МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «ПРИКАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНИКА»

Кафедра економічної кібернетики

І.В. Буртняк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації для студентів спеціальності економіка, економічна кібернетика

Івано-Франківськ
2021

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050я73

Автор: доктор економічних наук, професор кафедри економічної кібернетики Буртняк Іван Володимирович

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради економічного факультету Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника (протокол № 5 від 22 вересня 2021 року)

Рецензенти:

Загороднюк А.В. – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Малицька Г.П.– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Буртняк І.В.

Вища математика: методичні рекомендації для студентів спеціальності економіка, економічна кібернетика. – Івано-Франківськ: .

Методичні рекомендації призначаються для студентів першого курсу всіх спеціальностей. Містять основний теоретичний матеріал, велику кількість розв’язаних прикладів, тридцять варіантів індивідуальних домашніх завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями

УДК 519.86(075.8)

ББК 65.050я73

Вступ

Вивчення курсу вищої математики забезпечує розвиток математичного та логічного мислення студентів, їх підготовку до вивчення спеціальних дисциплін і самостійної роботи над науковою та науково-технічною літературою, передбачає ознайомлення з основними поняттями, ідеями та методами сучасної математики, можливостями їх використання при розв'язуванні конкретних задач.

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають на практиці.

Результати навчання:

7. Пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки.

8. Застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач.

15. Демонструвати базові навички креативного та критичного мислення у дослідженнях та професійному спілкуванні.

21. Вміти абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів.

23. Показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне, самокритичне мислення.

Компетентності:

ІК - Здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в економічній сфері, які характеризуються комплексністю та невизначеністю умов, що передбачає застосування теорій та методів економічної науки.

ЗК3. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК4. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК9. Здатність до адаптації та дій в новій ситуації.

ЗК11. Здатність приймати обґрунтовані рішення.

СК6. Здатність застосовувати економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач.

СК14. Здатність поглиблено аналізувати проблеми і явища в одній або декількох професійних сферах з врахуванням економічних ризиків та можливих соціально-економічних наслідків.

1. ПЕРВІСНА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основною задачею диференціального числення є задача диференціювання, тобто задача відшукання швидкості змінювання деякої функції. Але на практиці часто виникає потреба у розв'язанні оберненої задачі: якщо відома швидкість змінювання функції знайти цю функцію. Тобто потрібно знайти функцію, якщо відома похідна цієї функції. Ця операція називається інтегруванням. Визначимо цей термін докладніше.

Означення. Нехай функція $f(x)$ x задана на інтервалі (a, b). Функція $F(x)$

називається **первісною** для функції $f(x)$, якщо для будь-якого $x \in (a,b)$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, нехай $f(x) = \cos x$, тоді її первісна $F(x) = \sin x$.

Дійсно, за означенням первісної: $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$.

Легко помітити, що функція $F_1(x) = \sin x + C$ (C – довільна стала) буде теж первісною для функції $f(x) = \cos x$:

$$F_1'(x) = (\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x = f(x).$$

Тобто можна стверджувати, якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$, то функція $F(x) + C$ також буде первісною для функції $f(x)$.

Виникає питання: Чи вичерпується множина усіх первісних для даної функції $f(x)$ виразом виду $F(x) + C$?

Нехай *G(x)* теж первісна для функції $f(x)$, тобто $G'(x) = f(x)$, але і $F'(x) = f(x)$. Розглянемо різницю $G(x) - F(x)$ і позначимо її через *R(x)*. Тоді $R'(x) = [G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Тобто $R'(x) = 0$, а тому $R(x)$ – стала величина, і $R(x) = C = G(x) - F(x)$. Таким чином, дві первісні для функції $f(x)$ відрізняються на сталу величину і вираз $F(x) + C$ зображує загальний вигляд шуканої первісної функції, або інакше - повну сім'ю первісних для функції $f(x)$.

Означення. Якщо $F(x)$ первісна для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$, де *C* може приймати будь-яке стале значення, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається символом

$$\int f(x)dx,$$

де $\int$– позначення інтегралу; $f(x)$– підінтегральна функція; $f(x)dx$– підінтегральний вираз.

Таким чином, рівність $\int f(x)dx = F(x) + C$ є лише інший запис співвідношення $F'(x) = f(x)$, або $(F(x) + C)' = f(x)$.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл – це сім'я кривих (інтегральних кривих), кожна з яких отримується шляхом зсуву однієї з кривих паралельно самій собі угору або вниз вздовж осі *Oy*.

Операція знаходження невизначеного інтеграла (тобто відшукання $F(x) + C$) від даної функції $f(x)$ називається **інтегруванням** функції $f(x)$.

І нарешті виникає питання: чи для будь-якої функції існує первісна, а відповідно і невизначений інтеграл?

ТЕОРЕМА *(про існування первісної).*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, то для цієї функції існує первісна (а тому – і невизначений інтеграл).

Інтегрування – операція обернена операції диференціювання (тобто операції знаходження похідної від функції), тому правильність результату інтегрування можна завжди перевірити диференціюванням первісної.

Приклад.

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$, тому що $\left(\frac{x^4}{4} + c\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3$.

2. $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$, тому що $\left(\frac{1}{5} e^{5x} + c\right)' = \frac{1}{5} e^{5x} \cdot 5 + 0 = e^{5x}$.

2. ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Доведення: Нагадаємо, що диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою : $dy = f'(x)dx$, тому

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

Доведення: $d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F'(x)dx + 0 = f(x)dx$.

3. $\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)dx$, де $c \neq 0$, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$,

тобто невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій.

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, де a і b сталі $(a \neq 0)$.

Висновок 1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$, приймаємо $b = 0$.

Висновок 2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$, приймаємо $a = 1$.

Для доведення властивостей 3, 4 і 5 достатньо знайти диференціали лівої і правої частин рівностей.

3. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0 \cdot dx = C$.

2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

Зокрема, $\int dx = x + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

УВАГА!

Таблицю інтегралів потрібно вивчити. Таблицю похідних – повторити.

Приклад. Використовуючи таблицю невизначених інтегралів, знайти наступні інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^4}$; 2) $\int 5^x dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$.

Розв'язання:

1. Скористаємося табличним інтегралом 2 ($\alpha = -4$)

$$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

2. Скористаємося табличним інтегралом 4 ($a = 5$)

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

3. Скористаємося інтегралом 10 ($a = 3$)

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{2 \cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

4. Скористаємося інтегралом 11 ($a = \sqrt{3}$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Питання на самоперевірку

1. Що таке первісна для функції $f(x)$?
2. Скільки первісних має функція $f(x)$?
3. Сформулюйте теорему про існування первісної.
4. Що таке невизначений інтеграл?
5. Що таке $F(x) + C$ з геометричної точки зору?
6. Що таке операція інтегрування?

7. Як перевірити результат інтегрування?
8. Сформулюйте властивості невизначеного інтеграла. Доведіть першу і п'яту властивості.

4. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Для розв'язання наступних прикладів будемо користуватись таблицею інтегралів, властивостями інтегралів і формулами з елементарної математики.

Приклад. Знайти інтеграли (за допомогою таблиці інтегралів, основних властивостей інтегралів і формул з елементарної математики):

1) $\int (\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x})dx$; 2) $\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 3) $\int \sqrt{x}\cdot(x^3-4)^2 dx$.

Розв'язання:

1. Скористаємося властивостями 3 і 4 невизначеного інтеграла

$$\int (\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x})dx = \int \frac{1}{4}e^x dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx + \int \frac{8}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int e^x dx - \int x^{-\frac{2}{3}}dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}e^x - \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + 8\ln|x| + C = \frac{e^x}{4} - 3\cdot\sqrt[3]{x} + 8\ln|x| + C.$$

2. Поділимо почленно чисельник підінтегрального дробу на знаменник:

$$\frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x} = \frac{5}{\sin^2 x} + \sin x.$$

Звідси

$$\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx = \int (\frac{5}{\sin^2 x} + \sin x)dx = 5\int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \sin x dx = -5\mathrm{ctg}x - \cos x + C.$$

3. Перетворимо підінтегральну функцію таким чином:

$$\sqrt{x}\cdot(x^3-4)^2 = x^{\frac{1}{2}}\cdot(x^6 - 8x^3 + 16) = x^{6+\frac{1}{2}} - 8x^{3+\frac{1}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} - 8x^{\frac{7}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\int \sqrt{x}\cdot(x^3-4)^2 dx = \int (x^{\frac{13}{2}} - 8x^{\frac{7}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}})dx = \int x^{\frac{13}{2}}dx - 8\int x^{\frac{7}{2}}dx + 16\int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{13}{2}+1}}{\frac{13}{2}+1} - 8\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + 16\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{15}x^{\frac{15}{2}} - \frac{16}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{32}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Розглянемо наступну групу інтегралів, яку будемо називати «майже» табличними інтегралами.

Приклад. Знайти «майже» табличні інтеграли:

1) $\int \cos 6x\, dx$; 2) $\int e^{-2x}dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$;

4) $\int \sin(\frac{3}{8}x+2)dx$;   5) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$;   6) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

Розв'язання:

1. Скористаємося властивістю 5 (висновок 1):

$\int \cos 6x\,dx$ відрізняється від табличного $\int \cos x\,dx$ коефіцієнтом $a=6$, тому, враховуючи, що $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, будемо мати $\int \cos 6x\,dx = \{a=6\} = = \frac{1}{6}\sin 6x + C$.

2. Розв'язання аналогічне:

$\int e^{-2x}dx$ відрізняється від табличного $\int e^x dx$ коефіцієнтом $a=-2$, тому, якщо $\int e^x dx = e^x + C$, то $\int e^{-2x}dx = \{a=-2\} = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$.

3. Інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$ відрізняється від табличного $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ коефіцієнтом $a=\frac{1}{5}$, тому $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \left\{a=\frac{1}{5}\right\} = -5\operatorname{ctg}\frac{x}{5} + C$.

4. Скористаємося властивістю 5: $a=\frac{3}{8}$, $b=2$, тоді $\int \sin\left(\frac{3}{8}x+2\right)dx = = -\frac{8}{3}\cos\left(\frac{3}{8}x+2\right) + C$.

5. Зведемо даний інтеграл до табличного інтеграла 9. Для цього зробимо перетворення в знаменнику підінтегральної функції $4+9x^2 = 9x^2+4 = = 9\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$. Тоді

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(x^2+\frac{4}{9}\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+\frac{4}{9}} = \left\{\text{тут } a=\frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2} + C.$$

6. Зробимо перетворення у знаменнику і скористаємось табличним інтегралом 12:

$$\sqrt{2x^2+5} = \sqrt{2(x^2+\tfrac{5}{2})} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+\tfrac{5}{2}};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{5}{2}}\right| + C.$$

Далі розглянемо формулу, яка в деяких випадках буде корисною при обчисленні інтегралів.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C. \quad (1)$$

Приклад. Обчислити інтеграли за допомогою формули (1):

1) $\int \frac{dx}{x-5}$; 2) $\int \frac{dx}{-3x+10}$; 3) $\int \frac{xdx}{x^2-12}$; 4) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$.

Розв'язання:

1. Якщо $f(x) = x-5$, то $f'(x) = 1$, тому $\int \frac{dx}{x-5} = \int \frac{1}{x-5} dx = \ln|x-5| + C$.

2. Якщо $f(x) = -3x+10$, то $f'(x) = -3$.

Зробимо перетворення в підінтегральній функції

$$\frac{1}{-3x+10} = \frac{(-3)\cdot(-\frac{1}{3})}{-3x+10} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)}{-3x+10}.$$

Тоді $\int \frac{dx}{-3x+10} = \int -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)}{-3x+10} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{(-3)}{-3x+10} dx = -\frac{1}{3}\ln|-3x+10| + C$.

3. Якщо $f(x) = x^2-12$, то $f'(x) = 2x$, тоді

$$\int \frac{xdx}{x^2-12} = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2-12} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-12} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-12\right| + C.$$

4. Якщо $f(x) = \ln x$, то $f'(x) = \frac{1}{x}$, тому $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C$.

Застосування метода безпосереднього інтегрування може бути корисним для розв'язання багатьох інтегралів. Розглянемо лише деякі з них.

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int \sin^2 5xdx$; 2) $\int \frac{x^2}{x^2-4} dx$; 3) $\int \operatorname{tg}^2 xdx$; 4) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$.

Розв'язання:

1. Скористаємося формулою зниження степеня: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, тобто будемо мати $\sin^2 5x = \frac{1-\cos 10x}{2}$. Звідси

$$\int \sin^2 5xdx = \int \frac{1-\cos 10x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 10x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 10xdx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{10}\sin 10x\right] + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$$

2. Перетворимо підінтегральний вираз: $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{(x^2-4)+4}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4}$.

Звідси маємо

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-4}\right) dx = \int dx + 4\int \frac{dx}{x^2-4} = \{\text{інтеграл } 10,\ a = 2\} =$$

$$= x + 4\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

3. Скористаємось формулою $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, тоді

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

4. Перетворимо підінтегральний вираз:

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \left\{\begin{matrix}\text{розділимо почленно}\\ \text{чисельник на знаменник}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тоді

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x})dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + C.$$

Завдання для аудиторної роботи

Користуючись методом безпосереднього інтегрування, обчислити інтеграли:

1) $\int (2\cdot\sqrt[5]{x^6} - \sin x)dx$; 2) $\int (\frac{5}{x} - \frac{7}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^2 - 25})dx$; 3) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^3}dx$;

4) $\int \frac{(x-5)^3}{\sqrt{x}}dx$; 5) $\int (\frac{\sqrt{5}}{\cos^2 x} + \sqrt[5]{x} - \frac{1}{x^4})dx$.

