Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 519.21

Герич М.С.

УТОЧНЕННЯ ОСНОВНОЇ ФАКТОРИЗАЦІЙНОЇ ТОТОЖНОСТІ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ГРАТЧАСТИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

Герич М.С. *Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 229–240.

Нехай $\{\xi(t), x(t)\}$ — майже напівнеперервний гратчастий однорідний пуассонівський процес на ланцюгу Маркова. Стрибки одного знаку для $\xi(t)$ геометрично розподілені, протилежного знаку — мають довільний гратчастий розподіл. Для таких процесів встановлені співвідношення для компонент двосторонньої матричної факторизації. Ці співвідношення визначають генератриси екстремумів процесу та їх доповнень.

Вступ

Процеси з незалежними приростами (н.п.) на ланцюгах Маркова (ЛМ) часто називають адитивними процесами на ЛМ або процесами в марковському середовищі (див. роботи [8, 9]); в статті Єжова І.І., Скорохода А.В. [6] — марковськими процесами, однорідними за другою компонентою; інколи процесами, керованими ЛМ. У вказаних роботах розглядався випадок (C), коли стрибки процесів або випадкових блукань мають неперервний розподіл ((C) — continuity). Випадок (L), коли розподіл стрибків — гратчастий ((L) — lattice) розглядався А.А. Боровковим і Б.А. Рогозіним [1].

Для вивчення розподілу граничних функціоналів процесів, керованих ЛМ, в монографії Д.В. Гусака [2] розвинуто факторизаційний метод у випадку (C). Там одержано уточнені результати для напівнеперервних процесів на ЛМ (зі стрибками одного знаку). В роботах Є.В. Карнауха [7] узагальнено ці результати для майже напівнеперервних процесів.

Для випадку (L) одержані уточнення деяких результатів в спільних роботах Д.В. Гусака та А.І. Туреніязової [4, 5] для напівнеперервних знизу процесів, стрибки яких в одну сторону лише одиничні.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 60G60, 60G17.

Ключові слова і фрази: основна факторизаційна тотожність, майже напівнеперервні процеси на ланцюгах Маркова, генератриса екстремумів процесу та їх доповнень.

© Герич М.С., 2012

В даній роботі перед нами поставлена задача уточнити результати розподілу для граничних функціоналів та їх доповнень (випадок L) майже напівнеперервних гратчастих процесів, для яких стрибки вверх або вниз мають геометричний розподіл. Для такої задачі знайдено вигляд генератрис граничних функціоналів та їх доповнень.

1 Майже напівнеперервні процеси на скінченному ланцюгу Маркова.

Розглянемо двовимірний марковський процес

$$Z(t) = \{\xi(t), x(t)\},\ (t \geq 0,\ \xi(0) = 0)$$

однорідний за часом, з простором станів $\mathbb{Z} \times \mathbb{E}$ ($\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$, $\mathbb{E} = \{1, 2, \ldots, m\}$).

Друга компонента $\{x(t), t \geq 0\}$ процесу $Z(t)$ є однорідним ланцюгом Маркова з матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r | x(0) = k\}\|_{k,r \in \mathbb{E}} = e^{\mathbf{Q}t},$$

де інфінітезимальна (твірна) матриця $\mathbf{Q}$ ЛМ $x(t)$ має вигляд

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),\ \mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r \in \mathbb{E}},\ \mathbf{I} = \|\delta_{kr}\|_{k,r \in \mathbb{E}},$$

$\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k — часів перебування $x(t)$ в стані k, $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|$ — матриця перехідних імовірностей вкладеного ЛМ $\{y_n = x(\sigma_n + 0), n > 0\}$, σ_n — момент n-ї зміни стану $x(t)$, тоді

$$p_{kr} = P\{y_{n+1} = r | y_n = k\} = P\{y_1 = r | y_0 = k\},$$

$$\sum_{r=1}^{n} p_{kr} = 1,\ p_{rr} = 0,\ n > 0.$$

Розглянемо сукупність незалежних процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^{m}$, де $\xi_k(t) = \sum\limits_{i \leq N_k(t)} \xi_i^{(k)}$, а $N_k(t)$— простий пуассонівський процес

$$P\{N_k(t) = r\} = \frac{(\lambda_k t)^r}{r!} e^{-\lambda_k t},$$

$\{\lambda_k > 0\}$ — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ'_k, які визначають час між двома сусідніми скачками процесу $\xi_k(t)$, стрибки $\xi_i^{(k)}$ — сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин для $\xi_k(t)$.

