$$\begin{tikzcd}
(X_{m_1}, Y_{m_1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & (X_{m_2}, Y_{m_2}) \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & (X_{m_3}, Y_{m_3}) \arrow[d, "f_3"'] \\
(X'_{k_1}, Y'_{k_1}) \arrow[r] \arrow[ur, "g_1"'] & (X'_{k_2}, Y'_{k_2}) \arrow[r] \arrow[ur, "g_2"'] & (X'_{k_3}, Y'_{k_3})
\end{tikzcd}$$

Покладемо $f_0 = \underline{\lim} f_i : (X,Y) \to (X',Y')$, $g_0 = \underline{\lim} g_i : (X',Y') \to (X,Y)$. Тоді f_0 і g_0 взаємно обернені вкладення, гомотопні відповідно до f і g, і $f_0(X \setminus Y) = X' \setminus Y'$. Теорема доведена.

Звідси випливають дві теореми:

Теорема 6. *Кожен стягуваний* $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$*-многовид* (X,Y), *де* $Y \neq \varnothing$, *гомеоморфний до пари* $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$.

Теорема 7. *(Стабільності). Для кожного* $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$*-многовида* (X,Y) *пара* $(X \times \mathbb{R}^\infty,\ Y \times \mathbb{R}^\infty)$ *теж є* $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty)$*-многовидом, гомеоморфним до* (X,Y).

1. Sakai K. On $\mathbb{R}^\infty$-manifolds and Q^∞-manifolds // Topology Appl. – 1984. – V. 18. – P. 69–79.
2. Базилевич Л.С., Зарічний М.М. Вступ до топології нескінченновимірних многовидів. – К.: ІЗМН, 1996. – 40 с.
3. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
4. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология: основные конструкции. – М.: МГУ, 1988. – 288 с.

Topological characterization is obtained for pairs of spaces that are globally or locally homeomorphic to $((\mathbb{R}^\infty)^2, \mathbb{R}^\infty \times \{0\})$.

Key words: *infinite-dimensional manifolds, direct limit, compactum.*

УДК 517.927
ББК 22.161.616

В.В. Мазуренко, М.Ф. Стасюк, Р.М. Тацій

ПРО ВЛАСТИВОСТІ МАТРИЦІ ҐРІНА СИСТЕМИ З ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИМ РОЗПОДІЛОМ ПАРАМЕТРІВ

Досліджено структуру спектра крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах. Отримано зображення розв'язку задачі в інтегральній формі за допомогою конструктивно побудованої матриці Ґріна.

Ключові слова: *квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Ґріна.*

Вступ. Дослідження різноманітних фізичних явищ, які враховують природну єдність дискретного й неперервного, приводять до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описується диференціальними й квазідиференціальними (к.-д.) рівняннями з узагальненими функціями в коефіцієнтах ([1; 2]). Крайові задачі для диференціальних рівнянь із розподілами в коефіцієнтах успішно вивчаються математиками та механіками віддавна. Суттєвий поштовх для розвитку ця тематика отримала завдяки фундаментальним роботам М.Г.Крейна [3, с.648] стосовно диференціальних рівнянь другого порядку, що моделюють вільні коливання струни, маса якої допускає, крім неперервного, ще й точковий розподіл. До введення поняття δ-функції точкові сингулярності появлялись у задачах у формі специфічних умов спряження для розв'язку і його похідних у точках, котрі з погляду сучасної теорії належать до сингулярного носія коефіцієнтів рівняння. Такі дослідження здебільшого мали частковий характер.

У роботах [4, 5] авторами встановлено існування і єдиність розв'язку, а також вивчено спектральні властивості широкого класу коректних (при дослідженні яких не виникає проблеми множення функціоналів) крайових задач для к.-д. рівнянь довільного скінченного порядку. У статті [6] отримано також аналог альтернативи Фредгольма для системи першого порядку. У цій роботі деякі з результатів перенесено на системи рівнянь вищих порядків.

1. Позначення. Через $\mathbb{C}^{p\times q}$ позначаємо лінійний простір комплексних матриць розміру $p\times q$, а через $\bar{D}(I)$ – простір неперервних на інтервалі I дійсної осі функцій з компактним носієм, спряжений до якого є простором $\bar{D}'(I)$ векторних розподілів. Під $AC_p[a,b]$, $L_p[a,b]$ і $L_p^2[a,b]$ розуміємо простори матричних функцій $F:[a,b]\to\mathbb{C}^{p\times p}$ відповідно з абсолютно неперервними, інтегровними за Лебегом та інтегровними з квадратом модуля на проміжку $[a,b]$ елементами $f_{ij}(x)$, а під $BV_p^{+}[a,b]$ – простір матриць, елементи $f_{ij}(x)$ яких є неперервними справа на проміжку $[a,b)$ функціями обмеженої варіації такими, що $f_{ij}(b-0)=f_{ij}(b)$. Відповідні простори вектор-функцій позначаємо з рискою вгорі. Уживаємо також позначення: 0 – нульовий елемент (матриця, вектор, число), E_p – одинична матриця порядку p, τ – символ транспонування, $\Delta F(x)=F(x)-F(x-0)$ – стрибок функції $F\in BV_p^{+}[a,b]$ у точці x, (f,φ) – значення функціоналу f на функції $\varphi(x)$.