Обчислити інтеграли, результат перевірити диференціюванням:

1) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{dx}{7^x}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^2+25}$.

Знайти «майже» табличні інтеграли:

1) $\int \sin 8x\, dx$; 2) $\int \cos\frac{9}{4}x dx$; 3) $\int e^{-3x}dx$; 4) $\int \sin(5-2x)dx$; 5) $\int \frac{dx}{7x^2-11}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-11}}$; 7) $\int \frac{dx}{7x^2+11}$; 8) $\int \frac{dx}{11-7x^2}$; 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 10x}$.

Обчислити інтеграли:

1) $\int \cos^2 3x dx$; 2) $\int (\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x)^2 dx$; 3) $\int \frac{x^2}{x^2+8}dx$;

4) $\int \frac{3-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{2-x^3}dx$.

Домашнє завдання

Користуючись методом безпосереднього інтегрування, обчислити інтеграли.

Приклад 1.

1) $\int (2x^4+5x-3)dx$; 2) $\int (4x-1)\sqrt[3]{x}dx$; 3) $\int \frac{(\sqrt{x}+5)^2}{x}dx$.

Відповідь: 1) $\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2-3x+C$; 2) $\frac{12}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; 3) $x+20\sqrt{x}+25\ln|x|+C$.

Приклад 2.

1) $\int \cos\frac{x}{4}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{2}{3}x}$; 3) $\int 9^{-x}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^2(2-x)}$.

Відповідь: 1) $4\sin\frac{x}{4}+C$; 2) $-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{2}{3}x+C$; 3) $-\frac{9^{-x}}{\ln 9}+C$; 4) $-\operatorname{tg}(2-x)+C$.

Приклад 3.

1) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-10x^2}}$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\cdot x}{\sqrt{2}}+C$; 2) $\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}}\right|+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{10}}\arcsin\sqrt{10}\cdot x+C$.

Приклад 4.

1) $\int \frac{dx}{x+2}$; 2) $\int \frac{dx}{2-9x}$; 3) $\int \frac{x^3dx}{5x^4+1}$; 4) $\int \operatorname{tg}x\,dx$.

Відповідь: 1) $\ln|x+2|+C$; 2) $-\frac{1}{9}\ln|2-9x|+C$; 3) $\frac{1}{20}\ln\left|5x^4+1\right|+C$; 4) $-\ln|\cos x|+C$.

Приклад 5.

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; 3) $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; 5) $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}dx$.

Відповідь: 1) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C\left\{\text{вказівка:}\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right\}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C\left\{\text{вказівка: } 1+\cos x=2\cos^2 x/2\right\}$;

3) $2x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\left\{\text{вказівка: } 4-x=\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\right\}$;

4) $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C\left\{\text{вказівка: } \frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}\right\}$;

5) $\sin x-\cos x+C\left\{\begin{array}{l}\text{вказівка: в чисельнику використати формулу}\\ a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\end{array}\right\}$.

5. ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

5.1. Метод підстановки (метод заміни змінної)

Розглянемо один із найважливіших прийомів інтегрування функцій – метод заміни змінної. В його основі лежить наступне зауваження: якщо відомо, що $\int f(t)dt = F(t) + C$, то

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = F\left[\varphi(x)\right] + C \tag{2}$$

(функції $f(t), \varphi(x), \varphi'(x)$ неперервні).

Доведемо рівність (2). Для цього знайдемо диференціали лівої і правої частин рівності. Диференціал лівої частини дорівнює підінтегральному виразу (див. 2, властивість 2)

$$d\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx.$$

Знайдемо диференціал правої частини рівності (2)

$$d\left[F\left[\varphi(x)\right] + C\right] = dF[\varphi(x)] + dC = dF[\varphi(x)] = F'[\varphi(x)] \cdot d\varphi(x) =$$

$$= F'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \{\rightleftharpoons F'(t) = f(t) \rightleftharpoons\} = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx.$$

Тоді на основі зауваження формула заміни змінної буде мати вигляд:

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \begin{Bmatrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{Bmatrix} = \int f(t)dt. \tag{3}$$

Ясно, що інтеграл, який стоїть праворуч у формулі (3) повинен бути простіше, ніж заданий. Крім того, потрібно мати на увазі, що при виборі підстановки $\varphi(x) = t$, яка спрощує підінтегральний вираз, в його складі, крім $\varphi(x)$, повинен знаходитись множник $\varphi'(x)dx$. Наведемо декілька прикладів. Якщо під знаком інтеграла є вираз

$$\frac{1}{x}dx \quad \left(\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = \varphi'(x)dx = d\varphi(x)\right),$$

то потрібно робити підстановку $\ln x = t$. Аналогічно:

$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$,	підстановка $\operatorname{tg} x = t$,
$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$,	підстановка $ax + b = t$,
$\sin x dx = -d(\cos x)$,	підстановка $\cos x = t$,
$x^2 dx = \frac{1}{3}d(x^3)$,	підстановка $x^3 = t$,
$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$,	підстановка $\arcsin x = t$,
$\sin 2x dx = -d(\cos^2 x + a)$,	підстановка $\cos^2 x + a = t$.

Іноді зручніше робити підстановку у вигляді $x = \psi(t)$ (функція $\psi(t)$ і її похідна неперервні). Тоді формула заміни змінної має такий вигляд:

$$\int f(x)dx = \left\{\begin{matrix} x=\psi(t) \\ dx=\psi'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int f[\psi(t)]\cdot\psi'(t)dt.$$

Метод заміни змінної – один з основних методів обчислення невизначених інтегралів. Успіх інтегрування залежить від того чи зможе студент підібрати таку вдалу підстановку, яка б спростила заданий інтеграл. На жаль не існує загального «рецепту», за допомогою якого можна зрозуміти, яку підстановку потрібно застосовувати до даного інтеграла (хоча «рецепт» існує: велика кількість самостійно розв’язаних прикладів).

Питання на самоперевірку

1. Як записуються формули заміни змінної?

2. Якщо $\varphi'(x)dx = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$, яку підстановку слід зробити? Тобто, чому дорівнює $\varphi(x)$?

3. Якщо $\varphi'(x)dx = \dfrac{dx}{x^2}$, чому дорівнює $\varphi(x)$?

4. Знайти диференціали лівої і правої частин рівності: $x^2 = 3z-1$.

Приклад. Обчислити інтеграли, використовуючи відповідну підстановку:

1) $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$; 2) $\int e^{x^2} x dx$; 3) $\int \dfrac{\ln^4 x}{x}dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{(5x-1)^6}$;

5) $\int \sqrt{3x+1}dx$; 6) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$; 7) $\int x^3\cdot\cos(x^4+2)dx$.

Розв’язання:

1. Помітимо, що $\cos x\, dx = d(\sin x)$. Тому

$$\int \sin^3 x\cdot\cos x dx = \left\{\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix}\right\} = \int t^3 dt = \left\{\begin{matrix} \text{табличний} \\ \text{інтеграл} \end{matrix}\right\} = \frac{t^4}{4}+C = \frac{\sin^4 x}{4}+C \ .$$

2. Помітимо, що $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$. Тому

$$\int e^{x^2} x dx = \left\{\begin{matrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt, \text{ або } xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\} = \int e^t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

3. $$\int \frac{\ln^4 x}{x}dx = \int \ln^4 x\cdot\frac{dx}{x} = \left\{\begin{matrix} \ln x = z \\ \frac{1}{x}dx = dz \end{matrix}\right\} = \int z^4 dz = \frac{z^5}{5}+C = \frac{\ln^5 x}{5}+C.$$

4. $$\int \frac{dx}{(5x-1)^6} = \left\{\begin{matrix} 5x-1 = y \\ 5dx = dy, \text{ або } dx = \frac{1}{5}dy \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{5}dy}{y^6} = \frac{1}{5}\int y^{-6}dy = \frac{1}{5}\cdot\frac{y^{-5}}{-5}+C =$$

$$= -\frac{1}{25y^5}+C = -\frac{1}{25\cdot(5x-1)^5}+C.$$

5. $\int\sqrt{3x+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{3x+1}=t\\ 3x+1=t^2\\ 3dx=2tdt,\text{ або }\ dx=\frac{2}{3}tdt\end{array}\right\}=\int t\cdot\frac{2}{3}t\ \ dt=\frac{2}{3}\int t^2dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+C=$

$$=\frac{2}{9}\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+C=\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

6. $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\int\operatorname{arctg}x\cdot\frac{dx}{x^2+1}=\left\{\begin{array}{l}\operatorname{arctg}x=y\\ \frac{dx}{x^2+1}=dy\end{array}\right\}=\int ydy=\frac{y^2}{2}+C=\frac{\operatorname{arctg}^2x}{2}+C.$

7. $\int x^3\cdot\cos\left(x^4+2\right)dx=\int\cos\left(x^4+2\right)\cdot x^3dx=\left\{\begin{array}{l}x^4+2=t\\ 4x^3dx=dt,\text{ або }\ x^3dx=\frac{1}{4}dt\end{array}\right\}=$

$$=\int\cos t\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin\left(x^4+2\right)+C.$$

Приклад. Спочатку перетворити підінтегральний вираз, а потім обчислити інтеграли за допомогою методу підстановки:

1) $\int\frac{1+6x}{\sqrt{9-x^2}}dx$; 2) $\int\frac{\cos x-10}{\sin^2x}dx$; 3) $\int\frac{3x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

Розв'язання:

1. Запишемо інтеграл як суму двох інтегралів

$$\int\frac{1+6x}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{6x}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}+6\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx.$$

Перший інтеграл табличний, а в другому зробимо підстановку

$$\int\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx=\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{9-x^2}=t, & 9-x^2=t^2\\ -2xdx=2tdt & \text{або }\ xdx=-tdt\end{array}\right\}=\int\frac{-tdt}{t}=-\int dt=-\sqrt{9-x^2}+C.$$

Таким чином

$$\int\frac{1+6x}{\sqrt{9-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{3}-6\sqrt{9-x^2}+C.$$

2. Запишемо інтеграл як різницю інтегралів

$$\int\frac{\cos x-10}{\sin^2x}dx=\int\frac{\cos x}{\sin^2x}dx-10\int\frac{dx}{\sin^2x}\ .$$

Другий інтеграл табличний, а в першому зробимо підстановку

$$\int\frac{\cos x}{\sin^2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\sin x=t\\ \cos x\ \ dx=dt\end{array}\right\}=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\sin x}+C.$$

Таким чином

$$\int\frac{\cos x-10}{\sin^2 x}dx=-\frac{1}{\sin x}-10\cdot(-\operatorname{ctg}x)+C=-\frac{1}{\sin x}+10\operatorname{ctg}x+C.$$

3. Запишемо інтеграл як різницю інтегралів

$$\int\frac{3x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx=\int\frac{3x}{x^2}dx-\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx.$$

Перший інтеграл табличний, а другий обчислимо за допомогою підстановки

$$\int\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx=\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x}=t\\ -\frac{1}{x^2}dx=dt,\ \text{або}\ \ \frac{1}{x^2}dx=-dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int\sin t(-dt)=-\int\sin t dt=\cos t+C=\cos\frac{1}{x}+C.$$

Таким чином $\int\frac{3x-\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx=3\ln|x|-\cos\frac{1}{x}+C$.

Завдання для аудиторної роботи

Обчислити інтеграли за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int\frac{\sin x}{\cos x+1}dx$; 2) $\int\sqrt[5]{2-7x}dx$; 3) $\int\frac{dx}{\ln 3x\cdot x}$; 4) $\int x\cdot(3x^2+8)^9dx$;

5) $\int\frac{dx}{\arccos\sqrt{1-x^2}}$; 6) $\int\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 7) $\int\frac{6x+5}{\sqrt{2x^2+9}}dx$; 8) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

9) $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)\sqrt{1+\sin 2x}dx$; 10) $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$.

Домашнє завдання

Обчислити інтеграли за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-13}}$; 3) $\int x\cdot\sqrt{1-8x^2}dx$.

4) $\int\frac{dx}{\operatorname{arctg}x\cdot(x^2+1)}$; 5) $\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; 6) $\int\frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$; 2) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-13)^2}+C$; 3) $-\frac{1}{24}\sqrt{(1-8x^2)^3}+C$;

4) $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$; 5) $-e^{\frac{1}{x}}+C$; 6) $\frac{5}{6}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^6 x}+C$.

Спочатку перетворити підінтегральний вираз, а потім обчислити інтеграли за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int\frac{9x-2}{x^2+16}dx$; 2) $\int\frac{e^{\operatorname{ctg}x}+2\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 3) $\int\frac{x+\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Відповідь: 1) $\frac{9}{2}\ln\left(x^2+16\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$; 2) $-e^{\operatorname{ctg}x}-2\cos x+C$;

3) $-\sqrt{1-x^2}+2/3\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

5.2. Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Знайдемо диференціал добутку цих функцій: $d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv$ і результат проінтегруємо:

$$\int d(uv)=\int du\cdot v+\int u\cdot dv.$$

За властивістю 1 невизначених інтегралів $\int d(uv)=u\cdot v+c$, тому

$$uv=\int vdu+\int udv$$

або

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (4)$$

Формула (4) називається формулою **інтегрування частинами**.

