Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.983

Звоздецький Т.І.

ПРО n-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛІВИХ ОБЕРНЕНИХ ДО n-ГО СТЕПЕНЯ ІНТЕГРУВАННЯ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Звоздецький Т.І. *Про n-еквівалентність лівих обернених до n-го степеня інтегрування операторів у просторах аналітичних функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 261–267.

У даній роботі досліджуються умови n-еквівалентності n-го степеня оператора диференціювання та довільного оператора, який є лівим оберненим до n-го степеня оператора інтегрування, в просторах функцій, аналітичних у не $\frac{2\pi}{n}$-інваріантних областях.

Вступ

Нехай G – зіркова відносно нуля область комплексної площини. Позначимо через $\mathcal{A}(G)$ простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ – сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G)$. Нагадаємо, що оператори A та B з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ називаються еквівалентними в $\mathcal{A}(G)$, якщо для деякого ізоморфізму $T : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$ виконується співвідношення $AT = TB$.

Означення. *Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ оператори A та B з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$ називатимемо n-еквівалентними в $\mathcal{A}(G)$, якщо існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$, для якого $AT = TB$ і*

$$(Tf)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{1}$$

Нехай $\mathcal{D}$ та $\mathcal{I}$ – оператори диференціювання та інтегрування, які на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(G)$ діють відповідно за правилами

$$(\mathcal{D}f)(z) = f'(z), \quad (\mathcal{I}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47B38.

Ключові слова і фрази: оператор інтегрування, оператор диференціювання, n-еквівалентність операторів, простір аналітичних функцій.

Зафіксуємо число $n \in \mathbb{N}$ та функції $a_k \in \mathcal{A}(G)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, і розглянемо оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$, який визначається рівністю

$$(Af)(z) = (\mathcal{D}^n f)(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)(\mathcal{D}^k f)(0), \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{2}$$

Відзначимо, що формула (2) задає загальний вигляд операторів із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G))$, які є лівими оберненими до $\mathcal{I}^n$.

У роботах [2] (для $n = 1$) та [1] (для $n \in \mathbb{N}$) встановлено, що оператори A та $\mathcal{D}^n$ еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$ (і навіть n-еквівалентні), якщо область G є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля (тобто $\omega G = G$, де $\omega = \exp \frac{2\pi i}{n}$). У даній роботі, використовуючи запропонований у [3] метод, досліджуються необхідні й достатні умови n-еквівалентності в $\mathcal{A}(G)$ операторів A та $\mathcal{D}^n$ у випадку, коли область G не є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля.

1 Допоміжні результати

Нехай $n \geq 2$, область G не $\frac{2\pi}{n}$-інваріантна відносно нуля і оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Тоді існує такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, який задовольняє рівність

$$AT = T\mathcal{D}^n \tag{3}$$

і для якого виконуються співвідношення (1).

Розглянемо деякий відкритий круг G_0 з центром у нулі, який міститься в G. Він є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною областю. Тому, згідно з [1], існує ізоморфізм T_1 простору $\mathcal{A}(G_0)$ на себе, який задовольняє рівності (3) і (1). Наступна формула задає цей ізоморфізм:

$$(T_1 f)(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)(P_k f)(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G_0),$$

де для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ проектор P_k на функцію $f \in \mathcal{A}(G_0)$ діє за правилом

$$(P_k f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-jk} f(\omega^j z).$$

Оскільки $\mathcal{A}(G) \subset \mathcal{A}(G_0)$ і топологія простору $\mathcal{A}(G)$ сильніша за топологію простору $\mathcal{A}(G_0)$, то оператори T і T_1 лінійно й неперервно відображають $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G_0)$. Але на елементах повної в $\mathcal{A}(G)$ системи $\{\exp(\lambda z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ оператори T і T_1 збігаються [1]. Тому для кожної функції $f \in \mathcal{A}(G)$ функції $T_1 f$ і Tf збігаються між собою в $\mathcal{A}(G_0)$, тобто функція $T_1 f \in \mathcal{A}(G_0)$ аналітично продовжується в область G. Тоді аналітично продовжується в G і функція

$$F_f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^z (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t)(P_k f)(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\limits_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-jk}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z-t)\right) f(\omega^j t)\,dt. \tag{4}$$

Нехай $j_1, j_2, ..., j_s$ – всі такі числа $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, для яких $\omega^j G \neq G$. Зафіксуємо деяке число $\mu \in \{j_1, j_2, ..., j_s\}$. Відзначимо, що область $\omega^\mu G$ не може повністю міститися в G, інакше, враховуючи співвідношення $G \supseteq \omega^\mu G \supseteq \omega^{2\mu} G \supseteq ... \supseteq \omega^{n\mu} G = G$, отримали б, що $\omega^\mu G = G$. Тому в області $\omega^\mu G$ є точки, які не належать G. Позначимо одну з них через $\omega^\mu z_0$, де $z_0 \in G$.