Відносно першої компоненти $\{\xi(t), t \geq 0\}$ будемо припускати, що її прирости на інтервалі $[\sigma_n, \sigma_{n+1})$ мають той же розподіл, що і прирости одного із процесів $\{\xi_k(t)\}$, тобто $\Delta\xi(t) \doteq \Delta\xi_k(t)$, якщо $x(t) = k, t, t+\Delta t \in [\sigma_n, \sigma_{n+1})$. Крім того, в момент σ_{n+1} зміни станів, коли вкладений ЛМ переходить із стану $k = x(\sigma_{n+1} - 0)$ в стан $r = x(\sigma_{n+1} + 0)$, процес $\xi(t)$ має додаткові прирости

$$\chi_{kr} = \xi(\sigma_{n+1} + 0) - \xi(\sigma_{n+1} - 0)\ (\chi_{kr} = 0 \text{ при } k = r),$$

причому $\{\chi_{kr}\}_{k,r=1}^{m}$ — сукупність незалежних випадкових величин, що не залежать від $\xi_k(t)$ з функцією розподілу

$$\mathbf{f}(x) = \|f_{kr}(x)\| = \|p_{kr}P\{\chi_{kr} = x\}\|,$$

та матричною твірною функцією

$$\widetilde{\mathbf{f}}(z) = \|E[z^{\chi_{kr}}, y_1 = r|y_0 = k]\|.$$

В силу однорідності $Z(t)$ за часом по компоненті $\xi(t)$ для опису розподілу цього процесу достатньо розглянути матричну твірну функцію

$$\mathbf{g}_t(z) = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z| = 1,$$

кумулянта процесу має наступний вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \ln \mathbf{E}z^{\xi(t)} = \sum_{x\neq 0}(z^x - 1)(\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)) + \mathbf{Q}$$

або в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{I}) + \mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}) + \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr}P\{\xi_1^{(k)} = x\}\|$, $\mathbf{Q}, \mathbf{f}(x), \mathbf{N}, \mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{f}}(z)$ визначені вище, $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$, $\widetilde{\mathbf{p}}(z) = \mathbf{E}z^{\xi_1} = \|E_k z^{\xi_1}\|$, $k, r \in \mathbb{E}$.

Означення 1.1. *Введений таким чином процес $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ називається складним гратчастим процесом Пуассона з незалежними приростами, заданим на скінченному ЛМ.*

Нехай $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$,

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_k^{(1)},\ \xi_1^{(k)} > 0, \\ \lambda_k^{(2)},\ \xi_1^{(k)} < 0, \end{cases}$$

$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{\Lambda}_1 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(1)}\|$, $\mathbf{\Lambda}_2 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(2)}\|$,

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} \mathbf{p}_1(x),\ \xi_1^{(k)} > 0, \\ \mathbf{p}_2(x),\ \xi_1^{(k)} < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{\mathbf{p}}(z) = \begin{cases} \widetilde{\mathbf{p}}_1(z),\ \xi_1^{(k)} > 0, \\ \widetilde{\mathbf{p}}_2(z),\ \xi_1^{(k)} < 0, \end{cases}$$

$\mathbf{C} = \|\delta_{kr}C_k\|$, $\mathbf{B} = \|\delta_{kr}B_k\|$, де C_k (B_k) — параметри геометрично розподілених додатних (від'ємних) стрибків $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$.

