Карпатські математичні публікації. Т.4, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.4, №2

УДК 517.53

Сокульська Н.Б.

МЕРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ У ПІВСМУЗІ

Сокульська Н.Б. *Мероморфні функції скінченного λ-типу у півсмузі* // Карпатські математичні публікації. — 2012. — Т.4, №2. — С. 328–339.

Введено характеристику Неванлінни мероморфних у півсмузі функцій таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, та досліджено її основні властивості. Отримано критерій скінченності λ-типу голоморфної в замиканні півсмуги функції f в термінах коефіцієнтів Фур'є логарифма її модуля.

Вступ

В 60-70 роках минулого століття американські математики Л.А. Рубел та Б.А. Тейлор [7] (див. також [2], [5]) розробили метод рядів Фур'є для цілих та мероморфних функцій. На відміну від класичних підходів за функцію зростання вони запропонували брати довільну додатну, неперервну, неспадну і необмежену функцію $\lambda(r)$ і розглядати класи Λ мероморфних функцій скінченного λ-типу, тобто таких, що $T(r, f) \leq A\lambda(Br)$ для довільного $r > 0$ і деяких додатних сталих A і B, де $T(r, f)$ — характеристика Неванлінни функції f.

Цей метод дозволив розв'язати низку важливих задач, зокрема, на основі детального вивчення коефіцієнтів Фур'є

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

повністю описати множину нулів цілих функцій з класів Λ.

В даній роботі вводиться і досліджується аналог характеристики Неванлінни для мероморфних в замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$ функцій f таких, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. За допомогою методу, запропонованого Дж. Літтлвудом [6], встановлюються співвідношення для коефіцієнтів Фур'є мероморфних в S функцій, вводиться характеристика Неванлінни таких функцій, доводиться критерій скінченності їх λ-типу.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: голоморфна функція, мероморфна функція, функція скінченного λ-типу, характеристика Неванлінни, теорема Йенсена-Літтлвуда.

1 Формула Йенсена-Літтлвуда та характеристика Неванлінни мероморфної в півсмузі функції

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $S = \{\sigma + it : \sigma > 0, 0 < t < 2\pi\}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂S, $f \not\equiv 0$ і, крім того, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$.

Через $\{s_j\}$ позначимо послідовність нулів функції f в S, $s_j = \sigma_j + it_j$, через $\{p_j\}$ — послідовність її полюсів в S. Через S^* позначимо смугу S з розрізами $\{\tau\sigma_j + it_j\}$, $\{\tau \mathrm{Re} p_j + i \mathrm{Im} p_j\}$, $1 \leq \tau < \infty$. Нехай $s_0 \in S^*$ і вибране деяке значення $\log f(s_0)$. Покладемо

$$\log f(s) - \log f(s_0) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \tag{1}$$

де інтеграл береться по деякому шляху в $S^* \cup \partial S$.

Нехай $n(\eta, f)$ лічильна функція полюсів функції f у прямокутнику $R_\eta = \{\sigma + it : 0 < \sigma \leq \eta, 0 \leq t < 2\pi\}$, і

$$N(\sigma, f) = \int\limits_0^{\sigma} n(\eta, f) d\eta.$$

Позначимо

$$c_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(\sigma + it)| dt. \tag{2}$$

Аналог теореми Йенсена - Літтлвуда ([6]) формулюється наступним чином.

Лема 1.1. *Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги S, $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, $\sigma \geq 0$. Тоді*

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = c_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, f) + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1) c_0(0, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{3}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂S. Застосувавши принцип аргумента, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R_\eta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = n(\eta, \frac{1}{f}) - n(\eta, f).$$

Межа ∂R_η складається з чотирьох відрізків, тому

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int\limits_0^{\eta} \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)} d\sigma + i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta + it)}{f(\eta + it)} dt - \int\limits_0^{\eta} \frac{f'(\sigma + 2\pi i)}{f(\sigma + 2\pi i)} d\sigma - i \int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)} dt \right] = n(\eta, \frac{1}{f}) - n(\eta, f). \tag{4}$$

Оскільки f має період $2\pi i$, то f' також має період $2\pi i$, тоді

$$\int\limits_0^\eta \frac{f'(\sigma)}{f(\sigma)}d\sigma = \int\limits_0^\eta \frac{f'(\sigma+2\pi i)}{f(\sigma+2\pi i)}d\sigma,$$

