

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

На правах рукопису

Куриляк Андрій Олегович

УДК 517.55

ДИСЕРТАЦІЯ
АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ І РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ
ВИПАДКОВИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. _____ А.О. Куриляк

Науковий консультант:

Скасків Олег Богданович

доктор фізико-математичних

наук, професор

Львів – 2024

АНОТАЦІЯ

Куриляк А. О. Асимптотичні властивості і розподіл значень випадкових аналітичних функцій. — На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 “Математичний аналіз”. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2024.

Дисертація складається зі вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми досліджень, сформульовано мету, завдання, предмет, об’єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У роботі об’єктом дослідження є класи аналітичних та випадкових аналітичних функцій, зображуваних збіжними в довільній кратно-круговій області Рейнхарда степеневими рядами, а також цілих кратних рядів Діріхле, лакунарних рядів за однорідними поліномами та інтегралів Лапласа-Стілт’еса.

У другому розділі вперше з однієї точки зору розглядаються аналоги класичних нерівності Вімана та співвідношення Бореля в класі аналітичних функцій від однієї змінної, зображуваних степеневими рядами $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ з довільним скінченним чи нескінченним радіусом збіжності $R \in (0; +\infty]$ та встановлено найбільш загальний опис виняткових множин у цих твердженнях. Отримані тут співвідношення виконуються зовні виняткової множини скінченної логарифмічної h -міри з довільною зростаючою функцією h , що визначає дану h -міру, як для аналітичних функцій, так і для цілих функцій від однієї змінної. Отримані тут твердження містять в собі твердження про класичну нерівність Вімана для цілих функцій та про нерівність типу Кеварі для аналітичних функцій в одиничному крузі, а також істотно доповнюють результати попередників стосовно як аналогів нерівності Вімана, так і співвідношення Бореля, що викону-

ються зовні виняткових множин, величина яких описується в термінах скінченності їхньої логарифмічної h -міри. Встановлено також наявність ефекту типу Леві істотного уточнення нерівності типу Вімана для випадкових субгаусових цілих функцій, які зображаються лакунарними степеневими рядами вигляду $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{Z}_+$. Зазначимо, що у всіх результатах попередників (П. Леві, М. Стіла, П.В. Філевича, О.В. Зрума і О.Б. Скасківа) послідовність незалежних випадкових величин $Z_k(\omega)$ є майже напевно рівномірно обмеженою, а послідовність субгаусових випадкових величин $Z_k(\omega)$ може не бути рівномірно обмеженою.

Крім цього у даному розділі встановлено наявність ефекту типу Леві для випадкових аналітичних функцій від однієї змінної $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$ у випадку коли послідовність випадкових величин $Z_n(\omega)$ є послідовністю субгаусових випадкових величин, послідовність дисперсій яких є обмеженою. Також встановлено необхідність умови обмеженості послідовності дисперсій для наявності ефекту типу Леві.

Дослідження аналогів нерівності типу Вімана для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних проводиться у третьому розділі. У цьому розділі в класі аналітичних функцій, зображуваних в довільній фіксованій кратно-круговій області Рейнхарда кратними степеневими рядами вигляду $f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$, вперше розвинуто підхід типу методу Вімана-Валірона і також вперше отримано в найбільш загальному вигляді аналоги класичної нерівності Вімана. При цьому, встановлено явні залежності між виглядам отриманих аналогів нерівності Вімана і довільною наперед заданою мірою (h -мірою), скінченність якої дає описання величини виняткової множини в отриманій нерівності. Використання довільної h -міри для описання величини виняткової множини, з однієї сторони викликано потребами розширення зони застосовності результатів теорії Вімана-Валірона (зокрема, в аналітичній теорії диференціальних рівнянь), а з іншого боку продиктовано відомою проблемою Й.В. Островського про відшукання найкраще можливого опису величин виня-

