Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.98

Василишин Т.В.

ОПИС СПЕКТРУ ТА ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ В АЛГЕБРАХ ТИПУ ВІНЕРА ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ (p,q)-ПОЛІНОМАМИ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Василишин Т.В. *Опис спектру та диференціювань в алгебрах типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банахових просторах* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 212–228.

В роботі описано спектри алгебр типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банахових просторах, а також введено і досліджено диференціювання на цих алгебрах.

1 Вступ

У роботах [2], [3], [5], [6] досліджувались алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, зокрема у [3] було вивчено деякі важливі властивості таких алгебр, у [6] було описано спектр алгебри цілих функцій обмеженого типу на банаховому просторі. Ми досліджуємо алгебру $\mathcal{W}(X)$ функцій, які можна подати у вигляді абсолютно збіжного на обмежених підмножинах банахового простору ряду (p,q)-поліномів. На цій алгебрі існує природна структура алгебри Фреше. Також для алгебри $\mathcal{W}(X)$ вдається узагальнити деякі ідеї та методи дослідження алгебр аналітичних функцій обмеженого типу.

В даній роботі описано спектр алгебри $\mathcal{W}(X)$, а також введено і досліджено диференціювання, пов'язані зі спектром.

2 Основні означення

Нехай X — комплексний банахів простір. Нехай $p,q \in \mathbb{Z}_+$, де через $\mathbb{Z}_+$ позначено множину цілих невід'ємних чисел. Функцію $A : X^{p+q} \to \mathbb{C}$, яка є лінійною по кожному з перших p аргументів, антилінійною по кожному з останніх q аргументів, симетричною

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46J20, 46E15.
Ключові слова і фрази: (p,q)-поліномами на банахових просторах, алгебри типу Вінера, спектр, диференціювання.

по перших p аргументах і симетричною по останніх q аргументах будемо називати (p,q)-лінійною симетричною формою. Простір неперервних (p,q)-лінійних симетричних форм із нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\|\le 1,\dots,\|x_{p+q}\|\le 1} |A(x_1,\dots,x_{p+q})|$$

позначимо $\mathcal{L}^s({}^{p,q}X)$.

Звуження (p,q)-лінійної симетричної форми на діагональ назвемо (p,q)-поліномом. Число p назвемо степенем однорідності P і позначимо $\deg_h P$, число q — степенем антиоднорідності P і позначимо $\deg_a P$. Простір неперервних (p,q)-поліномів із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\le 1} |P(x)|$$

позначимо $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$.

Для (p,q)-полінома P назвемо (p,q)-лінійну симетричну форму A_P, звуженням якої є P, формою, асоційованою з P. У [4] побудовано так звану поляризаційну формулу, яка дозволяє за даним (p,q)-поліномом відновити асоційовану з ним форму:

$$A_P(x_1,\dots,x_{p+q}) = \frac{1}{(2q+1)2^{p+q}p!q!} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p+q}=\pm 1} \varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{p+q} \sum_{j=1}^{2q+1} \alpha_j^{2q+1-p}$$
$$\times P\Big(\alpha_j(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_p x_p) + \varepsilon_{p+1}x_{p+1} + \dots + \varepsilon_{p+q}x_{p+q}\Big), \quad (1)$$

де $\alpha_j = \exp\left(\frac{2\pi(j-1)i}{2q+1}\right)$.

За допомогою поляризаційної формули в [4] одержано оцінку для норм (p,q)-полінома і асоційованої з ним (p,q)-лінійної симетричної форми, яку називають поляризаційною нерівністю:

$$\|P\| \le \|A_P\| \le c(p,q,X)\|P\|, \quad (2)$$

де $c(p,q,X)$ — поляризаційна константа, для якої справедлива подвійна оцінка $1 \le c(p,q,X) \le \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}$. Зауважимо, що $\frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!} = \frac{(p+q)^{p+q}}{(p+q)!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!q!}$. Оскільки $\frac{(p+q)^{p+q}}{(p+q)!} \le e^{p+q}$ і $\frac{(p+q)!}{p!q!} = C_{p+q}^p \le 2^{p+q}$, то $\frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!} \le (2e)^{p+q}$. Звідси одержимо оцінку

$$\|P\| \le \|A_P\| \le (2e)^{p+q}\|P\|. \quad (3)$$

Із означення норми (p,q)-лінійної симетричної форми і оцінки (3) отримуємо оцінку

$$|A_P(x_1,\dots,x_{p+q})| \le \|A_P\|\|x_1\|\dots\|x_{p+q}\|. \quad (4)$$

Із поляризаційної формули (1) і поляризаційної нерівності (2) випливає, що простори $\mathcal{L}^s({}^{p,q}X)$ і $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ ізоморфні.

3 Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами

Позначимо $\mathbb{Q}^+$ множину раціональних чисел, більших від нуля. Множину функцій $f : X \to \mathbb{C}$ таких, що $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$, де $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}({}^{k,m-k}X)$, і для кожного

$r \in \mathbb{Q}^+$ ряд

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sup_{\|x\| \le r} |f_{k,m-k}(x)|$$

є збіжним, будемо позначати $\mathcal{W}(X)$. Множина $\mathcal{W}(X)$ зі звичайними операціями множення на скаляр, додавання і множення функцій разом із системою норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{Q}^+\}$ є алгеброю Фреше.

Зауважимо, що оскільки $\sup_{\|x\| \le r} |f_{k,m-k}(x)| = r^m \|f_{k,m-k}\|$, то

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\|.$$

Для кожного лінійного неперервного функціонала φ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що φ — неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Визначимо радіус-функцію $R : \mathcal{W}(X)' \to \mathbb{R}$, поклавши для $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ за $R(\varphi)$ інфімум таких $r \in \mathbb{Q}^+$, що φ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.

Звуження лінійного функціонала $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ на простір $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ будемо позначати $\pi_{p,q}(\varphi)$. Наступні дві теореми встановлюють зв'язок між значенням радіус-функції і нормами звужень на простори неперервних (p,q)-поліномів для лінійного функціонала на $\mathcal{W}(X)$.

