УДК 517.589, 517.926.4
DOI 10.17223/19988621/40/2

Т.П. Гой

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ПОСТРОЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ВОЗРАСТАЮЩИХ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Изучаются неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные в виде степенных рядов с использованием возрастающих и центральных факториальных степеней. Установлены некоторые свойства этих функций, приведены их графики. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

Ключевые слова: *возрастающая факториальная степень*, *центральная факториальная степень*, *интегралы Френеля*, *обобщенная гипергеометрическая функция*, *задача Коши.*

Математические модели многих процессов и явлений часто приводят к задачам, точные решения которых классическими методами получить невозможно. Увеличение количества неэлементарных функций приводит к расширению круга задач, которые могут быть решены в замкнутом виде. При этом особое внимание уделяется исследованию новых функций с целью их использования для решения сложных теоретических и практических задач.

Тригонометрические функции $\cos x$, $\sin x$ задаются как степенные ряды

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

определенные с помощью факториалов (убывающих факториальных степеней). Заменив в этих рядах убывающие факториальные степени соответствующими возрастающими факториальными степенями, авторы [1] изучили новые неэлементарные функции действительной переменной $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$. Аналогично, в [2, 3] представлено исследование функций действительной переменной $\operatorname{Cosc} x$, $\operatorname{Sinc} x$, построенных с помощью центральных факториальных степеней. Показано, в частности, что новые функции являются решениями обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго (функции $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$) и третьего (функции $\operatorname{Cosc} x$, $\operatorname{Sinc} x$) порядка с полиномиальными коэффициентами.

В [4] рассмотрены неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные в виде степенных рядов с использованием возрастающих факториальных степеней. Автором [5–8] изучаются некоторые другие подобного рода функции действительного и комплексного переменного.

1. Факториальные степени

Для произвольных чисел $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *факториальной степенью* m с шагом $k \in \mathbf{R}$ называют выражение [9]

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)(x+2k)\cdot\ldots\cdot\left(x+(m-1)k\right).$$

Факториальную степень называют *возрастающей*, если $k>0$, и *убывающей*, если $k<0$. В случае $k=0$ имеем обыкновенную степень, т.е. $x^{m\{0\}}=x^m$. По умолчанию, $x^{0\{k\}}=1$. Возрастающую факториальную степень m с шагом 1 и убывающую факториальную степень m с шагом (-1) будем обозначать через $x^{\overline{m}}$ и $x^{\underline{m}}$ соответственно, т.е.

$$x^{\overline{m}} \equiv x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} \equiv x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, что $n!=1^{\overline{n}}=n^{\underline{n}}$.

Основные свойства возрастающих и убывающих факториальных степеней выражаются с помощью формул

$$\overline{\Delta}\, x^{\overline{m}} = mx^{\overline{m-1}}, \qquad \Delta\, x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}},$$

где $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ – разность функции $f(x)$, а $\overline{\Delta} f(x)=f(x)-f(x-1)$ – опаздывающая разность этой функции.

Комбинаторный закон двойственности возрастающих и убывающих факториальных степеней выражается с помощью равенств

$$(-m)^{n\{-k\}}=(-1)^n m^{n\{k\}}, \quad (-m)^{n\{k\}}=(-1)^n m^{n\{-k\}}.$$

Для произвольных чисел $x\in\mathbf{R}$ и $m\in\mathbf{N}$ *центральной факториальной степенью* m с шагом $k>0$ называют выражение [10]

$$x^{m[k]} = x\left(x+\frac{mk}{2}-k\right)\left(x+\frac{mk}{2}-2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x-\frac{mk}{2}+k\right),$$

причем $x^{0[k]}=1$. Центральную факториальную степень m с шагом 1 будем обозначать через $x^{[m]}$, например

$$x^{5[1]} \equiv x^{[5]} = \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right),$$

$$x^{6[1]} \equiv x^{[6]} = (x-2)(x-1)\,x^2\,(x+1)(x+2).$$

Для центральных факториальных степеней с шагом 1 имеет место формула

$$\delta\, x^{[m]} = mx^{[m-1]},$$

аналогичная соответственным формулам для возрастающих и убывающих факториальных степеней. Здесь $\delta f(x)=f(x+1/2)-f(x-1/2)$ – центральная разность функции $f(x)$.

Легко показать, что $x^{[m]}=x\left(x+m/2-1\right)^{\underline{m}}$. Другие свойства и некоторые применение факториальных степеней можно найти, например, в [11] – [14].

Отметим, что возрастающим, убывающим и центральным факториальным степеням в комбинаторном анализе часто присуща двойственность: если комбинаторная задача приводит к тождеству с использованием, например, убывающих факториальных степеней, то обычно существует содержательная комбинаторная задача, приводящая к двойственному тождеству с участием возрастающих или центральных факториальных степеней.

