МАТЕМАТИКА

Р.І.Собкович

ДВОСТОРОННІ ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ ВІДШУКАННЯ ПОЧАТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

За допомогою двостороннього методу доведено теореми існування та єдиності початкових значень періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Чисельно-аналітичний метод відшукання періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь, запропонований в [1], дає можливість вказувати з певною точністю межі областей, що містять точки, через які проходять періодичні розв'язки. Двосторонні наближення, побудовані в [2], дають можливість знаходити періодичні розв'язки лише при умові, якщо рівна нулю так звана Δ-стала, що рівносильно розв'язанню питання про відшукання початкових значень. Дана проблема досліджувалась також в роботах [3; 4]. В даній статті вивчається можливість побудови двосторонніх наближень як до шуканих періодичних розв'язків, так і до початкових значень.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x' = f(t, x, x), \tag{1}$$

де x, f – елементи евклідового простору E^m, напіввпорядкованого конусом невід'ємних векторів, функція $f\ (t,\ x,\ y)$ визначена і неперервна в області $D = (-\infty, \infty) \times I \times I$, $I = [a, b]$, періодична по t з періодом T, ізотонна по x і антитонна по y, тобто при $t \in (-\infty, \infty)$ і $\underline{x} \le \overline{x}$, $\underline{y} \le \overline{y}$ виконується нерівність $f(t,\underline{x},\overline{y}) \le f(t,\overline{x},\underline{y})$. Нехай

$$f(t, x, x) = g(t, x, x) - A\lambda$$

де $g(t, x, x)$ не спадає по x і не зростає по y, а для сталої матриці A існує обернена, причому $A^{-1} > \Theta$ (Θ – нуль-матриця). Вважатимемо, що f і g в області D задовольняють нерівності

$$\underline{M} \le f(t,x,y) \le \overline{M}\,,\ \underline{m} = g(t,x,y) \le \overline{m} \tag{2}$$

причому

$$a + A^{-1}\overline{m} + \frac{7}{12}T(\overline{M} - \underline{M}) \le b - \frac{7}{12}T(\overline{M} - \underline{M}) + A^{-1}\underline{m} \tag{3}$$

Для відшукання Т-періодичних розв'язків системи (1) покладемо $x(0) = \lambda$ і розглянемо послідовні наближення

$$\underline{Z}_{n+1}(t) = U(\underline{Z}_n, \overline{Z}_n),\ \overline{Z}_{n+1}(t) = U(\overline{Z}_n, \underline{Z}_n) \qquad n = 0, 1 \ldots (4)$$

де $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda \end{pmatrix}$, $U(\underline{Z}, \overline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{\lambda} + L[f(t, \underline{x}, \overline{x})] \\ F(\underline{x}, \overline{x}) \end{pmatrix}$,

$$L[f(t,\underline{x},\overline{x})] = (1 - \frac{t}{T})\int_0^t f(s, \underline{x}(s), \overline{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_t^T f(s, \overline{x}(s), \underline{x}(s))ds,$$

$$F(\underline{x},\overline{x}) = T^{-1}\int_0^T (A^{-1} g(t,\underline{x},\overline{x}) - L[f(t,\overline{x},\underline{x})])dt,$$

$$\underline{x}_0(t) = -T^{-1}(t^2 - Tt + \frac{T^2}{3})(\overline{M} - \underline{M}) + A^{-1}\underline{m}, \quad \underline{\lambda}_0 = F(\underline{x}_0, \overline{x_0}),$$

$$\overline{x}_0(t) = T^{-1}(t^2 - Tt + \frac{T^2}{3})(\overline{M} - \underline{M}) + A^{-1}\overline{m},$$

$$\overline{\lambda_0} = F(\overline{x_0}, \underline{x_0}).$$

Теорема 1. Нехай виконані умови, накладені на функцію $f(t, x, y)$, а також нерівності (2), (3). Тоді функції $\underline{Z}_n(t)$, $\overline{Z}_n(t)$, означені рівностями (4), задовольняють співвідношення

$$\underline{Z}_n(t) \le \underline{Z}_{n+1}(t) \le \overline{Z}_{n+1}(t) \le \overline{Z}_n(t), \quad n = 0, 1 \ldots \qquad (5)$$

