$$\left|\frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\int\limits_{V_{B(\kappa)}^{M(\kappa)}} u(t_{(\kappa)},X)dX\right| \ge \int\limits_{V_{R^*}} Z_1(A)dAS(B_{(\kappa)},M_{(\kappa)}) - \int\limits_{V_{R^*}} Z_1(A)dA \times$$

$$\times\left|\frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\left[\int\limits_{V_{B(\kappa)}^{M(\kappa)}} u_0\left(x+at^{\frac{1}{2b}}, y_1+x^{(1)}t+\beta_1 t^{\frac{2b+1}{2b}}, y_2+y_1^{(2)}t+\frac{x^{(2)}t^2}{2}+\beta_2 t^{\frac{4b+1}{2b}},\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. y_2^{(3)}t+\frac{y_1^{(3)}t}{2}+\frac{x^{(3)}t^3}{6}+\beta_3 t^{\frac{6b+1}{2b}}\right)dX - \int\limits_{V_{B(\kappa)}^{M(\kappa)}} u_0(X)dX\right]\right| - \frac{1}{\left(2B_{(\kappa)}\right)^N}\times$$

$$\times \int\limits_{V_{B(\kappa)}^{M(\kappa)}} \left|\mathrm{I}_2\right| \ge \frac{\varepsilon_0}{4}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{4}\right) - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} \ge \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

З цієї нерівності випливає, що в кожному кубі $V_{B_{(\kappa)}}^{M_{(\kappa)}}$ є хоч одна точка $X_{(\kappa)}$, в якій $u(t_{(\kappa)}, X_{(\kappa)}) \ge \frac{\varepsilon_0}{4}$, а $t_{(\kappa)} \to +\infty$, що суперечить рівномірній збіжності.

Теорема 3 доведена.

Зауваження. При $n = m_1$, $m_2 = m_3 = 0$ одержимо результати [2].

1. Малицкая А.П., Репников В.Д., Эйдельман С.Д. О стабилизации решений задачи Коши для уравнения диффузии с инерцией // Труды НИИМ ВГУ. – Воронеж, 1972. – Вып.V – С.86–92.
2. Эйдельман С.Д., Малицкая А.П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.XI. – С.1316–1330.
3. Малицька Г.П. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії із змінною інерцією // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42. – №3. – С.56–60.
4. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісник Львівського національного університету. – 2000. – №411. – С.211–227.

In this paper we consider the stabilization of Poisson's integral Cauchy problem for Kolmogorov's equations that are three groups of variables with degeneration of parabolical equations.

***Key words:** fundamental solution, ultraparabolic equation, Cauchy problem.*

УДК 517.948

ББК 22.161.67

Б.В. Василишин, О.М. Голубчак, М.І. Копач, Б.А. Шувар

ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА З БАГАТЬМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Для інтегральних рівнянь типу Вольтерра з багатьма незалежними змінними доведено нові теореми про оцінки розв'язків.

***Ключові слова:** інтегральні нерівності, диференціальні нерівності, оцінка розв'язку, N-вимірний аналог.*

Теореми про диференціальні, інтегральні та інші класи операторних нерівностей мають широке застосування як у якісній, так і в кількісній теорії диференціальних рівнянь. У даній статті одержано деякі результати, які узагальнюють відомі теореми Гронуола, Біхарі, Вендрофа та деякі інші теореми про інтегральні нерівності. Вони близькі до відповідних результатів з [1] (див. [1, §20, 21]) і деколи теж є новими і для $N = 1$. Зазначимо, що подані твердження не вичерпують можливостей побудови інших аналогів й узагальнень згаданих теорем про інтегральні нерівності, і їх можна розглядати хіба що як ілюстрацію можливостей для побудови таких тверджень на основі використаного в [1] і в цій статті підходу.

1. Розглянемо спочатку рівняння:

$$x(t) = f(t) + \alpha(t)\int_a^t \beta(\xi)x(\xi)d\xi \tag{1}$$

з дійсними неперервними при $t\in[a,b]$ функціями $f(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, де $t=\{t^1,\dots,t^N\}$, $a=\{a^1,\dots,a^N\}$, $b=\{b^1,\dots,b^N\}$ $(-\infty<a^i<b^i<\infty)$, $[a,b]=[a^1,b^1]\times\ldots\times[a^N,b^N]$. Нехай для неперервних функцій $u(t)$, $v(t)$ при $t\in[a,b]$ маємо:

$$\begin{aligned} u(t) &\le f(t) + \int_a^t\left(\alpha^+(t)\beta^+(\xi)+\alpha^-(t)\beta^-(\xi)\right)u(\xi)d\xi - \\ &- \int_a^t\left(\alpha^+(t)\beta^-(\xi)+\alpha^-(t)\beta^+(\xi)\right)v(\xi)d\xi, \\ v(t) &\ge f(t) + \int_a^t\left(\alpha^+(t)\beta^+(\xi)+\alpha^-(t)\beta^-(\xi)\right)v(\xi)d\xi - \\ &- \int_a^t\left(\alpha^+(t)\beta^-(\xi)+\alpha^-(t)\beta^+(\xi)\right)u(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{2}$$