і співвідношення (4) запишеться наступним чином

$$\frac{1}{2\pi i}\left[i\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dt - i\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)}dt\right] = n(\eta, \frac{1}{f}) - n(\eta, f). \tag{5}$$

Проінтегруємо рівність (5) по η від 0 до σ

$$\int\limits_0^\sigma n(\eta, \frac{1}{f})d\eta - \int\limits_0^\sigma n(\eta, f)d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\sigma\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}dtd\eta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\sigma\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2. \tag{6}$$

Враховуючи означення логарифма (1) функції f, другий інтеграл співвідношення (6) запишемо у вигляді

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\sigma\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(it)}{f(it)}dtd\eta = \frac{\sigma}{2\pi i}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{7}$$

Застосовуючи теорему Фубіні до $\mathcal{J}_1$, отримаємо

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt\int\limits_0^\sigma \frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\log f(\sigma+it) - \log f(it)]dt, \tag{8}$$

З врахуванням (7) і (8), рівність (6) можна записати наступним чином

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = l_0(\sigma, f) - l_0(0, f) + i\frac{\sigma}{2\pi}[\log f(2\pi i) - \log f(0)], \tag{9}$$

де

$$l_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log f(\sigma+it)dt.$$

Взявши дійсні частини обох боків співвідношення (9), отримаємо

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(\sigma+it)|dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(it)|dt + \sigma C_f,$$

де $C_f = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}f(0) - \mathrm{Arg}f(2\pi i)]$, $\mathrm{Arg}f = \mathrm{Im}\log f$, тобто

$$N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f) = c_0(\sigma, f) - c_0(0, f) + \sigma C_f, \quad \sigma > 0. \tag{10}$$

З припущення відсутності нулів та полюсів на ∂S та з ізольованості наявних випливає існування $\sigma_0 > 0$ такого, що $f \neq 0, \infty$ при $\sigma \leq \sigma_0$. Тому з (10) маємо

$$0 = \frac{1}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, f) - \frac{1}{\sigma_0} c_0(0, f) + C_f, \quad \sigma > 0. \tag{11}$$

Поділивши рівність (10) на σ і віднявши від неї (11), одержимо

$$\frac{1}{\sigma}[N(\sigma, \frac{1}{f}) - N(\sigma, f)] = \frac{1}{\sigma} c_0(\sigma, f) - \frac{1}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, f) + \left(\frac{1}{\sigma_0} - \frac{1}{\sigma}\right) c_0(0, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0,$$

звідки й випливає (3).

При незначній модифікації доведення для випадку, коли нулі чи полюси функції f лежать на ∂S отримаємо рівність (3). $\square$

Позначимо

$$m_0(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+|f(\sigma + it)| dt, \tag{12}$$

де $x^+ = \max\{x, 0\}$.

Означення 1.1. *Нехай функція f мероморфна в $\overline{S}$, $f \not\equiv 0$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Характеристикою Неванлінни функції f називається*

$$T(\sigma, f) = m_0(\sigma, f) - \frac{\sigma}{\sigma_0} m_0(\sigma_0, f) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) m_0(0, f) + N(\sigma, f), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{13}$$

Властивості $T(\sigma, f)$ опишемо наступною теоремою.

Теорема 1. *Нехай f — мероморфна в $\overline{S}$ функція, $f \not\equiv 0$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Тоді її характеристика Неванлінни $T(\sigma, f)$ володіє наступними властивостями:*

(i) $T(\sigma, f)$ *— опукла відносно* σ, *при* $\sigma \geq \sigma_0$;

(ii) $T(\sigma_0, f) = 0$;

(iii) $T(\sigma, f)$ *— неспадна, при* $\sigma \geq \sigma_0$;

(iv) $T(\sigma, f) = T(\sigma, \frac{1}{f})$, *при* $\sigma \geq \sigma_0$.

Доведення. Нехай $\log z = \log|z| + i \arg_0 z$, $0 \leq \arg_0 z < 2\pi$, $z \neq 0$. Тоді функція $F(z) = f(\log z)$ мероморфна при $|z| \geq 1$ і $f(\log|z|) = f(\log|z| + 2\pi i)$.