Означення 1.2. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд*

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}\sum_{x<0}(z^x - 1)\boldsymbol{p}_2(x) +$$
$$+\boldsymbol{N}\sum_{x<0}(z^x - 1)\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{Q},$$

або

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\boldsymbol{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \boldsymbol{N}[\widetilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{P}] + \boldsymbol{Q}.$$

Означення 1.3. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд*

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}\sum_{x>0}(z^x - 1)\boldsymbol{p}_1(x) + \mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] +$$

$$+\boldsymbol{N}\sum_{x>0}(z^x - 1)\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{Q},$$

або

$$\boldsymbol{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\boldsymbol{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \boldsymbol{N}[\widetilde{\boldsymbol{f}}(z) - \boldsymbol{P}] + \boldsymbol{Q}.$$

Означення 1.4. *Складний гратчастий процес Пуассона $Z(t)$, заданий на ЛМ, називається напівнеперервним зверху (знизу) якщо $\mathbf{C} = 0$ ($\mathbf{B} = 0$), тобто додатні (від'ємні) стрибки процесу одиничні.*

Введемо позначення деяких функціоналів для $\xi(t)$:
— функціонали, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0; t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t);$$

$$\xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi(t), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t);$$

— функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x;$$

$$\overline{\tau}^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) \ge x\}, \qquad \overline{\gamma}^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x;$$

— функціонали, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$:

$$\tau^-(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) < x\}, \qquad \gamma^-(x) = x - \xi(\tau^-(x)).$$

Також введемо позначення розподілів екстремумів:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) = x,\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\| = \mathbf{p}_x^+(s),$$

$$\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) = x\} = \check{\mathbf{p}}_x^+(s),\ x \in \mathbb{Z}^+;$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = x\} = \mathbf{p}_x^-(s),\ \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = x\} = \check{\mathbf{p}}_x^-(s),\ x \in \mathbb{Z}^-,\ \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = x\} = \mathbf{p}_x(s),\ x \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}_+(s),\ \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}_-(s),$$

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}^-(s),\ \mathbf{P}\{\check{\xi}^+(\theta_s) = 0\} = \mathbf{p}^+(s).$$

$$\mathbf{P}_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) < x,\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$

$$\mathbf{P}^+(s,x) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) < x\},\ \mathbf{P}_-(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\},\ \mathbf{P}^-(s,x) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\},$$

$$\mathbf{P}(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) < x\},\ \overline{\mathbf{P}}(s,x) = \mathbf{P}_s - \mathbf{P}(s,x).$$

$$\mathbf{q}_+(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_+(s),\ \mathbf{q}_-(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_-(s),$$
$$\mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^+(s),\ \mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^-(s).$$

Їм відповідають матричні твірні функцій:

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|E[z^{\xi(\theta_s)},\ x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\|,$$
$$\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)},\ \mathbf{g}_-(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)},$$
$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},\ \mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)}.$$

Для функціональних послідовностей $\{\mathbf{R}_x, x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ введемо поняття кілець, розширених кілець і відповідних півкілець та їх проекцій. А саме, позначимо кільце твірних функцій $\widetilde{\mathbf{R}}(z)$

$$\mathbb{L} : \{\widetilde{\mathbf{R}}(z) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x,\ \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mid \mathbf{R}_x \mid < \infty, |z| = 1\}$$

із операцією "множення" типу згортки та звичайною операцією додавання, а розширення кільця $\mathbb{L}$ —

$$\mathbb{L}_{\mathbf{I}} : \{\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathbf{R}}(z) = \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{I}}(z),\ \det \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{I}}(z) \neq 0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільця на півосях та їх розширення

$$\mathbb{L}^{\pm} : \left\{\widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z) = \sum_{x=0}^{\pm\infty} z^x \mathbf{R}_x\right\}, \mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}} : \{\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z), \det[\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z)] \neq 0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z| \geq 1$ ($|z| \leq 1$) $\widetilde{\mathbf{R}}^{\pm 1}_{\pm}(z) \in \mathbb{L}^{\pm}_{\mathbf{I}}$. Визначимо також операції проектування:

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]^0_+ = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]^0_- = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}(z) = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]^0_- = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]^0_+.$$

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$:

$$P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \geq 0,$$

$$P\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k,\ 0 < \varepsilon < 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Після застосування інтегрального перетворення Лапласа-Карсона по t до $\mathbf{g}_t(z)$ та $\mathbf{P}(t)$ отримаємо

$$\mathbf{g}(s,z) = s \int_0^{+\infty} e^{-st} \mathbf{g}_t(z) dt = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1},$$

$$\mathbf{P}_s = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \qquad (1)$$

Важливим методом дослідження твірних перетворень розподілів граничних функціоналів є метод, заснований на факторизаційному розкладі $\mathbf{g}(s,z)$ і визначенні цих перетворень у термінах факторизаційних компонент. Має місце матричний аналог основної факторизаційної тотожності (о.ф.т.), яка внаслідок некомутативності компонент є двоїстою.