Теорема 1. *([1]) Для значення радіус-функції на лінійному неперервному функціоналі φ виконується рівність*

$$R(\varphi) = \limsup_{m \to \infty} \max_{0 \le k \le m} \|\pi_{k,m-k}(\varphi)\|^{1/m}.$$

Теорема 2. *([1]) Нехай φ — лінійний функціонал на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Якщо звуження φ на простори $\mathcal{P}({}^{p,q}X)$ для всіх $p, q \in \mathbb{Z}_+$ неперервні і їх норми задовольняють оцінку $\|\pi_{p,q}(\varphi)\| \le cs^{p+q}$ для деяких фіксованих $c, s > 0$, то φ — неперервний лінійний функціонал і $R(\varphi) \le s$.*

4 Оператор зсуву

Нехай $x \in X$. Визначимо оператор зсуву T_x на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ наступним чином:

$$(T_x f)(y) = f(x+y), \quad \text{де} \quad f \in \mathcal{W}(X),\ y \in X.$$

Теорема 3. *При фіксованому $x \in X$ для функції $f \in \mathcal{W}(X)$ значення оператора зсуву $T_x f$ буде належати алгебрі $\mathcal{W}(X)$.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$(T_x f)(y) = f(x+y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x+y).$$

Відомо, що

$$f_{k,m-k}(x+y) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j),$$

де $A_{f_{k,m-k}}$ — це $(k, m-k)$-лінійна симетрична форма, асоційована з $f_{k,m-k}$, а через $A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)$ позначено $A_{f_{k,m-k}}(\underbrace{x,\ldots,x}_{k-i}, \underbrace{y,\ldots,y}_{i}; \underbrace{x,\ldots,x}_{m-k-j}, \underbrace{y,\ldots,y}_{j})$.

Звідси

$$(T_x f)(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j).$$

Переконаємося, що для кожного $r > 0$ існує скінченна норма $\|T_x f\|_r$. За означенням,

$$\|T_x f\|_r = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{\|y\| \le r} \Big| \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j) \Big|.$$

Звідси

$$\|T_x f\|_r \le \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \sup_{\|y\| \le r} \big| A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j) \big|$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \sup_{\|y\| \le r} \big| A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j) \big|.$$

Згідно із оцінкою (4),

$$|A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)| \le (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \|x\|^{m-i-j} \|y\|^{i+j}.$$

Звідси

$$\sup_{\|y\| \le r} |A_{f_{k,m-k}}(x^{k-i}, y^i; x^{m-k-j}, y^j)| \le (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \|x\|^{m-i-j} r^{i+j}.$$

Тому

$$\|T_x f\|_r \le \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \|x\|^{m-i-j} r^{i+j}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2e)^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| \sum_{i=0}^{k} C_k^i r^i \|x\|^{k-i} \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j r^j \|x\|^{m-k-j}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2e)^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| (r + \|x\|)^k (r + \|x\|)^{m-k}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2e(r + \|x\|))^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| = \|f\|_{2e(r+\|x\|)}.$$

Отже, $\|T_x f\|_r \leq \|f\|_{2e(r+\|x\|)}$. Оскільки $f \in \mathcal{W}(X)$, то $\|f\|_{2e(r+\|x\|)}$ — скінченна, тому скінченною для довільного r буде $\|T_x f\|_r$. Звідси, $T_x f \in \mathcal{W}(X)$. $\square$

Теорема 4. *Нехай φ — лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$, f — деяка фіксована функція, яка належить алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Тоді функція $x \mapsto \varphi(T_x f)$ належить алгебрі $\mathcal{W}(X)$.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$(T_x f)(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j}).$$

Нехай $P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j} : y \longmapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})$. Очевидно, що $P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}$ — $(k-i, m-k-j)$-поліномом. Тепер

$$T_x f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}$$

і

$$\begin{aligned}\varphi(T_x f) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}).\end{aligned}$$

Оскільки відображення $x \mapsto \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})$ є (i,j)-поліномом, то відображення $x \mapsto \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})$ також є (i,j)-поліномом. Отже, відображення $x \mapsto \varphi(T_x f)$ зображається у вигляді ряду (p,q)-поліномів. Доведемо, що для довільного $r > 0$ буде $\|x \mapsto \varphi(T_x f)\|_r < \infty$. За означенням,

$$\|x \mapsto \varphi(T_x f)\|_r = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{\|x\| \leq r} \Big| \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \varphi_{k-i,m-k-j}(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}) \Big|.$$

Звідси

$$\|x \mapsto \varphi(T_x f)\|_r \leq \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=i+j}^{\infty} \sum_{k=i}^{m-j} C_k^i C_{m-k}^j \sup_{\|x\| \leq r} |\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})|.$$

Оскільки $|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j})| \leq \|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\| \|P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}\|$ і

$$\begin{aligned}\|P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} |P_{x,f_{k,m-k}}^{k-i,m-k-j}(y)| = \sup_{\|y\| \leq 1} |A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})| \\ &\leq \sup_{\|y\| \leq 1} (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \|x\|^i \|y\|^{k-i} \|x\|^j \|y\|^{m-k-j} = (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \|x\|^{i+j},\end{aligned}$$

то

$$\sup_{\|x\|\leq r} |\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)(P^{k-i,m-k-j}_{x,f_{k,m-k}})| \leq \sup_{\|x\|\leq r} (2e)^m \|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\| \|f_{k,m-k}\| \|x\|^{i+j}$$
$$= (2e)^m \|\pi_{k-i,m-k-j}(\varphi)\| \|f_{k,m-k}\| r^{i+j}.$$

Оскільки φ — неперервний лінійний функціонал, то $R(\varphi) < \infty$. Візьмемо деяке число $s > R(\varphi)$. Тоді існує таке число $c > 1$, що $\|\pi_{k,m-k}(\varphi)\| \leq cs^m$. Звідси

$$\begin{aligned}
\|x \mapsto \varphi(T_x f)\|_r &\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j c s^{m-i-j} (2e)^m \|f_{k,m-k}\| r^{i+j} \\
&= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| \sum_{i=0}^{k} C_k^i s^{k-i} r^i \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j s^{m-k-j} r^j \\
&= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e)^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| (r+s)^m \\
&= c\sum_{m=0}^{\infty}(2e(r+s))^m \sum_{k=0}^{m} \|f_{k,m-k}\| = c\|f\|_{2e(r+s)} < \infty.
\end{aligned}$$

Отже, $(x \mapsto \varphi(T_x f)) \in \mathcal{W}(X)$. □

5 Згортка лінійних функціоналів

Для лінійних неперервних функціоналів $\varphi, \theta \in \mathcal{W}(X)'$ визначимо згортку $\varphi * \theta$ як функцію на $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto (T_x f)(y))), \quad f \in \mathcal{W}(X).$$

Очевидно, що $\varphi * \theta$ є лінійним функціоналом. Доведемо неперервність.