Зобразимо функцію F у вигляді частки двох функцій $\frac{H}{G}$, де H, G — голоморфні при $|z| \geq 1$ без спільних нулів, і $h(s) = H(e^s)$, $g(s) = G(e^s)$. Тоді, застосовуючи (3) до g, маємо

$$N(\sigma, f) = N(\sigma, \frac{1}{g}) = c_0(\sigma, g) - \frac{\sigma}{\sigma_0} c_0(\sigma_0, g) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) c_0(0, g), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Враховуючи, що $(a-b)^{+}+b=max(a,b)$, характеристику (13) функції $f=\frac{h}{g}$ запишемо у вигляді:

$$T(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\max(\log|h(\sigma+it)|,\log|g(\sigma+it)|)dt$$
$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\max(\log|h(\sigma_0+it)|,\log|g(\sigma_0+it)|)dt$$
$$+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\max(\log|h(it)|,\log|g(it)|)dt,\quad \sigma\geq\sigma_0>0. \tag{14}$$

Позначимо $I(\sigma,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\max(\log|h(\sigma+it)|,\log|g(\sigma+it)|)dt$.

Тоді $I(\sigma,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\max(\log|H(e^{\sigma+it})|,\log|G(e^{\sigma+it})|)dt$.

Функція $u(z)=\max(\log|H(z)|,\log|G(z)|)$ субгармонійна при $|z|\geq 1$, тому $I(\sigma,F)$ опукла [3, ст. 27], [1, ст. 49], при $\sigma\geq 0$.

Згідно з (14)

$$T(\sigma,f)=I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f),\quad \sigma\geq\sigma_0>0. \tag{15}$$

Оскільки $T(\sigma,f)$ є сумою опуклої відносно $\sigma\geq\sigma_0$ функції $I(\sigma,f)$ та лінійної функції $A\sigma+B$, то властивість (i) виконується. За властивістю опуклості $I(\sigma,f)$, при $0\leq\sigma$ маємо $I(\sigma_0,f)\leq\frac{\sigma-\sigma_0}{\sigma}I(0,f)+\frac{\sigma_0}{\sigma}I(\sigma,f)$. Звідси, $0\leq I(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}I(\sigma_0,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)I(0,f)$. Таким чином, згідно з (15) ми отримали, що $T(\sigma,f)\geq 0$. Якщо $\sigma=\sigma_0$, то з (15) випливає, що $T(\sigma_0,f)=0$.

Оскільки $T(\sigma,f)$ опукла, відносно σ, при $\sigma\geq\sigma_0$, то за теоремою 1.6 із [4, ст. 28] (див також [1, ст. 11]) в кожній точці вона має похідну справа і

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}\frac{T(\sigma,f)-T(\sigma_0,f)}{\sigma-\sigma_0}=\lim_{\sigma\to\sigma_0+0}\frac{T(\sigma,f)}{\sigma-\sigma_0}=T'_{+}(\sigma_0,f)\geq 0.$$

Похідна справа опуклої функції за цією ж теоремою не спадає. Тому $0\leq T'_{+}(\sigma_0,f)\leq T'_{+}(\sigma,f),\quad \sigma\geq\sigma_0$. Отож, характеристика $T(\sigma,f)$ неспадна.

Покажемо, що виконується властивість *(iv)*. Застосуємо рівність (3) до функції $\frac{1}{f}$:

$$N(\sigma,f)-N(\sigma,\frac{1}{f})=c_0(\sigma,\frac{1}{f})-\frac{\sigma}{\sigma_0}c_0(\sigma_0,\frac{1}{f})+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)c_0(0,\frac{1}{f}),\quad \sigma\geq\sigma_0>0.$$

Враховуючи (2) і властивість $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, для $x > 0$, отримаємо

$$N(\sigma, f) - N(\sigma, \frac{1}{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma+it)|dt$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma_0+it)|}dt + \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0+it)|dt$$

$$+(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(it)|}dt - (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(it)|dt, \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0.$$

Звідси,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma+it)|dt - \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\sigma_0+it)|dt + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(it)|dt$$
$$+N(\sigma, f)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt - \frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(\sigma_0+it)|}dt + (\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(it)|}dt$$
$$+N(\sigma, \frac{1}{f}), \quad \sigma \geq \sigma_0 > 0. \tag{16}$$

З рівності (16) та означення 1.1 отримуємо *(iv)*. Теорему доведено. □

2 Коефіцієнти Фур'є мероморфної в півсмузі функції

Нехай f — відмінна від тотожного нуля функція, що голоморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta \leq \sigma, 0 \leq t < 2\pi\}$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Припустимо, що f не має нулів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ позначимо множину нулів f в R_σ, $(s_j = \sigma_j + it_j)$.

