Математика

УДК 519.538

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ФАКТОРІАЛЬНИЙ СТЕПІНЬ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Р. А. Заторський, Т. П. Гой
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: romazz@rambler.ru, tarasgoy@yahoo.com

Розглядаються тотожності з узагальненими факторіальними степенями, зокрема узагальнено поліноміальну формулу на довільну скінченну кількість доданків. Встановлений зв'язок деяких неелементарних функцій дійсної змінної, породжених при допомозі зростаючих факторіальних степенів, з узагальненою гіпергеометричною функцією.

Ключові слова: *трикутна матриця, парадетермінат, параперманент, факторіальний степінь, многочлен розбиттів, узагальнена гіпергеометрична функція.*

Вступ

Спадні та зростаючі факторіальні степені, на відміну від біноміальних коефіцієнтів та інших комбінаторних формул, допускають узагальнення не тільки на множину цілих, але й також дійсних і навіть комплексних чисел. Узагальнення факторіальних степенів дозволяють уніфікувати дослідження в деяких розділах комбінаторного аналізу, виділити клас факторіальних числових трикутників, до якого належать трикутники Паскаля, Стірлінга першого і другого роду, трикутник Ла та багато нових числових трикутників, для яких поки що не знайдено комбінаторних інтерпретацій. При цьому виявляються загальні закономірності, притаманні всім факторіальним числовим трикутникам.

Введення поняття факторіального степеня з деяким кроком часто дозволяє двоїсті комбінаторні тотожності та формули для спадних і зростаючих факторіальних степенів замінити однією загальною формулою. Зокрема, такий підхід дозволяє узагальнити тотожності Вандермонда та Нерлунда [1].

1. Попередні означення та твердження

Парадетермінантом і *параперманентом* трикутної матриці n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \qquad (1)$$

називають відповідно функції

$$\operatorname{ddet}(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}(-1)^{n-r}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,\,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$\operatorname{pper}(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,\,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де $\{a_{ij}\}=\prod_{k=j}^{i}a_{ik}$, а підсумовування в обох формулах проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1+\ldots+p_r=n$.

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (1) зіставимо ріг $R_{ij}(A)$ – трикутну матрицю $(i-j+1)$-го порядку з цим елементом у лівому нижньому куті. Очевидно, що у ріг $R_{ij}(A)$ входять тільки ті елементи a_{rs} матриці (1), для яких $j\le s\le r\le i$.

Парафункції (парадетермінант і параперманент) трикутної матриці A можна розкласти за елементами їхніх останніх рядків [2]:

$$\operatorname{ddet}(A)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\{a_{ns}\}\operatorname{ddet}(R_{s-1,1}),\quad \operatorname{pper}(A)=\sum_{s=1}^{n}\{a_{ns}\}\operatorname{ddet}(R_{s-1,1}),$$

де $\operatorname{ddet}(R_{01})=\operatorname{pper}(R_{01})=1$.

Твердження 1. *Для парафункцій трикутної матриці похилої структури m-го порядку*

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ \vdots & \cdots & & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & & & \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}_m \qquad (2)$$

справджуються формули [3]

$$\operatorname{ddet}(B)=$$

$$=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n-n}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}a_1^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}a_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{pper}(B)=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}a_1^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}a_2^{\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n},$$

де $\lambda_1,...,\lambda_n$ *– цілі невід'ємні числа.*

2. Узагальнення поліноміальної формули

Для довільних чисел $x \in \mathbf{R}$ і $n \in \mathbf{N}$ *факторіальним степенем* $n \in \mathbf{N}_0$ з кроком $k \in \mathbf{R}$ називають вираз

$$x^{n\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot\left(x+(n-1)k\right), & \text{якщо } n \neq 0, \\ 1, \quad \text{якщо } n = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то маємо звичайний степінь, бо $x^{n\{0\}} = x^n$.

Зростаючий факторіальний степінь *n* з кроком 1 і спадний факторіальний степінь *n* з кроком (– 1) позначатимемо через $x^{\overline{n}}$ і $x^{\underline{n}}$, тобто

$$x^{\overline{n}} = x^{n\{1\}} = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1),$$
$$x^{\underline{n}} = x^{n\{-1\}} = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1).$$

Зростаючі та спадні факторіальні степені $x^{\overline{n}}$, $x^{\underline{n}}$ тісно пов'язані зі звичайною факторіальною функцією, адже $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Комбінаторний закон двоїстості факторіальних степенів виражається рівностями

$$(-m)^{n\{-k\}} = (-m)(-m-k)\cdot\ldots\cdot\left(-m-(n-1)k\right) = (-1)^n m^{n\{k\}},$$
$$(-m)^{n\{k\}} = (-m)(-m+k)\cdot\ldots\cdot\left(-m+(n-1)k\right) = (-1)^n m^{n\{-k\}}.$$

Наведемо без доведення ще два твердження, які ілюструють двоїстість факторіальних степенів.

