для всякого розв'язку $z(x,y)$ рівняння (22). Крім того, функція $G(z)$, означена за (23), не спадає при $z \geq C$. Отже, за теоремою 4 можна зробити висновок про справедливість оцінки

$$G(u) \leq G(C) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \beta(t,s)\,dtds.$$

Цей результат збігається з основним результатом Р.Гутовського [4].

Тоді, коли $g(z) = z$, можна прийняти $G(z) = \ln z$, і тоді з теореми 4 випливає нерівність

$$u(x,y) \leq Ce^{\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \beta(t,s)dtds},$$

яка відома як нерівність Вендрофа ([3]).

Подібним способом із теореми 4 можна отримати й інші, як відомі вже, так і нові оцінки розв'язків інтегральних нерівностей Вольтерра з багатьма незалежними змінними.

Оцінки (19) й інші оцінки, які отримуються з неї, непокращувані тільки тоді, коли співвідношення (18) є рівністю на єдиному неперервному розв'язку $x(t)$ рівняння (16).

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наукова думка, 1980. – 267 с.
2. Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin etc.: Springer, 1970. – 355 p.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
4. Gutowski R. Etude d'une inequalitie integrale nonlineare en deux variables // Ann. Pol. Math. – 1977. – V.35. – №3. – P.247–252.

The new theorems about a estimations of the solutions for integral equations Voltera's type with many independents variables.

***Key words:** integral inequalities, differential inequalities, estimation of the solution, N-dimensional analog.*

УДК 515.12

ББК 22.152.1

С.Ф. Григорів, О.Р. Никифорчин

ТОПОЛОГІЧНА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ПАРИ $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$- ТА $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-МНОГОВИДІВ

Отримано топологічну характеризацію пар просторів, глобально або локально влаштованих як $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

***Ключові слова:** нескінченновимірні многовиди, пряма границя, компакт.*

Вступ. Характеризації і властивості простору $\mathbb{R}^\infty$, утвореного як пряма границя послідовно вкладених степенів $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \ldots$, а також просторів, локально влаштованих як $\mathbb{R}^\infty$ ($\mathbb{R}^\infty$-многовидів), добре відомі [1] й широко вживаються, наприклад, для класифікації вільних об'єктів над скінченновимірними компактами. Метою даної праці є отримання аналогічних характеризацій для пар просторів (X, Y) (де $X \supset Y$), влаштованих як пара $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$ або пара з відкритої підмножини $U \subset (\mathbb{R}^\infty)^2$ та перетину $U \cap (\mathbb{R}^\infty \times \{0\})$. Такі пари виникають, наприклад, при дослідженні вільних універсальних алгебр із різними сигнатурами й визначальними системами співвідношень над скінченновимірними компактами.

Більшість результатів та методи їх отримання аналогічні до описаних у [1, 2].

1. Основні позначення і терміни. Щодо понять топологічного простору, внутрішності й замикання, компактного й гаусдорфового простору, вкладення та гомотопії див. [4]. Замикання довільно множини A позначаємо $\bar{A}$. Під відображенням розуміємо неперервне відображення, якщо не вказано іншого. Стосовно прямих границь топологічних просторів і їх відображень див. [2]. Пряму границю послідовності просторів $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ позначаємо $\varinjlim(X_n, i_m^n, \mathbb{N})$, де $i_m^n : X_m \hookrightarrow X_n$ – вкладення, або, коротше, $\varinjlim X_n$. Відображення пар просторів і їх гомотопії описано у [3]. Компактом називаємо компактний гаусдорфів простір. Нагадаємо, що компакт є скінченновимірним відносно вимірності в сенсі покриттів чи великої або малої індуктивної вимірності, якщо і тільки якщо він вкладається у $\mathbb{R}^n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Надалі позначаємо

$$i_m^n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ i_m^n(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}),$$

$$\bar{i}_m^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \bar{i}_m^n(x, y) = (i_m^n(x), i_m^n(y)),$$

тобто

$$\bar{i}_m^n((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) =$$
$$= ((x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}), (y_1, \dots, y_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m}))$$

