отримуємо, що $a \otimes b = a \otimes b$ для довільних $a \in FX, b \in FY, \dim X = \dim Y = 0$. Нарешті, кожен компакт є сюр'єктивним неперервним образом нульвимірного компакта, звідки випливає симетричність тензорного множення для всіх X,Y.

For certain class of covariant functors that are functorial parts of monads in the category Comp of compacta, the equivalence of symmetry of tensor product and a simpler property involving only finite spaces, is proved.

1. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories. – Springler.New York etc. 1998. – 345p.
2. Зарічний М.М. Топологія функторів і монад в категорії компактів. – К.:ІСДО. – 1993. - 108 с.
3. Радул Т.М. Про монади, породжені деякими нормальними функторами // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 1990. – №34. – С. 59-62.
4. Nykyforchyn O.R. On continuity, opennes, and bicommutativity of functors in the category of compacta // Methods Funct.Anal. Topology. – 1998. – №4. – P. 82-85

Б. В. Атаманюк

МОДИФІКОВАНІ ІТЕРАЦІЇ ДОСКОНАЛО МЕТРИЗОВАНИХ ФУНКТОРІВ

Доводяться три теореми про геометричні властивості ітерованих функторів

В. Федорчук дав означення досконало метризованого функтора. Автор в [1] і [2] розширив його на некомпактний випадок.

В [3] наведена конструкція модифікації нескінченної ітерації функторів. Застосовуємо цю конструкцію до досконало метризованих функторів.

Нехай F – досконало метризований функтор, F^n – його ітерація, η_n^{n-1} – ізометричне вкладення, а ψ^n_{n-1} – натуральна (природня) проекція. Нехай $\alpha = \{k_i \mid 0 \le k_i \le i : i \in N\}$ - послідовність натуральних чисел. Задаємо відображення $\delta_i : F^i(X) \to F^{i+1}(X)$ формулою: $\delta_i = F^{k_i}\{\eta_{i-k(i)}\}$.

Одержимо цілий клас ізометричних вкладень

$$F(X) \hookrightarrow F^2(X) \hookrightarrow F^3(X) \hookrightarrow \ldots$$

$$\eta_1 \qquad \eta_2 \qquad \eta_3$$

$$\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3$$

$$\begin{array}{l}
F^2(X) \xrightarrow{F(\eta_1)} F^3(X) \xrightarrow{F(\eta_2)} F^4(X) \xrightarrow{F(\eta_3)} \ldots \\
\eta_2 \uparrow \qquad \eta_3 \uparrow \qquad \eta_4 \uparrow \\
F^3(X) \xrightarrow{F^2(\eta_1)} F^4(X) \xrightarrow{F^2(\eta_2)} F^5(X) \xrightarrow{F^2(\eta_3)} \ldots \\
\eta_3 \uparrow \qquad \eta_4 \uparrow \qquad \eta_5 \uparrow \\
F^4(X) \xrightarrow{F^3(\eta_1)} F^5(X) \xrightarrow{F^3(\eta_2)} F^6(X) \xrightarrow{F^3(\eta_3)} \ldots
\end{array}$$

Позначимо через $F^{*}_{\alpha}(X)$ - метричну пряму границю системи $\{F^{n}(X), \delta_{n}\}$, $\delta_{n} = \underline{\lim}\, \delta_{i}$. Конструкція F^{+}_{α} – функторіальна. Позначимо через $F^{\#}_{\alpha}$ – поповнення функтора F^{+}_{α}.

Теорема 1. Якщо даний досконало метризований функтор F його метризація та простір X такі, що виконуються наступні умови:

– кожний ітерований простір $F^{n}(X)$ гомеоморфний псевдовнутрішності гільбертового куба S.

– кожний образ $\delta_{n}(F^{n}(X))$ є Z-множиною в нескінченній ітерації $F^{*}_{\alpha}(X)$.

– кожна породжена цією метризацією метрика d_{n} повна на просторі $F^{n}(X)$.

– для природнього проектування ψ_{k} виконується умова поліедральної апроксимативної n – м'якості,

то простір $F^{*}_{\alpha}(X)$ гомеоморфний простору $rint\, Q \times S$, де $rint\, Q$ – радіальна внутрішність гільбертового куба, тобто

$$rint\ Q = \bigcup_{n} D_{k}[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]_{k},\ S - \text{псевдовнутрішність } Q.$$

Теорема 2. Якщо в умовах (1) – (3) теореми 1 додатково виконується умова (5): простір $\delta_{i}^{i+k}\{F^{i}(X)\}$ є сильною Z-множиною в просторі $F^{i+k}(X)$, то $F^{\#}_{\alpha}(X) \approx S$.

Теорема 3. В умовах теореми 1 і теореми 2 гомеоморфними будуть такі пари просторів: $\{F^{\#}_{\alpha}(X), F^{*}_{\alpha}(X)\}$ та $\{S \times S, rint\, Q \times S\}$.

Доведення теореми 1. Використовуємо критерій М.Бествіни та Е.Могільського гомеоморфності $\sum \times S$. Для цього потрібно, щоб виконувались наступні умови:

- сильна m_1 – універсальність простору $F_\alpha^+(X)$, де m_1 – клас польських просторів;
- належність простору $F_\alpha^+(X)$ класу $AR(m)$.

