q}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\tilde{q}_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ji} \tilde{q}_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.16)$$

Систему (17.16) називають *спряженою* до системи (17.6), а її матриця є транспонованою до матриці системи (17.6). Системи (17.6) і (17.16) мають p лінійно незалежних сукупностей розв'язків. Базисом простору розв'язків рівняння (17.15) є система функцій

$$\varphi_l(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i^{(l)} Q_i(x), \quad l = 1, 2, \dots, p, \quad (17.17)$$

де $\tilde{q}_1^{(l)}, \tilde{q}_2^{(l)}, \dots, \tilde{q}_n^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, p$, — базис простору розв'язків системи (17.16).

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 2 (друга теорема Фредгольма). *Якщо λ є характеристичним числом рівняння (17.3) з виродженим ядром $K(x, s)$, то однорідне інтегральне рівняння (17.9) і спряжене до нього рівняння (17.15) мають однакову кількість лінійно незалежних власних функцій.*

Нехай тепер λ — характеристичне число ядра $K(x, s)$ рангу p . Розглянемо неоднорідне інтегральне рівняння (17.3). Якщо це рівняння має розв'язок, то його можна записати у вигляді (17.5). Як відомо з алгебри, для сумісності системи рівнянь (17.6) необхідно і достатньо, щоб вектор (f_1, f_2, \dots, f_n) вільних членів був ортогональним до підпростору розв'язків спряженої однорідної системи. Це означає, що вектор (f_1, f_2, \dots, f_n) має бути ортогональним до кожного з p базисних векторів $(\tilde{q}_1^{(l)}, \tilde{q}_2^{(l)}, \dots, \tilde{q}_n^{(l)})$, тобто

$$\sum_{i=1}^n f_i \tilde{q}_i^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Оскільки $f_i = \int_a^b f(s) Q_i(s) ds$, $i = 1, 2, \dots, n$, то, враховуючи (17.17), маємо:

$$\int_a^b f(x) \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i^{(l)} Q_i(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_l(x) dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 3 (третя теорема Фредгольма). *Якщо λ є характеристичним числом, то неоднорідне інтегральне рівняння (17.3) з виродженим ядром $K(x, s)$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли вільний член $f(x)$ ортогональний до всіх розв'язків спряженого однорідного рівняння (17.15).*

Таким чином, якщо число λ є характеристичним, то питання про існування розв'язку неоднорідного інтегрального рівняння (17.3) зводиться до перевірки p умов ортогональності:

$$\int_a^b f(x)\varphi_l(x)dx = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Ці умови називають ще **умовами розв'язності** рівняння (17.3). Якщо вони справджуються, то інтегральне рівняння має безліч розв'язків, які можна описати формулою

$$y(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i y_i(x) + \tilde{y}(x),$$

де перший доданок — загальний розв'язок однорідного рівняння (17.9), а другий — деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (17.3).

Приклад 2. Розв'язати інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s)y(s)ds + x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sin(x-s) = \sin x \cos s - \sin s \cos x$, то маємо інтегральне рівняння з виродженим ядром. Тоді

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos s \cdot y(s) ds - \lambda \int_0^{2\pi} \sin s \cos x \cdot y(s) ds + x = \\ &= \lambda p_1 \sin x - \lambda p_2 \cos x + x, \end{aligned} \quad (17.18)$$

де

$$p_1 = \int_0^{2\pi} \cos s \cdot y(s) ds, \quad p_2 = \int_0^{2\pi} \sin s \cdot y(s) ds. \quad (17.19)$$

Підставляючи функцію $y(x)$, визначену формулою (17.18), у (17.19) та обчислюючи інтеграли, одержуємо систему відносно p_1 і p_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_0^{2\pi} \cos s (\lambda p_1 \sin s - \lambda p_2 \cos s + s) ds = \\ &= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} \cos s \sin s ds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s ds + \int_0^{2\pi} s \cos s ds = -\lambda p_2 \pi; \\ p_2 &= \int_0^{2\pi} \sin s (\lambda p_1 \sin s - \lambda p_2 \cos s + s) ds = \\ &= \lambda p_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 s ds - \lambda p_2 \int_0^{2\pi} \sin s \cos s ds + \int_0^{2\pi} s \sin s ds = \lambda p_1 \pi - 2\pi. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{cases} p_1 + \lambda p_2 = 0, \\ -\lambda p_1 + p_2 = -2\pi. \end{cases}$$