2. Неэлементарные функции Cos *x*, Sin *x*, Cosc *x*, Sinc *x*, определенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней

Обозначим через $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cosc}\,x$, $\mathrm{Sinc}\,x$ функции действительного переменного, определенные с помощью степенных рядов [1, 2]:

$$\mathrm{Cos}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}-\frac{x^6}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}+\ldots; \tag{1}$$

$$\mathrm{Sin}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}x^{2n+1}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}-\ldots; \tag{2}$$

$$\mathrm{Cosc}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^{[2n]}}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots; \tag{3}$$

$$\mathrm{Sinc}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{[2n+1]}}x^{2n+1}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}}+\frac{x^5}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 5\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}}-\ldots. \tag{4}$$

Легко убедиться, что

$$\mathrm{Cos}\,x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(4n-1)!}x^{2n},\qquad \mathrm{Sin}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}x^{2n-1}; \tag{5}$$

$$\mathrm{Cosc}\,x=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)!}{(3n-1)!}x^{2n},\qquad \mathrm{Sinc}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n(2n-1)!!}{(6n+1)!!}x^{2n+1}. \tag{6}$$

В [1 – 3] доказано, что

$$\mathrm{Cos}\,x=1+2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\sin\frac{x}{4}C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right); \tag{7}$$

$$\mathrm{Sin}\,x=2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+\sin\frac{x}{4}S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{8}$$

где $C(p)=\int\limits_0^p\cos t^2dt$, $S(p)=\int\limits_0^p\sin t^2dt$ – интегралы Френеля [15], а также установлена связь между функциями $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cosc}\,x$, $\mathrm{Sinc}\,x$ и обобщенной гипергеометрической функцией ${}_1F_2(a_1;\,b_1,b_2;\,z)$ с помощью формул

$$\mathrm{Cos}\,x=1-\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right),\qquad \mathrm{Sin}\,x=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right),$$

$$\mathrm{Cosc}\,x=1-\frac{x^2}{4}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\right),\qquad \mathrm{Sinc}\,x=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};-\frac{x^2}{27}\right).$$

Напомним, что обобщенная гипергеометрическая функция

$${}_sF_q(a_1,\ldots,a_s;\,b_1,\ldots,b_q;\,z)$$

определятся как сумма обобщенного гипергеометрического ряда [16]

$$ {}_sF_q\left(a_1,\ldots,a_s;b_1,\ldots,b_q;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}\cdot\ldots\cdot a_s^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\cdot\ldots\cdot b_q^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!} $$

в области его сходимости, где $a_1^{\overline{n}},\ldots,a_s^{\overline{n}},b_1^{\overline{n}},\ldots,b_q^{\overline{n}}$ – возрастающие факториальные степени с шагом 1.

На рис. 1 – 4 приведены графики функций $\mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Sin}\,x$, $\mathrm{Cosc}\,x$, $\mathrm{Sinc}\,x$. На рис. 1, 2 пунктиром проведены параболы $(y+1)^2=\pm\pi x$ и $y^2=\pm\pi x$ соответственно, а на рис. 3, 4 – соответственно параболы $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\pm\frac{7\pi x}{12}$ и $y^2=\pm\frac{7\pi x}{12}$.

