$$\left[\frac{mq}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{mq}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{mq}{\alpha_m}\right]\geq\frac{mq}{\alpha_1}+\frac{mq}{\alpha_2}+\ldots+\frac{mq}{\alpha_m}-m=mq\gamma-m>m(p-1)\geq mq$$

елементів з їхнього об'єднання. Але це суперечить умові мимобіжності таких послідовностей.

Якщо ж

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=\gamma<1,$$

то для раціонального числа $\frac{p}{q}\in(\gamma,1)$ одержимо, що на інтервалі $(1,q)$ буде

$$\left[\frac{q}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{q}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{q}{\alpha_m}\right]<\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q}{\alpha_2}+\ldots+\frac{q}{\alpha_m}=q\gamma<p\leq q-1$$

елементів із вказаного вище об'єднання. А отже, такі послідовності також не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

Міркуючи за аналогією, можна припустити, що і при $m\geq 3$ рівність

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1$$

буде необхідною і достатньою умовою мимобіжності послідовностей $(n\alpha_1),(n\alpha_2),\ldots,(n\alpha_m)$, $n\in N$, де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ – ірраціональні числа, більші за одиницю. Але, насправді, справедливим є наступне твердження.

**Теорема 4.** *При $m\geq 3$ не існує мимобіжних послідовностей ірраціональних чисел.*

**Доведення.** Враховуючи теорему 3, достатньо розглянути лише випадок

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}=1,\ \alpha_1>1,\alpha_2>1,\ldots,\alpha_m>1.$$

Виберемо натуральні числа $p_1,p_2,\ldots,p_m,q$ таким чином, щоб виконувалися нерівності $\frac{1}{\alpha_k}<\frac{p_k}{q}$, $k=1,2,\ldots,m$, та рівність $p_1+p_2+\ldots+p_m=q+1$. Тоді

$$\left[\frac{q}{\alpha_1}\right]+\left[\frac{q}{\alpha_2}\right]+\ldots+\left[\frac{q}{\alpha_m}\right]\leq(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_m-1)=q+1-m\leq q-2$$

при $m\geq 3$. А отже, на інтервалі $(1,q)$ не більше $q-2$ елементів з об'єднання даних послідовностей. Тому такі послідовності не можуть бути мимобіжними. Теорема доведена.

*The concept of not intersected sequences of irrationals is entered. The theorems about necessary and sufficient conditions of existence of such sequences are proved.*

***Key words:*** *sequences of irrationals, intersected sequences, necessary and sufficient conditions.*

**УДК 517.927**
**ББК 22.161.616**

***О.В. Махней***

## ФУНКЦІЯ ҐРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

*У даній статті побудовано матрицю-функцію Ґріна крайової задачі для векторного диференціального рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах. За допомогою отриманих виразів для спряжених крайових умов доводиться властивість про співвідношення між функціями Ґріна спряжених крайових задач.*

***Ключові слова:*** *функція Ґріна, векторне диференціальне рівняння, квазіпохідні, узагальнені функції.*

**Вступ.** Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [1]). Однак у задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчалися крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни й балки, які, крім неперервно розподіленої маси, несуть на собі ще й зосереджені точкові маси – бусинки [2]. У монографії [3] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою $\delta$-функцій Дірака. У випадку скалярного сингулярного диференціального оператора побудовано функцію Ґріна та досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій, а також здійснено розвинення за останніми у роботах [4; 5; 6].

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $\left(P(x)Y\right)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою $j$-кратного диференціювання до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференціальними.

Квазіпохідні – це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть, першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитися від вимог гладкості коефіцієнтів у квазідиференціальних виразах, був Д.Шин [7; 8].

