На підставі (9), (14), (35)-(39) одержуємо, що нерівність

$$\|u\|_{C^{(n,N)}(\overline{Q}^p)} \le C_5 \sum_{|k|\ge 0} |k|^{\tau-r} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_{jk}\|_{C^r(\Omega_{2\pi}^p)} = C_5 \sum_{|k|\ge 0} |k|^{-p-\varepsilon_1} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{C^r(\Omega_{2\pi}^p)}, \quad (40)$$

де

$$C_5 = C_5(M, C, C_1, C_4) > 0, \quad \tau = \nu + (p(n^2 + 2n - 1) + (N - n)(n-1)^2 +$$
$$+ n(n+1)\gamma T)/2 + 2N + \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = 1 - \varepsilon - \{\nu + \omega\}, \quad 0 < \varepsilon < 1 - \{\nu + \omega\},$$

справджується для для майже всіх векторів $\hat{t}$ та для майже всіх векторів $\hat{A}$ і $\bar{b}$. Зі збіжності ряду у правій частині нерівності (40) випливає доведення теореми.

Conditions are established of uniqueness solvability of the problem with multipoint conditions on chosen variable t and with conditions of periodicity on space coordinates for high order linear typeless equations with constant coefficients, nonisotropic rather derivatives on a variables $x_1, \ldots, x_p$. The new metric theorems are proved on the lower bounds of small denominators, which appear in the problem.

1. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. Думка. – 1984. – 284с.
2. Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для уравнений, корректных по И.Г.Петровкому // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып.17. – С. 8-13.
3. Пташник Б. Й., Силюга Л. П. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Допов. НАН України. – 1996. – №3. – С. 10-14.
4. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Київ: Наук. думка, 1984. – 264с.
5. Василишин П. Б., Пташник Б. Й. Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1998. – 50. – №9. – С. 1155-1168.

Г. П. Малицька

ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння Колмогорова високого порядку

В цій статті побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші для класу рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією в інерціальній частині, зокрема, мають довільну кількість груп змінних, за якими є виродження, а за просторовими змінними містять похідні порядку, не вищого $2b$, $b \ge 1$.

Одержані результати дають можливість побудувати фундаментальний розв'язок для такого ж типу рівнянь, але із змінними коефіцієнтами в параболічній частині.

1) Позначення: m_r - фіксовані цілі невід'ємні числа,

$m_r \le m_{r-1} \le m_{r-2} \le \ldots \le m_1 \le n$, r, n - деякі фіксовані натуральні числа.

$N = \sum_{j=1}^{r} m_j + n$, $X = (x, y_1, y_2, \ldots, y_r)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$.

$y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m_1})$, $y_1 \in R^{m_1}, \ldots, y_r = (y_{r1}, y_{r2}, \ldots, y_{rm_r})$, $y_r \in R^{m_r}$.

$M = n + (2b+1)m_1 + \ldots + (2br+1)m_r$.

$x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{m_1})$, $x^{(2)} = (x_1, \ldots, x_{m_2}), \ldots, x^{(r)} = (x_1, \ldots, x_{m_r})$,

$x^{(k,j)} = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_j)$, $k < j$, $y_j^{(s)} = (y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jm_s})$, $j < s$, $X \in R^N$

Аналогічний зміст мають символи:

$E = (\xi, \eta_1, \ldots, \eta_r)$, $\Lambda = (\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_r)$.

$$(X, E) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_j} (y_{jk}, \eta_{jk}) = (x, \xi) + (y_1, \eta_1) + \ldots + (y_r, \eta_r),$$

$$(x^{(1)}, D_{y_1}) = \sum_{j=1}^{m_1} x_j D_{y_{1j}}, (y_1^{(2)}, D_{y_2}) = \sum_{j=1}^{m_2} y_{1j} D_{y_{2j}}, \ldots, (y_{r-1}^{(r)}, D_{y_r}) = \sum_{j=1}^{m_r} y_{r-1,j} D_{y_{rj}},$$

$$D_{y_{sj}} = \frac{\partial}{\partial y_{sj}}, \Pi = \{(tX), t \in (0, T], X \in R^N\}.$$

2) Постановка задачі.

