We constructed and researched the fundamental solution of Cauchy problem for elliptic parabolic equations that generalized equation by Kolmogorow s of high order.

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М: Наука, 1964. – 444с.
2. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптико–параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузій з інерцією// Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №411. – С. 221-228.
3. Малицкая Г.П. Фундаментальные решения одного класса вырождающихся параболических уравнений. – В кн. Приближенные методы интегрирования дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Киев пединститут. – 1973. – С. 109-130.

А. Казмерчук, В. Зваридчук

СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВІ АПРОКСИМАЦІЇ ПАРНОГО ПОРЯДКУ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Встановлено збіжність скінченно-різницевих апроксимацій парного порядку квазілінійного закону збереження.

У теорії квазілінійних рівнянь з частинними похідними для обґрунтування існування і єдиності розв'язку задачі Коші важливу роль відіграють наближені методи. Часто саме наближені методи визначають підходи до введення коректного означення розв'язку відповідної задачі.

Для квазілінійного рівняння першого порядку

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(u))_{x_i} = 0, \qquad \varphi_i \in C^2 \tag{1}$$

розглядається задача Коші з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad u_0(x) \in L_\infty(R^n) \tag{2}$$

У роботі [1] викладено якісну теорію задачі (1), (2) у сенсі наступного означення.

Означення. Обмежена вимірна функція $u(t,x)$ називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо :

1) $\forall k \in R^1, \forall f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T), f(t,x) \geq 0$ виконується нерівність

$$\iint_{\Pi_T} \left\{ |u-k| f_t + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(u-k)(\varphi_i(u) - \varphi_i(k)) f_{x_i} \right\} dxdt \geq 0 .$$

2) $\exists \xi \subset [0,T], \operatorname{mes}\xi = 0 : \forall t \in [0,T] \setminus \xi$ функція $u(t,x)$ визначена майже скрізь в R^n і

$$\forall r \ \lim_{t \in [0,T] \setminus \xi} \int |u(t,x) - u_0(x)| dx = 0 .$$

Для виділення єдиного розв'язку задачі (1),(2), що відповідає постановкам в прикладних галузях, у роботі [2] введено функціонал $(k \in R^1, f \in C_0^\infty(\Pi_T))$

$$L(u^\varepsilon, k, f) = -\iint_{\Pi_T}\left\{|u^\varepsilon - k| f_t + \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(u^\varepsilon - k)(\varphi_i(u^\varepsilon) - \varphi_i(k)) f_{x_i}\right\}dxdt \tag{3}$$

і показано, що за умови його півобмеженості в BV_x і малості по ε, сім'я $u^\varepsilon(t,x)$ апроксимує розв'язок (1), (2). У даній роботі пропонується підхід до введення наближеного розв'язку задачі (1), (2), пов'язаний із скінченно-різницевим методом, побудованим за апроксимацією параболічного рівняння з малим параметром.

Нехай $\Delta_{x_i}^{(2k)} u_l^m$ – симетрична різниця $2k$-го порядку сіткової функції $u_l^m = u(m\tau, l_1 h_1, ..., l_n h_n)$, $\tau > 0$, $h = (h_1, ..., h_n), h_i > 0$, $m \in Z_+$, $l = (l_1, ..., l_n)$, $l_i \in Z$; $\Delta_t^{(1)} u_l^m$ – правостороння різниця для u_l^m.

Скінченно-різницева схема

$$\Delta_t^{(1)} u_l^m + \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}^{(1)} \varphi_i(u_l^m) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_j \alpha_j \Delta_{x_i}^{(2j)} u_l^m \tag{4}$$

апроксимує рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(u))_{x_i} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \alpha_j \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}^{(2j)} u$$

при $\varepsilon_j = \dfrac{|h|^{2j}}{\tau}$ $(h_i = O(\tau),\ i = 1, ..., n)$ рівняння (1).

За результатами і методами роботи [2] виведено наступну теорему.

Теорема. Нехай $\varphi_i \in C^2$, $|u_0(x)| \le M$ $u^\tau = u_l^m$ для $(t,x): t \in [m\tau, (m+1)\tau)$, $x_i \in [(l_i - 1)h_i, (l_i + 1)h_i)$, $m \in Z_+, l_i \in Z$, де u_l^m визначається з (4) $\left(\varepsilon_j = O(\varepsilon_1)\right)_{j=1,...,N}$ з врахуванням

$$u_l^0 = \int\limits_{\substack{|x_i - l_i h_i| < h_i \\ i = 1,...,n}} u_0(x)dx,\ l_i \in Z,\ i = 1, ..., n.$$

Тоді $\forall t \in (0,T]$

$\int\limits_{K_r} \left|u^{\tau_1}(t,x) - u^{\tau_2}(t,x)dx\right| \le \lambda_{C+r}\left(\sqrt{\tau_1 + \tau_2}\right)$, де $\lambda_r(\tau)$ – модуль неперервності $u_0(x)$ в $L_1(K_r)$, $K_r = \{x \in R^n \mid |x| < r$

Для випадку $N = 2$ розглядається скінченно-різницева апроксимація за схемою Лакса. За допомогою комп'ютерних засобів прослідковано процеси зародження, розпаду розриву. Встановлено

...інійний характер залежності малих параметрів $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$, при яких виконуються характерні властивості в стійкому скінченно-різницевому наближеному розв'язку.

Convergence of quasilinear conservation law approximation of the even order have been proved.

1. Кружков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сборник. – 1970. – Т.81. – №2. – С. 228–255.
2. Казмерчук А.И. О сходимости приближенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Вестник МГУ. Сер. матем., механ. – 1989. – Вып. 4. – С. 68–70.

І.В. Федак

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Запропоновано новий метод числового розв'язування крайових задач для рівняння теплопровідності.

В області

$Q = \{(x,t) | 0 \le x \le 1, 0 \le t < +\infty$

розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Початкову та крайові умови задамо рівностями

$$u(x,0) = f(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = \varphi(t), \\ u(1,t) = \psi(t), \end{cases} \tag{3}$$

причому $f(0) = \varphi(0), f(1) = \psi(0)$.

Для наближеного розв'язування задачі (1)-(3) побудуємо прямокутну сітку

$$x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,n,$$
$$t_j = jk,\ j = 0,1,2,\dots,$$

і наближено замінимо рівняння (1) наступним різницевим рівнянням