Т.П. Гой, І.Я. Чаплинська

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджена задача з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та локальними крайовими умовами за просторовою змінною x для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі змінними за x коефіцієнтами у прямокутній області. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлені умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

Інтерес до задач з нелокальними крайовими умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними зумовлений як потребами загальної теорії крайових задач, так і запитами практики (див., наприклад [1-5] та бібліографію в них). Такі задачі є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Дослідження задач з періодичними крайовими умовами за часовою змінною для нелінійних гіперболічних рівнянь започатковані у роботі [6]. Задачі з нелокальними крайовими умовами, що узагальнюють умови періодичності, для нелінійних гіперболічних рівнянь і систем першого та другого порядків вивчались, зокрема, у [7-13].

У даній статті, яка є розвитком робіт [14-16], встановлені умови класичної коректності у прямокутній області задачі з двоточковими нелокальними умовами за часовою змінною для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами у лінійній частині оператора.

1. Розглянемо в області $Q=\{(t,x):t\in(0,T),x\in(0,b)\}$ задачу

$$P(u)\equiv\sum_{s=0}^{n}a_s\frac{\partial^{2s}}{\partial t^{2s}}L^{n-s}u(t,x)=\varepsilon f(t,x,u(t,x)),\qquad(1)$$

$$\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\mu\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T},\quad j=0,1,\dots,2n-1,\qquad(2)$$

$$L^r u(t,0)=L^r u(t,b)=0,\quad r=0,1,\dots,n-1,\qquad(3)$$

де $a_s\in R,\ s=0,1,\dots,n,\ a_n=1,a_0\neq0,\varepsilon,\mu\in C\setminus\{0\}$; оператор $P(u)$ – строго гіперболічний за Петровським;

$$L \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)\ -$$

самоспряжений диференціальний оператор з коефіцієнтами

$$p(x)\geq p_0>0,\ q(x)>0,\ p\in C^{2n-1}([0,b]),\ q\in C^{2n-2}([0,b]).$$

Припустимо, що функція $f(t,x,z)$ визначена і неперервна за t та достатньо гладка за x, z в області $D=\{(t,x,z):(t,x)\in Q,|z|\leq r<\infty\}$. Інші умови на функцію $f(t,x,z)$ будуть з'ясовані пізніше.

Позначимо через $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in N}$ та $\Omega=\{X_k\}_{k\in N}$ відповідно множину власних чисел та множину власних функцій задачі Штурма-Ліувілля

$$LX(x)=\lambda X(x),\quad X(0)=X(b)=0. \tag{4}$$

Відомо [17], що множина Ω є повною та ортогональною в $L_2([0,b])$, а всі власні значення задачі (4) є додатними та різними. Крім цього, $X_k(x)\in C^{2n}([0,b]), k\in N,$ і справджуються такі асимптотичні оцінки:

$$c_0k^2\leq\lambda_k\leq c_1k^2,\quad 0<c_0\leq c_1. \tag{5}$$

$$\max_{x\in[0,b]}\left|\frac{d^jX_k(x)}{dx^j}\right|\leq c_2\lambda_k^{j/2},\ c_2=c_2(j),\ j=0,1,\ldots,2n,\ k\in N. \tag{6}$$

2. Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x). \tag{7}$$

Якщо ряд (7) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінною x до порядку $2n$ включно, рівномірно збігаються в області $\overline{G}$, то функція $u(t,x)$, визначена формулою (7), очевидно, задовольняє умови (3).