Розглянемо функцію $f_0(z) = \dfrac{1}{z - \omega^\mu z_0}$ і деяку зіркову відносно нуля підобласть G_1 області G, яка охоплює круг G_0 і точку z_0, але не містить жодної з точок вигляду $\omega^j z_0$, де $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Зауважимо, що функція f_0 належить до $\mathcal{A}(G)$ і аналітично не продовжується в область $\omega^\mu G_1$ (а тому і в область $\omega^\mu G$). Оскільки відповідна їй функція F_{f_0} вигляду (4) аналітично продовжується в область G (а тому і в область G_1) і всі доданки зовнішньої суми з (4) при $j \neq \mu$ також продовжуються в G_1, то продовжуватиметься в область G_1 і доданок з (4), який відповідає $j = \mu$, тобто функція вигляду

$$\int\limits_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z-t)\right) f_0(\omega^\mu t)\,dt. \tag{5}$$

Скористаємось тепер наслідком леми, встановленої в [3]:

Лема. *Нехай $\varphi \in \mathcal{A}(G)$, а f – деяка функція з $\mathcal{A}(G)$, яка не продовжується аналітично в область $\omega^\mu G$, де $\mu \in \{1, 2, ..., n-1\}$ таке, що $\omega^\mu G \neq G$. Якщо функція Φ вигляду*

$$\Phi(z) = \int\limits_0^z \varphi(z-t)\, f(\omega^\mu t)\,dt, \quad z \in G_0,$$

аналітично продовжується в область G, то $\varphi(z) = 0$ для всіх $z \in G$.

Згідно з цією лемою, якщо в ролі Φ взяти функцію (5), а в ролі G — область G_1, отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z) = 0, \quad z \in G_1.$$

Тоді за теоремою єдиності

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-\mu k}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z) = 0, \quad z \in G.$$

Отже, для кожної функції $f \in \mathcal{A}(G)$ маємо, що

$$F_f(z) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq j_1,\dots,j_s}}^{n-1}\int\limits_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-jk}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z-t)\right) f(\omega^j t)\,dt,$$

тому функція F_f аналітична в області G. Тоді оператор T можна подати у такому вигляді

$$(Tf)(z) = f(z) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_1,\ldots,j_s}}^{n-1} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z-t) \right) f(\omega^j t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{6}$$

Таким чином, встановлені необхідні умови такої теореми.

Теорема 1. *Нехай G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, для якої $\omega G \neq G$. Оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли функції a_0, a_1, ... , a_{n-1} із $\mathcal{A}(G)$ задовольняють умови*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-jk} (\mathcal{I}^{n-k-1} a_k)(z) = 0, \quad z \in G, \quad j \in \{j_1, j_2, ..., j_s\}, \tag{7}$$

де $j_1, j_2, ..., j_s$ – всі такі числа $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, для яких $\omega^j G \neq G$. При цьому, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), зображається формулою (6).

Доведення. Достатність. Нехай для функцій a_0, a_1, ... , a_{n-1} із $\mathcal{A}(G)$ виконуються умови (7), а оператор T визначається формулою (6). Зрозуміло, що T лінійно й неперервно діє з $\mathcal{A}(G)$ в $\mathcal{A}(G)$. Крім цього, як показано в [1], оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, який задовольняє співвідношення (3) й (1). Тому оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. □

З теореми 1 отримаємо наступну теорему.

Теорема 2. *Якщо зіркова відносно нуля область G така, що $\omega^j G \neq G$ для всіх $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, то оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли*

$$a_k = \mathcal{I}^k a_0, \quad k \in \{1, 2, ..., n-1\}, \tag{8}$$

де a_0 – фіксована функція з $\mathcal{A}(G)$. При цьому, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), визначається формулою

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z (\mathcal{I}^{n-1} a_0)(z-t) f(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{9}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1, оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$ тоді й лише тоді, коли функції a_0, a_1, ... , a_{n-1} із $\mathcal{A}(G)$ задовольняють співвідношення

$$\omega^{-j} \mathcal{I}^{n-2} a_1 + \omega^{-2j} \mathcal{I}^{n-3} a_2 + ... + \omega^{-(n-1)j} a_{n-1} = -\mathcal{I}^{n-1} a_0, \quad j \in \{1, 2, ..., n-1\}. \tag{10}$$