Умова (1) випливає з функторіальної конструкції $F_\alpha^+(X)$, а умова (2) – з поліедральної апроксимативної n – м'якості природних проектувань ψ_k^{k+1} за допомогою теореми Ліпшица-Дугунджі. Сильна m_1 – універсальність простору $F_\alpha^+(X)$ доводиться за аналогією з роботою автора [4] заміною функтора $\exp^-$ на функтор $F_\alpha^+(X)$ для зафіксованої послідовності α.

З наведених умов (1) та (2), а також умов (1) та (4) теореми 1 за критерієм Беством та Могільського, маємо: $F_\alpha^+(X) \approx \sum \times S$, тобто $F_\alpha^+(X) \approx rint\, Q \times S$.

Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 2. Застосовуємо критерій Торунчика, для якого досить перевірити наступні умови:

$F_\alpha^-(X) \in AR(m)$,

– умова дискретної апроксимації замкнутими вкладеннями.

Умова (1) перевіряється за допомогою критерію Войдиславського за аналогією з [2] заміною функтора F^{++} функтором $F_\alpha^\#$ з урахуванням того, що $F_\alpha^\#$ за вибором є поповненням функтора F_α^+. Умова (2) дискретної апроксимації замкнутими вкладеннями також одержується за схемою [2] з урахуванням того, що доведена В.Федорчуком в [5] лема про рівномірну збіжність до тотожнього відображення на компактах послідовності $\eta_n \circ \theta_n : F^{++}(X) \to F^n X \hookrightarrow F^+(X) \hookrightarrow F^{++}(X)$ переноситься на клас наших функторів F_α^+ та $F_\alpha^\#$ для послідовності $\eta_n \circ \theta_n : F_\alpha^\#(X) \to F^n(X) \hookrightarrow F_\alpha^+(X) \hookrightarrow F_\alpha^\#(X)$, де δ_n – означені вище модифіковані вкладення, які задаються всеможливими послідовностями індексів α.

Цим завершується доведення теореми 2.

Доведення теореми 3. Оскільки функтор F за умовами досконалої метризованості зберігає ізометричні вкладення, то всі δ будуть ізометричними вкладеннями, бо такими були η_n.

Отже, згідно [2], простір $F^+(X) = \bigcup\{F^i(X) : i \in N\}$ буде m_1 – скелетоїдом в просторі $F^{++}(X)$, значить, $F_\alpha^+(X) = \bigcup\{\delta_i(F^i(X)) : i \in N\}$ буде m_1 – скелетоїдом в просторі $F_\alpha^\#(X)$.

Тепер застосуємо критерій Банаха, за яким з умови, що простір $X \subset S$ буде m_1 – скелетоїдом в просторі $S \approx S \times S$, випливає гомеоморфність пар. Теорему 3 доведено.

Three theorems about geometric properties of iterated functors are proved.

1. Атаманюк Б.В. Нескінченні ітерації досконало метризованих функторів. Некомпактний випадок // Вісник Прикарпатського університету.Серія природничо-математичних наук –1996.-В.2.- С.42- 46.
2. Атаманюк Б.В. Поповнення нескінченної ітерації досконало метризованого функтора та пари нескінченних ітерацій // Вісник Прикарпатського університету. Серія природничо-математичних наук. – 1995.- В.1.- С.36-40.
3. Атаманюк Б.В. Функторы итерированного суперрасширения // Вестник МГУ. Серия Механика, Математика. – 1989.-с.95- 96.
4. Атаманюк Б.В. Представление $\sum \times S$ в виде бесконечного итерированного гиперпространства польских пространств // Общая топология: пространства и отображения. Изд-во МГУ.-1989.- С.119-124.
5. Федорчук В.В. Тройки бесконечных итераций совершенно метризуемых функторов // Известия АН СССР. Серия математическая. -1990. –Т.54. - №2.- С.396-417.

Н. М. Дяків, В. М. Пилипів

НІЛЬПОТЕНТНІ ТА ІДЕМПОТЕНТНІ ЕЛЕМЕНТИ В КІЛЬЦІ КЛАСІВ ЛИШКІВ, ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

В роботі розроблено методи обчислення ідемпотентних та нільпотентних елементів у кільці класів лишків $Z/_m$ для довільного модуля m.

Розглянемо теореми, які стосуються кількості та обчислення нільпотентних елементів у кільці класів лишків $Z/_m$.

Якщо m – просте число, то $Z/_m$ є полем, отже, в ньому не існує дільників нуля, а тому єдиним нільпотентним елементом є нульовий.

Теорема 1. Нехай $m = p_1 p_2 \dots p_n$, де всі p_i – прості. Тоді в кільці $Z/_m$ нуль є нільпотентом, причому єдиним.

Доведення. Нуль дійсно є нільпотентом, бо вже при $k = 1$ $0^k = 0$.

Нехай в кільці $Z/_m$ існує ще один нільпотент l, такий, що $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ і $\exists k \in N: \; l^k = 0$, тобто $l^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$, але $m = p_1 p_2 \dots p_n$, тобто остання конгруенція рівносильна системі конгруенцій за простими модулями