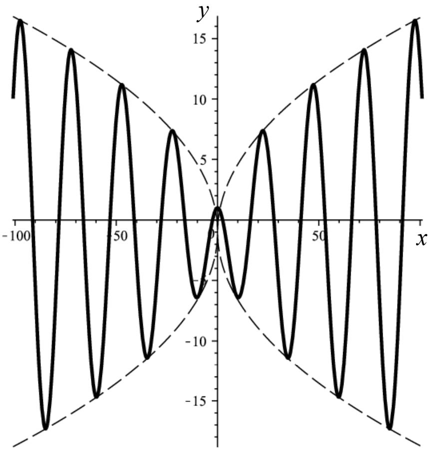

Рис. 1. График функции $y=\mathrm{Cos}\,x$

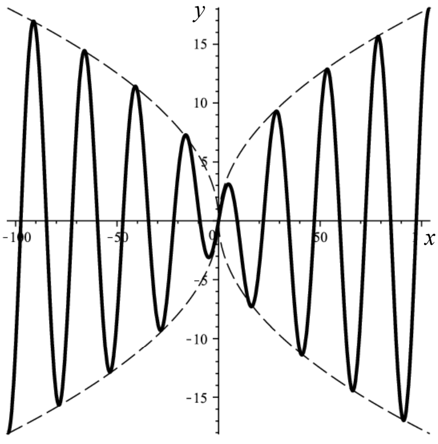

Рис. 2. График функции $y=\mathrm{Sin}\,x$

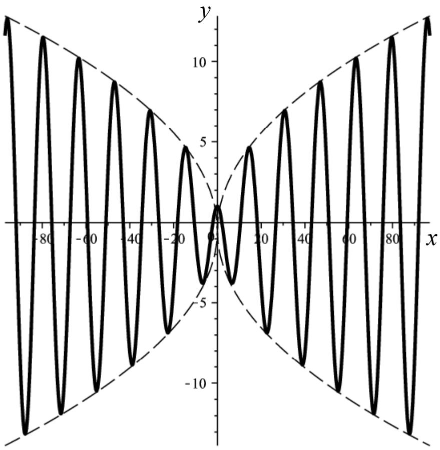

Рис. 3. График функции $y=\mathrm{Cosc}\,x$

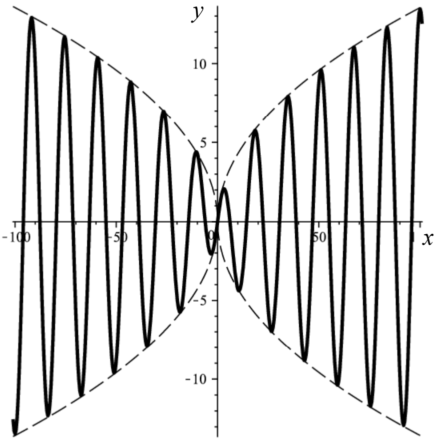

Рис. 4. График функции $y=\mathrm{Sinc}\,x$

3. Неэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные с помощью возрастающих факториальных степеней

Обозначим через $S_1(x)$, $C_1(x)$ функции

$$C_1(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}\, t^2 dt\,; \tag{9}$$

$$S_1(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}\, t^2 dt. \tag{10}$$

Из формул (9), (10), учитывая (5), получаем разложения функций $S_1(x)$, $C_1(x)$ в степенные ряды, абсолютно сходящиеся на всей числовой оси:

$$C_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!(4n+1)} x^{4n+1}\,; \tag{11}$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{(4n-3)!(4n-1)} x^{4n-1}. \tag{12}$$

Графики функций $C_1(x)$, $S_1(x)$ приведены на рис. 5, 6.

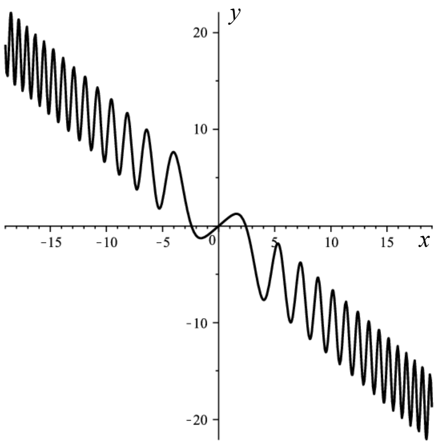

Рис. 5. График функции $y = C_1(x)$

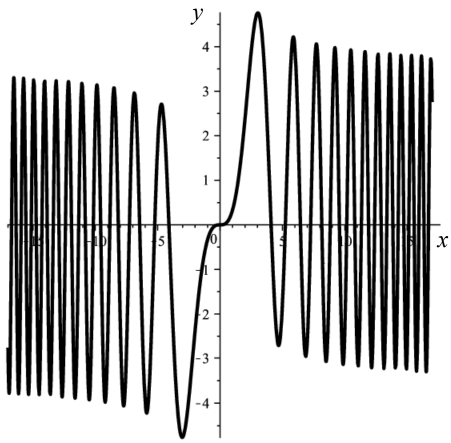

Рис. 6. График функции $y = S_1(x)$

Теорема 1. [4] *Для всех* $x \in \mathbf{R}$ *имеют место тождества*

$$C_1(x) = 4\left(\cos\frac{x^2}{4} C\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x^2}{4} S\left(\frac{x}{2}\right)\right) - x,$$

$$S_1(x) = 4\left(\sin\frac{x^2}{4} C\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\frac{x^2}{4} S\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

где $C(p)$, $S(p)$ *– интегралы Френеля.*

На рис. 7 – 12 представлены графики функций комплексного переменного $C_1(z)$, $S_1(z)$, где $z = x + iy$.