Визначником цієї системи є $D(\lambda) = (\lambda\pi)^2 + 1$. Оскільки $D(\lambda) \neq 0$ для всіх дійсних λ , то неоднорідна система має єдиний розв'язок:

$$p_1 = \frac{2\pi^2\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1}, \quad p_2 = -\frac{2\pi}{(\lambda\pi)^2 + 1}.$$

Тоді з (17.18) знаходимо шуканий розв'язок:

$$y(x) = \frac{2\pi^2\lambda^2}{(\lambda\pi)^2 + 1} \sin x + \frac{2\pi\lambda}{(\lambda\pi)^2 + 1} \cos x + x. \quad \blacksquare$$

Наслідком теорем 1–3 є таке твердження.

Теорема 4 (альтернатива Фредгольма). *Якщо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння має єдиний розв'язок.*

Якщо однорідне рівняння має нетривіальні розв'язки, то відповідне неоднорідне рівняння залежно від вільного члена або не має розв'язків, або має безліч розв'язків.

Зауважимо, що теореми 1–4 справджуються не тільки для виродженого, але й для довільного неперервного ядра відповідного інтегрального рівняння.

3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду. Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x, s)y(s) ds = f(x),$$

узагалі кажучи, не має розв'язку для довільної правої частини $f(x)$, а якщо розв'язок існує, він може бути неєдиним. Наприклад, розв'язком інтегрального рівняння

$$\int_0^1 y(s) ds = 1$$

є кожна з функцій $y(x) = \alpha x + \beta$, де α, β — будь-які дійсні числа, які задовольняють умову $\alpha + 2\beta = 2$ (у цьому можна переконатись безпосередньою підстановкою), а рівняння

$$\int_0^1 y(s) ds = 1 + x^2,$$

очевидно, взагалі не має розв'язків.

Таким чином, розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду — некоректна задача. Для розв'язування

таких задач використовують спеціальні методи, вивчення яких виходить за рамки цього посібника.

Оскільки інтегральні рівняння Вольтерри першого роду є окремим випадком рівнянь Фредгольма, все сказане вище про рівняння Фредгольма першого роду залишається правильним і для рівнянь Вольтерри. Але у багатьох випадках інтегральні рівняння Вольтерри першого роду легко розв'язуються.

Розглянемо, наприклад, інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_a^x K(x, s)y(s) ds = f(x), \quad (17.20)$$

де $f(a) = 0$, і припустимо, що функції $K(x, s)$, $\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}$, $f(x)$, $f'(x)$ неперервні у трикутнику

$$G = \{(x, s) : a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (17.20) за змінною x , одержуємо

$$K(x, x)y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} y(s) ds = f'(x). \quad (17.21)$$

Будь-який неперервний при $a \leq x \leq b$ розв'язок $y(x)$ рівняння (17.21) є, очевидно, й розв'язком рівняння (17.20). Навпаки, кожен неперервний розв'язок рівняння (17.20) при $a \leq x \leq b$ задовольняє також рівняння (17.21).

Якщо $K(x, x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці відрізка $[a, b]$, то рівняння (17.21) можемо записати у вигляді

$$y(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_a^x \frac{K'_x(x, s)}{K(x, x)} y(s) ds,$$

тобто воно зводиться до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, яке розглядалось у лекціях 15, 16.

Якщо $K(x, x)$ перетворюється в нуль у деякій точці відрізка $[a, b]$, то рівняння (17.21) володіє особливими властивостями, відмінними від властивостей рівнянь Вольтерри другого роду. Такі рівняння іноді називають рівняннями третього роду.

