ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 94–101 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.94–101
doi:10.15330/cmp.5.1.94-101

Нестерук В.І.

ПРО ФОРМУЛУ КОЛИВАГІНА, ДОБУТОК ТЕЙТА АСОЦІЙОВАНИЙ НА ІЗОГЕНІЇ, ЛОКАЛЬНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ АРТІНА І СИМВОЛ ГІЛЬБЕРТА

Доведено невиродженість добутку Тейта і формулу Коливагіна для еліптичних кривих з невиродженою редукцією над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, досконалість добутку Тейта асоційованого на ізогенії між абелевими многовидами над псевдолокальним та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем і зв'язок локального відображення Артіна і символу Гільберта для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля.

Ключові слова і фрази: псевдолокальне поле, n-вимірне псевдолокальне поле, n-вимірне загальне локальне поле, ізогенія, добуток Тейта асоційований на ізогенії, локальне відображення Артіна, символ Гільберта, формула Коливагіна.

Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
E-mail: volodymyr-nesteruk@rambler.ru

Вступ

М. Папікіян [10] описав зв'язок між добутком Тейта і добутком Вейля для кривих, визначених над локальним полем. П. Бруін [3] визначив добуток Тейта асоційований на ізогенії у випадку, коли поле скінченне. П. Бруін [3] і Е. Шафер [13] розвинули досконалий добуток Тейта і Фрея-Рюка до добутку Тейта асоційованого на ізогенії.

Відображення Артіна вперше введено Е. Артіном у кінці 20-х – на початку 30-х років минулого століття. Вагомий внесок у його вивчення зробили Е. Нетер, Г. Гассе, Р. Брауер, Ж.-П. Серр [12], І.Б. Фесенко [5], Дж. Мілн, М. Папікіян [10]. Д. Гільберт визначив і дослідив символ норменного лишку, який сьогодні називають символом Гільберта.

Мета цієї роботи — доведення невиродженості добутку Тейта для еліптичних кривих і формули Коливагіна над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, дослідження добутку Тейта, асоційованого на ізогенії, на досконалість над псевдолокальним полем та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, доведення зв'язку символа Гільберта і відображення Артіна у випадку, коли поле є n-вимірним ($n \leq 3$) загальним локальним полем.

Базуючись на роботі М. Папікіяна [10] доведено невиродженість добутку Тейта і формулу Коливагіна для еліптичних кривих над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем, а на роботах [10] та [4] — зв'язок символа Гільберта і відображення Артіна для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. Використовуючи праці П. Бруїна [3], доведено, що добуток Тейта асоційований на ізогенії досконалий над псевдолокальним полем та n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем.

УДК 513.6
2010 *Mathematics Subject Classification:* 12G99, 14H05, 14H52.

© Нестерук В.І., 2013

1 Добуток Тейта асоційований на ізогенії

Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) псевдолокальне поле, тобто поле, для якого задана послідовність повних дискретно нормованих полів $K = K_n, K_{n-1}, ..., K_0$, де кожне наступне поле є полем лишків попереднього і поле K_0 псевдоскінченне [2, 6], E — еліптична крива з невиродженою редукцією, визначена над K, $\overline{K}$ — сепарабельне замикання поля K, K^* — мультиплікативна група поля K. Далі m — натуральне число таке, що $(m, char(K)) = 1$, $\mu_m(\overline{K})$ — група коренів степеня m з 1 в $\overline{K}$, G — група Галуа максимального абелевого розширення поля K з експонентою m, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ — абсолютна група Галуа поля K. Позначимо через $\mathrm{E}_m(K)$ групу m-кручення, $\mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))_m$ (відповідно $\mathrm{H}^1(G, \overline{K}^*)_m$) — підгрупу елементів в $\mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))$ (відповідно $\mathrm{H}^1(G, \overline{K}^*)$), порядок яких ділить m. Фіксуємо $\sigma' \in G_K$ і називаємо σ' автоморфізмом Фробеніуса та позначаємо через $Frob_{\overline{K}/K}$ Припускаємо, що $\mu_m(\overline{K}) \subset K$. Для всіх $0 \leq i \leq 2$ групи $\mathrm{H}^i(G_K, \mathrm{E}_m(\overline{K}))$ скінченні.

