1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.:Наука, 1975. – 613с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.:Мир. 1968 – 183с.
3. Холл Дж.. Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир. 1979. – 312с.
4. Самойленко А.М.. Ронто Н.И. Численно–аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища школа, 1976. – 180с.
5. Нестеренко Л.І. Про один двобічний метод розв'язування двоточкової граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. 1980. – №11. – С. 18–21.
6. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наукова думка, 1980. – 267с.

Т. П. Гой

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ДВОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено задачу з нелокальними двоточковими умовами для одного класу систем лінійних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами у циліндричній області. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку..

1. Крайові задачі з нелокальними умовами для гіперболічних, параболічних та безтипних систем лінійних рівнянь із частинними похідними і змінними коефіцієнтами в різних аспектах вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1-6]), де, в основному, виділені регулярні випадки задач, що виключають появу малих знаменників, або аксіоматично накладаються умови їх відокремленості від нуля, що забезпечує розв'язність задачі.

У роботах [7-13] досліджувались нерегулярні випадки задач з нелокальними (інтегральними, двоточковими, n-точковими) умовами для лінійних гіперболічних, параболічних та безтипних диференціальних систем рівнянь довільного порядку зі сталими та змінними за t коефіцієнтами. На основі метричного підходу одержано умови коректної розв'язності розглядуваних задач.

У даній статті досліджується задача з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами типу умов Діріхле за координатами $x_1,...,x_p$ для одного класу систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за $x_1,...,x_p$ коефіцієнтами у обмеженій циліндричній області з достатньо гладкою межею. Для подолання проблеми малих знаменників, що виникають при побудові розв`язку задачі, використано метричний підхід.

2. В області $Q = \{(t,x): t \in (0,T), x \in G\}$, де $G \subset R^p$ – обмежена область із гладкою межею ∂G, розглядаємо задачу

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} A_{jr}\left(\partial/\partial t, -L\right) u_r(t,x) = f_j(t,x), \ j=1,\dots,m, \tag{1}$$

$$\sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1} b_{sq}^{jl} L^s\left(\left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=T}\right) = \varphi_{jl}(x), l=1,\dots,n_j, j=1,\dots,m, \tag{2}$$

$$\left. L^r u_j(t,x)\right|_{\partial G} = 0, \quad r = 0,1,\dots,H-1, \quad j=1,\dots,m, \tag{3}$$

де

$$A_{jr}\left(\partial/\partial t, -L\right) \equiv \sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1} a_{sq}^{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q (-L)^s,$$

$a_{sq}^{jr}, b_{sq}^{jl} \in C$, $\mu \in C \setminus \{0\}$, $n_1 + \dots + n_m = n$, $x = (x_1,\dots,x_p)$, оператор

$$L = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$$

еліптичний в області G з дійснозначними коефіцієнтами $p_{ij}(x) > 0$, $i,j=1,\dots p$, та $q(x) \geq 0$.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{4}$$

де $u(t,x) = col(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x))$, $u_k(t) = col(u_{k1}(t),\dots,u_{km}(t))$, а $X_k(x)$, $k \in N$, – власні функції задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \quad X(x)|_{\partial G} = 0. \tag{5}$$

Позначимо через $C^{l,\nu}$ клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, l-ті похідні яких задовольняють у $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, $0<\nu<1$, а через $A^{l,\nu}$ клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{l,\nu}$.

Якщо $p_{ij}(x) \in C^{2H-1,\nu}$, $p_{ij} = 1,\dots,p$, $q(x) \in C^{2H-2,\nu}$, $\overline{G} \in A^{2H,\nu}$, то всі власні значення $\lambda_k, k \in N$, задачі (5), множину яких позначимо через Λ, є додатні і різні, а система власних функцій $\{X_k(x)\}_{k \in N}$ ортогональна та повна в $L_2(G)$; крім цього $X_k(x) \in C^{2H}(\overline{G})$, $k \in N$, і правильні оцінки [14,15]:

$$(\forall \lambda_k > K_1) \quad c_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq c_1 k^{2/p}, \ 0 < c_0 \leq c_1, \ k \in N. \tag{6}$$

$$\max_{x\in G}\left|\frac{\partial^{|q|}X_k(x)}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_p^{q_p}}\right|\le c_2(|q|)\lambda_k^{p+|q|/2},\quad |q|=0,1,\ldots,2H. \tag{7}$$