Лема 1.1. *[2] Для двовимірного процесу $Z(t)$ при $s>0$ має місце матрична о.ф.т. на* $\mid z\mid = 1$

$$\boldsymbol{g}(s,z) = \boldsymbol{E}z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \boldsymbol{g}_+(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^-(s,z), \\ \boldsymbol{g}_-(s,z)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{g}^+(s,z). \end{cases} \qquad (2)$$

Надалі будемо позначати

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ \tau^{\pm}(x)<\infty] = \|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x)) = r|x(0)=k]\|,$$

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x,z) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\ \tau^{\pm}(x)<\infty] = \|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x)) = r|x(0)=k]\|,$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^{+}(s,\varepsilon,z) = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{T}_*^{+}(s,x,z) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}z^{\gamma^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\ \tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty],$$

беручи до уваги, що генератриси $\tau^{\pm}(x)$ розглядаються на ланцюгу $y_x^* = x(\tau^{\pm}(x))$, відповідно. Необхідно зазначити, що множина значень ланцюга $x(\tau^{\pm}(x))$ може звузитися за рахунок недосяжності рівня $x>0$ ($x<0$) процесом $\xi(t)$. Тому будемо накладати наступну умову

$$\forall k\in\mathbb{E}:\ P\{y_x^* = k\} > 0.$$

Зв'язок між розподілами $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та генератрисами $\tau^{\pm}(x)$ визначають наступними співвідношеннями:

$$\mathbf{P}\{\xi^{+}(\theta_s) > x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)},\ \tau^{+}(x)<\infty]\mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^{+}(s,x)\mathbf{P}_s, \qquad (3)$$

$$\mathbf{P}\{\xi^{-}(\theta_s) < x\} = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{-}(x)},\ \tau^{-}(x)<\infty]\mathbf{P}_s = \mathbf{T}_*^{-}(s,x)\mathbf{P}_s.$$

Лема 1.2. *[4] Для процесу $Z(t)$ пара функціоналів $\{\tau^{+}(x), \gamma^{+}(x)\}$ зв'язана з $\xi^{+}(\theta_s)$ наступними співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{T}_*^{+}(s,x,z) = \boldsymbol{E}[z^{\xi^{+}(\theta_s)-x},\ \xi^{+}(\theta_s)\geq x](\boldsymbol{g}_+(s,z))^{-1},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_*^{+}(s,\varepsilon,z) = \frac{(1-\varepsilon)z}{z-\varepsilon}(\boldsymbol{g}_+(s,z)-\boldsymbol{g}_+(s,\varepsilon))(\boldsymbol{g}_+(s,z))^{-1}. \qquad (4)$$

Співвідношення (4) називається другою факторизаційною тотожністю (2 ф.т.).

2 Компоненти факторизації

У випадку (C) в роботі [2] були отримані уточнення компонент факторизації (2) для напівнеперервних процесів, а для майже напівнеперервних процесів в [7]. Розглянемо далі аналогічні результати для майже напівнеперервних процесів на ЛМ, але у випадку (L).

Теорема 1. *Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}z)[\mathbf{I}-\boldsymbol{Z}_s^{-1}z]^{-1}\boldsymbol{p}_+(s), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-x}\boldsymbol{p}_+(s),\ x\in\mathbb{Z}^+, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{p}_+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\boldsymbol{P}_s; \tag{7}$$

для $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{g}^-(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}([\boldsymbol{g}(s,z)]_-^0\\ +\boldsymbol{q}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)<0]),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s)+(\mathbf{C}-\mathbf{Z}_s^{-1})\boldsymbol{C}^{x-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s)<x]),\ x\in\mathbb{Z}^-\cup\{0\}, \tag{9}$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \boldsymbol{q}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}+\boldsymbol{p}_+(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{C}$.