Означення 1.1. *Добуток* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K) \times \mathrm{H}^1(G_K, \mathrm{E}(\overline{K}))_m \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *називається добутком Тейта.*

Фіксуємо ξ — твірний елемент з K^*/K^{*m}, який можна ідентифікувати з первісним коренем з 1, $\sigma \in G$. Тоді вибираємо ζ наступним чином:

$$\zeta = \frac{\sigma(\xi^{1/m})}{\xi^{1/m}}. \tag{1}$$

Нехай $b \in K^*$, $\varphi_b \in \mathrm{Hom}(G, \mu_m(\overline{K}))$ і $\varphi_b(g) = \frac{g(b^{1/m})}{b^{1/m}}$. Розглянемо гомоморфізми $\overline{\varphi}_a, \overline{\varphi}_b : G \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ такі, що $\zeta^{\overline{\varphi}_a(g)} = \varphi_a(g)$, $\zeta^{\overline{\varphi}_b(g)} = \varphi_b(g)$. Визначимо елемент з $\mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K}))$ білінійною формою $\mathrm{B}_{a,b}(g_1, g_2) = \zeta^{\overline{\varphi}_a(g_1)\overline{\varphi}_a(g_2)}$. Нехай відображення інваріанта задане наступним чином $inv : \mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^2(G, \overline{K}^*)_m \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Тоді символ Гільберта представляється у вигляді $(a, b) = \zeta^{inv\mathrm{B}_{a,b}}$. Як і в [10] зв'яжемо $c_1 \in \mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K)$ і $c_2 \in \mathrm{H}^1(G, \mathrm{E}(\overline{K}))_m$ гомоморфізмами $\varphi_1 : \mu_m(\overline{K}) \to \mathrm{E}_m(K)$ та $\varphi_2 : \mu_m(\overline{K}) \to \mathrm{E}_m(K)$, використовуючи $\mathrm{E}(K)/m\mathrm{E}(K) \cong \mathrm{Hom}(\mu_m(\overline{K}), \mathrm{E}_m(\overline{K}))$ і $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{E}(\overline{K}))_m \cong \mathrm{Hom}(\mu_m(\overline{K}), \mathrm{E}_m(\overline{K}))$. Відомо, що добуток Вейля $\{\cdot, \cdot\}$: $\mathrm{E}_m(\overline{K}) \times \mathrm{E}_m(\overline{K}) \longrightarrow \mu_m(\overline{K})$ і добуток Тейта задовольняє $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$.

Означення 1.2. *Формула* $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$, *що зв'язує добуток Тейта і добуток Вейля, називається формулою Коливагіна.*

Теорема 1. *Добуток Тейта (добуток Тейта-Шафаревича) для еліптичних кривих з невиродженою редукцією над n-вимірним ($n \leq 3$) псевдолокальним полем невироджений.*

Доведення теореми випливає з наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай ζ — примітивний корінь з 1 в K вибраний належним чином* (1) *і $\varphi_1(\pi) = e_1$, $\varphi_2(\xi) = e_2 \in \mathrm{E}_m(\overline{K})$. Тоді $\zeta^{\langle c_1, c_2 \rangle} = \{e_1, e_2\}$, де $\{e_1, e_2\}$ — добуток Вейля на групі $\mathrm{E}_m(\overline{K})$, $\langle c_1,\ c_2 \rangle$ — добуток Тейта.*

Доведення. Міркуємо індукцією за n. Якщо $n = 0$, то одержуємо псевдоскінченне поле, для якого добуток Тейта невироджений [8] і добуток Вейля невироджений. Доведення даного випадку очевидне.