Нехай $R_\sigma^* = R_\sigma \setminus \bigcup\limits_j \{\tau\sigma_j + it_j\}$, $1 \leq \tau < \infty$ і $\log f(s)$ визначений як в (1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R_\sigma^* \bigcup \partial R_\sigma$.

Покладемо:

$$l_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log f(\sigma+it)dt, \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{17}$$

$$c_k(\sigma, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} \log |f(\sigma+it)|dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2.1. *При виконанні зроблених вище припущень правильні наступні співвідношення:*

$$l_k(\sigma,f)=e^{k\sigma}l_k(0,f)+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}-\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}[\log f(2\pi i)-\log f(0)],\ k\in\mathbb{Z}; \tag{18}$$

$$c_k(\sigma,f)=\frac{e^{k\sigma}\alpha_k(f)-e^{-k\sigma}\overline{\alpha_{-k}}(f)}{2k}+\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k-\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k\right],\ k\in\mathbb{N}. \tag{19}$$

де $c_{-k}(\sigma,f)=\overline{c_k}(\sigma,f)$, $\alpha(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt$.

Доведення. Нехай $\eta<\sigma$. Застосуємо принцип аргумента до функції $\frac{f'(s)}{f(s)}e^{-ks}$ в прямокутнику R_η. Отримаємо:

$$\int\limits_{\partial R_\eta}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}e^{-k\zeta}d\zeta=2\pi i\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{20}$$

Оскільки ∂R_η складається з 4-х відрізків, то (20) набуде вигляду:

$$\int\limits_0^{\eta}\frac{f'(\gamma)}{f(\gamma)}e^{-k\gamma}d\gamma+i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}e^{-k(\eta+it)}dt-\int\limits_0^{\eta}\frac{f'(\gamma+2\pi i)}{f(\gamma+2\pi i)}e^{-k(\gamma+2\pi i)}d\gamma$$
$$-i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}e^{-ikt}dt=2\pi i\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{21}$$

Зважаючи на $2\pi i$-періодичність функцій $f(s)$ та e^{-ks}, співвідношення (21) запишемо наступним чином

$$i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}e^{-k(\eta+it)}dt-i\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}e^{-ikt}dt=2\pi i\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{22}$$

Домножимо (22) на $\frac{e^{k\eta}}{i}$, проінтегруємо отриману рівність по η від 0 до σ.

$$\int\limits_0^{\sigma}e^{k\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}e^{-k(\eta+it)}dtd\eta-\int\limits_0^{\sigma}e^{k\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}e^{-ikt}dtd\eta=2\pi\int\limits_0^{\sigma}e^{k\eta}\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j}d\eta, \tag{23}$$

$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. До першого інтегралу рівності (23) застосуємо теорему Фубіні.

$$\int\limits_0^{\sigma}e^{k\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}e^{-k(\eta+it)}dtd\eta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sigma}e^{k\eta}\frac{f'(\eta+it)}{f(\eta+it)}e^{-k(\eta+it)}d\eta dt$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}[\log f(\sigma+it)-\log f(it)]dt. \tag{24}$$

Другий інтеграл співвідношення (23) дає

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}e^{-ikt}dtd\eta=\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f'(it)}{f(it)}e^{-ikt}dt=\frac{e^{k\sigma}-1}{ik}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}d(\log(it))$$

$$=-i\frac{e^{k\sigma}-1}{k}[\log f(2\pi i)-\log f(0)]+\left(e^{k\sigma}-1\right)\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log f(it)dt. \qquad (25)$$

Використавши означення логарифма функції і (17), з (23) - (25) отримаємо:

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta}\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j}d\eta=l_k(\sigma,f)-e^{k\sigma}l_k(0,f)+\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right], \qquad (26)$$