Якщо $K(x, x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$, існують неперервні другі похідні ядра та функції $f(x)$ за змінною x і виконується умова $f'(a) = 0$, то можна ще раз здиференціювати рівняння (17.21) за змінною x . Тоді одержуємо рівняння

$$K'_x(x, x)y(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 K(x, s)}{\partial x^2} y(s) ds = f''(x),$$

яке, якщо $K'_x(x, x) \neq 0$ на відрізку $[a, b]$, після ділення на $K'_x(x, x)$ зводиться до інтегрального рівняння другого роду.

Приклад 3. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x (x + s + 1)y(s) ds = x.$$

Розв'язання. Здиференціюємо рівняння за змінною x :

$$(2x + 1)y(x) + \int_0^x y(s) ds = 1. \quad (17.22)$$

Оскільки $2x + 1 \neq 0$ для $x \geq 0$, то після ділення на $2x + 1$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = - \int_0^x \frac{1}{2x + 1} y(s) ds + \frac{1}{2x + 1}. \quad (17.23)$$

Розв'яжемо рівняння (17.23), звівши його попередньо до звичайного диференціального рівняння (лекція 15). Для цього його спочатку здиференціюємо за змінною x :

$$y'(x) = - \frac{y(x)}{2x + 1} + \frac{2}{(2x + 1)^2} \int_0^x y(s) ds - \frac{2}{(2x + 1)^2}. \quad (17.24)$$

З (17.22) виразимо інтеграл

$$\int_0^x y(s) ds = 1 - (2x + 1)y(x)$$

і, підставивши його в рівняння (17.24), після нескладних перетворень отримуємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$y' = -\frac{3y}{2x + 1}. \quad (17.25)$$

Крім того, з (17.23) маємо початкову умову $y(0) = 1$.

Загальним розв'язком рівняння (17.25) є

$$y = \frac{C}{\sqrt{(2x + 1)^3}},$$

а враховуючи початкову умову $y(0) = 1$, отримуємо частинний розв'язок цього рівняння:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(2x + 1)^3}},$$

який є також розв'язком заданого інтегрального рівняння.

Відповідь: $y = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$.

Якщо ядро інтегрального рівняння залежить лише від x чи від s (або є добутком таких функцій), $K(x, x) \neq 0$ на відріжку $[a, b]$, $f(a) = 0$, то інтегральне рівняння Вольтерри першого роду (17.20) удається розв'язати ще простіше.

Приклад 4. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x (x + 1)y(s) ds = x.$$

Розв'язання. Оскільки $x + 1 \neq 0$ для $x \geq 0$, то

$$\int_0^x y(s) ds = \frac{x}{x + 1}.$$

Здиференціювавши обидві частини за змінною x , одержуємо

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)^2}. \blacksquare$$

Рекомендована література: [12, с. 27–51, 225–243], [13, с. 56–79, 87–95, 139–156], [14, с. 327–337], [18, с. 482–483].

Питання до лекції 17

1. Яке ядро інтегрального рівняння називають виродженим? До якої системи зводиться розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

2. Який вигляд має визначник Фредгольма? Що таке характеристичні числа ядра? Що називають власними функціями ядра? Що таке ранг характеристичного числа? Яке ядро називають спряженим?

3. Коли інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має єдиний розв'язок? Сформулюйте теореми Фредгольма. У чому полягає альтернатива Фредгольма?

4. Чи завжди інтегральне рівняння Фредгольма або рівняння Вольтерри має єдиний розв'язок? Наведіть приклади.

5. Як можна розв'язати інтегральне рівняння Вольтерри першого роду (17.20), якщо $f(a) = 0$?

Вправи до лекції 17

1. Розв'яжіть інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами:

$$\text{а) } y(x) = 3 + 2 \int_0^1 (x+s)y(s) ds; \quad \text{б) } y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)y(s) ds + 4x.$$