Теорема 5. *Для лінійних неперервних функціоналів $\varphi, \theta \in \mathcal{W}(X)'$ згортка $\varphi * \theta$ є лінійним неперервним функціоналом. При цьому $R(\varphi * \theta) \leq 2e(R(\varphi) + R(\theta))$.*

Доведення. Оцінимо норми звужень згортки $\varphi * \theta$ на простори $(k, m-k)$-поліномів, де $m \geq 0$, $0 \leq k \leq m$. Для цього оцінимо значення $\varphi * \theta$ на $(k, m-k)$-поліномі $f_{k,m-k}$.

$$\begin{aligned}
(\varphi * \theta)(f_{k,m-k}) &= \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto (T_x f_{k,m-k})(y))) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto f_{k,m-k}(x+y))) \\
&= \varphi\Big(x \mapsto \theta\Big(y \mapsto \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})\Big)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j}))).
\end{aligned}$$

Оцінимо значення $(\varphi * \theta)(f_{k,m-k})$ по модулю.

$$|(\varphi * \theta)(f_{k,m-k})| \leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j |\varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})))|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \sup_{\|x\|\leq 1} |\theta(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j}))|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \sup_{\|x\|\leq 1} \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\| \sup_{\|y\|\leq 1} |A_{f_{k,m-k}}(x^i, y^{k-i}; x^j, y^{m-k-j})|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\| \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y\|\leq 1} \|A_{f_{k,m-k}}\| \|x\|^i \|y\|^{k-i} \|x\|^j \|y\|^{m-k-j}$$

$$= \|A_{f_{k,m-k}}\| \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\|$$

$$\leq (2e)^m \|f_{k,m-k}\| \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\|.$$

Тепер оцінимо норму лінійного функціонала $\pi_{k,m-k}(\varphi * \theta)$.

$$\|\pi_{k,m-k}(\varphi * \theta)\| = \sup_{\|f_{k,m-k}\|\leq 1} |\pi_{k,m-k}(\varphi * \theta)(f_{k,m-k})|$$

$$\leq (2e)^m \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j \|\pi_{i,j}(\varphi)\| \|\pi_{k-i,m-k-j}(\theta)\|.$$

Візьмемо числа $s_1 > R(\varphi)$ і $s_2 > R(\theta)$. Тоді існують такі числа $c_1, c_2 > 0$, що для довільних $p, q \in \mathbb{Z}_+$ буде $\|\pi_{p,q}(\varphi)\| \leq c_1 s_1^{p+q}$ і $\|\pi_{p,q}(\theta)\| \leq c_2 s_2^{p+q}$. Використаємо ці оцінки.

$$\|\pi_{k,m-k}(\varphi * \theta)\| \leq (2e)^m \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m-k} C_k^i C_{m-k}^j c_1 s_1^{i+j} c_2 s_2^{k-i+m-k-j}$$

$$= c_1 c_2 (2e)^m \sum_{i=0}^{k} C_k^i s_1^i s_2^{k-i} \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j s_1^j s_2^{m-k-j} = c_1 c_2 (2e)^m (s_1 + s_2)^m.$$

Позначимо $c = c_1 c_2$, $s = 2e(s_1 + s_2)$. Тоді для норм звужень згортки на простори $(k, m-k)$-поліномів маємо оцінку $\|\pi_{k,m-k}(\varphi * \theta)\| \leq c s^m$. За теоремою 2 згортка $\varphi * \theta$ є неперервним лінійним функціоналом на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Для радіус-функції маємо оцінку $R(\varphi * \theta) \leq s = 2e(s_1 + s_2)$. Оскільки s_1 і s_2 вибрані довільно, то

$$R(\varphi * \theta) \leq 2e(R(\varphi) + R(\theta)).$$

$\square$

Доведемо ще одну властивість згортки.

Теорема 6. *Нехай φ, θ — лінійні неперервні функціонали на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Якщо φ, θ є характерами, то $\varphi * \theta$ також є характером.*

Доведення. Перевіримо, що для довільних функцій $f, g \in \mathcal{W}(X)$ виконується рівність

$$(\varphi * \theta)(fg) = (\varphi * \theta)(f)(\varphi * \theta)(g).$$

За означенням, $(\varphi * \theta)(fg) = \varphi(x \mapsto \theta(y \mapsto (fg)(x+y)))$. Оскільки φ, θ є характерами, то

$$\theta(y \mapsto (fg)(x+y)) = \theta(y \mapsto f(x+y)g(x+y)) = \theta(y \mapsto f(x+y))\theta(y \mapsto g(x+y))$$

і

$$\begin{aligned}(\varphi * \theta)(fg) &= \varphi\Big(x \mapsto \theta(y \mapsto f(x+y))\theta(y \mapsto g(x+y))\Big)\\ &= \varphi\Big(x \mapsto \theta(y \mapsto f(x+y))\Big)\varphi\Big(x \mapsto \theta(y \mapsto g(x+y))\Big) = (\varphi * \theta)(f)(\varphi * \theta)(g).\end{aligned}$$

□

Для скінченної послідовності $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{W}(X)'$ згортку $\varphi_1 * \ldots * \varphi_n$ будемо позначати $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} \varphi_k$.

6 Спектр алгебри $\mathcal{W}(X)$

Нехай $(n, l) \in \mathbb{Z}_+^2$. Визначимо множини $\overline{\Lambda}_{n,l}, \Lambda_{n,l} \subset \mathbb{Z}_+^2$ наступним чином

$$\overline{\Lambda}_{n,l} = \{(i, j) : \ 0 \le i \le n, \ 0 \le j \le l\},$$

$$\Lambda_{n,l} = \overline{\Lambda}_{n,l} \setminus \{(n, l)\}.$$

Нехай $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ — замикання підалгебри алгебри $\mathcal{W}(X)$, породженої (p, q)-поліномами, для яких $(p, q) \in \Lambda_{n,l}$ і нехай $\mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{n,l}}(X)$ — замикання підалгебри алгебри $\mathcal{W}(X)$, породженої (p, q)-поліномами, для яких $(p, q) \in \overline{\Lambda}_{n,l}$.