(при $m \le n$). Задамо також вкладення $\mathbb{R}^m$ у $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ як $s_m(x) = (x, 0)$. Якщо не вказано іншого, вважаємо, що при $m \le n$ простір $\mathbb{R}^m$ міститься у $\mathbb{R}^n$ як образ вкладення i_m^n. Пряму границю $\underrightarrow{\lim}(\mathbb{R}^n, i_m^n, \mathbb{N})$ позначаємо $\mathbb{R}^\infty$. Згідно з [2] $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty = \underrightarrow{\lim}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \bar{i}_m^n, \mathbb{N})$, причому вкладення $s : \mathbb{R}^\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, $s(x) = (x, 0)$ є прямою границею вкладень s_n:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, hook, "i_1^2"] \arrow[d, "s_1"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "i_2^3"] \arrow[d, "s_2"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, hook, "i_3^4"] \arrow[d, "s_3"] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, hook, "i_4^5"] \arrow[d, "s_4"] & \cdots \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, hook, "\bar{i}_1^2"] & (\mathbb{R}^2)^2 \arrow[r, hook, "\bar{i}_2^3"] & (\mathbb{R}^3)^2 \arrow[r, hook, "\bar{i}_3^4"] & (\mathbb{R}^4)^2 \arrow[r, hook, "\bar{i}_4^5"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Надалі ототожнимо $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^\infty \times \{0\}$ з $\mathbb{R}^\infty$ і вважаємо, що у парах $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ та $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$ другий простір вкладено в перший за допомогою, відповідно, s_n та s.

2. Властивості й характеризації. Спершу доведемо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай (A, B) – скінченновимірна компактна пара, й задано вкладення $i : B \hookrightarrow \mathbb{R}^m$. Тоді існує $n \ge m$ та вкладення $j : A \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, для якого комутує діаграма*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}^m \arrow[r, hook, "i_m^n"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "s_n"] \\
A \arrow[rr, hook, "j"] & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

причому $j(A \setminus B) \subset (\mathbb{R}^n)^2 \setminus \mathbb{R}^n$.

Доведення є очевидним як і для наступної леми.

Лема 2. *Нехай (A, B, C) – скінченновимірна компактна тріада (тобто $B, C \subset A$), для якої існує вкладення $i : B \hookrightarrow (\mathbb{R}^m)^2$, причому $i(B \cap C) \subset \mathbb{R}^m$, $i(B \setminus C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^m$. Тоді існує $n \ge m$ і вкладення $j : A \hookrightarrow (\mathbb{R}^n)^2$, для якого комутує діаграма*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook] & (\mathbb{R}^m)^2 \arrow[d, hook, "\bar{i}_m^n"] \\
A \arrow[r, hook, "j"] & (\mathbb{R}^n)^2
\end{tikzcd}$$

причому $i(A \cap C) \subset \mathbb{R}^n$, $i(A \setminus C) \subset (\mathbb{R}^n)^2 \setminus \mathbb{R}^n$.

Неважко помітити, що перша лема є частковим випадком другої (при $B = C$).

Теорема 1. *(Характеризаційна.) Довільна пара (X, Y) є гомеоморфною до пари (U, V), де U – відкрита підмножина в $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, $V = s^{-1}(U) = U \cap \mathbb{R}^\infty$, якщо і тільки якщо:*

(1) *Y – замкнений підпростір в X;*

(2) $X = \varinjlim X_n$, *де* X_n *– скінченновимірні компакти;*

(3) *для кожної скінченновимірної компактної тріади* $(A; B, C)$, *для якої існує таке вкладення* $i : B \hookrightarrow X$, *що* $i(B \cap C) \subset Y$, $i(B \setminus C) \subset X \setminus Y$, *його можна продовжити до вкладення* $j : OB \hookrightarrow X$ *деякого околу OB множини B в A, для якого* $j(OB \cap C) \subset Y$, $j(OB \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Доведення. (Необхідність.) Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(X, Y) = (U, V)$. Перший пункт випливає з того, що $\mathbb{R}^\infty$ – замкнений підпростір в $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, другий – з твердження 3.6 із [2] та з того, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ перетин $U \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ є об'єднанням зліченної послідовності скінченновимірних компактів, кожен з яких міститься у внутрішності наступного.