Якщо $n = 1$, то отримуємо псевдолокальне поле і добуток Тейта невироджений [9]. Знову будемо слідувати міркуванням з [10]. Розглянемо відображення $\varphi_1 : K^*/K^{*m} \to \mathrm{E}_m(K)$ і $\varphi_2 : K^*/K^{*m} \to \mathrm{E}_m(K)$, що задовольняють наступні умови $\varphi_1(\pi) = e_1$, $\varphi_1(\xi) = 0$, $\varphi_2(\pi) = 0$, $\varphi_2(\xi) = e_2$ та $\cup$-добуток $\varphi_1 \cup \varphi_2 \in \mathrm{H}^2(G, \mu_m(\overline{K}))$, який використовується в обчисленні добутку Тейта та описується білінійною формою $\mathrm{B}_1 : K^*/K^{*m} \times K^*/K^{*m} \to \mu_m(\overline{K})$, для якої $\mathrm{B}_1(a,b) = \{\varphi_1(a), \varphi_2(b)\}$ і $\mathrm{B}_1(\pi,\pi) = 1$, $\mathrm{B}_1(\pi,\xi) = \{e_1,e_2\}$, $\mathrm{B}_1(\xi,\pi) = 1$, $\mathrm{B}_1(\xi,\xi) = 1$. Наведемо допоміжні розрахунки для обчислення білінійних форм $(\pi,\xi) = \frac{\theta(\pi)\xi^{1/m}}{\xi^{1/m}} = \frac{\sigma(\xi^{1/m})}{\xi^{1/m}} = \zeta$, $(\xi,\pi) = \zeta^{-1}$, $(\pi,\pi) = 1$, $(\xi,\xi) = 1$. Обчислимо білінійні форми $\mathrm{B}_{\xi,\pi}(\pi,\pi) = \zeta^{\overline{\varphi}_\xi(\pi)\overline{\varphi}_\pi(\pi)} = \varphi_\pi(\pi)^{\overline{\varphi}_\xi(\pi)} = (\pi,\pi)^{\overline{\varphi}_\xi(\pi)} = 1^{\overline{\varphi}_\xi(\pi)} = 1$, $\mathrm{B}_{\xi,\pi}(\xi,\pi) = \zeta^{-1}$, $\mathrm{B}_{\xi,\pi}(\xi,\xi) = 1$, $\mathrm{B}_{\xi,\pi}(\pi,\xi) = 1$. Нехай $\{e_1,e_2\} = \zeta^x$. Зв'яжемо білінійні форми B_1 та $\mathrm{B}_{\xi,\pi}$ відношенням $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_{\xi,\pi}^{-x}$, оскільки $inv\mathrm{B}_1 = (-x)\, inv\mathrm{B}_{\xi,\pi}$. Для $\zeta^{inv\mathrm{B}_1} = \zeta^{(-x)inv\mathrm{B}_{\xi,\pi}}$ знайдемо $\zeta^{inv\mathrm{B}_{\xi,\pi}} = (\xi,\pi) = \zeta^{-1}$. Тоді $\zeta^{(-x)inv\mathrm{B}_{\xi,\pi}} = (\zeta^{inv\mathrm{B}_{\xi,\pi}})^{-x} = (\zeta^{-1})^{-x} = \zeta^x$. Звідси $inv\mathrm{B}_1 = x$, оскільки $\{e_1,e_2\} = \zeta^{inv\mathrm{B}_1}$. Врахувавши, що $inv\mathrm{B}_1$ є значенням добутку Тейта, то $\zeta^{<c_1,c_2>} = \{e_1,e_2\}$.

Якщо $n > 1$, то використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного псевдолокального поля. Розглянемо точну послідовність редукції $0 \to \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E} \to \mathrm{E}' \to 0$, де ядро редукції E_1 є однозначно подільною на m групою. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "m"] & \mathrm{E}(K_n) \arrow[r] \arrow[d, "m"] & \mathrm{E}'(K_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{E}_1 \arrow[r] & \mathrm{E}(K_n) \arrow[r] & \mathrm{E}'(K_{n-1}) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd} \tag{2}$$

Застосовуючи лему про змію до (2), одержуємо $0 \to \mathrm{E}_m(K_n) \to \mathrm{E}_m(K_{n-1}) \to 0 \to \mathrm{E}(K_n)/m\mathrm{E}(K_n) \to \mathrm{E}'(K_{n-1})/m\mathrm{E}'(K_{n-1}) \to 0$. Звідси $\mathrm{E}_m(K_n) \cong \mathrm{E}_m(K_{n-1})$ і $\mathrm{E}(K_n)/m\mathrm{E}(K_n) \cong \mathrm{E}'(K_{n-1})/m\mathrm{E}'(K_{n-1})$ та з випадку $n = 1$ випливає правильність теореми. □

Зазначимо, що міркування, використані для доведення цієї теореми, запозичені з роботи М. Папікіяна [10], де аналогічний результат сформульовано і доведено для випадку еліптичних кривих з невиродженими редукціями, визначених над локальним полем.