Розглянемо таку задачу Коші:

$$\left(D_t - (x^{(1)}, D_{y_1}) - (y_1^{(2)}, D_{y_2}) - \ldots - (y_{r-1}^{(r)}, D_{y_r}) - \sum_{|k| \le 2b} a_k(t) D_x^k\right) u(t, X) = 0, \quad (t, X) \in \Pi, \quad (1)$$

$$u(t, X)|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad (2)$$

де $(D_t - \sum_{|k| \le 2b} a_k(t) D_x^k) u(t, X) = 0$ - рівномірно параболічне в сенсі Петровського рівняння, $a_k(t)$ комплекснозначні неперервні і обмежені функції, $t \in (0, T]$. $\varphi : R^N \to C$ - досить гладка і фінітна функція.

Розв'язок шукатимемо у вигляді оберненого перетворення Фур'є функції $v(t, E)$, тобто:

$$u(t, X) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} \exp\{i(X, E)\} v(t, E) dE, \quad (3)$$

$t > \tau, X \in R^N$. Для визначення функції $v(t, E)$, одержимо задачу

$$\left(D_t - (\eta_1, D_\xi) + (\eta_2, D_{\eta_1^{(2)}}) + \ldots + (\eta_r, D_{\eta_{r-1}^{(r)}}) + \sum_{|k| \le 2b} a_k(t)(i\xi)^k\right) v(t, E) = 0, \quad (4)$$

$t > \tau, X \in R^N$,

$$v(t,E)\big|_{t=\tau}=\psi(E),E\in R^N, \tag{5}$$

де $\psi(E)=\int_{R^N}\exp\{-i(X,E)\}dX.$ (6)

3) Розв'язання задачі Коші (5),(6).

Задачу (5),(6) розв'яжемо методом характеристик:

$$dt=\frac{d\xi_1}{\eta_{11}}=\ldots=\frac{d\xi_{m_1}}{\eta_{1m_1}}=\frac{d\eta_{11}}{\eta_{21}}=\ldots=\frac{d\eta_{1m_2}}{\eta_{2m_2}}=\frac{d\eta_{21}}{\eta_{31}}=\ldots=\frac{d\eta_{r-1,m_r}}{\eta_{rm_r}}=$$
$$=-\frac{dv}{\sum\limits_{|k|\le 2b}a_k(t)(i\xi)^k v}. \tag{7}$$

Ця система містить $\sum\limits_{j=1}^{r}m_j+1$ незалежних перших інтегралів. З рівнянь

$dt=\dfrac{d\eta_{r-1,j}}{\eta_{r,j}}$ $j=1,2,\ldots,m_r$ знаходимо $\eta_{r-1,j}=t\eta_{r,j}+C_{1,j,r-1}$, $C_{1,j,r-1}=\text{cons}$, (7_1)

а із $dt=\dfrac{d\eta_{r-2,j}}{\eta_{r-1,j}}$, $j=1,2,\ldots,m_r$ - $\eta_{r-2,j}=\dfrac{t^2}{2}\eta_{r,j}+C_{1,j,r-1}t+C_{2,j,r-2}$ (7_2)

і т. д. Із $dt=\dfrac{d\eta_{1,j}}{\eta_{2,j}}$, $j=1,2,\ldots,m_r$ знаходимо

$$\eta_{1,j}=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r+C_{1,j,r-1}\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}+\ldots+C_{r-2,j,2}t+C_{r-1,j,1}, \tag{7_{r-1}}$$

а із $dt=\dfrac{d\xi_i}{\eta_{1j}}$ визначимо ξ_i, $i=1,2,\ldots,m_r$:

$$\xi_j=\frac{t^r}{(r)!}\eta_{rj}+\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1}+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,j,r-2}+\ldots+tC_{r-1,j,1}+C_j. \tag{7_r}$$