Доведемо третій пункт. Нехай $i : B \hookrightarrow U$ – згадане вкладення. Тоді $i(B) \subset (\mathbb{R}^m)^2$ для деякого $m \in \mathbb{N}$, звідки $i(B \cap C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \cap \mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^m$, $i(B \setminus C) \subset (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^\infty = (\mathbb{R}^m)^2 \setminus \mathbb{R}^m$. Згідно з лемою 2 існує вкладення $j' : A \hookrightarrow (\mathbb{R}^n)^2$ з властивостями $j'|_B = \bar{i}^n_m \circ i$, $j'(A \cap C) \subset \mathbb{R}^n$, $j'(A \setminus C) \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^n$. Залишається покласти $OB = (j')^{-1}(U)$, $j = j'|OB$.

(Достатність.) За умовою $X = \varinjlim X_n$, де X_n – скінченновимірні компакти. Тоді $Y = \varinjlim Y_n$, де $Y_n = X_n \cap Y$. Нехай $l_1 = 1$. За першою лемою існує вкладення $f_1 : X_{l_1} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{m_1})^2$, для якого $f_1(Y_{l_1}) \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $f_1(X_{l_1} \setminus Y_{l_1}) \subset (\mathbb{R}^{m_1})^2 \setminus \mathbb{R}^{m_1}$. Позначимо $F_1 = f_1(X_{l_1})$, $G_1 = f_1(Y_{l_1})$. Оскільки пара (F_1, G_1) гомеоморфна до (X_{l_1}, Y_{l_1}), то вона, природно, вкладається в (X, Y). З компактності й скінченновимірності пари (F_1, G_1) та умови випливає, що це вкладення можна продовжити до вкладення i_1 у (X, Y) (а, точніше, у (X_{l_2}, Y_{l_2}) для певного $l_2 > l_1$) деякого компактного замикання $\overline{OF_1}$ околу $OF_1 \supset F_1$ у $(\mathbb{R}^{m_1})^2$ причому так, щоб $i_1(\overline{OF_1} \cap \mathbb{R}^{m_1}) \subset Y_{l_2}$, $i_1(\overline{OF_1} \setminus \mathbb{R}^{m_1}) \subset \subset X_{l_2} \setminus Y_{l_2}$. Продовжимо вкладення $i_1(\overline{OF_1}) \subset X_{l_2}$ в $(\mathbb{R}^{m_1})^2$ до такого вкладення $f_2 : X_{l_2} \hookrightarrow (\mathbb{R}^{m_2})^2$, $m_2 > m_1$, що $f_2(Y_{l_2}) \subset \mathbb{R}^{m_2}$, $f_2(X_{l_2} \setminus Y_{l_2}) \subset (\mathbb{R}^{m_2})^2 \setminus \mathbb{R}^{m_2}$, і т. д., згідно з діаграмою:

$$
\begin{tikzcd}
(X_{l_1}, Y_{l_1}) \arrow[r, hook] & (X_{l_2}, Y_{l_2}) \arrow[r, hook] & \cdots \\
(F_1, G_1) \arrow[u, "f_1"', "\wr"] \arrow[d, dash] & (F_2, G_2) \arrow[u, "f_2"', "\wr"] \arrow[d, dash] & \cdots \\
(\overline{OF_1}, \overline{OF_1} \cap \mathbb{R}^{m_1}) \arrow[uur, dashed, hook, "i_1"] \arrow[d, dash] & (\overline{OF_2}, \overline{OF_2} \cap \mathbb{R}^{m_2}) \arrow[uur, dashed, hook, "i_2"] \arrow[d, dash] & \cdots \\
((\mathbb{R}^{m_1})^2, \mathbb{R}^{m_1}) \arrow[r, hook, "\bar{i}^{m_2}_{m_1}"'] & ((\mathbb{R}^{m_2})^2, \mathbb{R}^{m_2}) \arrow[r, hook, "\bar{i}^{m_3}_{m_2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Залишається покласти

$$U = \bigcup_{i=1}^\infty \overline{OF_i} = \bigcup_{i=1}^\infty OF_i \subset \mathbb{R}^\infty, \quad V = \bigcup_{i=1}^\infty \overline{OF_i} \cap \mathbb{R}^{m_i} = \left(\bigcup_{i=1}^\infty OF_i\right) \cap \mathbb{R}^\infty,$$

$f = \varinjlim f_i$. Неважко побачити, що f – гомеоморфізм $(X, Y) \cong (U, V)$. Теорема доведена.