Твердження 2. *Справджуються тотожності*

$$\frac{m^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{\overline{n-i}} m^{\underline{i}}}{(n-i)!\,i!}, \qquad \frac{m^{\overline{n}}}{n!} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i+1} \frac{m^{\underline{n-i}} m^{\overline{i}}}{(n-i)!\,i!}.$$

Твердження 3. *Для довільних параметрів x, y та довільного k справджується тотожність* [1]

$$(x+y)^{n\{k\}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{i\{k\}} y^{(n-i)\{k\}}, \tag{4}$$

де $\binom{n}{i}$ *– біноміальні коефіцієнти.*

Якщо у (4) замість k підставити – 1, 1, 0, то відповідно одержимо рівності:

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}} \quad \text{(тотожність Вандермонда)},$$

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\overline{i}} y^{\overline{n-i}} \quad \text{(тотожність Нерлунда)},$$

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} \quad \text{(біноміальна тотожність).}$$

Покажемо, що формулу (4) можна узагальнити на довільну скінченну кількість доданків.

Теорема 1. *Нехай* $x_i \in \mathbf{C}, i=1,2,...,m,$ $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{R}$ – *деякі числа. Тоді*

$$(x_1+...+x_m)^{n\{k\}}=\sum_{\lambda_1+...+\lambda_m=n}\frac{n!}{\lambda_1!\cdot...\cdot\lambda_m!}x_1^{\lambda_1\{k\}}\cdot...\cdot x_m^{\lambda_m\{k\}}. \tag{5}$$

Доведення. Якщо $n=1$, то тотожність (5), очевидно, справджується.

Доведемо виконання індукційного кроку:

$$(x_1+x_2+...+x_m)^{(n+1)\{k\}}=(x_1+x_2+...+x_m)^{n\{k\}}(x_1+x_2+...+x_n+nk)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(x_i+\lambda_i k)\sum_{\lambda_1+...+\lambda_m=n}\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot...\cdot\lambda_m!}x_1^{\lambda_1\{k\}}x_2^{\lambda_2\{k\}}\cdot...\cdot x_m^{\lambda_m\{k\}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda_1+...+\lambda_m=n}\frac{n!}{\lambda_1!\cdot...\cdot\lambda_i!\cdot...\cdot\lambda_m!}\times$$

$$\times x_1^{\lambda_1\{k\}}\cdot...\cdot x_{i-1}^{\lambda_{i-1}\{k\}}x_i^{(\lambda_i+1)\{k\}}x_{i+1}^{\lambda_{i+1}\{k\}}\cdot...\cdot x_m^{\lambda_m\{k\}}.$$

Нехай $\lambda_r=\lambda_r^*$, $r=1,2,...,i-1,i+1,...,m;$ $\lambda_i+1=\lambda_i^*$. Тоді, очевидно, $\lambda_1^*+\lambda_2^*+...+\lambda_m^*=n+1$ і останні суми набувають вигляду

$$\sum_{\lambda_1^*+...+\lambda_m^*=n+1}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{n!\lambda_i^*}{\lambda_1^*!\lambda_2^*!\cdot...\cdot\lambda_m^*!}\right)x_1^{\lambda_1^*\{k\}}x_2^{\lambda_2^*\{k\}}\cdot...\cdot x_m^{\lambda_m^*\{k\}}=$$

$$=\sum_{\lambda_1^*+...+\lambda_m^*=n+1}\frac{(n+1)!\lambda_i^*}{\lambda_1^*!\lambda_2^*!\cdot...\cdot\lambda_m^*!}x_1^{\lambda_1^*\{k\}}x_2^{\lambda_2^*\{k\}}\cdot...\cdot x_m^{\lambda_m^*\{k\}}.$$

Теорему доведено.

3. Парадетермінанти і многочлени розбиттів

Введені Е. Беллом у [4] многочлени розбиттів мають численні застосування в дискретній математиці: при диференціюванні складених функцій, у теорії чисел, алгебрі тощо [5, 6]. Вони зазвичай пов’язані з лінійними рекурентними співвідношеннями, які дозволяють ці многочлени ефективно генерувати. Проте рекурентні співвідношення та відповідні їм многочлени розбиттів часто досліджувалися без видимого взаємозв’язку. З появою апарату числення трикутних матриць [7] з’явилася можливість побудови бієктивних взаємозв’язків між парафункціями трикутних матриць, многочленами розбиттів і лінійними рекурентними співвідношеннями. Також стало можливим уніфікувати підхід до вивчення всіх многочленів розбиттів, ввести поняття оберненого многочлена розбиттів тощо.

