ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (1), 121–128 Карпатські матем. публ. 2013, Т.5, №1, С.121–128
doi:10.15330/cmp.5.1.121-128

Собкович Р.І., Казмерчук А.І.

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ҐРІНА В ЗАДАЧІ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У випадку багатоточкової крайової задачі Валле-Пуссена для нелінійних систем диференціальних рівнянь доведено теореми існування та єдиності розв'язків. Запропоновано ітераційні схеми для їх відшукання.

Ключові слова і фрази: система диференціальних рівнянь, функція Ґріна.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: _kaz@rambler.ru (Казмерчук А.І.)

У даній статті ми знову повертаємося до відомої задачі Валле-Пуссена: знайти розв'язки звичайного лінійного або нелінійного диференціального рівняння n-го порядку із відомими значеннями шуканого розв'язку в n заданих точках. Очевидна фізична інтерпретація даної задачі: знаючи стан деякого процесу в t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ моменти часу, визначити його стан у довільний момент часу t. При цьому фізичний процес описується математичною моделлю у вигляді деякого диференціального рівняння. У такій постановці дана проблема вперше була сформульована та частково розв'язана Валле Пуссеном у 1929 році [1].

Зараз основними проблемами залишаються встановлення умов існування та єдиності розв'язків поставленої задачі і знаходження ефективних способів їх побудови. На відміну від різних методів дослідження задачі, розглянутих авторами ряду статей (див., наприклад, [1, 2, 3]), ми пропонуємо інший підхід, який ґрунтується на відшуканні розв'язків системи (1) на множині функцій, що задовольняють умови (2). Це дозволило сформулювати та довести нові теореми існування та єдиності, а також обґрунтувати існування ширшого, ніж наведено у вказаних вище роботах, класу функцій, для яких досліджувана задача має розв'язок. Пропонований нами алгоритм одночасно дає можливість знаходити такі розв'язки.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$ — вектори m-вимірного евклідового простору E^m, та поставимо задачу відшукання її розв'язків, що задовольняють умови

$$x(t_i) = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \;\; 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = h. \tag{2}$$

УДК 517.9(076)
2010 *Mathematics Subject Classification:* 34A34.

Зауважимо, що умови (2), не обмежуючи загальності, можна вважати заданими у вигляді

$$x(t_i) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \;\; 0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = h,$$

оскільки цього можна досягти за допомогою заміни шуканої функції у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot x_i, \qquad P_i(t) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (t - t_j).$$

Нехай функція $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ визначена та неперервна в області

$$D = [0; h] \times I_0 \times I_1 \times \cdots \times I_{n-1}, \qquad I_s = [a_s, b_s], \;\; s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Означення. *n раз диференційовну на відрізку $[0; h]$ функцію $x_*(t)$ називатимемо розв'язком задачі* (1), (2)*, якщо $x_*^{(s)}(t) \in I_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, і тотожно задовольняється рівність $x_*^{(n)}(t) = f(t, x_*(t), x_*'(t), \ldots, x_*^{(n-1)}(t))$, а також виконуються умови $x_*(t_i) = x_i$.*

Побудуємо інтегральний оператор $L\left[f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})\right]$ так, щоб рівняння

$$x = L\,[f] \tag{3}$$

та задача (1), (2) були еквівалентними. Еквівалентність задач ми розуміємо в тому сенсі, що функція $x_*(t)$, будучи розв'язком інтегрального рівняння $x = L\,[f]$, повинна також бути розв'язком задачі (1), (2). І навпаки: кожен розв'язок задачі (1), (2) повинен задовольняти рівняння $x = L\,[f]$.

Користуючись методикою, запропонованою нами в [4], отримуємо

$$L\,[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))ds + x_i \right).$$

Серед властивостей многочленів, використаних при побудові оператора L, виділимо такі:

$$\frac{P_i(t_j)}{P_i(t_i)} = \begin{cases} 0, \; j \neq i, \\ 1, \; j = i \end{cases}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(s)}(t) \cdot (t_i - t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = 0, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(n-1)}(t) \cdot (t_i - t)^{n-1}}{P_i(t_i)} = (n-1)!\,. \tag{7}$$

Рівність (4) перевіряється безпосередньо. Доведення тотожності (5) очевидне, оскільки многочлен $n-1$ степеня у лівій частині рівності в n точках t_i приймає однакові значення 1.