ткових множин, як в класичній нерівності Вімана, так і взагалі в різноманітних асимптотичних співвідношеннях, що розглядаються в цій теорії. У випадку цілих функцій, як від однієї комплексної змінної так і від багатьох змінних для цілого ряду асимптотичних співвідношень, остаточні відповіді знайдені раніше у працях П.В. Філевича, а також О.Б. Скасківа разом зі О.В. Зрумом, Т.М. Салло, О.М. Тракало та Д.Ю. Зікрачем. Успішність проведеного у другому розділі дослідження степеневих рядів у довільній кратно-круговій області Рейнхарда, з одного боку вказує на можливість успішної реалізації підходів типу Вімана-Валірона у цьому випадку, а з іншого боку результати вказують на ефективність і потужність методів, розвинутих у ньому, і на те, що методи як цього розділу, так і розділу 2, безумовно повинні бути застосовані у подальших дослідженнях, оскільки результати про нерівності типу Вімана у певному сенсі можна вважати індикатором можливої успішності подальших досліджень.

З отриманого у третьому розділі твердження, як наслідок, отримуються, як відомі нерівності для цілих функцій від декількох змінних, так і для аналітичних функцій від однієї змінної. Точність отриманих нерівностей встановлена у випадку, якщо область збіжності кратного степеневого ряду є одна з множин \mathbb{C}^p , $\mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}$, \mathbb{D}^p , де $l, p \in \mathbb{N}$, $p > l$, $p \geq 2$.

У третьому розділі також розглянуто випадкові аналітичні функції $f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$, областю збіжності яких майже напевно є кратно-кругова область Рейнхарда. Для цих функцій встановлено наявність ефекту Леві і побудовано приклади на точність отриманих тверджень. Результати цього розділу в загальному сенсі повністю вичерпують, сформульовану в 1996 р. проф. А.А. Гольдбергом і проф. М.М. Шереметою проблему, про наявність ефекту типу Леві у випадку кратних степеневих рядів.

Об'єктом дослідження у четвертому розділі є цілі функції, представлені лакунарними рядами однорідних поліномів у вигляді $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, де $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}$, $P_k(z) = \sum_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$ — однорідні поліноми степеня $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, і

$0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ ($1 \leq k \uparrow +\infty$), $\lambda = (\lambda_k)$. Вичерпання \mathbb{C}^p відбувається не по лікрусами, а довільною однопараметричною системою подібних повних кратно-кругових областей з центром у початку координат. Оцінка максимуму модуля проводиться через діагональний максимальний член ряду. Доведено аналогі нерівності Бітляна-Гольдберга, встановленої у такій постановці питання для цілих функцій від багатьох комплексних змінних. Також побудовано приклад на точність отриманих тверджень.

У другому підрозділі встановлено аналогі нерівності Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільними комплексними показниками. А саме, розглянуто ряди Діріхле абсолютно збіжні у всьому комплексному просторі \mathbb{C}^p вигляду $F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z, \lambda_n)}$ з такою послідовністю показників (λ_n) , що $\{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ та $\lambda_n \neq \lambda_m$ для всіх $n \neq m$. Доведено багатовимірний аналог нерівності типу Вімана, який є узагальненням одновимірної теореми, до якої було побудовано приклад на точність.

Дослідження асимптотичних властивостей ймовірності відсутності нулів у гаусових аналітичних функцій в крузі з центром у початку координат проводиться у п'ятому розділі. Нехай $(\xi_n(\omega)) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0; 1)$ — послідовність незалежних випадкових комплексних величин зі стандартним гаусовим розподілом у комплексній площині зі щільністю $p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для цілих трансцендентних гаусових функцій $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n$ раніше в працях А. Нішрі, М. Содіна та інших були відомі асимптотичні оцінки ймовірності відсутності нулів в довільному крузі з центром у початку координат та висловлювалися гіпотези стосовно їх точності, оскільки питання про точність цих оцінок залишалися відкритими. У дисертаційні роботі дано відповідь на це питання у випадку коли тейлорові коефіцієнти цілої функції домножаються на добуток гаусових випадкових величин та випадкових величин Штейнгауса. Тобто, для функцій вигляду $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1) \xi_n(\omega_2) a_n z^n$, де $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, рівномірно розподілених на