$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Інтегруючи в інтегралі Стільтєсса, отримуємо:

$$\int\limits_0^\sigma e^{k\eta}\sum_{s_j\in R_\eta}e^{-ks_j}d\eta=\frac{1}{k}e^{k\sigma}\sum_{s_j\in R_\sigma}e^{-ks_j}-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}e^{k\sigma_j}e^{-ks_j}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (27)$$

Із врахуванням (27), співвідношення (26) набуває вигляду

$$l_k(\sigma,f)=e^{k\sigma}l_k(0,f)+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}-\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right], \qquad (28)$$

$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Враховуючи рівність (3), отримаємо (18). Оскільки $c_k(\sigma,f)=\frac{l_k(\sigma,f)+\overline{l_{-k}(\sigma,f)}}{2}$, $k\in\mathbb{N}$, то, використовуючи (28), маємо

$$2c_k(\sigma,f)=l_k(\sigma,f)+\overline{l_{-k}(\sigma,f)}=e^{k\sigma}l_k(0,f)+\overline{e^{-k\sigma}l_{-k}(0,f)}$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}-\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{\overline{e^{s_j}}}\right)^{-k}+\frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\frac{1}{e^{ikt_j}}$$

$$-\frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right]-\frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)}-\overline{\log f(0)}\right],\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (29)$$

Але, використавши (17), можемо записати

$$l_k(0,f)+\overline{l_{-k}(0,f)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log f(it)dt+\frac{1}{2\pi}\overline{\int\limits_0^{2\pi}e^{ikt}\log f(it)dt},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Проінтегруємо частинами в обох інтегралах:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log f(it)dt=\frac{i}{2\pi k}\left[\log f(2\pi i)-\log f(0)\right]+\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt,\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\log f(it)dt} = \frac{i}{2\pi k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right] - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи вище отримані обчислення, рівність (29) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
2c_k(\sigma,f) &= \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}}{k}\left[\log f(2\pi i) - \log f(0)\right] + \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right] \\
&+ \frac{e^{k\sigma}}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - \frac{e^{-k\sigma}}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt + \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{\overline{e^{s_j}}}\right)^{-k} \\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log f(2\pi i) - \log f(0)\right] - \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\overline{\log f(2\pi i)} - \overline{\log f(0)}\right] \\
&= \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] - \frac{e^{k\sigma}}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right] \\
&+ \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] + \frac{e^{-k\sigma}}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right] \\
&+ \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k + e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\left(\frac{f'(it)}{f(it)}\right)}dt \\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] + \frac{e^{k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right] \\
&- \frac{i}{2\pi}\frac{e^{-k\sigma}-1}{k}\left[\log|f(2\pi i)| - \log|f(0)|\right] - \frac{e^{-k\sigma}-1}{2\pi k}\left[\arg_0 f(2\pi i) - \arg_0 f(0)\right], \quad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Використовуючи те, що $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$, з останньої рівності отримуємо:

$$2c_k(\sigma,f) = e^{k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt - e^{-k\sigma}\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\overline{\frac{f'(it)}{f(it)}}dt + \frac{1}{k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k - \left(\frac{\overline{e^{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$

$k\in\mathbb{N}$. Звідси випливають рівності (19).

Рівність $c_{-k}(\sigma,f) = \overline{c_k(\sigma,f)}$, випливає безпосередньо з введення $c_k(\sigma,f)$. Лема 2.1 доведена. □

Нехай f — відмінна від тотожного нуля функція, що мероморфна в замиканні прямокутника $R_\sigma = \{\eta + it : 0 < \eta \le \sigma, 0 \le t < 2\pi\}$ і $f(\sigma) = f(\sigma + 2\pi i)$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R_σ. Через $\{s_j\}$ позначимо множину нулів f в R_σ, через $\{p_j\}$ — множину її полюсів в R_σ ($s_j = \sigma_j + it_j, p_j = \mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j$).

Нехай $R^*_\sigma = R_\sigma \setminus (\bigcup\limits_j \{\tau\sigma_j + it_j\} \cup \{\tau\mathrm{Re}p_j + i\mathrm{Im}p_j\})$, $1 \le \tau < \infty$ і $\log f(s)$ визначений як в (1), де інтеграл береться по деякому шляху в $R^*_\sigma \bigcup \partial R_\sigma$.