Доведення. У (4) переходимо до границі при $\varepsilon\to 0$. Внаслідок чого отримуємо наступне співвідношення для $\mathbf{g}_+(s,z)$

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}\mathbf{p}_+(s). \tag{10}$$

Розглянемо для майже напівнеперервного зверху процесу множник $(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}$. Віднімемо від нього одиницю та виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}-\mathbf{I} &= (\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z))^{-1}-\mathbf{I} = \mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)[\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)]^{-1}\\ &= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}[\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}]^{-1}\\ &= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-\mathbf{C}z-\mathbf{T}_*^+(s,0)z+\mathbf{T}_*^+(s,0)\mathbf{C}z]^{-1}\\ &= \mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-(\mathbf{T}_*^+(s,0)+(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C})z]^{-1}.\end{aligned}$$

Позначимо через $\mathbf{Z}_s^{-1} = (\mathbf{T}_*^+(s,0)+(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C}$. З врахуванням умови (3) вираз для $\mathbf{Z}_s^{-1}$ можна переписати у наступному вигляді $\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}$. Згідно з умовою (3) підставивши $\mathbf{Z}_s^{-1}$ отримаємо

$$(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})z[\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z]^{-1}+\mathbf{I}. \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (10) отримаємо (5). Обернувши формулу (5) по z отримаємо (6). Формулу (7) отримаємо як розвязок матричного рівняння із $\mathbf{Z}_s^{-1}$. Формулу (8) можна одержати із (2), підставляючи представлення для $\mathbf{g}_+(s,z)$, та застосувавши операцію проектування на $[\ ]_-^0$. Співвідношення (9) може бути отримане обертанням (8) по z. $\square$

З попередньої теореми з врахуванням умови напівнеперервності зверху випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.1. *Для напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл* $\xi^+(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = [\mathbf{I} - \boldsymbol{Z}_s^{-1} z]^{-1} \boldsymbol{p}_+(s),$$

$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = \mathbf{Z}_s^{-x} \boldsymbol{p}_+(s),\ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\boldsymbol{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}) \boldsymbol{P}_s;$$

для $\overline{\xi}(\theta_s)$ *маємо:*

$$\boldsymbol{g}^-(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}([\boldsymbol{g}(s,z)]_-^0 - \mathbf{Z}_s^{-1} z[\boldsymbol{g}(s,z)]_-),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_+(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s) - \mathbf{Z}_s^{-1} \boldsymbol{p}_{x-1}(s)),\ x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \boldsymbol{q}_+(s) \boldsymbol{P}_s^{-1}$.

Теорема 2. *Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл* $\check{\xi}(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями:*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \boldsymbol{p}^+(s)[\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1} z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z), \tag{12}$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{p}^+(s) \boldsymbol{Q}_s^{-x}[\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s \boldsymbol{C}],\ x \in \mathbb{Z}^+, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{p}^+(s) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s^{-1});$$

для $\xi^-(\theta_s)$ *маємо:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_-(s,z) = ([\boldsymbol{g}(s,z)]_-^0 \\ +\boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) < 0] \cdot (\boldsymbol{C}z - \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{C}z(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{Q}_s^{-1}))(\boldsymbol{p}^+(s))^{-1} \boldsymbol{P}_s, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = [\boldsymbol{p}_x^-(s) + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{C}^{|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s) < x] \cdot \boldsymbol{C}^{x-1}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{Q}_s^{-1})](\boldsymbol{p}^+(s))^{-1} \boldsymbol{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}, \tag{15}$$

де $\mathbf{Q}_s^{-1} = \boldsymbol{P}_s^{-1} \boldsymbol{q}^+(s) + \boldsymbol{C} \boldsymbol{P}_s^{-1} \mathbf{p}^+(s)$.

Доведення. На основі стохастичних співвідношень для $\tau_{kr}^-(x)$, $(x \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\})$, де нижні індекси означають початкове значення $x(t)$ та значення $x(t)$ в момент досягнення рівня x відповідно $(x(0) = k,\ x(\tau^-(x)) = r)$. Треба зазначити, що розглядаються тільки ті траєкторії процесу, для яких $\tau^-(x) < \infty$

$$\tau_{kr}^-(x) \doteq \begin{cases} \zeta_k',\ \ \xi_1^{(k)} < x,\ \zeta_k' < \zeta_k; \\ \zeta_k,\ \ \chi_{kr} < x,\ \zeta_k' > \zeta_k; \\ \zeta_k' + \tau_{kr}^-(x - \xi_k),\ \xi_1^{(k)} \ge x,\ \zeta_k' < \zeta_k; \\ \zeta_k + \tau_{kr}^-(x - \chi_{kj}),\ \chi_{kj} \ge x,\ \zeta_k' > \zeta_k,\ (x(\zeta_k) = j). \end{cases}$$