Нехай існує така стала $\alpha>0$, що для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ η-корені рівняння

$$\det P(\eta,\lambda_k)\equiv\det\left\|\eta^{n_j}\delta_{jr}-A_{jr}(\eta,\lambda_k)\right\|_{j,r=1}^{m}=0 \tag{8}$$

задовольняють умови

$$\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)\le\alpha,\quad j=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Зі структури рівняння (8) випливають такі оцінки:

$$|\eta_j(\lambda_k)|\le C\lambda_k^H,\quad j=1,\ldots,n,\ C\in\mathbf{R}. \tag{10}$$

Нехай

$$f_j(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{kj}(t)X_k(x),\quad f_{kj}(t)=\int_G f_j(t,x)X_k(x)dx,\ j=1,\ldots,m, \tag{11}$$

$$\varphi_{jl}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{kjl}X_k(x),\quad \varphi_{kjl}=\int_G\varphi_{jl}(x)X_k(x)dx,\ l=1,\ldots,n_j,\ j=1,\ldots,m. \tag{12}$$

Тоді кожна з вектор-функцій $u_k(t), k\in\mathbf{N}$, у (4) є розв'язком задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^{n_j}u_{kj}(t)}{dt^{n_j}}-\sum_{r=1}^{m}A_{jr}\left(d/dt,\lambda_k\right)u_{kr}(t)=f_{kj}(t),\ j=1,\ldots,m, \tag{13}$$

$$M_{kjl}[u_{kj}]\equiv\sum_{s=0}^{H}\sum_{q=0}^{n_j-1}b_{sq}^{jl}(-\lambda_k)^s\left(u_{kj}^{(q)}(0)-\mu u_{kj}^{(q)}(T)\right)=\varphi_{kjl},\ l=1,\ldots,n_j,\ j=1,\ldots,m. \tag{14}$$

Припустимо, що для всіх $\lambda_k\in\Lambda$ корені $\eta_j\equiv\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\ldots,n$, характеристичного рівняння (8) є прості та відмінні від нуля (одержані результати можуть бути перенесені також на випадок кратних коренів рівняння (8)). Тоді однорідна система рівнянь

$$\frac{d^{n_j}u_{kj}(t)}{dt^{n_j}}-\sum_{r=1}^{m}A_{jr}\left(d/dt,\lambda_k\right)u_{kr}(t)=0,\ j=1,\ldots,m, \tag{13'}$$

має таку фундаментальну матрицю розв'язків:

$$Y=\|Y_{rs}(t)\|_{\substack{r=1,\ldots,m\\ s=1,\ldots,n}}, \tag{15}$$

де

$$Y_{rs}(t)=\Psi_r(\eta_s)\exp(\eta_s t),\ r=1,\ldots,m,\ s=1,\ldots,n, \tag{16}$$

а функції $\Psi_r(\eta_s)$, r=1,...,m, визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\eta_s^{n_j}\delta_{jr}-A_{jr}(\eta_s,\lambda_k)\right)\Psi_r(\eta_s)=0,\ j=1,...,m. \tag{17}$$

де δ_{jr} – символ Кронекера. Визначником системи (17) є $\det P(\eta_s,\lambda_k)$. Оскільки числа $\eta_s(\lambda_k)$, $s=1,...,n$, попарно різні, то $\operatorname{rang} P(\eta_s,\lambda_k)=m-1$, $s=1,...,n$, а тому хоча б один з мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $\det P(\eta_s,\lambda_k)$ відмінний від нуля. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що

$$D_m(\eta_s)\equiv\det\left\|\eta_s^{n_j}\delta_{jr}-A_{jr}(\eta_s,\lambda_k)\right\|_{j,r=1}^{m-1}\neq 0.$$

Тоді

$$\Psi_m(\eta_s)=D_m(\eta_s)\equiv\sum_{\alpha=0}^{n-n_m}B_{m\alpha}(\lambda_k)\eta_s^{n-n_m-\alpha}, \tag{18}$$

$$\Psi_r(\eta_s)=D_r(\eta_s)\equiv\sum_{\alpha=0}^{n-n_r-1}B_{r\alpha}(\lambda_k)\eta_s^{n-n_r-\alpha-1},\ r=1,...,m-1. \tag{19}$$