2. Розв'яжіть інтегральні рівняння Вольтерри першого роду:

$$\text{а) } \int_0^x (x+5)(s^2+1)y(s) ds = 3x^2; \quad \text{б) } \int_0^x (xs+1)y(s) ds = 2x.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М. : Едиториал УРСС, 2003. 208 с.
2. Боднар Д. І., Буяк Л. М., Возняк О. Г. Диференціальні рівняння: методи розв'язування. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. 112 с.
3. Боярчук А. К., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М. : Едиториал УРСС, 2001. 384 с.
4. Бугрій О. М., Процах Н. П., Бугрій Н. В. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі. Львів : Видавець І. Чижиков, 2011. 348 с.
5. Гой Т. П., Махней О. В. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 1. Диференціальні рівняння першого порядку. Івано-Франківськ : Голіней, 2017. 116 с.
6. Гой Т. П., Махней О. В., Негрич М. П., Симолюк М. М. Практикум з диференціальних рівнянь. Ч. 2. Диференціальні рівняння вищих порядків, системи диференціальних рівнянь. Івано-Франківськ : Голіней, 2019. 176 с.
7. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 470 с.
8. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. М. : Высш. шк., 1976. 304 с.
9. Диференціальні рівняння: методи та застосування / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, І. І. Дрінь. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2010. 288 с.
10. Диференціальні рівняння: навч. посібник / Каленюк П. І. та ін. Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2014. 380 с.
11. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Едиториал УРСС, 2002. 320 с.

12. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. М. : Наука, 1975.- 304 с.
13. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М. : Едиториал УРСС, 2007. 192 с.
14. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. К. : Либідь, 2004. 408 с.
15. Лопушанська Г. П., Бугрій О. М., Лопушанський А. О. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. Львів : Видавець І. Е. Чижиков, 2012. 362 с.
16. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. М. : Просвещение, 1988. 256 с.
17. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений. Минск : Выш. школа, 1973. 560 с.
18. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у задачах. К. : Либідь, 2003. 504 с.
19. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. К. : Либідь, 2003. 600 с.
20. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М. : Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
21. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. К. : Техніка, 2003. 368 с.

КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГАДУЮТЬСЯ У ПОСІВНИКУ

АБЕЛЬ Нільс Генрік (Abel Niels Henrik; 1802–1829) — норвезький математик. Автор важливих відкриттів в алгебрі та математичному аналізі. Встановив нерозв'язність загального алгебричного рівняння степеня $n > 5$, одержав ознаки збіжності числових та функціональних рядів. Займався також диференціальними рівняннями, одним з перших почав вивчати інтегральні рівняння.

БАНАХ Стефан (Banach Stefan; 1892–1945) — польський і український математик, професор Львівського університету. Один із творців сучасного функціонального аналізу і львівської математичної школи.

БЕРНУЛЛІ Даниїл (Bernoulli Daniel; 1700–1782) — швейцарський математик, механік, фізик. Син Й. Бернуллі. Найбільш відомий працями з математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь — його разом з Д'Аламбером і Ейлером вважають творцем математичної фізики. Як фізик збагатив кінетичну теорію газів, гідродинаміку, аеродинаміку, теорію пружності. Йому належить одне з перших формулювань закону збереження енергії, а також (одночасно з Ейлером) перше формулювання закону збереження моменту кількості руху.

БЕРНУЛЛІ Йоганн (Bernoulli Johann; 1667–1748) — швейцарський математик. Молодший брат Я. Бернуллі, батько Д. Бернуллі. Дав перше систематичне викладення диференціального та інтегрального числення, автор деяких методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (розробив метод відокремлення змінних та метод підстановки інтегрування лінійних рівнянь першого порядку). Один з творців варіаційного числення, зокрема сформулював класичну задачу про геодезичні лінії та знайшов характерну геометричну властивість цих ліній. Йому належать також вагомні дослідження з механіки, зокрема з теорії удару, руху тіл у середовищі з опором.

БЕРНУЛЛІ Якоб (Bernoulli Jacob; 1654–1705) — швейцарський математик. Автор видатних праць з аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь (рівняння Бернуллі). Разом з братом Йоганном заклав основи варіаційного числення. При цьому особливе значення мали ізопериметрична задача і знайдений ним розв'язок сформульованої Й. Бернуллі задачі про брахістохрону. Працював також у різних галузях фізики (визначення центру кочення тіл, опору тіл різної форми, які рухаються у рідині).

ВАНДЕРМОНД Александр Теофіл (Vandermonde Alexandre Theophil; 1735–1796) — французький математик. Відомий працями з алгебри, зокрема дав логічний виклад теорії визначників, де відомий визначник Вандермонда.

