© Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. 2001. Випуск 2.

Б.Я. Атаманюк

ГІПЕРПРОСТОРИ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Доводиться одна теорема про геометричне представлення гіперпростору нечітких множин.

Необхідні означення можна знайти в працях [1] і [2].

Означення 1. Нечіткою множиною F над деякою універсальною множиною V називають:

1) у випадку дискретності V: $F = \sum \mu(u_i)/u_i$,

2) у випадку неперервності V: $F = \int\limits_V \mu(u)/u$, де $\mu(u)$ -- ймовірність належності множині F елемента u.

Означення 2. Носієм нечіткої множини F назвемо сукупність тих елементів $u \in V$, для яких $\mu(u) > 0$.

Означення 3. Ядром нечіткої множини F називається сукупність усіх достовірних елементів, тобто

Означення 4. Множиною α-рівня для нечіткої множини F називають

$$F_\alpha = \{u \in V \,/\, \mu(u) \geq \alpha\}.$$

Зауважимо, що для $V = R$ (множини дійсних чисел) нечітка множина F називається нечітким числом. Запис:

$$\tilde{x} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\inf x_\alpha, \sup x_\alpha]$$

Означення 5. Трапецієвидною формою нечіткого числа називають четвірку:

$$\tilde{q} =< \inf q_0, \sup q_0, \inf q_1, \sup q_1 >,$$

де параметри задаються так $\inf q_0$ – це нижня грань нульового α-рівня, $\sup q_0$ – верхня грань нульового α-рівня, $\inf q_1$ – нижня грань одиничного α-рівня, $\sup q_1$ – верхня грань одиничного α-рівня.

Функцію належності μ можна задати формулою:

$$\mu(q)=\begin{cases}0, \text{якщо } q<\inf q_0;\\ \dfrac{q-\inf q_0}{\inf q_1-\inf q_0}, \text{якщо}: \inf q_0\le q\le \inf q_1;\\ 1, \text{якщо } \inf q_1\le q\le \sup q_1;\\ \dfrac{\sup q_0-q}{\sup q_0-\sup q_1}, \text{якщо}: \sup q_1\le q\le \sup q_0;\\ 0, \text{якщо } q>\sup q_0\end{cases}$$

Зауваження 1. Якщо нечітке число задано в трапецієвидній формі: $\tilde{q}=<\inf q_0, \sup q_0, \inf q_1, \sup q_1>$, то його можна подати як $\bigcup\alpha-$рівнів за формулою $\tilde{q}=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}[\inf q_\alpha, \sup q_\alpha]$,

де параметри $\inf q_\alpha=\inf q_0+(\inf q_1-\inf q_0)\cdot\alpha$, так само

$$\sup q_\alpha=\sup q_0-(\sup q_0-\sup q_1)\cdot\alpha.$$

Означення 6. Трикутною формою нечіткого числа назвемо трійку $\tilde{q}=<\inf q, \sup q, \bar{q}>$ де параметри означають: $\inf q$ – це нижня грань нечіткого числа на нульовому α-рівні, $\sup q$ – верхня грань нечіткого числа q на нульовому α-рівні, параметр $\bar{q}$ – значення нечіткого числа $\tilde{q}$ на одиничному α-рівні.

Означення 7. Друга назва ядра – оптимістична оцінка. Носій має другу назву – песимістична оцінка.

Зауваження 2. (перехід до α-рівневого запису). Якщо задано нечітке число $\tilde{q}=<\inf q, \sup q, \bar{q}>$, то його можна подати у вигляді :

$$\tilde{q}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}[\inf q_\alpha, \sup q_\alpha],$$

де параметри задаються формулами:

$$\inf q_\alpha=\inf q+(\bar{q}-\inf q)\cdot\alpha,$$

$$\sup q_\alpha=\sup q-(\sup q-\bar{q})\cdot\alpha,$$

причому функція належності записується формулою:

$$\mu(q)=\begin{cases}0, якщо\ q<\inf q;\\ 0, якщо\ q>\sup q;\\ \dfrac{q-\inf q}{C-\inf q}, якщо\ \inf q\le q\le C;\\ \dfrac{\sup q-q}{\sup q-C}, якщо\ C\le q\le \sup q\end{cases}$$

Зауваження 3. Нечітке число $\bar{q}$ буде порядковою дугою. Нечітка множина f - також.