Доведення двох наступних тотожностей (6) та (7) ґрунтується на співвідношеннях

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i^s}{P_i(t_i)} = \begin{cases} 0, \ s = 0, 1, 2, \dots, n-2, \\ 1, \ s = n-1, \end{cases} , \tag{8}$$

які випливають з наступних міркувань. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \\ t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1^{n-1} x_1 + t_2^{n-1} x_2 + \dots + t_n^{n-1} x_n = 1 \end{cases}$$

з невідомими x_i. Обчисливши її головний визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$ та міно-ри $\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ t_1 & \dots & 0 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & \dots & 1 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$, які є визначниками Вандермонда, отримуємо

$$\Delta = \prod_{1 \le j < i \le n} (t_i - t_j), \qquad \Delta_k = (-1)^{n+k} \prod_{\substack{1 \le j < i \le n \\ i,j \ne k}} (t_i - t_j).$$

Тому $x_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta} = \dfrac{(-1)^{n+k}}{(t_k - t_1)(t_k - t_2)\dots(t_k - t_{k-1})(t_{k+1} - t_k)\dots(t_n - t_k)} = \dfrac{1}{P_k(t_k)}$.

Обґрунтуємо еквівалентність задачі (1), (2) та задачі відшукання розв'язків рівняння $x = L[f]$. Насамперед зауважимо, що побудований нами оператор L довільну неперервну на відрізку $[0; h]$ функцію $g(t)$ відображає у n раз диференційовну на цьому проміжку функцію $p(t) = L[g(t)]$, що задовольняє умови $p(t_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Це випливає з (4). Тому довільний розв'язок $x_*(t)$ рівняння (3) задовольняє умови (2). Продиференціювавши тотожність $x_* = L\left[f\left(t, x_*, x_*', \dots, x_*^{(n-1)}\right)\right]$ та використавши співвідношення (6), дістаємо

$$x_*' = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \dots) ds + x_i \right) + f(t, x_*, \dots, x_*^{(n-1)}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'(t)}{P_i(t_i)} \cdot \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f(s, \dots) ds + x_i \right).$$

Продовжуючи процес диференціювання та спрощуючи отримані вирази за допомогою тотожностей (6), на n-тому кроці отримаємо рівність

$$x_*^{(n)} = f(t, x_*, \dots, x_*^{(n-1)}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^{(n-1)}(t)}{P_i(t_i)} \cdot \frac{(t_i - t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

або, враховуючи (7), $x_*^{(n)} = f(t, x_*, \dots, x_*^{(n-1)})$.

Те, що кожен розв'язок задачі (1), (2) є розв'язком рівняння $x = L[f]$ випливає з представлення рівняння (1) у вигляді

$$x(t) = L[0] + \int_0^t \int_0^t \ldots \int_0^t f\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) dt\, dt \ldots dt,$$

$$x(t) = L[0] + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_0^t (t-s)^{(n-1)} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)\right) ds, \tag{9}$$

та врахування рівностей $\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_i}^{t_i+1} (t_i - s)^{(n-1)} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)\right) ds = x_{i+1} - x$, які випливають з (9) та умов (2).