ВЕЙЄРШТРАСС Карл Теодор Вільгельм (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm; 1815–1897) — німецький математик. Його основні дослідження присвячені математичному аналізу, теорії функцій, варіаційному численню, лінійній алгебрі. До варіаційного числення належать: дослідження достатніх умов екстремуму функціонала (умова Вейерштрасса), побудова задач варіаційного числення для параметрично заданої функції та ін.

ВОЛЬТЕРРА Віто (Volterra Vito; 1860–1940) — італійський математик. Відомий працями з математичної фізики, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, теорії пружності. Розробив математичну теорію боротьби за існування.

ВРОНСЬКИЙ (ГЕНЕ-ВРОНСЬКИЙ) Юзеф Марія (Hoene-Wroński Jozef Maria; 1778–1853) — польський математик і філософ. Одержав цікаві результати в алгебрі, математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь. Уперше ввів функціональний визначник, який має велике значення в теорії лінійних диференціальних рівнянь (визначник Вронського або вронскіан).

ГУК Роберт (Hooke Robert; 1635–1703) — англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства. Основні праці у різноманітних галузях фізики й астрономії. Один із творців математичної теорії пружності.

Д'АЛАМБЕР Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond; 1717–1783) — французький математик, механік і філософ. Автор фундаментальних праць з механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь. Уперше сформулював загальні правила складання диференціальних рівнянь руху будь-яких матеріальних систем (принцип Д'Аламбера). Основні математичні праці стосуються теорії диференціальних рівнянь, де він запропонував метод розв'язування рівнянь другого порядку з частинними похідними, які виражають малі коливання нескінченно тонкої однорідної струни (хвильових рівнянь). Його роботи, а також наступні роботи Л. Ейлера і Д. Бернуллі заклали основу математичної фізики.

ЕЙЛЕР Леонард (Euler Leonhard; 1707–1783) — математик, механік, фізик, астроном. За походженням швейцарець, працював у Росії і Німеччині. Автор майже 850 наукових праць з математичного аналізу, диференціальної геометрії, наближених методів обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики та ін. Системати-

чно розвиваючи нові прийоми інтегрування диференціальних рівнянь та ввівши низку основних понять у цій області, Ейлер створив як самостійну дисципліну теорію звичайних диференціальних рівнянь і заклав основи теорії рівнянь з частинними похідними.

КІРХГОФ Густав Роберт (Kirchhoff Gustav Robert; 1824–1887) — німецький фізик. Основні праці з оптики, електродинаміки і механіки. Розв'язав задачу про розподіл електричних струмів у розгалужених електричних колах (правила Кірхгофа). Математичні дослідження стосуються головно математичної фізики (метод наближеного розв'язування задач дифракції коротких хвиль, формули Кірхгофа в теорії потенціалу, представлення електричної схеми у вигляді графа).

КЛЕРО Алексіс Клод (Clairaut Alexis Claude; 1713–1765) — французький математик, механік і астроном. Увів поняття повного диференціала функції кількох змінних, загального та частинного розв'язків диференціального рівняння. Відомий також працями з геометрії, аналітичної механіки, геодезії, астрономії.

КОШІ Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis; 1789–1857) — французький математик. Опублікував понад 800 праць із теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної механіки, математичної фізики. Дав чітке означення неперервної функції, основних понять теорії збіжних рядів (ознака Коші, критерій Коші), розвинув основи теорії аналітичних функцій. У теорії диференціальних рівнянь довів основну теорему існування розв'язку початкової задачі (задачі Коші). Розробив методи інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку.

КРАМЕР Габріель (Cramer Gabriel; 1704–1752) — швейцарський математик. Один із творців лінійної алгебри, учень Й. Бернуллі. Запропонував метод розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь (метод Крамера). Отримав нові результати також у геометрії, теорії ймовірностей, небесній механіці. Займався історією математики.