Метод інтегрування частинами доцільно застосовувати, коли інтеграл, який знаходиться праворуч у формулі (4) буде простішим, ніж заданий. Цей метод використовують, наприклад, коли під знаком інтегралу знаходиться добуток многочлена на одну з функцій $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $\operatorname{arctg}x$ і т.д.

Існує **правило**: якщо під знаком інтеграла знаходиться добуток $P_n(x)\cdot\sin x$; $P_n(x)\cdot\cos x$; $P_n(x)\cdot a^x$, де $P_n(x)$ многочлен n-го степеня, то $P_n(x)=u$.

Якщо добуток має вигляд $P_n(x)\cdot\ln x$; $P_n(x)\cdot\arcsin x$; $P_n(x)\cdot\operatorname{arctg}x$, то $P_n(x)dx=dv$.

Зауваження: Многочлен n-го степеня – це функція вигляду $y=P_n(x)=a_0\cdot x^n+$ $+a_1\cdot x^{n-1}+a_2\cdot x^{n-2}+\ldots+a_n$, де $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n-$ числа.

Наприклад,

– якщо $y=2x^2-1$, то це многочлен 2-го порядку, тобто $P_2(x)$;

– якщо $y=3x+7$, то це многочлен 1-го порядку, тобто $P_1(x)$;

– якщо $y=5$, то це многочлен нульового порядку, тобто $P_0(x)$.

Слід зазначити, що існує велика кількість інтегралів, які обчислюються за допомогою формули (4), але підінтегральний вираз не задовольняє сформульованому вище правилу. Крім того, слід зазначити, що формулу (4) до деяких інтегралів необхідно застосовувати декілька разів.

Питання на самоперевірку

1. Чому дорівнює $d(u\cdot v)$?

2. Як записати формулу інтегрування частинами?

3. Якщо $\int d(uv)=u\cdot v+C$, то чому в формулі $\int udv=uv-\int vdu$ відсутня стала C?

4. Коли доцільно застосовувати метод інтегрування частинами?

5. Чому дорівнює u в інтегралі $\int x^2 \cdot \arcsin x\,dx$?

6. Чому дорівнює u в інтегралі $\int (1-4x)\cdot e^x dx$?

7. Чому дорівнює u в інтегралі $\int \operatorname{arctg} x\,dx$?

Приклад. Обчислити інтеграли за допомогою інтегрування частинами:
1) $\int x \cdot \sin x dx$;   2) $\int (3x+2)\cdot e^{2x} dx$;   3) $\int \ln 3x\,dx$;   4) $\int x^2 \cdot 7^x dx$.

Р о з в ’я з а н н я :

1. $x-$ многочлен 1-го порядку, тобто $P_1(x)=x$. Тоді за правилом: $x=u$, а $\sin x dx = dv$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \left\{\begin{array}{ll} x=u & \sin x dx = dv, \\ \text{знайдемо} & \text{проінтегруємо} \\ \text{диференціали:} & \text{вираз:} \\ dx = du & \int \sin x dx = \int dv, \\ & -\cos x = v \;\; (C=0)! \end{array}\right\} =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v} \cdot \underbrace{dx}_{du} = -x\cdot\cos x + \int \cos x dx = -x\cdot \cos x + \sin x + C.$$

Зауваження: якщо в підінтегральному виразі позначити, наприклад, $\sin x = u$, а $xdx = dv$, то одержимо інтеграл більш складний, ніж даний.

2. Тут $P_1(x) = 3x+2 = u$, тоді $e^{2x}dx = dv$:

$$\int \underbrace{(3x+2)}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \left\{\begin{array}{ll} 3x+2=u, & e^{2x}dx = dv, \\ 3dx = du. & \int e^{2x}dx = \int dv, \\ & \frac{1}{2}e^{2x} = v. \end{array}\right\} = \underbrace{(3x+2)}_{u} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{v} - \int \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{v} \cdot \underbrace{3dx}_{du} =$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)\cdot e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}dx = \left(\frac{3}{2}x+1\right)e^{2x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x+1\right)e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C = \left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

3. Тут $P_n(x) = P_0(x) = 1$. Тоді за правилом $\ln 3x = u$, а $dx = dv$:

$$\int \underbrace{\ln 3x}_{u} \;\underbrace{dx}_{dv} = \left\{\begin{array}{ll} \ln 3x = u, & dx = dv, \\ \frac{1}{3x}\cdot 3dx = du, & \int dx = \int dv, \\ \frac{dx}{x} = du. & x = v. \end{array}\right\} = \ln 3x \cdot (-\tfrac{1}{x}) - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\cdot\ln 3x - \int dx =$$

$$= x \cdot \ln 3x - x + C.$$

4. Тут $P_2(x) = x^2$. Маємо многочлен другого порядку і формулу інтегрування частинами потрібно застосовувати двічі:

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{7^x dx}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = u, \; 7^x dx = dv, \\ 2xdx = du. \; \dfrac{7^x}{\ln 7} = v. \end{array} \right\} = x^2 \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} \cdot 2xdx = \frac{x^2 \cdot 7^x}{\ln 7} -$$

$$- \frac{2}{\ln 7} \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{7^x dx}_{dv} = \frac{x^2 \cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{2}{\ln 7} \left\{ \begin{array}{l} x = u, \; 7^x dx = dv, \\ dx = du. \; \dfrac{7^x}{\ln 7} = v. \end{array} \right\} = \frac{x^2 \cdot 7^x}{\ln 7} -$$

$$- \frac{2}{\ln 7} \left[x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \int \frac{7^x}{\ln 7} dx \right] = \frac{x^2 \cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{2}{\ln 7} \left[x \cdot \frac{7^x}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7} \cdot \frac{7^x}{\ln 7} \right] + C =$$

$$= \frac{x^2 \cdot 7^x}{\ln 7} - \frac{2x \cdot 7^x}{\ln^2 7} + \frac{2 \cdot 7^x}{\ln^3 x} + C = \frac{7^x}{\ln 7} \left[x^2 - \frac{2x}{\ln 7} + \frac{2}{\ln^2 7} \right] + C \; .$$

Розглянемо декілька інтегралів, які знаходяться методом інтегрування частинами, але не відповідають умовам правила.

Приклад. Обчислити інтеграли за допомогою формули (4):

1) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 2) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\, dx$; 3) $\displaystyle\int e^x \cos x dx$.

Розв'язання:

1. $$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = u, \quad \dfrac{dx}{x^2} = dv, \\ \dfrac{1}{x} dx = du. \quad \displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = v, \\ \qquad\qquad\quad \displaystyle\int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}, \; \text{тобто} \; v = -\frac{1}{x}. \end{array} \right\} =$$

$$= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C.$$

2. Спочатку зробимо підстановку, а потім будемо інтегрувати частинами:

$$\int \cos\sqrt{x}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\} = \int \cos t \cdot 2tdt = 2 \int \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\cos tdt}_{dv} = \left\{ \begin{array}{ll} t = u, & \cos tdt = dv, \\ dt = du. & \sin t = v. \end{array} \right\} =$$

$$= 2[t \cdot \sin t - \int \sin tdt] = 2[t \sin t + \cos t] + C = 2\left[\sqrt{x} \cdot \sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x} \right] + C.$$

3. У цьому підінтегральному виразі можна позначити і $e^x = u$ і $\cos x = u$.

Наприклад, нехай $e^x = u$:

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \begin{cases} e^x = u, & \cos x dx = dv, \\ e^x dx = du; & \sin x = v; \end{cases} = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx =$$

$$= \begin{cases} \text{Одержали інтеграл не простіший даного.} \\ \text{Застосуємо знову метод інтегрування частинами.} \end{cases} = e^x \cdot \sin x -$$

$$-\begin{cases} e^x = u, & \sin x dx = dv, \\ e^x dx = du; & -\cos x = v; \end{cases} = e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e^x dx \right] =$$

$$= e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

У результаті одержали той самий інтеграл, з якого починали розв'язування:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \ .$$

Перенесемо інтеграл із правої частини рівності в ліву частину

$$2\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x).$$

Тоді остаточно

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Зауважимо, що константа C з'явилась тому, що фактично всі інтегральні формули (в тому числі і формула інтегрування частинами) правильні з точністю до константи.

Таким же методом можна обчислити, наприклад, інтеграли: $\int e^x \sin x dx$, $\int \sin \ln x dx$.

Завдання для аудиторної роботи

Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int x \cdot 3^x dx$; 2) $\int (1-4x) \cdot \cos 3x dx$; 3) $\int \operatorname{arctg} x dx$;

4) $\int x^2 \sin 5x dx$; 5) $\int x \cos^2 x dx$; 6) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

Домашнє завдання

Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int x e^{-2x} dx$; 2) $\int (4x+3) \cdot \cos x dx$; 3) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

4) $\int \arcsin 3x dx$; 5) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; 6) $\int \frac{x}{\sin^2 4x} dx$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right) + C$; 2) $(4x+3)\sin x + 4\cos x + C$;

3) $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$ (вказівка: $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$);

4) $x\cdot\arcsin 3x+\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+C$ (вказівка: $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-9x^2}}=\left\{1-9x^2=t^2\right\}$);

5) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$ (вказівка: спочатку підстановка $x=t^2$);

6) $-\frac{1}{4}x\cdot\operatorname{ctg}4x+\frac{1}{16}\ln\left|\sin 4x\right|+C$ (вказівка: $x=u$; $\frac{dx}{\sin^2 4x}=dv$).

6. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Функція, яка дорівнює відношенню двох многочленів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m},$$

де $m,n-$ цілі додатні числа, $a_0,a_1,...,a_n,b_0,b_1,...,b_m-$ дійсні числа, називається **дробово-раціональною функцією.**

Якщо $n\geq m$, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається **неправильним** дробом, якщо $n<m$ – **правильним** дробом. Будь-який неправильний дріб шляхом ділення чисельника на знаменник можна представити у вигляді суми деякого многочлена і правильного дробу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M(x)+\frac{L_k(x)}{Q_m(x)}, \tag{5}$$

де $M(x)-$ многочлен і $k<m$.

Інтегрування многочлена $M(x)$ зводиться до інтегрування суми табличних інтегралів. А інтегрування правильного дробу зводиться, в свою чергу, до інтегрування так званих найпростіших дробів.

6.1. Найпростіші дроби і їх інтегрування

Правильні дроби наступних чотирьох видів називаються **найпростішими** (елементарними):

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ $(k=2,3,4,...)$;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ $(k=2,3,4,...)$,

де $A,B,p,q-$ дійсні числа, а квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів ($D<0$).

Обчислимо інтеграли від цих дробів:

I. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=\left\{\begin{array}{l}\text{скористуємося формулою}\\ \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C\end{array}\right\}=A\cdot\ln\left|x-a\right|+C.$$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{Bmatrix} x-a=t \\ dx=dt \end{Bmatrix} = A\int \frac{dt}{t^k} = A\int t^{-k}dt =$

$$= A\cdot \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{t^{k-1}} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

III. Інтегрування цього дробу розглянемо на прикладі (якщо розглядати інтегрування III дробу в загальному вигляді, то розв'язання буде дуже громіздким)

$$\int \frac{3x+7}{x^2+4x+9}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{1. У знаменнику виділимо повний квадрат} \\ x^2+4x+9 = \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot 2+4}-4+9 = (x+2)^2+5 \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{3x+7}{(x+2)^2+5}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{2. Робимо підстановку:} \\ x+2=t\ ,\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{3(t-2)+7}{t^2+5}dt =$$

$$= \int \frac{3t-6+7}{t^2+5}dt = \int \frac{3t+1}{t^2+5}dt = \int \left(\frac{3t}{t^2+5} + \frac{1}{t^2+5}\right)dt = \int \frac{3t}{t^2+5}dt + \int \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Другий інтеграл табличний } (a=\sqrt{5}), \\ \text{в першому можна використати формулу} \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C, \text{ або зробити підстановку } t^2+5=z\ . \\ \text{Виберемо перший варіант.} \end{array} \right\} = 3\cdot\int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2t}{t^2+5}dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+5}dt + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}\ln(t^2+5) + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{повертаємось до змінної } x: \\ t=x+2 \end{array} \right\} = \frac{3}{2}\ln\left[(x+2)^2+5\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left[x^2+4x+9\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Зауваження: Інтеграли такого виду обчислюються достатньо громіздко, але є один плюс: всі вони обчислюються взагалі однаково. Далі слід зазначити, що, якщо в знаменнику найпростішого дробу III виду коефіцієнт при x^2 не дорівнює одиниці, то спочатку розв'язання краще винести цей коефіцієнт за знак інтеграла, а потім переходити до виділення повного квадрату.

Наприклад:

$$\int \frac{dx}{2x^2+10x+15} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+5x+\frac{15}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{15}{2} = \\ = (x+\frac{5}{2})^2+\frac{5}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{5}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{одержали табличний інтеграл} \\ a=\frac{\sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{5}}+C.$$

Зазначимо, що таким же методом можна обчислювати інтеграли, в яких у знаменнику $D>0$.

