УДК 512.64+517.926

Гой Т. П., Заторський Р. А.

ВИКОРИСТАННЯ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ ПОБУДОВИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ВІДОМОЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ РОЗВ'ЯЗКІВ

Використовуючи апарат трикутних матриць, запропоновано алгоритм побудови звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь за заданою фундаментальною системою розв'язків.

Ключові слова: трикутна матриця, парадетермінант трикутної матриці, матриця Гессенберга, рекурентне рівняння, фундаментальна система розв'язків.

Допоміжні поняття та твердження

Трикутні матриці та їх парадетермінанти знайшли широке застосування в алгебрі, комбінаторному аналізі, теорії чисел та інших областях математики [1].

Трикутною матрицею n-го порядку назвемо числову трикутну таблицю [2]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n . \qquad (1)$$

Кожному елементу a_{ij} матриці (1) поставимо у відповідність $(i - j + 1)$ елементів a_{ik}, $k = j, j+1, \dots, i$, які назвемо *похідними елементами* цієї матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij}.

Факторіальним добутком $\{a_{ij}\}$ ключового елемента a_{ij} назвемо добуток усіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Рогом $R_{ij}(A)$ елемента a_{ij} матриці (1) назвемо трикутну матрицю $(i-j+1)$-го порядку з цим елементом у лівому нижньому куті. Очевидно, що у ріг $R_{ij}(A)$ трикутної матриці (1) входять тільки ті її елементи a_{rs}, індекси яких задовольняють нерівність $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$.

Парадетермінантом $\operatorname{ddet} A$ трикутної матриці (1) називають число

$$\operatorname{ddet} A \equiv \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{|p_r|=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \left\{ a_{|p_s|,|p_{s-1}|+1} \right\}, \quad (2)$$

де $|p_k| = p_1 + \ldots + p_k$ ($p_s \in \mathbb{N}$), $\{a_{ij}\}$ — факторіальний добуток ключового елемента a_{ij} [2].

Парадетермінант трикутної матриці можна розкласти за елементами вписаної прямокутної таблиці, зокрема, за елементами останнього рядка матриці.

Теорема 1 ([2]). *Нехай A — трикутна матриця (1) n-го порядку. Тоді*

$$\operatorname{ddet} A = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} \{a_{ns}\} \cdot \operatorname{ddet}\big(R_{s-1,1}(A)\big), \quad (3)$$

де $\{a_{ns}\}$ — факторіальний добуток ключового елемента a_{ns}, $R_{s-1,1}(A)$ — ріг матриці A, причому $\operatorname{ddet}(R_{01}(A)) = 1$.

Теорема 2 дозволяє зменшити порядок парадетермінанта трикутної матриці на одиницю, що надає зручний алгоритм обчислення таких парадетермінантів.

Теорема 2 ([3]). *Для парадетермінанта трикутної матриці* (1) *справджується рівність*

$$\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle_n =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} (a_{11}-a_{21})a_{22} & & & \\ (a_{11}-a_{31})a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (a_{11}-a_{n1})a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle_{n-1}. \qquad (4)$$

Обчислення парадетермінантів деяких трикутних матриць спеціального виду

Верхньою матрицею Гессенберга називають квадратну матрицю $(h_{ij})_{i,j=1}^{n}$, всі елементи якої під першою піддіагоналлю дорівнюють нулю, тобто $h_{ij}=0$ для всіх $i>j+1$ [4].

Нижня матриця Гессенберга — це матриця, отримана транспонуванням верхньої матриці Гессенберга.

Детермінант нижньої матриці Гессенберга n-го порядку можна звести до парадетермінанта деякої трикутної матриці n-го порядку.

Теорема 3 ([5]). *Справджується тотожність*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}_n =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & & \\ \frac{a_1 a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{a_1 a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & \frac{a_2 a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & \dots & a_{n-1,n-1} & \\ \frac{a_1 a_{n1}}{a_{n2}} & \frac{a_2 a_{n2}}{a_{n3}} & \dots & \frac{a_{n-1} a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle_n. \qquad (5)$$

Для знаходження парадетермінантів трикутних матриць спеціального виду, які виникатимуть у третьому розділі, використовуватимемо таке твердження.

Лема 4. *Справджується тотожність*

$$\left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_1} & & & \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2-k_1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_n} & \frac{1}{k_n-k_1} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_n = \frac{1}{k_1\dots k_n}. \qquad (6)$$

Доведення. Для кожного $j\in\{1,\dots,n\}$ позначимо

$$M_j \equiv M_j(k_j,\dots,k_n) =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_j} & & & & \\ \frac{1}{k_{j+1}} & \frac{1}{k_{j+1}-k_j} & & & \\ \frac{1}{k_{j+2}} & \frac{1}{k_{j+2}-k_j} & \frac{1}{k_{j+2}-k_{j+1}} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_n} & \frac{1}{k_n-k_j} & \frac{1}{k_n-k_{j+1}} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_{n-j+1}.$$

Потрібно довести, що $M_1=(k_1\cdot\ldots\cdot k_n)^{-1}$.