де

$$D_r(\eta_s)=\det\left\|\begin{matrix}\eta_s^{n_1}-A_{11}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{1,r-1}(\eta_s,\lambda_k) & A_{1m}(\eta_s,\lambda_k) & A_{1,r+1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{1,m-1}(\eta_s,\lambda_k)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{m-1,1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & A_{m-1,r-1}(\eta_s,\lambda_k) & A_{m-1,m}(\eta_s,\lambda_k) & A_{m-1,r+1}(\eta_s,\lambda_k) & \dots & \eta_s^{n_{m-1}}-A_{m-1,m-1}(\eta_s,\lambda_k)\end{matrix}\right\|,\ r=1,...,m-1.$$

Задача для системи рівнянь (13′) з умовами

$$M_{kjl}[u_{kj}]=0,\ l=1,...,n_j,\ j=1,...,m, \tag{14′}$$

має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник $\Delta(\lambda_k)$ матриці $\left\|M_{kjl}[Y_{js}]\right\|_{l=1,...,n_j;\,j=1,...,m}^{s=1,...,n}$ рівний нулю [16]. Визначник $\Delta(\lambda_k)$ обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k)=D(\lambda_k)\prod_{r=1}^{m}E_r(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n}\left(1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)\right)\prod_{1\le q<l\le n}\left(\eta_l(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\right), \tag{20}$$

де

$$E_r(\lambda_k)=\det\left\|\sum_{s=l}^{H}b_{s,q-l}^{rl}(-\lambda_k)^s\right\|_{l,q=1}^{m_r},\ r=1,...,m.$$

$$D(\lambda_k) = \begin{vmatrix} \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_1-1} & B_{1,n-n_1-1} & \dots & B_{10} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,n-n_1-1} & \dots & \dots & B_{10} & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_m-1} & B_{1,n-n_m-1} & \dots & B_{10} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{1,n-n_1-1} & \dots & \dots & B_{10} & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_m-1} & B_{m,n-n_m} & \dots & B_{m1} & B_{m0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_{m,n-n_m} & \dots & \dots & B_{m0} & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{n_m-1} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через $\overline{C}^{(\bar n,r)}(\overline{Q})$ банахів простір вектор-функцій $u(t,x)=(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x))$, компоненти $u_j(t,x)$ яких в області $\overline{Q}$ r разів неперервно диференційовні за *x* та n_j разів неперервно диференційовні за змінною *t*, з нормою

$$\|u\|_{\overline{C}^{(\bar n,r)}(\overline{Q})} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{q_0=0}^{n_i} \sum_{|q|\le r} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|\bar q|} u_i(t,x)}{\partial t^{q_0} \partial x_1^{q_1} \dots \partial x_p^{q_p}} \right|,$$

де $\bar n = (n_1,\dots,n_m) \in N^m$, $|\bar q| = q_0 + |q|$, $|q| = q_1 + \dots + q_p$.

При дослідженні питання про єдиність розв'язку задачі (1)-(3) розглядатимемо також відповідну однорідну задачу

$$\frac{\partial^{n_j} u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} A_{jr}\left(\partial/\partial t, L\right) u_r(t,x) = 0, \quad j=1,\dots,m, \tag{1'}$$

$$\sum_{s=0}^{H} \sum_{q=0}^{n_j-1} b_{sq}^{jl} L^s \left(\left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^q u_j(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=T} \right) = 0, \quad l=1,\dots,n_j, \quad j=1,\dots,m. \tag{2'}$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1)-(3) у просторі $\overline{C}^{(\bar n,2H)}(\overline{Q})$ необхідно і досить, щоб виконувались умови

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \quad 1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k)T) \ne 0, \quad j=1,\dots,n; \tag{21}$$

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \quad E_r(\lambda_k) \ne 0, \quad r=1,\dots,m. \tag{22}$$

Доведення. Необхідність. Якщо для деякого $\lambda_{\tilde{k}} \in \Lambda$ умови (21),(22) не виконуються, то $\Delta(\lambda_{\tilde{k}}) = 0$ і існують нетривіальні розв'язки $u_{\tilde{k}}(t) = \operatorname{col}(u_{\tilde{k}1}(t),\dots,u_{\tilde{k}m}(t))$ однорідної задачі (13′),(14′). Тоді існують нетривіальні розв'язки задачі (1′),(2′),(3) вигляду $u(t,x) = u_{\tilde{k}}(t)X_{\tilde{k}}(x)$, а тому розв'язок неоднорідної задачі (1)-(3), якщо він існує, єдиним не буде.