Ця робота присвячена побудові функції Ґріна крайової задачі для векторного диференціального рівняння з узагальненими коефіцієнтами й однорідними крайовими умовами. За допомогою методу введення квазіпохідних досліджено властивості функцій Ґріна спряжених крайових задач.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо диференціальний вираз

$$L_n(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}^{(n)} + A_1(x)\mathbf{y}^{(n-1)} + A_2(x)\mathbf{y}^{(n-2)} + \ldots + A_n(x)\mathbf{y}\,, \tag{1}$$

де $A_i = B_i'$, $B_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ – матриці-функції $l$-го порядку, елементами яких є неперервні праворуч функції обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, матриця-функція $B_1(x)$ є неперервною на $[a,b]$, $\mathbf{y}(x)$ – вектор-стовпець. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами (див. [9]). Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $L_n(\mathbf{y})$ рівняння

$$L_n(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}\,, \tag{2}$$

де $\lambda$ – комплексний параметр, і крайові умови

$$U_\nu(\mathbf{y}) \equiv \sum_{j=0}^{n-1}\Gamma_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(b) = 0\,,\quad \nu=\overline{1,n}\,, \tag{3}$$

які задаються за допомогою $n$ лінійно незалежних форм $U_\nu(y)$.

Поряд із крайовою задачею (2), (3) для векторного диференціального рівняння розглянемо також асоційовану їй крайову задачу для матричного диференціального рівняння

$$L_n(Y) = \lambda Y, \tag{4}$$

$$U_\nu(Y) \equiv \sum_{j=0}^{n-1}\Gamma_{\nu j}Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\nu j}Y^{(j)}(b) = 0\,, \tag{5}$$

де $Y(x)$ – квадратна матриця $l$-го порядку.

За допомогою прямокутної матриці $\mathscr{Y} = \operatorname{colon}(Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})$ матричне рівняння (4) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathscr{Y}' = \mathscr{B}'(x)\mathscr{Y} \tag{6}$$

або в розгорнутому (блочному) вигляді

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \\ \lambda - A_n & -A_{n-1} & \cdots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \cdots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Крайові умови (5) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_a\mathscr{Y}(a) + W_b\mathscr{Y}(b) = 0, \tag{7}$$

де блочні матриці $W_a = \left(\Gamma_{\nu,j-1}\right)_{\nu,j=1}^{r}$, $W_b = \left(\Delta_{\nu,j-1}\right)_{\nu,j=1}^{r}$. Оскільки за додаткової умови неперервності матриці-функції $B_1(x)$ для стрибка матриці-функції $\mathscr{B}(x)$ має місце тотожність $[\Delta\mathscr{B}(x)]^2 = 0$, система (6) є коректною [10].

Під розв'язком матричного диференціального рівняння будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathscr{Y}(x)$ системи (6), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій. У роботі [11] встановлено, що розв'язок початкової задачі для рівняння (4) існує і єдиний, причому він разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ включно є абсолютно неперервним, а його $(n-1)$-ша похідна складається з функцій, які мають обмежену варіацію на проміжку $[a,b]$ і є там неперервними праворуч.

Система, спряжена до системи (6), визначається матричною рівністю (див. [11])

$$\mathscr{Z}' = -(\mathscr{B}^*(x))'\mathscr{Z}, \tag{8}$$

де $\mathscr{Z} = \mathrm{colon}\left(Z^{\{r-1\}}, \ldots, Z^{\{1\}}, Z\right)$, $*$ – ермітове спряження, а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння. У роботі [11] встановлено, що вони визначаються формулами

$$Z^{\{0\}} = Z, \quad Z^{\{i\}} = A_i^* Z - \left(Z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{9}$$

З (8) видно (див. [11]), що спряжене до (4) диференціальне рівняння має вигляд

$$L_n^*(Z) \equiv (-1)^n Z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} (A_i^* Z)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z, \tag{10}$$

де риска над λ означає комплексне спряження.

**2. Спряжені крайові умови.** Розглянемо вираз $\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}$ і продиференціюємо його, скориставшись формулами (6), (8):

$$\left(\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}\right)' = \left(\mathscr{Z}^*\right)'\mathscr{Y} + \mathscr{Z}^*\mathscr{Y}' = -\left(\left(\mathscr{B}^*\right)'\mathscr{Z}\right)^*\mathscr{Y} + \mathscr{Z}^*\mathscr{B}'\mathscr{Y} = -\mathscr{Z}^*\mathscr{B}'\mathscr{Y} + \mathscr{Z}^*\mathscr{B}'\mathscr{Y} = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $\left(\mathscr{Z}^*\right)'\mathscr{Y}$ і $\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}'$ є коректними на підставі того факту, що $Y$, $Y'$, ..., $Y^{(n-2)}$, $Z$ – матриці, складені з абсолютно неперервних на $[a,b]$ функції, а $Y^{(n-1)}$, $Z^{\{1\}}$, $Z^{\{2\}}$, ..., $Z^{\{n-1\}}$ – матриці, компоненти яких є функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації (див. [11]). Отже, $\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}$ є сталою величиною і тому