де

$$\alpha^+(t)=\sup\{\alpha(t),0\},\ \alpha^-(t)=\alpha^+(t)-\alpha(t),$$
$$\beta^+(t)=\sup\{\beta(t),0\},\ \beta^-(t)=\beta^+(t)-\beta(t),$$

а неперервний на $[a,b]$ розв'язок $x^*(t)$ рівняння (1) задовольняє нерівності:

$$u(t)\le x^*(t)\le v(t). \tag{3}$$

У тому випадку, коли $\alpha(t)$, $\beta(t)$ мають вигляд:

$$\alpha(t)=\prod_{i=1}^N \alpha_i(t^i),\ \beta(t)=\prod_{i=1}^N \beta_i(t^i), \tag{4}$$

розв'язок рівняння (1) можна знайти в явному вигляді. Позначимо:

$$L_j(t^j)=\int_{a^j}^{t^j}\alpha_j(s^j)\beta_j(s^j)ds^j\ \left(a^j\le s^j\le b^j, j=\overline{1,N}\right),\ E_N(\eta^i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\eta^i}{(i!)^N}, \tag{5}$$

$$g(t)=\int_a^t f(\xi)\beta(\xi)d\xi, \tag{6}$$

$$h^*(t,\xi)=E_N\left(\prod_{j=1}^N\left(L_j(t^j)-L_j(\xi^j)\right)\right),\ a\le\xi\le t\le b. \tag{7}$$

Теорема 1. *Якщо справджуються співвідношення* (4), *то з існування неперервних при* $t\in[a,b]$ *функцій* $u(t)$, $v(t)$, *що задовольняють співвідношення* (2), *випливають для* $t\in[a,b]$ *оцінки*

$$u(t)\le f(t)+\alpha(t)g(t)+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds\le v(t) \tag{8}$$

з означеними за формулами (5) – (7) *функціями* $g(t)$, $h^*(t,s)$.

Доведення. Рівняння (1) приводить до рівності

$$w(t)=g(t)+\int_a^t\alpha(s)\beta(s)w(s)ds \tag{9}$$

за допомогою заміни

$$w(t)=\int_a^t \beta(s)x(s)ds. \tag{10}$$

Єдиний для $t\in[a,b]$ неперервний розв'язок рівняння (9) очевидним способом можна записати у вигляді

$$w(t)=g(t)+\int_a^t \alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds. \tag{11}$$

Оскільки з (1) і (10) випливає рівність $x(t)=f(t)+\alpha(t)w(t)$, то з (11) знаходимо

$$x(t)=f(t)+\alpha(t)g(t)+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds.$$

Це в зіставленні з (3) підтверджує нерівності (8).

Функція $E_1(t)$ для $n=1$ має вигляд $E_1(t)=e^t$. При $n=2$ будемо мати $E_2(t)=I_0\left(2\sqrt{t}\right)$ – модифіковану функцію Бесселя нульового порядку.

Виокремимо частковий випадок, який одержуємо з теореми 1 при $\alpha(t)\geq 0$, $\beta(t)\geq 0$.

Наслідок 1. Якщо $\alpha(t)\geq 0$, $\beta(t)\geq 0$ і справджується нерівність

$$u(t)\leq f(t)+\alpha(t)\int_a^t \beta(s)u(s)ds$$

$$\left(v(t)\geq f(t)+\alpha(t)\int_a^t \beta(s)v(s)ds\right),$$

то справедлива оцінка

$$u(t)\leq f(t)+\alpha(t)g(t)+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds$$

$$\left(f(t)+\alpha(t)g(t)+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)h^*(t,s)ds\leq v(t)\right).$$

Результат, який містить цей наслідок, є загальнішим за N-вимірний аналог леми Ґронуолла, отриманий В.Вольтерром (див. [2, лема III, §19]). Саму лему В.Вольтерра отримаємо з наслідку 1 при $\alpha(t)\equiv 1$.

Наступні дві теореми можна вважати за узагальнення наслідку 1.