IV. Інтегрування такого дробу спочатку таке ж, як і інтегрування III дробу. Потім користуються так званими рекурентними формулами. Тому, хто хоче більш докладніше розібратися в цьому матеріалі, рекомендуємо звернутись до літератури [1, 2, 3].

6.2. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші дроби

Розглянемо многочлен степеня m

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_m \quad (b_0\neq 0).$$

ТЕОРЕМА *(основна теорема алгебри).*

Будь-яке рівняння типу $Q_m(x)=0$ має рівно m коренів (дійсних або комплексних).

На основі цієї теореми маємо

$$Q_m(x)=b_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m), \tag{6}$$

де $x_1,x_2,...,x_m-$ корені рівняння $Q_m(x)=0$. Серед коренів можуть бути дійсні різні, дійсні кратні, комплексні і комплексні кратні. Тобто серед дужок у виразі (6) можуть бути такі:

$$x-a;\ (x-b)^k,\ k>1 \text{ (корінь } x=b \text{ кратності } k\text{);}$$

$$x^2+px+q\ \ (D<0);\ (x^2+p_1x+q_1)^l\ \ (D<0),\ l>1,$$

тобто $Q_m(x)=b_0(x-a)\cdot\ldots\cdot(x-b)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)\cdot\ldots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^l$.

ТЕОРЕМА *(про розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші).*

*Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k<m)$ можна подати як **суму найпростіших дробів**, причому множнику $(x-a)$ відповідає елементарний дріб I виду, множнику $(x-b)^k$, $k>1-$ сума елементарних дробів I і II видів; множнику $(x^2+px+q)-$ дріб III виду, множнику $(x^2+p_1x+q_1)^l$ $l>1$ - сума елементарних дробів III і IV виду.*

6.3. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Нехай потрібно обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції, тобто

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Якщо дріб неправильний ($n \geq m$), то його можна представити у вигляді суми деякого многочлена і правильного дробу (див.(5)). Правильний дріб можна за допомогою теореми подати у вигляді суми найпростіших дробів I-IV видів. Таким чином:

1) дробово-раціональну функцію можна інтегрувати завжди;

2) інтегрування **правильного дробу** зводиться до інтегрування найпростіших дробів.

Будемо вважати, що дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ правильний. Можливі наступні випадки:

Перший випадок. Корені знаменника дійсні і різні, тобто

$$Q_m(x) = \left(x-a\right)\cdot\left(x-b\right)\cdot\ldots\cdot(x-d).$$

У цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I-го виду:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{D}{x-d}, \tag{7}$$

де $A, B, \ldots, D$ називають невизначеними коефіцієнтами. Їх можна знайти таким чином: праву частину тотожності (7) приводимо до спільного знаменника, який дорівнює $Q_m(x)$. Одержимо тотожні многочлени в чисельниках зліва і справа. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у цих многочленах, дістанемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $A, B, \ldots, D$ (рівнянь стільки, скільки коефіцієнтів!). Цей метод знаходження коефіцієнтів називається **методом невизначених коефіцієнтів**.

Після того, як коефіцієнти знайдені, повертаємося до інтеграла

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \cdots + \int \frac{D}{x-d}dx =$$

$$= A\ln\left|x-a\right| + B\ln\left|x-b\right| + \cdots + D\ln\left|x-d\right| + C.$$

Другий випадок. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні (рівні) – $Q_m(x) = (x-a)\cdot(x-b)^k\cdot\ldots\cdot(x-d)^l$.

У цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I і II-го видів. Розглянемо на прикладі:

$$\frac{P_n(x)}{(x-3)(x+2)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^3} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

Коефіцієнти знаходяться методом невизначених коефіцієнтів.

Після цього повертаємося до інтеграла

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{(x+2)^3}dx + \int \frac{C}{(x+2)^2}dx + \int \frac{D}{x+2}dx.$$

Третій випадок. Серед коренів знаменника є комплексні (які не повторюються)

$$Q_m(x)=(x-a)\cdot(x-b)^k\cdot(x^2+px+q)\cdot(x^2+lx+s).$$

У цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I-III видів. Розглянемо на прикладі:

$$\frac{P_n(x)}{(x+1)(x-5)^2(x^2+x+10)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-5)^2}+\frac{C}{x-5}+\frac{Dx+P}{x^2+x+10}.$$

Коефіцієнти знаходимо методом невизначених коефіцієнтів, а потім обчислюємо відповідні інтеграли.

Четвертий випадок. Серед коренів знаменника є комплексні кратні. В цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I-IV видів.

Питання на самоперевірку

1. Яка функція називається дробово-раціональною?
2. Що таке правильний і неправильний дріб?
3. Які дроби називаються найпростішими (елементарними)?
4. Сформулюйте основну теорему алгебри.
5. Сформулюйте теорему про розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.
6. У якому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на найпростіші дроби I виду?
7. Що таке метод невизначених коефіцієнтів?
8. У якому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на елементарні дроби I-III видів?

Приклад. Подати дріб у вигляді суми найпростіших дробів:

1) $\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-2)(x+5)}$; 2) $\dfrac{2x-1}{(x^2-6x+9)(x+1)}$;

3) $\dfrac{3x+7}{x^3+x^2+4x+4}$; 4) $\dfrac{1}{x(x^2-4x+12)}$; 5) $\dfrac{x^4+x^3-1}{x^3-4x}$.

Розв'язання:

1. Маємо перший випадок. Корені знаменника дійсні і різні: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-5$, тому дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го виду:

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+5}.$$

Праву частину приводимо до спільного знаменника:

$$\frac{A}{x+1}^{\backslash(x-2)(x+5)}+\frac{B}{x-2}^{\backslash(x+1)(x+5)}+\frac{C}{x+5}^{\backslash(x+1)(x-2)}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+5)+B(x+1)(x+5)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+5)}=$$
$$=\frac{Ax^2+3Ax-10A+Bx^2+6Bx+5B+Cx^2-Cx-2C}{(x+1)(x-2)(x+5)}.$$

Прирівнюємо чисельники:

$$2x-3=Ax^2+3Ax-10A+Bx^2+6Bx+5B+Cx^2-Cx-2C.$$

Потім прирівнюємо **коефіцієнти** при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=3A+6B-C \\ x^0 & -3=-10A+5B-2C. \end{array}$$

Одержали систему трьох рівнянь із трьома невідомими. Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+6B-C=2 \\ -10A+5B-2C=-3 \end{cases}.$$

Складемо перше і друге рівняння: $4A+7B=2$.

Помножимо перше рівняння на 2 і складемо його із третім рівнянням:

$$-8A+7B=-3.$$

Одержимо систему : $\begin{cases} 4A+7B=2, \\ -8A+7B=-3. \end{cases}$

Від першого рівняння віднімемо друге: $12A=5$, звідси $A=\frac{5}{12}$, тоді $B=\frac{1}{21}$, а $C=-\frac{13}{28}$.

Таким чином: $\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)(x+5)}=\frac{\frac{5}{12}}{x+1}+\frac{\frac{1}{21}}{x-2}-\frac{\frac{13}{28}}{x+5}$.

Слід зауважити, що знаходження невідомих коефіцієнтів - робота довга і копітка. Але іншого методу не існує.

2. Корені знаменника дійсні, серед них є кратні (другий випадок)

$$\frac{2x-1}{(x^2-6x+9)(x+1)}=\frac{2x-1}{(x-3)^2(x+1)}.$$

Розкладаємо дріб таким чином:

$$\frac{2x-1}{(x-3)^3(x+1)}=\frac{A}{(x-3)^2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}.$$

Коефіцієнти можна обчислити за тією ж схемою, яку ми розібрали в попередньому прикладі.

3. У цьому прикладі спочатку треба спростити знаменник

$$x^3+x^2+4x+4=x^2(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^2+4).$$

У знаменнику три кореня:

$x_1=-1$, $x_{2,3}=\pm 2i$ ($x^2+4=0$, $x^2=-4$, $x_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}\cdot\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}=\pm 2i$) .

Маємо третій випадок

$$\frac{3x+7}{x^3+x^2+4x+4}=\frac{3x+7}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

4. Маємо теж третій випадок

$$\frac{1}{x(x^2-4x+12)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+12}.$$

5. Усі попередні дроби були правильними. В цьому прикладі маємо неправильний дріб. Тому спочатку поділимо чисельник на знаменник і вилучимо цілу частину

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-1 & \underline{x^3-4x} \\ -\underline{x^4-4x^2\quad} & x+1 \\ x^3+4x^2-1 & \\ -\underline{x^3\quad-4x} & \\ 4x^2+4x-1. & \end{array}$$

Таким чином $\dfrac{x^4+x^3-1}{x^3-4x}=x+1+\dfrac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}$.

Розглянемо одержаний правильний дріб $\dfrac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}$.

Знаменник запишемо у такому виді: $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ – корені дійсні і різні (перший випадок). Тому

$$\frac{4x^2+4x-1}{x^3-4x}=\frac{4x^2+4x-1}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

А взагалі:

$$\frac{x^4+x^3-1}{x^3-4x}=x+1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}\ .$$

Приклад. Знайти інтеграли від найпростіших дробів:

1) $\displaystyle\int\frac{3}{x-5}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+8)^4}$; 3) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-6x+15}dx$.

1. Маємо найпростіший дріб I виду.

Скористаймося формулою $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$.

$$\int \frac{3}{x-5}dx = 3\int \frac{1}{x-5}dx = 3\ln|x-5| + C.$$

2. Маємо елементарний дріб II виду

$$\int \frac{dx}{(x+8)^4} = \left\{\begin{matrix} x+8=t \\ dx=dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4}dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+8)^3} + C.$$

3. Маємо елементарний дріб III виду

$$\int \frac{x}{x^2-6x+15}dx = \left\{\begin{matrix} \text{Виділимо повний квадрат у знаменнику} \\ x^2-6x+15 = \underbrace{x^2-2\cdot x\cdot 3+9}-9+15 = (x-3)^2+6 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{x}{(x-3)^2+6}dx = \left\{\begin{matrix} \text{Далі застосовуємо метод заміни змінної} \\ x-3=t\ ,\ dx=dt\ ,\ x=t+3 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int \frac{t+3}{t^2+6}dt = \int\left(\frac{t}{t^2+6} + \frac{3}{t^2+6}\right)dt = \int \frac{t}{t^2+6}dt + 3\int \frac{1}{t^2+6}dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{другий інтеграл табличний } a=\sqrt{6} \\ \text{до першого застосовуємо формулу } \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+6} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+6\right| + \frac{3}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{повертаємось} \\ \text{до змінної } x \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left|(x-3)^2+6\right| + \frac{3}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад. Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1) $\int \frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}dx$; 2) $\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}dx$; 3) $\int \frac{x^5-1}{x^3+2x^2+3x}dx$.

Розв'язання:

1. Підінтегральний дріб – правильний.

Розкладемо його на суму найпростіших дробів.

Корені знаменника: $x_1 = 3;\ x_2 = -2$. Вони дійсні і різні. Маємо перший випадок (підінтегральний дріб розкладається на суму найпростіших дробів I виду)

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для того, щоб знайти невизначені коефіцієнти A і B, дріб у правій частині рівності приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}^{\backslash x+2} + \frac{B}{x+2}^{\backslash x-3} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-3B}{(x-3)(x+2)}\ .$$

Знаменники ліворуч і праворуч рівні, тому прирівняємо чисельники:

$$3x-5=Ax+2A+Bx-3B\,.$$

Оскільки многочлени в обох частинах одержаної рівності тотожно рівні, повинні бути рівними і коефіцієнти при відповідних степенях змінної x:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \;\;3=A+B, \\ x^0 & -5=2A-3B. \end{array}$$

Розв'яжемо систему $\begin{cases} A+B=3, \\ 2A-3B=-5. \end{cases}$

І знайдемо, що $A=\dfrac{4}{5},\ B=\dfrac{11}{5}.$ Таким чином $\dfrac{3x-5}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{\frac{4}{5}}{x-3}+\dfrac{\frac{11}{5}}{x+2}.$

Повернемося до інтеграла і обчислимо його:

$$\int\frac{3x-5}{(x-3)(x+2)}dx=\int\left(\frac{\frac{4}{5}}{x-3}+\frac{\frac{11}{5}}{x+2}\right)dx=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{11}{5}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{4}{5}\ln\left|x-3\right|+\frac{11}{5}\ln\left|x+2\right|+C.$$

2. Підінтегральний дріб – правильний.