Нехай K — псевдолокальне поле, тобто повне дискретно нормоване поле з псевдоскінченним полем лишків k, $\mathfrak{g}_K$ (відповідно $\mathfrak{g}_k$) — абсолютна група Галуа поля K (відповідно k), $\overline{K}$ (відповідно $\overline{k}$) — алгебраїчне замикання поля K (відповідно k).

Лема 1.1 ([11]). *Нехай D — скінченний $\mathfrak{g}_k$-модуль. Тоді* $|\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, D)| = |\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, D)|$.

Теорема 3. *Нехай φ — ізогенія між абелевими многовидами A і B над псевдолокальним полем K з полем лишків k, m — порядок ядра ізогенії $\ker\varphi$. Припускаємо, що поле K містить корені з 1 степеня m. Тоді добуток Тейта асоційований на ізогенії φ, $[.,.]_\varphi : \ker\hat{\varphi}(K) \times \operatorname{coker}(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий.*

Доведення. Використовуємо метод, запропонований П. Бруїном [3] для випадку скінченного поля. Нехай φ — ізогенія між абелевими многовидами над псевдоскінченним полем лишків k. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \ker\varphi \to A \to B \to 0 \tag{3}$$

і оскільки A, B і φ визначені над полем k, то використання $\overline{k}$-точок у цій послідовності дає точну послідовність $\mathfrak{g}_k$-модулів $0 \to \ker\varphi(\overline{k}) \to A(\overline{k}) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} B(\overline{k}) \to 0$, з якої одержуємо точну послідовність груп когомологій $0 \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) \to \ldots$ За означенням $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) = \ker\varphi(k)$, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) = A(k)$, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k})) = B(k)$ і отримуємо $0 \to \ker\varphi(k) \to A(k) \overset{\varphi(k)}{\to} B(k) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k})) \overset{\varphi(\overline{k})}{\to} \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k}))$. Групи $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, A(\overline{k}))$ і $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, B(\overline{k}))$ дорівнюють нулю, оскільки поле k — псевдоскінченне. Звідси

$$0 \to \ker\varphi(k) \to A(k) \overset{\varphi(k)}{\to} B(k) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to 0. \tag{4}$$

З (4) випливає $0 \to B(k)/\varphi(k)(A(k)) \to \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \to 0$. Звідси $B(k)/\varphi(k)(A(k)) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k}))$. Далі, аналогічно розглядаємо ізогенію φ між абелевими многовидами над псевдолокальним полем K. З аналогічної до (3) точної послідовності отримуємо

$$B(K)/\varphi(K)(A(K)) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})).$$

Використовуючи відомий факт, що $\mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^i(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})$ для всіх i, одержуємо при $i = 1$

$$\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \tag{5}$$

і $B(K)/\varphi(K)A(K) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker\varphi(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker\varphi(\overline{k})) \cong B(k)/\varphi(k)A(k)$.

Звідси $\mathrm{B}(K)/\varphi(K)\mathrm{A}(K) \cong \mathrm{B}(k)/\varphi(k)\mathrm{A}(k)$ і, враховуючи $\mathrm{coker}\varphi(K)$ і $\mathrm{coker}\varphi(k)$, одержуємо

$$\mathrm{coker}\varphi(K) \cong \mathrm{coker}\varphi(k). \tag{6}$$

Розглянемо групи $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_k, \ker'(\overline{k})) \cong \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{k})) \cong \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{k})) \cong \ker'(k)$ і $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}_K, \ker'(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^0(\widehat{\mathbb{Z}}, \ker'(\overline{K})) \cong \ker'(K)$, де $\widehat{\mathbb{Z}}$ — вільна топологічна група з однією твірною. Звідси, враховуючи (5), одержуємо

$$\ker\varphi(K) \cong \ker\varphi(k). \tag{7}$$

З (6) і (7) одержуємо, що достатньо показати досконалість добутку Тейта на ізогенії над псевдоскінченним полем.