Виберемо в якості V підпростір компактних підмножин $exp^{C}(l2)$, де l2- гільбертів простір, хоча можна брати замість l2 – довільний зв'язний, локально-зв'язний, ніде не локально компактний, повний, сепарабельний, метричний простір. Кожна нечітка множина буде порядковою дугою. Позначимо простір нечітких множин в $exp^{C}(l2)$ через $N^{C}(l2)$.

Теорема. $N^{C}(l2)\approx l2$.

Доведення. Використаємо критерій Торунчика: простір X гомеоморфний гільбертовому простору l2 тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1) X – польський, тобто повний, сепарабельний, метричний простір;

2) X - $AR(m)$ – простір;

3) Для будь-якого відображення $f\ \sum K_i \to X$ зліченної диз'юнктної суми скінченних комплексів, для будь-якого покриття $U\in Cov(X)$ існує відображення $g:\sum K_i \to X$ таке, що $(g,f)<U$, тобто дані відображення U – близькі; і сімейство $\{g(K_i): i\in N\}$ дискретне в X.

Якщо беремо $N^{C}(l2)$, то з умови, що l2 – повний, сепарабельний, метричний простір випливає, що $\exp^{C}(l2)$ – також. На $N^{C}(l2)$ вводиться метрика Хаусдорфа, тому простір $N^{C}(l2)$ – також польський. Належність $N^{C}(l2)$ класу $AR(m)$, перевіряється так само як і для порядкових дуг впорядкованих монотонно параметризацією Морса. Перевіримо умову дискретної апроксимації:

афіксуємо довільне неперервне відображення $f:\sum K_i \to N^c(l2)$, афіксуємо довільне відкрите покриття $U \in Cov(N^c(l2))$. З метризовності випливає паракомпактність, тому виберемо локально-скінченне відкрите покриття W підпростору $N^c(l2)$, зірчасто вписане в U. Будуємо відображення g поетапно:

I етап. Нехай d – метрика на $exp^c(l2)$. Нехай d_H – метрика Хаусдорфа на гіперпросторі нечітких множин $N^c(l2)$. Нехай A – нечітка множина, $A \in N^c(l2)$. Зафіксуємо деяке число $\mu > 0$ і позначимо $O_d(A,\mu) = \{C \in exp^c X : d(C,D) < \mu\}$ для деякого континуума $D \in A$. Позначимо також $O_{d_H}(A,\mu) = \{B \in N^c(l2) : d_H(A,B) < \mu\}$. Задаємо відображення $\alpha: N^c(l2) \to (0,\infty)$ формулою: $\alpha(A) = (1/2)\sup\left\{\mu > 0 : O_{d_H}(A,\mu) \subset W1,\ldots,Wk\right\}$. Тут $W1$, $W2, \ldots, Wk$ – це ті елементи локально-скінченного покриття W, які містять A. Відображення $\alpha: N^c(l2) \to (0,\infty)$ буде неперервним, бо sup береться по всіх $W1, W2, \ldots, Wk$, що містять A.

Зауважимо, що для W-близькості двох відображень f і g: $\sum K_i \to N^c(l2)$ достатньо умови їх α-близькості, тобто для будь-якого X має виконуватися $d_H(f(x), g(x)) < \alpha(f(x))$.

Доведемо це. За означенням відображення α існує таке число $\mu_0 > 0$, що $\alpha(f(x)) = \mu_0/2$, де $O_{d_H}(f(x),\mu_0) \subset W1, W2, \ldots Wk$.