Достатність. Нехай виконуються умови (21),(22), тобто $\Delta(\lambda_k) \neq 0$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$. Тоді доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.1 [7, розділ 2] і випливає з єдиності розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд Фур'є за системою ортогональних функцій.

3. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1)-(3). Нехай виконуються умови (21) та (22). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдиний розв'язок задачі (13),(14), який зображається у вигляді суми

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t), \tag{23}$$

де $U_k(t) = \operatorname{col}(U_{k1}(t),\dots,U_{km}(t))$, $V_k(t) = \operatorname{col}(V_{k1}(t),\dots,V_{km}(t))$ – розв'язки задач (13′),(14) і (13),(14′) відповідно. Компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначаються формулами

$$U_{kj}(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n_r}\sum_{\beta=1}^{n_r}(-1)^{l-1}\Psi_j(\eta_l(\lambda_k))D_{h_{r\alpha},q}(\lambda_k)E_{r;\beta,\alpha}(\lambda_k)S^l_{n-q}\varphi_{kr\beta}\times$$

$$\times\left(E_r(\lambda_k)D(\lambda_k)(1-\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T))\prod_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{n}(\eta_l(\lambda_k)-\eta_s(\lambda_k))\right)^{-1}\times$$

$$\times\exp(\eta_l(\lambda_k)t),\ j=1,\dots,m, \tag{24}$$

$$V_{kj}(t) = \int_0^T\sum_{r=1}^{m}G_{k,j,r}(t,\tau)f_{kr}(\tau)d\tau,\quad j=1,\dots,m, \tag{25}$$

де $h_{r\alpha} = n_1+\dots+n_{r-1}+\alpha$, $D_{i,j}(\lambda_k)$ і $E_{r;i,j}(\lambda_k)$ – визначники, отримані викреслюванням *i*-го рядка і *j*-го стовпця у визначниках $D(\lambda_k)$ і $E_r(\lambda_k)$ відповідно; S^q_γ – сума всеможливих добутків чисел $\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\dots,n$, $j\neq q$, взятих по γ у кожному добутку; $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\dots,m$, – елементи матриці Гріна задачі (13′), (14′), які у квадраті $K_T = \{(t,\tau)\in R^2_+ : 0\le t,\tau\le T\}$, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначаються формулами

$$G_{k,j,r}(t,\tau) = (2D(\lambda_k))^{-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}D_{n,q}(\lambda_k)S^l_{n-q}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq q}}^{n}(\eta_i(\lambda_k)-\eta_l(\lambda_k))^{-1}\times$$

$$\times\left((-1)^{h_{r,l}}\operatorname{sgn}(t-\tau)\Psi_j(\eta_l(\lambda_k))\exp(\eta_l(\lambda_k)(t-\tau))+\right.$$

$$-\sum_{\xi=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n_r}\sum_{\beta=1}^{n_l}\sum_{v=0}^{n_l-1}\sum_{s=0}^{H}(-1)^{h_{r\beta}+h_{\xi+1}} b_{sv}^{r\beta}\lambda_k^s\eta_l^v(\lambda_k)\Psi_r(\eta_l(\lambda_k))\Psi_j(\eta_\xi(\lambda_k))\times$$

$$\times\exp(\eta_\xi(\lambda_k)t)D_{h_{r\alpha}\beta}(\lambda_k)E_{r;\beta\alpha}(\lambda_k)S_{n-\gamma}^{\beta}(D(\lambda_k)E_\beta(\lambda_k))^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq l}}^{n}(\eta_\xi(\lambda_k)-\eta_\sigma(\lambda_k))^{-1}\left.\frac{1+\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)}{1-\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)}\right), \quad j,r=1,\ldots,m. \tag{26}$$

На стороні $\tau=0$ ($\tau=T$) квадрата K_T кожна з функцій $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\ldots,m$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

З формул (4),(23) одержуємо, що розв'язок задачі (1)-(3) формально зображається векторним рядом

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(U_k(t)+V_k(t))X_k(x), \tag{27}$$

де компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначаються формулами (24) та (25) відповідно.