Простеживши за доведенням необхідності, бачимо, що при $U = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ можна продовжити вкладення на $OB = A$, тобто аналогічно отримуємо:

Теорема 2. *(Характеризація пари* $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$*). Довільна пара* (X, Y) *є гомеоморфною до пари* $(\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty, \mathbb{R}^\infty)$, *якщо і тільки якщо:*

(1) Y *– замкнений підпростір в* X;

(2) $X = \varinjlim X_n$, *де* X_n *– скінченновимірні компакти;*

(3) *для кожної скінченновимірної компактної тріади* $(A; B, C)$, *для якої існує таке вкладення* $i: B \hookrightarrow X$, *що* $i(B \cap C) \subset Y$, $i(B \setminus C) \subset X \setminus Y$, *його можна продовжити до вкладення* $j: A \hookrightarrow X$, *для якого* $j(C) \subset Y$, $j(A \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Назвемо $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-*многовидом* кожну пару (X, Y), для якої існує таке зліченне відкрите покриття простору X, що для кожного елемента U цього покриття пара $(U, U \cap Y)$ гомеоморфна або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \varnothing)$.

Теорема 3. *(Про відкрите вкладення.) Пара* (X, Y) *є* $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-*многовидом, якщо і тільки якщо вона гомеоморфна до пари* (U, V), *де* $U \subset \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ *– відкрита підмножина,* $V = U \cap \mathbb{R}^\infty$.

Доведення. (Достатність.) Очевидно, що така пара (U, V), а отже, і кожна гомеоморфна до неї пара є $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-многовидами.

(Необхідність.) Нехай пара (X, Y) є $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-многовидом. Доведемо, що вона задовольняє умову теореми 1. Згідно з означенням Y – замкнена підмножина у X, тобто виконано (1). За означенням X можна покрити зліченною кількістю відкритих множин U_l, $l \in \mathbb{N}$, для яких пара $(U_l, U_l \cap Y)$ гомеоморфна або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$, або до $((\mathbb{R}^\infty)^2, \varnothing)$. Але в обох випадках U_l є прямою границею скінченновимірних компактів $F_{l,k}$, $k \in \mathbb{N}$, гомеоморфних до $([-k,k]^k)^2$. Покладемо $F_k = \bigcup_{l=1}^{k} F_{l,k}$. Неважко побачити, що $X = \varinjlim F_l$, тобто виконано (2). Зафіксуємо використану послідовність множин U_l до кінця доведення. Нехай дано скінченновимірну компактну тріаду (A, B, C) і вкладення i: $B \hookrightarrow X$, для якого $i(B \cap C) \subset Y$, $i(B \setminus C) = X \setminus Y$. За компактністю образ $f(B)$ міститься в об'єднанні $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Відкрите покриття $U_1, U_2, \ldots, U_k$ компакта $f(B)$ стиснемо до його замкненого покриття $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Оберемо окіл $W_1 \supset F_1$ в X, для якого:

1) $\overline{W_1} \subset U_1$;

2) якщо $i^{-1}(F_1) \cap C = \varnothing$, то $i^{-1}(\overline{W_1}) \cap C = \varnothing$.

Якщо $i^{-1}(\overline{W_1}) \cap C \neq \varnothing$, то покладемо $V_1 = A$, інакше V_1 – такий окіл $i^{-1}(\overline{W_1})$ в A, що $\overline{V_1} \cap C = \varnothing$.