Проведемо деякі перетворення знаменника

$$\frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}=\frac{x^2+4}{(x-4)(x+4)(x-4)}=\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}.$$

Корені знаменника дійсні, один з них кратний $x_{1,2}=4;\ x_3=-4$. Маємо другий випадок розкладання дробу на найпростіші:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}=\frac{A}{(x-4)^2}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+4}.$$

А далі цей приклад розв'язується таким же методом, що і попередній приклад. Приводимо праву частину до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники:

$$\frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}=\frac{A^{\backslash(x+4)}}{(x-4)^2}+\frac{B^{\backslash(x-4)(x+4)}}{x-4}+\frac{C^{\backslash(x-4)^2}}{x+4}=$$

$$=\frac{Ax+4A+Bx^2-16B+Cx^2-8Cx+16C}{(x-4)^2(x+4)};$$

$$x^2+4=Ax+4A+Bx^2-16B+Cx^2-8Cx+16C.$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1=B+C, \\ x^1 & 0=A-8C, \\ x^0 & 4=4A-16B+16C. \end{array}$$

Отримаємо систему $\begin{cases} B+C=1, \\ A-8C=0, \\ A-4B+4C=1. \end{cases}$

Її розв'язок: $A=\dfrac{5}{2},\ B=\dfrac{11}{16},\ C=\dfrac{5}{16}.$

Повертаємося до інтеграла:

$$\int \frac{x^2+4}{(x^2-16)(x-4)}dx = \int \frac{x^2+4}{(x-4)^2(x+4)}dx = \int\left(\frac{\frac{5}{2}}{(x-4)^2}+\frac{\frac{11}{16}}{x-4}+\frac{\frac{5}{16}}{x+4}\right)dx =$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-4)^2}+\frac{11}{16}\int\frac{dx}{x-4}+\frac{5}{16}\int\frac{dx}{x+4}=\left\{\begin{matrix}\text{перший дріб } - \text{ найпростіший} \\ \text{дріб II-го виду,} \quad k=2\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-4}+\frac{11}{16}\ln|x-4|+\frac{5}{16}\ln|x+4|+C=-\frac{5}{2(x-4)}+\frac{1}{16}\ln\left[|x-4|^{11}\cdot|x+4|^{5}\right]+C.$$

3. Підінтегральний дріб – неправильний. Виділимо цілу частину

$$\begin{array}{r|l}
x^5-1 & x^3+2x^2+3x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^5+2x^4+3x^3} & x^2-2x+1 \\
-2x^4-3x^3-1 & \\
-\underline{-2x^4-4x^3-6x^2} & \\
x^3+6x^2-1 & \\
-\underline{x^3+2x^2+3x} & \\
4x^2-3x-1. &
\end{array}$$

Таким чином

$$\frac{x^5-1}{x^3+2x^2+3x}=x^2-2x+1+\frac{4x^2-3x-1}{x^3+2x^2+3x}. \qquad (8)$$

У правій частині (8) одержали правильний дріб. Розкладемо його на найпростіші, але спочатку зробимо перетворення у знаменнику:

$$\frac{4x^2-3x-1}{x^3+2x^2+3x}=\frac{4x^2+3x+1}{x\left(x^2+2x+3\right)}.$$

Квадратний тричлен x^2+2x+3 має комплексні корені ($D<0$), тому маємо третій випадок:

$$\frac{4x^2-3x-1}{x\left(x^2+2x+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}. \qquad (9)$$

Далі розв'язуємо тим же методом:

$$\frac{4x^2-3x-1}{x\left(x^2+2x+3\right)}=\frac{A}{x}^{\backslash x^2+2x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}^{\backslash x}=\frac{Ax^2+2Ax+3A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+2x+3\right)};$$

$$4x^2-3x-1=Ax^2+2Ax+3A+Bx^2+Cx;$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 4=A+B, \\ x^1 & -3=2A+C, \\ x^0 & -1=3A. \end{array}$$

Маємо систему: $\begin{cases} A+B=4, \\ 2A+C=-3, \\ 3A=-1. \end{cases}$

Розв'язок:

$A=-\frac{1}{3};\ B=\frac{13}{3};\ C=-\frac{7}{3}.$

Повертаємося до рівності (9): $\frac{4x^2-3x-1}{x(x^2+2x+3)}=\frac{-\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{13}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+2x+3}$, а тепер – до рівності (8):

$$\frac{x^5-1}{x^3+2x^2+3x}=x^2-2x+1+\left[\frac{-\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{13}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+2x+3}\right]=x^2-2x+1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13x-7}{x^2+2x+3}.$$

Нарешті починаємо інтегрувати дробово-раціональну функцію:

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+2x^2+3x}dx=\int\left(x^2-2x+1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13x-7}{x^2+2x+3}\right)dx=\int x^2dx-2\int xdx+$$

$$+\int dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{13x-7}{x^2+2x+3}dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\int\frac{13x-7}{x^2+2x+3}dx.$$

Обчислимо останній інтеграл (під знаком інтеграла – найпростіший дріб III виду):

$$\int\frac{13x-7}{x^2+2x+3}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Виділимо у знаменнику} \\ \text{повний квадрат} \\ x^2+2x+1+2=(x+1)^2+2\end{array}\right\}=\int\frac{13x-7}{(x+1)^2+2}dx=\left\{\begin{array}{l}x+1=t\ , \\ x=t-1 \\ dx=dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{13(t-1)-7}{t^2+2}dt=\int\frac{13t-13-7}{t^2+2}dt=\int\frac{13t-20}{t^2+2}dt=\int\frac{13t}{t^2+2}dt-\int\frac{20dt}{t^2+2}=$$

$$=13\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+2}dt-20\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{13}{2}\ln\left(t^2+2\right)-\frac{20}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{13}{2}\ln\left((x+1)^2+2\right)-\frac{20}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=\frac{13}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{20}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Повернемось до виразу (10) і запишемо відповідь:

$$\int\frac{x^5-1}{x^3+2x^2+3x}dx=\frac{x^3}{3}-x^2+x-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{13}{6}\ln\left(x^2+2x+3\right)-\frac{20}{3\cdot\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Завдання для аудиторної роботи

Розкласти на найпростіші дроби:

1) $\dfrac{1}{(x+7)(x^2+5x+6)}$; 2) $\dfrac{x+5}{(x+8)^3(x-4)}$; 3) $\dfrac{x^5+2x^3+3}{x^4-2x^2+1}$;

4) $\dfrac{2x^2-3}{(x^2+9)(x^2-10x+25)}$; 5) $\dfrac{1-7x}{(x^2+5x+14)(x^3-x^2)}$.

Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-4x-5}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{1-2x}{x^3-5x^2}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+3x^2+4x+12}$;

4) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}dx$; 5) $\displaystyle\int\frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}dx$.

Домашнє завдання

Знайти інтеграли від найпростіших дробів:

1) $\displaystyle\int\frac{2}{x-\sqrt{3}}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^5}$; 3) $\displaystyle\int\frac{6x+1}{x^2-8x+25}dx$.

Відповідь: 1) $2\ln\left|x-\sqrt{3}\right|+C$; 2) $-\dfrac{1}{4(x+\frac{1}{2})^4}+C$; 3) $3\ln(x^2-8x+25)+\frac{25}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C$.

Розкласти дроби на найпростіші дроби (коефіцієнти можна не знаходити):

1) $\dfrac{x}{(x+10)(x^2-6x+9)}$; 2) $\dfrac{1}{x(x^2+10)}$; 3) $\dfrac{3x-1}{(x-7)^3\cdot x}$;

4) $\dfrac{1}{x^4+5x^2+4}$; 5) $\dfrac{1-4x^2}{(x^2-2x+5)(x-1)}$.

Відповідь: 1) $\dfrac{A}{x+10}+\dfrac{B}{(x-3)^2}+\dfrac{C}{x-3}$; 2) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+10}$;

3) $\dfrac{A}{(x-7)^3}+\dfrac{B}{(x-7)^2}+\dfrac{C}{x-7}+\dfrac{D}{x}$; 4) $\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$; 5) $\dfrac{Ax+B}{x^2-2x+5}+\dfrac{C}{x-1}$.

Обчислити інтеграли: 1) $\displaystyle\int\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-1}$.

Відповідь: 1) $\frac{3}{x-2}+2\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

7. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Якщо в раціональному дробу деякі доданки в чисельнику або в знаменнику замінити коренями від раціональних функцій (в тому числі і від многочленів), то одержана функція буде називатись **ірраціональною**.

У деяких випадках інтеграли від ірраціональних функцій можна раціоналізувати (тобто за допомогою придатної підстановки привести до інтегралів від раціональних функцій). Розглянемо найбільш типові випадки:

1. Якщо корені в підінтегральному виразі мають вигляд

$$\sqrt[n]{x^k},\ \sqrt[m]{x^p},\ \sqrt[q]{x^l},\ldots,$$

то цей вираз перетворюється в раціональний дріб за допомогою підстановки

$$x=t^s,$$

де s – найменше спільне кратне показників коренів, тобто чисел n, m, q.

УВАГА!
Найменше спільне кратне даних чисел – це найменше число, яке ділиться на кожне з даних чисел.

2. Якщо вираз під знаком інтеграла містить корені виду

$$\sqrt[n]{(ax+b)^k},\ \sqrt[m]{(ax+b)^p},\ \sqrt[q]{(ax+b)^l},\ldots,$$

то цей вираз приводиться до раціонального за допомогою підстановки $ax+b=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел n, m, q…

3. Обчислення інтегралів виду:

а) $\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, б) $\int f(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ і в) $\int f(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$:

а) підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки

$$x=a\sin t \text{ (або } x=a\cos t\text{), тоді } dx=a\cos t\,dt,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t;$$

б) підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки

$$x=a\operatorname{tg}t \text{ (або } x=\operatorname{arctg}t\text{), тоді } dx=\frac{adt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t};$$

в) у цьому випадку ми застосовуємо підстановку

$$x=\frac{a}{\cos t}\ \left(\text{або } x=\frac{a}{\sin t}\right),\text{ тоді } dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}\ dt,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=a\operatorname{tg}t.$$

4. Обчислення інтеграла $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Метод обчислення цього інтеграла аналогічний методу обчислення інтеграла від найпростішого дробу III виду. Але спочатку потрібно винести коефіцієнт при x^2 за знак кореня і за знак інтеграла.

Питання на самоперевірку

1. Що таке ірраціональна функція?
2. Що таке найменше спільне кратне?
3. Якщо корені в підінтегральному виразі мають вигляд $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[3]{x^2}$, тоді за допомогою якої підстановки цей вираз перетвориться в раціональний?
4. За допомогою яких підстановок можна раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралах

$$\int f(x,\sqrt{9+x^2})dx,\ \int f(x,\sqrt{16-x^2})dx,\ \int f(x,\sqrt{x^2-3})dx?$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; 3) $\int \sqrt{9-x^2}dx$;

4) $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$.

Розв'язання:

1. У підінтегральному виразі маємо корені другого і четвертого степеня. Найменше спільне кратне чисел 2 і 4 дорівнює 4, тому робимо підстановку $x=t^4$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\begin{Bmatrix} x=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{Bmatrix}=\int \frac{4t^3dt}{t^2+t}=4\int \frac{t^2}{t+1}dt=\begin{Bmatrix} \text{одержали неправильний дріб: можна} \\ \text{виділити цілу частину, а можна} \\ \text{провести такі перетворення} \end{Bmatrix}=$$

$$=4\int \frac{t^2-1+1}{t+1}dt=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left[\int tdt-\int dt+\int\frac{dt}{t+1}\right]=4\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right]+C=$$

$$=\begin{Bmatrix} \text{повернемось до змінної } x; \\ \text{так як } x=t^4, \text{ то } t=x^{\frac{1}{4}} \end{Bmatrix}=4\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2}-x^{\frac{1}{4}}+\ln\left|x^{\frac{1}{4}}+1\right|\right)+C=4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right)+C.$$

2. Найменше спільне кратне чисел 2 і 3 дорівнює 6, тому $1+x=t^6$:

$$\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx=\begin{Bmatrix} 1+x=t^6,\ x=t^6-1 \\ dx=6t^5dt \end{Bmatrix}=\int \frac{\left(t^6-1\right)+t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt=6\int\left(t^6-1+t^3\right)\cdot t^3dt=$$

$$=6\int(t^9+t^6-t^3)dt=6\cdot\left[\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right]+C=\begin{Bmatrix} \text{повертаємось до змінної } x: \\ 1+x=t^6,\ t=(1+x)^{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}=$$

$$=6\cdot\left[\frac{(1+x)^{\frac{10}{6}}}{10}+\frac{(1+x)^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{(1+x)^{\frac{4}{6}}}{4}\right]+C=6\cdot\left[\frac{(1+x)^{\frac{5}{3}}}{10}+\frac{(1+x)^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}}{4}\right]+C=$$

$$=6\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{(1+x)^5}}{10}+\frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{4}\right]+C.$$

3. Скористаємось підстановкою з вип. 3а:

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\left\{\begin{array}{l} a=3,\qquad x=3\sin t\\ dx=3\cos t dt\\ \sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\sqrt{1-\sin^2 t}=3\cos t\end{array}\right\}=\int 3\cos t\cdot 3\cos t dt=$$

$$=9\int\cos^2 t dt=9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=\frac{9}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+C=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Повернемось до змінної } x.\\ \text{Знайдемо } t:\ \sin t=\frac{x}{3},\ \ \mathrm{t}=\arcsin\frac{x}{3}.\\ \frac{1}{2}\sin(2t)=\sin t\cdot\cos t=\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}=\sin(\arcsin\frac{x}{3})\cdot\sqrt{1-(\sin\arcsin\frac{x}{3})^2}=\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}.\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{9}{2}\left[\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\right]+C.$$

4. Скористаємось підстановкою з вип. 3б:

$$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\left\{\begin{array}{l} x=\mathrm{tg}\,t,\quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\\ \sqrt{x^2+1}=\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t}}=\dfrac{1}{\cos t}\end{array}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\frac{1}{\cos t}}=$$

$$=\int\frac{dt\cdot\cos t}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\mathrm{tg}^2 t\cdot\cos t}=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}dt=\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\left\{\begin{array}{l}\sin t=z\\ \cos t dt=dz\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{z}+C=-\frac{1}{\sin t}+C=\left\{\begin{array}{l}\text{Повернемось до змінної } x\\ x=\mathrm{tg}\,t,\ t=\mathrm{arctg}\,x\end{array}\right\}=-\frac{1}{\sin(\mathrm{arctg}\,x)}+C.$$

5. Винесемо коефіцієнт 2 за знак кореня й інтеграла:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\left\{\begin{array}{l}\text{Виділимо повний квадрат}\\ x^2+4x+4-4+3=(x+2)^2-1\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{xdx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}=\left\{\begin{array}{l}x+2=t\ ,\ x=t-2\\ dx=dt\end{array}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t-2}{\sqrt{t^2-1}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}-2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}\right]=\left\{\begin{array}{l}\text{Перший інтеграл обчислимо за}\\ \text{допомогою підстановки } t^2-1=z^2,\\ \text{а другий інтеграл – табличний}\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} t^2-1=z^2 \\ 2tdt=2zdz \\ tdt=zdz \end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int\frac{zdz}{z}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z-2\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right)+C=$$

$$=\left\{\begin{matrix} \text{Повернемось до змінної } x \\ z=(t^2-1)^{\frac{1}{2}},\ t=x+2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left((t^2-1)^{\frac{1}{2}}-2\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(x+2)^2-1}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|\right)+C.$$

Завдання для аудиторної роботи

Обчислити інтеграли:

1) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$; 3) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-25}}$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$; 5) $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$.