Зауважимо, що, побудувавши для правої частини (9) інтерполяційний поліном Лагранжа із значеннями x_i в точках t_i, отримаємо многочлен

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_0^{t_i} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)\right) ds + x_i \right),$$

який співпадає з інтерполяційним поліномом Лагранжа для виразу

$$L[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(t)}{P_i(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i - s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s)\right) ds + x_i \right).$$

Введемо у розгляд функцію $K(t,s)$, визначену в квадраті $[0;h] \times [0;h]$, а в тому числі і у кожній із $2n-2$ областей s_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 1, 2$, на які розбивають цей квадрат $n-1$ прямих $s = t_i$ та пряма $t = s$ (вказані області зображені на рисунку). Визначимо її за допомогою співвідношень

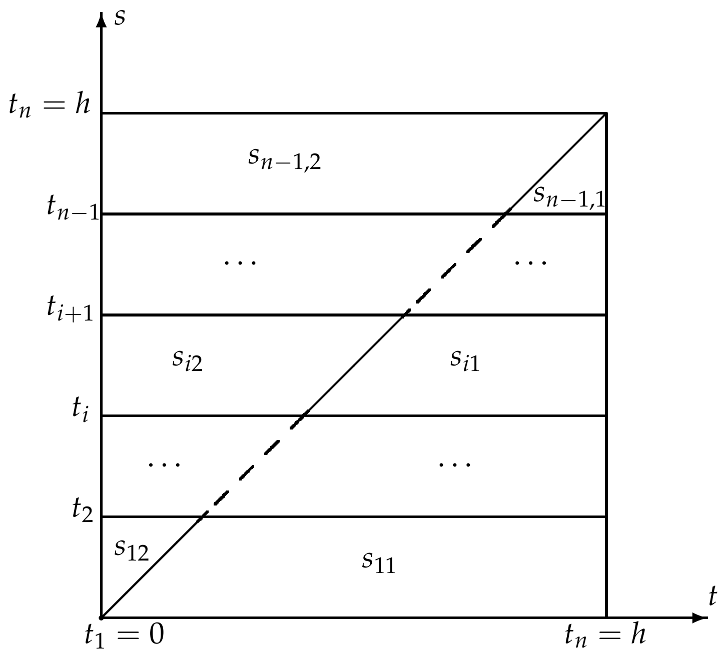
$$K(t,s) = \begin{cases} \frac{P_1(t)}{P_1(t_1)} \cdot \frac{(t_1 - s)^{n-1}}{(n-1)!};\ t_1 \le s \le t_2,\ s \le t \le t_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_1(t)}{P_1(t_1)} \cdot (t_1 - s)^{n-1} + \cdots + \frac{P_k(t)}{P_k(t_k)} \cdot (t_k - s)^{n-1} \right); t_k \le s \le t_{k+1}, s \le t \le t_n; \\ -\frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_2(t)}{P_2(t_2)} \cdot (t_2 - s)^{n-1} + \cdots + \frac{P_n(t)}{P_n(t_n)} \cdot (t_n - s)^{n-1} \right);\ t_1 \le t \le t_2,\ s \ge t; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{P_{k+1}(t)}{P_{k+1}(t_{k+1})} \cdot (t_{k+1} - s)^{n-1} + \frac{P_n(t)}{P_n(t_n)} \cdot (t_n - s)^{n-1} \right); t_k \le t \le t_{k+1}, s \ge t; \end{cases}$$

Відмітимо наступні властивості введеної функції.

1) Функція $K(t,s)$, як функція від змінної t, при довільному $s \in [0,h]$ задовольняє рівняння $x^{(n)}(t) = 0$. Даний факт очевидний, оскільки по змінній t функція $K(t,s)$ є многочленом степеня $n-1$.

2) Функція $K(t,s)$ неперервна в квадраті $[0,h] \times [0,h]$. Справді, розриви можливі вздовж прямих $s = t_i$ та вздовж прямої $s = t$. Але, як легко перевірити, значення функції $K(t,s)$ у сусідніх з цими прямими областях s_{ij} рівні.

3) Вздовж прямих $t = t_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, значення функції $K(t,s)$ дорівнюють 0. Дане твердження випливає із співвідношень (4).