У цьому розділі досліджуємо многочлени розбиттів, пов'язані з узагальненими факторіальними степенями.

Підставимо у матрицю B з (2)

$$a_i = \left(a + (i-1)r\right) \cdot \frac{x_i}{x_{i-1}}, \ i = 1, 2, ..., n,$$

де $x_0 = 1$. Тоді

$$B = \begin{pmatrix} ax_1 & & & & & \\ (a+r)\frac{x_2}{x_1} & ax_1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \left(a+(n-1)r\right)\frac{x_n}{x_{n-1}} & \left(a+(n-2)r\right)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & & & \\ 0 & \left(a+(n-1)r\right)\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & ax_1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \left(a+(n-2)r\right)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & ax_1 \end{pmatrix}_m \quad (6)$$

і з (3) маємо:

$$\operatorname{ddet}(B) = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + ... + n\lambda_n = m} (-1)^{\lambda_1 + ... + \lambda_n - n} \frac{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)!}{\lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!} \times$$

$$\times (ax_1)^{\lambda_1 + ... + \lambda_n} \left((a+r)\frac{x_2}{x_1}\right)^{\lambda_2 + ... + \lambda_n} \cdot ... \cdot \left(\left(a+(n-1)r\right)\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^{\lambda_n} =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + ... + n\lambda_n = m} (-1)^{\lambda_1 + ... + \lambda_n - n} \frac{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)!}{\lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!} \times$$

$$\times \left(a^{1\{r\}}\right)^{\lambda_1} \cdot ... \cdot \left(a^{n\{r\}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n},$$

де $a^{i\{r\}}$ – факторіальний степінь з кроком r.

Аналогічно одержуємо формулу для параперманента матриці (6).

Таким чином, доведено таке твердження:

Теорема 2. *Для трикутної матриці* (6) *і параметрів a, r з деякого числового поля K справджуються тотожності*

$$\operatorname{ddet}(B) = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} \frac{(-1)^{n-k} k!}{\lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!} \left(a^{1\{r\}}\right)^{\lambda_1} \cdot ... \cdot \left(a^{n\{r\}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad (7)$$

$$\operatorname{pper}(B) = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = m} \frac{k!}{\lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!} \left(a^{1\{r\}}\right)^{\lambda_1} \cdot ... \cdot \left(a^{n\{r\}}\right)^{\lambda_n} x_1^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n}, \quad (8)$$

де $k = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Знайдемо рекурентні співвідношення, які задовольняють многочлени розбиттів (7), (8). Позначимо

$$\operatorname{ddet}(B) = d_{nm}, \ \operatorname{pper}(B) = p_{nm}$$

і розкладемо парафункції трикутної матриці B з (6) за елементами її останнього рядка:

$$d_{nm}=a^{1\{r\}}x_1d_{n,m-1}-a^{2\{r\}}x_2d_{n,m-2}+\ldots+(-1)^{n-1}a^{n\{r\}}x_nd_{n,m-n},$$

$$p_{nm}=a^{1\{r\}}x_1p_{n,m-1}+a^{2\{r\}}x_2p_{n,m-2}+\ldots+a^{n\{r\}}x_np_{n,m-n}.$$

Якщо $m=n$, то матриця B з (6) має вигляд

$$B=\left(\left(a+r(i-j)\right)\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n},$$

а підсумовування у правих частинах рівностей (7), (8) відбувається за всіма невпорядкованими розбиттями $\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n$.

Якщо, наприклад, $a=r=1$, то матриця (6) має вигляд

$$B=\begin{pmatrix} x_1 & & & & & & \\ 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & & & & \\ \cdots & \cdots & & & & & \\ n\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & x_1 & & & \\ 0 & n\frac{x_n}{x_{n-1}} & \cdots & 2\frac{x_2}{x_1} & x_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & n\frac{x_n}{x_{n-1}} & (n-1)\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} & \cdots & x_1 \end{pmatrix}_m,$$

парафункції якої знаходимо за формулами

$$\mathrm{ddet}(B)=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}(-1)^{n-k}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(n!)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n},$$

$$\mathrm{pper}(B)=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=m}\frac{k!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(n!)^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

4. Узагальнені факторіальні степені та числові трикутники

У різних розділах математики важливу роль відіграють спеціальні комбінаторні числа та комбінаторні многочлени. Серед них найбільш відомими є біноміальні многочлени та їх коефіцієнти, числа Стірлінга першого і другого роду, числа та многочлени Ейлера, ортогональні многочлени тощо.