Але $O_{d_H}(f(x),\mu_0) = \{B \in N^c(l2) : d_H(B, f(x)) < \mu_0\}$. Якщо $d_H(f(x), g(x)) \le \alpha(f(x)) = (1/2)\mu_0$, то тим більше

$$d_H(f(x), g(x)) < \mu_0,$$

отже $g(x) \in O_{d_H}(f(x), \mu_0) \subset W1, W2, ..., Wk$. Тобто відображення f і g будуть W-близькими.

II етап. Враховуючи локальну лінійну зв'язність простору $\exp^C(l2)$ задаємо відображення $\tilde{\beta}(A): N^C(l2) \to (o, \infty)$ формулою: $\tilde{\beta}(A) = sup\{\mu > 0:$ існує таке $\varepsilon, \varepsilon < (1/2)\alpha(A),$ що як тільки континуум $C \in O_d(A, \mu)$, то в $exp^C(l2)$ існує дуга J діаметру меншого за ε, яка з'єднує континуум C з деяким континуумом $K \in A\}$.

Перевіримо, що так побудоване відображення буде напівнеперервним знизу. Нехай $0 < r < \tilde{\beta}(A)$. Треба довести, що існує такий окіл $U_{d_H}(A, \delta)$, що $r < \tilde{\beta}(B)$ для будь-якої нечіткої множини $B \in U_{d_H}(A, \delta)$. З означення sup випливає, що існує таке μ, яке задовольняє нерівність $r < \mu < \tilde{\beta}(A)$ і існує таке $\varepsilon < (1/2)\alpha(A)$, що як тільки континуум $C \in O_d(A, \mu)$, то існує дуга J, яка з'єднує C з деяким континуумом $K \in A$, причому $diam\, I < \varepsilon$. Зафіксуємо ε_1 таке, щоб виконувалася нерівність $\varepsilon < \varepsilon_1 < (1/2)\alpha(A)$. Тоді з неперервності α випливає напівнеперервність знизу функції α, тобто існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $\varepsilon_1 < (1/2)\alpha(A)$ випливає $\varepsilon_1 < (1/2)\alpha(B)$ для будь-якої нечіткої множини $B \in U_{d_H}(A, \delta_1)$. Далі, для числа $\varepsilon_1 - \varepsilon$, враховуючи, що простір $exp^C(l2)$ лінійно-зв'язний, а дуга А – компактна, маємо: існує таке $\delta_2 > 0$, що будь-який континуум $K \in A$ з'єднується деякою дугою K діаметру меншого за $\varepsilon_1 - \varepsilon$ з деяким континуумом $K_i \in B$, де $B \in U_{d_H}(A, \delta_2)$. Задаємо $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, де $\delta_3 = \mu - r$. Зафіксуємо довільну нечітку множину $B \in O_{d_H}(A, \delta)$. Нехай $\eta = \mu - \delta$. Оскільки за вибором $\delta < \mu - r$, то $\eta > r$. Вибираємо довільний континуум $C \in O_d(B, \eta)$. Ясно, що $C \in O_d(A, \mu)$, тому існує дуга J діаметру меншого за ε, яка з'єднує C з континуумом $K \in A$. Задаємо $M = J(2t)$, якщо $t \in [0,1/2]$ і задаємо $M = \square(2t-1)$, якщо $t \in [1/2,1]$, де дуга $\square$ з'єднує континуум K і деяким континуумом $K_1 \in B$, причому $diam\,\square < \varepsilon_1 - \varepsilon$. Тоді

$$diamM \le diam J + diam,\ K < \varepsilon + (\varepsilon_1 - \varepsilon) = \varepsilon_1 < (1/2)\alpha(B).$$

Оскільки $r < \eta$, то $r > sup\{\eta\}$, тобто $r < \tilde{\beta}(B)$ для будь-якої нечіткої множини $B \in O_{d_H}(A,\delta)$. А це якраз означає, що відображення $\tilde{\beta}$ напівнеперервне знизу. Звідси випливає, що існує неперервна функція $\beta : N^c(I2) \to (0,\infty)$ така, що для будь-якої нечіткої множини вірно: $0 < \beta(A) < \tilde{\beta}(A)$ і, як тільки $C \in O_d(A,\beta(A))$, то в $exp^c(I2)$ існує дуга J діаметру меншого ніж $(1/2)\alpha(A)$, яка з'єднує континуум C з деяким континуумом $K \in A$.