За теоремою 2 продовжимо вкладення

$$i|_{i^{-1}(\overline{W}_1) \cap B} : (i^{-1}(\overline{W}_1) \cap B, i^{-1}(\overline{W}_1) \cap B \cap C) \to (U_1, U_1 \cap Y)$$

з властивістю $i(i^{-1}(\overline{W_1}) \cap B \setminus C) \subset U_1 \setminus Y$ до вкладення $i': (\overline{V_1}, \overline{V_1} \cap C) \to (U_1, U_1 \cap Y)$ з властивістю $i'(\overline{V_1} \setminus C) \subset U_1 \setminus Y$. Покладемо $B_1 = B \cup \ \cup (i'^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})$. Об'єднаємо вкладення i та обмеження $i'|_{i'^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}}$ вкладення i' у відображення $i_1: B_1 \to X$, поклавши

$$i_1(x) = \begin{cases} i(x), x \in B, \\ i'(x), x \in i'^{-1}(\overline{W}_1) \cap \overline{V}_1. \end{cases}$$

Оскільки $i'(i'^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1}) \subset \overline{W_1}$, $i(B \setminus (i'^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})) \subset i(B \setminus (i^{-1}(\overline{W_1}) \cap \overline{V_1})) =$ $= i(B \setminus (i^{-1}(\overline{W_1})) \subset B \setminus \overline{W_1}$. Отже, відображення i' з компакта B_1 у гаусдорфів простір X є ін'єкцією, тому є вкладенням $i_1: B_1 \hookrightarrow X$, яке задовольняє умови $i_1(B_1 \cap C) \subset Y$, $i_1(B_1 \setminus C) \subset X \setminus Y$.

Оберемо окіл $W_2 \supset F_2$ в X, для якого:

1) $\overline{W}_2 \subset U_2$;

2) якщо $i_1^{-1}(F_2)\cap C=\varnothing$, то $i_1^{-1}(\overline{W}_2)\cap C=\varnothing$.

Якщо $i_1^{-1}(F_2)\cap C\neq\varnothing$, то покладемо $V_2=A$, інакше V_2 – такий окіл $i_1^{-1}(\overline{W}_2)$ в A, що $\overline{V}_2\cap C=\varnothing$.

Знову згідно з теоремою 2 продовжимо вкладення

$$i_1|_{i_1^{-1}(\overline{W}_2)\cap B_1}:(i_1^{-1}(\overline{W}_2)\cap B_1,\, i_1^{-1}(\overline{W}_2)\cap B_1\cap C)\to(U_2,U_2\cap Y)$$

з властивістю $i_1(i_1^{-1}(\overline{W}_2)\cap B_1\setminus C)\subset U_2\setminus Y$ до вкладення $i_1':(\overline{V}_2,\overline{V}_2\cap C)\to(U_2,U_2\cap Y)$ з властивістю $i_1'(\overline{V}_2\setminus C)\subset U_2\setminus Y$. Покладемо $B_2=B_1\cup\ \cup(i_1'^{-1}(\overline{W}_1)\cap\overline{V}_2)$. Аналогічно об'єднаємо вкладення i_1 та обмеження $i_1'|_{i_1'^{-1}(\overline{W}_2)\cap\overline{V}_1}$ вкладення i_1' у вкладення $i_2:B_2=B_1\longrightarrow X$, поклавши

$$i_2(x)=\begin{cases}i_1(x), & x\in B_1,\\ i_1'(x), & x\in i_1'^{-1}(\overline{W}_2)\cap\overline{V}_2.\end{cases}$$

Так чинимо, доки не отримаємо вкладення $i_n:B_n\longrightarrow X$, де $B_n=B\cup(i'^{-1}(\overline{W}_1)\cap\overline{V}_1)\cup(i_1'^{-1}(\overline{W}_2)\cap\overline{V}_2)\cup\cdots\cup(i_n'^{-1}(\overline{W}_n)\cap\overline{V}_n)$. Але

$$B_n\supset OB=(i'^{-1}(W_1)\cap V_1)\cup(i_1'^{-1}(W_2)\cap V_2)\cup\cdots\cup(i_n'^{-1}(W_n)\cap V_n)\supset$$
$$\supset(i^{-1}(F_1)\cap V_1)\cup(i_1^{-1}(F_2)\cap V_2)\cup\cdots\cup(i_n^{-1}(F_n)\cap V_n)\supset$$
$$\supset i^{-1}(F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n)=B.$$

Оскільки OB – окіл множини B, то $j=i_n|_{OB}:OB\hookrightarrow X$ вкладення, що задовольняє вимоги теореми 1. Отже, згідно з цією теоремою, пара (X,Y) гомеоморфна до пари (U,V), де $U\subset\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty$ – відкрита підмножина, $V=U\cap\mathbb{R}^\infty$. Теорема доведена.

