УДК 517.956

Т. П. Гой (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ*

We investigate the classical correctness of problems with nonlocal two-point conditions for typeless systems of linear partial differential equations with variable coefficients in a tube domain. We prove the metric theorems on lower bounds of small denominators, which appear when constructing the solutions of problems.

Досліджено класичну коректність задач з нелокальними двоточковими умовами для безтипних систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами у циліндричній області. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач.

1. Крайові задачі з нелокальними умовами для гіперболічних, параболічних та безтипних систем рівнянь із частинними похідними зі сталими та змінними коефіцієнтами вивчались багатьма авторами (див., наприклад, [1–19] і наведену в них бібліографію). Такі задачі, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

Дана робота, яка ідейно близька до робіт [13 – 18], присвячена дослідженню класичної коректності задач із нелокальними умовами за виділеною змінною t і умовами типу умов Діріхле за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для безтипних систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними за x коефіцієнтами. Встановлені умови існування та єдиності класичних розв'язків задач, які мають теоретико-числовий характер. Для подолання проблеми малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків задач, використано метричний підхід.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{R}^p$, $s = (s_0, s_1) \in \mathbf{Z}_+^2$, $|s|^* = s_0 + 2s_1$, $[a]$ — ціла частина числа a, $G \subset \mathbf{R}^p$ — обмежена область із гладкою границею ∂G, $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in G\}$; $C^{(j,\nu)}$ — клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Гельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$; $A^{(j,\nu)}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння граничних поверхонь цих областей, належать $C^{(j,\nu)}$; $\overline{C}^r(\overline{Q})$ — банахів простір вектор-функцій $v(t, x) = (v_1(t, x), \ldots, v_m(t, x))$, неперервних разом з усіма похідними до порядку r включно в області $\overline{Q}$, з нормою

$$\|v(t, x)\|_{\overline{C}^r(\overline{Q})} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{|q| \le r} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|q|} v_j(t, x)}{\partial t^{q_0} \partial t_1^{q_1} \ldots \partial x_p^{q_p}} \right|.$$

2. В області Q розглянемо задачу

$$Pu(t, x) = \sum_{|s|^* \le n} A_s \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0} (-L)^{s_1} u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{|s|^* \le n \\ s_0 < n}} B_s (-L)^{s_1} \left(\left.\frac{\partial^{s_0} u(t, x)}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{s_0} u(t, x)}{\partial t^{s_0}}\right|_{t=T} \right) = \varphi(x), \qquad \mu \in \mathbf{C}\setminus\{0\}, \tag{2}$$

* Підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Міністерства України у справах науки і технологій.

$$L^j u(t,x)\big|_{\partial G} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, [n/2]-1, \tag{3}$$

де $u(t,x) = \mathrm{col}\,(u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x))$, $f(t,x) = \mathrm{col}\,(f_1(t,x), \ldots, f_m(t,x))$, $\varphi(x) = \mathrm{col}\,(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{nm}(x))$, $A_s = \| a_s^{ij} \|_1^m$ і $B_s = \| b_s^{ij} \|_{nm,m}$ — матриці розмірів $(m \times m)$ і $(nm \times m)$ відповідно зі сталими комплексними елементами, $\det A_{(n,0)} \neq 0$; оператор

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x), \quad p_{ij}(x) \geq p_0 > 0, \quad q(x) \geq 0,$$

є еліптичним в $\overline{G}$. Припустимо, що $\overline{G} \in A^{(2[n/2],\nu)}$, $p_{ij}(x) \in C^{(2[n/2]-1,\nu)}$, $i, j = 1, \ldots, p$, $q(x) \in C^{(2[n/2]-2,\nu)}$. На тип оператора P обмеження не накладаються.