$[-\pi, \pi)$, $(\xi_n(\omega_2)) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0; 1)$. При цьому відому раніше оцінку знизу істотно посилено. Використовуючи деякі результати з теорії Вімана-Валірона для цілих трансцендентних функцій, отримано асимптотичні оцінки згори і знизу згаданої ймовірності зовні деякої виняткової множини та побудовано приклади на точність отриманих оцінок.

На відміну від цілих гаусових функцій, для гаусових аналітичних функцій в одиничному крузі проблема знаходження асимптотичних співвідношень для ймовірності відсутності нулів залишалася практично повністю відкритою у загальному випадку. Були відомі лише оцінки для деяких аналітичних функцій з цілком конкретно заданими тейлоровими коефіцієнтами.

У другому підрозділі цього розділу дисертаційного дослідження отримано асимптотичні співвідношення для ймовірності відсутності нулів зовні множини скінченної логарифмічної міри для класу випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі, що визначається цілком подібно до класу випадкових цілих гаусових функцій, результати стосовно якого описано вище. При цьому у порівнянні з випадком цілих функцій цей клас визначається додатковою умовою $\lim_{r \uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4$, $N(r) = \#\{n: |a_n|r^n > 1\}$. Побудовано приклади на точність отриманих верхньої та нижньої оцінок.

У шостому розділі встановлено співвідношення типу Бореля для інтегралів Лапласа-Стілт'єса $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du)$. Побудовано приклад на точність цього твердження.

У третьому підрозділі проведено дослідження одного банахового простору інтегралів Лапласа-Стілт'єса та рядів Діріхле вигляду $D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n \sigma}$.

Також у шостому розділі отримано твердження про узагальнені та модифіковано узагальнені порядки зростання інтегралів Лапласа-Стілт'єса та досліджено певні простори Фреше цілих рядів Діріхле скінченного узагальненого порядку.

Усі результати дисертації, які виносяться на захист, є новими. Вони мають теоретичний характер і можуть бути використані як в багатовимірному

комплексному аналізу, так і в інших розділах аналізу, а також в таких суміжних розділах математики, як диференційні рівняння і теорія ймовірностей.

Ключові слова: аналітичні функції, кратні степеневі ряди, лакунарні ряди однорідних поліномів, кратні ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член, гаусові та субгаусові випадкові величини, нерівність Вімана, співвідношення Бореля, ефект Леві, нерівність Бітляна-Гольдберга, кратно-кругова область Рейнхарда, ймовірність відсутності нулів, інтеграли Лапласа-Стілт'єса, узагальнений порядок.

ABSTRACT

Kuryliak A.O. *Asymptotic properties and value distribution of random analytic functions*. — Manuscript.

The thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.01 — Mathematical analysis, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2024.

The thesis consists of an introduction, 6 sections, conclusions, references. The introduction consists of the relevance of the research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

The object of investigations are classes of analytic and random analytic functions, represented by convergent power series in an arbitrary multiple-circular Reinhard domain, entire multiple Dirichlet series, lacunary series of the homogeneous polynomials and Laplace-Stiltjes integrals.