2. Постановка задачі. Розглядаємо к.-д. вираз довільного парного або непарного порядку m із матричними коефіцієнтами:

$$l_m[y]=(-1)^l\left\{iB(x)\left[B(x)y^{(l)}\right]^{(m-2l)}\right\}^{(l)}+\sum_{r,s=0}^{l}(-1)^{l-s}\left(B_{rs}(x)y^{(l-r)}\right)^{(l-s)},\tag{1}$$

де $y:[a,b]\to\mathbb{C}^p$, $l,m\in\mathbb{N}$, $l\le[\frac{m}{2}]$, $i=\sqrt{-1}$. До того ж при $m=2n$ вважаємо, що $l=n$, $B(x)\equiv 0$, тобто $l_{2n}[y]=\sum_{r,s=0}^{n}(-1)^{n-s}\left(B_{rs}(x)y^{(n-r)}\right)^{(n-s)}$.

К.-д. вирази вигляду (1) з достатньо гладкими, а також сумовними за Лебегом $(p\times p)$-матричними коефіцієнтами досліджувалися багатьма авторами. Зокрема в [7] побудовано елементарну теорію і проведено спектральний аналіз операторів, породжених к.-д. виразами вигляду (1) тоді, коли $m=2n$, $p=1$, $B_{rs}\equiv 0\,(r\ne s)$. Випадок, коли в (1) m є довільним натуральним, $l=n$, $B_{rs}\equiv 0$ для всіх r,s таких, що $r\ne s+\{0,\pm1\}$, для $p=1$ розглянуто у [8], а для $p>1$ – в [9]. К.-д. вирази дещо загальнішого вигляду розглядались у роботах [10, 11].

У цій статті послаблюємо вимоги до коефіцієнтів к.-д. виразу (1) і вважаємо, що виконуються такі припущення: (A) якщо $m=2n$, то $B_{00}^{-1}(x)$ є обмежена й вимірна при $x\in[a,b]$ матриця, $B_{r0},B_{0s}\in L_p^2[a,b]$, $B_{rs}=A_{rs}',A_{rs}\in BV_p^{+}[a,b]$ $\forall r,s=\overline{1,n}$; інакше $B^{-1}(x)$ – обмежена й вимірна при $x\in[a,b]$, а $B_{00},B_{r0},B_{0s}\in L_p[a,b]$, $B_{rs}=A_{rs}',A_{rs}\in BV_p^{+}[a,b]$ $\forall r,s=\overline{1,n}$, якщо $l=n$, і $B_{rs}=A_{rs}',A_{rs}\in BV_p^{+}[a,b]$ $\forall r,s=\overline{0,l}$, якщо $l\ne n$; (B) $B_{j0}^{*}=B_{0j}$, $A_{rs}^{*}=A_{sr}$, де $j=\overline{0,n}$, $r,s=\overline{1,n}$, якщо $l=n$, і, $A_{rs}^{*}=A_{sr}$, де $r,s=\overline{1,n}$, якщо $l\ne n$. Крім того, коли $m=2n+1$, то $B^{*}=B$.

Відзначимо, що теореми існування і єдиності розв'язків початкових задач для к.-д. виразів із матричними коефіцієнтами, а також елементи лінійної теорії відповідних к.-д. рівнянь отримано в роботі [12].

На скінченному проміжку $[a,b]$ розглядаємо крайову задачу

$$l_m[y]-\lambda\omega(x)y=\sum_{j=0}^{m-l-1}(-1)^{j+1}f_j^{(j+1)}(x),\tag{2}$$

$$U_k(y)\equiv\sum_{\nu=1}^{m}\left[P_{k\nu}y^{[\nu-1]}(a)+Q_{k\nu}y^{[\nu-1]}(b)\right]=0,\ k=\overline{1,m},\tag{3}$$

де λ – спектральний параметр, $\omega(x)$ і $f_j(x)$ задовольняють умову

(C) $\omega=\sigma'$, $\sigma\in BV_p^+[a,b]$, $\sigma^*=\sigma$, $f_j\in\overrightarrow{BV}_p^+[a,b]$, $j=\overline{0,m-l-1}$,

а $U_k(y)$ – лінійно незалежні крайові форми із заданими числовими матрицями P_{kv},Q_{kv} $(k,v=\overline{1,m})$ і квазіпохідними $y^{[k]}(x)\,(k=\overline{0,m})$, що визначаються виразами (при $m=2n$ тут слід покласти $l=n$, $B\equiv 0$, $f_n\equiv 0$):

$$\begin{aligned}
&y^{[k]}=y^{(k)},\ k=\overline{0,l-1};\ y^{[l+k-1]}=-\tfrac{1+i}{\sqrt2}B(x)y^{(l+k-1)},\ k=\overline{1,m-2n};\\
&y^{[l+k]}=-\left(y^{[l+k-1]}\right)'+f'_{m-l-k},\ k=\overline{1,2(n-l)};\\
&y^{[m-l]}=-\tfrac{1+i}{\sqrt2}B(x)\left(y^{[m-l-1]}\right)'+\sum_{r=0}^{l}B_{r0}(x)y^{(l-r)}+f_l';\\
&y^{[m-l+k]}=-\left(y^{[m-l+k-1]}\right)'+\sum_{r=0}^{l}B_{rk}(x)y^{(l-r)}+f'_{l-k},\ k=\overline{1,l}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Означення 1. Під розв'язком крайової задачі (2), (3) розуміємо функцію $y\in\overrightarrow{AC}_p[a,b]$ таку, що $U_k(y)=0, k=\overline{1,m}$ і справджується тотожність

$$\left(y^{[m]}-\lambda\omega y,\varphi\right)=0\ \ \forall\varphi\in\overline{D}(I),\ I\supseteq[a,b].$$