Отже, теорема 1 характеризує $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$-многовиди.

Теорема 4. *(Про замкнене вкладення). Для кожного $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$-многовиду (X,Y) існує вкладення i у $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$, для якого $i(X\setminus Y)\subset(\mathbb{R}^\infty)^2\setminus\mathbb{R}^\infty$, і образ $i(X)$ є замкненою підмножиною* у $(\mathbb{R}^\infty)^2$.

Доведення. Функція $d:(\mathbb{R}^\infty)^2\times(\mathbb{R}^\infty)^2\to\mathbb{R}$, означена формулою

$$d(((x_1,x_2,\dots),(y_1,y_2,\dots)),((x_1',x_2',\dots),(y_1',y_2',\dots)))=$$
$$=|x_1-x_1'|+|y_1-y_1'|+|x_2-x_2'|+|y_2-y_2'|+\dots$$

є неперервною метрикою на $(\mathbb{R}^\infty)^2$, хоча й не визначає топологію на $(\mathbb{R}^\infty)^2$. Згідно з теоремою 1 простір X є прямою границею послідовності скінченновимірних компактів X_n. Задамо відображення $\rho:X\to\mathbb{R}^\infty$ формулою $\rho(x)=(d(x,X_1),d(x,X_2),\dots)$. Згідно з теоремою 3 існує вкладення $j:(X,Y)\hookrightarrow((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$, для якого $j(X\setminus Y)\subset(\mathbb{R}^\infty)^2\setminus\mathbb{R}^\infty$. Тоді формула $i(x)=(j(x),\rho(x))$ визначає вкладення $i:X\hookrightarrow(\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty$, для якого $i(Y)\subset\ \subset\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty$, $i(X\setminus Y)\subset((\mathbb{R}^\infty)^2\setminus\mathbb{R}^\infty)\times\mathbb{R}^\infty$. Оскільки $i(X)\cap((\mathbb{R}^\infty)^2\times\mathbb{R}^n)=i(X_n)$, а згідно з твердженням [2, 3.6] маємо $(\mathbb{R}^\infty)^2\times\mathbb{R}^\infty=\varinjlim(\mathbb{R}^\infty)^2\times\mathbb{R}^n$, то $i(X)$ – замкнена підмножина в $(\mathbb{R}^\infty)^2\times\mathbb{R}^\infty$. Залишається зауважити, що пара $((\mathbb{R}^\infty)^2\times\mathbb{R}^\infty,\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty)$ гомеоморфна до пари $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$. Теорема доведена.

Лема 3. *Нехай $(X;Y,Z)$ – компактна скінченновимірна тріада, $X_0=X\cap Z$, $Y_0=Y\cap Z$, (U,V) – $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$-многовид, $f:(X,Y)\to(U,V)$ – неперервне відображення, $g:(X_0,Y_0)\hookrightarrow(U,V)$ – вкладення, $H:(X_0\times I,Y_0\times I)\to(U,V)$ – гомотопія, для якої $H(x,0)=f(x)$ при $x\in X$, $H(x,1)=g(x)$ при $x\in X_0$, і $g(X_0\setminus Y_0)\subset U\setminus V$. Тоді існує така* *гомотопія* $\tilde{H}:(X\times I,Y\times I)\to(U,V)$, *що* $\tilde{H}|_{(X_0\times I,Y_0\times I)}=H$, *при* $x\in X$ *маємо* $\tilde{H}(x,0)=f(x)$, $\tilde{H}(x,1)=\tilde{g}(x)$ *і* $\tilde{g}:(X,Y)\hookrightarrow(U,V)$ *– вкладення, для якого* $\tilde{g}(X\setminus Y)\subset U\setminus V$.