Використовуючи рівність (2), зменшимо порядок парадетермінанта M_1 на одиницю:

$$M_1 = \left\langle\begin{matrix} \left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\frac{1}{k_2-k_1} & & & \\ \left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_3}\right)\frac{1}{k_3-k_1} & \frac{1}{k_3-k_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_n}\right)\frac{1}{k_n-k_1} & \frac{1}{k_n-k_2} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_{n-1} =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_1k_2} & & & \\ \frac{1}{k_1k_3} & \frac{1}{k_3-k_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_1k_n} & \frac{1}{k_n-k_2} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_{n-1} = \frac{M_2}{k_1}.$$

Аналогічно,

$$M_2 = \left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_2} & & & \\ \frac{1}{k_3} & \frac{1}{k_3-k_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_n} & \frac{1}{k_n-k_2} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_{n-1} =$$

$$= \left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_2k_3} & & & \\ \frac{1}{k_2k_4} & \frac{1}{k_4-k_3} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_2k_n} & \frac{1}{k_n-k_3} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{matrix}\right\rangle_{n-2} = \frac{M_3}{k_2},\dots,$$

$$M_{n-2} = \frac{M_{n-1}}{k_{n-2}}, \quad M_{n-1} = \frac{M_n}{k_{n-1}} = \frac{1}{k_{n-1}k_n}.$$

Звідси $M_1 = \big(k_1\cdot\ldots\cdot k_n\big)^{-1}$, що й потрібно було довести.

Наслідок 5. *Справджується тотожність*

$$\left\langle\begin{matrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & 1 \end{matrix}\right\rangle_n = \frac{1}{n!}. \qquad (7)$$

Формулу (7) одержуємо з (6), якщо в ній підставити $k_1=1,\dots,k_n=n$.

Парадетермінанти трикутних матриць і звичайні лінійні диференціальні рівняння

Нехай на інтервалі (a,b) задано деяку сукупність n разів неперервно диференційовних і лінійно незалежних функцій $y_1(x),\dots,y_n(x)$. Тоді існує єдине звичайне лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку, для якого ця сукупність функцій буде фундаментальною системою розв'язків на інтервалі (a,b). Відомо, що це рівняння можна записати у вигляді [6]

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & \dots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' & \dots & y_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \dots & y_n^{(n)} \\ y & y' & y'' & \dots & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Детермінант з (8) за допомогою елементарних перетворень можемо звести до відповідного детермінанта нижньої матриці Гессенберга, а його, згідно з (2), можемо замінити парадетермінантом відповідної трикутної матриці.

Спосіб побудови звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння за його відомою фундаментальною системою розв'язків покажемо на прикладах.

Приклад 1. Для фундаментальної системи розв'язків $y_1=x$, $y_2=x^2$, …, $y_n=x^n$, використовуючи (8), одержуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\operatorname{ddet}\Big(\big(m_{ij}(x,y)\big)_{i,j=1}^{n+1}\Big)=0, \tag{9}$$

де елементи $m_{ij}(x,y)$ матриці визначаються формулами

$$m_{ij}(x,y)=\begin{cases} i^{\underline{j-1}}x^{i-j+1}, & j\le i+1,\\ 0, & j>i+1,\\ y^{(j-1)}, & i=n+1,\end{cases}$$

а $b^{\underline{s}}=b(b-1)\dots(b-s+1)$ — зростаючий факторіальний степінь.

Використовуючи (5), диференціальне рівняння (9) зводимо до рівняння, записаного за допомогою парадетермінанта трикутної матриці:

$$\left\langle\begin{matrix} x \\ \frac{x}{2} & x \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n-1} & \dots & x \\ \frac{y}{y'} & \frac{y'}{y''} & \dots & \frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}} & y^{(n)} \end{matrix}\right\rangle_{n+1}=0. \tag{10}$$

За формулою (3) розкладемо парадетермінант трикутної матриці з (10) за елементами останнього рядка:

$$P_n(x)y^{(n)}-P_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+ \\ +(-1)^{n-1}P_1(x)y'+(-1)^nP_0(x)y=0, \tag{11}$$

де коефіцієнти $P_n(x)$, використовуючи (7), можемо записати як $P_n(x)=p_nx^n$, причому

$$p_n=\left\langle\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & 1 \end{matrix}\right\rangle_n=\frac{1}{n!}. \tag{12}$$

Розкладаючи парадетермінант з (12) за елементами останнього рядка, для коефіцієнтів p_n одержуємо лінійне рекурентне рівняння

$$p_n=\frac{1}{1!}\,p_{n-1}-\frac{1}{2!}\,p_{n-2}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,p_0 \tag{13}$$

з початковою умовою $p_0=1$.