Аналогічна до (4) точна послідовність і лема 1.1 дозволяють визначити досконалий добуток $(\ker\varphi(K))^\vee \times \mathrm{coker}\,(\varphi(K)) \to K^*$. Враховуючи канонічний ізоморфізм $\varepsilon_\varphi : \ker\hat{\varphi} \to (\ker\varphi)^\vee$, отримуємо, що добуток $\ker\hat{\varphi}(K) \times \mathrm{coker}\,(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий. □

Для групи A (відповідно A'), яка визначена над полем K (відповідно k), позначемо через $A(K)$ (відповідно $A'(k)$) її групу K-раціональних точок (відповідно k-раціональних точок), $A_1(K)$ — ядро редукції $A(K) \to \widetilde{A}(k)$.

Теорема 4. *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) псевдолокальне поле, A — абелевий многовид, визначений над полем K. Припустимо, що A має всі добрі редукції при послідовних редукціях поля K_i, $1 \leq i \leq 3$, φ — ізогенія між абелевими многовидами над полем K, m — порядок ядра ізогенії $\ker\varphi$. Припускаємо, що поле K містить корені з 1 степеня m. Тоді добуток Тейта асоційований на ізогенії φ, $[.,.]_\varphi : \ker\hat{\varphi}(K) \times \mathrm{coker}\,(\varphi(K)) \longrightarrow K^*$ досконалий.*

Доведення. Міркуємо індукцією за n. Якщо $n = 0$, то одержуємо псевдоскінченне поле, для якого добуток Тейта асоційований на ізогенії між абелевими многовидами, які визначені над цим полем є досконалим, що було встановлено нами раніше.

Якщо $n = 1$, то отримуємо псевдолокальне поле і добуток Тейта асоційований на ізогенії між абелевими многовидами, визначених над цим полем, досконалий. Це випливає з теореми 3.

Якщо $n > 1$, то використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного ($n \leq 3$) псевдолокального поля. Розглянемо точну послідовність редукції $0 \to A_1 \to A \to A' \to 0$, де ядро редукції A_1 є однозначно подільною на m групою. Розглянемо комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A(K_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A'(K_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A(K_n) \arrow[r] & A'(K_{n-1}) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd} \tag{8}$$

Застосовуючи лему про змію до (8) одержуємо

$$0 \to \ker\varphi(K_n) \to \ker\varphi(K_{n-1}) \to 0 \to A(K_n)/\varphi A(K_n) \to A'(K_{n-1})/\varphi A'(K_{n-1}) \to 0.$$

Звідси, $\ker\varphi(K_n) \cong \ker\varphi(K_{n-1})$ і $A(K_n)/\varphi A(K_n) \cong A'(K_{n-1})/\varphi A'(K_{n-1})$ та слідуючи міркуванням в доведені теореми 3, отримуємо, що добуток Тейта асоційований на ізогенії досконалий. □

2 ЗВ'ЯЗОК МІЖ ЛОКАЛЬНИМ ВІДОБРАЖЕННЯМ АРТІНА І СИМВОЛОМ ГІЛЬБЕРТА У ВИПАДКУ n-ВИМІРНОГО ЗАГАЛЬНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

Нагадаємо, що n-вимірним ($n \leq 3$) загальним локальним полем K називається поле, для якого задана послідовність повних дискретно нормованих полів $K = K_n$, K_{n-1},...,K_0, де кожне наступне поле є полем лишків попереднього і поле K_0 квазіскінченне [12].