Якщо $f_j(x)\equiv const\ (j=\overline{0,m-l-1})$, то задача (2), (3) набуває вигляду

$$l_m[y]=\lambda\omega(x)y,\quad U_k(y)=0,\ k=\overline{1,m}.\tag{5}$$

Значення λ, для яких задача (5) має нетривіальні розв'язки, є власними значеннями цієї задачі, а самі розв'язки – відповідними власними векторами.

3. Метод дослідження. Основна технічна ідея полягає в заміні крайової задачі для системи рівнянь високого порядку деякою еквівалентною задачею для системи першого порядку. Перевага такого підходу очевидна – присутність у системі лише перших похідних дає змогу звести аналіз сингулярностей до питання про розташування стрибків функцій, похідні яких породжують ці сингулярності.

Лема 1. *Нехай справджуються умови (A)–(C) і співвідношення*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{l}\left[P_{kj}P^*_{v,m-j+1}-P_{k,m-j+1}P^*_{vj}\right]+\sum_{j=l+1}^{n}(-1)^{j-l}i\left[P_{kj}P^*_{v,m-j+1}-P_{k,m-j+1}P^*_{vj}\right]+\\
&+(-1)^{n-l+1}iP_{k,n+1}P^*_{v,n+1}=\sum_{j=1}^{l}\left[Q_{kj}Q^*_{v,m-j+1}-Q_{k,m-j+1}Q^*_{vj}\right]+\\
&+\sum_{j=l+1}^{n}(-1)^{j-l}i\left[Q_{kj}Q^*_{v,m-j+1}-Q_{k,m-j+1}Q^*_{vj}\right]+(-1)^{n-l+1}iQ_{k,n+1}Q^*_{v,n+1}
\end{aligned}\tag{6}$$

(якщо $m=2n$, то в (6) слід покласти $l=n$, $P_{k\,n+1}=Q_{k\,n+1}=0$, $k=\overline{1,2n}$). Тоді задача (2), (3) еквівалентна такій задачі:

$$Jy'=[B'(x)+\lambda A'(x)]y+F'(x),\quad a\le x\le b,\tag{7}$$

$$y(a)=Mv,\ \ y(b)=Nv,\ \ M^*JM=N^*JN,\tag{8}$$

де $J,M,N\in\mathbb{C}^{mp\times mp}$, $y:[a,b]\to\mathbb{C}^{mp}$, $B,A\in BV^+_{mp}[a,b]$, $F\in\overrightarrow{BV}^+_{mp}[a,b]$, $v\in\mathbb{C}^{mp}$ – *параметр,* $rank(M\,|\,N)=mp$, *до того ж* $J^*=-J$, $J^*J=E_{mp}$, $B^*=B$, $A^*=A$.

Доведення. Система (2) приводиться до вигляду (7) за допомогою вектора $y=(y,y^{[1]},\ldots,y^{[m-1]})^T$, складеного з квазіпохідних (4). При цьому вектор

$$F=\left(-f_0,\ldots,-f_{l-1},\tfrac{1+i}{\sqrt2}\int B^{-1}df_l,-if_{l+1},\ldots,(-1)^{n-l}if_n,\ldots,if_{m-l-1},\underbrace{0,\ldots,0}_{l}\right)^T,$$

а матриці $J,A(x),B'(x)$ порядку mp мають таку блокову структуру (описуємо лише ненульові $(p\times p)$-блоки $\hat J_{kv},\hat A_{kv},\hat B_{kv}$ $(k,v=\overline{1,m})$ кожної з матриць):

$$\hat{J}_{k,m-k+1}=\begin{cases}-E_p, & k=\overline{1,l};\\ (-1)^{m-l-k}iE_p, & k=\overline{l+1,m-l};\\ E_p, & k=\overline{m-l+1,m};\end{cases}\qquad \hat{A}_{11}=\sigma;$$

$$\hat{B}_{kv}=\begin{cases}B_{0,n-k+1}B_{00}^{-1}B_{n-v+1,0}-B_{n-v+1,n-k+1}, & k,v=\overline{1,n};\\ -B_{0,n-k+1}B_{00}^{-1}, & k=\overline{1,n},\ v=n+1;\\ -B_{00}^{-1}B_{n-v+1,0}, & k=n+1,\ v=\overline{1,n};\\ -B_{00}^{-1}, & k=v=n+1;\\ E_p, & k=\overline{2,m}, k\neq n+1, v=m-k+2\end{cases}\qquad \text{для } m=2n,$$

$$\hat{B}_{kv}=\begin{cases}-B_{l-v+1,l-k+1}, & k,v=\overline{1,l};\\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}B_{0,l-k+1}B^{-1}, & k=\overline{1,l},\ v=l+1;\\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}B^{-1}B_{l-v+1,0}, & k=l+1,\ v=\overline{1,l};\\ -B^{-1}B_{00}B^{-1}, & k=v=l+1;\\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=l+1, v=m-l+1;\\ -\frac{1-i}{\sqrt{2}}B^{-1}, & k=m-l+1, v=l+1;\\ E_p, & k=\overline{2,m}, k\neq l+1, m-l+1, v=m-k+2\end{cases}\qquad \text{для } m=2n+1.$$