Теорема 2. *Якщо справджуються умови теореми 1 з* $\alpha(t)\geq 0$ *і задана інтегровна при* $t\in[a,b]$ *функція* $q(t)$ *така, що*

$$q(t)=\prod_{j=1}^{N} q_j(t^j), q_j(t^j)\geq 0; q_j(t^j)\geq \beta_j(t^j)\ \left(t_j\in\left[a^j,b^j\right], j=\overline{1,N}\right), \tag{12}$$

то при $t\in[a,b]$ *правдиві оцінки*

$$u(t)\leq x^*(t)\leq f(t)+\alpha(t)\int_a^t f(s)\beta(s)ds+$$

$$+\alpha(t)\int_a^t b(s)\alpha(s)q(s)\exp\left[\int_s^t \alpha(\xi)q(\xi)d\xi\right]ds,\ \text{де}\ b(t)=\int_a^t f(s)q(s)ds.$$

Доведення. Очевидно, що для $j=\overline{1,N}$ будемо мати:

$$L_j(t^j)-L_j(s^j)=\int_{a^j}^{t^j}\alpha_j(\xi)\beta_j(\xi)d\xi-\int_{a^j}^{s^j}\alpha_j(\xi)\beta_j(\xi)d\xi=\int_{s^j}^{t^j}\alpha_j(\xi)\beta_j(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Для $z\geq 0$ отримуємо:

$$E_N(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{(i!)^N}=1+z+\frac{z^2}{(2!)^2}+\ldots+\frac{z^N}{(N!)^N}+\ldots\le 1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^N}{N!}+\ldots=e^z, \tag{14}$$

де z^i – натуральний степінь числа z. Завдяки теоремі 1 та співвідношенням (12), (13), (14) можна знайти

$$u(t)\le x^*(t)\le f(t)+\alpha(t)g(t)+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)\times$$

$$\times\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\int_s^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)^i}{(i!)^N}\right)ds\le f(t)+\alpha(t)g(t)+$$

$$+\alpha(t)\int_a^t g(s)\alpha(s)\beta(s)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\int_s^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)^i}{i!}\right)ds=$$

$$=f(t)+\alpha(t)\int_a^t f(s)\beta(s)ds+\alpha(t)\int_a^t b(s)\alpha(s)q(s)\exp\left[\int_s^t \alpha(\xi)q(\xi)d\xi\right]ds,$$

що й потрібно було довести.

В умовах цієї теореми можна прийняти, зокрема:

$$q_j(t)=\beta_j^+(t)\ \left(\beta_j^+(t)=\sup\{\beta_j(t),0\},j=\overline{1,N}\right).$$

Теорема 3. *Якщо справджуються умови теореми 1 з* $\beta(t)\ge 0$ *і задана інтегрована при* $t\in[a,b]$ *функція* $p(t)$ *така, що*

$$p(t)=\prod_{j=1}^{N}p_j(t^j),\ p_j(t^j)\ge 0;\ p_j(t^j)\ge\alpha_j(t^j)\ \left(t_j\in[a^j,b^j],\ j=\overline{1,N}\right),$$

то при $t\in[a,b]$ *правдиві нерівності*

$$u(t)\le x(t)\le f(t)+\alpha(t)\int_a^t f(s)\beta(s)ds+$$

$$+p(t)\int_a^t\left(\int_a^\tau f(s)\beta(s)ds\right)p(\tau)\exp\left[\int_\tau^t p(\xi)\beta(\xi)d\xi\right]d\tau.$$

Доведення практично не відрізняється від доведення теореми 2.

В умовах теореми 3 можна, зокрема, прийняти

$$p_j(t)=\alpha_j^+(t)\ \left(\alpha_j^+(t)=\sup\{\alpha_j(t),0\},\ j=\overline{1,N}\right).$$

Приклад 1. Розглянемо нерівність

$$u(x,y)\le\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\int_1^x\int_1^y\frac{t}{s}u(s,t)dsdt, \tag{15}$$

де всі величини є дійсними числами. Функції $f(x,y)=\frac{x}{y}$, $\alpha(x,y)=\frac{x}{y}$, $\beta(x,y)=\frac{y}{x}$ є неперервними, причому $\beta(x,y)\ge 0$, $\alpha(x,y)\ge 0$ і справджуються співвідношення (4). При цьому система нерівностей (2) розпадається на дві нерівності. Нерівність (15) є однією з них. Отже, можна застосувати теорему 2 і з нерівності (15) отримати оцінку

$$u(x,y) \le \frac{x}{y} + \frac{x}{y}\int_1^x\int_1^y \frac{s}{t}\cdot\frac{t}{s}\,ds\,dt + \frac{x}{y}\int_1^x\int_1^y\left(\int_1^s\int_1^t \frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\xi}\,d\eta\,d\xi\right)\frac{t}{s}\cdot\frac{s}{t}\exp\left[\int_s^x\int_t^y \frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\xi}\,d\eta\,d\xi\right]ds\,dt.$$