При зроблених вище припущеннях відносно області G та коефіцієнтів оператора L задача на власні значення

$$LX(x) = -\lambda X(x), \quad X(x)\big|_{\partial G} = 0 \tag{4}$$

має повну ортонормовану в $L_2(G)$ систему класичних власних функцій $\{X_k(x), k \in \mathbf{N}\}$, а всі власні числа λ_k, $k \in \mathbf{N}$, множину яких позначимо через Λ, є додатними; крім цього, $X_k(x) \in C^{2[n/2]}(\overline{G})$, $k \in \mathbf{N}$, і вірні [20, 21] такі оцінки:

$$(\forall \lambda_k > K_1) \quad c_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq c_1 k^{2/p}, \quad 0 < c_0 \leq c_1, \tag{5}$$

$$\max_{x \in \overline{G}} \left| X_k^{(j)}(x) \right| \leq c_2 \lambda_k^{p/4+j/2}, \quad c_2 = c_2(j), \quad j = 0, 1, \ldots, 2[n/2]. \tag{6}$$

Нехай $f(t,x) \in \overline{C}([0,T], \overline{L}_2(G))$, $\varphi(x) \in \overline{L}_2(G)$. Тоді справедливі розвинення

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \quad f_k(t) = \mathrm{col}\,(f_{k1}(t), \ldots, f_{km}(t)),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \varphi_k = \mathrm{col}\left(\varphi_{k1}(t), \ldots, \varphi_{k,nm}\right),$$

де

$$f_{ki}(t) = \int_G f_i(t,x) X_k(x)\,dx, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\varphi_{kj} = \int_G \varphi_j(x) X_k(x)\,dx, \quad j = 1, \ldots, nm.$$

3. Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad u_k(t) = \mathrm{col}\,(u_{k1}(t), \ldots, u_{km}(t)). \tag{7}$$

Якщо ряд (7) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними $x_1, \ldots, x_p$ до порядку $2[n/2]$ включно, є рівномірно збіжними в області $\overline{Q}$, то вектор-функція $u(t,x)$, визначена формулою (7), задовольняє граничні умови (3). Кожна з вектор-функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$, є розв'язком такої задачі з нелокальними умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{|s|^* \le n} A_s \lambda_k^{s_1} u_k^{(s_0)}(t) = f_k(t), \tag{8}$$

$$\sum_{\substack{|s|^* \le n \\ s_0 < n}} B_s \lambda_k^{s_1} \left(u_k^{(s_0)}(0) - \mu u_k^{(s_0)}(T) \right) = \varphi_k. \tag{9}$$

Розглянемо однорідну задачу, що відповідає задачі (8), (9):

$$\sum_{|s|^* \le n} A_s \lambda_k^{s_1} u_k^{(s_0)}(t) = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{\substack{|s|^* \le n \\ s_0 < n}} B_s \lambda_k^{s_1} \left(u_k^{(s_0)}(0) - \mu u_k^{(s_0)}(T) \right) = 0. \tag{11}$$

Припустимо, що для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ корені $\eta_j \equiv \eta_j(\lambda_k)$, $j = 1, \ldots, nm$, характеристичного рівняння

$$M(\eta, \lambda_k) \equiv \det \left\| \sum_{|s|^* \le n} A_s \lambda_k^{s_1} \eta^{s_0} \right\| = 0 \tag{12}$$

є простими та відмінними від нуля*. Тоді для кожного η_j

$$\operatorname{rang} \left\| \sum_{|s|^* \le n} A_s \lambda_k^{s_1} \eta_j^{s_0} \right\| = m - 1, \quad j = 1, \ldots, nm,$$

а тому хоча б один з мінорів $(m-1)$-го порядку визначника $M(\eta_j, \lambda_k)$ відмінний від нуля (нехай це буде мінор одного з елементів рядка з номером $l = l(j)$). Однорідна система диференціальних рівнянь (10) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$Y_{kj}(t) = \operatorname{col}\left(h_{l1}(\eta_j), \ldots, h_{lm}(\eta_j)\right) \exp(\eta_j t), \quad j = 1, \ldots, nm, \tag{13}$$