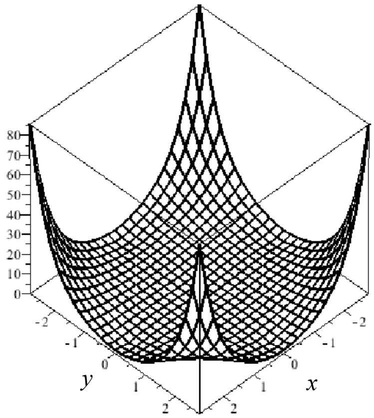

Рис. 7. График функции $|C_1(z)|$

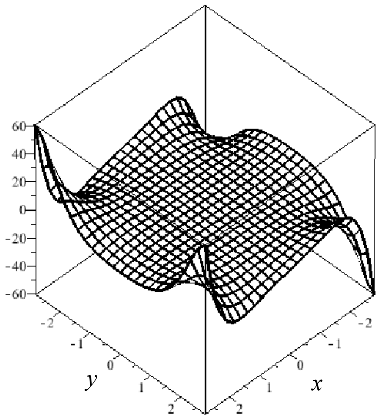

Рис. 8. График функции $\mathrm{Re}\,(C_1(z))$

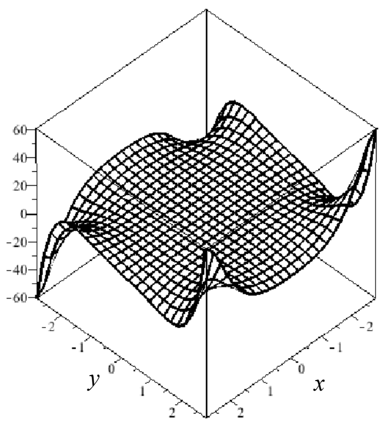

Рис. 9. График функции $\mathrm{Im}\,(C_1(z))$

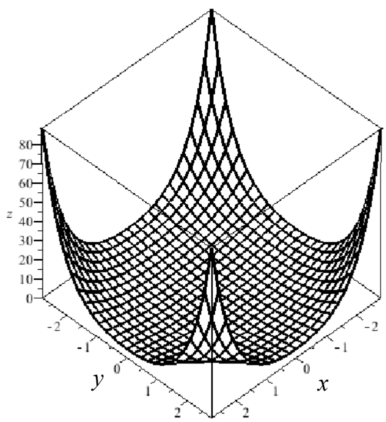

Рис. 10. График функции $|S_1(z)|$

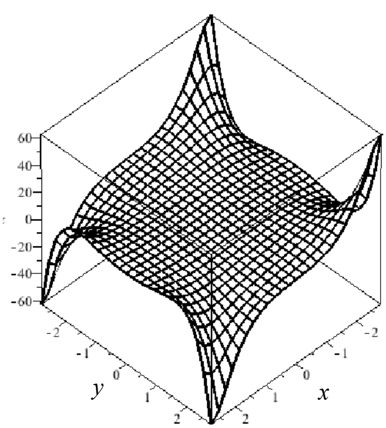

Рис. 11. График функции $\mathrm{Re}\,(S_1(z))$

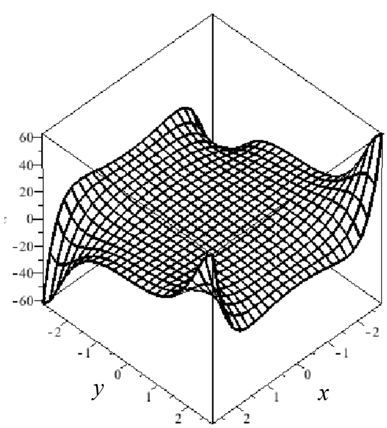

Рис. 12. График функции $\mathrm{Im}\,(S_1(z))$

Покажем, что функции $C_1(x)$ и $S_1(x)$ являются решениями линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Теорема 2. *Функции* $C_1(x)$ и $S_1(x)$ *– решения соответственно таких задач Коши*:

$$4xy'' - 4y' + x^3 y = -x^4 - 4, \quad y(0)=0, \ \ y'(0)=1; \tag{13}$$

$$4xy'' - 4y' + x^3 y = 4x^2, \quad y(0)=0, \ \ y'(0)=0. \tag{14}$$

Доказательство. То, что функции $C_1(x)$ и $S_1(x)$ удовлетворяют начальные условия из (13), (14), следует соответственно из формул (11) и (12). Докажем, что эти функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

Обозначим

$$\alpha(x) \equiv \sin(x^2/4)S(x/2) + \cos(x^2/4)C(x/2),$$

$$\beta(x) \equiv \sin(x^2/4)C(x/2) - \cos(x^2/4)S(x/2).$$

Тогда из формулы (9), учитывая (7), находим производные функции $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = 1 - 2x\beta(x), \quad C_1''(x) = -2\beta(x) - x^2\alpha(x). \tag{15}$$

Теперь дифференциальное уравнение из (13) легко получаем, исключая из (7), (15) выражения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

То, что функция $S_1(x)$ является частным решением дифференциального уравнения из (14), доказывается аналогично, путем исключения выражений $\alpha(x)$, $\beta(x)$ из (8) и следующих формул для производных функции $S_1(x)$:

$$S_1'(x) = 2x\alpha(x), \quad S_1''(x) = x - x^2\beta(x) + 2\alpha(x). \quad \blacksquare$$

4. Нэлементарные функции типа интегралов Френеля, определенные с помощью центральных факториальных степеней

Обозначим через $C_2(x)$ и $S_2(x)$ функции

$$C_2(x) = \int_0^x \mathrm{Cosc}\, t^2 dt; \tag{16}$$

$$S_2(x) = \int_0^x \mathrm{Sinc}\, t^2 dt. \tag{17}$$

Из (16), (17), учитывая формулы (6), получаем следующие разложения функций $C_2(x)$, $S_2(x)$ в степенные ряды:

$$C_2(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3n-1)!(4n+1)} x^{4n+1}; \tag{18}$$

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n (2n)!(3n)!}{n!(6n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}, \tag{19}$$

абсолютно сходящиеся при каждом действительном x.

Графики функций $C_2(x)$ и $S_2(x)$ приведены на рис. 13 и 14.