In the second chapter, for the first time, analogues of classical Wiman inequalities and Borel relations in the class of analytic functions of one variable, represented by power series $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ with an arbitrary finite or infinite radius of convergence $R \in (0; +\infty]$ and the most general description of exceptional sets in these statements is established. The relations obtained here hold outside the exceptional set of finite logarithmic h -measure with arbitrary increasing function h that defines a given h -measure, both for analytic functions and for entire functions of one variable. This statements obtained here include the assertions of the classical Wiman inequality for entire functions and the Kevari inequality for analytic functions in the unit disk, and also significantly complement the results of the predecessors regarding both Wiman's inequality analogues and Borel's relations, which are fulfilled outside exceptional sets, the value of which is described in terms of the finiteness of their logarithmic h -measure. The existence of a Levy-

type effect of a significant improvement of the Wiman-type inequality for random sub-Gaussian entire functions, which are represented by lacunar power series of the form $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k(\omega) z^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{Z}_+$. Note that in all the results of the predecessors (P. Levy, M. Steel, P.V. Filevych, O.V. Zrum, and O.B. Skaskiv), the sequence of independent random variables $Z_k(\omega)$ is almost surely uniformly bounded, but the sequence of sub-Gaussian random variables $Z_k(\omega)$ may not be uniformly bounded.

In addition, in this section, the existence of a Levy-type effect is established for random analytical functions of one variable $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z_n(\omega) z^n$ in the case when the sequence of random variables $Z_n(\omega)$ is a sequence of sub-Gaussian random variables, the sequence of variances of which is bounded. The necessity of the condition of the boundedness of the sequence of dispersions for the presence of the Levy-type effect is also proved.

The study of analogues of the Wiman-type inequality for analytic functions of several complex variables is carried out in the third section. In this section, in the class of analytic functions represented in an arbitrary fixed multiple-circular Reinhard domain by multiple power series of the form $f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n$, for the first time, an approach like the Wiman-Valiron method was developed. Also for the first time analogues of the classical Wiman inequality were obtained in the most general form. At the same time, dependencies have been established between the forms of the obtained analogues of Wiman's inequality and an arbitrary predefined measure (h -measure), the finiteness of which gives a description of the value of the exceptional set in the obtained inequality. The use of an arbitrary h -measure to describe the size of the exceptional set is, on the one hand, caused by the need to expand the area of applicability of the results of the Wiman-Valiron theory (in particular, in the analytical theory of differential equations), and on the other hand, it is dictated by the well-known problem of J.V. Ostrovsky about finding the best possible description of the values of exceptional sets, both in the classical Wiman inequality and in general in various

asymptotic relations considered in this theory. In the case of entire functions, both from one complex variable and from many variables for many asymptotic relations, the final answers were found earlier in the works of P.V. Filevych, as well as O.B. Skaskiv together with O.V. Zrum, T.M. Salo, O.M. Trakalo and D.Yu. Zikrach. The success of the study of power series in the arbitrary multi-circular Reinhard domain carried out in the second chapter, on the one hand, indicates the possibility of successful implementation of Wiman-Valiron type approaches in this case, and on the other hand, the results indicate the effectiveness and power of the methods developed in it, and that the methods of both this chapter and chapter 2 should certainly be applied in further research, since the results on Wiman-type inequalities can in a certain sense be considered an indicator of the possible success of further research.

From the statement obtained in the third section, as a result, both known inequalities for entire functions of several variables and for analytic functions of one variable are obtained. The sharpness of the obtained inequalities is established in the case of convergence domain of the multiple power series is one of the sets $\mathbb{C}^p, \mathbb{D}^l \times \mathbb{C}^{p-l}, \mathbb{D}^p$, where $l, p \in \mathbb{N}, p > l, p \geq 2$.

In the third chapter we consider random analytic functions $f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n$, the domain of convergence of which is almost surely a multiply-circular Reinhard domain. For these functions, the presence of the Levy effect was established and examples of the sharpness of the statements were constructed. The results of this section in a general sense completely exhaust the idea formulated in 1996 by Prof. A.A. Goldberg and Prof. M.M. Sheremeta the problem of the existence of a Levy-type effect in the case of multiple power series.