де $h_{lr}(\eta_j)$, $r = 1, \ldots, m$, — мінори елементів рядка з номером $l = l(j)$ визначника $M(\eta_j, \lambda_k)$, які обчислюються за формулами

$$h_{lr}(\eta_j(\lambda_k)) = \sum_{\substack{|q|^* \le n(m-1) \\ q_1 \le [n/2](m-1)}} \xi_q^{lr} \lambda_k^{q_1} \eta_j^{q_0}, \quad r = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, nm, \tag{14}$$

$$\xi_q^{lr} \equiv \xi_{q_0, q_1}^{lr} = \sum_{\substack{\sum_{\beta=1}^{m} \omega_i(\beta) = q_i; \ i = 0; 1 \\ \beta \ne r}} \det \left\| a_{\omega_0(\beta), \omega_1(\beta)}^{\gamma\beta} \right\|_{\substack{\gamma, \beta = 1, \ldots, m, \\ \gamma \ne l, \ \beta \ne r}}, \quad r = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

де $a_{\omega_0(\beta), \omega_1(\beta)}^{\gamma\beta}$, $\gamma = 1, \ldots, m$, — елементи β-го стовпця матриці A_s, $s = (\omega_0(\beta), \omega_1(\beta))$.

Задача (10), (11) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли її характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ рівний нулю [22]. Визначник $\Delta(\lambda_k)$ обчислюється за формулою

* Результати роботи з незначними змінами можна перенести також на випадок, коли рівняння (12) має кратні корені.

$$\Delta(\lambda_k) = D(\lambda_k)E(\lambda_k)\prod_{j=1}^{nm}\left(1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right)\prod_{1\le i<j\le nm}\left(\eta_j(\lambda_k)-\eta_i(\lambda_k)\right), \quad (16)$$

де

$$D(\lambda_k) = \det\left\| \sum_{s_1\le(n-s_0)/2} b_s^{jr}\lambda_k^{s_1}\right\|_{\substack{j=1,\dots,nm \\ r=1,\dots,m;\ s_0=0,1,\dots,n-1}}, \quad (17)$$

$$E(\lambda_k) =$$

$$= \begin{vmatrix} E_0^1 & E_1^1 & \dots & E_{n-2}^1 & E_{n-1}^1 & \dots & E_{n(m-1)}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_0^1 & \dots & E_{n-3}^1 & E_{n-2}^1 & \dots & E_{n(m-1)-1}^1 & E_{n(m-1)}^1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{10} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_0^1 & \dots & E_{n(m-1)-n+1}^1 & E_{n(m-1)-n+2}^1 & \dots & E_{n(m-1)}^1 \\ \hdotsfor{10} \\ E_0^m & E_1^m & \dots & E_{n-2}^m & E_{n-1}^m & \dots & E_{n(m-1)}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_0^m & \dots & E_{n-3}^m & E_{n-2}^m & \dots & E_{n(m-1)-1}^m & E_{n(m-1)}^m & \dots & 0 \\ \hdotsfor{10} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E_0^m & \dots & E_{n(m-1)-n+1}^m & E_{n(m-1)-n+2}^m & \dots & E_{n(m-1)}^m \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$E_j^r = E_j^r(\lambda_k) = \sum_{d=0}^{[(n(m-1)-j)/2]} \xi_{j,d}^{lr}\lambda_k^d, \quad j = 0, 1, \dots, n(m-1), \quad r = 1, \dots, m,$$

а $\xi_{j,d}^{lr}$ визначені формулами (15).

***Зауваження* 1.** Визначник $E(\lambda_k)$ для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ відмінний від нуля, бо він входить співмножником у вираз для визначника

$$W(\lambda_k) \equiv \det\left\| Y_{kj}^{(q)}(t)\right\|_{\substack{j=1,\dots nm, \\ q=0,1,\dots,n-1}},$$

який, як відомо [22], відмінний від нуля;

$$W(\lambda_k) = E(\lambda_k)\prod_{j=1}^{nm}\exp\left(\eta_j(\lambda_k)t\right)\prod_{1\le i<j\le nm}\left(\eta_j(\lambda_k)-\eta_i(\lambda_k)\right).$$

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі* (1) – (3) *у просторі* $\overline{C}^n(\overline{Q})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall\lambda_k\in\Lambda) \quad 1-\mu\exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right) \ne 0, \quad j = 1, \dots, nm; \quad D(\lambda_k)\ne 0. \quad (19)$$

Доведення теореми, яке проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з розд. 2 [16], випливає з формул (16), (17), зауваження 1 і теореми про єдиність розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд Фур'є за повною системою ортогональних функцій.

4. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1) – (3). Нехай виконуються умови (19). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує единий розв'язок задачі (8), (9), який зображається у вигляді суми

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t),$$

де $U_k(t) = \mathrm{col}\,(U_{k1}(t), \dots, U_{km}(t))$ і $V_k(t) = \mathrm{col}\,(V_{k1}(t), \dots, V_{km}(t))$ — розв'язки задач (9), (10) і (8), (11) відповідно. Компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначаються формулами

$$U_{kj}(t) = \sum_{q=1}^{nm}\sum_{l=1}^{nm}\sum_{\alpha=1}^{nm}\sum_{p=1}^{nm}(-1)^{q-1}h_j\big(\eta_q(\lambda_k)\big)D_{lp}(\lambda_k)E_{p\alpha}(\lambda_k)S^q_{nm-\alpha}\times$$

$$\times\left(E(\lambda_k)D(\lambda_k)\big(1-\mu\exp\big(\eta_q(\lambda_k)T\big)\big)\prod_{i=1,\,i\neq q}^{nm}\big(\eta_q(\lambda_k)-\eta_i(\lambda_k)\big)\right)^{-1}\times$$

$$\times\varphi_{kl}\exp\big(\eta_q(\lambda_k)t\big),\quad j=1,\ldots,m, \tag{20}$$

$$V_{kj}(t) = \int_0^T\sum_{r=1}^{m}G_{k,j,r}(t,\tau)f_{kr}(\tau)\,d\tau,\quad j=1,\ldots,m, \tag{21}$$

де $D_{ij}(\lambda_k)$ і $E_{ij}(\lambda_k)$ — визначники, одержані з $D(\lambda_k)$ і $E(\lambda_k)$ відповідно викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця; S^q_γ — сума всіх можливих добутків $\eta_j(\lambda_k)$, $j=1,\ldots,nm$, $i\neq q$, взятих по γ у кожному добутку $\big(S^q_0\equiv 1\big)$; $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\ldots,m$, — елементи матриці Гріна задачі (8), (9), які у квадраті $K_T=\{(t,\tau)\in\mathbf{R}^2_+ : 0\le t,\tau\le T\}$, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначаються формулами

$$G_{k,j,r}(t,\tau) = (2D(\lambda_k))^{-1}\sum_{q=1}^{nm}\sum_{\alpha=1}^{nm}D_{r\alpha}(\lambda_k)S^q_{nm-\alpha}\prod_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq q}}^{nm}\big(\eta_\beta(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\big)^{-1}\times$$

$$\times\Bigg((-1)^{n(q-1)+1}\operatorname{sgn}(t-\tau)h_j\big(\eta_q(\lambda_k)\big)\exp\big(\eta_q(\lambda_k)(t-\tau)\big)+$$

$$+\sum_{l=1}^{nm}\sum_{i=1}^{nm}\sum_{p=1}^{nm}\sum_{|s|^*\le n}(-1)^{(n-1)p+1}b_s^{ip}\lambda_k^{s_1}\eta_q^{s_0}(\lambda_k)h_p\big(\eta_q(\lambda_k)\big)h_j(\eta_l(\lambda_k))\times$$

$$\times\exp\big(\eta_q(\lambda_k)t\big)D_{lp}(\lambda_k)E_{pi}(\lambda_k)S^q_{nm-l}(D(\lambda_k)E(\lambda_k))^{-1}\times$$

$$\times\prod_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq l}}^{nm}(\eta_\alpha(\lambda_k)-\eta_l(\lambda_k))^{-1}\frac{1+\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)}{1-\mu\exp(\eta_l(\lambda_k)T)}\Bigg),\quad j,r=1,\ldots,m, \tag{22}$$

де S^q_γ — ті ж, що й у формулах (20). На стороні $\tau=0$ $(\tau=T)$ квадрата K_T кожна з функцій $G_{k,j,r}(t,\tau)$, $j,r=1,\ldots,m$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