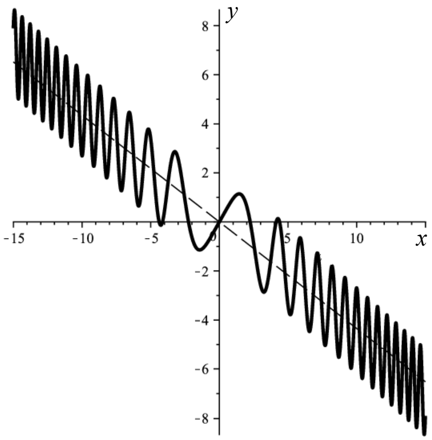

Рис. 13. График функции $y = C_2(x)$

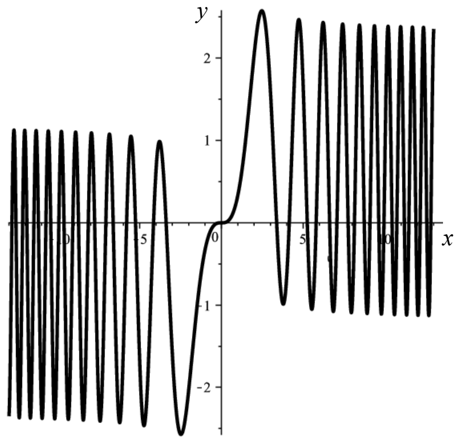

Рис. 14. График функции $y = S_2(x)$

Следующая теорема устанавливает связь между интегральными функциями $C_2(x)$, $S_2(x)$ и обобщенной гипергеометрической функцией ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$.

Теорема 3. *Для всех* $x \in \mathbf{R}$ *имеют место тождества*

$$C_2(x) = x - \frac{x^5}{20} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right); \tag{20}$$

$$S_2(x) = \frac{x^3}{3} \cdot {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Для функции $C_2(x)$, учитывая (18), получаем соотношения

$$C_2(x) = x - \frac{x^5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(3n+2)!(4n+5)} x^{4n} =$$

$$= x - \frac{x^5}{20}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}}{\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n+1}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n+2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{13}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)}\left(-\frac{x^4}{27}\right)^n\right) =$$

$$= x - \frac{x^5}{20} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}} \left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{5}{3}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{9}{4}\right)^{\overline{n}} n!} \left(-\frac{x^4}{27}\right)^n = x - \frac{x^5}{20} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right).$$

Для функции $S_1(x)$, учитывая (19), имеем

$$S_2(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 16^n (2n)!(3n)!}{n!(6n+1)!(4n+3)} x^{4n} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}}{\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{6n-1}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\cdot\frac{13}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{6n+1}{6}\right)\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)}\left(-\frac{x^4}{27}\right)^n =$$

$$= \frac{x^3}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}} 1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{6}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}} n!}\left(-\frac{x^4}{27}\right)^n = \frac{x^3}{3}\cdot {}_2F_3\left(\frac{3}{4},1;\ \frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{4};-\frac{x^4}{27}\right). \quad \blacksquare$$

На рис. 15 – 20 представлены графики функций комплексного переменного $C_2(z)$, $S_2(z)$, где $z = x + iy$.