Якщо $j=m_r+1,\ldots,m_{r-1}$, то

$$\eta_{r-2,j}=t\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}, \tag{7_{r+1}}$$

$$\eta_{r-3,j}=\frac{t^2}{2}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}t+C_{2,j,r-2}, \tag{7_{r+2}}$$

....

$$\eta_{1,j}=\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j}+C_{1,j,r-2}\frac{t_{r-3}}{(r-3)!}+\ldots+C_{r-2,j,1}, \tag{7_{2r-1}}$$

$$\xi_j=\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j}+\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-2}+\ldots+C_{r-2,j,1}t+C_j. \tag{7_{2r}}$$

Поступово дійдемо до $j=m_3+1,\ldots,m_2$, тоді

$$\eta_{1j} = t\eta_{2j} + C_{1,j,1},\ \xi_j = \frac{t^2}{2}\eta_{2,j} + C_{1,j,1} + C_j. \qquad (8)$$

Якщо $j = m_2 + 1, \dots, m_1$, то $\xi_j = t\eta_{1j} + c_j$. (9)

Оскільки $v = c\exp\left\{\int\limits_\tau^t \sum_{|k|\le 2b} a_k(\beta)(i\xi)^k d\beta\right\}$, то, використовуючи перші інтеграли для ξ_j, можемо записати: $v = c\exp\left\{\int\limits_\tau^t \sum_{|k|\le 2b} a_k(\beta)(i\xi(\eta,\beta,c))^k d\beta\right\}$,

де

$$\xi(\eta,\beta,c) = \left(\frac{\beta^r}{r!}\eta_{r,1} + c_{1,1,r-1}\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!} + \dots + c_1, \dots, \frac{\beta^r}{r!}\eta_{r,m_r} + c_{1,m_r,r-1}\frac{\beta^{r-1}}{(r-1)!} + \right.$$

$$\left. + \dots + c_{m_r}, \dots, \beta\eta_{1,m_1} + c_{m_1}, \xi_{m_1+1}, \xi_n\right).$$

Нехай $\bar\xi_j, \bar\eta_1, \dots, \bar\eta_{r-1}$ і $\bar v$ - значення при $t = \tau$ відповідно $\xi_j, \eta_1, \dots, \eta_{r-1}, v$, тому при $j = 1, \dots, m_r$ $\bar\eta_{1j} = \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{rj} + \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-1} + \dots + C_{r-1,j,1}$,

$$\bar\xi_j = \frac{\tau^r}{r!}\eta_{rj} + \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,j,r-1} + \dots + \tau C_{r-1,j,1} + C_j.$$

Якщо $m_r + 1 \le j \le m_{r-1}$, то

$$\bar\eta_{1j} = \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}\eta_{r-1,j} + \frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}C_{1,j,r-2} + \dots + C_{r-1,j,1},$$

$$\bar\xi_j = \frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,j} + \frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,j,r-2} + \dots + \tau\ C_{r-1,j,1} + C_j \text{ і т. д.}$$

При $m_k + 1 \le j \le m_{k-1}, 1 < k < r$,

$$\bar\eta_{1j} = \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\eta_{k,j} + \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!}C_{1,j,k-1} + \dots + C_{k-1,j,1},$$

$$\bar\xi_j = \frac{\tau^{k1}}{k!}\eta_{k,j} + \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}C_{1,j,k-1} + \dots + \tau C_{kr-1,j,1} + C_j.$$

Зокрема, при $m_2 + 1 \le j \le m_1$ $\bar\xi_j = \tau\eta_{1j} + C_j$.