Відмінні від нуля вирази

$$\prod_{q=1,q\neq j}^{n}(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)),\quad 1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T),\ j=1,\ldots,n,$$

що входять знаменниками у формули (24) і (25), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини $\lambda_k\in\Lambda$, а тому питання про існування розв'язку задачі (1)-(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. Нехай існують сталі m_j,γ_j, j=1,2, такі, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k\in\Lambda$ виконуються нерівності

$$|1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)|\geq m_1\lambda_k^{-\gamma_1},\quad j=1,\ldots,n, \tag{28}$$

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}|\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)|\geq m_2\lambda_k^{-\gamma_2},\quad j=1,\ldots,n, \tag{29}$$

і нехай функції $f_j\in C^{(0,h_j)}(\overline{Q})$, $\varphi_{jl}\in C^{h_0}(\overline{G})$, $l=1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,m$, задовольняють умови

$$L^{r_j}f_j\big|_{\partial G}=0,\ r_j=0,1,\ldots,[h_j/2],\quad j=1,\ldots,m, \tag{30}$$

$$L^{r_0}\varphi_{jl}\big|_{\partial G}=0,\ r_0=0,1,\ldots,[h_0/2],\ l=1,\ldots,n_j,\ j=1,\ldots,m, \tag{31}$$

де

$$h_0=2(3p/4+\gamma_1+\gamma_2+H(2n-1+2\tilde{N}-\tilde{n}+2\theta)),$$

$$h_j = 2(3p/4 + \gamma_2 + \omega_j + H(2n - \tilde{n} + 2\theta)),\ j = 1,\dots,m,$$

$$\omega_j = \max\{\alpha, \gamma_1 + \gamma_2 + H(3n - 2 - n_j + 2\tilde{N} - \tilde{n} + 2\theta)\},\ j=1,\dots,m,$$

$$\tilde{n} = \min_{1\le j\le m}\{n_j\},\ \tilde{N} = \max_{1\le j\le m}\{n_j\},\ \theta = (n^2 - n_1^2 - \dots - n_m^2)/2,$$

α – стала з нерівності (9). Тоді існує розв'язок задачі (1)-(3), який належить простору $\overline{C}^{(n,2H)}(\overline{Q})$ і неперервно залежить від функцій $f_i(t,x), i = 1,\dots,m,$ і $\varphi_{jq}(x), q = 1,\dots,n_j, j = 1,\dots,m$.

Доведення. З формул для визначення визначників $D(\lambda_k)$ і $E_r(\lambda_k)$, $r = 1,\dots,m$, одержуємо такі оцінки:

$$|D_{i,j}(\lambda_k)| \le c_3\lambda_k^{H(\theta-\tilde{n})}, \tag{32}$$

$$|E_{r;i,j}(\lambda_k)| \le c_4\lambda_k^{H(n_r-1)},\ r = 1,\dots,m, \tag{33}$$

$$|D(\lambda_k)| \ge c_5\lambda_k^{\theta H}, \tag{34}$$

$$|E_s(\lambda_k)| \ge c_6\lambda_k^{n_s H},\ s = 1,\dots,m. \tag{35}$$

Тепер із формул (24),(25) та оцінок (7),(9),(10),(28),(29),(32)-(35) одержуємо

$$\max_{0\le t\le T}|V_{kj}^{(q)}(t)| \le c_7\lambda_k^{\sigma_{j1}+Hq}\sum_{s=1}^{m}\max_{0\le t\le T}|f_{ks}(t)|,\quad q = 0,1,\dots,n_j,\ j=1,\dots,m, \tag{36}$$

$$\max_{0\le t\le T}|U_{kj}^{(q)}(t)| \le c_8\lambda_k^{\sigma_{j2}+Hq}\sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_s}|\varphi_{ksl}|,\quad q = 0,1,\dots,n_j,\ j = 1,\dots,m, \tag{37}$$

де $\sigma_{j1} = \gamma_2 + \omega_j + H(2n - 1 - n_j - \tilde{n} + \theta)$, $\sigma_{j2} = \gamma_1 + \gamma_2 + H(2n - 2 - n_j + \tilde{N} - \tilde{n} + \theta)$, $j=1,\dots,m$.