На основі цих стохастичних співвідношень виводимо рівняння

$$\begin{aligned}
T^{-}_{*kr}(s,x) &= E[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x))=r|x(0)=k]\\
&= \lambda_k\int_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=-\infty}^{x-1}P\{\xi_k=l\}\\
&+ n_k\int_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=-\infty}^{x-1}p_{kr}P\{\chi_{kr}=l\}\\
&+ \lambda_k\int_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=x}^{+\infty}e^{-s\tau^{-}_{kr}(x-l)}P\{\xi_k=l\}\\
&+ n_k\sum_{j=1}^{n}\int_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=x}^{+\infty}e^{-s\tau^{-}_{kr}(x-l)}p_{kj}P\{\chi_{kj}=l\}.
\end{aligned}\tag{16}$$

Запишемо (16) в матричній формі:

$$(s\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})\mathbf{T}^{-}_{*}(s,x)=\sum_{l=-\infty}^{x-1}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(l)+\mathbf{N}\mathbf{f}(l))+\sum_{l=x}^{+\infty}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(l)+\mathbf{N}\mathbf{f}(l))\,\mathbf{T}^{-}_{*}(s,x-l). \tag{17}$$

Застосовуючи до (17) твірне перетворення по $x\in\mathbb{Z}_-\cup\{0\}$ та врахувавши умову майже напівнеперервності зверху, отримаємо

$$\begin{aligned}
(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))\widetilde{\mathbf{T}}^{-}_{*}(s,z) = \frac{z}{z-1}&[-\mathbf{\Lambda}_2(\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)-\mathbf{I})-\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P})]\\
&-\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\widetilde{\mathbf{T}}^{-}_{*}(s,\ \mathbf{C}^{-1}),
\end{aligned}\tag{18}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{T}}^{-}_{*}(s,z)=\sum_{x=-\infty}^{0}z^{x}\mathbf{T}^{-}_{*}(s,x)=\frac{z}{z-1}(\mathbf{I}-\mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}).$$

Підставляючи в (18) останнє співвідношення та (1), отримаємо

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))\mathbf{g}_-(s,z)=[s\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}_1(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_-(s,\mathbf{C}^{-1})]. \tag{19}$$

З (19) після врахування другого співвідношення (2), одержимо,

$$\mathbf{g}^{+}(s,z)=\mathbf{P}_s[\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_-(s,\mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{20}$$

Після граничного переходу при $z\to 0$ в (19), отримаємо

$$\mathbf{p}^{+}(s)=\mathbf{P}_s[\mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_-(s,\mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{21}$$

Підставляючи (21) в формулу (20), одержимо (12). Після обертання (12) по z випливає формула (13). Використовуючи (12) та другий рядок (2), отримаємо, попередньо застосувавши операцію проектування на $[\ ]^{0}_{-}$, співвідношення (14). Формула (15) виводиться з (14) за допомогою обертання по z. □

З попередньої теореми, з врахуванням умови напівнеперервності зверху, випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.2. *Для напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями:*

$$\boldsymbol{g}^{+}(s,z)=\boldsymbol{p}^{+}(s)[\mathbf{I}-\boldsymbol{Q}_s^{-1}z]^{-1},$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^{+}(s)=\boldsymbol{p}_{+}(s)\mathbf{Q}_s^{-x},\ x\in\mathbb{Z}^{+},$$

$$\boldsymbol{p}^{+}(s)=\boldsymbol{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_s^{-1});$$

для $\xi^{-}(\theta_s)$ маємо:

$$\mathbf{g}_{-}(s,z)=([\boldsymbol{g}(s,z)]_{-}^{0}-[\mathbf{g}(s,z)]_{-}\mathbf{Q}_s^{-1}z)(\boldsymbol{p}_{+}(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

$$\boldsymbol{p}_x^{-}(s)=(\boldsymbol{p}_x(s)-\boldsymbol{p}_{x-1}(s)\boldsymbol{Q}_s^{-1})(\boldsymbol{p}_{+}(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,\ x\in\mathbb{Z}^{-}\cup\{0\},$$

де $\mathbf{Q}_s^{-1}=\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{q}^{+}(s)$.