Підставивши ряд (7) у рівняння (1) та умови (2), для визначення кожної з функцій $u_k(t), k\in$ N, одержимо таку крайову задачу для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda_k^{n-s}u_k^{(2s)}(t)=\varepsilon f_k(t,\{u_m(t)\}),\quad \lambda_k\in\Lambda, m\in Z, \tag{8}$$

$$u_k^{(j)}(0)=\mu u_k^{(j)}(T),\ j=0,1,\ldots,2n-1, \tag{9}$$

де

$$f_k(t,\{u_m(t)\})=\int_0^b f\left(t,x,\sum\nolimits_{m=1}^{\infty}u_m(t)X_m(x)\right)X_k(x)dx,\ k\in N, \tag{10}$$

коефіцієнти розвинення функції $f\left(t,x,\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)\right)$ у ряд за ортогональною системою Ω.

Покажемо, що задача (1)-(3) зводиться до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння.

Для кожного $k\in N$ розглянемо задачу з умовами (9) для лінійного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\lambda_j^{n-s}u_k^{(2s)}(t)=0. \tag{11}$$

Згідно з припущенням про строгу гіперболічність оператора P, корені характеристичного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n}a_s\eta^{2s}=0 \tag{12}$$

є дійсними та простими (випадок кратних коренів призводить лише до більш громіздких викладок). Тому рівняння (11) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t)=exp\left(i\eta_j\sqrt{\lambda_k}t\right),\quad u_{k\,n+j}(t)=exp\left(-i\eta_j\sqrt{\lambda_k}t\right),\quad j=1,\dots,n,$$

де η_j, $j=1,\dots,n$,– додатні корені рівняння (12), а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (11),(9) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=i^{3n^2}2^n\lambda_k^{n(2n-1)/2}\prod_{1\le p<q\le n}\left(\eta_q^2-\eta_p^2\right)^2\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\eta_j\left(1-\mu\,exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT\right)\right)\left(1-\mu\,exp\left(-i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT\right)\right). \tag{13}$$

Зауважимо, що якщо виконується хоча б одна з наступних умов: $1)\ |\mu|\neq 1;\ \ 2)\ (\forall\lambda_k\in\Lambda)\ arg\,\mu\pm\sqrt{\lambda_k}\eta_jT\neq 2\pi m,\ j=1,\dots,n,\ m\in Z$, то визначник $\Delta(\lambda_k)$ тотожно відмінний від нуля для всіх $\lambda_k\in\Lambda$.

Надалі вважатимемо, що для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ $\Delta(\lambda_k)\neq 0$. Тоді розв'язок лінійної задачі (1)-(3) (коли $\varepsilon=0$) буде єдиним і для кожного $k\in N$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (11),(9).

У квадраті $K_T=\{(t,\tau):\ 0\le t,\tau\le T\}$, за винятком сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in N$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau)=\frac{1}{4}\left(i\sqrt{\lambda_k}\right)^{1-2n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\eta_j^{-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}\left(\eta_j^2-\eta_s^2\right)^{-1}\times$$

$$\times exp\left((-1)^p i\sqrt{\lambda_k}\eta_j(t-\tau)\right)\left(sgn(t-\tau)+\frac{[illegible]}{1-\mu\,exp[illegible]\sqrt{\lambda_k}\eta_jT)}\right) \tag{14}$$

На стороні $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in N$, доозначимо за неперервністю справа (зліва).

За допомогою системи функцій $\{G_k(t,\tau), k \in N\}$ задачу (8), (9) зводимо до еквівалентної їй нескінченної системи нелінійних інтегральних рівнянь

$$u_k(t) = \varepsilon \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau, \{u_m(\tau)\}) d\tau, \quad k, m \in N. \tag{15}$$

Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) X_k(x) X_k(\xi) \tag{16}$$

рівномірно збігається в області $\bar{Q} \times \bar{Q}$ до деякої функції $K(t,x,\tau,\xi)$. Тоді задача (1),(2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(t,x) = \varepsilon \int_G K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\tau d\xi. \tag{17}$$

Збіжність рядів (7) і (16) у загальному випадку пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1 - \mu \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right), \quad j = 1,\dots,n, \tag{18}$$

що входять знаменниками у формули (14) можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної кількості $\lambda_k \in \Lambda$.