<u>III етап.</u> Тріангулюємо кожний поліедр Ki так, щоб відображеня $f : \sum K_i \to N^c(I2)$ задовольняло на кожному сімплексі Δ умови:

1) $diam(f(\Delta)) < (1/2)inf_{\Delta}(\beta \circ f)$, де $diamf(\Delta) = sup\{d_H(f(x1), f(x2))\}$ для всіх $x1, x2 \in \Delta$;
2) $sup_{\Delta}\alpha \circ f < (3/2)inf_{\Delta}\alpha \circ f$;
3) $sup_{\Delta}\beta \circ f < 2inf_{\Delta}\beta \circ f$.

<u>IV етап.</u> Розглянемо для будь-якого $n \in N$ таке локально-скінченне відкрите покриття $\varsigma_n \in Cov(exp^c(I2))$, що $mesh\,\varsigma_n < 1/n$. Оскільки простір $exp^c(I2)$ – сепарабельний і ніде не локально компактний, то покриття ςn зліченне і в кожному його елементі V можна вибрати зліченну дискретну підмножину Ω_V. Позначимо $Z(n) = \bigcup\{\Omega_V \subset V \in \varsigma_n\}$. За рахунок зліченності та локальної скінченності покриття ςn множина $Z(n)$ буде зліченною дискретною підмножиною в $exp^c(I2)$.

V етап. Задаємо відображення $g:\sum K_i \to N^c(I2)$ спочатку в кожній вершині поліедра K_i. Для вершини P вибираємо $n_P = \min\{n\in N: 1/n<(1/4)\beta\circ f(P)\}$. Вибираємо точку Z_P так, щоб $d_H(Z_P, f(P))<1/n_P$, де відстань $d_H(Z_P, f(P)) = d_H(Z_P,\gamma(I)) = \min_{t\in[0,1]}\{d(Z_P,\gamma(t))\}$, де $\gamma(I)=f(P)$ – нечітка множина. Оскільки за вибором число n_P було $1/n_P<(1/4)\beta\circ f(P)$, то $Z_P \in O_d(f(P),\beta\circ f(P))$. Причому з умови $Z_P\in O_d(f(P),\beta\circ f(P))$ випливає, що в $exp^c(I2)$ існує дуга J діаметру меншого за $(1/2)\alpha\circ f(P)$, яка з'єднує континуум Z_P з деяким континуумом $C=\gamma(t_0)\in f(P)$. Позначимо $D_P=\bigcup\{J(t): t\in[0,1]\}$. Цей континуум містить $C=\gamma(t_0)$. За теоремою Борсука- Мазуркевича існує порядкова дуга із континуумів $\delta_P(I)$, яка з'єднує континууми $C=\delta_P(0)$ та $D_P=\delta_P(1)$. Використавши параметризацію Морса, можна вважати дану порядкову дугу нечіткою множиною. Зауважимо, що $g(P)$ буде континуум, бо обидва доданки містять $C=\gamma_P(t_0)=\delta_P(0)$. Використавши знову ту ж параметризацію Морса можна вважати, що $g(P)$ в такому означенні буде нечіткою множиною. Очевидно, що $g(P)\ni f(P)$, а також $d_H(g(P),f(P))\le diam\,J<(1/2)\alpha(f(P))$. Так само задається значення g в q вершині при відповідному Z_q та дузі □, яка з'єднує Z_q з континуумом $K\in f(q)$. Отже у вершинах p і q функція g задана. Продовжуємо відображення g на весь відрізок $[p,q]$. Нехай $\tau\in[p,q]$. За нерівністю трикутника маємо $d_H(Z_P,f(\tau))\le d_H(Z_P,f(P))+d_H(f(P),f(\tau))$.