Нехай $Z(t)=\{\xi(t),\,x(t)\}$ — майже напівнеперервний знизу процес, тоді $Z_1(t)=\{\xi_1(t),\,x_1(t)\}=\{-\xi(t),\,x(t)\}$ є майже напівнеперервним зверху. Використовуючи наступні співвідношення між генератрисами екстремумів процесів $Z(t)$ та $Z_1(t)$ та їх розподілів:

$$\mathbf{g}_{\mp}(s,z)=\mathbf{g}_{\pm}^{1}(s,z^{-1}),\ \mathbf{g}^{\mp}(s,z)=\mathbf{g}_{1}^{\pm}(s,z^{-1}),$$

$$\mathbf{p}_{\mp}(s)=\mathbf{p}_{\pm}^{1}(s),\ \mathbf{p}^{\mp}(s)=\mathbf{p}_{1}^{\pm}(s),$$

$$\mathbf{q}_{\mp}(s)=\mathbf{q}_{\pm}^{1}(s),\ \mathbf{q}^{\mp}(s)=\mathbf{q}_{1}^{\pm}(s),$$

$$\mathbf{p}_x^{\mp}(s)=(\mathbf{p}_{-x}^{\pm}(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}_x^{+}(s)=(\check{\mathbf{p}}_{-x}^{-}(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}_x^{-}(s)=(\check{\mathbf{p}}_{-x}^{+}(s))_1,$$

можна отримати твердження про уточнення компонент факторизації (3) для майже напівнеперервних знизу процесів.

Теорема 3. *Для майже напівнеперервного знизу процесу, заданого на ЛМ, мають місце наступні представлення для генератрис екстремумів та їх розподілів:*
для $\xi^{-}(\theta_s)$ маємо:

$$\boldsymbol{g}_{-}(s,z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Z}_s)^{-1}\boldsymbol{p}_{-}(s),$$

$$\boldsymbol{p}_x^{-}(s)=(\mathbf{I}-\mathbf{B}\mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{Z}_s^{-x}\boldsymbol{p}_{-}(s),\ x\in\mathbb{Z}^{-},$$

$$\boldsymbol{p}_{-}(s)=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{P}_s;$$

для $\check{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\boldsymbol{g}^{+}(s,z)=\boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_{-}(s))^{-1}([\boldsymbol{g}(s,z)]_{+}^{0}$$

$$+(\boldsymbol{B}-\mathbf{Z}_s)(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I}z)^{-1}\boldsymbol{E}[\mathbf{B}^{\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0]),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^{+}(s)=\boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_{-}(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s)+(\boldsymbol{B}-\mathbf{Z}_s)\mathbf{B}^{-x-1}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)},\,\xi(\theta_s)>x]),$$

де $x\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$, $\boldsymbol{Z}_s=\boldsymbol{q}_{-}(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}+\boldsymbol{p}_{-}(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{B}$;
для $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\boldsymbol{g}^{-}(s,z)=\boldsymbol{p}^{-}(s)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}_s]^{-1}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}),$$

$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{p}^-(s)\boldsymbol{Q}_s^{-x}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_s^{-1}\boldsymbol{B}),\ x \in \mathbb{Z}^-,$$
$$\boldsymbol{p}^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_s);$$

для $\xi^+(\theta_s)$ *маємо:*

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = ([\boldsymbol{g}(s,z)]_+^0$$
$$+\boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > 0])(\boldsymbol{B} - z\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Q}_s))(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$
$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\boldsymbol{p}_x(s) + \boldsymbol{E}[\boldsymbol{B}^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > x])\boldsymbol{B}^{-x-1}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{Q}_s))(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$

де $x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{q}^-(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{p}^-(s)$.