У випадку $|\mu| \neq 1$ вирази (18) не є малими знаменниками, що випливає з оцінок:

$$\left|1 - \mu \exp\left(\pm i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T\right)\right| = \left|1 - |\mu| \exp\left(i\left(\pm\sqrt{\lambda_k}\eta_j T + \arg\mu\right)\right)\right| =$$
$$= \sqrt{1 - 2|\mu|\cos\left(\pm\sqrt{\lambda_k}\eta_j T + \arg\mu\right) + |\mu|^2} \geq \big|1 - |\mu|\big|, \quad j = 1,\dots,n. \tag{19}$$

З (14) та (19) одержуємо, що в кожному з трикутників $0 \leq t < \tau \leq T$ та $0 \leq \tau < t \leq T$ виконуються оцінки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^s}{\partial t^s} \int_0^T G_k(t,\tau) d\tau \right| \leq$$
$$\leq \begin{cases} c_3 k^{1-2n+s} \sum_{q=1}^{n} \left|1 - \mu \exp\left(i\sqrt{\lambda_k}\eta_q T\right)\right|^{-1} \left|1 - \mu \exp\left(-i\sqrt{\lambda_k}\eta_q T\right)\right|^{-1}, & |\mu| = 1, \\ c_4 k^{1-2n+s}, & |\mu| \neq 1, \end{cases} \tag{20}$$

де $s = 0,1,\dots,2n$,

$$c_3 = Tc_1(1 + |\mu|)^2 B\eta^*, \quad c_4 = Tc_1(1 + |\mu|)\big|1 - |\mu|\big|^{-1} B n \eta^*,$$

$$\bar{\eta} = \min_{j=1,\dots,n} |\eta_j|, \; B = \max_{j=1,\dots,n} \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{n} |\eta_j^2 - \eta_s^2|^{-1}.$$

Якщо ж $|\mu| = 1$, то ряд (16) є, взагалі, розбіжним, однак малі знаменники (18) лише незначною мірою погіршують його збіжність, що випливає з наступного твердження.

Лема. Для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $\eta_j, j = 1,\dots,n$, та $T > 0$ ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n-1}\,|1 - \mu \exp(\pm i\sqrt{\lambda_k}\eta_j T)|}, \quad j = 1,\dots,n,$$

де $|\mu| = 1$, збігаються, якщо $n \geq 2$.

Доведення леми проводиться за схемою доведення леми з [14] з використанням оцінок (6).

З цієї леми та оцінок (20) випливає, що для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел η_j, $j = 1,\dots,n$, та $T > 0$ при $n \geq 2$ ряд (16) рівномірно збігається в області $\bar{Q}\times\bar{Q}$.

3. Розглянемо питання про існування розв'язку інтегрального рівняння (17) з простору $C^{2n}(\bar{Q})$.

Теорема. Нехай $n \geq 2$, функція $f(t,x,z)$ неперервна за t і має в області D обмежені похідні за змінними x, z до п'ятого порядку включно, причому справджуються умови

$$L^q f(t,0,u) = L^q f(t,b,u), \;\; q = 0;1, \;\; t \in [0,T]. \tag{21}$$

Тоді, якщо $|\mu| = 1$, то для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $T > 0$, $\eta_j, j = 1,\dots,n,$ та для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, а якщо $|\mu| \neq 1$, то для довільних фіксованих η_j, $j = 1,\dots,n$, $T > 0$, і для всіх ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (17), який належить замкненій кулі $\bar{S}(r)$, де

$$\bar{S}(r) = \{u(t,x) \in C^{2n}(\bar{Q}) : \|u\|_{C^{2n}(\bar{Q})} \leq r < \infty\}$$