ЛАГРАНЖ Жозеф Луї (Lagrange Joseph Louis; 1736–1813) — французький математик і механік. Найбільш важливі праці стосуються варіаційного числення і механіки. Йому належать також видатні дослідження з різних питань математичного аналізу (формула залишкового члена ряду Тейлора, формула скінченних приростів — формула Лагранжа, теорія умовних екстремумів — метод множників Лагранжа), диференціальних рівнянь (теорія особливих розв'язків, метод варіації довільних сталих для лінійного рівняння n -го порядку) та ін.

ЛЕЙБНІЦ Готфрід Вільгельм (Leibniz Gottfried Wilhelm; 1646–1716) — німецький математик, фізик, філософ. Один із творців диференціального та інтегрального числень, їхніх понять і символіки.

Йому належать терміни «диференціал», «диференціальне числення», «диференціальне рівняння», «функція», «координати» та ін. У фізиці відкрив закон збереження енергії, висловив ідею про перетворення одних видів енергії в інші. Йому належить низка відкриттів у спеціальних розділах фізики: в теорії пружності, теорії коливань та ін.

ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (Liouville Joseph; 1809–1882) — французький математик. Автор важливих праць з комплексного аналізу, теорії чисел, диференціальних рівнянь (формула Остроградського–Ліувілля). Першим строго довів неінтегровність у квадратурах деяких класів диференціальних рівнянь. Разом зі Ж. Штурмом розробив теорію крайових задач на власні значення для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Довів одну з фундаментальних теорем механіки — теорему про інтегрування канонічних рівнянь динаміки.

НЬЮТОН Ісаак (Newton Isaac; 1643–1727) — англійський фізик, математик, механік, астроном. Заклав теоретичні основи механіки й астрономії, відкрив закон всесвітнього тяжіння, разом із Лейбніцем вважається творцем диференціального та інтегрального числень. Винайшов метод інтегрування диференціальних рівнянь розвиненням їхніх розв'язків у степеневі ряди. На основі закону всесвітнього тяжіння дав математичне обґрунтування першого закону Кеплера.

ОМ Георг Сімон (Ohm Georg Simon; 1787–1854) — німецький фізик. Встановив основний закон електричного кола (закон Ома). Відкриття Ома дали вперше можливість кількісно розглянути явища електричного струму і мали велике значення для науки.

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801–1862) — український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формули Остроградського–Ліувілля, Остроградського–Якобі), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858–1932) — італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною.

ПІКАР Шарль Еміль (Picard Charles Émile; 1856–1941) — французький математик. Основні праці з теорії диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, асимптотичні розв'язки, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

РІККАТІ Джакомо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676–

1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема інтегровності у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккати).

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685–1731) — англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни. Автор робіт, присвячених перспективі, взаємодії магнітів, капілярності та ін.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) — шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) — французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями (астрономія, акустика, радіотехніка та ін.).

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902–1983) — німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними. Займався також астрофізикою.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) — німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Альтернатива Фредгольма 234 – виключення 139
- Багаточлен характеристичний 103 – відокремлення змінних 34
– Ейлера 60, 151
- Визначник Вронського (вронскіан) 92, 147 – ітерацій (послідовних наближень) 204
– Фредгольма 225 – Лагранжа 47, 117, 163
– характеристичний 152 – невизначених коефіцієнтів 120, 166
Вронскіан (визначник Вронського) 92, 147 – послідовних наближень (ітерацій) 204
- Графік руху 31 – уведення параметра 66, 67
- Дані початкові 24, 74, 132, 138 Метрика 202
- Задача Абеля 193 Множник інтегрувальний 57
- Коші 24, 63, 73, 132, 138, 178, 184 Наближення послідовні 205
– крайова 77
- початкова (задача Коші) 24 Обв'їдна 29
- Залежність лінійна 91, 146 Оператор 203
– інтегральний Фредгольма 207
- Інтеграл диференціального рівняння 27 – лінійний диференціальний 88
– загальний 27, 76, 134 – стискаючий 203
- незалежний 134 Площина фазова 137
- перший 134 Поверхня інтегральна 172
- – незалежний 134 Поле напрямів 29
- системи 133 Порядок рівняння 17
– з частинними похідними 171
- Коефіцієнт рівняння 24, 87 – звичайного диференціального 17, 87
- стиснення 203
- Коливання вільне 113 Принцип стискаючих відображень 204
– власне 113
- гармонічне 111 Простір метричний 202
– – згасаюче 112 – n -вимірний евклідовий 203
- гармонічне накладене 126 – повний 203
- Комбінація інтегровна 134 – фазовий 137
- Крива інтегральна 19, 132 Пряма фазова 137
- Метод Бернуллі 60 Ранг характеристичного числа 229
– варіації довільних сталих 47, 117, 163 Резольвента 217, 220, 229