The object of the investigations of the fourth chapter is entire functions represented by lacunary series of the homogeneous polynomials and Dirichlet entire multiple series. Here $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, where $P_0(z) \equiv a_0 \in \mathbb{C}$, $P_k(z) = \sum_{\|n\|=\lambda_k} a_n z^n$ is homogeneous polynomials of degree $\lambda_k \in \mathbb{Z}_+$, and $0 = \lambda_0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ ($1 \leq k \uparrow +\infty$), $\lambda = (\lambda_k)$. The exhaustion of \mathbb{C}^p does not occur by

polydiscs but by an arbitrary one-parameter system of similar complete multiple-circular domains centered at the origin. The modulus maximum is evaluated by the diagonal maximum term of this series. Analogues of the Bitlyan-Gol'dberg inequality investigated in this formulation of the question for entire functions of many complex variables are proved. An example of the sharpness of the received statements is also constructed.

In the second subsection, analogs of Wiman's inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents are investigated. Namely, we considered Dirichlet series absolutely convergent in \mathbb{C}^p of the form $F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z, \lambda_n)}$ with a sequence of exponents (λ_n) such that $\{\lambda_n: n \in \mathbb{Z}^p\} \subset \mathbb{C}^p$ and $\lambda_n \neq \lambda_m$ for all $n \neq m$. Namely, a multidimensional analogue of the Wiman type inequality is proved. This analogue is generalization of the one-dimensional theorem, to which an example of sharpness is constructed.

The investigation of the asymptotic properties of probability of zeros absence of Gaussian analytic functions in the disks with the center at the origin is considered in the fifth chapter. Let $(\xi_n(\omega)) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0; 1)$ be a sequence of independent random variables with a standard Gaussian distribution in the complex plane with density $p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. For entire transcendental Gaussian functions $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n$ previously, in the works of A. Nishry, M. Sodin and others, asymptotic estimates of the probability of absence were known asymptotic estimates of the probability of zeros absence in an arbitrary disk with the center at the origin were previously known for entire transcendental Gaussian functions. Hypotheses regarding their sharpness were expressed, because questions about the sharpness of these estimates are still open. In the thesis the answer to this question was given in the case when the Taylor coefficients of the entire function are multiplied on the product of Gaussian random variables and Steinhaus random variables. That is, $f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1) \xi_n(\omega_2) a_n z^n$, where $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) is a sequence of independent random variables uniformly distributed on $[-\pi, \pi)$, $(\xi_n(\omega_2)) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0; 1)$. At the same time the assessment from below has been

significantly strengthened. Using some results from the Wiman-Valiron theory for entire transcendental functions, asymptotic estimates from above and below of the mentioned probability outside some exceptional set were obtained. Examples of the sharpness of these estimates are also constructed.

Unlike the entire Gaussian functions, for Gaussian analytical functions in the unit disc, the problem of finding asymptotic estimates for the probability of zeros absence remained almost completely open in the general case. Only estimates for some analytic functions with quite specifically given Taylor coefficients were known.

In the second subsection of the thesis asymptotic relations for the probability of zeros absence outside the set of finite logarithmic measure are obtained for the class of random analytic functions in the unit disc. These classes are defined quite similarly to the class of random entire Gaussian functions, the results of which are described above. At the same time, in comparison with the case of entire functions, this class is determined by an additional condition $\lim_{r \uparrow 1} \frac{\ln N(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} > 4$, $N(r) = \#\{n: |a_n|r^n > 1\}$. Examples of the sharpness of the obtained upper and lower estimates are constructed.

In the sixth chapter a Borel-type relation for Laplace-Stieltjes integrals $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du)$ is investigated. The example of the sharpness of this statement is constructed.

In the third subsection, a study of one Banach space of Laplace-Stieltjes integrals and Dirichlet series of the form $D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n \sigma}$.

Also, in the sixth chapter, statements about the generalized and modified generalized growth orders of Laplace-Stieltjes integrals were obtained and certain Frechet spaces of Dirichlet series of finite generalized order were investigated.

All the results of the thesis are new. They have a theoretical meaning and can be used both in multidimensional complex analysis and in other sections of analysis, as well as in such related sections of mathematics as differential equations and probability theory.