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{r}{\Phi_1(1+r)}, \frac{1}{\Phi_1(2+r)}\right), \quad \varepsilon_2 = \min\left(\frac{r}{\Phi_2(1+r)}, \frac{1}{\Phi_2(2+r)}\right),$$

$$\Phi_1(\alpha) = c_2 c_3 c_5 \alpha^4 W (n+1)(2n+1)\tilde{f} \max(1, c_1^{n-2}),$$

$$\Phi_2(\alpha) = c_2 c_4 c_5 \alpha^4 (n+1)(2n+1)\tilde{f} \max(1, c_1^{n-2}).$$

$$W=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{k^{-3}}{|1-\mu\exp(i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT)||1-\mu\exp(-i\sqrt{\lambda_k}\eta_jT)|},$$

$$\tilde{f}=\max_{0\le s_1+s_2\le 5}\max_{D}\left|\frac{\partial^{s_1+s_2}f(t,x,z)}{\partial x^{s_1}\partial z^{s_2}}\right|,$$

стала c_5 з оцінки (24.)

Доведення теореми проведемо для випадку $|\mu|=1$. Інтегральне рівняння (17) запишемо у вигляді

$$u(t,x)=Au(t,x), \tag{22}$$

де A – нелінійний інтегральний оператор

$$Au(t,x)=\varepsilon\int_Q K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi, \tag{23}$$

визначений у кулі $\bar{S}(r)$, та покажемо, що для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел η_j, $j=1,\ldots,n$, та $T>0$ оператор A переводить кулю $\bar{S}(r)$ у себе, тобто $\|Au\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\le r$.

Якщо функція $u(t,x)$ вигляду (5) належить кулі $S(r)$ і виконуються умови (21), то з (10) одержуємо оцінки

$$\max_{0\le t\le T}|f_k(t,\{u_m(t)\})|\le c_5\lambda_k^{-q/2}\max_{(t,x)\in Q}\left|\frac{\partial^q f(t,x,u(t,x))}{\partial x^q}\right|,\quad q=0,1,\ldots,4. \tag{24}$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$\max_{(t,x)\in Q}\left|\frac{\partial^p f(t,x,u(t,x))}{\partial x^p}\right|\le\tilde{f}\left(1+\|u\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\right)^p\le\tilde{f}(1+r)^p,\ p=0,1,\ldots,4. \tag{25}$$

Тепер з формули (23), враховуючи оцінки (20),(24) та (25), одержуємо

$$\|Au(t,x)\|_{C^n(\bar{B})}\le$$

$$\le|\varepsilon|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+s\le 2n}\max_{(t,x)\in Q}\left|\frac{\partial^{s+j}}{\partial t^s\partial x^j}\int_0^T G_k(t,\tau)\int_0^b f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))X_k(x)X(\xi)d\tau d\xi\right|\le$$

$$\le|\varepsilon|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+s\le 2n}\max_{(t,x)\in Q}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^s\partial x^j}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau,\{u_m(\tau)\})d\tau\, X_k(x)\right|\le$$

$$\le|\varepsilon|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+2s\le 2n}\max_{0\le x\le b}\left|\frac{d^jX_k(x)}{dx^j}\right|\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\right|\max_{0\le t\le T}|f_k(t,\{u_m(t)\})|\le$$

$$\le c_2c_3c_5(1+r)^4W(n+1)(2n+1)\tilde{f}\max\left(1,c_7^{n-2}\right)|\varepsilon|=\Phi_1(1+r)|\varepsilon|\le r.$$

Покажемо тепер, що оператор A для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $\eta_j,\ j=1,\dots,n,$ та $T>0$ є оператором стиску. Нехай $u_1,u_2 \in S(r)$. Позначимо

$$F(t,x)=f(t,x,u_1(t,x))-f(t,x,u_2(t,x)),$$
$$\bar{u}=\theta u_1(t,x)+(1-\theta)u_2(t,x),\ 0<\theta\le 1.$$