Домашнє завдання

Обчислити інтеграли:

1) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x+3)^{\frac{1}{2}}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

4) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}}dx$; 5) $\int\frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$.

Відповідь: 1) $\frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+C$ (підстановка $x=t^4$);

2) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+3}+C$ (підстановка $x+3=t^2$);

3) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$,

$\left(\sqrt{1-2x-x^2}=\sqrt{-(x^2+2x-1)}=\sqrt{-(x^2+2x+1-1-1)}=\sqrt{-[(x+1)^2-2]}=\sqrt{2-(x+1)^2}\right)$;

4) $\sqrt{x^2-10x+29}+3\ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+29}\right|+C$; 5) $\frac{1}{16}\cdot\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}+C.$

8. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1-й випадок. Універсальна підстановка.

Підстановка $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ називається **універсальною.**

Знайдемо, чому дорівнює $\sin x,\ \cos x$ і dx:

$$\mathrm{sinx}=\frac{\sin x}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\left\{\begin{matrix}\text{поділимо чисельник і знаменник}\\ \text{на}\quad\cos^2\frac{x}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\left\{\begin{matrix}\text{поділимо чисельник і}\\ \text{знаменник на }\cos^2\frac{x}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$, знайдемо x: $\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\,t,$ тоді $x=2\,\mathrm{arctg}\,t.$

Знайдемо dx: $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}.$

Ця підстановка дає змогу проінтегрувати кожну функцію виду $R(\sin x,\cos x)$ (тобто функцію, яку можна одержати із функцій $\sin x$ і $\cos x$ і деяких констант за допомогою чотирьох арифметичних дій). Але в більшості випадків ця підстановка приводить до громіздких обчислень, тому її застосовують до інтегралів $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$, де хоча б a або b не дорівнюють нулю. Тобто універсальна підстановка допоможе при обчисленні і таких інтегралів: $\int\frac{dx}{a\sin x},\ \int\frac{dx}{b\cos x},\ \int\frac{dx}{b\cos x+c}$ і т. ін.

Якщо потрібно обчислити, наприклад, інтеграл $\int\frac{dx}{b\cos 2x+c}$, то спочатку краще зробити підстановку $2x=y$, $2dx=dy$, а потім застосовувати універсальну підстановку.

2-й випадок. Якщо підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ не змінюється при заміні знаків у $\sin x$ і $\cos x$ водночас, тобто, якщо $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$, то можна застосовувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$.

Зокрема це відноситься до інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x + d},$$

де a, b, c, d – числа, деякі з них можуть дорівнювати нулю.

3-й випадок. Якщо підінтегральна функція має вигляд $\sin^m x \cdot \cos^n x$, де m і n – цілі, додатні числа (причому одне з них може дорівнювати нулю), то:

а) якщо хоча б одне з цих чисел непарне, нехай, наприклад, це – m, то підстановка має вигляд $\cos x = t$;

б) якщо обидва числа парні, то інтеграл обчислюється за допомогою формул: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x = \int \dfrac{1-\cos x}{2}$; $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

4-й випадок. Якщо m і n парні, але хоча б одне з них від'ємне, то підстановка має вигляд $\operatorname{tg} x = t$ (або $\operatorname{ctg} x = t$).

5-й випадок. Інтеграли виду $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, n – ціле, $n>2$ обчислюються за допомогою підстановки $\operatorname{tg} x = t$ (або $\operatorname{ctg} x = t$) (подробиці розв'язку див. у прикладі).

6-й випадок. При обчисленні інтегралів

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx dx$$

користуються тригонометричними формулами перетворення добутку в суму:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

Питання на самоперевірку

1. Що таке універсальна підстановка? Чому дорівнюють $\sin x$, $\cos x$ і dx?

2. Для інтегралів якого виду ця підстановка підходить?

3. Яку підстановку спочатку треба використати для обчислення інтеграла $\int \dfrac{dx}{a\sin 5x}$? Яку підстановку застосувати потім?

4. Яку підстановку треба використати для обчислення інтегралів $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx$, $\int \sin^3 x dx$?

5. Яку підстановку треба використати для обчислення інтеграла $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$?

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{3\cos x + 2}$; 2) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$; 3) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$;

4) $\int \cos^2 2x \cdot \sin^2 4x dx$; 5) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$; 6) $\int \frac{dx}{\cos^4 5x}$.

Р о з в ' я з а н н я :

1. Скористаємося універсальною підстановкою:

$$\int \frac{dx}{3\cos x + 2} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3(1-t^2) + 2(1+t^2)}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3 - 3t^2 + 2 + 2t^2} = 2\int \frac{dt}{-t^2 + 5} = -2\int \frac{dt}{t^2 - 5} = \left\{ \begin{array}{c} \text{табличний інтеграл} \\ a = \sqrt{5} \end{array} \right\} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{5}}{t + \sqrt{5}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{5}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{5}}\right| + C.$$

2. Застосовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$ (вип. 2)

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{розділимо чисельник} \\ \text{і знаменник на } \cos^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2\operatorname{tg}^2 x + 5} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{2t^2 + 5} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{5}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{табличний} \\ \text{інтеграл } a = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

3. Маємо випадок 3а:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t\ ,\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \\ \cos dx = dt; \end{array} \right\} = \int t^2(1 - t^2)dt = \int (t^2 - t^4)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

4. Маємо випадок 3б; m і n парні, тому застосовуємо відповідні формули:

$$\int \cos^2 2x \cdot \sin^2 4x dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 8x}{2} dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 4x)(1 - \cos 8x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + \cos 4x - \cos 8x - \cos 4x \cdot \cos 8x)dx = \frac{1}{4}[\int dx + \int \cos 4x dx - \int \cos 8x dx -$$

$$-\int \cos 4x \cdot \cos 8x dx] = \left\{ \begin{array}{l} \text{перший інтеграл табличний, другий і третій } - \text{ майже} \\ \text{табличні, а четвертий обчислюється за допомогою вип. 4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 12x) dx \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 12x \right) \right] + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{32}\sin 8x - \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{96}\sin 12x + C = \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{32}\sin 8x - \frac{1}{96}\sin 12x + C.$$

5. Маємо випадок 5:

$$\int \mathrm{tg}^3 x dx = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t \\ \text{Увага! Тут спочатку потрібно} \\ \text{знайти } x, \text{ а потім } dx. \\ x = \mathrm{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int t^3 \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Отримали неправильний дріб.} \\ \text{Поділимо чисельник} \\ \text{на знаменник:} \\ \begin{array}{rl} t^3 & |\, \underline{t^2+1} \\ -\underline{t^3+t} & \;\; t \\ -t & \end{array} \end{array} \right\} = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left| t^2 + 1 \right| + C = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left| \mathrm{tg}^2 x + 1 \right| + C.$$

6. Маємо випадок 4.

Спочатку перетворимо підінтегральний вираз:

$$\frac{1}{\cos^4 5x} = \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} = \left\{ \frac{1}{\cos^2 5x} = \mathrm{tg}^2 5x + 1 \right\} = (\mathrm{tg}^2 5x + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \;;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 5x} = \int \left(\mathrm{tg}^2 5x + 1 \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} tg 5x = y \\ \dfrac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5dx = dy \;,\; \dfrac{1}{\cos^2 5x} dx = \dfrac{1}{5} dy \end{array} \right\} =$$

$$= \int \left(y^2 + 1 \right) \cdot \frac{1}{5} dy = \frac{1}{5}\int \left(y^2 + 1 \right) dy = \frac{1}{5}\left[\frac{y^3}{3} + y \right] + C = \frac{1}{5}\left[\frac{\mathrm{tg}^3 5x}{3} + \mathrm{tg}\, 5x \right] + C \;.$$

Завдання для аудиторної роботи

Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3}$; 2) $\int \cos^3 3x dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;4) $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$;

5) $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$; 6) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$; 7) $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x dx$.

Домашнє завдання

Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{4-\sin x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x - 4\sin x \cdot \cos x}$; 3) $\int \sin^3 4x dx$;

4) $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$; 5) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$; 6) $\int \mathrm{ctg}^6 x dx$; 7) $\int \sin 3x \cdot \sin x dx$.

Відповідь: 1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C$ (вип. 1);

2) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\mathrm{tg}\, x - 3}{\mathrm{tg}\, x - 1} \right| + C$ (вип. 2);

3) $-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{12}\cos^3 4x + C$ (вип. 3а);

4) $\frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ (вип. 3а);

5) $\frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C$

$$\Big((\sin^4 x \cdot \cos^4 x = (\sin x \cdot \cos x)^4 = \left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \tfrac{1}{16}(\sin^2 2x)^2 =$$

$$= \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{64}(1-\cos 4x)^2 = \tfrac{1}{64}(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\Big);$$

6) б) $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg}\, x - x + C$ (вип. 5);

7) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$ (вип. 6).

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

1а, б, в, г – обчислити невизначені інтеграли, використовуючи таблицю інтегралів і властивості невизначених інтегралів.

2, 3 – обчислити невизначені інтеграли за допомогою метода заміни змінної.

4, 5 – обчислити невизначені інтеграли за допомогою інтегрування частинами.

6, 7 – обчислити невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій.

8, 9, 10 – обчислити невизначені інтеграли, скориставшись відповідним методом.

Варіант № 1

1. а) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+3)dx$; б) $\int \frac{dx}{7x+10}$; в) $\int \mathrm{tg}\, 3x dx$; г) $\int \frac{dx}{8x^2-1}$.

2. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$. 3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4}}$. 4. $\int x \cdot \sin 2x dx$. 5. $\int \mathrm{arctg}\, x dx$.

6. $\int \frac{(4x-1)dx}{x(x^2+x-2)}$.   7. $\int \frac{x^3-2x^2-3x-8}{x^3+4x}dx$.   8. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$.   10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}}$.

Варіант № 2

1. а) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 \cdot e^x + x^2}{x^3}dx$;   б) $\int 5^{\frac{4}{3}x} dx$;   в) $\int \frac{dx}{3x^2+2}$;   г) $\int \frac{x}{1-x^2}dx$.

2. $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+5}dx$.   3. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x}dx$.   4. $\int (5x+2)\cos x dx$.   5. $\int x \cdot \arcsin 3x dx$.

6. $\int \frac{2x^4-2x^2-1}{x^3-x}dx$.   7. $\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2+x}dx$.   8. $\int \sin^3 2x dx$.

9. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.   10. $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

Варіант № 3

1. а) $\int \frac{(1-x)^2}{x \cdot \sqrt{x}}dx$;   б) $\int \operatorname{ctg} 9x dx$;   в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x^2}}$;   г) $\int \sin^2 5x dx$.

2. $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$.   3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$.   4. $\int x \cdot 3^{-x} dx$.   5. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

6. $\int \frac{3x^2+2x-3}{(x^2-1)(x+1)}dx$.   7. $\int \frac{x^3-x+1}{x^3+8}dx$.   8. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.   10. $\int \sqrt{4+x^2}dx$.

Варіант № 4

1. а) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$;   б) $\int e^{-7x}dx$;   в) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$;   г) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x^2+2}}$.

2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.   3. $\int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx$.   4. $\int \ln 5x dx$.   5. $\int (3-x) \cdot 4^x dx$.

6. $\int \frac{x^2+2}{(x^2+2x)(x-1)}dx$.   7. $\int \frac{x^2+x+4}{x(x^2+2)}dx$.   8. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

9. $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$.   10. $\int \frac{8-x}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

Варіант № 5

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}\cdot 4^x - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{2x^2-5}$; в) $\int 2^{6x-7}dx$; г) $\int \frac{dx}{8-7x}$.

2. $\int \frac{dx}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. 3. $\int \frac{x\ dx}{(5-3x^2)^7}$. 4. $\int \cos x\cdot(2x+1)dx$. 5. $\int x^3\cdot\ln 4x dx$.