Keywords: analytic function, multiple power series, lacunary series of the homogeneous polynomials, multiple Dirichlet series, maximum of modulus, maximal term, Gaussian and sub-Gaussian random variables, Wiman's inequality, Borel's relation, Levy effect, Bitlyan-Gol'dberg inequality, multiple Reinhardt circular domain, probability of zeros absence, Laplace-Stieltjes integrals, generalized order.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On Borel's type relation for the Laplace–Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2014. V. 42. № 2. P. 134–142.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of Dirichlet series with random exponents. *Int. J. Appl. Math.* 2017. V. 30. № 3. P. 229–238.
3. Kuryliak A. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *Mat. Stud.* 2017. V. 47. № 1. P. 10–19.
4. Sheremeta M.M., Dobushovsky M.S., Kuryliak A.O. On a Banach space of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2017. V. 48. № 2. P. 143–149.
5. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's type inequality for multiple power series in an unbounded cylinder domain. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 1. P. 29–51.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. On the convergence of random multiple Dirichlet series. *Mat. Stud.* 2018. V. 49. № 2. P. 122–137.
7. Kuryliak A.O., Tsvigun V.L. Wiman's inequality for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ with rapidly oscillating coefficients. *Carpathian Math. Publ.* 2018. V. 10. № 1. P. 133–142.
8. Sheremeta M.M., Kuryliak A.O. On the growth of Laplace-Stieltjes integrals. *Mat. Stud.* 2018. V. 50. № 1. P. 22–35.
9. Kuryliak A., Skaskiv O., Skaskiv S. Levy's phenomenon for analytic functions in the polydisc. *Eur. J. Math.* 2020. V. 6. P. 138–152.
10. Kuryliak A.O., Panchuk S.I., Skaskiv O.B. Bitlyan-Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term. *Mat. Stud.* 2020. V. 54. № 2. P. 135–145.
11. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h -measure of an exceptional sets. *Carpathian Math. Publ.* V. 12. 2020. № 2. P. 492–498.
12. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Bukovinian Math. J.* 2021. V. 9. № 1. P. 56–63.
13. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *Axioms.* 2021. V. 10. № 4. 348.

14. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman-type inequality in a multiple-circular domain: Lévy's phenomenon and exceptional sets. *Ukrainian Math. J.* 2022. V. 74. № 5. P. 743–756.
15. Куриляк А., Скасків О. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 2022. Т. 93. Р. 83–96.
16. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *Axioms.* 2023. V. 12. № 3. 255.
17. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Analytic Gaussian functions in the unit disc: probability of zeros absence. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 1. 29–45.
18. Куриляк А.О., Шеремета М.М. Про простори Банаха і Фреше інтегралів Лапласа–Стілтєса. *Гелінійні коливання.* Т. 24. № 2. С. 185–196 (2021). Engl. transl.: Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals. *J. Math. Sci. (US).* 2023. V. 270. № 2. P. 280–293.
19. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for entire multiple Dirichlet series with arbitrary complex exponents. *Mat. Stud.* 2023. V. 59. № 2. P. 178–186.
20. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Sub-Gaussian random variables and Wiman's inequality. *Carpathian Math. Publ.* 2023. V. 15. № 1. P. 306–314.

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zrum O.V. Levy's phenomenon for entire functions of several variables. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 45–46.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 123–124.
3. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Tsvigun V.L. On exceptional set in Wiman's type inequality for entire functions of several variables. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 140–141.
4. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л. Про виняткову множину у нерівності Вімана для випадкових цілих функцій декількох змінних. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 27 лютого – 2 березня, 2018 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2018. С. 67–68.