- Резонанс 126
- Рівняння Абеля 195
- автономне 31
 - Бернуллі 50
 - Вольтерри 192
 - диференціальне 11
 - – з частинними похідними 18, 171
 - – звичайне 17
 - – сім'ї кривих 20
 - Ейлера 108
 - з відокремленими змінними 34
 - з відокремлюваними змінними 33
 - інтегральне 191
 - – другого роду 192
 - – лінійне 192
 - – – неоднорідне 193
 - – – однорідне 193
 - – першого роду 192
 - – спряжене 230
 - квазілінійне 181
 - Клеро 69
 - коливач 110
 - – вимушених 110, 125
 - – вільних 110
 - Лагранжа 68, 109
 - лінійне з частинними похідними першого порядку 173
 - – зі сталими коефіцієнтами 102, 120
 - – неоднорідне n -го порядку 87
 - – – з частинними похідними першого порядку 181
 - – – першого порядку 47
 - – однорідне n -го порядку 87
 - – – з частинними похідними першого порядку 173
 - – – першого порядку 47
 - – першого порядку 46
 - неявне 61
 - – , яке містить тільки похідну 64
 - , не розв'язане відносно похідної 61
 - однорідне 38, 83
 - першого порядку степеня n 65
 - Ріккати 60
 - стаціонарне 31
 - у повних диференціалах 54
 - Фредгольма 192
 - характеристичне 103, 152
- Розв'язок звичайного диференціального рівняння 18, 24, 61, 73
- – загальний 27, 75
 - – – у параметричній формі 27, 76
 - – комплексний 89
 - – особливий 28, 76
 - – тривіальний 89
 - – у квадратурах 19
 - – частинний 28, 76
- Рівняння з частинними похідними 172
- – загальний 176, 183
 - інтегрального рівняння 193, 208
 - – загальний 230
 - системи звичайних диференціальних рівнянь 132
 - – загальний 133
 - – комплексний 143
 - – особливий 133
 - – тривіальний 142
 - – частинний 133
- Рух 31, 75, 137
- аперіодичний згасаючий 113
 - усталений 138
- Система автономна 138
- звичайних диференціальних рівнянь першого порядку 131
 - лінійна 141
 - – неоднорідна 142

- – однорідна 142
- нормальна 131
- розв'язків фундаментальна 94, 150
- спряжена 231
- стаціонарна 138
- Система характеристик 174, 182, 183
- характеристична 174
- Сім'я інтегральних кривих 19
- Стан спокою 32, 138

- Теорема Коші 26, 75, 132
- Пеано 24, 75, 132
- Фредгольма 226, 231, 232
- Точка нерухома 204
- особлива 27
- простору 202
- рівноваги 32
- руху початкова 138
- спокою 32, 138
- Траєкторія руху 137
- Умова необхідна і достатня лінійної незалежності функцій 94, 148
- – лінійної залежності функцій 92, 147
- – – незалежності розв'язків 93, 148
- – сумісності системи нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку 188
- Умови крайові 77
- початкові 24, 74, 132, 178, 184
- розв'язності інтегрального рівняння 232

- Формула Абеля 99
- Ейлера 105
- Остроградського–Ліувілля 97
- Остроградського–Якобі 149
- Формули Пікара 26
- Функція власна 229
- однорідна 38

- Число характеристичне 103, 152
- ядра характеристичне 225

- Ядра ітеровані (повторні) 216, 220
- Ядро вироджене 200, 223
- інтегрального рівняння 191
- спряжене 230