УДК 511.14
ББК 22.13

І.В. Федак

МИМОБІЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Введено поняття мимобіжних послідовностей ірраціональних чисел. Доведені теореми про необхідні й достатні умови існування таких послідовностей.

Ключові слова: *послідовності ірраціональних чисел, мимобіжні послідовності, необхідні й достатні умови.*

Нехай α та β – два ірраціональні числа, більші за одиницю. Послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$, $n \in N$ називаються мимобіжними, якщо між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться або лише один елемент послідовності $(n\alpha)$, або лише один елемент послідовності $(n\beta)$. Іншими словами, послідовності, складені з цілих частин елементів послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$, не мають спільних елементів, а їх об'єднання збігається з множиною натуральних чисел.

Теорема 1. *Якщо*

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,\ \alpha>1,\ \beta>1,$$

то послідовності $(n\alpha)$ *та* $(n\beta)$ *мимобіжні.*

Доведення. При кожному $k \geq 2$ на інтервалі $(1, k)$ міститься $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ членів послідовності $(n\alpha)$ та $\left[\frac{k}{\beta}\right]$ членів послідовності $(n\beta)$. Серед них немає спільних елементів, бо з рівності $n\alpha = m\beta$ й умови теореми випливає, що $\alpha = 1+\frac{m}{n}$. А це суперечить ірраціональності числа α.

Оскільки $\frac{k}{\alpha}+\frac{k}{\beta}=k \in N$, а числа $\frac{k}{\alpha}$ та $\frac{k}{\beta}$ ірраціональні, то сума їх дробових частин $\left\{\frac{k}{\alpha}\right\}+\left\{\frac{k}{\beta}\right\}=1$. Отже, $\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]=k-1$, тобто на кожному інтервалі $(1, k)$ знаходиться $k-1$ з об'єднання послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$. Звідси випливає, що між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться один з елементів лише однієї з цих двох послідовностей. Теорема доведена.

Приклади мимобіжних послідовностей:

1. $\left(n\sqrt{2}\right)$ та $\left(n\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$.
2. $\left(n(1+\gamma)\right)$ та $\left(n\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)$, де γ – довільне додатне ірраціональне число.
3. $\left(n\left(1+k+\sqrt{k^2-1}\right)\right)$ та $\left(n\left(1+k-\sqrt{k^2-1}\right)\right)$, де k – довільне натуральне число, більше одиниці.

Теорема 2. *Якщо послідовності* $(n\alpha)$ *та* $(n\beta)$, $\alpha>1, \beta>1$ *мимобіжні, то* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Доведення. Нехай $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\gamma>1$. Тоді існує таке ірраціональне число $\frac{p}{q}\in(1,\gamma)$, що $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{p}{q}$. Оскільки послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$ мимобіжні, то вони не мають спільних елементів, і на інтервалі $(1,2q)$ міститься $\left[\frac{2q}{\alpha}\right]+\left[\frac{2q}{\beta}\right]$ елементів з їх об'єднання. Але

$$\left[\frac{2q}{\alpha}\right]+\left[\frac{2q}{\beta}\right]\geq\frac{2q}{\alpha}+\frac{2q}{\beta}-2=2q\gamma-2>2(p-1)\geq 2q,$$

то принаймні на одному з $2q-1$ сусідніх інтервалів знаходиться не менше двох елементів із такого об'єднання, що суперечить умові мимобіжності послідовностей.

Якщо ж $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\gamma<1$, то для раціонального числа $\frac{p}{q}\in(\gamma,1)$ одержимо, що на інтервалі $(1,q)$ буде

$$\left[\frac{q}{\alpha}\right]+\left[\frac{q}{\beta}\right]<\frac{q}{\alpha}+\frac{q}{\beta}=q\gamma<p\leq q-1$$

елементів з об'єднання заданих послідовностей. А отже, принаймні на одному з $q-1$ сусідніх інтервалів не виявиться жодного такого елемента, що також суперечить умові мимобіжності.