$$\left(\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}\right)\Big|_a^b = 0. \tag{11}$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $U_1(Y)$, $U_2(Y)$, ..., $U_n(Y)$ формами $U_{n+1}(Y)$, $U_{n+2}(Y)$, ..., $U_{2n}(Y)$ до лінійно незалежної системи $2n$ лінійних форм. Тоді систему

$$U_\nu(Y) = \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j} Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j} Y^{(j)}(b), \ \nu = \overline{1, 2n}$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $Y^{(q)}(a)$, $Y^{(q)}(b)$, які визначаються через $U_1(Y)$, ..., $U_{2n}(Y)$. Підставивши отримані $Y^{(q)}(a)$, $Y^{(q)}(b)$ $(q=\overline{0,n-1})$ в білінійну форму в лівій частині рівності (11), отримаємо

$$\left(\mathscr{Z}^*\mathscr{Y}\right)\Big|_a^b=\sum_{\nu=1}^{2n}\mathcal{A}_\nu(\xi)\mathcal{B}_\nu(\eta),$$

де $\eta=\left(Y^{(q)}(a),Y^{(q)}(b)\right)$, $\xi=\left(Z^{*(q)}(a),Z^{*(q)}(b)\right)$, $q=\overline{0,n-1}$, а $\mathcal{B}_\nu(\eta)=U_\nu(Y)$. Позначимо $\mathcal{A}_{2n}(\xi)=V_1(Z)$, ..., $\mathcal{A}_1(\xi)=V_{2n}(Z)$. Очевидно, що для того, щоб виконувалася рівність (11), повинні мати місце співвідношення

$$V_\nu(Z)=0,\ \ \nu=\overline{1,n}, \tag{12}$$

які назвемо *спряженими крайовими умовами* до умов (5) (оскільки крайові умови дорівнюють нулю, можна безболісно перенести комплексне спряження із $Z$ на матрицю сталих коефіцієнтів при ньому). Спряжені крайові умови можна записувати й у векторному вигляді

$$V_\nu(\mathbf{z})=0,\ \ \nu=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Якщо $|W_a|\neq 0$ і $|W_b|\neq 0$ одночасно в рівнянні (7), то легко переконатися в тому, що крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді $\mathscr{Z}^*(a)W_a^{-1}+\mathscr{Z}^*(b)W_b^{-1}=0$.

**3. Функція Ґріна крайової задачі.** Розглянемо тепер неоднорідне векторне диференціальне рівняння

$$L_n(\mathbf{y})=\lambda\mathbf{y}+\mathbf{f}', \tag{14}$$

де $\mathbf{f}$ – вектор-стовпець, усі компоненти якого є функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, а також асоційоване до нього матричне рівняння

$$L_n(Y)=\lambda Y+F', \tag{15}$$

де матриця $F(x)$ складається з $l$ стовпчиків $\mathbf{f}(x)$. Неоднорідне рівняння (15) шляхом введення прямокутної матриці $\mathscr{Y}$ (див. пункт 1) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathscr{Y}'=\mathscr{A}'\mathscr{Y}+\mathscr{F}', \tag{16}$$

де $\mathscr{F}(x)=\mathrm{colon}\left(0,...,0,-F(x)\right)$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $\left[\Delta\mathscr{A}(x)\right]^2=0$ і $\Delta\mathscr{B}(x)\Delta\mathscr{F}(x)=0$ (див. [11]).

Під *матрицею-функцією Коші* рівняння (4) розуміють матричну функцію $K(x,t,\lambda)$ порядку $l\times l$, яка за першою змінною задовольняє рівняння (4), і, крім того, $K^{(i)}(t,t,\lambda)=0$, $i=\overline{0,n-2}$, $K^{(n-1)}(t,t,\lambda)=E$.