Лема 2.1 ([1]). *Нехай K — загальне локальне поле, m — просте число, $m \neq charK_0$. Тоді когомологічна m-розмірність $cd_m K$ поля K дорівнює $n+1$ і $\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Теорема 5 ([5, 12]). *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) загальне локальне поле, K^{ab} — абелеве розширення поля K. Тоді існує гомоморфізм $\theta : K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ з наступними властивостями:*
1) для кожного простого елемента π з поля K і кожного скінченного нерозгалуженого розширення L поля K одержуємо, що $\theta(\pi)|L = Frob_{L/K}$;
2) для кожного скінченного абелевого розширення L поля K отримуємо, що $N_{L/K}(L^*)$ міститься в ядрі відображення $a \to \theta(a)|L$ і θ індукує ізоморфізм $\theta_{L/K} : K^*/N_{L/K} \to \mathrm{Gal}(L/K)$;
3) підгрупа N групи K^* має вигляд $N_{L/K}(L^*)$ для деякого скінченного абелевого розширення L поля K, $([L:K], char(k)) = 1$, якщо вона має скінченний індекс і відкрита.

Означення 2.1. *Гомоморфізм θ з теореми 5 називається локальним відображенням Артіна.*

Лема 2.2 ([12]). *Нехай G — скінченна група, B — G-модуль, $f : G \to B$ — 1-коцикл, $\overline{f} \in \mathrm{H}^1(G,B)$ — клас когомологій f, $\overline{g} \in \widehat{\mathrm{H}}^{-2}(G,\mathbb{Z})$, $f(s) \in B$ така, що $Nf(s) = 0$, де N взяте із властивості 3 теореми 5. Тоді для кожного $g \in G$ маємо $\overline{g}\overline{f} = \overline{f(s)_0} \in \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B)$, де $\overline{f(s)_0}$ — канонічний образ елемента $f(s) \in B$ в $\widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,B)$.*

Означення 2.2. *Група P показника m — це група, для якої виконується умова $p^m = e$ для всіх $p \in P$.*

Означення 2.3. *Розширення L/K поля K називається розширенням показника m, якщо воно є розширенням Галуа і група Галуа є групою показника m.*

Теорема 6 ([7]). *Нехай K — поле, m — натуральне число, взаємно просте з $\mathrm{char}\, K$ і припускаємо, що всі корені степеня m з 1 знаходяться в K, B — підгрупа в K^* така, що $K^{*m} \subset B$, $K_B = K(B^{1/m})$. Тоді K_B — розширення Куммера (абелеве розширення показника m) і маємо білінійне відображення $(\cdot,\cdot) : \mathrm{Gal}(K_B/K) \times B \to \mu_m(\overline{K})$; $(g,a) = \frac{g\alpha}{\alpha}$, де $\alpha^m = a, g \in \mathrm{Gal}(K_B/K), a \in B$. Тоді ядро зліва даного відображення дорівнює 1, з справа — K^{*m} і розширення K_B/K — скінченне $\Longleftrightarrow$ $[B : K^{*m}]$ — скінченне. У цьому випадку $B/K^{*m} \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(K_B/K), \mu_m(\overline{K}))$.*

Відомо, що існує inv-ізоморфізм локальної теорії полів класів для загальних локальних полів [5, 12] $inv\colon \mathrm{H}^2(G,K_s^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $inv\colon \mathrm{H}^2(G,\mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^2(G,\overline{K}^*)_m \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, де K_s^* — сепарабельне замикання поля K. Образ елемента $\beta \in \mathrm{H}^2(G,K_s^*)$ при відображені inv називається інваріантом елемента β.

Теорема 7. *Нехай K — n-вимірне ($n \leq 3$) загальне локальне поле. Тоді*

$$\theta(b)(a^{1/m}) = (a,b)a^{1/m}. \tag{9}$$

Доведення. У випадку $n = 1$ отримуємо загальне локальне поле і нами було вже встановлено, що (9) має місце. Для зручності читача нагадаємо доведення. Використовуємо метод, запропонований М. Папікіяном [10] для випадку локального поля. Нехай L/K — максимальне абелеве m-розширення зі скінченною групою G, $a \in K^*$, K^*/K^{*m} — скінченна група. Тоді група G — скінченна, оскільки $G \cong K^*/K^{*m}$.