Після спрощень одержимо

$$u(x,y) \le \frac{x}{y} + \frac{x}{y}(x-1)(y-x) + x^2\left(\exp\left[(x-1)(y-1)\right]-1\right).$$

Наведені результати для лінійного випадку можна тлумачити як узагальнення нерівностей Гронуолла – Беллмана та нерівностей Вендрофа (напр. [3]).

2. Перейдемо до нелінійних інтегральних нерівностей, які часто асоціюють із відомою нерівністю Біхарі.

Розглянемо рівняння

$$x(t) = C + \int_a^t \beta(s)g(x(s))ds \qquad (C = const), \tag{16}$$

де $\beta(t) = \beta_1(t) - \beta_2(t)$, з неперервними невід'ємними при $t \in [a,b]$ функціями. Уважатимемо, що $g(x)$ – неперервна неспадна строго додатна при $x \in (\lambda_0, \lambda_1)$ функція. Як і раніше, $a = \{a^1, \ldots, a^N\}$, $b = \{b^1, \ldots, b^N\}$, $t = \{t^1, \ldots, t^N\}$. Нехай: 1) неперервні функції $u(t)$, $v(t)$ при $t \in [a,b]$ задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} u(t) &\le C + \int_a^t \beta_1(s)g(u(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(v(s))ds, \\ v(t) &\ge C + \int_a^t \beta_1(s)g(v(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(u(s))ds; \end{aligned} \tag{17}$$

2) система рівнянь

$$y(t) = C + \int_a^t \beta_1(s)g(y(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(z(s))ds,$$

$$z(t) = C + \int_a^t \beta_1(s)g(z(s))ds - \int_a^t \beta_2(s)g(y(s))ds$$

має єдиний розв'язок $(y(t), z(t))$, такий, що $y(t) = z(t)$ і функція $x(t) = y(t) = z(t)$ – неперервна при $t \in [a,b]$; 3) задана достатньо гладка неспадна функція $G(x)$ $(x \in (\lambda_0, \lambda_1))$ така, що для всякої достатньо гладкої функції $x(t)$, для якої $x(a) = C$, або бодай для всякого розв'язку $x(t)$ рівняння (16) будемо мати:

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} \le \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \ldots \partial t^N}. \tag{18}$$

Теорема 4. *Якщо справджуються умови 1)–3), то з нерівностей* (17) *випливає оцінка:*

$$G(u(t)) \le G(c) + \int_{t_0}^t \beta(s)ds. \tag{19}$$

Доведення. Диференціюємо N раз обидві частини рівності (16). Отримуємо

$$\frac{\partial^N x}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} = \beta(t)g(x(t)).$$

Зважаючи на те, що $g(x) > 0$, і скориставшись із (18), знаходимо

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} \le \beta(t).$$

Інтегруючи N раз цю нерівність, будемо мати

$$G(x) \le G(c) + \int_a^t \beta(s)ds. \tag{20}$$

Зважаючи на те, що справджуються умови теореми 4 й тому $u(t) \le x(t) \le v(t)$ $(t \in [a,b])$ та що функція $G(x)$ – неспадна, з нерівності (20) одержуємо оцінку (19). Теорему доведено.

Якщо у (18) маємо протилежну нерівність, тобто:

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \ge \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N},$$

то з нерівностей (17) випливає оцінка:

$$G(v(t)) \ge G(c) + \int_a^t \beta(s)ds. \tag{21}$$

Якщо, зокрема, $\beta_2(t) = 0$, то з нерівності

$$u(t) \le C + \int_a^t \beta(s) g(u(s))ds$$

при збереженні інших умов теореми 4 випливає оцінка (19). За тих самих припущень при $\beta_2(t) = 0$ з нерівності

$$v(t) \ge C + \int_a^t \beta(s) g(v(s))ds$$

випливає нерівність (21).