Розв'язок задачі (1) – (3) формально зображається рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(U_k(t)+V_k(t))X_k(x), \tag{23}$$

де компоненти вектор-функцій $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначені формулами (20) – (22). Питання про збіжність ряду (23), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1-\mu\exp\big(\eta_j(\lambda_k)T\big),\qquad \prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{nm}\big(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\big),\quad j=1,\ldots,nm,\qquad D(\lambda_k),\qquad E(\lambda_k),$$

що входять знаменниками у формули (20) і (22), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини $\lambda_k \in \Lambda$.

Введемо функціональні простори, які використовуватимемо при дослідженні розв'язності задачі (1) – (3):

$$B_q^\omega = \left\{ v(x) \in L_2(G)\colon\ v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k X_k(x), \quad \| v(x) \|_{q,\omega} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| \exp\left(q \lambda_k^\omega\right) < \infty \right\},$$

$q > 0$, $\omega > 0$; $C\left([0,T],\, B_q^\omega\right)$ — простір функцій $w(t,x)$, які визначені і неперервні в області Q і для кожного $t \in [0,T]$ належать B_q^ω,

$$\| w(t,x) \|_{C\left([0,T],\, B_q^\omega\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |w_k(t)| \exp\left(q \lambda_k^\omega\right),$$

де

$$w_k(t) = \int_G w(t,x) X_k(x)\, dx, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Зауважимо, що з рівняння (12) випливають такі оцінки:

$$(\forall \lambda_k > K_2) \quad |\eta_j(\lambda_k)| \le \alpha \lambda_k^{1/2}, \qquad j = 1, \ldots, nm, \quad \alpha > 0. \tag{24}$$

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі* m_j, γ_j, $j = 1, \ldots, 4$, *такі, що для всіх* $\lambda_k \in \Lambda$, $\lambda_k > K_3$, *виконуються нерівності*

$$\left|1 - \mu \exp\left(\eta_j(\lambda_k) T\right)\right| \ge m_1 \lambda_k^{-\gamma_1} \exp\left(-\left|\operatorname{Re} \eta_j(\lambda_k)\right| T\right), \qquad j = 1, \ldots, nm, \tag{25}$$

$$\prod_{\substack{q=1 \\ q \ne j}}^{nm} \left|\eta_j(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)\right| \ge m_2 \lambda_k^{-\gamma_2}, \quad j = 1, \ldots, nm, \tag{26}$$

$$|D(\lambda_k)| \ge m_3 \lambda_k^{-\gamma_3}, \tag{27}$$

$$|E(\lambda_k)| \ge m_4 \lambda_k^{-\gamma_4}. \tag{28}$$

Якщо $f_i(t,x) \in C\left([0,T],\, B_q^{1/2}\right)$, $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_j(x) \in B_q^{1/2}$, $j = 1, \ldots, nm$, *де* $q > \alpha T$, *то у просторі* $\overline{C}^n(\overline{D})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3), *який неперервно залежить від вектор-функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi(x)$.

Доведення. З формул (20) – (23) та оцінок (6), (24) – (28) одержуємо

$$\| u(t,x) \|_{\overline{C}^n(\overline{D})} \le c_3 \sum_{k \le K} \left(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_{kj}| + \sum_{i=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} |f_{ki}(t)| \right) +$$

$$+ c_4 \sum_{k > K} \left(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_{kj}| \lambda_k^{\sigma_1} \exp\left(\alpha T \sqrt{\lambda_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} \max_{t \in [0,T]} |f_{ki}(t)| \lambda_k^{\sigma_2} \exp\left(\alpha T \sqrt{\lambda_k}\right) \right), \tag{29}$$

де

$$K = \max(K_1, K_2, K_3), \qquad \sigma_1 = \chi - (n+3)/2, \qquad \sigma_2 = \chi + p/4,$$

$$\chi = nm + m[n/2][(n+1)/2] - [n/2] - [n(m-1)/2] + n \sum_{j=1}^{m-1} [n(m-j)/2] + \sum_{j=1}^{4} \gamma_j.$$