Звідси на підставі умов (A) і (C) випливає $\mathcal{B},\mathcal{A}\in BV^{+}_{mp}[a,b]$ і $\mathcal{F}\in \overline{BV}^{*}_{mp}[a,b]$. Легко також установити, що $\mathcal{J}^{*}=\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^{*}\mathcal{J}=E_{mp}$ і внаслідок умови (B) справджуються рівності $\mathcal{B}^{*}=\mathcal{B}$, $\mathcal{A}^{*}=\mathcal{A}$.

Умови (3) приводяться до вигляду (8) за допомогою матриць $\mathcal{M}=\mathcal{J}P^{*}$, $\mathcal{N}=-\mathcal{J}Q^{*}$, де P,Q – блокові матриці порядку mp, складені з коефіцієнтів P_k,Q_k крайових форм $U_k(y)$. При цьому маємо

$$\mathcal{M}^{*}\mathcal{J}\mathcal{M}-\mathcal{N}^{*}\mathcal{J}\mathcal{N}=P\mathcal{J}^{*}\mathcal{J}\mathcal{J}P^{*}-Q\mathcal{J}^{*}\mathcal{J}\mathcal{J}Q^{*}=P\mathcal{J}P^{*}-Q\mathcal{J}Q^{*}=0.$$

Тут використано рівність (6), яка з огляду на структуру матриці $\mathcal{J}$ рівносильна умові $P\mathcal{J}P^{*}=Q\mathcal{J}Q^{*}$. □

Зауваження 1. Коректність означення розв'язку ([13]) задачі (2), (3) випливає з умов (A), (C) і рівностей

$$\left\{\mathcal{J}\left[\Delta\mathcal{B}(x)+\lambda\Delta\mathcal{A}(x)\right]\right\}^{2}=0,\ \left[\Delta\mathcal{B}(x)+\lambda\Delta\mathcal{A}(x)\right]\mathcal{J}\Delta\mathcal{F}(x)=0, \tag{9}$$

котрі, як легко перевірити, справджуються для довільних $\lambda\in\mathbb{C}, x\in[a,b]$.

4. Основні результати. Далі вважаємо, що виконуються умови (A) – (C) і (6).

Теорема 1. *Нехай $\sigma(x)$ неспадна при $x\in[a,b]$ і відмінна від сталої матриця. Тоді задача (5) має не більш ніж зліченну кількість дійсних власних значень λ_k, $k=1,2,\ldots$, які не мають скінченної граничної точки. Власні вектори $y(x,\lambda_k)$, що відповідають різним власним значенням, є σ-ортогональними, тобто*

$$\int_a^b y^{*}(x,\lambda_k)d\sigma(x)y(x,\lambda_v)=0,\quad \lambda_k\neq\lambda_v. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $y(x,\lambda_k)$ – власний вектор крайової задачі (5), що відповідає власному значенню λ_k. Тоді на підставі леми 1 маємо

$$\mathcal{J}\mathcal{Y}_k'=[\mathcal{B}'(x)+\lambda_k\mathcal{A}'(x)]\mathcal{Y}_k, \tag{11}$$

$$\mathcal{Y}_k(a)=\mathcal{M}\upsilon_k,\ \mathcal{Y}_k(b)=\mathcal{N}\upsilon_k,\ \mathcal{M}^{*}\mathcal{J}\mathcal{M}=\mathcal{N}^{*}\mathcal{J}\mathcal{N}, \tag{12}$$

$Y_k(x)=\left(y(x,\lambda_k),y^{[1]}(x,\lambda_k),\ldots,y^{[m-1]}(x,\lambda_k)\right)^{\tau}$. Унаслідок (9) добутки $Y_k^* J Y_\nu'$ і $Y_k^{*\prime} J Y_\nu$ існують у сенсі теорії узагальнених функцій, до того ж справджується рівність

$$(Y_k^* J Y_\nu)' - Y_k^*(JY_\nu') - (JY_k')^* Y_\nu = Y_k^*[B' + \lambda_\nu A']Y_\nu - Y_k^*[B^{*\prime} + \bar{\lambda}_k A^{*\prime}]Y_\nu = (\lambda_\nu - \bar{\lambda}_k)Y_k^* A' Y_\nu,$$

тобто $Y_k^*(b)JY_\nu(b) - Y_k^*(a)JY_\nu(a) = (\lambda_\nu - \bar{\lambda}_k)\int_a^b Y_k^*(x)dA(x)Y_\nu(x)$. Тут використано співвідношення (11) і властивості матриць $J, A(x), B(x)$. Ураховуючи умови (12), структуру матриці $A(x)$ і власного вектора $Y_k(x)$, маємо:

$$(\lambda_\nu - \bar{\lambda}_k)\int_a^b y^*(x,\lambda_k)d\sigma(x)y(x,\lambda_\nu) = 0\,. \tag{13}$$