Приклад 2. Для фундаментальної системи розв'язків $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, …, $y_n=e^{k_nx}$, де числа $k_1,\dots,k_n$ — різні та відмінні від нуля, з (8) після очевидних перетворень одержуємо диференціальне рівняння з детермінантом нижньої матриці Гессенберга у лівій частині:

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k_2 & k_2(k_2-k_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & k_n(k_n-k_1) & \dots & k_n\prod\limits_{s=1}^{n-1}(k_n-k_s) \\ 1 & D_1(y) & D_2(y) & \dots & D_n(y) \end{vmatrix}=0,$$

де $D_0(y)=y$, $D_1(y)=y'$, $D_2(y)=S_1^0y''-S_1^1y'$,

$$D_n(y)=S_n^0y^{(n)}-S_n^1y^{(n-1)}+\dots+ \\ +(-1)^{n-1}S_{n-1}^{n-1}y', \tag{14}$$

S_m^p — сума всіх можливих добутків чисел k_1, k_2, …, k_p, взятих у кількості m (наприклад, $S_4^3=k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_2k_3k_4$); $S_m^0\equiv 1$.

Отримане диференціальне рівняння, згідно з (5), можемо записати через параперманент трикутної матриці у лівій частині, тобто

$$\left\langle\begin{matrix} \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2-k_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{1}{k_n} & \frac{1}{k_n-k_1} & \dots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \\ \frac{D_0(y)}{D_1(y)} & \frac{D_1(y)}{D_2(y)} & \dots & \frac{D_{n-1}(y)}{D_n(y)} & D_n(y) \end{matrix}\right\rangle_{n+1}=0. \tag{15}$$

За формулою (3) розкладемо парадетермінант з (15) за елементами останнього рядка:

$$q_nD_n(y)-q_{n-1}D_{n-1}(y)+\dots+ \\ +(-1)^{n-1}q_1D_1(y)+(-1)^nq_0D_0(y)=0,$$

де $q_0 = 1$,

$$q_n = \left\langle \begin{array}{cccc} \frac{1}{k_1} & & & \\ \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2-k_1} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{k_n} & \frac{1}{k_n-k_1} & \cdots & \frac{1}{k_n-k_{n-1}} \end{array} \right\rangle_n. \qquad (16)$$

Розкладаючи парадетермінант з (16) за елементами останнього рядка матриці, для знаходження коефіцієнтів q_n одержуємо лінійне рекурентне рівняння

$$q_n = \frac{q_{n-1}}{k_n - k_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{(k_n - k_{n-1})(k_n - k_{n-2})} + \ldots + \\ + \frac{(-1)^{n+1} q_0}{k_n (k_n - k_{n-1})(k_n - k_{n-2}) \ldots (k_n - k_1)}$$

з початковою умовою $q_0 = 1$.

Приклад 3. Для фундаментальної системи розв'язків $y_1 = xe^x$, $y_2 = x^2 e^x, \ldots, y_n = x^n e^x$ одержуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\mathrm{ddet}\Big(\big(s_{ij}(x,y) \big)_{i,j=1}^{n+1} \Big) = 0, \qquad (17)$$

де

$$s_{ij}(x,y) = \begin{cases} i^{\underline{j-1}} x^{i-j+1}, & j \le i+1, \\ 0, & j > i+1, \\ \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k C_{j-1}^k y^{(j-1-k)}, & i = n+1, \end{cases}$$

а C_{j-1}^k — біноміальні коефіцієнти.

Використовуючи (5), отримане диференціальне рівняння зводимо до рівняння, записаного за допомогою парадетермінанта трикутної матриці:

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} x & & & & \\ \frac{x}{2} & x & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n-1} & \cdots & x & \\ \frac{B_0(y)}{B_1(y)} & \frac{B_1(y)}{B_2(y)} & \cdots & \frac{B_{n-1}(y)}{B_n(y)} & B_n(y) \end{array} \right\rangle_{n+1} = 0,$$

де $B_n(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{(n-k)}$.

Розкладаючи останній парадетермінант за елементами $n+1$ рядка, одержуємо рівняння

$$P_n(x) B_n(y) - P_{n-1}(x) B_{n-1}(y) + \ldots + \\ + (-1)^n P_0(x) B_0(y) = 0,$$

у якому, згідно з (7), $P_j(x) = \frac{x^j}{j!}$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Список літератури

1. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. — Івано-Франківськ : Сімик, 2010. — 508 с.
2. Заторський Р. А. Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць / Р. А. Заторський // Математичні студії. — 2002. — Т. 17, № 1. — С. 3–17.
3. Заторський Р. А. Про зв'язок детермінантів із парадетермінантами / Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський // Математичні студії. — 2006. — Т. 25, № 1. — С. 97–102.
4. Stoer J. Introduction to Numerical Analysis / J. Stoer, R. Bulirsch. — Berlin, New York : Springer, 2002. — 744 p.
5. Заторський Р. А. Дослідження функцій матриць Хессенберга / Р. А. Заторський // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 49–55.
6. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. — К. : Либідь, 2006. — 600 с.

T. Goy, R. Zatorsky

USING TRIANGULAR MATRICES FOR CONSTRUCTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE KNOWN FUNDAMENTAL SYSTEM OF SOLUTIONS

Using triangular matrices, we propose an algorithm for construction of linear homogeneous ordinary differential equations for a given fundamental system of solutions.

Keywords: triangular matrix, paradeterminant of triangular matrix, Hessenberg's matrix, recurrent equation, fundamental system of solutions.

Матеріал надійшов 29.10.2014