Аналогічно знаходимо $\bar\eta_{r-k\,j}$ при відповідних $j, \bar v = C$, але $\bar v = \psi$, тому $C = \psi(\bar\xi, \bar\eta_1, \dots \bar\eta_{k-1}, \eta_k)$

Окремо випишемо аргументи $\bar\xi, \bar\eta_1, \dots, \bar\eta_{k-1}, \eta_k$:

$$
\Big(\frac{\tau^r}{r!}\eta_{r1}+\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,1,r-1}+\ldots+\tau C_{r-1,1,1}+C_1,\ldots,
$$
$$
\frac{\tau^r}{r!}\eta_{rm_1}+\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}C_{1,m_r,r-1}+\ldots+\tau C_{r-1,m_r,1}+C_{m_r},
$$
$$
\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1,1+m_r}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{2,m_r,r-2}+\ldots+\tau C_{r-2,m_r+1,1}+C_{m_r+1},
$$
$$
\tau\eta_{1,m_r+1}+C_{m_r+1},\ldots,\tau\eta_{1m_1}+C_{m_1},
$$
$$
\xi_{m_1+1},\ldots,\xi_n,
$$
$$
\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r1}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,1_r,r-1}+\ldots+C_{r-1,1_r1},
$$
$$
\eta_{r,m_r}\frac{\tau^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}C_{1,m_r,r-1}+\ldots+C_{r-1,m_r,1},
$$
$$
\eta_{r-1,1_r}\frac{\tau^{r-2}}{(r-2)!}+\frac{\tau^{r-3}}{(r-3)!}C_{1,1,r-2}+\ldots+C_{r-2,1,1},\ldots,
$$
$$
\tau\eta_{2,m_2}+C_{1,m_2,1},
$$
$$
\eta_{1,m_2+1},\ldots,\eta_{1,m_1},\ldots,\tau\eta_{r1}+C_{1,1,r-1},\ldots,\tau\eta_{rm_1}+C_{1,m_r,r-1},
\tag{10}
$$
$$
\eta_{r-1,m_r+1},\ldots,\eta_{r-1,m_{r-1}},\ldots,\eta_{r1},\ldots\eta_{rm_r}\Big)
$$

Використовуючи (7)-(9), знайдемо сталі C_{ijk}, C_j і, підставивши їх в (10) та в показник exp, одержимо:

$$
\begin{gathered}
v(t,E)=\exp\left\{\sum_{|k|\le 2b}\int_\tau^t a_k(\beta)(i\xi(\eta,t-\beta,c))^k\,d\beta\right\}\Psi\Big(\xi^{(r)}-(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\\
+\frac{(t-\tau)^2}{2!}\eta_2^{(r)}+\ldots+\frac{(-1)^r(t-\tau)^r}{r!}\eta_r,\xi^{(r-1)}-(t-\tau)\eta_1^{(r-1)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}\eta_2^{(r)}+\\
+\ldots+\frac{(-1)^{r-1}(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1},\ldots,\xi^{(1)}-(t-\tau)\eta_1^{(1)},\xi^{(m_1+1,n)},\eta_1^{(r)}-(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\\
+\ldots+\frac{(-1)^{r-1}(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r,\ldots,\eta_1^{(k)}-(t-\tau)\eta_2^{(k)}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\eta_k,\\
\ldots,\eta_1^{(2)}-(t-\tau)\eta_2,\eta_1^{(m_2+1,m_1)},\ldots,\eta_{r-1}^{(r)}-(t-\tau)\eta_r,\eta_{r-1}^{(m_r+1,m_{r-1})},\eta_r\Big),\quad t>\tau, E\in R^N.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

4) Розв'язок задачі (1), (2).

Підставивши (11) у (3) та зробивши відповідну заміну змінних, одержимо:

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int_{R}\exp\Big\{i\big(x^{(m_1+1,n)},\xi^{(m_1+1,n)}\big)+i\big(x^{(m_2+1,m_1)},\xi^{(m_2+1,m_1)}+(t-\tau)\times$$

$$\times\eta_1^{(m_2+1,m_1)}\big)+\ldots+i\Big(x^{(m_r+1,m_{r-1})},\xi^{(m_r+1,m_{r-1})}+(t-\tau)\eta_1^{(m_r+1,m_{r-1})}+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1}\Big)+$$

$$+i\Big(x^{(r)},\xi^{(r)}+(t-\tau)\eta_1^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^r}{r!}\eta_r\Big)+\big(y_1^{(m_2+1,m_1)},\eta_1^{(m_2+1,m_1)}\big)+\ldots+\big(y_1^{(r)},\eta_1^{(r)}+$$