Використовуючи елементарну нерівність

$$q^{\delta} \le c_5 \exp(\rho q), \quad c_5 = c_5(\delta), \quad q > 0,$$

яка виконується для довільних $\delta \ge 0$ і $\rho > 0$, з оцінок (5), (29) знаходимо

$$\|u(t,x)\|_{\overline{C}^n(\overline{D})} \le c_6 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{nm} |\varphi_{kj}| \exp\left(q\sqrt{\lambda_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} \max_{t\in[0,T]} |f_{ki}(t)| \exp\left(q\sqrt{\lambda_k}\right) \right) =$$

$$= c_6 \left(\sum_{j=1}^{nm} \|\varphi_j(x)\|_{q,1/2} + \sum_{i=1}^{m} \|f_i(t,x)\|_{C\left([0,T],\, B_q^{1/2}\right)} \right) < \infty.$$

Теорему доведено.

5. Проаналізуємо можливість виконання оцінок (25) – (28).

Лема. *Нехай* $\Phi(\lambda_k)$ *— обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівність*

$$\left|\Phi(\lambda_k) - Td/\sqrt{\lambda_k}\right| \ge \lambda_k^{-(p+1)/2-\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

виконується для всіх (крім скінченного числа) пар чисел (λ_k, d), $\lambda_k \in \Lambda$, $d \in \mathbf{Z}$.

Доведення проводиться за схемою доведення леми 2.4 з розд.1 [16] з урахуванням оцінок (5).

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}$*) чисел* $T > 0$ *і для довільних фіксованих* μ *та* a_s^{ij}, $|s|^* \le n$, $i, j = 1, \ldots, m$, *нерівності* (25) *виконуються при* $\gamma_1 > p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. Використовуючи нерівність $\sin x \ge 2x/\pi$, яка справедлива для всіх $x \in [0, \pi/2]$, знаходимо

$$\left|1 - \mu \exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right| \ge |\mu| \exp\left(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\right) \left|\sin\left(\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T\right)\right| >$$

$$> |\mu| \exp\left(-\left|\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)\right|T\right) \left| \frac{\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T}{\pi} - d_j(\lambda_k) \right|, \quad j = 1, \ldots, nm, \quad (30)$$

де $\psi = \arg\mu$, а $d_j(\lambda_k) \in \mathbf{Z}$ таке, що

$$\left| \frac{\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T}{\pi} - d_j(\lambda_k) \right| \le \frac{1}{2}.$$

На підставі леми та оцінок (24) і (30) одержуємо, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх чисел $T > 0$ виконуються оцінки

$$\left|1 - \mu \exp\left(\eta_j(\lambda_k)T\right)\right| \ge$$

$$\ge |\mu| T^{-1} \sqrt{\lambda_k} \exp\left(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\right) \left| \frac{\psi T/\pi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T^2/\pi}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{T d_j(\lambda_k)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \ge$$

$$\ge |\mu| T^{-1} \lambda_k^{-p/2-\delta} \exp\left(-\left|\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)\right|T\right), \quad j = 1, \ldots, nm,$$

де δ — довільне додатне число. Теорему доведено.

Позначимо через $Y \in \mathbf{R}^{\sigma}$ вектор, складений з дійсних та уявних частин чисел a_s^{ij}, $|s|^* \le n$, $i, j = 1, \ldots, m$, системи (1), де

$$\sigma = 2m^2 \left(n + 1 + \sum_{j=1}^{n} [j/2] \right).$$

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі* $\mathbf{R}^{\sigma}$*) векторів* Y *при* $\gamma_2 \geq (nm-1)(p-2-2m[n/2]+nm)/4$ *нерівності* (26) *виконуються для всіх (крім скінченного числа)* $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. Запишемо многочлен $M(\eta, \lambda_k)$ у вигляді