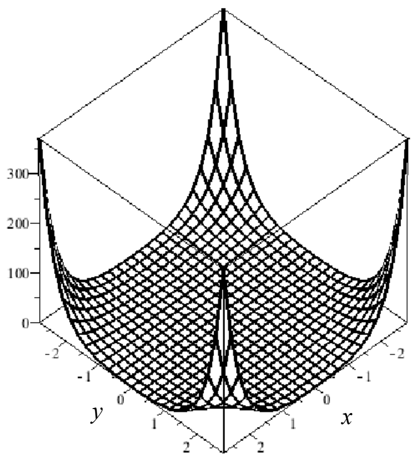

Рис. 15. График функции $|C_2(z)|$

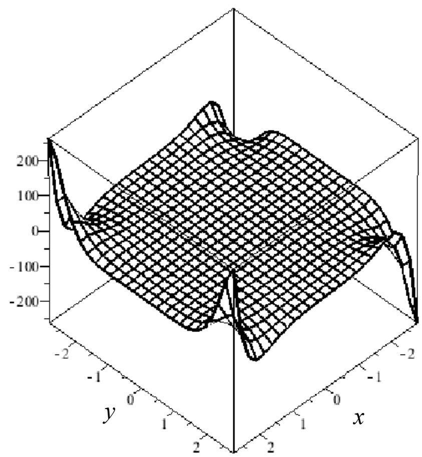

Рис. 16. График функции $\mathrm{Re}\,(C_2(z))$

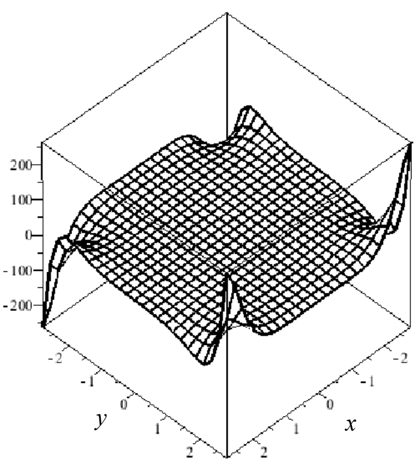

Рис. 17. График функции $\mathrm{Im}\,(C_2(z))$

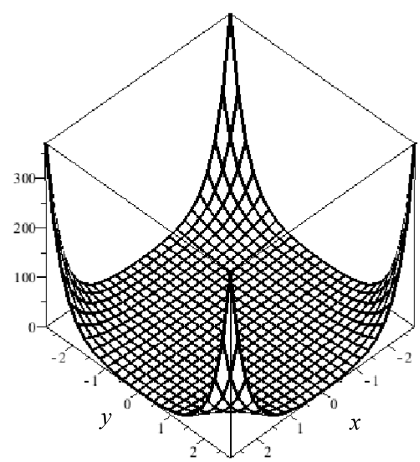

Рис. 18. График функции $|S_2(z)|$

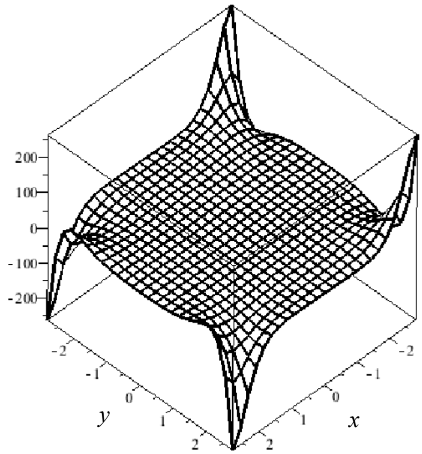

Рис. 19. График функции $\mathrm{Re}\,(S_2(z))$

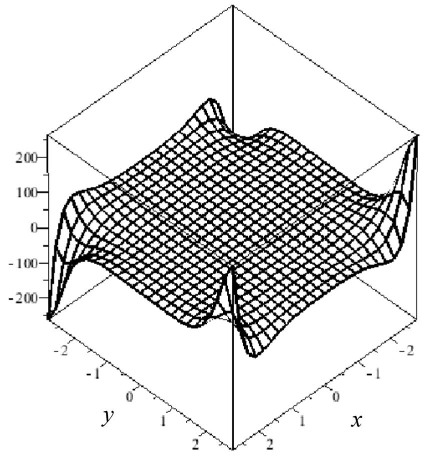

Рис. 20. График функции $\mathrm{Im}\,(S_2(z))$

Покажем, что функции $C_2(x)$, $S_2(x)$ являются решениями задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

Теорема 4. *Функции $C_2(x)$ и $S_2(x)$ – решения соответственно таких задач Коши*:

$$\begin{gathered}27x^3y^{\mathrm{IV}}-135x^2y'''+(16x^5+339)y''-384y'=-384,\\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=0;\end{gathered}\tag{22}$$

$$\begin{gathered}27x^3y^{\mathrm{IV}}-81x^2y'''+(16x^5+177x)y''+(32x^4-192)y'=0,\\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=2.\end{gathered}\tag{23}$$

Доказательство. Из (18) и (19) следует, что функции $C_2(x)$ и $S_2(x)$ удовлетворяют начальные условия из (22), (23). Покажем, что эти функции являются решениями соответственных дифференциальных уравнений.

Обобщенная гипергеометрическая функция ${}_2F_3(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;z)$, через которую в соответствии с (20) выражается функция $C_2(x)$, удовлетворяет обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка [16]

$$\left(\sigma(\sigma+b_1-1)(\sigma+b_2-1)(\sigma+b_3-1)-z(\sigma+a_1)(\sigma+a_2)\right)w(z)=0,$$

где σ – дифференциальный оператор $\sigma=z\dfrac{d}{dz}$. Таким образом, функция

$$w(z)={}_2F_3\left(1,\frac{5}{4};\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{9}{4};z\right)$$

из (20) является решением дифференциального уравнения

$$\left(\sigma\left(\sigma+\frac{1}{3}\right)\left(\sigma+\frac{2}{3}\right)\left(\sigma+\frac{5}{4}\right)-z(\sigma+1)\left(\sigma+\frac{5}{4}\right)\right)w(z)=0,$$

а учитывая, что

$$\sigma^2 = z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}, \quad \sigma^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

$$\sigma^4 = z\frac{d}{dz} + 7z^2\frac{d^2}{dz^2} + 6z^3\frac{d^3}{dz^3} + z^4\frac{d^4}{dz^4},$$

после несложных преобразований убеждаемся, что она удовлетворяет дифференциальное уравнение

$$z^3 w^{\mathrm{IV}} + \frac{33}{4}z^2 w''' + \left(\frac{137}{9}z - z^2\right)w'' + \left(5 - \frac{13}{4}z\right)w' - \frac{5}{4}w = 0. \tag{24}$$