Нехай $a \in K^*$. Враховуючи теорему 6, визначимо $\varphi_a \in \mathrm{Hom}(G,\mu_m(\overline{K}))$ наступним чином:

$$\varphi_a(g) = \frac{g(a^{1/m})}{a^{1/m}}. \tag{10}$$

Тоді формула $\theta(b)(a^{1/m}) = (a,b)a^{1/m}$, врахувавши (10) при $g = \theta(b)$, набуде вигляду $(a,b) = \varphi_a(\theta(b))$. З точної послідовності $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ одержуємо точну послідовність груп когомологій

$$\begin{aligned} \ldots \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{0}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathrm{H}}^{2}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \ldots, \end{aligned}$$

де δ — зв'язуючі гомоморфізми [4].

Нехай $\chi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $\delta_\chi \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$ — образ характера χ відносно зв'язуючого відображення $\delta : \mathrm{H}^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$, $\overline{\alpha} \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G,L^*)$ — образ елемента $\alpha \in K^*$. Тоді $\cup$-добуток $\overline{\alpha}\,\delta_\chi \in \mathrm{H}^2(G,L^*)$ і $\chi(\theta(b)) = inv(\overline{\alpha}\,\delta_\chi)$ [12].

Отже, потрібно довести рівність $\chi(\theta(b)) = inv(\overline{\alpha}\,\delta_\chi)$. Розглянемо ізоморфізм $\theta^{-1}_{L/K} : G \to K^*/N_{L/K}(L^*)$. Тоді за означенням $\theta^{-1}_{L/K}$, одержуємо $\theta(b)\cdot u_{L/K} = \overline{\alpha} \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G, L^*)$ і $\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi = \theta(b)\cdot u_{L/K}\cdot\delta_\chi$. Далі, використовуючи асоціативність $\cup$-добутку, отримаємо $\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi = u_{L/K}\cdot(\theta(b)\cdot\delta_\chi) = u_{L/K}\cdot\delta(\theta(b)\cdot\chi)$, де $\theta(b)\cdot\chi \in \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Групу $\widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ототожнюємо з групою $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ за умови, що $[L : K] = n$, а групу $\widehat{\mathrm{H}}^{-2}(G, \mathbb{Z})$ з G за умови, що гарантовано виконується рівність $\theta(b)\cdot\chi = \chi(\theta(b))$ (лема 2.2).

Розглянемо $\delta : \widehat{\mathrm{H}}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \widehat{\mathrm{H}}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Нехай $\theta(b)\cdot\chi = r/n$, де $r \in \mathbb{Z}$. Тоді $\delta(r/n) \in \widehat{\mathrm{H}}^0(G, \mathbb{Z})$ і $\delta(r/n) = r$ та

$$inv(\overline{\alpha}\cdot\delta_\chi) = inv(u_{L/K}\cdot(\theta(b)\cdot\delta_\chi)) = inv(u_{L/K}\cdot\delta(\theta(b)\cdot\chi)) = inv(u_{L/K}\cdot r) = r/n = \chi(\theta(b)),$$

де $u_{L/K}$ — фундаментальний клас групи $\mathrm{H}^2(G, L^*)$.

Для того, щоб показати, що рівність (9) має місце для n-вимірного загального локального поля, використовуємо метод, запропонований В.І. Андрійчуком [1] для n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. При $n = 0$ одержимо квазіскінченне поле K_0. Відомо, що його абсолютна група Галуа ізоморфна групі $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Як було вже згадано вище, якщо $n = 1$, то отримуємо загальне локальне поле K_1 і рівність (9) залишається вірною. Покажемо, що зв'язок між локальним відображенням Атріна і символом Гільберта (9) зберігається і для випадку, коли $n > 1$. Розглянемо точну послідовність [1]

$$0 \to \mathrm{H}^{\mathrm{r}}(K_{i-1}, \mu_m(\overline{K})) \to \mathrm{H}^{\mathrm{r}}(K_i, \mu_m(\overline{K})) \to \mathrm{H}^{\mathrm{r}-1}(K_{i-1}, \mu_m(\overline{K})), \tag{11}$$

де $1 \leq i \leq n+1, r \geq 1$. Враховуючи, що $cd_m K_{n-1} = n$, і приймаючи $r = n+1$ в (11), одержуємо $\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K})) = 0$ і $\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{n}}(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K}))$. За лемою 2.1 існує ізоморфізм $\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Дійсно, повторюючи аналогічним чином, отримуємо $\mathrm{H}^{\mathrm{n}+1}(K, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^{\mathrm{n}}(K_{n-1}, \mu_m(\overline{K})) \cong \ldots \cong \mathrm{H}^2(K_1, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathrm{H}^1(K_0, \mu_m(\overline{K})) = \mathrm{Hom}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mu_m(\overline{K})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Далі аналогічні міркування, які використані при доведенні (9) для загального локального поля, переносяться на випадок n-вимірного ($n \leq 3$) загального локального поля. □

Автор висловлює подяку В.І. Андрійчуку за постановку задач та допомогу при їх розв'язанні.