6. $\int \frac{dx}{(x-3)^2(x+5)}$. 7. $\int \frac{x+3}{x^3+x^2+x+1}dx$. 8. $\int \cos 4x\cdot\cos 2x dx$.

9. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}dx$. 10. $\int x^2\cdot\sqrt{9-x^2}dx$.

Варіант № 6

1. а) $\int\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}-\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^4}\right)dx$; б) $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{7}dx$; в) $\int \frac{dx}{9x^2-4}$; г) $\int \frac{x}{9x^2-4}dx$.

2. $\int x^2\cdot e^{x^3}dx$. 3. $\int \frac{x}{2x^4+7}dx$. 4. $\int x\cdot\cos 5x dx$. 5. $\int x\cdot\operatorname{arctg} 2x dx$.

6. $\int \frac{3x^4+2x-1}{x^3+9x}dx$. 7. $\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$. 8. $\int \sin^3 3x dx$.

9. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. 10. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$.

Варіант № 7

1. а) $\int \frac{3x^2}{x^2+x^4}dx$; б) $\int \sin\frac{4}{9}x dx$; в) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; г) $\int \frac{dx}{4x-9}$.

2. $\int \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$. 3. $\int x\cdot\sqrt{4-9x^2}dx$. 4. $\int \arccos 2x dx$. 5. $\int (2-3x)\sin 3x dx$.

6. $\int \frac{3x^2-6x-1}{(x-2)(x^2-4)}dx$ 7. $\int \frac{x^4+x^3+x+2}{x^3+1}dx$. 8. $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 x dx$.

9. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{3\cos^2 x+5\sin^2 x}dx$. 10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[4]{x+1}}dx$.

Варіант № 8

1. а) $\int \frac{(4-\sqrt{x})^2}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{7x^2-2}$; в) $\int 4^{6-5x}dx$; г) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$.

2. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 3. $\int \frac{\sqrt{x}-\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$. 4. $\int x^2\cdot\ln 2x dx$. 5. $\int \operatorname{arctg} 3x dx$.

6. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2-x+2}dx$.   7. $\int \frac{dx}{27+x^3}$.   8. $\int \sin^2 x \cdot \cos 2x dx$.

9. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.   10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}-\sqrt{3x+4}}$.

Варіант № 9

1. а) $\int \frac{(1+x)^2}{x^3+x^2}dx$;   б) $\int \cos\frac{x}{10}dx$;   в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+10x^2}}$;   г) $\int \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x dx$.

2. $\int \frac{\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x}dx$.   3. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.   4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}}dx$.   5. $\int x^2 \cdot \sin 4x dx$.

6. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-2)^2(x+4)}dx$.   7. $\int \frac{x^3}{x^3-8}dx$.   8. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

9. $\int \operatorname{ctg}^3 5x dx$.   10. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}\, dx$.

Варіант № 10

1. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}dx$;   б) $\int e^{-\frac{8}{3}x}dx$;   в) $\int \frac{dx}{10x^2-20}$;   г) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x^2+5}}$.   3. $\int \frac{\cos^3 x+\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.   4. $\int (x+2)\cdot 2^{-x}dx$.   5. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$.

6. $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$.   7. $\int \frac{x+4}{(x^2+4)(x-1)}dx$.   8. $\int \sin 2x \cdot \sin^2 x dx$.

9. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.   10. $\int \sqrt{3-x^2}dx$.

Варіант № 11

1. а) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}\, dx$;   б) $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$;   в) $\int \frac{dx}{2x^2+4}$;   г) $\int \frac{dx}{e^{5x}}$.

2. $\int \frac{2x}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$.   3. $\int (3+\cos^5 x)\sin x dx$.   4. $\int \arcsin 4x dx$.   5. $\int x\cdot \operatorname{tg}^2 x dx$.

6. $\int \frac{2xdx}{(x^2+4x+3)(x+5)}$.   7. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$.   8. $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x\, dx$.

9. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.   10. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[3]{x}+1}$.

Варіант № 12

1. а) $\int(\sqrt[3]{x}-2)(1+\sqrt{x})dx$; б) $\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos 2x+1}\,dx$; в) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; г) $\int\frac{dx}{3x+5}$.

2. $\int\frac{e^x}{4+e^{2x}}dx$. 3. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 4. $\int x\cdot\cos 3x dx$. 5. $\int\frac{\ln 4x}{\sqrt{x^5}}dx$.

6. $\int\frac{dx}{(x+2)^2(x-1)}$. 7. $\int\frac{(1-3x)dx}{x^3+x}$. 8. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$.

9. $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$. 10. $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

Варіант № 13

1. а) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2+\sqrt[4]{x^5}}{x}dx$; б) $\int\frac{dx}{8x^2-18}$; в) $\int\frac{dx}{2-2\cos^2 x}$; г) $\int \mathrm{tg}\,5x dx$.

2. $\int\frac{2x+(\mathrm{arctg}\,x)^2}{1+x^2}dx$. 3. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\cdot\ln x}dx$.` 4. $\int\frac{\lg x}{x^2}dx$. 5. $\int\sin\sqrt{x}dx$.

6. $\int\frac{(x^2+4)dx}{(x^2-1)(x+1)}$. 7. $\int\frac{x^4+2x}{x^3+27}dx$. 8. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

9. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x+2}$. 10. $\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

Варіант № 14

1. а) $\int\frac{(7-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$; в) $\int\sin\frac{4}{3}x dx$; г) $\int\frac{dx}{4x^2-9}$.

2. $\int x\cdot\cos(x^2)dx$. 3. $\int\frac{x+4\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 4. $\int(x-1)\cdot e^{2x}dx$. 5. $\int\frac{x\cdot\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6. $\int\frac{(4x-1)dx}{x^3+x^2-2x}$. 7. $\int\frac{x^3-2x^2-3x+8}{x^3+4x}dx$. 8. $\int\cos^5 x dx$.

9. $\int\frac{dx}{1-\sqrt[4]{x+1}}$. 10. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-16}}$.

Варіант № 15

1.а) $\int\frac{5^x-\sqrt[3]{x^2}\cdot 3^x}{3^x}dx$; б) $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{4}}$; в) $\int(\arcsin x+\arccos x)dx$; г) $\int\frac{dx}{8x^2+16}$.

2. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{4-9^x}}$. 3. $\int \frac{\ln x dx}{x - x \cdot \ln^2 x}$. 4. $\int \sin 2x \cdot (x+1) dx$. 5. $\int \ln(1-x) dx$.

6. $\int \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x+5)(x^2-25)} dx$. 7. $\int \frac{x^4 + x^3 + 2 + x}{x^3 - 8} dx$. 8. $\int \mathrm{ctg}^5 2x dx$.

9. $\int \cos 4x \cdot \cos 7x dx$. 10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$.

Варіант № 16

1. а) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$; б) $\int \frac{(2-\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$; в) $\int \frac{dx}{16 - 8x^2}$; г) $\int 7^{-\frac{8}{9}x} dx$.

2. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^2} dx$. 3. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$. 4. $\int (2+x) \cdot e^{-x} dx$. 5. $\int \ln(x^2+1) dx$.

6. $\int \frac{3x^4 + 2x - 3}{x^3 - 2x^2} dx$. 7. $\int \frac{(x^2+1) dx}{x^3 + 2x^2 + 5x}$. 8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

9. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$. 10. $\int \frac{(x-1) dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}}$.

Варіант № 17

1. а) $\int \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int 3^x \cdot e^x dx$; в) $\int \cos \frac{2}{9} x dx$; г) $\int \frac{dx}{3x^2 - 12}$.

2. $\int x \cdot \sqrt{x+1} dx$. 3. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sin(\ln x)}{x} dx$. 4. $\int x \cdot \cos 7x dx$. 5. $\int \mathrm{arctg} \sqrt{x} dx$.

6. $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x-4)}$. 7. $\int \frac{dx}{x^4 + x}$. 8. $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

9. $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$. 10. $\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$.

Варіант № 18

1. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{5^{3x}}$; в) $\int \frac{dx}{10x^2 - 5}$; г) $\int \mathrm{ctg} \frac{x}{5} dx$.

2. $\int e^x \cdot \sin e^x dx$. 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x^2 \cdot \ln^2 x}}$. 4. $\int x \cdot \cos(3x-1) dx$. 5. $\int x^2 \cdot \ln(1+x) dx$.

6. $\int \frac{x^2 + 4x - 2}{(x-1)(x^2 + 2x)} dx$. 7. $\int \frac{x+3}{x^3 + 2x} dx$. 8. $\int \sin^4 2x dx$.

9. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$.

Варіант № 19

1. а) $\int (\sqrt{x}-2)(\sqrt[3]{x}+3x+1)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{12-6x^2}}$; в) $\int \frac{dx}{5-2x}$; г) $\int \frac{\cos^2 x-2}{\sin^2 x}dx$.

2. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x}$. 3. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 4. $\int \ln(x-3)dx$. 5. $\int x^2 \cdot e^{-x}dx$.

6. $\int \frac{3x^2+2x-5}{(x-3)^2(x+5)}dx$. 7. $\int \frac{x^2}{x^4-16}dx$. 8. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt{x}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sin x-2}$. 10. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Варіант № 20

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}-x^4\cdot e^x+x^2}{x^4}dx$; б) $\int 3^{9x-2}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 11x}$; г) $\int \frac{dx}{2-3x}$.

2. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx$. 3. $\int \frac{\ln(\arcsin x)dx}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. 4. $\int (3x+5)\cdot e^{2x}dx$. 5. $\int x^2\cdot\log_5 x dx$.

6. $\int \frac{2x^4-2x^2-1}{x^3-x}\,dx$. 7. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^3-x^2+x}dx$. 8. $\int \sin^2 5x\cdot\cos^2 5x dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$. 10. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+4}}dx$.

Варіант № 21

1. а) $\int (\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\cdot\sqrt{x}}{4})dx$; б) $\int \mathrm{ctg}^2 4x dx$; в) $\int \frac{x^3-1}{1-x}dx$; г) $\int \frac{dx}{3x^2+6}$.

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$. 3. $\int \frac{dx}{e^x\cdot(3+e^{-x})}$. 4. $\int (4x+1)\cdot e^{2x}dx$. 5. $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,3x dx$.

6. .$\int \frac{(x-2)dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 7. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$. 8. $\int \frac{dx}{3\sin x-2\cos x}$.

9. $\int \cos 2x\cdot\cos 6x dx$. 10. $\int \sqrt{18-2x^2}dx$.

Варіант № 22

1. а) $\int \frac{(2+\sqrt[3]{x})^2}{x}dx$; б) $\int e^{6x}dx$; в) $\int \mathrm{tg}\,12x dx$; г) $\int \frac{dx}{15x-1}$.

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2-x^3}}dx$. 3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(\operatorname{ctg} x-1)^2}$. 4. $\int x\cdot\cos\frac{x}{3}dx$. 5. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

6. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$. 7. $\int \frac{x^5}{x^4-16}dx$. 8. $\int \sin\frac{1}{4}x\cdot\cos\frac{3}{4}xdx$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. 10. $\int x^2\cdot\sqrt{4-x^2}dx$.

Варіант № 23

1. а) $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$; б) $\int \frac{dx}{14x^2-7}$; в) $\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$; г) $\int \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}dx$.

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}dx$. 3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\ln^2 x}{x}dx$. 4. $\int \frac{x-5}{e^x}dx$. 5. $\int x\cdot\ln 2xdx$.

6. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-9x}dx$. 7. $\int \frac{3x-2}{x^3+2x^2+4x+8}dx$. 8. $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 xdx$.

9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. 10. $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Варіант № 24

1. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}}dx$; б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}dx$; в) $\int 7^{-12x}dx$; г) $\int \frac{dx}{4x-1}$.

2. $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}dx$. 3. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$. 4. $\int (1-3x)\sin xdx$. 5. $\int \ln^2 5xdx$.

6. $\int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}dx$. 7. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. 8. $\int \sin^3 2x\cdot\cos^2 2xdx$.

9. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}dx$. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$.

Варіант № 25

1. а) $\int \frac{1+2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{x^2+3}$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{9}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{2-7x^3}$. 3. $\int \sqrt[6]{\sin^5 x}\cdot\cos xdx$. 4. $\int \sqrt{x}\cdot\ln 5xdx.$ 5. $\int (x-1)\cdot e^{-2x}dx$.

6. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx.$ 7. $\int \frac{(x^2+x)dx}{x^3+2x^2+2x+1}$. 8. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 xdx$.

9. $\int \mathrm{ctg}^3 2xdx$. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}\cdot(1+\sqrt[3]{x-2})}$.

Варіант № 26

1. а) $\int \frac{(2-3x)^2}{x\cdot\sqrt{x}}dx$; б) $\int \mathrm{ctg}^2 3xdx$; в) $\int \frac{dx}{4x^2+2}$; г) $\int \frac{dx}{1-4x}$.

2. $\int \frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}dx$. 3. $\int \frac{1-4x}{\sqrt{16-x^2}}dx$. 4. $\int \ln(7x+2)dx$. 5. $\int x^2\cdot e^{-2x}dx$.

6. $\int \frac{4-2x}{(x+2)(x^2+4)}dx$. 7. $\int \frac{6x-1}{x^4+x^3-2x^2}dx$. 8. $\int \sin^5 4xdx$.

9. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$. 10. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3}$.