Зауваження 1. Припущення про те, що $C = const$ в умовах теореми 4 можна замінити, зберігши як саме формулювання її, так і основні міркування в доведенні, слабкішим припущенням

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} C_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{N} \left(t_0^j - t^j\right), \text{ де } C_i = const.$$

3. Розглянемо випадок $N = 2$ дещо докладніше. Нехай рівняння (16) має вигляд

$$z(x,y) = C + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \beta(t,s) g(z(t,s))dsdt, \tag{22}$$

де $\beta(t,s) \ge 0$ при $x \ge x_0$, $y \ge y_0$. Нехай $g(z)$ – двічі неперервно диференційовна неспадна строго додатна функція при $z \in \mathrm{R}^1$, $z \ge C$. Диференціюючи один раз (22) за x та за y, матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \beta(x,s) g(z(x,s))ds, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \beta(t,y) g(z(t,y))dt.$$

З додатності $\beta(x,y)$, $g(z)$ випливає $\dfrac{\partial z}{\partial x} \ge 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} \ge 0$, а з монотонності й диференційовності $g(z)$ маємо також $g'_z = \dfrac{dg}{dz} \ge 0$. Приймемо

$$G(z) = \int_C^z \frac{d\lambda}{g(\lambda)} \quad (z \ge C) \tag{23}$$

і продиференціюємо цю рівність. З урахуванням рівності (22) будемо мати

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(G'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{g'_z}{g^2(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \le \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

для всякого розв'язку $z(x,y)$ рівняння (22). Крім того, функція $G(z)$, означена за (23), не спадає при $z \geq C$. Отже, за теоремою 4 можна зробити висновок про справедливість оцінки

$$G(u) \leq G(C) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \beta(t,s)\,dtds.$$

Цей результат збігається з основним результатом Р.Гутовського [4].

Тоді, коли $g(z) = z$, можна прийняти $G(z) = \ln z$, і тоді з теореми 4 випливає нерівність

$$u(x,y) \leq Ce^{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \beta(t,s)dtds},$$

яка відома як нерівність Вендрофа ([3]).

Подібним способом із теореми 4 можна отримати й інші, як відомі вже, так і нові оцінки розв'язків інтегральних нерівностей Вольтерра з багатьма незалежними змінними.

Оцінки (19) й інші оцінки, які отримуються з неї, непокращувані тільки тоді, коли співвідношення (18) є рівністю на єдиному неперервному розв'язку $x(t)$ рівняння (16).

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наукова думка, 1980. – 267 с.
2. Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin etc.: Springer, 1970. – 355 p.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
4. Gutowski R. Etude d'une inequalitie integrale nonlineare en deux variables // Ann. Pol. Math. – 1977. – V.35. – №3. – P.247–252.

The new theorems about a estimations of the solutions for integral equations Voltera's type with many independents variables.

Key words: *integral inequalities, differential inequalities, estimation of the solution, N-dimensional analog.*

УДК 515.12
ББК 22.152.1

С.Ф. Григорів, О.Р. Никифорчин

ТОПОЛОГІЧНА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ПАРИ $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$- ТА $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-МНОГОВИДІВ

Отримано топологічну характеризацію пар просторів, глобально або локально влаштованих як $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

Ключові слова: *нескінченновимірні многовиди, пряма границя, компакт.*

Вступ. Характеризації і властивості простору $\mathbb{R}^\infty$, утвореного як пряма границя послідовно вкладених степенів $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \ldots$, а також просторів, локально влаштованих як $\mathbb{R}^\infty$ ($\mathbb{R}^\infty$-многовидів), добре відомі [1] й широко вживаються, наприклад, для класифікації вільних об'єктів над скінченновимірними компактами. Метою даної праці є отримання аналогічних характеризацій для пар просторів (X, Y) (де $X \supset Y$), влаштованих як пара $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$ або пара з відкритої підмножини $U \subset (\mathbb{R}^\infty)^2$ та перетину $U \cap (\mathbb{R}^\infty \times \{0\})$. Такі пари виникають, наприклад, при дослідженні вільних універсальних алгебр із різними сигнатурами й визначальними системами співвідношень над скінченновимірними компактами.

Більшість результатів та методи їх отримання аналогічні до описаних у [1, 2].

1. Основні позначення і терміни. Щодо понять топологічного простору, внутрішності й замикання, компактного й гаусдорфового простору, вкладення та гомотопії див. [4]. Замикання довільно множини A позначаємо $\bar{A}$. Під відображенням розуміємо неперервне відображення, якщо не вказано іншого. Стосовно прямих границь топологічних просторів і їх відображень див. [2]. Пряму границю послідовності просторів $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ позначаємо $\varinjlim(X_n, i_m^n, \mathbb{N})$, де $i_m^n : X_m \hookrightarrow X_n$ – вкладення, або, коротше, $\varinjlim X_n$. Відображення пар просторів і їх гомотопії