Якщо при цьому система (1) має Т-періодичний розв'язок $x^*(t) \in I$, що задовольняє умову $x^*(0) = x_0$, то при $t \in [0;T]$ виконуються співвідношення

$$\underline{Z}_n(t) \le Z^*(t) \le \overline{Z}_n(t),\ Z^*(t) = \begin{pmatrix} x^*(t) \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad n=0, 1\ldots \qquad (6)$$

Доведення. З умови (3) випливає, що $a \le \underline{x}_0(t) \le \overline{x}_0(t) \le b$. Із ізотонності оператора $L[f(t, x, y)]$ по x і антитонності по y дістаємо:

$$\underline{x}_0(t) \le A^{-1}\underline{m} - \frac{T}{3}(\overline{M} - \underline{M}) - (\overline{M} - \underline{M})d(t) \le \underline{\lambda}_0 + \overline{L}[f(t, \underline{x}_0, \overline{x}_0)] =$$

$$= F(\underline{x}_0, \overline{x}_0) + L[f(\underline{x}_0, \overline{x}_0)] = \underline{x}_1(t), \quad t \in [0;\ T],\ d(t) = \frac{2}{T}t(T-t).$$

Аналогічно переконуємось, що $\underline{x}_1(t) \le \overline{x}_0(t)$. Із одержаних співвідношень та того, що $F(\underline{x}, \overline{x})$ не спадає по $\underline{x}$ і не зростає по $\overline{x}$, доводиться справедливість нерівностей

$$\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_0 \le \underline{\lambda}_2 \le \overline{\lambda}_2 \le \overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_0,$$

звідки достаємо, що

$$\underline{Z}_0(t) \le \underline{Z}_1(t) \le \overline{Z}_1(t) \le \overline{Z}_0(t).$$

Виконання нерівностей (5) для n = 1, 2... перевіряється за індукцією.

Очевидно, що $\underline{x}_0(t) \le x^*(t) \le \overline{x}_0(t)$, $\underline{\lambda}_0 \le x_0 \le \overline{\lambda}_0$. Тому

$$\underline{Z}_1(t) = U(\underline{Z}_0, \overline{Z}_0) \le U(Z^*, Z^*) = Z^*(t) \le U(\overline{Z}_0, \underline{Z}_0) = \overline{Z}_1(t)$$

Індуктивний перехід дає співвідношення

$$\underline{Z}_{n+1}(t) = U(\underline{Z}_n, \overline{Z}_n) \le U(Z^*, Z^*) = Z^*(t) \le U(\overline{Z}_n, \underline{Z}_n) = \overline{Z}_{n+1}(t)$$

Зауваження. Так як оператор U неперервний і переводить відрізок $[\underline{Z}_0, \overline{Z}_0]$ в свою компактну частину, то при виконанні нерівностей (3) рівняння $Z=U(Z,Z)$ має хоча б один розв'язок $Z \in [\underline{Z}_0, \overline{Z}_0]$.

Дослідимо випадок, коли розв'язок $x^*(t)$ єдиний. Будемо вважати, що для довільних $a \le \underline{x} \le \overline{x} \le b$ виконуються нерівності

$$f(t,\overline{x},\underline{x}) - f(t,\underline{x},\overline{x}) \le K(\overline{x} - \underline{x})$$

$$g(t,\overline{x},\underline{x}) - g(t,\underline{x},\overline{x}) \le K(\overline{x} - \underline{x}) \qquad (7)$$

Теорема 2. Нехай в області D виконуються умови теореми 1, нерівності (7), а також всі власні значення матриці $Q = \left(\frac{5}{6}TE + A^{-1}\right)K$ лежать в одиничному крузі. Тоді послідовні наближення, визначені рівностями (4), збігаються при $n \to \infty$ до функції $Z^*(t)$, де функція $x^*(t) \in I$, визначена при $t \in [0; T]$, будучи періодично продовженою на всю вісь $t \in (-\infty, \infty)$, є єдиним T-періодичним розв'язком системи (1).