У [1] доведено таку теорему:

Теорема 7. *Нехай φ — лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\varphi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}({}^{n,l}X) \cap \mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$, але при цьому $\pi_{n,l}(\varphi) \neq 0$. Тоді існує неперервний комплекснозначний гомоморфізм ψ на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\pi_{p,q}(\psi) = 0$, якщо $(p, q) \in \Lambda_{n,l}$, і $\pi_{n,l}(\psi) = \pi_{n,l}(\varphi)$. Радіус-функція*

$$R(\psi) \le e \frac{n+l}{n^{n/(n+l)} l^{l/(n+l)}} \|\pi_{n,l}(\varphi)\|^{1/(n+l)}.$$

Із того, що ψ — характер і $\pi_{p,q}(\psi) = 0$ для $(p, q) \in \Lambda_{n,l}$ випливає

Наслідок 6.1. *$\pi_{p,q}(\psi)$ не дорівнює нулю тільки якщо існує $k \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $p = kn$ і $q = kl$.*

Побудуємо функцію $\varkappa : \mathbb{Z}_+^2 \to \mathbb{Z}_+$, поклавши $\varkappa(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ для $(i,j) \in \mathbb{Z}_+^2$. Можна перевірити, що $\varkappa$ є бієкцією. Позначимо через γ обернене відображення до $\varkappa$.

Нехай I_k буде мінімальний замкнутий ідеал алгебри $\mathcal{W}(X)$, породжений всіма неперервними (p,q)-поліномами, для яких $0 < \varkappa(p,q) \le k$.

Множину характерів алгебри $\mathcal{W}(X)$ будемо позначати $M_{\mathcal{W}(X)}$.

Нехай для $k \ge 1$

$$\Phi_k = \{\varphi \in M_{\mathcal{W}(X)} : \quad \ker\varphi \supset I_k\}.$$

Також покладемо $\Phi_0 = M_{\mathcal{W}(X)}$.

Доведемо деякі допоміжні результати.

Теорема 8. *Якщо для пари $(n,l) \ne (0,0)$ алгебра $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ не співпадає з алгеброю $\mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{n,l}}(X)$, то існує такий характер $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, що $\psi \notin \Phi_{\varkappa(n,l)}$.*

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$ і $P \notin \mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$. Оскільки алгебра $\mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ є замкнутим підпростором алгебри $\mathcal{W}(X)$, то за теоремою Гана-Банаха існує лінійний функціонал $\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ такий, що $\varphi(f) = 0$ для кожної функції $f \in \mathcal{W}_{\Lambda_{n,l}}(X)$ і $\varphi(P) \ne 0$. За теоремою 7 існує характер ψ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\psi_{p,q} = 0$, якщо $(p,q) \in \Lambda_{n,l}$ і $\psi_{n,l} = \varphi_{n,l}$. Неважко переконатись, що для жодного значення $k \in \mathbb{N}$ пара (kn, kl) не належить множині $\{(i,j) : 0 < \varkappa(i,j) \le \varkappa(n,l) - 1\}$, тому за наслідком 6.1 $\ker\psi \supset I_{\varkappa(n,l)-1}$ і $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$. Оскільки $\psi(P) \ne 0$, то $\psi \notin \Phi_{\varkappa(n,l)}$. □

Теорема 9. *Якщо $\varphi, \psi \in M_{\mathcal{W}(X)}$, $\varphi, \psi \ne 0$ і $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(P) + \psi(P)$ для довільного $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$.*

Доведення. За означенням, $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(x \mapsto \psi(y \mapsto (T_xP)(y)))$. Оскільки

$$(T_xP)(y) = P(x+y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j A_P(x^i, y^{n-i}; x^j, y^{l-j}),$$

то

$$\psi(y \mapsto (T_xP)(y)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j \psi(y \mapsto A_P(x^i, y^{n-i}; x^j, y^{l-j})).$$

Оскільки $\psi \in \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то $\pi_{\gamma(k)}(\psi) = 0$ для $1 \le k \le \varkappa(n,l) - 1$. Звідси випливає, що $\pi_{n-i,l-j}(\psi) = 0$ при $(n-i, l-j) \in \Lambda_{n,l} \setminus \{(0,0)\}$, тому

$$\begin{aligned}\psi(y \mapsto (T_xP)(y)) &= \psi(y \mapsto A_P(x^n; x^l)) + \psi(y \mapsto A_P(y^n; y^l)) \\ &= \psi(y \mapsto P(x)) + \psi(y \mapsto P(y)) = P(x)\psi(y \mapsto 1) + \psi(P).\end{aligned}$$

Оскільки ψ — ненульовий характер, то $\psi(y \mapsto 1) = 1$. Тому

$$\psi(y \mapsto (T_xP)(y)) = P(x) + \psi(P).$$

Звідси

$$\begin{aligned}(\varphi * \psi)(P) &= \varphi(x \mapsto P(x) + \psi(P)) = \varphi(x \mapsto P(x)) + \varphi(x \mapsto \psi(P)) \\ &= \varphi(P) + \psi(P)\varphi(x \mapsto 1) = \varphi(P) + \psi(P).\end{aligned}$$

□

Теорема 10. *Якщо* $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$ *і послідовність* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ *така, що* $\varphi_j \in \Phi_{j-1}$, *то для довільного* $m > \varkappa(n,l)$ *буде* $(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\varkappa(n,l)} \varphi_j)(P)$.