Доведення. Згідно зі сказаним вище можна вважати, що $U\subset\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty$ – відкрита підмножина, $V=U\cap\mathbb{R}^\infty$. Позначимо $H_0:X_0\times I\cup X\times\{0\}\to U$ відображення, означене як $H_0(x,t)=H(x,t)$ на $X_0\times I$ і $H_0(x,0)=f(x)$ на $X\times\{0\}$. Задамо відношення еквівалентності «~» на $X\times I$ так: $(x,t)\sim(x',t')$, якщо $(x,t)=(x',t')$ (x,t), $(x',t')\in X_0\times I\cup X\times\{0\}$ і $H_0(x,t)=H_0(x',t')$. Оскільки це відношення замкнене, і фактор-відображення приклеює замкнену підмножину $X_0\times I\cup X\times\{0\}$ скінченновимірного компакта $X\times I$ до компактної, отже скінченновимірної множини в $\mathbb{R}^\infty\times\mathbb{R}^\infty$, то фактор-простори $X'=X\times I/\sim$, $X_0'=(X_0\times I\cup X\times\{0\})/\sim$, $Y'=(Y\times I\cup H_0^{-1}(V))/\sim$, $Y_0'=H_0^{-1}(V)/\sim$ є скінченновимірними компактами і $Y_0'=Y'\cap X_0'$ в X'.

Якщо $q:(X_0\times I\cup X\times\{0\},H_0^{-1}(V))\to(X_0',Y_0')$, – фактор-відображення, то рівність $H'\circ q=H_0$ визначає єдине неперервне вкладення $H':(X_0',Y_0')\hookrightarrow(U,V)$. Його згідно з 1 можна продовжити до такого вкладення $H'':W\hookrightarrow U$ деякого околу $W\subset X'$, $W\supset X_0'$, що $H''(W\cap Y')\subset V$, $H''(W\setminus Y')\subset U\setminus V$. Прообраз $W_0=q^{-1}(W)$ є околом множини $X_0\times I\cup X\times\{0\}$ у $X\times I$. За компактністю існують таке число $\delta>0$ і замикання $\overline{OX_0}$ околу $OX_0\supset X_0$ у X, що $\overline{OX_0}\times I\cup X\times[0,\delta]\subset W_0$. Згідно з теоремою Бракера – Тітці – Урисона оберемо неперервну функцію $\varphi:X\to I$, для якої $\varphi(X_0)\subset\{1\}$, $\varphi(X\setminus\overline{OX_0})\subset\{0\}$. Тоді формула $\tilde{H}(x,t)=H''\circ q(x,(\delta+(1-\delta)\varphi(x))t)$ визначає шукану гомотопію. Лема доведена.

Теорема 5. *(Класифікаційна). Нехай пари* (X,Y) *та* (X',Y') *є* $((\mathbb{R}^\infty)^2,\mathbb{R}^\infty)$*-многовидами. Тоді кожна гомотопійна еквівалентність* $f:(X,Y)\to(X',Y')$ *гомотопна до деякого ізоморфізму* $\bar{f}:(X,Y)\to(X',Y')$*, для якого* $\bar{f}(X\setminus Y)=X'\setminus Y'$.

Доведення. За умовою існує $g:(X',Y')\to(X,Y)$, для якого $g\circ f\sim\mathbf{1}_{(X,Y)}$, $f\circ g\sim\mathbf{1}_{(X',Y')}$. Крім того, $X=\varinjlim X_m$, $X'=\varinjlim X_n'$, де X_m, X_n' – скінченновимірні компакти. Тоді $Y=\varinjlim Y_m$, $Y'=\varinjlim Y_n'$, де $Y_m=X_m\cap Y$, $Y_n'=X_n'\cap Y'$.

Нехай $m_1=1$. За лемою 3 обмеження $f|_{X_{m_1}}:(X_{m_1},Y_{m_1})\to(X',Y')$ гомотопне до вкладення $f_1:(X_{m_1},Y_{m_1})\to(X',Y')$, для якого $f_1(X_{m_1}\setminus Y_{m_1})\subset X'\setminus Y'$. Насправді маємо $f_1:(X_{m_1},Y_{m_1})\to(X_{n_1}',Y_{n_1}')$ для деякого $n_1\in\mathbb{N}$.