Тут перший доданок буде не більший від $(1/4)\beta\circ f(P)$ за нерівністю $d_H(Z_P,f(P))\le 1/n_P\le(1/4)\beta\circ f(P)$. Другий доданок за умовою 1) на тріангуляцію поліедрів буде не більший як $(1/2)\inf_{[p,q]}\beta\circ f$. Тому одержимо нерівність: $d_H(Z_P,f(\tau))\le(1/4)\beta\circ f(P)+(1/2)\inf_{[p,q]}\beta\circ f$. Далі за

умовою 2) на тріангуляцію поліедрів маємо: $d_H(Z_p, f(\lambda)) \le 2(1/4) \inf \beta \circ f + (1/2) \inf \beta \circ f \le \beta \circ f(\tau)$, тобто $d_H(Z_p, f(\lambda)) \le \beta \circ f(\tau)$. Тому існує дуга K в $exp^C(I2)$, яка з'єднує континуум Z_q з деяким континуумом $K \in f(\tau)$ діаметру меншого за $(1/2)\alpha \circ f(\tau)$. Нехай тепер $C = \gamma(t_1)$, $K = \gamma(t_2)$, $t_1 \le t_2$ для визначеності. Позначимо $D_P = \bigcup \{ J(t) : t \in [0,1]\}$ і позначимо $D_q = \bigcup \{ K(t) : t \in [0,1]\}$. За теоремою Борсука-Мазуркевича існують порядкові дуги $\delta_P(I)$ та $\delta_q(I)$ такі, що $\delta_P(0) = C = \gamma_\tau(t_1), \delta_q(0) = K = \gamma_\tau(t_2), \delta_P(1) = D_P, \delta_q(1) = D_q$.
Застосовуючи параметризацію Морса, будемо вважати ці порядкові дуги нечіткими множинами. Задаємо $g(\tau) = \gamma_\tau(3t)$, якщо $t \in [0,1/3]$, $g(\tau) = \gamma_\tau(1) \bigcup \delta_P(3t-1)$, якщо $t \in [1/3,2/3]$. Задаємо також $g(\tau) = \gamma_\tau(1) \bigcup \delta_P(1) \bigcup \delta_q(3t-2)$, якщо $t \in [2/3,1]$. Очевидно, що $f(\tau) \in g(\tau)$, а також $d_H(g(\tau), f(\tau)) < (1/2)\alpha \circ f(\tau)$.

Задаємо відображення g на відрізку $[p,q]$ формулами:

(1) якщо $t \in [0,1/4], f(P) = \gamma_P(I)$, то
$$g((1-t)p + t\tau) = \gamma_P(I) \bigcup \{ \delta_P(\xi) \bigcup \delta_P(1) : 0 \le \xi \le 1-4t \}.$$
Зауважимо, що $\delta_p(\xi) \bigcap \gamma_P(1) = C$, тому $\delta_P(\xi) \bigcup \gamma_P(1)$ буде континуумом.

В результаті при $t=1/4$ маємо: $g((3/4)p + (1/4)\tau) = \gamma_P(I) \bigcup \delta_P(0) \bigcup \gamma_P(1) = \gamma_P(I)$.

(2) якщо $t \in [1/4,1/2]$, то
$$g((1-t)p + t\tau) = \bigcup \{ f((2-4\theta)p + (4\theta-1)\tau) : 0 \le \theta \le t \}.$$

(3) якщо $t \in [1/2,3/4]$, то g задаємо формулою:
$$g((1-t)p + t\tau) = \bigcup \{ f((1-\theta)p + \theta\tau) : 4t-2 \le \theta \le 1 \}.$$

(4) якщо $t \in [3/4,1]$, то g задаємо формулою:
$$g((1-t)p + t\tau) = \gamma_\tau(I) \bigcup \{ \gamma_\tau(1) \bigcup \delta_P(2\xi) : \xi \le 4t-3,$$ де
$$0 \le 4t-3 \le 1/2 \} \bigcup \{ \gamma_\tau(1) \bigcup \delta_P(1) \bigcup \delta_q(2\xi-1) : \xi \le 4t-3, 1/2 \le 4t-3 \le 1 \}$$

Аналогічно задається відображення g на відрізку $[\tau,q]$.
Неперервність відображення g досягається за побудовою.