Домноживши j-ту рівність з (10) на ω^{jn}, одержимо систему лінійних рівнянь відносно функцій $\mathcal{I}^{n-2} a_1$, $\mathcal{I}^{n-3} a_2$, ... , a_{n-1}, головний визначник якої відмінний від нуля (бо він є визначником Вандермонда). Тому ця система має єдиний розв'язок. Оскільки, функції a_k вигляду (8) задовольняють співвідношення (10), то вони і визначають цей єдиний розв'язок. Враховуючи (8), з формули (6) отримується зображення (9) відповідного ізоморфізму T. □

2 Основний результат

Нехай $n \geq 3$ і область G не є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною відносно нуля, але існує таке $j \in \{2, 3, ..., n-1\}$, що $\omega^j \neq 1$ і $\omega^j G = G$. Як було відзначено в [3], числа j та n не можуть бути взаємно простими. Більше того, якщо d – найбільший спільний дільник чисел j та n, то область G інваріантна відносно повороту на кут $\frac{2\pi d}{n}$ навколо нуля. Справді, згідно з характеристикою найбільшого спільного дільника двох цілих чисел, існують такі цілі числа q та r, що $d = qj + rn$. Тоді $\omega^d G = (\omega^j)^q(\omega^n)^r G = (\omega^j)^q G = G$.

Виберемо серед чисел $j \in \{2, 3, ..., n-1\}$, для яких $\omega^j G = G$, найменше і позначимо його через p. Зауважимо, що число p є простим дільником числа n. Справді, якщо $d \in \{2, 3, ..., p-1\}$ є найбільшим спільним дільником чисел p і n, то, як було показано вище, $\omega^d G = G$, що суперечить вибору числа p. Отже, $n = mp$ для деякого $m \in \{2, 3, ..., n - 1\}$ і область G є $\frac{2\pi}{m}$-інваріантною відносно нуля. Крім цього, співвідношення $\omega^j G = G$ виконується лише для чисел $j \in \{p, 2p, ..., (m-1)p\}$. Знайдемо в цьому випадку простіший еквівалент умов (7) та зображення (6) ізоморфізму T, який задовольняє співвідношення (3) та (1).

Нехай оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Тоді, згідно з теоремою 1, ізоморфізм T, для якого виконуються рівності (3) та (1), визначається формулою (6), причому функції $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ задовольняють співвідношення (7). Оскільки, як було відзначено вище, рівності (7) виконуються при $j \in \{1, 2, ..., n-1\} \setminus \{p, 2p, ..., (m-1)p\}$, то дію оператора T на функцію $f \in \mathcal{A}(G)$ можна подати у такому вигляді

$$(Tf)(z) = f(z) - \frac{1}{p}\int_0^z \sum_{k=0}^{n-1}(\mathcal{I}^{n-k-1}a_k)(z-t)\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega^{-lpk}f(\omega^{lp}t)\,dt.$$

Якщо покласти $\omega_1 = \omega^p = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, для $k \in \{0, 1, ..., m-1\}$ через Q_k позначити проектор на $\mathcal{A}(G)$, що визначається формулою

$$(Q_k f)(z) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1}\omega_1^{-lk}f(\omega_1^l z),$$

причому вважати, що $Q_{jm+k} = Q_k$ при $j \in \{1, 2, ..., p-1\}$, то для $f \in \mathcal{A}(G)$

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(\mathcal{I}^{pm-jm-k-1}a_{jm+k})(z-t)(Q_k f)(t)\,dt.$$

Нехай

$$b_k(z) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(\mathcal{I}^{(p-j-1)m}a_{jm+k})(z), \quad k \in \{0, 1, ..., m-1\}.$$

Тоді

$$(Tf)(z) = f(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1}(\mathcal{I}^{m-k-1}b_k)(z-t)(Q_k f)(t)\,dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{11}$$

Але, згідно з [1], такий оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, для якого $BT = T\mathcal{D}^m$, де

$$(Bf)(z) = (\mathcal{D}^m f)(z) + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(z)(\mathcal{D}^k f)(0), \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{12}$$

Тому $AT = T\mathcal{D}^n = T(\mathcal{D}^m)^p = BT(\mathcal{D}^m)^{p-1} = ... = B^p T$. Оскільки T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, то отримаємо, що $A = B^p$.