Побудуємо матричну функцію Ґріна крайової задачі (14), (3). Нехай $K(x,t,\lambda)$ – матриця-функція Коші однорідного рівняння (4). Відомо [11], що $K(x,a,\lambda)$, $K^{*\{1\}*}(x,a,\lambda)$, ..., $K^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (15) можна подати у вигляді

$$Y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)C_k+\int_a^x K(x,t,\lambda)dF(t). \tag{17}$$

Оскільки, згідно з [11],

$$Y^{(j)}(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}K^{*\{k-1\}*(j)}(x,a,\lambda)C_k+\int_a^x K^{(j)}(x,t,\lambda)dF(t),\ j=\overline{1,n},$$

підстановка формули (17) в крайові умови (5) дасть рівності

$$U_\nu(Y)=\sum_{k=1}^{n}U_\nu\left(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\right)C_k+\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\nu j}\int_a^b K^{(j)}(b,t,\lambda)dF(t),\ \nu=\overline{1,n}, \tag{18}$$

що можна записати у вигляді $\mathcal{W}\bar{C}+\bar{B}=0$, де $\bar{C}=\mathrm{colon}\left(C_1,\dots,C_n\right)$, $\bar{B}$ – прямокутна матриця, $\mathcal{W}=\left(U_\nu(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda))\right)_{\nu,k=1}^n$. У припущенні, що $\lambda$ не є власним значенням крайової задачі (4), (5), визначник системи (18) відрізняється від нуля $\Delta(\lambda) = \det W \neq 0$. Тоді сталі матриці $C_k$ можуть бути визначені із системи (18) єдиним чином. Підставляючи ці значення $C_k$ у формулу (17), отримаємо

$$Y(x,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_a^b K^{*[k-1]*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}\Delta_{\nu j}}{\Delta(\lambda)}K^{[j]}(b,t,\lambda)dF(t) + \int_a^x K(x,t,\lambda)dF(t),$$

де $W_{\nu k}$ $(\nu, k = \overline{1,n})$ – матриця $l$-го порядку, транспонована до складеної з алгебраїчних доповнень у визначнику $\Delta(\lambda)$ до елементів матриці $U_\nu\left(K^{*[k-1]*}(x,a,\lambda)\right)$.

Матричний вираз

$$G(x,t,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} K^{*[k-1]*}(x,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\Delta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda) + P(x,t,\lambda), \tag{19}$$

де

$$P(x,t,\lambda) = \begin{cases} K(x,t,\lambda), & x > t, \\ 0, & x < t \end{cases} \tag{20}$$

будемо називати ***функцією Ґріна*** крайової задачі (14), (3).

З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Ґріна. Як видно з наступної теореми, ця матриця-функція Ґріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння і її змішаних квазіпохідних, є аналогом функції Ґріна в класичному розумінні (див., наприклад, [1], с.115–116).

**Теорема 1.** *Розв'язок задачі* (14), (3) *в припущенні, що* $\lambda$ *не є її власним значенням, можна подати у вигляді*

$$\mathbf{y}(x) = \int_a^b G(x,t,\lambda)d\mathbf{f}(t), \tag{21}$$

*де матриця-функція Ґріна* $G(x,t,\lambda)$ *подається формулою* (19) *і володіє такими властивостями:*

*1) похідні за першою змінною* $G^{(k)}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0,n-2})$ *є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*

*2) функція* $G^{(n-1)}(x,t,\lambda)$ *має обмежену на проміжку* $[a,b]$ *варіацію за першою змінною і є абсолютно неперервною по t;*

*3)* $G(x,t,\lambda)$ *на кожному з інтервалів* $[a,t)$, $(t,b]$ *по x задовольняє рівняння* (4);

*4)* $G(x,t,\lambda)$ *за змінною x задовольняє крайові умови* (5);

*5) при* $x = t$ $G(x,t,\lambda)$ *задовольняє умови стрибка*

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda) - G^{(k)}(t-0,t,\lambda) = 0,\ k = \overline{0,n-2};$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda) - G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda) =$$

$$= E + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}\Delta B_{n-i}(t)K^{[i]*[k-1]*}(t,a,\lambda)\frac{W_{\nu k}}{\Delta(\lambda)}\Delta_{\nu j}K^{[j]}(b,t,\lambda).$$

**Доведення.** Формула (21) була вже доведена вище. Пункти 1 – 4 легко перевірити, урахувавши вищезгадані властивості розв'язків рівняння (4) та спряженого до нього. Для доведення пункту 5 використовуються співвідношення

$$K^{*[k-1]*}(x,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} Y_j(x,\lambda)C_{jk}(t,\lambda),\ k = \overline{1,n}, \tag{22}$$

які випливають із того факту, що всі $K^{*[k-1]*}(x,t,\lambda)$ є розв'язками рівняння (4); $Y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (4). Тоді, внаслідок рівності з [11],

$$\Delta Y^{(n-1)}(x) = -\sum_{i=0}^{n-2}\Delta B_{n-i}(x)Y^{(i)}(x), \tag{23}$$

розписавши (22), можна одержати пункт 5, що й доводить теорему.