Умова $f(y)\subset g(y)$ для будь-якого $y\in[p,q]$ також очевидна за побудовою. Крім того, $d_H(f(y),g(y))\le d_H(f(y),f(\tau))+d_H(f(\tau),g(y))\le diam f(p,q)+d_H(f(\tau),g(\tau))$. Розглянемо другий доданок. У випадках (3) та (4), коли $g(y)=f(\tau)$,а також коли

$$g(y)=f(\tau)\bigcup\delta_p(I)\bigcup\delta_q(I)$$

з відповідною впорядкованістю з допомогою параметризації Морса, рівність $d_H(f(\tau),g(y))\le(1/2)\alpha\circ f(y)$

досягається за рахунок того, що діаметр дуг не більший як $(1/2)\alpha\circ a(y)$. В результаті одержимо:

$$d_H(f(\tau),g(y))\le(1/2)sup_{[p,q]}\alpha(f).$$

Позначимо її символом *($)*. У випадку (1) маємо $d_H(f(y),g(y))\le d_H(f(y),f(P))+d_H(f(P),g(y))\le$
$\le diamf_{[p,q]}+(1/2)sup_{[p,q]}\alpha\circ f$

У випадку (2) маємо: $d_H(f(y),g(y))\le diam\, f[p,q]$. Отже, для будь-якого $y\in[p,q]$ справедлива нерівність: $d_H(f(y),g(y))\le diam\, f[p,q]+(1/2)sup_{[p,q]}\alpha\circ f$.

Враховуючи умови (1) та (3) на тріангуляцію дістанемо $d_H(f(y),g(y))\le(1/2)inf_{[p,q]}\beta(f)+(1/2)(3/2)inf_{[p,q]}\alpha\circ f<$
$<(1/2)\beta(f(y))+(3/4)\alpha(f(y))$

Далі, згідно з означенням $\beta(f(y))\le(1/2)\alpha(f(y))$, тому $d_H(f(y),g(y))<(1/4)\alpha\circ f(y)+(3/4)\alpha(f(y))=\alpha(f(y))$.

VII етап. Продовжуємо відображення g на весь поліедр K_l за допомогою наступної леми.

Лема (#). Нехай B^{k+1} - (k+1)-вимірна куля, яка обмежена сферою S^k, $k\ge1$. Нехай $f:B^{k+1}\to N^c(l2)$ та $g:S^k\to N^c(l2)$ – такі два відображення, що для будь-якого $s\in S^k$ вірно $f(s)\subset g(s)$. Тоді існує таке продовження відображення g до відображення G: $B^{k+1}\to N^c(l2)$, що $f(b)\subset G(b)$ для будь-якого $b\in B^{k+1}$. Справді, нехай f та g задані відображення. Нехай Z_0 – центр кулі