$$M(\eta, \lambda_k) = \sum_{j=0}^{nm} H_j(\lambda_k)\eta^j,$$

де $H_j(\lambda_k) \equiv H_j$ — многочлен відносно λ_k степеня не вище $[(nm-j)/2]$, коефіцієнти якого виражаються через елементи матриць A_s, $j = 0, 1, \ldots, nm$, $H_{nm} = \det A_{(n,0)}$. Для дискримінанта $W(M)$ многочлена $M(\eta, \lambda_k)$ справедливі зображення:

$$W(M) = H_{nm}^{2(nm-1)} \prod_{1 \leq i < j \leq nm} \left(\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)\right)^2, \tag{31}$$

$$W(M) = \frac{(-1)^{nm(nm-1)/2}}{H_{nm}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} H_{nm} & H_{nm-1} & \ldots & H_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_{nm} & \ldots & H_1 & H_0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \ldots & H_{nm-2} & H_{nm-3} & \ldots & H_0 \\ nmH_{nm} & (nm-1)H_{nm-1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & nmH_{nm} & \ldots & H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \ldots & (nm-2)H_{nm-2} & (nm-3)H_{nm-3} & \ldots & H_1 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Використовуючи схему доведення теореми 6 з [23], знаходимо, що для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbf{R}^{\sigma}$) векторів Y і для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ виконується нерівність

$$|\operatorname{Re} W(M)| \geq \lambda_k^{-\nu-\varepsilon}, \quad \nu = (nm-1)(p/2 - m[n/2]), \quad \varepsilon > 0. \tag{33}$$

Оскільки $|W(M)| \geq |\operatorname{Re} W(M)|$, то з формули (31) одержуємо, що для майже всіх векторів $Y \in \mathbf{R}^{\sigma}$ справедлива оцінка

$$\prod_{1 \leq i < j \leq nm} \left|\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)\right| \geq \lambda_k^{-(nm-1)(p-2m[n/2])/4-\varepsilon/2}. \tag{34}$$

З рівності

$$\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{nm} \left(\eta_q(\lambda_k) - \eta_j(\lambda_k)\right) = \prod_{1 \leq i < j \leq nm} \left|\eta_j(\lambda_k) - \eta_i(\lambda_k)\right| \prod_{\substack{1 \leq \alpha < \beta \leq nm \\ \alpha \neq j, \beta \neq j}} \left|\eta_\alpha(\lambda_k) - \eta_\beta(\lambda_k)\right|^{-1}$$

та оцінок (24), (34) знаходимо, що для майже всіх векторів $Y \in \mathbf{R}^{\sigma}$

$$\prod_{\substack{q=1 \\ q \neq j}}^{nm} \left(\eta_q(\lambda_k) - \eta_j(\lambda_k)\right) \geq c_7 \lambda_k^{-(nm-1)(p-2+nm-2m[n/2])/4-\varepsilon/2}, \quad j = 1, \ldots, nm, \ c_7 > 0.$$

Теорему доведено.

Розглянемо тепер нерівності (27), (28). Визначники $E(\lambda_k)$ і $D(\lambda_k)$ є многочленами вигляду

$$E(\lambda_k) = \sum_{r=0}^{M_1} E_r \lambda_k^r,$$

$$D(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{M_2} D_j \lambda_k^j,$$

де

$$M_1 = n \sum_{j=1}^{m-1} [n(m-j)/2],$$

$$M_2 = m[n/2][(n+1)/2],$$

а коефіцієнти E_r і D_j виражаються через елементи матриць A_s і B_s відповідно. Нехай $\beta_1 = \left(\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_\xi^{(1)}\right)$ та $\beta_2 = \left(\beta_1^{(2)}, \ldots, \beta_\xi^{(2)}\right)$ — вектори, складені відповідно з дійсних та уявних частин чисел b_s^{ij}, де

$$\xi = m^2 n \left(n + \sum_{j=1}^{n} [j/2] \right).$$

Справедливі наступні твердження.

Теорема 5. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{\xi}$*) векторів* β_1 *і довільного фіксованого* β_2 *(або для майже всіх* β_2 *і для довільного фіксованого* β_1*) нерівність* (27) *виконується при* $\gamma_3 > p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 6. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в* $\mathbf{R}^{\sigma}$*) векторів* Y *нерівність* (28) *виконується при* $\gamma_4 > p/2$ *для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$.