Нехай $\lambda_\nu = \lambda_k$. Оскільки $\sigma(x)$ неспадна при $x\in[a,b]$ і відмінна від сталої матриця, то для довільного власного вектора $y(x,\lambda_k)$ справджується нерівність $\int_a^b y^*(x,\lambda_k)d\sigma(x)y(x,\lambda_k) > 0$. На цій підставі з (13) випливає, що $\lambda_k = \bar{\lambda}_k$, тобто всі власні значення задачі (5) є дійсними. При $\lambda_\nu \neq \lambda_k = \bar{\lambda}_k$ з (13) випливає σ-ортогональність (10) власних векторів $y(x,\lambda_k)$ і $y(x,\lambda_\nu)$.

Власні значення задачі є нулями визначника $\Delta(\lambda) = \det[U_k(Y_\nu)]_{k,\nu=1}^m$, де $Y_1(x,\lambda), Y_2(x,\lambda),\ldots,Y_m(x,\lambda)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння

$$l_m[Y] - \lambda\omega(x)Y = 0,\quad Y:[a,b]\to\mathbb{C}^{p\times p}, \tag{14}$$

асоційованого з рівнянням (5) [7, с.110]. За результатами роботи [14] ці розв'язки є цілими функціями від параметра λ, тому $\Delta(\lambda)$ – також ціла функція. Щойно було показано, що вона не має недійсних нулів, тому не анулюється тотожно. Отже, множина нулів цієї функції не має скінченної граничної точки.

Зауваження 2. Власні вектори, що відповідають кратному власному значенню, можна теж вибрати σ-ортогональними, застосувавши процес ортогоналізації.

Зауваження 3. Якщо $\sigma(x)$ – східчаста матрична функція зі скінченною кількістю точок розривів, тобто матриця $\omega = \sigma'$ містить особливості імпульсного типу, то задача (5) має скінченну кількість власних значень і відповідних їм власних векторів.

Теорема 3. *Якщо λ не є власним значенням задачі (5), то неоднорідна задача (2), (3) має єдиний розв'язок $y\in \overline{AC}_p[a,b]$, що зображається у вигляді*

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m-l-1}\int_a^b \frac{\partial^j G(x,t,\lambda)}{\partial t^j} df_j(t)\,. \tag{15}$$

Доведення. Для $j=\overline{0,m-l-1}$ побудуємо розв'язки задач

$$l_m[y] - \lambda\omega(x)y = (-1)^{j+1} f_l^{(j+1)}(x),\quad U_k(y)=0,\ k=\overline{1,m} \tag{16}$$

і просумуємо їх. Нехай функція $K:[a,b]\times[a,b]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{p\times p}$ за змінною x є розв'язком рівняння (14) таким, що $K_x^{[k]}(x,t,\lambda)\big|_{x=t} = 0$, $k=\overline{0,m-2}$, $K_x^{[m-1]}(x,t,\lambda)\big|_{x=t} = E_p$.

Тоді загальний розв'язок системи (16) має вигляд

$$y_j(x) = \begin{cases} \sum_{r=1}^m K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)c_r^j + \int_a^x K^{*\{j\}*}(x,t,\lambda)df_j(t), & j\neq l \\ \sum_{r=1}^m K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)c_r^j + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\int_a^x K^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)B^{-1}(t)df_l(t), & j=l; \end{cases} \tag{17}$$

символ $\{\bullet\}$ означає квазіпохідну в сенсі спряженого до (14) рівняння [12, с.50]. Ураховуючи вирази для квазіпохідних

$$
\begin{aligned}
&Y^{\{k\}}=Y^{(k)},\ k=\overline{0,l-1};\ Y^{\{l+k-1\}}=\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}B^{*}(x)Y^{(l+k-1)},\ k=\overline{1,m-2n};\\
&Y^{\{l+k\}}=\left(Y^{\{l+k-1\}}\right)',\ k=\overline{1,2(n-l)};\\
&Y^{\{m-l\}}=\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}B^{*}(x)\left(Y^{\{m-l-1\}}\right)'-\sum_{s=0}^{l}B_{0s}^{*}(x)Y^{(l-s)};\\
&Y^{\{m-l+k\}}=-\left(Y^{\{m-l+k-1\}}\right)'-\sum_{s=0}^{l}B_{ks}^{*}(x)Y^{(l-s)},\ k=\overline{1,l},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

переписуємо (16) у вигляді

$$
y_j(x)=\sum_{r=1}^{m}K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)c_r^j+\int_a^x K^{*\langle j\rangle*}(x,t,\lambda)df_j(t);
\tag{19}
$$

тут символ $\langle\bullet\rangle$ означає звичайну похідну $(\bullet)$ для $j=\overline{0,l}$ і квазіпохідну $\{\bullet\}$ для $j=\overline{l+1,m-l-1}$.