Переконаємося далі, що

$$(\mathcal{D}^s b_k)(0) = 0, \quad s \in \{0, 1, ..., n-m-1\}, \quad k \in \{0, 1, ..., m-1\}. \tag{13}$$

Диференціюючи (11), індукцією по $l \in \{1, 2, ..., m-1\}$ можна встановити, що для $f \in \mathcal{A}(G)$

$$(\mathcal{D}^l T f)(z) = (\mathcal{D}^l f)(z) - \sum_{j=m-l}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} (\mathcal{D}^k b_{j+k})(0)(\mathcal{D}^{j-m+l} Q_{j+k} f)(z)$$

$$- \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{I}^{m-k-l-1} b_k)(z-t)(Q_k f)(t)\, dt, \tag{14}$$

де під $\mathcal{I}^{-l}$ розумітимемо оператор $\mathcal{D}^l$, а під $\mathcal{I}^0$ – тотожний оператор. Диференціюючи (14) і використовуючи рівність $\mathcal{D}^j Q_k = Q_{k-j}\mathcal{D}^j$ при $1 \leq j \leq k$ та індукцію по $s \in \{0, 1, ..., n-m-1\}$, одержуємо, що

$$(\mathcal{D}^{m+s} T f)(z) = (\mathcal{D}^{m+s} f)(z) - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} (\mathcal{D}^k b_{j+k})(0)(\mathcal{D}^s Q_k \mathcal{D}^j f)(z)$$

$$- \sum_{j=0}^{s} \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{D}^{k+s-j} b_k)(0)(\mathcal{D}^j Q_k f)(z) - \int_0^z \sum_{k=0}^{m-1} (\mathcal{D}^{k+s+1} b_k)(z-t)(Q_k f)(t)\, dt, \quad f \in \mathcal{A}(G). \tag{15}$$

З означення проекторів Q_k випливає, що

$$\mathcal{D}^j Q_k = Q_{k-j+lm}\mathcal{D}^j, \quad k \in \{0, 1, ..., m-1\}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad k + m(l-1) < j \leq k + ml,$$

$$(Q_0 f)(0) = f(0), \quad (Q_k f)(0) = 0, \quad k \in \{1, 2, ..., m-1\}, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Враховуючи (1) і ці співвідношення та покладаючи в (15) $f(z) = z^k$, отримаємо рівності (13).

Таким чином, встановлені необхідні умови такої теореми.

Теорема 3. *Нехай G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, для якої $\omega G \neq G$, а $p \in \{2, 3, ..., n-1\}$ – найменше таке число, для якого $\omega^p G = G$. Тоді $m = \frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ і оператор A вигляду (2) n-еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора $\mathcal{D}^n$ тоді й лише тоді, коли $A = B^p$, де оператор B визначається формулою (12) для деяких функцій b_0, b_1, ... , b_{m-1} із $\mathcal{A}(G)$, для яких виконується умова (13). При цьому, ізоморфізм T, який задовольняє (3) й (1), зображається формулою (11).*

Доведення. Достатність. Нехай для деяких функцій b_0, b_1, ..., b_{m-1} із $\mathcal{A}(G)$ виконується умова (13), оператори B і T визначаються відповідно формулами (12) та (11) і $A = B^p$. Оскільки область G є $\frac{2\pi}{m}$-інваріантною відносно нуля, то, згідно з [1], оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, для якого $BT = T\mathcal{D}^m$. Тому, як і вище, $AT = B^pT = T\mathcal{D}^n$. Отже, оператори A та $\mathcal{D}^n$ еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. Оскільки з рівностей (14) і (15) завдяки умові (13) випливає умова (1), то оператори A та $\mathcal{D}^n$ n-еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$. □

Література

1. Звоздецький Т. І. *Про еквівалентність лівих обернених до степеня інтегрування операторів у просторах аналітичних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. — 2001. — Вип. 111. — С. 51–54.

2. Линчук С. С., Нагнибида Н. И. *Об эквивалентности дифференциальных операторов в пространстве аналитических в круге функций* // Математика сегодня'89. Научно-метод. сб. — 1989. — Вып. 5. — С. 47–62.

3. Нагнибида Н. И. *Об операторах, коммутирующих с кратным интегрированием в пространстве аналитических функций* // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 139–148.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Чернівці, Україна

e-mail: *taras_zv@ukr.net*

Надійшло 23.02.2012

Zvozdetskyi T.I. *On the n-similarity of the operators which are left inverse to the n^{th} degree of the integration operator in the spaces of analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 261–267.

We investigate the conditions of the n-similarity of the n^{th} degree of the differentiation operator to an operator which is left inverse to the n^{th} degree of the integration operator in the spaces of analytic functions.

Звоздецкий Т.И. *О n-эквивалентности левых обратных к n-ой степени интегрирования операторов в пространствах аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 261–267.

В данной работе исследуются условия n-эквивалентности n-ой степени оператора дифференцирования и произвольного левого обратного к n-ой степени интегрирования оператора в пространствах функций, аналитических в не $\frac{2\pi}{n}$-инвариантных областях.