**Зауваження 1.** Зазначимо, що коли $\Delta B_i(x)=0$, $i=\overline{2,n}$, властивість 5 набуває "класичного" вигляду

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda)-G^{(k)}(t-0,t,\lambda)=0,\ k=\overline{0,n-2};$$
$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda)-G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda)=E.$$

**Зауваження 2.** Матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda)=(-1)^{nl}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(Q_{ij}(x,t,\lambda)\right)_{i,j=1}^{l}, \tag{24}$$

$$Q_{ij}(x,t,\lambda)=\begin{vmatrix} K_{i1}(x,a,\lambda) & \cdots & K_{il}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda) & P_{ij}(x,t,\lambda) \\ U_1(K_{11}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K_{1l}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_1(P_{1j}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K_{l1}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_n(K_{ll}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_n(P_{lj}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Дійсно, розписавши (25) за елементами останнього стовпця і першого рядка, неважко від (24) прийти до рівності (19).

**4. Розв'язувальне ядро задачі (16), (5).** Розв'язок задачі (16), (5), якщо $\lambda$ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтеграла від розв'язувального ядра (матриці-функції Гріна задачі (16), (5)) і вектора $\mathscr{F}$. Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Гріна задачі (14), (3).

Для задачі (16), (5) має місце формула (див. [11])

$$\mathscr{Y}(x)=\Phi(x,a)\mathscr{Y}(a)+\int_a^x\Phi(x,t)d\mathscr{F}(t), \tag{26}$$

де $\Phi(x,t)=\Phi(x,t,\lambda)$ – фундаментальна матриця системи (6); вона подається у вигляді $\Phi(x,t,\lambda)=R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ – інтегральна матриця системи (6). Рівність (26) можна записати так:

$$\mathscr{Y}(x)=R(x,\lambda)C+\int_a^x\Phi(x,t,\lambda)d\mathscr{F}(t), \tag{27}$$

де $C=R^{-1}(a,\lambda)Y(a)$ – прямокутна матриця. Підставивши (27) в умови (5), унаслідок того, що $|W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)|\neq 0$ (бо λ не є власним значенням крайової задачі), можна отримати вираз для матриці *C*, а тому (27) запишеться у вигляді

$$\mathscr{Y}(x)=\int_a^b M(x,t,\lambda)d\mathscr{F}(t), \tag{28}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda)=\begin{cases}\Phi(x,t,\lambda)-R(x,\lambda)\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\}^{-1}W_b\Phi(b,t,\lambda),\ x>t,\\ -R(x,\lambda)\{W_aR(a,\lambda)+W_bR(b,\lambda)\}^{-1}W_b\Phi(b,t,\lambda),\quad x<t.\end{cases}$$

**5. Зв'язок між функціями Гріна спряжених крайових задач.** Нехай $H(x,t,\lambda)$ – матриця-функція Гріна спряженої крайової задачі (10), (12). Вона будується за допомогою матриці-функції Коші $R(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння $L_n^*(Z)=\bar{\lambda}Z$ і її змішаних квазіпохідних у сенсі вихідного і спряженого рівнянь. Неважко переконатися, що формули, аналогічні до (21) і (28), будуть справедливими і для функції $H(x,t,\lambda)$. Крім того, вона володіє властивостями, подібними до наведених у теоремі 1, зокрема $H(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервною за кожною з двох перших змінних при фіксованих інших і неперервною за сукупністю змінних *x* і *t*, а елементи квазіпохідних за першою змінною $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ ($k=\overline{1,n-1}$) мають обмежену варіацію по *x* і є абсолютно неперервними по *t*. Справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.** *При* $x\neq t$, *якщо* $\lambda$ *не є власним значенням крайової задачі* (11)(14), (3), *функції Гріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda)=H^{*}(t,x,\lambda).$$