$$+(t-\tau)\eta_2^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_r\Big)+i\big(y_2^{(m_3+1,m_2)},\eta_2^{(m_3+1,m_2)}\big)+\ldots+i\big(y_2^{(r)},\eta_2^{(r)}+(t-\tau)\times$$

$$\times\eta_3^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{r-2}}{(r-2)!}\eta_r\Big)+\ldots+(y_r,\eta_r)+\int_\tau^t\sum_{|k|\le 2b}i^k a_k(\beta)\xi^k(\beta-\tau,\eta)d\beta\Big\}\Psi(E)dE,$$

де

$$\xi(\beta-\tau,\eta)=\Big(\xi^{(r)}+(\beta-\tau)\eta_1^{(r)}+\frac{(\beta-\tau)^2}{2}\eta_2^{(r)}+\ldots+\frac{(\beta-\tau)^r}{r!}\eta_r,\ \xi^{(m_{r-1}+1,m_r)}+$$

$$(\beta-\tau)\eta_1^{(m_{r-1}+1,m_r)}+\ldots+\frac{(\beta-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\eta_{r-1}^{(m_{r-1},m_r)},\ldots,\xi^{(m_2+1,m_1)}+(\beta-\tau)\eta_1^{(m_2+1,m_1)},$$

$$\xi^{(m_1+1,n)}\Big).$$

Скориставшись виразом (6) і змінивши порядок інтегрування та зробивши перепозначення змінних, прийдемо до формули

$$u(t,X)=(2\pi)^{-N}\int_{R}Z(t,X;\tau,E)\varphi(E)dE,\quad t>\tau,$$

$$Z(t,X;\tau,E)=(2\pi)^{-N}\int_{R}\exp\Big\{i(x-\xi,\lambda)+i(y_1+x^{(1)}(t-\tau)-\eta_1,\mu_1)+$$

$$+i\Big(y_2+y_1^{(2)}(t-\tau)+\frac{x^{(2)}(t-\tau)^2}{2!}-\eta_2,\mu_2\Big)+i\Big(y_3+y_2^{(3)}(t-\tau)+y_2^{(3)}\times$$

$$\times\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\frac{x^{(3)}(t-\tau)^3}{3!}-\eta_3,\mu_3\Big)+i\Big(y_r+y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+y_{r-2}^{(r)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+ \qquad (12)$$

$$+\ldots+y_1^{(r)}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r,\mu_r\Big)+\sum_{|k|\le 2b}\int_\tau^t a_k(\beta)\times$$

$$\times(i\lambda(\beta-\tau,\mu))^k d\beta\Big\}d\Lambda,\qquad \Lambda=(\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_r).$$

В інтегралі (12) зробимо заміну змінних

$$\beta-\tau=(t-\tau)\bar\beta,\ \lambda=(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\bar\lambda,\ \mu_1=(t-\tau)^{-\frac{2b+1}{2b}}\bar\mu_1,$$

$$\mu_2=(t-\tau)^{-\frac{4b+1}{2b}}\bar\mu_2,\ldots,\mu_r=(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)}\bar\mu_r.$$

і замість $\bar{\lambda},\bar{\mu}_1,...,\bar{\mu}_r,\bar{\beta}$ знов запишемо відповідно $\lambda,\mu_1,...,\mu_r,\beta$, тоді фундаментальний розв'язок $Z(t,X;\tau,E)$ задачі Коші (1)-(2) матиме вигляд:

$$Z(t,X;\tau,E)=(2\pi)^{-N}\int_{R^N}(t-\tau)^{-\frac{M}{2b}}\exp\left\{i\left(\left((x-\xi)(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}},\lambda\right)\right)+i\left(\left((y_1+(t-\tau)x^{(1)}-\eta_1\right)(t-\tau)^{-\left(1+\frac{1}{2b}\right)},\mu_1\right)+...+i\left(\left(y_r+y_{r-1}^{(r)}(t-\tau)+y_{r-2}^{(r)}\frac{(t-\tau)^2}{2!}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+...+y_1^{(r)}\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}+\frac{x^r(t-\tau)^r}{r!}-\eta_r\right)(t-\tau)^{-\left(2+\frac{1}{2b}\right)},\mu_r\right)+\sum_{k\le 2b}\int_0^1 a_k(\tau-(t-\tau)\beta)(i\lambda^*((t-\tau)\beta,\mu))^k d\beta(t-\tau)\right\}d\Lambda, \qquad (13)$$