З попередньої теореми випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Для напівнеперервних знизу процесів генератриси екстремумів та їх розподілів визначаються співвідношеннями:*
для $\xi^-(\theta_s)$:

$$\boldsymbol{g}_-(s,z) = z[z\mathbf{I} - \boldsymbol{Z}_s]^{-1}\boldsymbol{p}_-(s),$$
$$\boldsymbol{p}_x^-(s) = \mathbf{Z}_s^{-x}\boldsymbol{p}_-(s),\ x \in \mathbb{Z}^-,$$
$$\boldsymbol{p}_-(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s)\boldsymbol{P}_s;$$

для $\check{\xi}(\theta_s)$:

$$\boldsymbol{g}^+(s,z) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_-(s))^{-1}([\boldsymbol{g}(s,z)]_+^0 - \mathbf{Z}_s z^{-1}[\boldsymbol{g}(s,z)]_+),$$
$$\check{\boldsymbol{p}}_x^+(s) = \boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{p}_-(s))^{-1}(\boldsymbol{p}_x(s) - \boldsymbol{Z}_s\boldsymbol{p}_{x+1}(s)),\ x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Z}_s = \boldsymbol{q}_-(s)\boldsymbol{P}_s^{-1}$;
для $\overline{\xi}(\theta_s)$:

$$\boldsymbol{g}^-(s,z) = \boldsymbol{p}^-(s)[z\mathbf{I} - \boldsymbol{Q}_s]^{-1}z,$$
$$\check{\boldsymbol{p}}_x^-(s) = \boldsymbol{p}^-(s)\mathbf{Q}_s^{-x},\ x \in \mathbb{Z}^-,$$
$$\boldsymbol{p}^-(s) = \boldsymbol{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_s);$$

для $\xi^+(\theta_s)$:

$$\boldsymbol{g}_+(s,z) = ([\boldsymbol{g}(s,z)]_+^0 - [\boldsymbol{g}(s,z)]_+ z^{-1}\mathbf{Q}_s)(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,$$
$$\boldsymbol{p}_x^+(s) = (\boldsymbol{p}_x(s) - \boldsymbol{p}_{x+1}(s)\boldsymbol{Q}_s)(\boldsymbol{p}^-(s))^{-1}\boldsymbol{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},$$

де $\mathbf{Q}_s = \boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{q}^-(s)$.

Література

1. Боровков А.А., Рогозин Б.А. *Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий* // Теория вероятн. и её примен. — 1984. — Т.9, №3. — С. 401–430.

2. Гусак Д.В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. — 320 с.

3. Гусак Д.В. Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. — 60 с. (Препринт 78. II.)

4. Гусак Д.В., Турениязова А.И. *Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова* // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей: Сб.науч.тр. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1967. — С. 21–27.

5. Гусак Д.В., Турениязова А.И. *О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова* // Укр. мат. журн. — 1987. — Т.39, №6. — С. 707–711.

6. Ежов И.И., Скороход А.В. *Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I* // Теория вероятн. и её примен. — 1969. — Т.14, №1, №4.

7. Карнаух Є.В. Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова: Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук. — Київ, 2007, 18с.

8. Keilson J., Wishart D.M. *A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **60**, 3 (1964), 547–567.

9. Miller H.D. *A matrix factorization problem in the theory of random variables defined on a finite central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain. Absorption probabilities for sums of rahdom variables defined on a finite Markov chain*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), 268–298.

Ужгородський національний університет,
Ужгород, Україна
e-mail: *miroslava.gerich@yandex.ru*

Надійшло 19.03.2012

Gerich M. *Clarification of basic factorization identity is for the almost semi-continuous latticed Poisson processes on the Markov chain*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 229–240.

Let $\{\xi(t), x(t)\}$ be a homogeneous semi-continuous lattice Poisson process on the Markov chain. The jumps of one sign are geometrically distributed, and jumps of the opposite sign are arbitrary latticed distribution. For a such processes the relations for the components of two-sided matrix factorization are established. This relations define the moment genereting functions for extremumf of the process and their complements.

Герич М.С. *Уточнение основного факторизационного тождеста для почти полунепрерывных решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 229–240.

Пусть $\{\xi(t), x(t)\}$ — почти полунепрерывный решетчатый однородный пуассоновский процесс на цепи Маркова. Скачки одного знака для $\xi(t)$ геометрически распределены, противоположного знака — имеют произвольное решетчатое распределение. Для таких процессов установленны соотношения для компонент двусторонней матричной факторизации. Эти соотношения определяют генератрисы экстремумов процесса и их дополнений.