4) Похідна $\frac{\partial^{(n-1)}K(t,s)}{\partial t^{(n-1)}}$ вздовж прямої $t = s$ має розрив величиною 1, тобто

$$\frac{\partial^{(n-1)}K(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{(n-1)}K(s-0,s)}{\partial t^{n-1}} = 1.$$

Доведення цієї властивості реалізується безпосередніми обчисленнями. Зокрема для суміжних областей s_{k1} та s_{k2} маємо

$$\frac{\partial^{(n-1)}K(s+0,s)}{\partial t^{n-1}} - \frac{\partial^{(n-1)}K(s-0,s)}{\partial t^{n-1}} = \frac{(t_1-s)^{n-1}}{P_1(t_1)} + \dots + \frac{(t_k-s)^{n-1}}{P_k(t_k)}$$

$$-\left(-\frac{(t_{k+1}-s)^{n-1}}{P_{k+1}(t_{k+1})} - \dots - \frac{(t_n-s)^{n-1}}{P_n(t_n)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i-s)^{n-1}}{P_i(t_i)}.$$

Отриманий вираз відповідно до співвідношень (8) дорівнює 1.

Введену нами функцію $K(t,s)$ в силу властивостей 1)–4), характерних для функцій Ґріна крайових задач, назвемо функцією Ґріна задачі (1), (2).

Тепер, використовуючи функцію $K(t,s)$, задачу (1), (2) можна записати у вигляді інтегро-диференціального рівняння

$$x(t) = L\,[0] + \int_0^h K(t,s)\cdot f\left(s, x(s), \dots, x^{(n-1)}(s)\right) ds. \tag{10}$$

Зупинимося на теоремах існування та єдиності розв'язків поставленої нами задачі або рівняння (10).

У просторі векторів $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \in E^{mn}$ введемо в розгляд оператор A, означивши його рівністю

$$A(u)=\begin{cases} L\,[0]+\int\limits_0^h K(t,s)\cdot f\,(s,u_0(s),u_1(s),\dots,u_n(s))\,ds\\ L'\,[0]+\int\limits_0^h \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\cdot f\,(s,u_0(s),u_1(s),\dots,u_n(s))\,ds\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ L^{(n-1)}\,[0]+\int\limits_0^h \frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial t^{n-1}}\cdot f\,(s,u_0(s),u_1(s),\dots,u_n(s))\,ds \end{cases},$$

де $u_0(t)=x(t),\dots,u_{n-1}(t)=x^{(n-1)}(t)$. Із неперервності функції $f(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ випливає існування такої векторної константи M, що для всіх точок області D виконується

$$|f(t,y_0,y_1,\dots,y_{n-1})|\le M \tag{11}$$

(тут і далі нерівності між векторами та матрицями розуміємо покомпонентно). Крім цього будемо вважати, що для всіх точок квадрата $[0,h]\times[0,h]$ виконуються нерівності $\left|\frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i}\right|\le k_i$, $i=0,1,\dots,n-1$.

Нехай S — множина векторів $u\in E^{mn}$, компоненти яких задовольняють такі умови $a_s+k_sM+p_s\le u_s\le b_s-k_sM-p_s$, $s=0,1,\dots,n-1$, де $p_s=\left|p^{(s)}(t,x_1,\dots,x_n)\right|_c$, $p(t,x_1,\dots,x_n)=L[0]$ $\left(|\cdot|_c=\max_{t\in[0;h]}|\cdot|\right)$, а також нехай $\tilde u\in S$. Оскільки виконуються співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_0+k_0M+p_0\\ a_1+k_1M+p_1\\ \dots\\ a_{n-1}+k_{n-1}M+p_{n-1}\end{pmatrix}\le A(\tilde u)\le\begin{pmatrix} b_0-k_0M-p_0\\ b_1-k_1M-p_1\\ \dots\\ b_{n-1}-k_{n-1}M-p_{n-1}\end{pmatrix},$$

то можна стверджувати, що $A\tilde u\in S$. Тому оператор A переводить множину S в себе і, будучи цілком неперервним (останнє випливає з неперервності функції f), має в S хоча б одну нерухому точку. Відповідно задача (1), (2) при цьому теж має хоч один розв'язок.