Доведення. Оскільки $\varphi_m \in \Phi_{m-1} \subset \Phi_{\varkappa(n,l)-1}$, то за теоремою 9

$$(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = ((\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \varphi_j) * \varphi_m)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P) + \varphi_m(P).$$

З того, що $\varphi_m \in \Phi_{m-1} \subset \Phi_{\varkappa(n,l)}$ випливає, що $\varphi_m(P) = 0$. Тому $(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P)$. Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$(\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-1} \varphi_j)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{m-2} \varphi_j)(P) = \ldots = (\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\varkappa(n,l)} \varphi_j)(P).$$

□

Для послідовності $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_{\mathcal{W}(X)}$, $\varphi_n \in \Phi_{n-1}$ нескінченною згорткою будемо вважати такий лінійний мультиплікативний функціонал на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів, що $(\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n)(P) = (\mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\varkappa(p,q)} \varphi_n)(P)$ для $P \in \mathcal{P}(^{p,q}X)$. У випадку, коли цей функціонал неперервний, його можна продовжити до лінійного неперервного мультиплікативного функціонала φ на $\mathcal{W}(X)$. В цьому випадку будемо використовувати те саме позначення $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$.

Теорема 11. *Існує послідовність спряжених банахових просторів* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *і послідовність відображень* $\delta^{(n)} : E_n \to M_{\mathcal{W}(X)}$ *таких, що довільний характер* $\varphi \in M_{\mathcal{W}(X)}$ *можна подати у вигляді* $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{n=1}^{\infty} \delta^{(n)}(u_n)$ *для деяких елементів* $u_n \in E_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення. Покладемо $E_1 = \mathcal{P}(^{0,1}X)' = \overline{X}''$, $\delta^{(1)} = \widetilde{\delta}$ — функціонал значення функції в точці $\overline{X}''$. Припустимо, що простори E_k і відображення $\delta^{(k)}$ вже побудовано для $k < n$. Позначимо E_n множину $\{\pi_{\gamma(n)}(\varphi) : \quad \varphi \in \Phi_{n-1}\}$, де $\pi_{\gamma(n)}(\varphi)$ — звуження φ на підпростір $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$. Очевидно, кожен елемент множини E_n є лінійним функціоналом на просторі $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$, який перетворюється в нуль на всіх елементах простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X) \cap \mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X)$. Отже, кожен елемент множини E_n є елементом простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$, де через $I_{n-1}^{\perp}$ позначено простір лінійних функціоналів на $\mathcal{W}(X)$, які перетворюються в нуль на ідеалі I_{n-1}. Якщо $\mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X) = \mathcal{W}_{\overline{\Lambda}_{\gamma(n)}}(X)$ то $E_n = \{0\}$, інакше за теоремою 8 множина E_n містить ненульові точки.

Покажемо, що E_n є лінійним простором зі звичайними операціями суми елементів і множення на скаляр. Для цього достатньо показати, що ці операції не виводять за межі E_n.

Нехай $\varphi, \psi \in \Phi_{n-1}$. Для довільного $P \in \mathcal{P}(^{\gamma(x)}X)$ за теоремою 9 $(\varphi * \psi)(P) = \varphi(P) + \psi(P)$. Звідси $\pi_{\gamma(n)}(\varphi * \psi)(P) = \pi_{\gamma(n)}(\varphi)(P) + \pi_{\gamma(n)}(\psi)(P)$. Отже, $\pi_{\gamma(n)}(\varphi) + \pi_{\gamma(n)}(\psi) = \pi_{\gamma(n)}(\varphi * \psi)$.

Нехай $\varphi \in \Phi_{n-1}$, a — довільне комплексне число. Покажемо, що $a\pi_{\gamma(n)}(\varphi) \in E_n$. Оскільки $a\varphi \in \mathcal{W}(X)'$ і $a\varphi$ перетворюється в нуль на елементах простору $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X) \cap$

$\mathcal{W}_{\Lambda_{\gamma(n)}}(X)$, то за теоремою 7 існує такий характер ψ, що $\pi_{\gamma(n)}(\psi) = \pi_{\gamma(n)}(a\varphi)$. Звідси, $a\pi_{\gamma(n)}(\varphi) = \pi_{\gamma(n)}(a\varphi) = \pi_{\gamma(n)}(\psi) \in E_n$, оскільки $\psi \in \Phi_{n-1}$. Отже, E_n — лінійний простір.

Визначимо простір $W_n = \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)/(I_{n-1} \cap \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X))$. Тоді W_n є банаховим простором лінійних функціоналів на просторі E_n. Визначимо норму $\|\cdot\|_n$ на E_n як супремум значень на векторі із E_n елементів одиничної кулі простору W_n. Очевидно, простір W_n' співпадає з простором $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$. Як було вже сказано, кожен елемент простору E_n міститься в $\mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$. З іншого боку, якщо $u \in \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)' \cap I_{n-1}^{\perp}$, то за теоремою 7 існує такий характер $\varphi \in \Phi_{n-1}$, що $u = \pi_{\gamma(n)}(\varphi)$, отже, $u \in E_n$. Звідси робимо висновок, що $E_n = W_n'$.

Для $w \in E_n$ нехай $\delta^{(n)}(w)$ — характер, який існує за теоремою 7, якщо в ролі лінійного функціонала взяти w. Для довільного характера φ покладемо $u_1 = \pi_{\gamma(1)}(\varphi) \in \overline{X}''$. Припустимо, що уже визначено елементи $u_k \in E_k$ для $k < n$. Покладемо

$$u_n = \pi_{\gamma(n)}(\varphi) - \pi_{\gamma(n)}\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right).$$

Покажемо, що $u_n \in E_n$. Достатньо перевірити, що для кожного (p,q)-полінома $P \in \mathcal{P}(^{\gamma(n)}X)$, який є добутком (p,q)-поліномів P_1, P_2 таких, що $(\deg_1 P_1, \deg_2 P_1) = (n_1, l_1) \neq (0,0)$ і $(\deg_1 P_2, \deg_2 P_2) = (n_2, l_2) \neq (0,0)$ буде $u_n(P) = 0$. Із мультиплікативності φ і $\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)$ отримуємо

$$\begin{aligned} u_n(P) &= \pi_{\gamma(n)}(\varphi)(P_1P_2) - \pi_{\gamma(n)}\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1P_2) = \varphi(P_1P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1P_2) \\ &= \varphi(P_1)\varphi(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2) \\ &= \pi_{n_1,l_1}(\varphi)(P_1)\pi_{n_2,l_2}(\varphi)(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2). \end{aligned}$$