У всіх перелічених випадках послідовність многочленів

$$\begin{aligned}&a_{00}\\&a_{10}+a_{11}t,\\&a_{20}+a_{21}t+a_{22}t^2,\\&\quad\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\&a_{n0}+a_{n1}t+a_{n2}t^2+\ldots+a_{nn}t^n,\end{aligned}$$

де $a_{ii} \neq 0,\ i = 0,1,...,$ задається трикутною таблицею його коефіцієнтів

$$\begin{array}{lllll} a_{00} & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & ... & ... & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{array}$$

У [1] запропоновано загальний підхід до вивчення властивостей числових трикутників.

Оскільки многочлени

$$(x+r)^{i\{s\}},\ i = 0,1,...,n,$$

за змінною x утворюють базис у просторі многочленів степеня не вищого від n, то многочлени $(x+t)^{i\{s\}},\ i = 0,1,...,n,$ можна подати у вигляді їхньої лінійної комбінації. При цьому отримуємо тотожності

$$(x+t)^{0\{k\}} = a_{00}(x+r)^{0\{s\}},$$

$$(x+t)^{1\{k\}} = a_{10}(x+r)^{0\{s\}} + a_{11}(x+r)^{1\{s\}},$$

$$(x+t)^{2\{k\}} = a_{20}(x+r)^{0\{s\}} + a_{21}(x+r)^{1\{s\}} + a_{22}(x+r)^{2\{s\}},$$

$$(x+t)^{3\{k\}} = a_{30}(x+r)^{0\{s\}} + a_{31}(x+r)^{1\{s\}} + a_{32}(x+r)^{2\{s\}} + a_{33}(x+r)^{3\{s\}},$$

$$... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ... \ ...$$

Таким чином, одержуємо клас числових трикутників

$$\begin{array}{llllll} a_{00} & & & & & \\ a_{10} & a_{11} & & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}, \end{array}$$

які називають факторіальними.

Теорема 3. *Коефіцієнти тотожностей*

$$(x+t)^{i\{k\}} = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}},\ i = 0,1,2,..., \tag{9}$$

задовольняють рекурентне рівняння

$$a_{ij} = a_{i-1,j-1} + \left(t - r + (i-1)k - js\right)a_{i-1,j},$$

де $a_{ii} = 1,\ a_{i,-1} = 0,\ i = 0,1,...,n.$

Доведення. Для $i = 0$ маємо

$$(x+t)^{0\{k\}} \equiv a_{00}(x+r)^{0\{s\}}.$$

Доведемо тепер виконання індукційного кроку:

$$\sum_{j=0}^{i} a_{ij}(x+r)^{j\{s\}} = \sum_{j=0}^{i}\Big(a_{i-1,j-1}+\big(t-r+(i-1)k-js\big)a_{i-1,j}\Big)(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$=\sum_{j=1}^{i} a_{i-1,j-1}(x+r)^{j\{s\}} + \sum_{j=0}^{i-1}\big(t-r+(i-1)k-js\big)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$=\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{(j+1)\{s\}} + \sum_{j=0}^{i-1}\big(t-r+(i-1)k-js\big)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$=\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}}(x+r+js) + \sum_{j=0}^{i-1}\big(t-r+(i-1)k-js\big)a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$=\big(x+t+(i-1)k\big)\sum_{j=0}^{i-1} a_{i-1,j}(x+r)^{j\{s\}} =$$

$$=\big(x+t+(i-1)k\big)(x+t)^{(i-1)\{s\}} = (x+t)^{i\{s\}}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що у випадку $k=r=s=0,\, t=1$ з (12) одержуємо трикутник Паскаля; у випадку $t=r=s=0,\, k=-1$ – трикутник чисел Стірлінга першого роду; якщо $t=k=r,\, s=-1$, то маємо трикутник чисел Стірлінга другого роду, а якщо $t=r=0,\, k=1,\, s=-1$, – трикутник чисел Лага.