REFERENCES

[1] Andriychuk V.I. *Algebraic curves over n-dimensional general local fields*. Mat. Stud. 2001, **15** (2), 209–214.

[2] Ax J. *The elementary theory of finite fields*. Ann. Math. 1968, **88** (2), 239–271.

[3] Bruin P. *The Tate pairing for abelian varieties over finite fields*. J. de theorie des nombres de Bordeaux 2011, **23** (2), 323–328.

[4] Cassels J.W.S., Fröhlich A. (Eds.). Algebraic Number Theory. Mir, Moscow, 1969. (in Russian)

[5] Fesenko I.B., Vostokov S.V. Local Fields and Their Extensions. Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., 2001.

[6] Fried M., Jarden M. Field arithmetic. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[7] Lang S. Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983.

[8] Nesteruk V.I. *On nondegeneracy of Tate product for curves over pseudofinite fields.* Visnyk Lviv Univ. Ser. Mech. Math. 2010, **72**, 195–200. (in Ukrainian)

[9] Nesteruk V.I. *On nondegeneracy of Tate pairing for elliptic curves with good reduction over pseudolocal field.* Appl. Problems of Mechanics and Math. 2010, **8**, 37–40. (in Ukrainian)

[10] Papikian M. On Tate Local Duality. Seminar "Kolyvagin's Appl. of Euler Systems to Elliptic curves", Massachusetts Inst. of Technology, Spring, 2000. `www.math.ucdavis.edu/~osserman/semold/#desc`

[11] Platonov V., Rapinchuk A. Algebraic groups and number theory. Academic Press, Boston, 1994.

[12] Serre J.P. Corps locaux. Hermann, Paris, 1968.

[13] Schaefer E. F. A new proof for the non-degeneracy of the Frey-Rück pairing and a connection to isogenies over the base field. World Scientific Publishing, Hackensack, 2005.

Надійшло 24.09.2012

Nesteruk V.I. *On the Kolyvagin's formula, the Tate pairing associated to an isogeny, the local Artin map and the Hilberts symbol*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 94–101.

A proof of nondegeneracy of the Tate pairing and Kolyvagin's formula for elliptic curves with good reductions over an n-dimensional ($n \leq 3$) pseudolocal field, the Tate pairing associated to an isogeny between abelian varieties over pseudolocal field and an n-dimensional ($n \leq 3$) pseudolocal field, and the relations of local Artin map and of the Hilbert symbol for an n-dimensional ($n \leq 3$) general local field is given.

Key words and phrases: pseudolocal field, n-dimensional pseudolocal field, n-dimensional general local field, isogeny, Tate pairing associated to an isogeny, local Artin map, Hilbert symbol, Kolyvagin's formula.

Нестерук В.И. *О формуле Колывагина, спаривание Тэйта ассоциированого на изогении, локальном отображении Артина и символе Гильберта* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 94–101.

Приведено доказательство невырожденности спаривания Тэйта и формулы Колывагина для эллиптических кривых с невырожденными редукциями над n-мерными ($n \leq 3$) псевдолокальными полями, досконалость спаривания Тэйта ассоциированого на изогении для абелевых многообразий над псевдолокальным полем и над n-мерным ($n \leq 3$) псевдолокальным полем, и связь локального отображения Артина и символа Гильберта для n-мерного ($n \leq 3$) общего локального поля.

Ключевые слова и фразы: псевдолокальное поле, n-мерное псевдолокальное поле, n-мерное общее локальное поле, изогения, спаривание Тэйта ассоциированого на изогении, локальное отображения Артина, символ Гильберта, формула Колывагина.