Розв'язок (19) містить m невідомих числових векторів. Для їх відшукання необхідно задовольнити крайові умови (3). Таким чином, приходимо до системи m матричних рівнянь $\sum_{r=1}^{m}U_k\left(K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)\right)c_r^j+\sum_{v=1}^{m}Q_{kv}\int_a^b K^{\{v-1\}*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda)df_j(t)=0$. Оскільки за умовою теореми λ не є власним значенням, то визначник цієї системи не дорівнює нулеві. Тому вектори c_r^j $(r=\overline{1,m})$ визначаються із системи однозначно. Через $V_{kr}(\lambda)$ позначимо матрицю порядку p, складену з алгебричних доповнень елементів матриці $U_k\left(K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)\right)$, $k,r=\overline{1,m}$ у визначнику $\Delta(\lambda)$. Нехай $W_{kr}(\lambda)=-V_{kr}^{\tau}(\lambda)$. Тоді для $r=\overline{1,m}$

$$
c_r^j=\sum_{k,v=1}^{m}\frac{W_{kr}(\lambda)Q_{kv}}{\Delta(\lambda)}\int_a^b K^{\{v-1\}*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda)df_j(t).
$$

Підставляємо ці значення у формулу (19). Вираз

$$
G_j(x,t,\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{r,k,v=1}^{m}K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{kr}(\lambda)Q_{kv}}{\Delta(\lambda)}K^{\{v-1\}*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda), & x<t;\\ \displaystyle\sum_{r,k,v=1}^{m}K^{*\{r-1\}*}(x,a,\lambda)\frac{W_{kr}(\lambda)Q_{kv}}{\Delta(\lambda)}K^{\{v-1\}*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda)+K^{*\langle j\rangle*}(x,t,\lambda), & x\ge t\end{cases}
$$

називаємо матрицею Ґріна крайової задачі (19). З огляду на структуру цієї матриці очевидною є така її властивість:

$$
G_j(x,t,\lambda)=\frac{\partial^j G_0(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\equiv\frac{\partial^j G(x,t,\lambda)}{\partial t^j}\quad \forall j=\overline{0,l}.
\tag{20}
$$

На підставі (18) маємо $K^{*\{l+k\}*}(x,t,\lambda)=\dfrac{\partial^k K^{*\{l\}*}(x,t,\lambda)}{\partial t^k}$, $k=\overline{1,m-2l-1}$, тому властивість (20) справджується також для $j=\overline{l+1,m-l-1}$, що й доводить (15).

Зауваження 4. Доведення цього твердження можна було б отримати як наслідок із теореми А зі статті [6], на підставі якої розв'язок крайової задачі (7), (8) за умови, що λ не є власним значенням, має вигляд

$$
y(x)=\int_a^b R(x,t,\lambda)dF(t),
\tag{21}
$$

де розв'язувальне ядро

$$
R(x,t,\lambda)=\begin{cases}\Phi(x,a,\lambda)M\left[\Phi(b,a,\lambda)M-N\right]^{-1}\Phi(b,t,\lambda)J, & x<t;\\ \Phi(x,a,\lambda)M\left[\Phi(b,a,\lambda)M-N\right]^{-1}\Phi(b,t,\lambda)J-\Phi(x,t,\lambda)J, & x\ge t\end{cases}
$$

є ермітовим у тому розумінні, що $R(x,t,\lambda)=R^{*}(t,x,\bar\lambda)$, якщо $x\ne t$ (тут $\Phi(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця відповідної однорідної системи).

Однак для отримання конкретного вигляду розв'язку вибраний нами шлях видається більш конструктивним. Порівнюючи зображення (15) і (21), легко зрозуміти, що перша $(p\times mp)$-блокова стрічка ядра $R(x,t,\lambda)$ є такою:

$$\left(-G,\dots,-\frac{\partial^{l-1}G}{\partial t^{l-1}},\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\partial^{l}G}{\partial t^{l}}B^{-1},i\frac{\partial^{l+1}G}{\partial t^{l+1}},\dots,(-1)^{n-l+1}i\frac{\partial^{n}G}{\partial t^{n}},\dots,-i\frac{\partial^{m-l-1}G}{\partial t^{m-l-1}},\underbrace{0,\dots,0}_{l}\right).$$

Теорема 4. *Матриця Ґріна $G_j(x,t,\lambda)$ має такі властивості:*

1) $G_j(x,t,\lambda)$ на кожному з інтервалів $[a,t)$ і $(t,b]$ за змінною x є розв'язком крайової задачі (5);

2) $G_j(x,t,\lambda)$ та її квазіпохідні за змінною x до $(m-l-1)$-го порядку включно є неперервними функціями за сукупністю змінних, абсолютно неперервними за кожною зі змінних при фіксованій іншій та цілими функціями від параметра λ;