За теоремою 10

$$\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1) = \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)$$

і

$$\left(\mathop{\ast}_{k=1}^{n-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2) = \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2).$$

Згідно із припущенням

$$u_{\varkappa(n_1,l_1)}(P_1) = \pi_{n_1,l_1}(\varphi)(P_1) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_1)$$

і

$$u_{\varkappa(n_2,l_2)}(P_2) = \pi_{n_2,l_2}(\varphi)(P_2) - \left(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)-1} \delta^{(k)}(u_k)\right)(P_2).$$

Тому, скориставшись теоремою 9, маємо

$$\begin{aligned} u_n(P) = \Bigg(u_{\varkappa(n_1,l_1)}(P_1) + \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)-1} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_1) \Bigg) \\ \times \Bigg(u_{\varkappa(n_2,l_2)}(P_2) + \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)-1} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_2) \Bigg) \\ - \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_1) \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_2) \\ = \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_1) \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_2) \\ - \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_1,l_1)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_1) \Bigg(\mathop{\ast}_{k=1}^{\varkappa(n_2,l_2)} \delta^{(k)}(u_k) \Bigg)(P_2) = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо функціонал $\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$. Нехай $f = \sum_{m=0}^{s} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$ — довільна функція, породжена скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. Оскільки $u_k \in E_k$, то за теоремою 10 маємо

$$\begin{aligned} \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(f) = \sum_{m=0}^{s} \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(f_{k,m-k}) \\ = f(0) + \sum_{m=1}^{s} \sum_{k=0}^{m} \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,m-k)} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(f_{k,m-k}). \end{aligned}$$

Отже, згортка $\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ є визначеною на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. З іншого боку, для довільного $P \in \mathcal{P}({}^{k,l}X)$

$$\begin{aligned} \Bigg(\varphi - \mathop{\ast}_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) = \pi_{k,l}(\varphi)(P) - \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) \\ = u_{\varkappa(k,l)}(P) + \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)-1} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) - \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) \\ = \delta^{(\varkappa(k,l))}(u_{\varkappa(k,l)})(P) + \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)-1} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) - \Bigg(\mathop{\ast}_{j=1}^{\varkappa(k,l)} \delta^{(j)}(u_j) \Bigg)(P) = 0. \end{aligned}$$

Отже, φ співпадає з $\mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ на алгебрі функцій, породжених скінченними лінійними комбінаціями і добутками (p,q)-поліномів. Ця алгебра є щільною в $\mathcal{W}(X)$, тому $\varphi = \mathop{\ast}\limits_{j=1}^{\infty} \delta^{(j)}(u_j)$ на $\mathcal{W}(X)$. □

7 Диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$

Нехай $u_{p,q} \in E_{\varkappa(p,q)}$. Визначимо лінійний функціонал $\theta(u_{p,q})$ на алгебрі $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$\theta(u_{p,q})(f) = \begin{cases} u_{p,q}(f), & \text{якщо } f \in \mathcal{P}({}^{p,q}X), \\ 0, & \text{якщо } f \in \mathcal{P}({}^{m,k}X) \text{ і } (m,k) \neq (p,q). \end{cases}$$

Визначимо лінійний оператор $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ на $\mathcal{W}(X)$ формулою

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f)(x) = \theta(u_{p,q})(y \mapsto (T_x f)(y)).$$

Нехай $n \geq p$ і $l \geq q$ і нехай A_P — це (n,l)-лінійна симетрична форма, асоційована з деяким (n,l)-поліномом P. Тоді відображення $y \mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q)$ буде (p,q)-поліномом. Значення $u_{p,q}(y \mapsto A_P(x^{n-p}, y^p; x^{l-q}, y^q))$ будемо позначати $\widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q})$.

Теорема 12. *Нехай $u_{p,q} \in E_{\varkappa(p,q)}$. Тоді оператор $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ є неперервним оператором диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. При цьому для $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$*

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) = \begin{cases} C_n^p C_l^q \widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q}), & \text{якщо } n \geq p \text{ і } l \geq q, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{5}$$

Також для кожної функції $f \in \mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$,

$$\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p!)^n}{(np)!} \frac{(q!)^n}{(nq)!} \partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{np,nq}).$$

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}(^{n,l}X)$. Тоді

$$\begin{aligned}\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) &= \theta(u_k)(y \mapsto (T_x P)(y)) = \theta(u_k)(y \mapsto P(x+y)) \\ &= \theta(u_{p,q})(y \mapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{l} C_n^i C_l^j \theta(u_{p,q})(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)).\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}&\theta(u_{p,q})(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)) \\ &\qquad = \begin{cases} u_{p,q}(y \mapsto A_P(x^{n-i}, y^i; x^{l-j}, y^j)), & \text{якщо } i = p \text{ і } j = q, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}\end{aligned}$$

то

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)(x) = \begin{cases} C_n^p C_l^q \widehat{A}_P(x^{n-p}; x^{l-q}, u_{p,q}), & \text{якщо } n \geq p \text{ і } l \geq q, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Отже, рівність (5) доведено.

Доведемо, що для кожної функції f із $\mathcal{W}(X)$ функція $g(x) = \partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f)(x)$ буде належати алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Нехай $f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \partial_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{k,m-k})(x) \\ &= \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)).\end{aligned}$$

Позначимо $g_{k-p,m-k-q}(x) = C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q))$.