Із (23), враховуючи лему, оцінки (20), (24), (25) та формулу Лагранжа про скінченні прирости, одержуємо, що для майже всіх чисел $\eta_j,\ j=1,\dots,n,$ та $T>0$ справджується оцінка

$$\|Au_1-Au_2\|_{C^{2n}(Q)}\le$$
$$\times|\varepsilon|\left\|\int_Q\sum_{k=1}^{\infty}G_k(t,\tau)F(t,x)X_k(x)X_k(\xi))d\tau d\xi\right\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\le$$
$$\le|\varepsilon|\,\|u_2-u_1\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j+2s\le 2n}\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\right|\max_{0\le x\le b}\left|\frac{d^jX_k(x)}{dt^j}\right|\times$$
$$\times\max_{0\le t\le T}\left|\int_0^b\frac{\partial F(\tau,\xi,\bar{u})}{\partial u}X_k(\xi)d\xi\right|\le|\varepsilon|\,\|u_2-u_1\|_{C^{2n}(\bar{Q})}\Phi(2+r).$$

За умов теореми $|\varepsilon|\Phi_1(2+r)<1$, тому оператор A, визначений формулою (23), є оператором стиску для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $\eta_j,\ j=1,\dots,n,$ та $T>0$. Згідно з теоремою 1 з [18, розд. 16] інтегральне рівняння (17), а отже, і задача (1)-(3) має єдиний розв'язок.

У випадку $|\mu|\ne 1$ доведення теореми проводиться за тією ж схемою. Теорему доведено.

Зауваження. Розв'язок задачі (1)-(3) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t,x)\}$, де u_0 – довільна функція з кулі $\bar{S}(r)$, де $u_{s+1}(t,x)=Au_s(t,x),\ s\in N$.

We study problem with non-local two-point conditions in time variable and local boundary conditions in a space variable x for weakly non-linear hyperbolic high-order equations with variable coefficients in rectangular domain. For almost all (with respect to Lebesque measure) parameters of the problem we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.

[1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2]. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

[3]. Мамян А.Х. Общие граничные задачи в слое//Докл. АН СССР.– 1982. – Т. 267. – № 2. – С. 292-296.

[4]. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений//Мат. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 5. – С. 727-733.

[5]. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

[6]. Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных//Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – №1. – С. 15-50.

[7]. Vejvoda O., Hartmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Alphen aan den Rijn. Sijthoff: Noordhoff, 1981. – 358+XIIIp.

[8]. Sinestrari Eugenio, Webb G.F. Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions//J. Math. Anal. and Appl. – 1987. –V.121. – №2. – P. 449-464.

[9]. Плотников П.И., Юнгерман Л.Н. Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала//Дифференц. уравнения. – 1988. – Т.24.– №9. – С. 1599-1607.

[10]. Митропольский Ю.А., Урманчева Л.Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений//Укр. мат. журн. – 1990. –Т.42. – №2. – С. 1657-1663.

[11]. Byszewski L. Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt}=F(x,t,u,u_x)$//J. Appl. Math. and Stochastic Anal. – 1990. – V.3.– №3. – P. 163-168.

[12]. Кміть І.Я. Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними//Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45.– №9. – С. 1307-1313.

[13]. Kiguradze Tariel. Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type. – Tbilisi: A. Razmadze Math. Inst. of the Georg. Acad. of Science.,1994. – 144 p.

[14]. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь//Укр. мат. журн. – 1997. –Т.49. – №2. – С. 186-195.

[15]. Goy T.P., Ptashnyk B. Yo. Nonlocal boundary value problems for quasilinear hyperbolic equations//Nonlinear boundary value problems. – Donetsk: Institute of Applied Mathematics and Mechanics –1998. – Issue 8 – C. 114-120.

[16]. Гой Т.П. Нелокальна крайова задача для гіперболічного факторизованого оператора зі сталими коефіцієнтами, збуреного нелінійним доданком //Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 2. – С. 16-23.

[17]. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 364 с.

[18]. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.