3) $G_j(x,t,\lambda)$ на діагоналі $x=t$ задовольняє умови стрибків:

$$G_j^{[q]}(t+0,t,\lambda)-G_j^{[q]}(t-0,t,\lambda)=0,\quad q=\overline{0,m-l-1};$$

$$G_j^{[m-l-1+q]}(t+0,t,\lambda)-G_j^{[m-l-1+q]}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=\sum_{r,k,v=1}^{m}\sum_{s=0}^{l-1}\Delta A_{l-s,q}(t)K^{*\{r-1\}*[s]}(t,a,\lambda)\frac{W_{kr}(\lambda)Q_{kv}}{\Delta(\lambda)}K^{[v-1]*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda)+\Theta_{j+q,l},$$

$$q=\overline{1,l-1},\quad \Theta_{kv}=\begin{cases}0, & k\neq v;\\ E_p, & k=v;\end{cases}$$

$$G_j^{[m-1]}(t+0,t,\lambda)-G_j^{[m-1]}(t-0,t,\lambda)=$$

$$=\sum_{r,k,v=1}^{m}\left\{\sum_{s=0}^{l-1}\Delta A_{l-s,q}(t)K^{*\{r-1\}*[s]}(t,a,\lambda)-\lambda\Delta\sigma(t)K^{*\{r-1\}*}(t,a,\lambda)\right\}\times$$

$$\times\frac{W_{kr}(\lambda)Q_{kv}}{\Delta(\lambda)}K^{[v-1]*\langle j\rangle*}(b,t,\lambda)+\Theta_{j0};$$

4) $G_j(x,t,\lambda)=\dfrac{\partial^j G_0(x,t,\lambda)}{\partial t^j}$;

5) $G_j(x,t,\lambda)=G_j^*(t,x,\bar{\lambda})$ *при* $x\neq t$.

Доведення. Властивість 5) є наслідком ермітовості розв'язувального ядра $R(x,t,\lambda)$. Властивість 4) встановлена вище. Властивості 1) – 3) випливають зі структури матриці Ґріна й властивостей розв'язків операторного рівняння (14) і спряженого до нього. Дійсно, матричні функції $K^{*\{r\}*}(x,t,\lambda)$, $r=\overline{0,m-1}$ і $K^{*[q]}(x,t,\lambda)$, $q=\overline{0,m-1}$ утворюють нормальні при $x=t$ фундаментальні системи розв'язків цих рівнянь, тому за результатами роботи [13] ці функції разом зі своїми квазіпохідними відповідно за змінними x і t до порядку $m-l-1$ включно належать до простору $AC_p[a,b]$ при фіксованій іншій змінній, а квазіпохідні вищих порядків є елементами простору $BV_p^+[a,b]$. До того ж для довільного $r=\overline{0,m-1}$

$$K^{*\{r\}*[q]}(x,t,\lambda)=\begin{cases}E_p, & r+p=m-1;\\ 0, & r+q\neq m-1,\end{cases}\quad \Delta_x K^{*\{r\}*[q]}(x,t,\lambda)=0,\ q=\overline{0,m-l-1},$$

$$\Delta_x K^{*\{r\}*[m-l-1+q]}(x,t,\lambda)=\sum_{s=0}^{l-1}\Delta A_{l-s,q}(x)K^{*\{r\}*[s]}(x,t,\lambda),\ q=\overline{1,l-1},$$

$$\Delta_x K^{*\{r\}*[m-1]}(x,t,\lambda)=\sum_{s=0}^{l-1}\Delta A_{l-s\,l}(x)K^{*\{r\}*[s]}(x,t,\lambda)-\lambda\Delta\sigma(x)K^{*\{r\}*}(x,t,\lambda).$$

5. Приклад. При дослідженні згинно-крутильних коливань балки [15, с.156] після відокремлення змінних виникає система диференціальних рівнянь

$$\left[\begin{pmatrix} EI_z & 0 & 0 \\ 0 & EI_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & EI_\varpi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix}''\right]'' - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GI_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix}'\right]' -$$

$$-\lambda \begin{pmatrix} \rho F & 0 & -\rho F a_2 \\ 0 & \rho F & \rho F a_3 \\ -\rho F a_2 & \rho F a_3 & \rho I_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varpi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

де ϑ, ϖ – переміщення центра згину перетину балки, θ – кут закручування, $E, I_z, I_\vartheta, I_\varpi, G, I_k, I_A, \rho, a_2, a_3$ – механічні та геометричні характеристики балки, λ – спектральний параметр, що дорівнює квадрату частоти вільних коливань, $(f_1, f_2, f_3)^\tau$ – вектор зовнішніх зусиль. Друга і третя матриці-коефіцієнти цієї системи та її права частина можуть містити узагальнені функції, що відповідає реальній фізичній моделі з дискретно-неперервним розподілом параметрів: кусково-змінний переріз, зосереджені маси, моменти, узагальнені зовнішні зусилля.

Якщо позначити $y = (\vartheta, \varpi, \theta)^\tau$, $f = (f_1, f_2, f_3)^\tau$, а через B_{00}, B_{11}, ω відповідно першу, другу і третю матриці-коефіцієнти, то систему можна переписати у вигляді векторного к.-д. рівняння

$$\left(B_{00}(x) y''\right)'' - \left(B_{11}(x) y'\right)' - \lambda \omega(x) y = f(x), \tag{22}$$

що є, вочевидь, частинним випадком рівняння (2). Приєднуючи до рівняння (22) один із наборів крайових умов

$$y^{[0]}(a) = y^{[1]}(a) = y^{[0]}(b) = y^{[1]}(b) = 0,\ y^{[0]}(a) = y^{[2]}(a) = y^{[0]}(b) = y^{[2]}(b) = 0,$$
$$y^{[1]}(a) = y^{[3]}(a) - c_1 y^{[0]}(a) = y^{[1]}(b) = y^{[3]}(b) + c_2 y^{[0]}(b) = 0,$$
$$y^{[2]}(a) = y^{[3]}(a) = y^{[2]}(b) = y^{[3]}(b) = 0,$$

де квазіпохідні $y^{[k]}(x)$, $k = \overline{0,3}$ на підставі формул (4) мають вигляд $y^{[0]} = y$, $y^{[1]} = y'$, $y^{[2]} = B_{00}(x) y''$, $y^{[3]} = -\left(B_{00}(x) y''\right)' + B_{11}(x) y'$, отримуємо задачі про коливання балки, кінці котрої закріплені відповідно жорстко, шарнірно, пружно або є вільними (можливі й різні комбінації способів закріплення кінців). При цьому, зрозуміло, мають місце сформульовані в пункті 4 властивості.