**Доведення.** Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Гріна спряжених крайових задач

$$L_n(Y)-\lambda Y=-F_1(x), \tag{29}$$

$$U_\nu(Y)=\sum_{j=0}^{n-1}\Gamma_{\nu j}Y^{(j)}(a)+\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\nu j}Y^{(j)}(b)=0,\ \nu=\overline{1,n}, \tag{30}$$

$$L_n^{*}(Z)-\bar{\lambda}Z=F_2(x), \tag{31}$$

$$V_\nu(Z)=\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{\Gamma}_{\nu j}Z^{\{j\}}(a)+\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{\Delta}_{\nu j}Z^{\{j\}}(b)=0,\ \nu=\overline{1,n}, \tag{32}$$

відповідно, де $F_1(x)$, $F_2(x)$ – неперервні на $[a,b]$ і складаються з $l$ однакових стовпчиків вигляду $\mathbf{f}_1(x)$ і $\mathbf{f}_2(x)$. Ці задачі внаслідок введення векторів $\mathscr{Y}=\operatorname{colon}\left(Y,Y^{(1)},\dots,Y^{(n-1)}\right)$ і $\mathscr{X}=\operatorname{colon}\left(Z^{\{n-1\}},\dots,Z^{\{1\}},Z\right)$ зводяться до задач

$$\begin{cases}\mathscr{Y}'=\mathscr{A}\mathscr{Y}+\mathscr{F}_1,\\ W_a\mathscr{Y}(a)+W_b\mathscr{Y}(b)=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathscr{X}'=-\left(\mathscr{A}^{*}\right)'\mathscr{X}+\mathscr{F}_2,\\ \tilde{W}_a\mathscr{X}(a)+\tilde{W}_b\mathscr{X}(b)=0\end{cases}$$

відповідно, де $\mathscr{F}_1(x)=\operatorname{colon}\left(0,\dots,0,F_1(x)\right)$, $\mathscr{F}_2(x)=\operatorname{colon}\left(F_2(x),0,\dots,0\right)$, а $W_a$, $W_b$, $\tilde{W}_a$, $\tilde{W}_b$ – числові матриці порядку $nl\times nl$.

Оскільки добутки $\left(\mathscr{X}^{*}\right)'\mathscr{Y}$ і $\mathscr{X}^{*}\mathscr{Y}'$ коректні, то

$$\left(\mathscr{X}^{*}\mathscr{Y}\right)'=\left(\mathscr{X}^{*}\right)'\mathscr{Y}+\mathscr{X}^{*}\mathscr{Y}'=-\mathscr{X}^{*}\mathscr{A}\mathscr{Y}+\mathscr{F}_2^{*}\mathscr{Y}+\mathscr{X}^{*}\mathscr{A}\mathscr{Y}+\mathscr{X}^{*}\mathscr{F}_1=\mathscr{X}^{*}\mathscr{F}_1+\mathscr{F}_2^{*}\mathscr{Y}.$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (12), можна переконатись у справедливості рівності (11) для неоднорідних спряжених крайових задач (29)–(32). Тоді

$$\int_a^b\left(\mathscr{X}^{*}(x)\mathscr{F}_1(x)+\mathscr{F}_2^{*}(x)\mathscr{Y}(x)\right)dx=0.$$

Згідно з формулою (28),

$$\mathscr{Y}(x)=\int_a^b M(x,t,\lambda)\mathscr{F}_1(t)dt,\quad \mathscr{X}(t)=\int_a^b N(t,x,\lambda)\mathscr{F}_2(x)dx,$$

урахувавши (21), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка блочної матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює $-G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка блочної матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b\left(\int_a^b N(t,x,\lambda)\mathscr{F}_2(x)dx\right)^{*}\mathscr{F}_1(t)dt+\int_a^b\mathscr{F}_2^{*}(x)\int_a^b M(x,t,\lambda)\mathscr{F}_1(t)dtdx=$$

$$=\int_a^b\int_a^b\mathscr{F}_2^{*}(x)\left\{N^{*}(t,x,\lambda)+M(x,t,\lambda)\right\}\mathscr{F}_1(t)dxdt=0,$$

тобто

$$\int_a^b\int_a^b\mathbf{f}_2^{*}(x)\left\{H^{*}(t,x,\lambda)-G(x,t,\lambda)\right\}\mathbf{f}_1(t)dxdt=0. \tag{33}$$