Оскільки $g|_{f_1(X_{m_1})}\sim g\circ f\circ f_1^{-1}\sim\mathbf{1}_X\circ f_1^{-1}=f_1^{-1}$, то знову, згідно з лемою 3, маємо існування гомотопного до g на (X_n',Y_{n_1}') вкладення $g_1:(X_{n_1}',Y_{n_1}')\hookrightarrow(X_{m_2},Y_{m_2})\subset(X,Y)$, для якого $g_1(X_{n_1}'\setminus Y_{n_1}')\subset X\setminus Y$. За побудовою $X_{m_1}\subset g_1(X_{n_1}')\subset X_{m_2}$. Тепер, беручи до уваги, що $f|_{g_1(X_{n_1}')}\sim f\circ g\circ g_1^{-1}\sim\ \sim\mathbf{1}_{Y'}\circ g_1^{-1}=g_1^{-1}$, продовжимо цю гомотопію до гомотопії між $f|_{(X_{m_2},Y_{m_2})}$ та деяким вкладенням $f_2:(X_{m_2},Y_{m_2})\hookrightarrow(X_{n_2}',Y_{n_2}')\subset(X',Y')$, для якого $f_2(X_{m_2}\setminus Y_{m_2})\subset X_{n_2}'\setminus Y_{n_2}'$. За побудовою f_2 є продовженням f_1.

Далі будуємо продовження $g_2:(X_{n_2}',Y_{n_2}')\hookrightarrow(X_{m_3},Y_{m_3})\subset(X,Y)$ вкладення: $g_1:(X_{n_1}',Y_{n_1}')\hookrightarrow(X_{m_2},Y_{m_2})$ гомотопне до $g|_{f_2(X_{m_2})}$ і т. д. Маємо:

$$\begin{tikzcd}
(X_{m_1}, Y_{m_1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_1"'] & (X_{m_2}, Y_{m_2}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"'] & (X_{m_1}, Y_{m_1}) \arrow[d, "f_3"'] & \cdots \\
(X'_{n_1}, Y'_{n_1}) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook, "g_1"'] & (X'_{n_2}, Y'_{n_2}) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook, "g_2"'] & (X'_{n_3}, Y'_{n_3}) & \cdots
\end{tikzcd}$$

Покладемо $f_0 = \underline{\lim}\, f_i : (X,Y) \to (X',Y')$, $g_0 = \underline{\lim}\, g_i : (X',Y') \to (X,Y)$. Тоді f_0 і g_0 взаємно обернені вкладення, гомотопні відповідно до f і g, і $f_0(X \setminus Y) = X' \setminus Y'$. Теорема доведена.

Звідси випливають дві теореми:

Теорема 6. *Кожен стягуваний $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-многовид (X,Y), де $Y \neq \varnothing$, гомеоморфний до пари $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$.*

Теорема 7. *(Стабільності). Для кожного $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-многовида (X,Y) пара $(X \times \mathbb{R}^\infty, Y \times \mathbb{R}^\infty)$ теж є $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$-многовидом, гомеоморфним до (X,Y).*

1. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Topology Appl. – 1984. – V. 18. – P. 69–79.
2. Базилевич Л.С., Зарічний М.М. Вступ до топології нескінченновимірних многовидів. – К.: ІЗМН, 1996. – 40 с.
3. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
4. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология: основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 288 с.

Topological characterization is obtained for pairs of spaces that are globally or locally homeomorphic to $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

Key words: *infinite-dimensional manifolds, direct limit, compactum.*

УДК 517.927
ББК 22.161.616

В.В. Мазуренко, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій

ПРО ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ ҐРІНА СИСТЕМИ З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ПАРАМЕТРІВ

Досліджено структуру спектра крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах. Отримано зображення розв'язку задачі в інтегральній формі за допомогою конструктивно побудованої матриці Ґріна.

Ключові слова: *квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Ґріна.*

Вступ. Дослідження різноманітних фізичних явищ, які враховують природну єдність дискретного й неперервного, приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описується диференціальними й квазідиференціальними (к.-д.) рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах ([1; 2]). Крайові задачі для диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах успішно вивчаються математиками та механіками віддавна. Суттєвий поштовх для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М.Г.Крейна [3, с.648] стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає, крім неперервного, ще й точковий розподіл. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності появлялись у задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярного носія коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільшого мали частковий характер.