Тоді $g = \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} g_{k-p,m-k-q}$ і $g_{k-p,m-k-q} \in \mathcal{P}({}^{k-p,m-k-q}X)$. Оцінимо норму $(k-p, m-k-q)$-полінома $g_{k-p,m-k-q}$.

$$\|g_{k-p,m-k-q}\| = \sup_{\|x\|\le 1} |g_{k-p,m-k-q}(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |C_k^p C_{m-k}^q u_{p,q}(y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q))|$$
$$\le \sup_{\|x\|\le 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \|y \mapsto A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)\|$$
$$= \sup_{\|x\|\le 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \sup_{\|y\|\le 1} |A_{f_{k,m-k}}(x^{k-p}, y^p; x^{m-k-q}, y^q)|$$
$$\le \sup_{\|x\|\le 1} C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \sup_{\|y\|\le 1} \|A_{f_{k,m-k}}\| \|x\|^{k-p} \|y\|^p \|x\|^{m-k-q} \|y\|^q = C_k^p C_{m-k}^q \|u_{p,q}\| \|A_{f_{k,m-k}}\|.$$

Оскільки $C_k^p \le 2^k$, $C_{m-k}^q \le 2^{m-k}$ і $\|A_{f_{k,m-k}}\| \le (2e)^m \|f_{k,m-k}\|$, то

$$\|g_{k-p,m-k-q}\| \le 2^k 2^{m-k} (2e)^m \|u_{p,q}\| \|f_{k,m-k}\| = (4e)^m \|u_{p,q}\| \|f_{k,m-k}\|.$$

Нехай $r > 0$. Має місце оцінка

$$\|g\|_r = \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} r^{m-p-q} \|g_{k-p,m-k-q}\| \le \|u_{p,q}\| \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} r^{m-p-q} (4e)^m \|f_{k,m-k}\|.$$

Позначимо $\rho = \max\{1, r\}$. Тоді $r^{m-p-q} \le \rho^{m-p-q} \le \rho^m$. Тому

$$\|g\|_r \le \|u_{p,q}\| \sum_{m=p+q}^{\infty} \sum_{k=p}^{m-q} \rho^m (4e)^m \|f_{k,m-k}\| \le \|u_{p,q}\| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (4\rho e)^m \|f_{k,m-k}\| = \|u_{p,q}\| \|f\|_{4\rho e}.$$

Оскільки $f \in \mathcal{W}(X)$, то $\|f\|_{4\rho e} < +\infty$. Тому $\|g\|_r < +\infty$. Отже, $g \in \mathcal{W}(X)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^{n,l}X)$, $Q \in \mathcal{P}({}^{m,r}X)$. Доведемо, що

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ) = P\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(Q) + Q\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P). \tag{6}$$

Якщо $n+m < p$ або $l+r < q$, то рівність очевидна. Нехай $n+m \ge p$ і $l+r \ge q$. Нехай A_{PQ} — форма, асоційована з $(n+m, l+r)$-поліномом PQ. Із рівності (5) випливає, що

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x) = C_{n+m}^p C_{l+r}^q \theta(u_{p,q})(y \mapsto A_{PQ}(x^{n+m-p}, y^p; x^{l+r-q}, y^q)).$$

Нехай $z_1, \dots, z_{n+m}, t_1, \dots, t_{l+r} \in X$. Тоді

$$A_{PQ}(z_1, \dots, z_{n+m}; t_1, \dots, t_{l+r}) = \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{(l+r)!}$$
$$\times \sum_{\sigma \in S(n+m)} \sum_{\tau \in S(l+r)} A_P(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}; t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(l)})$$
$$\times A_Q(z_{\sigma(n+1)}, \dots, z_{\sigma(n+m)}; t_{\tau(l+1)}, \dots, t_{\tau(l+r)}). \tag{7}$$

Введемо позначення $z = (z_1, \dots, z_{n+m})$, $t = (t_1, \dots, t_{l+r})$, $\sigma_1 = \sigma|_{\{1,\dots,n\}}$, $\sigma_2 = \sigma|_{\{n+1,\dots,n+m\}}$, $\tau_1 = \tau|_{\{1,\dots,l\}}$, $\tau_2 = \tau|_{\{l+1,\dots,l+r\}}$. Розглянувши z як відображення з $\{1, \dots, n+m\}$ в X, а t як відображення з $\{1, \dots, l+r\}$ в X, формулу (7) перепишемо у вигляді

$$A_{PQ}(z;t) = \frac{1}{(n+m)!} \frac{1}{(l+r)!} \sum_{\sigma \in S(n+m)} \sum_{\tau \in S(l+r)} A_P(z \circ \sigma_1; t \circ \tau_1) A_Q(z \circ \sigma_2; t \circ \tau_2). \tag{8}$$

Нехай

$$a(\sigma)=\big|\{1,\dots,n\}\cap\sigma^{-1}\{n+m-p+1,\dots,n+m\}\big|,$$
$$b(\tau)=\big|\{1,\dots,l\}\cap\tau^{-1}\{l+r-q+1,\dots,l+r\}\big|.$$

Тоді

$$A_P(z\circ\sigma_1;t\circ\tau_1)=A_P(x^{n-a(\sigma)},y^{a(\sigma)};x^{l-b(\tau)},y^{b(\tau)}),$$
$$A_Q(z\circ\sigma_2;t\circ\tau_2)=A_Q(x^{m-p+a(\sigma)},y^{p-a(\sigma)};x^{r-q+b(\tau)},y^{q-b(\tau)}).$$

Тепер

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x)=C^p_{n+m}C^q_{l+r}\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}\sum_{\sigma\in S(n+m)}\sum_{\tau\in S(l+r)}\theta(u_{p,q})(y$$
$$\mapsto A_P(x^{n-a(\sigma)},y^{a(\sigma)};x^{l-b(\tau)},y^{b(\tau)})A_Q(x^{m-p+a(\sigma)},y^{p-a(\sigma)};x^{r-q+b(\tau)},y^{q-b(\tau)})).$$

Оскільки $u_{p,q}\in E_{\varkappa(p,q)}$, то в останньому виразі не дорівнюють нулю тільки ті доданки, для яких $a(\sigma)=p$ і $b(\tau)=q$ або $a(\sigma)=b(\tau)=0$. Кількість тих $\sigma\in S(n+m)$, для яких $a(\sigma)=p$, дорівнює

$$\big|\{\sigma\in S(n+m):\quad a(\sigma)=p\}\big|=\begin{cases}C^p_n p!(n+m-p)!, & \text{при } n\ge p,\\ 0, & \text{при } n<p.\end{cases}$$

Аналогічно

$$\big|\{\tau\in S(l+r):\quad b(\tau)=q\}\big|=\begin{cases}C^q_l q!(l+r-q)!, & \text{при } l\ge q,\\ 0, & \text{при } l<q,\end{cases}$$

$$\big|\{\sigma\in S(n+m):\quad a(\sigma)=0\}\big|=\begin{cases}C^p_m p!(n+m-p)!, & \text{при } m\ge p,\\ 0, & \text{при } m<p,\end{cases}$$

$$\big|\{\tau\in S(l+r):\quad b(\tau)=0\}\big|=\begin{cases}C^q_r q!(l+r-q)!, & \text{при } r\ge q,\\ 0, & \text{при } r<q,\end{cases}$$