Нехай

$$G(x,t,\lambda)=\left(g_{ij}(x,t,\lambda)\right)_{i,j=1}^{l},\ H(x,t,\lambda)=\left(h_{ij}(x,t,\lambda)\right)_{i,j=1}^{l},$$

$\mathbf{f}_1(x)=\operatorname{colon}(f_{11},\dots,f_{1l})$, $\mathbf{f}_2(x)=\operatorname{colon}(f_{21},\dots,f_{2l})$, $(x_0,t_0)$ – будь-яка точка області $a\le x,t\le b$, $x\ne t$. Довільно виберемо оточуючий її малий прямокутник $\Delta s$ зі сторонами $t=t_0\pm\Delta t$ і $x=x_0\pm\Delta x$ і такі вектор-функції $\mathbf{f}_1(t)$ і $\mathbf{f}_2(x)$, щоб $f_{1j}(t)\equiv0$ при $j\ne j_0$, $f_{1,j_0}(t)\ne0$ в $\Delta s$,

$f_{1,j_0}(t)\equiv 0$ зовні $\Delta s$, $f_{2i}(t)\equiv 0$ при $i\neq i_0$, $f_{2i_0}(t)\neq 0$ в $\Delta s$, $f_{2i_0}(t)\equiv 0$ зовні $\Delta s$. Для цього вибору рівняння (33) буде еквівалентним до

$$\int_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t}\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} f_{2,i_0}(x)\left[\overline{h_{j_0,i_0}(t,x,\bar{\lambda})}-g_{i_0,j_0}(x,t,\lambda)\right]f_{1,j_0}(t)dxdt=0,$$

і, оскільки $f_{2,i_0}(x)f_{1\,j_0}(t)\neq 0$ в $\Delta s$, очевидно, вираз у квадратних дужках перетворюється в нуль всюди у цій області. Нехай $\Delta x$ і $\Delta t$ прямують до нуля. Тоді в границі ми матимемо $\overline{h_{j_0,i_0}(t_0,x_0,\bar{\lambda})}=g_{i_0,j_0}(x_0,t_0,\lambda)$ і внаслідок довільності вибору векторів $\mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{f}_2(x)$ та точок $x_0$, $t_0$ ($x_0\neq t_0$) отримаємо твердження теореми.

Отримані результати дозволяють вивчати й інші задачі, зокрема задачі на розвинення за власними функціями. Аналогічні результати можна отримати й у випадку векторного сингулярного квазідиференціального оператора.


1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф.Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – С.648–731.
3. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 566 с.
4. Махней О.В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44, №2. – С.17–25.
5. Махней О.В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Матем. студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.147–156.
6. Махней О.В. Сингулярні квазідиференціальні оператори на скінченному інтервалі: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Одеський нац. ун-т ім. І.І.Мечникова. – Одеса, 2005. – 16 с.
7. Шин Д. О квази дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1938. – Т.18, №8. – С.523–526.
8. Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения $n$-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т.7 (49), №3. – С.479–527.
9. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
10. Стасюк М.Ф., Таций Р.М. Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференц. уравн. и их приложения. – 1988. – №222. – С.89–90.
11. Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. І.Франка. – Львів, 1994. – 37 с.



*In this work a Green matrix-function of boundary problem for vector differential equation with generalized functions in coefficients is constructed. With the help of obtained expressions for adjoint boundary conditions the property about the relationship between Green functions of adjoint boundary problems is proved.*

***Key words:*** *Green function, vector differential equation, quasiderivatives, generalized functions.*



УДК 004.942+004.056.57
ББК 22.181



*Л.С. Возняк, Н.О. Возняк*


## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ВІРУСІВ В ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ


*Розглянуто математичні моделі поширення цифрових інфекцій в інформаційних системах. На основі наявних у глобальній мережі Інтернет статистичних даних перевірено відповідність побудованих математичних моделей для різних типів комп'ютерних вірусів. Побудована математична модель поширення комп'ютерного вірусу в інтермережі, яка складається з К-підмереж. Здійснено чисельний розв'язок запропонованої моделі.*

***Ключові слова:*** *математичне моделювання, комп'ютерні віруси, комп'ютерні епідемії.*