Якщо вільні члени поліномів $D(\lambda_k)$ і $E(\lambda_k)$ відмінні від нуля, то доведення теорем 5 і 6 проводиться за схемою доведення теореми 4 з [23]; якщо ж поліноми $D(\lambda_k)$ і $E(\lambda_k)$ не містять вільних членів, то доведення цих теорем аналогічне доведенню теореми 16 з [24].

Результати узагальнені на випадок такої задачі для безтипної системи лінійних рівнянь із частинними похідними, збуреної нелінійним інтегро-диференціальним оператором:

$$\frac{\partial^n u_j(t,x)}{\partial t^{n_j}} - \sum_{r=1}^{m} P_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right) u_r(t,x) =$$

$$= f_j(t,x) + \varepsilon \int_G \sum_{q=1}^{m} K_{jq}(t,x,y) F_q(t,y,\overline{u}(t,y))\, dy, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{s \le n_j \\ l \le H}} b_{sl}^{qj} (-L)^l \left(\left. \frac{\partial^s u_j(t,x)}{\partial t^s} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{\partial^s u_j(t,x)}{\partial t^s} \right|_{t=T} \right) = \varphi_q(x), \qquad q = 1, \ldots, n,$$

$$L^q u_j(t,x)\Big|_{\partial G} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad q = 0, 1, \ldots, H-1,$$

де

$$n_1 + \ldots + n_m = n, \qquad P_{jr}\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right) \equiv \sum_{\substack{s<n_j \\ l \le H}} p_{jr}^{sl} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s (-L)^l,$$

$$j, r = 1, \ldots, m; \quad p_{jr}^{sl}, \ b_{sl}^{qj} \in \mathbf{C}, \quad \varepsilon, \ \mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\},$$

$$\overline{u}(t, y) = \left\{ \frac{\partial^{s_0 + |s|} u_q(t, y)}{\partial t^{s_0} \partial y_1^{s_1} \ldots \partial y_p^{s_p}}; \ \ s_0 \le n_q, \ |s| \le 2H, \ q = 1, \ldots, , m \right\}.$$

1. *Макаров А. А.* О необходимых и достаточных условиях разрешимости краевой задачи в слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 2. – С. 320–324.
2. *Савченко Г. Б.* О корректности одной нелокальной краевой задачи // Там же. – 1985. – **21**, № 8. – С. 1450–1453.
3. *Романко В. К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. – 1986. – **286**, № 1. – С. 47–50.
4. *Романко В. К.* Об общих краевых задачах для линейных систем уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып. 23. – С. 3–7.
5. *Sinestrari Eugenio, Webb G. F.* Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – **121**, № 2. – P. 449–464.
6. *Клить И. Я.* Об одной задаче с нелокальными по времени условиями для систем гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1994. – Вып. 37. – С. 21–25.
7. *Маринец В. В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1393–1397.
8. *Мамедов Ю. А.* О корректной разрешимости общих смешанных задач // Там же. – 1990. – **26**, № 3. – С. 534–537.
9. *Маловичко В. А.* О разрешимости нелокальных краевых задач для псевдопараболических систем и систем составного типа // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 5. – С. 151–153.
10. *Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 1657–1663.
11. *Кигурадзе Т. И.* Об одной краевой задаче для гиперболических систем // Докл. РАН. Математика. – 1993. – **328**, № 2. – С. 135–138.
12. *Кигурадзе Т. И.* Об ограниченных и периодических в полосе решениях квазилинейных гиперболических систем // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 10. – С. 1760–1773.
13. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
14. *Полищук В. И., Пташник Б. И.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С.239–243.
15. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
16. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
17. *Задорожна Н. М.* Задачі з нелокальними крайовими умовами для параболічних рівнянь і систем: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 17 с.
18. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.
19. *Матійчук М. І.* Про нелокальну параболічну крайову задачу // Там же. – 1996. – **48**, № 3. – С. 362–367.
20. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
21. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 883–896.
22. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
23. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
24. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

Одержано 16.04.97