Якщо функції $f_j(t,x), j = 1,\dots,m,$ і $\varphi_{jl}(x), l = 1,\dots,n_j, j = 1,\dots,m$, задовольняють умови теореми, то, використовуючи (11),(12) та (30),(31), знаходимо

$$\max_{0\le t\le T}|f_{kj}(t)| \le c_9\lambda_k^{-h_j/2}\|f_j\|_{C^{(0,h_j)}(\overline{Q})},\ j = 1,\dots,m, \tag{38}$$

$$|\varphi_{kjl}| \le c_{10}\lambda_k^{-h_0/2}\|\varphi_{jl}\|_{C^{h_0}(\overline{\Omega})},\ l = 1,\dots,n_j\ \ j = 1,\dots,m. \tag{39}$$

Із (27), враховуючи оцінки (6),(36)-(39), одержуємо оцінку для норми розв'язку задачі (1)-(3):

$$\|u\|_{\bar{C}^{(n,2H)}(\bar{Q})} \le c_{11}\sum_{j=1}^{m}\|f_j\|_{C^{(0,h_1)}(\bar{Q})}\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-h_j/p+2(\sigma_{j1}+H(l+n_1))/p} +$$

$$+\, c_{12}\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{n_1}\|\varphi_{jq}\|_{C^{h_0}(G)}\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-h_0/p+2(\sigma_{j2}+H(l+n_1))/p}$$

Зі збіжності рядів у правій частині останньої нерівності випливає доведення теореми.

4. З'ясуємо, наскільки "багата" множина задач (1)-(3), для яких виконуються оцінки (28),(29).

Теорема 3. Нехай існує стала $\beta>0$, незалежна від λ_k, така, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності

$$\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k) \ge -\beta\ln\lambda_k,\ \ j=1,\dots,n.$$

Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел T і для довільних фіксованих чисел μ та a_{sq}^{jr} нерівності (28) виконуються при $\gamma_1 > p/2+\beta T$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення **теореми проводиться за схемою доведення теореми 3.3 з [7, розд.5].**

Позначимо через $Y \in \mathbf{R}^{\chi}$, $\chi = nm(H+1)$, вектор, складений з дійсних та уявних частин коефіцієнтів a_{sq}^{jr} системи (1).

Теорема 4. Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbf{R}^{\chi}, \chi = nm(H+1)$) векторів Y при $\gamma_2 \ge (p/2 + H(l-n)(m+n-3))/2$ нерівності (29) виконуються для всіх (крім скінченого числа) $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4 з [12].

We investigate the nonlocal two-point boundary value problem for one class partial systems of linear differential equations with variable coefficients in a tube domain. For almost all (with respect to Lebesque measure) parameters of the problem we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.

1. Sinestrari Eugenio, Webb G.F. Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions// J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V. 121.- № 2. – P. 449-464.
2. Кмить И.Я. Об одной задаче с нелокальными по времени условиями для системы гиперболического типа// Мат. методы и физ.-тех. поля.–1994.–Вып.37. – С. 21-25.
3. Макаров А.А. О необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных// Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 2. – С. 320-324.
4. Маловичко В.А. О разрешимости нелокальных краевых задач для псевдопараболических систем и систем составного типа// Матем. заметки. – 1990. – Т. 47. – № 5. – С. 151-154.
5. Маринец В.В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями// Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24.- № 8. – С. 1393-1397.

6. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений// Мат. заметки. – 1985. – Т. 37.- № 5. – С. 727-733.
7. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. Ільків В.С., Пташник Б.Й. Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48.- № 2. – С. 184-194.
9. Ільків В.С. Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами// Вісн. Держ. ун-ту "Львівська політехніка". – 1999. – №318. – С. 318-323.
10. Ільків В.С. Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. № 4. – С. 78-82.
11. Задорожна Н.М. Задачі з нелокальними умовами для параболічних рівнянь і систем: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 17 с.
12. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами// Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49. – №11. – С. 1478-1487.
13. Гой Т.П. Задача з нелокальними умовами для одного класу систем рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. - 2000. – №411. – С. 73-79.
14. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их прозводных// Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1960. – Т. 24. - С. 883-896.
15. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
16. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

О. Д. Власій

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними двоточковими умовами за змінною t та локальними крайовими умовами за змінною x для диференціального рівняння з частинними похідними зі змінними за t та x коефіцієнтами у циліндричній області. Доведено метричні твердження, які стосуються оцінок знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

1. Задачі з нелокальними крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, є умовно коректними. Розв'язність таких задач пов'язана з проблемою малих знаменників. Для окремих видів рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними за t або