де $\lambda^*((t-\tau)\beta,\mu)$ - вираз, що одержали з $\lambda(\beta-\tau,\mu)$ після заміни змінних.

5) Обгрунтування існування $Z(t,X;\tau,E)$.

Позначимо через $I(\Lambda)$ такий вираз

$$I(\Lambda)=\exp\left\{\sum_{|k|\le 2b}\int_0^1 a_k(\beta(t-\tau)+\tau)(i\lambda^x(t-\tau\beta,\mu))^k d\beta\right\}$$

і оцінимо $I(\Lambda)$ при дійсних Λ, використавши означення параболічності.

$$|I(\Lambda)|\le C\exp\left\{-c_0\left(\sum_{j=m_1+1}^{n}|\xi_j|^{2b}+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\int_0^1|\xi_j+\beta\mu_{1j}|^{2b}d\beta+...+\sum_{j=1}^{m_r}\int_0^1\rho_{rj}^{2b}|\xi_j+\beta\mu_{1j}+\frac{\beta^2}{2}\mu_{2j}+...+\frac{\beta^r}{r!}\mu_{rj}\right|^{2b}d\beta\right\}, \qquad C,c_0>0,$$

або

$$|I(\Lambda)|\le C\exp\left\{-c_0\left(\sum_{j=m_1+1}^{n}|\xi_j|^{2b}+\sum_{j=m_2+1}^{m_1}\int_0^1\rho_{1j}^{2b}\left|\frac{\xi_j}{\rho_{1j}}+\beta\frac{\mu_{1j}}{\rho_{1j}}\right|^{2b}d\beta+...+\sum_{j=1}^{m_r}\int_0^1\rho_{rj}^{2b}\left|\frac{\xi_j}{\rho_{rj}}+\beta\frac{\mu_{1j}}{\rho_{rj}}+...+\frac{\beta^r}{r!}\frac{\mu_{rj}}{\rho_{rj}}\right|^{2b}d\beta\right)\right\},\quad \text{де}\quad \rho_{kj}=\sqrt{\xi_j^2+\mu_{1j}^2+...+\mu_{kj}^2}.$$

Для подальшої оцінки $I(\Lambda)$ використаємо таку лему:

Лема. Якщо $a_0(\Lambda),a_1(\Lambda),...,a_r(\Lambda)$- неперервні функції на компакті К, які одночасно не перетворюються в нуль, то

$I(\Lambda)=\int\sum_{j=0}(a_j(\Lambda)\beta^j)^{2b}\geq M_0>0$ де стала M_0 залежить тільки від $2b$, $\sup a_j(\Lambda)$ і $\inf a_j(\Lambda)$, $j=0,1,2,\ldots,r$.

Тому для $I(\Lambda)$ справедлива оцінка:

$$|I(\Lambda)|\leq C\exp\left\{-c_0\left(|\xi|^{2b}+|\mu_1|^{2b}+\ldots+|\mu_r|^{2b}\right)\right\},\ \Lambda\in R^N. \tag{14}$$

Якщо розглянути $\Lambda+iS=(\xi+i\Theta,\mu_1+i\gamma_1,\ldots,\mu_r+i\gamma_r),S\in R^N$, $S=(\Theta,\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, то для $I(\Lambda+iS)$ встановлюємо оцінку:

$$|I(\Lambda+iS)|\leq C\exp\left\{-c_1\left(|\xi|^{2b}+|\mu_1|^{2b}+\ldots+|\mu_r|^{2b}\right)+c_2\left(|\Theta|^{2b}+|\lambda_1|^{2b}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\ldots+|\lambda_r|^{2b}\right)\right\}, \tag{15}$$