Таким чином, вірне наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція* $f\left(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}\right)$ *визначена та неперервна в області* D*, виконується нерівність* (11)*, а також множина* S *не порожня. Тоді задача* (1)*,* (2) *має в* S *хоча б один розв'язок.*

Дослідимо умови, при яких розв'язок єдиний. При цьому будемо вважати, що в області D функція $f\,(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ задовольняє умови Ліпшиця за змінними $y_0,\dots,y_{n-1}$ з матрицями K_s, $s=0,1,\dots,n-1$, відповідно. Тобто для двох довільних точок $(t,y_0,\dots,y_{n-1})$, $(t,\tilde y_0,\dots,\tilde y_{n-1})\in D$ виконується нерівність

$$|f(t,y_0,y_1,\dots,y_{n-1})-f(t,\tilde y_0,\tilde y_1,\dots,\tilde y_{n-1})|\le\sum_{i=1}^{n-1}K_i\cdot|y_i-\tilde y_i|\,. \tag{12}$$

Побудуємо послідовні наближення, визначивши їх рівностями

$$u_{k+1}=Au_k(t),\ \ k=0,1,\dots, \tag{13}$$

та вибравши за початкове наближення вектор $u_0(t) = \begin{pmatrix} p(t, x_1, \dots, x_n) \\ p'(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ p^{(n-1)}(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$.

Враховуючи (12), знаходимо

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| = |Au_k - Au_{k-1}|$$

$$\leq \begin{pmatrix} \int\limits_0^h |K(t,s)| \cdot |f(s,(u_0(s))_k, \dots, (u_{n-1}(s))_k) - f(s,(u_0(s))_{k-1}, \dots, (u_{n-1}(s))_{k-1})|\, ds \\ \int\limits_0^h \left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right| \cdot |f(s,(u_0(s))_k, \dots, (u_{n-1}(s))_k) - f(s,(u_0(s))_{k-1}, \dots, (u_{n-1}(s))_{k-1})|\, ds \\ \dots \\ \int\limits_0^h \left|\frac{\partial^{n-1} K(t,s)}{\partial t^{n-1}}\right| \cdot |f(s,(u_0(s))_k, \dots, (u_{n-1}(s))_k) - f(s,(u_0(s))_{k-1}, \dots, (u_{n-1}(s))_{k-1})|\, ds \end{pmatrix}$$

$$\leq \begin{pmatrix} hk_0 \sum\limits_{i=1}^{n-1} K_i \left|(u_i(t))_k - (u_i(t))_{k-1}\right|_c \\ hk_1 \sum\limits_{i=1}^{n-1} K_i \left|(u_i(t))_k - (u_i(t))_{k-1}\right|_c \\ \dots \\ hk_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n-1} K_i \left|(u_i(t))_k - (u_i(t))_{k-1}\right|_c \end{pmatrix}.$$

Із одержаної векторної нерівності отримуємо рекурентне співвідношення

$$|r_{k+1}(t)|_c \leq Q\,|r_k(t)|_c\,, \tag{14}$$

$$Q = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} k_i K_i, \qquad r_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} K_i \left|(u_i)_k - (u_i)_{k-1}\right|, \qquad k = 0, 1, \dots.$$

Ітеруючи нерівність (14), дістаємо $|r_{k+1}(t)|_c \leq Q^k\,|r_1(t)|_c$. Сказане вище дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, нерівність* (12)*, а також всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі. Тоді задача* (1), (2) *має єдиний розв'язок $x_*(t)$, до якого при $k \to \infty$ рівномірно по $t \in [0,h]$ збігається послідовність векторних функцій* (13)*. Похибка характеризується при цьому векторною нерівністю*

$$\begin{pmatrix} |x_k(t) - x_*(t)| \\ |x_k'(t) - x_*'(t)| \\ \dots \\ |x_k^{(n-1)}(t) - x_*^{(n-1)}(t)| \end{pmatrix} \leq Q^k\,(E - Q)^{-1}\,|u_1(t) - u_0(t)|_c, \tag{15}$$