5. Нові неелементарні функції, породжені зростаючими факторіальними степенями

У [8], [9], за аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

які, враховуючи, що $n! = n^{\underline{n}}$, можна трактувати як ряди, побудовані при допомозі спадних факторіальних степенів з кроком (–1), означені нові неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Exp}(x), \mathrm{Cos}(x), \mathrm{Sin}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів з кроком 1:

$$\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\overline{n}}},\quad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}},\quad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}.$$

У [8], зокрема, доведено, що

$$\mathrm{Exp}(x) = 1+\sqrt{\pi x}\, e^{x/4}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{x}/2\right),$$

$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!x^{2n-1}}{(4n-3)!} =$$

$$= 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+\sin\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{10}$$

$$\mathrm{Cos}(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!x^{2n}}{(4n-1)!}=$$
$$=1+2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)-\sin\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \tag{11}$$

де $\mathrm{erf}(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^p e^{-t^2}dt$ – функція помилок (функція ймовірностей Лапласа), $S(p)=\int_0^p \sin t^2 dt$, $C(p)=\int_0^p \cos t^2 dt$ – інтеграли Френеля [10].

Теорема 4 встановлює зв'язок функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ з узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_1F_2\left(a_1;b_1,b_2;z\right)$.

Нагадаємо, що узагальненою гіпергеометричною функцією ${}_sF_q(a_1,...,a_s;b_1,...,b_q;z)$ називають функцію, визначену при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [11]

$${}_sF_q\left(a_1,...,a_s;b_1,...,b_q;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}\cdot...\cdot a_s^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\cdot...\cdot b_q^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!},$$

де $a_1^{\overline{n}},...,a_s^{\overline{n}},b_1^{\overline{n}},...,b_q^{\overline{n}}$ – зростаючі факторіальні степені з кроком 1.

Теорема 4. *Для всіх* $x\in(-\infty,+\infty)$ *справджуються тотожності*

$$\mathrm{Sin}(x)=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right),$$

$$\mathrm{Cos}(x)=1-\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Доведення. З (10), враховуючи, що $n!=1^{\overline{n}}$, $(4n+1)!=4^n(2n)!(4n+1)!!$, для функції $\mathrm{Sin}(x)$ одержуємо:

$$\mathrm{Sin}(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(4n+1)!}x^{2n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)!!}x^{2n}=$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n\left(3\cdot7\cdot...\cdot(4n-1)\right)\left(5\cdot9\cdot...\cdot(4n+1)\right)}x^{2n}=$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot...\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot...\cdot\frac{4n+1}{4}\right)}x^{2n}=$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Для функції $\mathrm{Cos}(x)$ з (11) маємо:

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(4n+3)!}x^{2n+2} = 1-\frac{x^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+3)!!}x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n\left(5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\right)\left(7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+3)\right)}x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{13}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)}x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = 1-\frac{x^2}{6}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Теорему доведено.

Література

1. Заторський Р.А. Факторіальні степені та трикутні матриці / Р.А.Заторський, О.Р.Малярчук // Карпатські математичні публікації. – 2008. – № 1. – С. 35-46.
2. Заторський Р.А. Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць / Р.А.Заторський // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, № 1. – С. 3-17.
3. Заторський Р. А. Парафункції матриць похилої структури і многочлени розбиттів / Р.А.Заторський // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія Математика. – 2010. – Т. 1, № 4. – С. 59-66.
4. Bell E. T. Partition polynomials / E.T.Bell // Ann. Math. – 1927. – 29. – P. 38-46.
5. Риордан Д. Комбинаторные тождества / Д. Риордан – М.: Наука, 1982. – 256 с.
6. Серре И. А. Курс высшей алгебры / И.А.Серре. – М.: Изд. М.О.Вольф, 1910. – 574 с.
7. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.
8. Гой Т.П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т.П.Гой, Р.А.Заторський // Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т.1, № 1-2. – С. 28-33.
9. Гой Т.П. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними

степенями, та їх властивості / Т.П.Гой, Р.А.Заторський // Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки: Матеріали Міжн. наук.-практ. інтернет-конф. (Харків, 10-25 травня 2013 р.). – Харків: Екограф, 2013. – С. 103-106.

10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
11. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г.Бейтмен, А.Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.11.2013 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Григорчуком Р. І.*** *(Техас)*

GENERALIZED FACTORIAL POWERS AND SOME OF ITS APPLICATIONS

R. A. Zatorsky, T. P. Goy
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: romazz@rambler.ru, tarasgoy@yahoo.com

We consider the identities of generalized factorial powers. In particular, we generalized polynomial formula for arbitrary finite number of terms. The connection of some non-elementary real functions generated by rising factorials with the generalized hypergeometric function is established.

Key words: *triangular matrix, paradeterminat, parapermanent, factorial power, polynomial partitions, generalized hypergeometric function.*