Произведем в (24) замену независимого переменного по формуле $z = -x^4/27$. Тогда

$$w'_z = -\frac{27}{4x^3}w'_x, \qquad w''_z = \frac{729}{16x^7}\left(xw''_x - 3w'_x\right), \qquad w'''_z = -\frac{19683}{64x^{11}}\left(x^2 w'''_x - 9xw''_x + 21w'_x\right),$$

$$w_z^{\mathrm{IV}} = \frac{531441}{256x^{15}}\left(x^3 w_x^{\mathrm{IV}} - 18x^2 w'''_x + 111xw''_x - 231w'_x\right)$$

и, подставляя в (24), получаем, что функция $w(x) = {}_2F_3\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right)$ – частное решение линейного однородного уравнения

$$27x^3 w^{\mathrm{IV}} + 405x^2 w''' + (16x^5 + 1554)w'' + (1386 + 160x^4)w' + 320x^3 w = 0.$$

Наконец, подставляя в последнее уравнение $w(x) = 20x^{-5}(1 - C_2(x))$, после упрощений получаем, что функция $y = C_2(x)$ удовлетворяет дифференциальное уравнение из (22).

Покажем теперь, что функция $S_2(x)$ является решением дифференциального уравнения из (23). Аналогично предыдущему доказывается, что обобщенная гипергеометрическая функция

$$u(z) = {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; z\right)$$

является решением дифференциального уравнения

$$z^3 u^{\mathrm{IV}} + \frac{27}{4}z^2 u''' + \left(\frac{83}{9}z - z^2\right)u'' + \left(\frac{245}{144} - \frac{11}{4}z\right)u' - \frac{3}{4}u = 0,$$

а функция $u(x) = {}_2F_3\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right)$ – решением дифференциального уравнения

$$27x^3 u^{\mathrm{IV}} - 81x^2 u''' + (16x^5 + 177)u'' + (32x^4 - 192)u' = 0.$$

После замены в последнем уравнении $w(x) = 3x^{-3}S_2(x)$ (с учетом (21)), получаем, что функция $S_2(x)$ удовлетворяет уравнения из (23). ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гой Т.П.* Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості // Буковинский мат. журн. 2013. Т. 1. № 1–2. С. 28–33.
2. *Гой Т.П.* Неелементарні функції, породжені центральним факторіальними степенями // Вестник Харьковского нац. университета имени В.Н. Каразина. Серия «Математика, прикладная математика и механика». 2014. № 1133. С. 131–139.
3. *Гой Т.П.* О центральных факториальных степенях и некоторых их применениях // Межвуз. сб. науч. трудов «Математика и математическое образование. Теория и практика». Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2014. Вып. 9. С. 30–35.
4. *Goy T.P.*, *Zatorsky R.A.* New integral functions generated by rising factorial powers // Карпатские мат. публикации. 2013. Т. 5. № 2. С. 217–224.
5. *Goy T.P.*, *Zatorsky R.A.* On a nonelementary function of the Dawson's integral type // Вестник Киевского нац. университета имени Т. Шевченко. Серия «Физико-математические науки». 2014. Вып. 1. С. 15–19.
6. *Гой Т.П.* Інтеграли від функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями // Таврический вестник информатики и математики. 2014. Т. 24. № 1. С. 14–22.
7. *Гой Т.П.* Нові функції, означені при допомозі факторіальних степенів // Математическое и компьютерное моделирование. Серия «Физико-математические науки». 2014. Вып. 11. С. 18–29.
8. *Гой Т.П.* О дифференциальных уравнениях функций, определенных с помощью возрастающих и центральных факториалов // Материалы Междунар. конф. «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях». Ч. 1. Воронеж: ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. С. 58–61.
9. *Jordan C.* Calculus of Finite Differences. N.Y.: Chelsea Publishing, 1939.
10. *Steffensen J.F.* On the definition of the central factorial // J. Inst. Actuaries. 1933. V. 64. No. 2. P. 165–168.
11. *Грэхем Р.*, *Кнут Д.*, *Паташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. М.: Мир, 1998. 703 с.
12. *Заторський Р.А.*, *Малярчук О.Р.* Факторіальні степені та трикутні матриці // Карпатские мат. публикации. 2009. Т.1. № 2. С. 217–224.
13. *Comtet L.* Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reider Publishing, 1974.
14. *Roman S.* The Umbral Calculus. Academic Press, 1984.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицями / под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
16. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука. 1973. 294 с.

Статья поступила 12.09.2015 г.

Goy T.P. SPECIAL FUNCTIONS GENERATED BY RISING AND CENTRAL FACTORIAL POWERS

DOI 10.17223/19988621/40/2

Replacing in the well-known series $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ falling factorial powers ($m!=m^{\underline{m}}$) by rising and central factorial powers ($m^{\overline{m}}$ and $m^{[m]}$ respectively), we obtain real functions $\mathrm{Cos}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}$, $\mathrm{Sin}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}$, $\mathrm{Cosc}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}$, and $\mathrm{Sinc}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}}$.