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Schwabik S. Generalized Ordinary Differential Equations. – World Scientific, Singapore, 1992.
3. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 750 с.
4. Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44. – №1. – С.43–53.
5. Тацій Р.М., Мазуренко В.В. Дискретно-неперервні крайові задачі для квазідиференціальних рівнянь непарного порядку // Математичні студії. – 2001. – Т.16. – №1. – С.61–75.
6. Мазуренко В.В., Тацій Р.М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т.39. – №3. – С.328–336.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
8. Walker Ph.W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square // J. London Math. Soc. – 1974. – (2) 9. – P.151–159.
9. Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.184. – №5. – С.1034–1037.
10. Everitt W.N. Integrable-square, analytic solutions of odd-order, formally symmetric, ordinary differential equations // Proc. London Math. Soc. – 1972. – Т.25 (3). – P.156–182.
11. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т.7 (49). – №3. – С.479–532.
12. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння // Препр. №2-94. – Львів: ІППММ АН України, 1994. – 56 с.
13. Мазуренко В.В., Тацій Р.М. Узагальнена схема Аткінсона як метод дослідження дискретно-неперервних крайових задач // Міжнар. наук. конф. "Шості Боголюбівські читання": Тези доповідей. – К., 2003. – С.134.

14. Іацій Р.М., Кісілевич В.В., Стасюк М.Ф., Пахолок Б.Б. Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2 – С.165–167.
15. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. / Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352 с.

Structure of the spectrum of the boundary value problem for the system of differential equations with distributions as coefficients is researched. Formula in integral form with the aid of a structurally constructed the Green matrix for solutions is obtained. Its properties are studied.

***Key words:** quasidifferential equation, boundary value problem, Green matrix.*

УДК 517.982
ББК 22.162.2

А.В. Соломко, С.В. Шарин

ВЕКТОРНА ОПЕРАЦІЯ КРОС-КОРЕЛЯЦІЇ В ДОВІЛЬНОМУ КОНУСІ

Досліджуються деякі топологічні властивості локально опуклих просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Визначається векторна операція крос-кореляції. Доводиться теорема, яка характеризує операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор над простором векторнозначних основних функцій із носіями в конусі.

***Ключові слова:** локально опуклий простір, операція крос-кореляції, узагальнена функція, згортка, монтелевий простір.*

Уперше теорія узагальнених функцій була систематизована й математично обґрунтована на основі теорії локально опуклих топологічних просторів французьким математиком Л.Шварцом [1]. Пізніше теорію розподілів інтенсивно розробляли у своїх працях Я.Мікусінський і Р.Сікорський [2], І.М.Гельфанд і Г.Є.Шилов [3], Л.Хермандер [4] та багато інших математиків. Розвиток цієї теорії стимулювався потребами математичної теоретичної фізики та особливо квантової механіки. У свою чергу, теорія узагальнених функцій, яка базується на основних методах функціонального аналізу, дала поштовх для розвитку ряду важливих напрямків у математиці: теорії диференціальних рівнянь, операційного числення, теорії перетворення Фур'є тощо.

У цій статті, застосовуючи теорію двоїстості локально опуклих просторів, досліджуємо ряд топологічних властивостей просторів дуальної пари $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Зауважимо, що саме ці властивості забезпечують нам умови для побудови функціонального числення як для скалярного, так і для векторного випадку [5, 6], а також для доведення теорем про топологічні ізоморфізми просторів узагальнених функцій комутантам (C_o)-напівгруп операторів.

Описується також векторна операція крос-кореляції та доводиться теорема, яка визначає векторну операцію крос-кореляції як лінійний неперервний оператор, що діє над простором нескінченно диференційованих фінітних функцій з носіями в конусі й залишає простори інваріантними. Ця теорема є узагальненням теореми Шварца [7, гл.І, п.4.7] для векторної операції крос-кореляції на довільний конус.

Розглянемо в загальному випадку класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$. Як звичайно, $D(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно-диференційованих функцій з компактними носіями з топологією рівномірної збіжності на компактах разом з усіма похідними, $D'(\mathbb{R}^n)$ – спряжений до $D(\mathbb{R}^n)$ простір лінійних неперервних функціоналів, введений Л. Шварцом [1].

Позначимо через Γ – довільний замкнений опуклий гострий тілесний конус в $\mathbb{R}^n$. Нехай всюди далі D'_Γ – підпростір у $D'(\mathbb{R}^n)$ тих розподілів f, носії $\operatorname{supp} f$ яких містяться в Γ [7, гл.І, п.4.5].

Поляра підпростору D'_Γ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ має вигляд