І, нарешті, при $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ на основі теореми 1 послідовності $(n\alpha)$ та $(n\beta)$ справді будуть мимобіжними. Теорема доведена.

Таким чином, умова

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1,\ \alpha>1,\ \beta>1$$

є необхідною і достатньою умовою мимобіжності послідовностей $(n\alpha)$ та $(n\beta)$.

Узагальнимо отримані результати на випадок $m(m\geq 3)$ послідовностей ірраціональних чисел $(n\alpha_1),(n\alpha_2),\ldots,(n\alpha_m),\ n\in N$. Такі послідовності також будемо вважати мимобіжними, якщо між довільними сусідніми натуральними числами знаходиться рівно один елемент лише однієї з цих послідовностей.

Теорема 3. *Для того, щоб послідовності* $(n\alpha_1),(n\alpha_2),\ldots,(n\alpha_m)$, $n\in N$, *де* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ – *ірраціональні числа, більші за одиницю, були мимобіжними, необхідно, щоб*

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1.$$

Доведення. Нехай

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=\gamma>1.$$

Тоді існує таке раціональне число $\frac{p}{q}\in(1,\gamma)$, що

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}>\frac{p}{q}.$$

Якщо вказані послідовності мимобіжні, то жодні дві з них не мають спільних елементів, і на інтервалі $(1,mq)$ знаходиться

$$\left[\frac{mq}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{mq}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{mq}{\alpha_m}\right]\geq\frac{mq}{\alpha_1}+\frac{mq}{\alpha_2}+\ldots+\frac{mq}{\alpha_m}-m=mq\gamma-m>m(p-1)\geq mq$$

елементів з їхнього об'єднання. Але це суперечить умові мимобіжності таких послідовностей.

Якщо ж

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=\gamma<1,$$

то для раціонального числа $\frac{p}{q}\in(\gamma,1)$ одержимо, що на інтервалі $(1,q)$ буде

$$\left[\frac{q}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{q}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{q}{\alpha_m}\right]<\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q}{\alpha_2}+\ldots+\frac{q}{\alpha_m}=q\gamma<p\leq q-1$$

елементів із вказаного вище об'єднання. А отже, такі послідовності також не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

Міркуючи за аналогією, можна припустити, що і при $m\geq 3$ рівність

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1$$

буде необхідною і достатньою умовою мимобіжності послідовностей $(n\alpha_1),(n\alpha_2),\ldots,(n\alpha_m)$, $n\in N$. де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ – ірраціональні числа, більші за одиницю. Але, насправді, справедливим є наступне твердження.

Теорема 4. *При* $m\geq 3$ *не існує мимобіжних послідовностей ірраціональних чисел.*

Доведення. Враховуючи теорему 3, достатньо розглянути лише випадок

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1,\ \alpha_1>1,\alpha_2>1,\ldots,\alpha_m>1.$$

Виберемо натуральні числа $p_1,p_2,\ldots,p_m,q$ таким чином, щоб виконувалися нерівності $\frac{1}{\alpha_k}<\frac{p_k}{q}$, $k=1,2,\ldots,m$, та рівність $p_1+p_2+\ldots+p_m=q+1$. Тоді

$$\left[\frac{q}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{q}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{q}{\alpha_m}\right]\leq(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_m-1)=q+1-m\leq q-2$$

при $m\geq 3$. А отже, на інтервалі $(1,q)$ не більше $q-2$ елементів з об'єднання даних послідовностей. Тому такі послідовності не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

The concept of not intersected sequences of irrationals is entered. The theorems about necessary and sufficient conditions of existence of such sequences are proved.

Key words: *sequences of irrationals, intersected sequences, necessary and sufficient conditions.*

УДК 517.927

ББК 22.161.616

О.В. Махней

ФУНКЦІЯ ҐРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

У даній статті побудовано матрицю-функцію Ґріна крайової задачі для векторного диференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах. За допомогою отриманих виразів для спряжених крайових умов доводиться властивість про співвідношення між функціями Ґріна спряжених крайових задач.