Доведення. Із співвідношення (4) з врахуванням (7) знаходимо

$$\overline{x}_{n+1}(t) - \underline{x}_{n+1}(t) = \overline{\lambda}_n - \underline{\lambda}_n + d(t)K \max_{t\in[0;T]} (\overline{x}_n(t) - \underline{x}_n(t)) \le \overline{\lambda}_n - \underline{\lambda}_n +$$

$$+ \frac{T}{2} K \max_{t\in[0,T]} (\overline{x}_n(t) - \underline{x}_n(t))$$

$t \in [0; T]$

$$\overline{\lambda}_n - \underline{\lambda}_n \le \left(\frac{T}{3}E + A^{-1}\right)K \max_{t\in[0;T]} (\overline{x}_n(t) - \underline{x}_n(t)),$$

звідки дістаємо співвідношення (8). В силу умов теореми $\lim_{n\to\infty} Q^n = \Theta$, тому, враховуючи нерівності (6) і переходячи в (8) до границі при $n \to \infty$, дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n(t) = x^*(t), \qquad \lim_{n\to\infty} \underline{\lambda}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{\lambda}_n = x^*(0) = x_0$$

Переходячи до границі в рівностях (4), отримаємо

$$x_0 + F(x^*,x^*) = T^{-1}A^{-1}\int_0^T [Ax^*(t) - g(t,x^*,x^*)]\,dt =,$$

$$= T^{-1}A^{-1}\int_0^T f(t,x^*,x^*)dt = 0$$

звідки випливає, що $x^*(t)$ задовольняє при $t\in[0;\ T]$ системі (1). Єдиність $x^*(t)$ доводиться від супротивного. Позначивши через $x_\infty(t)$ періодичне продовження функції $x^*(t)$ на всю вісь $(-\infty,\infty)$, дістанемо, що $x_\infty(t)$ – єдиний T-періодичний розв'язок системи (1).

Оцінки похибок характеризуються при цьому нерівністю

$$\bar{x}_n(t) - \underline{x}_n(t) \le \frac{T}{2}Q^n\left(\frac{7}{6}T(\overline{M} - \underline{M}) + A^{-1}(\overline{m} - \underline{m})\right). \tag{8}$$

Зауваження. Використовуючи рекурентне співвідношення

$$Z_{n+1}(t) = U(Z_n, Z_n),\ \ Z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ F(x_0,x_0) \end{pmatrix},\ \ x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}(\overline{m} + \underline{m}), \tag{9}$$

можна отримати послідовність Т-періодичних функцій, визначених на всій осі $(-\infty,\ \infty)$. У випадку збіжності $\{x_n(t)\}$ її границя також буде T-періодичною функцією. Порівнюючи члени послідовностей (4) і (9) переконуємось, що при $t\in[0,\ T]$ виконуються нерівності $\underline{Z}_n(t) \le Z_n(t) \le \bar{Z}_n(t)$, n = 0, 1… .

The theorems of existence and uniqueness of iniatial values of periodical solutions of differential equations systems by double-sided method.

[1]. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.

[2]. Курпель Н.С. О двухсторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Труды 5 Междунар. конф. по нелин. колебаниям. – 1970. – Т. 1. – С. 348-352.

[3]. Курпель Н.С., Марусяк А.Г. О периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // К.: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 25-32.

[4]. Ронто В.А., Ронто Н.И. Об отыскании начальных значений периодических решений неавтономных дифференциальных уравнений // Аналит. методы иссл. решений нелин. диф. уравнений. – К. – 1975. – С. 132-136.