де $C,c_1,c_2>0$, і залежать від $2b$, сталої параболічності T, $n,m_1,\ldots,m_r$. Оскільки $I(\Lambda+iS)$ - ціла функція, то перетворення Фур'є від $I(\Lambda)$ існує (лема 1 [1]), отже $Z(t,X;\tau,E)$ - перетворення Фур'є від $I(\Lambda)$ в точці

$$\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}},\ \frac{y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b}}},\ldots,\left(y_r-\eta_r+(t-\tau)y_{r-1}^{(r)}+\frac{(t-\tau)^2}{2!}y_{r-2}^{(r)}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}y_1^{(r)}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}\right)(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)},$$

і є аналітичною функцією, причому справедлива оцінка:

$$\left|\partial_x^{K_0}\partial_{y_1}^{K_1}\partial_{y_2}^{K_2}\ldots\partial_{y_r}^{K_r}Z(t,X;\tau,E)\right|\leq C_K(t-\tau)^{-\frac{[M+K_0+K_1(2b+1)+K_2(4b+1)+\ldots+K_r(2rb+1)]}{2b}}\times$$
$$\times\exp\left[-c_0\left[\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right)^q+\left(\frac{|y_1-\eta_1+x^{(1)}(t-\tau)|}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b}}}\right)^q+\ldots+\left[\left|y_r-\eta_r+(t-\tau)y_{r-1}^{(r)}+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.\frac{(t-\tau)^2}{2!}y_{r-2}^{(r)}+\ldots+\frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}y_1^{(r)}+\frac{x^{(r)}(t-\tau)^r}{r!}\right|(t-\tau)^{-\left(r+\frac{1}{2b}\right)}\right]^q\right]\right],\ q=\frac{2b}{2b-1},$$

$$C_K,c_0>0,\ |K|=|K_0|+|K_1|+\ldots+|K_r|,\quad K_j=0,1,2,\ldots,\quad j=0,1,\ldots,r.$$

$$\{(X,E)\}\subset R^N,\ t>\tau.$$

У випадку $b=1$ справедливі результати [2], при $r=2$-результати [3].

We constructed and researched the fundamental solution of Cauchy problem for elliptic parabolic equations that generalized equation by Kolmogorow s of high order.

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М: Наука, 1964. – 444с.
2. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико–параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузій з інерцією// Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №411. – С. 221-228.
3. Малицкая Г.П. Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений. – В кн. Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Киев пединститут. – 1973. – С. 109-130.

А. Казмерчук, В. Зваридчук

СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПАРНОГО ПОРЯДКУ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Встановлено збіжність скінченно-різницевих апроксимацій парного порядку квазілінійного закону збереження.

У теорії квазілінійних рівнянь з частинними похідними для обґрунтування існування і єдиності розв'язку задачі Коші важливу роль відіграють наближені методи. Часто саме наближені методи визначають підходи до введення коректного означення розв'язку відповідної задачі.

Для квазілінійного рівняння першого порядку

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(u))_{x_i} = 0, \qquad \varphi_i \in C^2 \tag{1}$$

розглядається задача Коші з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_0(x) \in L_\infty(R^n) \tag{2}$$

У роботі [1] викладено якісну теорію задачі (1), (2) у сенсі наступного означення.

Означення. Обмежена вимірна функція $u(t,x)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо :

1) $\forall k \in R^1, \forall f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T), f(t,x) \ge 0$ виконується нерівність

$$\iint_{\Pi_T} \left\{ |u-k| f_t + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(u-k)(\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) f_{x_i} \right\} dxdt \ge 0 .$$

2) $\exists \xi \subset [0,T], \operatorname{mes}\xi = 0 : \forall t \in [0,T] \setminus \xi$ функція $u(t,x)$ визначена майже скрізь в R^n і

$$\forall r \lim_{t \in [0,T] \setminus \xi} \int |u(t,x) - u_0(x)| dx = 0 .$$