Варіант № 27

1. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{x^2\cdot\sqrt{x}}dx$; б) $\int \sin\frac{2}{7}xdx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

2. $\int \frac{e^x dx}{3e^{2x}-6}$. 3. $\int x^4\cdot\sqrt[5]{2-x^5}dx$. 4. $\int \sin 2x\cdot(1-5x)dx$. 5. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$.

6. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3-2x^2+2x-1}dx$. 7. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. 8. $\int \cos^5\frac{x}{3}dx$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$. 10. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(25-x^2)^3}}$.

Варіант № 28

1. а) $\int \frac{e^x-x^3\cdot 3^x}{3^x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6}}$; в) $\int \frac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}dx$; г) $\int \frac{dx}{9x+8}$.

2. $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+10}}dx$. 3. $\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 4. $\int (x+3)\cos\frac{x}{2}dx$. 5. $\int x\cdot\ln 3xdx$.

6. $\int \frac{(x+8)dx}{x^3-2x^2}$. 7. $\int \frac{x^4dx}{x^4-81}$. 8. $\int \sin\frac{x}{5}\cdot\cos\frac{4}{5}xdx$.

9. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$. 10. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2}{(\sqrt[3]{x} + 1) \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$.

Варіант № 29

1. а) $\int (\sqrt[3]{x^4} - 1)(x + \sqrt{x}) dx$; б) $\int 3^{\frac{4}{5}x} dx$; в) $\int \frac{dx}{5x^2 - 20}$; г) $\int \frac{\sin 4x}{\sin 2x} dx$.

2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$. 3. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$. 4. $\int e^{\frac{x}{3}} \cdot x dx$. 5. $\int \ln 9x dx$.

6. $\int \frac{dx}{(x+5)^2 (x-3)}$. 7. $\int \frac{(x+3) dx}{x^4 - x}$. 8. $\int \sin^3 8x dx$.

9. $\int \frac{dx}{7 + \cos^2 x}$. 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 6x - x^2}}$.

Варіант № 30

1. а) $\int \frac{(1+x)^2}{x \cdot (x^2 + 1)} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 12x^2}}$; в) $\int \frac{\cos \frac{2}{3} x}{\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3}} dx$; г) $\int \frac{dx}{1 - 9x}$.

2. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} dx$. 3. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx$. 4. $\int (3x-1) \cdot 5^x dx$. 5. $\int \frac{x}{\sin^2 \frac{x}{3}} dx$.

6. $\int \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} dx$. 7. $\int \frac{3x - 8}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$. 8. $\int \frac{dx}{3 - 2\sin 2x}$.

9. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$. 10. $\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 2}}$.

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на (a,b), якщо в кожній точці інтервалу виконується рівність…

a) $f'(x) = F(x)$; b) $f(x) = F'(x)$;

c) $f'(x) = F(x) + C$; d) $f(x) = dF(x)$.

2. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax) dx$ дорівнює…

a) $\frac{1}{a} F(ax) + C$; b) $F(ax) + C$;

c) $aF(ax) + C$; d) $\frac{1}{a} F(x) + C$.

3. Невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ існує на деякому інтервалі, якщо…

a) $f(x)$ має похідну на інтервалі;

b) первісна $F(x)$ неперервна на інтервалі;

c) первісна $F(x)$ має похідну на інтервалі;

d) $f(x)$ неперервна на інтервалі.

4. Табличний інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ дорівнює…

a) $\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$; b) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$;

c) $a\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$; d) $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}x+C$.

5. «Майже» табличний інтеграл $\int \sin axdx$ дорівнює…

a) $-\frac{1}{a}\cos ax+C$; b) $a\cos ax+C$;

c) $-\frac{1}{a}\cos x+C$; d) $\frac{1}{a}\cos ax+C$.

6. Формула інтегрування частинами має вигляд…

a) $\int udv=u\cdot v+\int vdu$; b) $\int udv=-u\cdot v+\int vdu$;

c) $\int udv=u\cdot v-\int vdu$; d) $\int udv=d(uv)-\int vdu$.

7. Найпростіший (елементарний) дріб II виду має вигляд (у загальному виді)…

a) $\frac{1}{(x-a)^m}$, $m\ge 1$; b) $\frac{A}{(x-a)^m}$, $m\ge 1$;

c) $\frac{Ax}{(x-a)^m}$, $m>1$; d) $\frac{A}{(x-a)^m}$, $m>1$.

8. Дріб $\frac{1}{(x-a)(x-b)^2}$ розкладається на найпростіші дроби…

a) $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^2}+\frac{C}{x-b}$; b) $\frac{A}{x-a}+\frac{Bx}{(x-b)^2}$;

c) $\frac{A}{x-a}+\frac{Bx}{(x-b)^2}+\frac{C}{x-b}$; d) $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^2}$.

9. Універсальна підстановка має вигляд…

a) $\operatorname{tg}x=t$; b) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=t$;

c) $\operatorname{tg}2x=t$; d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

10. Інтеграл виду $\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ обчислюється за допомогою підстановки…

a) $x = \sin t$; b) $x = \frac{1}{a}\sin t$;

c) $x = a\sin t$; d) $x = \sin at$.

Відповіді: 1 - b; 2 - a; 3 - d; 4 - b; 5 - a; 6 - c; 7 - d; 8 - a; 9 - d; 10 - c.

Розв'язування прикладів

Група А

1. Обчислити інтеграл $\int \cos\frac{8}{5}xdx$.

Варіанти відповіді: a) $\sin\frac{8}{5}x + C$; b) $-\frac{8}{5}\sin\frac{8}{5}x + C$;

c) $\frac{5}{8}\sin\frac{8}{5}x + C$; d) $\frac{5}{8}\sin x + C$.

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{xdx}{x^2 - 5}$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 5\right| + C$; b) $2\ln\left|x^2 - 5\right| + C$;

c) $\ln\left|x^2 - 5\right| + C$; d) $\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$.

3. Обчислити інтеграл $\int 7^{-\frac{x}{8}}dx$.

Варіанти відповіді: a) $-\frac{1}{8}\cdot 7^{-\frac{x}{8}}\cdot\ln 7 + C$; b) $8\cdot\frac{7^{-\frac{x}{8}}}{\ln 7} + C$;

c) $-\frac{1}{8}\cdot\frac{7^{-\frac{x}{8}}}{\ln 7} + C$; d) $-\frac{1}{8}\cdot 7^{-\frac{x}{8}}\cdot\ln 7 + C$.

4.Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2 + 12}$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$; b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{12} + C$;

c) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x + C$; d) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

5. Обчислити інтеграл $\int \sin x\cdot\cos xdx$.

Варіанти відповіді: a) $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$; b) $\frac{1}{2}\cos 4x + C$;

c) $\cos 2x + C$; d) $-\frac{1}{4}\cos x + C$.

6. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

Варіанти відповіді: a) $\operatorname{ctg}4x + C$; b) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x + C$;

c) $-4\operatorname{tg} x + C$; d) $\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x + C$.

7. Обчислити інтеграл $\int \sin^2 3x dx$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{\sin^3 3x}{3} + C$; b) $\frac{1}{3}\cos^2 3x + C$;

c) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$; d) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$.

8. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2+3}{x^2} dx$.

Варіанти відповіді: a) $1 - \frac{3}{x} + C$; b) $x + \frac{3}{x} + C$;

c) $x - \frac{3}{x} + C$; d) $x - \frac{3}{x^3} + C$.

9. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}}$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{1}{2}\arcsin x + C$; b) $\frac{1}{4}\arcsin x + C$;

c) $\arcsin 4x + C$; d) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.

10.Обчислити інтеграл $\int \operatorname{ctg} 5x dx$.

Варіанти відповіді: a) $-\frac{1}{\sin^2 5x} + C$; b) $\ln|\sin 5x| + C$;

c) $\frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$; d) $\frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 + C$.

Відповіді: 1 - c; 2 - a; 3 - d; 4 - d; 5 - a; 6 - b; 7 - d; 8 - c; 9 - a; 10 - c.

Група В

1. Обчислити інтеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Варіанти відповіді: a) $3\ln^3 x + C$; b) $\frac{1}{3}\ln^3 x + C$;

c) $\ln^3 x + C$; d) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$.

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(1-4x)^5}$.

Варіанти відповіді: a) $-\frac{1}{16(1-4x)^4} + C$; b) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-4x)^4} + C$;

c) $\frac{1}{16(1-4x)^4} + C$; d) $\frac{1}{(1-4x)^4} + C$.

3. Обчислити інтеграл $\int \sin^6 x \cdot \cos x dx$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{1}{7}\sin^7 x + C$; b) $-7 \cdot \sin^7 x + C$;

c) $-\frac{1}{7}\sin^7 x + C$; d) $\sin^7 x + C$.

4. Обчислити інтеграл $\int \ln x dx$.

Варіанти відповіді: a) $x \cdot \ln x + x + C$; b) $x^2 - x \cdot \ln x + C$;

c) $x \cdot \ln x - x + C$; d) $x \cdot (\ln x + x) + C$.

5. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{1 - \cos 4x}$.

Варіанти відповіді: a) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}2x + C$; b) $\frac{1}{4}\mathrm{ctg}4x + C$;

c) $\frac{1}{4}\mathrm{ctg}2x + C$; d) $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}2x + C$.

6. Інтеграл $\int \frac{x}{5x^4 + 6} dx$ обчислюється за допомогою…

Варіанти відповіді: a) підстановки $5x^4 + 6 = t$;

b) розкладання на елементарні дроби;

c) методом інтегрування частинами;

d) підстановки $x^2 = t$.

7. Інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x + 3}$ обчислюється за допомогою підстановки…

Варіанти відповіді: a) $\cos x + 3 = t$; b) $\cos x = t$;

c) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$; d) $\mathrm{tg}\, x = t$.

8. Інтеграл $\int \frac{x + 3}{x^3 + 1} dx$ обчислюється за допомогою…

Варіанти відповіді: a) підстановки $x^3 + 1 = t$;

b) підстановки $x^2 = t$;

c) розкладання на елементарні дроби;

d) інтегрування частинами.

9. Інтеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ обчислюється за допомогою…

Варіанти відповіді: a) інтегрування частинами;

b) підстановки $\ln x = t$;

c) підстановки $\frac{1}{x} = t$;

d) підстановки $\frac{1}{x^2} = t$.

10. Інтеграл $\int x^2 \cdot \cos x dx$ обчислюється за допомогою метода інтегрування частинами, причому…

Варіанти відповіді: a) $\cos x = u$, $x^2 dx = dv$;

b) $x^2 = u$, $\cos x = dv$;

c) $x^2 = u$, $\cos x dx = dv$;

d) $x^2 \cdot \cos x = u$, $dx = dv$.

Відповіді: 1 - b; 2 - c; 3 - a; 4 - c; 5 - d; 6 - d; 7 - c; 8 - c; 9 - a; 10 - c.

ЗРАЗОК МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1. Означення невизначеного інтеграла, його геометричний зміст.

Розв'язання:

Нехай $F(x)$ первісна для функції $f(x)$. Вираз $F(x)+C$, де C може приймати будь-яке стале значення, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$. Позначається інтеграл символом $\int f(x)dx$, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. З геометричної точки зору невизначений інтеграл – це множина кривих, кожна з яких отримується за допомогою зсуву однієї з кривих паралельно самій собі вздовж осі Oy.

2. Обчислення інтегралів виду $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$.

Розв'язання:

Маємо інтеграл від ірраціональної функції. В цьому випадку можна раціоналізувати підінтегральний вираз за допомогою підстановки: $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$), тоді $dx = a\cos t dt$. Перетворимо підкореневий вираз:

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t.$$

Тоді $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$. Таким чином, підінтегральний вираз буде мати вигляд: $f(a\sin t, a\cos t)a\cos t dt$.

3. Обчислити інтеграли: а) $\int \cos^2 4x dx$; б) $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2+9} \right) dx$.

Розв'язання:

а) скористаємося формулою

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \text{ тоді } \cos^2 4x = \frac{1+\cos 8x}{2}.$$

$$\int \cos^2 4x dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \int \cos 8x dx \right] = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{8}\sin 8x \right] + C.$$

б) $\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x^2+9} = 2\ln|x|-3\cdot\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x}{3}+C =$

$$= 2\ln|x| - \text{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

4. Обчислити інтеграл $\int(x+1)\cdot\ln x dx$.

Розв'язання:

Інтегруємо частинами

$$\int(x+1)\cdot\ln x dx = \left\{\begin{array}{l}\ln x = u, \ (x+1)dx = dv \\ \frac{dx}{x} = du; \ \frac{x^2}{2}+x = v\end{array}\right\} = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x - \int\left(\frac{x}{2}+1\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} - x + C.$$

5. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}} = \int\frac{dx}{e^x-\frac{1}{e^x}} = \int\frac{e^x dx}{e^{2x}-1} = \left\{\begin{array}{l}e^x = t \\ e^x dx = dt\end{array}\right\} = \int\frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C.$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М: Наука, 1980. - Т.1.
2. Овчинников П. П. Вища математика / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К.: Техніка,2000. - Ч. 1.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М: Наука. – Т. 1.
4. Смирнов В. М. Курс высшей математики. – М: Просвещение, 1974. – Т. 1.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука,1985.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М: Высш. шк.,1980. – Ч. 1.
7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М: Высш. шк.,1966.