де E — одинична матриця, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Доведення. Оскільки всі власні значення матриці Q лежать в одиничному крузі, то $\sum\limits_{i=0}^{l-1} Q^{k+i} \leq Q^k \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} Q^i = Q^k \cdot (E-Q)^{-1}$, $\lim_{k\to\infty} Q^k = \Theta$. Тому

$$|r_{l+k}(t) - r_k(t)|_c \leq \sum_{i=0}^{l-1} Q^{k+i} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c \leq Q^k \cdot (E-Q)^{-1} \cdot |r_1(t) - r_0(t)|_c\,. \tag{16}$$

Звідси випливає рівномірна по $t \in [0,h]$ збіжність послідовностей $\{(u_i(t))_k\}$ для всіх $i = 0,1,\ldots,n-1$; $\lim_{k\to\infty}(u_i(t))_k = (u_i(t))_*$, $(u_0(t))_* = x_*(t)$. Послідовні наближення $(u_i(t))_k$ належать області D. Це випливає із структури множини S. Очевидно, що функція $x_*(t)$ задовольняє умови (2), оскільки ці умови задовольняють всі наближення $x_k(t)$. Оцінки похибок (15) випливають із (16) граничним переходом при $l \to \infty$. Єдиність розв'язку $x_*(t)$ обґрунтовується методом від супротивного. Теорема доведена. □

Зауважимо, що в скалярному випадку задачі (1), (2) достатні умови існування розв'язків у роботах [1, 2, 3] отримані у вигляді нерівностей

$$q_1 = \sum_{i=0}^{n-1} K_{n-i-1}\cdot\frac{h^{i+1}}{(i+1)!} < 1, \qquad q_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{K_{n-i-1}\cdot h^{i+1}}{(i+1)\cdot 2^{i+1}\cdot\left[\frac{i+1}{2}\right]!\cdot\left[\frac{i}{2}\right]!} < 1,$$

$$q_3 = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{n-i-1}{n\cdot(i+1)!}\cdot K_{n-i-1}\cdot h^{i+1} + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n\cdot n!}\cdot h^n\cdot K_0 < 1.$$

Результати теореми 2 дозволяють покращити дані оцінки та визначити більш широкий клас рівнянь, для яких існують розв'язки задачі (1), (2), а алгоритм (13) дає змогу знаходити такі розв'язки.

References

[1] Ch. J. de la Valle Poussin. *Sur lequation differentielle du second ordre. Determination d'une integrale, par deux valours assignees. Extension aux eqation d'ordre.* J. de Math. pur et appl. 1929, **8**, 125–144.

[2] Bessmertnych G.A., Levin A.Yu. *About some estimates of differentiable functions of one variable.* Doklady Acad. Sci. USSR 1962, **144** (3), 171–174. (in Russian)

[3] Levin A.Yu. *The estimation of function with a monotonically distributed zeros of subsequent derivatives.* Math. Sbornik 1964, **64** (5), 396–409. (in Russian)

[4] Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Solvability of n-point problems with parameter for system of differential equations.* Carpathian Math. Publ. 2010, **2** (2), 116–122. (in Ukrainian)

Надійшло 24.01.2013

Sobkovich R.I., Kazmerchuk A.I. *Construction on the Green function for Vallée-Poussin problem for nonlinear system of differential equations*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (1), 121–128.

Existence and uniqueness theorems of solution of n-point Vallée-Poussin problem for system of nonlinear differential equations are proved. Iterative schemes for finding them are proposed.

Key words and phrases: system of differential equations, Green function.

Собкович Р.И., Казмерчук А.И. *Построение функции Грина в задаче Валле-Пуссена для нелинейных систем дифференциальных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №1. — С. 121–128.

В случае многоточечной краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейных систем дифференциальных уравнений доказаны теоремы существования и единственности решений. Предложены итерационные схемы для их определения.

Ключевые слова и фразы: система дифференциальных уравнений, функция Грина.