In this paper, we consider the non-elementary Fresnel-type integral functions $C_1(x)=\int_0^x \mathrm{Cos}\,t^2dt$, $S_1(x)=\int_0^x \mathrm{Sin}\,t^2dt$, $C_2(x)=\int_0^x \mathrm{Cosc}\,t^2dt$, $S_2(x)=\int_0^x \mathrm{Sinc}\,t^2dt$. We prove the following formulas:

$$C_1(x)=4\left(\cos\frac{x^2}{4}C\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x^2}{4}S\left(\frac{x}{2}\right)\right)-x,\quad S_1(x)=4\left(\sin\frac{x^2}{4}C\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x^2}{4}S\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

$$C_2(x)=x-\frac{x^5}{20}\,{}_2F_3\left(1,\frac{5}{4};\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{9}{4};-\frac{x^4}{27}\right),\quad S_2(x)=\frac{x^3}{3}\,{}_2F_3\left(\frac{3}{4},1;\frac{5}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{4};-\frac{x^4}{27}\right),$$

where $C(p)$ and $S(p)$ are Fresnel integrals and ${}_2F_3(a_1,a_2;b_1,b_2,b_3;z)$ is a generalized hypergeometric function.

We also show that functions $C_1(x)$, $S_1(x)$ are solutions of the ordinary linear second-order differential equations $4xy''-4y'+x^3y=-x^4-4$ and $4xy''-4y'+x^3y=4x^2$, respectively, and the functions $C_2(x)$, $S_2(x)$ are solutions of the ordinary linear fourth-order differential equations $27x^3y^{\mathrm{IV}}-135x^2y'''+(16x^5+339)y''-384y'=-384$ and $27x^3y^{\mathrm{IV}}-81x^2y'''+(16x^5+177x)y''+$ $+(32x^4-192)y'=0$, respectively.

Keywords: rising factorial power, central factorial power, Fresnel integrals, generalized hypergeometric function, Cauchy problem.

GOY Taras Petrovych (Candidate of Physics and Mathematics, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine)

E-mail: tarasgoy@yahoo.com

REFERENCES

1. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2013) New functions generated by rising factorial powers and their properties. *Bukovyna Math. Journal*. 1(1–2). pp. 28–33. (In Ukrainian)
2. Goy T.P. (2014) Non-elementary functions generated by central factorial powers. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematics*, *Applied Mathematics and Mechanics*. 1133. pp. 131–139. (In Ukrainian)
3. Goy T.P. (2014) O tsentral'nykh faktorial'nykh stepenyakh i nekotorykh ikh primeneniyakh [On central factorial powers and some of their applications]. In: *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice]. Yaroslavl: YSTU. 9. pp. 30–35.
4. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2013) New integral functions generated by rising factorial powers. *Carpathian Math. Publ*. 5(2). pp. 217–224. DOI: 10.15330/cmp.5.2.217-224.
5. Goy T.P., Zatorsky R.A. (2014) On a nonelementary function of the Dawson's integral type. *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series: Physics and Mathematics*. 1. pp. 15–19.
6. Goy T.P. (2014) Integrals of functions generated by rising factorial powers. *Taurida Journal of Computer Science and Mathematics*. 24(1). pp. 14–22. (in Ukrainian)
7. Goy T.P. (2014) New functions defined by factorial powers. *Mathematical and Computer Modelling. Series: Physical and mathematical sciences*. 11. pp. 18–29. (in Ukrainian)
8. Goy T.P. (2014) O differentsial'nykh uravneniyakh funktsiy, opredelennykh s pomoshch'yu vozrastayushchikh i tsentral'nykh faktorialov [On differential equations of functions defined by rising and central factorials]. In: *Proc. of the International Conference "Sovremenne problemy analiza dinamicheskikh sistem. Prilozheniya v tekhnike i tekhnologiyakh"* [Proc. Intern. Conf. "Modern Problems of the Analysis of Dynamic Systems. Appendices in Equipment Technologies"]. Pt 1. Voronezh: VSFA. pp. 58–61. DOI: 10.12737/4702.

9. Jordan C. (1939) *Calculus of Finite Differences*. N.Y.: Chelsea Publishing.
10. Steffensen J.F. (1933) On the definition of the central factorial. *J. Inst. Actuaries*. 64(2). pp. 165–168.
11. Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. (1994) *Concrete Mathematics*. *A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley.
12. Zatorsky R.A., Malarchuk A.R. (2009) Factorial powers and triangular matrices. *Carpathian Math. Publ*. 1(2). pp. 161–171. (In Ukrainian)
13. Comtet L. (1974) *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. D. Reider Publishing.
14. Roman S. (1984) *The Umbral Calculus*. Academic Press.
15. Abramowitz M., Stegun I.A. (eds.) (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas*, *Graphs*, *and Mathematical Tables*. Dover Publication.
16. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions. Vol. 1*. McGraw-Hill.