Аналогічними міркуваннями прийдемо до наступного твердження.

Лема 2.2. *За вище зроблених припущень правильні наступні співвідношення:*

$$c_k(\sigma,f)=\frac{e^{k\sigma}\alpha_k(f)-e^{-k\sigma}\overline{\alpha_{-k}(f)}}{2k}$$
$$+\frac{1}{2k}\sum_{s_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{s_j}}\right)^k-\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right]-\frac{1}{2k}\sum_{p_j\in R_\sigma}\left[\left(\frac{e^\sigma}{e^{p_j}}\right)^k-\left(\frac{e^{\overline{p_j}}}{e^\sigma}\right)^k\right],$$
$$c_{-k}(\sigma,f)=\overline{c}_k(\sigma,f)\quad k\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

де $\alpha(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\frac{f'(it)}{f(it)}dt,\quad k\in\mathbb{N}.$

3 Мероморфні в півсмузі функції скінченного λ - типу

Означення 3.1. *Додатна неспадна неперервна і необмежена функція $\lambda(\sigma)$, при $\sigma>\sigma_0$ називається функцією зростання.*

Означення 3.2. *Нехай $\lambda(\sigma)$ — функція зростання, f — мероморфна функція в $\overline{S}$, $f\not\equiv 0$ і $f(\sigma)=f(\sigma+2\pi i)$. Функція f називається функцією скінченного λ-типу, якщо $\exists\ A,\ B\ >\ 0$ такі, що $T(\sigma,f)\le A\lambda(\sigma+B)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$.*

Клас мероморфних в S функцій скінченного λ-типу позначимо через Λ, а клас голоморфних в S функцій скінченного λ-типу позначимо через Λ_H.

Теорема 2. *Нехай функція f голоморфна в замиканні півсмуги S і така, що $f\not\equiv 0$, $f(\sigma)=f(\sigma+it)$, $\lambda(\sigma)$ — функція зростання така, що $\sigma=O(\lambda(\sigma))$, $\quad\sigma\to\infty$. Тоді наступні твердження еквівалентні.*

(i) $f\in\Lambda_H$;

(ii) $|c_k(\sigma,f)|\le A\lambda(\sigma+B)$, *для всіх $\sigma>\sigma_0$ і деяких $A,B>0$, $k\in\mathbb{Z}$;*

(iii) $|c_k(\sigma,f)|\le\frac{A\lambda(\sigma+B)}{|k|+1}$, *для всіх $\sigma>\sigma_0$ і деяких $A,B>0$, $k\in\mathbb{Z}$.*

Доведення. Якщо виконується (i), то $T(\sigma,f)\le A\lambda(\sigma+B)$, при деяких $A,B>0$ і всіх $\sigma>\sigma_0$. Тоді згідно з (2), властивістю $|\log x|=\log^+x+\log^+\frac{1}{x}$, де $x>0$, і пунктом (iv) теореми 1 отримаємо

$$|c_k(\sigma,f)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}e^{-ikt}\log|f(\sigma+it)|dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(\sigma+it)||\,dt$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+|f(\sigma+it)|dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(\sigma+it)|}dt$$

$$\le m_0(\sigma,f)+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)m_0(0,f)+m_0(\sigma,\frac{1}{f})+\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)m_0(0,\frac{1}{f})$$

$$-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(it)||dt \leq 2T(\sigma,f)+\frac{\sigma}{\sigma_0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(it)||dt$$
$$\leq 2A\lambda(\sigma+B)+C\sigma \leq A_1\lambda(\sigma+B), \quad k\in\mathbb{Z},$$

де C стала, $A_1=\max\{2A,C\}$.