Звідси для $n\ge p$, $m\ge p$, $l\ge q$, $r\ge q$

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x)=C^p_{n+m}\,C^q_{l+r}\,\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}p!\,(n+m-p)!\,q!\,(l+r-q)!$$
$$\times\Big(C^p_n\,C^q_l\,u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^{n-p},y^p;x^{l-q},y^q)A_Q(x^m;x^r)\big)$$
$$+C^p_m\,C^q_r\,u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^n;x^l)A_Q(x^{m-p},y^p;x^{r-q},y^q)\big)\Big).$$

Оскільки $C^p_{n+m}\,C^q_{l+r}\,\frac{1}{(n+m)!}\frac{1}{(l+r)!}p!\,(n+m-p)!\,q!\,(l+r-q)!\;=1$, то

$$\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ)(x)=\Big(Q(x)\,C^p_n\,C^q_l\,u_{p,q}\big(y\mapsto A_P(x^{n-p},y^p;x^{l-q},y^q)\big)$$
$$+P(x)\,C^p_m\,C^q_r\,u_{p,q}\big(y\mapsto A_Q(x^{m-p},y^p;x^{r-q},y^q)\big)\Big).$$

Враховуючи формулу (5), отримуємо $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(PQ) = P\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(Q) + Q\partial_{(p,q)}(u_{p,q})(P)$. Отже, ми довели рівність (6) для випадку $n, m \geq p$ і $l, r \geq q$. Для всіх інших випадків цю рівність також перевірити нескладно.

Із рівності (6) і лінійності оператора $\partial_{(p,q)}(u_{p,q})$ випливає, що цей оператор є оператором диференціювання на алгебрі $\mathcal{W}(X)$.

Нехай $P \in \mathcal{P}({}^{np,nq}X)$. Після n-кратного застосування формули (5) отримаємо

$$\begin{aligned}\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(P) &= C^p_{np}C^p_{(n-1)p}\dots C^p_pC^q_{nq}C^q_{(n-1)q}\dots C^q_q\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P)\\ &= \frac{(np)!}{(p!)^n}\frac{(nq)!}{(q!)^n}\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P).\end{aligned}$$

Звідси

$$\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(P) = \frac{(p!)^n}{(np)!}\frac{(q!)^n}{(nq)!}\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(P).$$

Нехай $f \in \mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}$. Тоді

$$\begin{aligned}\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f_{k,m-k})\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\delta^{(\varkappa(p,q))}(u_{p,q})(f_{np,nq}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p!)^n}{(np)!}\frac{(q!)^n}{(nq)!}\partial^n_{(p,q)}(u_{p,q})(f_{np,nq}).\end{aligned}$$

□

8 Похідна за напрямком у дійсному сенсі на алгебрі $\mathcal{W}(X)$

Нехай $h \in X$. Знайдемо похідну за напрямком h від $P \in \mathcal{P}({}^{p,q}X)$, розглядаючи X як простір з дійсною структурою.

$$\begin{aligned}&\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{P(x+th)-P(x)}{t}\\ &= \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}C^i_pC^j_qA_P(x^{p-i},(th)^i;x^{q-j},(th)^j) - A_P(x^p;x^q)\right)\\ &= \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}C^i_pC^j_qt^{i+j}A_P(x^{p-i},h^i;x^{q-j},h^j) - A_P(x^p;x^q)\right)\\ &= C^1_pC^0_qA_P(x^{p-1},h;x^q) + C^0_pC^1_qA_P(x^p;x^{q-1},h) = \partial_{(1,0)}(h_{1,0})(P)(x) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1})(P)(x),\end{aligned}$$

де через $h_{1,0}$ позначено лінійний функціонал на просторі $\mathcal{P}({}^{1,0}X)$, який кожному $g \in \mathcal{P}({}^{1,0}X)$ ставить у відповідність число $g(h)$, через $h_{0,1}$ позначено лінійний функціонал на просторі $\mathcal{P}({}^{0,1}X)$, який кожному $g \in \mathcal{P}({}^{0,1}X)$ ставить у відповідність число $g(h)$. Отже,

$$\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{P(x+th)-P(x)}{t} = (\partial_{(1,0)}(h_{1,0}) + \partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(P)(x).$$

Для $f \in \mathcal{W}(X)$ будемо мати

$$\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x+th) - \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} f_{k,m-k}(x)\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\lim_{t\in\mathbb{R},\, t\to 0}\frac{f_{k,m-k}(x+th)-f_{k,m-k}(x)}{t} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(\partial_{(1,0)}(h_{1,0})+\partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(f_{k,m-k})(x)$$
$$= (\partial_{(1,0)}(h_{1,0})+\partial_{(0,1)}(h_{0,1}))(f)(x).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Василишин Т.В. *Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p,q)-поліномами на банаховому просторі* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. (в друці)
2. Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A. *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. London Math. Soc., **35** (2003), 55–64.
3. Aron R.M., Cole B.J. and Gamelin T.W. *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math., **415** (1991), 51–93.
4. Vasylyshyn T.V., Zagorodnyuk A.V. *Polarization formula for (p,q)-polynomials on a complex normed space*, Methods of Functional Analysis and Topology, **17**, 1 (2011), 75–83.
5. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces*, Contemporary Math., **435** (2007), 381–394.
6. Zagorodnyuk A. *Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2559–2569.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 14.08.2012

Vasylyshyn T.V. *Description of spectra and derivations of Wiener type algebras of functions generated by (p,q)-polynomials on Banach spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 212–228.

It is described a spectra of Wiener type algebras of functions generated by (p,q)-polynomials on Banach spaces. Derivations on these algebras introduced and investigated.

Василишин Т.В. *Описание спектра и дифференцирований в алгебрах типа Винера функций, порожденных (p,q)-полиномами на банаховых пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 212–228.

В работе описано спектры алгебр типа Винера функций, порожденных (p,q)-полиномами на банаховых пространствах, а также введены и исследованы дифференцирования на этих алгебрах.