B^{k+1}, а відображення $r: B^{k+1} \to exp^c(S^k)$ – континуумзначна ретракція, $r(Z_0)=S^k$, а якщо $\xi \neq Z_0$, то $r(\xi)$ – континуум на S^k. Нехай $\mu_\alpha : I \to N^c(12)$ – параметризація Морса. Позначимо $A(\xi,t)=\bigcup_\alpha \{\mu_\alpha(t):\alpha\in g(r(\xi))\}$. Зауважимо, що параметризація дуги α μ-довжиною Морса позначається через $\{\mu_\alpha(t)\}$, при цьому t пробігає проміжок $[0,\mu_\alpha]$. Оскільки різні дуги мають різні μ-довжини Морса, то при взятті об'єднання $\bigcup_\alpha$ необхідно робити нормування, яке досягається, коли в якості параметра брати не t а $t\ \mu_\alpha$. Зауважимо також, що $\xi \in B^{k+1}$. Позначимо $B(\xi,t)=\bigcup_\beta \{\mu_\beta(t):\beta\in f(p)\}$, де p – множина точок кулі B^{k+1}, яка обмежена сферою S^k, $S(Z_0,\xi)$ та конусом над $r(\xi)$ з вершиною Z_0. Позначимо $G(\xi)=\{A(\xi,t)\bigcup B(\xi,t):t\in I\}$. Зауважимо, що $G(\xi,t)=A(\xi,t)\bigcup B(\xi,t)$ - континуум, бо $A(\xi,t)\bigcap B(\xi,t)=\bigcup_\beta \{\mu_\alpha(t):\beta\in f(r(\xi))\}$, адже для будь-якого $s\in r(\xi)$ справедливе включення $f(s)\subset g(s)$. Зауважимо також, що $G(\xi)$ буде порядковою дугою, бо $A(\xi)=\{A(\xi,t):t\in I\}$ – порядкова дуга і $B(\xi)=\{B(\xi,t):t\in I\}$ – також . Більше того, $G(t)$ буде нечіткою множиною, бо вона впорядкована параметризацією Морса по зростанню. Далі, для будь-якого $\xi\in B^{k+1}$ вірне включення $f(\xi)\subset G(\xi)$, оскільки $f(\xi)=\beta\in f(p)$. Тому $\mu_{f(\xi)}(t)\in B(\xi,t)\in G(\xi,t)$, отже $f(\xi)\in G(\xi)$. Використаємо наступні леми із [1].

<u>Лема 1.</u> Об'єднання довільного бікомпактного сімейства K бікомпактних множин простору X само бікомпактне.

<u>Лема 2.</u> Об'єднання довільного зв'язного сімейства зв'язних множин простору X само зв'язне в X.

<u>Лема 3.</u> Якщо задана параметризація Морса $\mu : I \to Y$ і задана функція $\phi : I\times N^C\,Y \to Y$ формулою $\phi(t,\mu)=\mu(t)$, то функція ϕ неперервна за обома аргументами.

<u>Лема 4.</u> Для будь-якого відображення $f: X \to SetY$ відображення $(Set\,f)(A): Set\,X \to Set\,Y$, яке задається формулою $(Set\,f)(A) = \bigcup\{f(a): a \in A\}$ буде неперервним, якщо неперервне само f. Отже, щоб довести лему (#) зауважимо, що за лемою 3 та 4 побудована функція G буде неперервною, а за лемою 1 та 2 завдяки застосуванню параметризації Морса значення $G(\xi)$ міститься в просторі $N^c(l2)$ для будь-якого $\xi \in B^{k+1}$. Лема (#) доведена.

Продовжуємо доведення основної теореми. Аналогічно задаємо відображення G на довільному поліедрі K_i з тією умовою, що точки Z_p вибираються із множини $Z(n_p) \setminus \bigcup\{G(y): y \in K_1, K_2, \ldots, K_{i-1}\}$. Отже, образи $G(K_1), G(K_2), \ldots, G(K_n)$ діз'юнктні за побудовою.

<u>VIII етап.</u> Перевіримо близькість $(G,f) < U$. Для цього досить підтвердити оцінку: $d_H(f(y), G(y)) < \alpha(f(y))$. Вводимо позначення $f_y = \bigcup\{f(\tau): \tau \in [p,q]\}$ – ребро сімплекса Δ, який містить $r(y)$ Тоді за нерівністю трикутника $d_H(f(y), G(y)) \le d_H(f(y), f_y) + d_H(f_y, G(y)) \le$/за умовою (1) на тріангуляцію поліедрів/$\le (1/2)\inf_\Delta \beta \circ f +$/за нерівністю ($)/ + $+(1/2)\sup_\Delta \alpha \circ f \le (1/2)\beta \circ f(y) +$/ за умовою (3) на тріангуляцію поліедрів $/+(1/2)(3/2)\inf \alpha \circ f \le (3/4)\alpha \circ f(y) +/$ за означенням відображення β $/+(1/2)(1/2)\alpha \circ f(y) = \alpha \circ f(y)$. Отже, близькість $(G,f) < W$, а значить і близькість $(G,f) < U$ доведено.