Нехай виконується (ii). Тоді з рівності (19) маємо:

$$e^{-k}c_k(\sigma+1,f)-c_k(\sigma,f)=-\frac{\overline{\alpha_{-k}(f)}}{2k}(e^{-k(\sigma+2)}-e^{-k\sigma})+\frac{1}{2k}\sum_{\sigma<\sigma_j\leq\sigma+1}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{s_j}}\right)^k$$
$$-\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\leq\sigma+1}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma+1}}\right)^k+\frac{e^{-k}}{2k}\sum_{0<\sigma_j\leq\sigma}\left(\frac{e^{\overline{s_j}}}{e^{\sigma}}\right)^k, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Звідси

$$|c_k(\sigma,f)|\leq\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k}+\frac{n(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{n(\sigma,\frac{1}{f})}{2k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Але, оскільки

$$N(\sigma+1,\frac{1}{f})\geq\int\limits_0^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\geq\int\limits_{\sigma}^{\sigma+1}n(\eta,\frac{1}{f})d\eta\geq n(\sigma,\frac{1}{f}),$$

то

$$|c_k(\sigma,f)|\leq\frac{|c_k(\sigma+1,f)|}{e^k}+\frac{|\overline{\alpha_{-k}(f)}|}{2k}+\frac{N(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2k}+\frac{N(\sigma+1,\frac{1}{f})}{2ke^k}+\frac{N(\sigma,\frac{1}{f})}{2k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи (3), отримаємо таку нерівність

$$N(\sigma,\frac{1}{f})<|c_0(\sigma,f)|+C_1\sigma, \quad \sigma\geq\sigma_0>0, \tag{31}$$

де C_1 — стала.

Використовуючи властивість $c_{-k}=\overline{c_k}$, умову (ii) та (31), отримуємо

$$|c_k(\sigma,f)|\leq\frac{A_1\lambda(\sigma+B_1)}{|k|+1}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

для всіх $\sigma\geq\sigma_0>0$ і деяких A_1,B_1, таких, що $A_1=\max\{4A,3C_1\},B_1=B+1$.

Припустимо, що виконується (iii), тоді

$$T(\sigma,f)=m_0(\sigma,f)-\frac{\sigma}{\sigma_0}m_0(\sigma_0,f)+(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1)m_0(0,f)\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\log|f(\sigma+it)||dt$$

$$+C\sigma \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log|f(\sigma+it)||^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}} + C\sigma = \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\sigma,f)|^2\right]^{\frac{1}{2}} + C\sigma$$

$$\leq A\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(|k|+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \lambda(\sigma+B) + C\sigma \leq A_2\lambda(\sigma+B),$$

при всіх $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ і для деяких сталих C, A_2, а це означає, що $f \in \Lambda_H$. Таким чином, з *(iii)* випливає *(i)*. $\square$

Література

1. Бридун А.М., Бродяк О.Я., Васильків Я.В., Христіянин А.Я. Опуклі, гармонійні та субгармонійні функції. Задачі і теореми. — Львів: Видавницто ЛНУ ім. І. Франка, 2011. — 106 с.
2. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. — Л.: Вища школа, 1988. — 196 с.
3. Хейман У.К. Мероморфные функции. — М.: Мир, 1966. — 288 с.
4. Хейман У., Кеннеді П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980. — 304 с.
5. Kondratyuk A., Laine I. *Meromorphic functions in multiply connected domains*, Fourier series method in complex analysis (Merkrijärvi, 2005), Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., **10** (2006), 9–111.
6. Littlewood J. E. *On the zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Camb. Philos. Soc., **22** (1924), 295–318.
7. Rubel L.A., Taylor B.A. *Fourier series method for meromorphic and entire functions*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53–96.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна
e-mail: *natalia_sokulska@yahoo.com*

Надійшло 24.03.2012

Sokul's'ka N.B. *Meromorphic functions of finite λ-type in a half-strip*, Carpathian Mathematical Publications, **4**, 2 (2012), 328–339.

The Nevanlinna characteristic of meromorphic functions in a half-strip, such that $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, is introduced, and its main properties are investigated. A criterion of λ-type finiteness of holomophic in the half-strip functions in terms of Fourier coefficient of $\log|f|$ is obtained.

Сокульска Н.Б. *Мероморфные функции конечного λ-типа в полуполосе* // Карпатские математические публикации. — 2012. — Т.4, №2. — С. 328–339.

Введена характеристика Неванлинны мероморфных в полуполосе функций таких, что $f(\sigma) = f(\sigma+2\pi i)$, доказаны ее основные свойства. Получен критерий конечности λ-типа голоморфной в полуполосе функции f в терминах коэфициентов Фурье логарифма ее модуля.