Нагадаємо, що образи $G(K_1), G(K_2), \ldots, G(K_n)$ діз'юнктні за побудовою. Перевіримо їх дискретність. Допустимо від супротивного: нехай існує точка $a \in N^c(l2)$, в будь-якому околі $O(q)$якої існує елемент із сімейства $G(K_i)$, тобто існує збіжна послідовність $G(y_{n_i}) \to a$, де $y_{n_i} \in K_{n_i}$. Для зручності нехай $n_i = i$, тобто $G(y_i)$ прямує до a, де $y_i = K_i$. Зауважимо, що кожна нечітка множина $G(y_i)$ містить точку $Z_i \in Z(n_{p_i})$ для деякої вершини p_i носія Δ_i точки y_i. Покажемо, що $\beta(f(p_i)) \to 0$. Оскільки $n_p = \min\{n \in N: (1/n) \le (1/4)\beta\, f(p)\}$, то досить установити збіжність

$n_{p_i} \to \infty$. Допустимо знову від супротивного: нехай n_{p_i} не збігається до ∞ при $i \to \infty$.

Тоді існує деяка підпослідовність $\{n_{p_{ij}}\}$, що обмежена деяким числом $k \in N$. Розглянемо $\bigcup_{n=1}^{k} Z(n)$. Воно буде дискретним як скінченне об'єднання дискретних підмножин у просторі $N^C(l2)$. Але $U(y_{ij}) \to a$, де $a \in N^C(l2)$. Тому послідовність $\{Z_{ij}\}$ збігається до деякої нечіткої множини – елемента простору $N^C(l2)$. Тут $Z_{ij} \in (\bigcup_{n=1}^{k} Z_n) \cap G(y_{ij})$. Одержуємо протиріччя з дискретністю множини $\bigcup_{n=1}^{k} Zn$ в точці $b \in N^C(l2)$. Отже, $n_{p_i} \to \infty$, значить $\beta(f(p_i)) \to 0$. З другого боку, оскільки $f(y_i) \subset G(y_i)$ для довільного $i \in N$, то існує збіжна підпослідовність $\{f(y_{ij})\}$ до точки $a_0 \in a \in N^C(l2)$. Тому $\beta \circ f(y_{ij}) \to \beta(a_0) > 0$. Але тоді $\beta f(p_{ij}) \geq inf_{\Delta_{ij}} \beta \circ f \geq (1/2) sup_{\Delta_{ij}} \beta \circ f \geq (1/2)\beta \circ f(y_{ij})$ яке, в свою чергу, прямує до $(1/2)\beta(a_0) > 0$. А це означає, що $\beta \circ f(y_{ij})$ не збігається до 0. Протиріччя.

Отже сімейство $\{G(K_i)\}$ буде дискретним у просторі $N^C(l2)$.

Таким чином, всі умови критерія Торунчика виконані і, згідно критерію, гіперпростір нечітких множин $N^C(l2)$ буде гомеоморфний гільбертовому простору $l2$. Теорема доведена.

One theorem about geometric realization of hyperspace of fuzzy sets is proved.

[1] Атаманюк Б.В. Гильбертово пространство как гиперпространство порядковых дуг континуальной экспоненты. – В кн. Кардинальные инварианты и отображения топологических пространств. Сборник тр., Ижевск, 1989. – С.53-55.
[2] Ротштейн А.П. , Штовба С.Д. Нечётная надежность алгоритмических процесов. – Винница: Континент – ПРИМ, 1997.