5. Kuryliak A.O. Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain. *The IV conference in mathematics and computer science "Congresio-mathematica"* (Mierki, Poland, 20–23 September, 2018). Abstracts, Olstun, 2018. P. 26.
6. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality on multiple-circular domain. *International Conference Complex analysis and related topics dedicated to the 90th anniversary of A.A. Gol'dberg* (Lviv, 28 June – 1 July, 2020). Abstracts, Lviv, 2021. P. 30–31.
7. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Levy's phenomenon for analytic functions in multiple-circular domain. *International online conference "Current trends in abstract and applied analysis"* (Ivano-Frankivsk, 12–15 May, 2022). Abstracts, Ivano-Frankivsk, 2022. P. 46–47.
8. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality in multiple-circular domain. *International conference "Theory of approximation of functions and its applications" dedicated to the 80th Anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine, Professor Alexander Stepanets (1942–2007)* (Lutsk, 6–10 June, 2022). Abstracts, Lutsk, 2022. P. 18–19.
9. Kuryliak A.O., Sheremeta M.M. On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 83.
10. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence. *International scientific conference "Mathematics and information technologies" dedicated to the 55th anniversary of the faculty mathematics and informatics* (Chernivtsi, 28–30 September, 2023). Abstracts, Chernivtsi, 2023. P. 84.

Список публікацій, які додатково відображають результати дисертації

1. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *Mat. Stud.* 2013. V. 39. № 2. P. 134–141.
2. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents. *Mat. Stud.* 2013. V. 40. № 1. P. 108–112.
3. Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. Wiman's inequality for the Laplace integrals. *Int. Journal of Math. Analysis.* 2014. V. 8. № 8. P. 381–385.

4. Куриляк А.О., Шаповаловська Л.О., Скасків О.Б. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2014. Т. 2. № 2–3. С. 130–135.
5. Kuryliak A.O., Sharovalovska L.O. Wiman's inequality for entire functions of several complex variables with rapidly oscillating coefficients. *Mat. Stud.* 2015. V. 43. № 1. P. 16–26.
6. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Скасків С.Р. Аналоги нерівності Вімана і ефект Леві для аналітичних функцій у бікрузі. *Буковин. мат. журн.* 2015. Т. 3. № 3–4. С. 102–110.
7. Kuryliak A.O., Sharovalovska L.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc. *Ukr. Math. J.* 2016. V. 68. № 1. P. 83–93.
8. Kuryliak A., Skaskiv O., Tsvigun V. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *Mat. Stud.* 2016. V. 46. № 2. P. 121–129.
9. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. *Буковин. мат. журн.* 2017. Т. 5. № 3–4. С. 90–97.
10. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Абсциси збіжності випадкових кратних рядів Діріхле. *Прикарпат. Вісн. НТШ. Число.* 2018. Т. 1. № 45. С. 26–36.
11. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Skaskiv S.R. Wiman's type inequality and Levy's phenomenon for random analytic functions in the unit disc. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 41–42.
12. Sharovalovska L.O., Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Wiman's type inequality for some double power series. *International conference "Complex analysis and related topics"* (Lviv, 23–28 September, 2013). Abstracts, Lviv, 2013. P. 71.
13. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей"* (Ворохта, 24 лютого – 2 березня, 2014 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2014. Р. 72–73.
14. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Нерівність типу Вімана для функцій аналітичних у полікрузі. *Міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від народження Ганса Гана* (Чернівці, 30 червня – 5 липня, 2014 року). Тези доповідей, Чернівці, 2014. Р. 234–235.
15. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових аналітичних в одиничному бікрузі функцій. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 25 лютого – 1 березня, 2015 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2015. С. 37–38.

16. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. Про нерівність типу Вімана для випадкових функцій аналітичних в полікрузі. *Наукова конф. присв. 100-річчю К.М. Фішмана та М.К. Фаге* (Чернівці, 1–4 липня, 2015 року). Тези доповідей, Чернівці, 2015. С. 63–64.
17. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Zikrach D.Yu. On the Borel's type relation for Laplace-Stieltjes integrals. *International V. Skorobohatko mathematical conference* (Drohobych, 25–28 August, 2015). Abstracts, Drohobych, 2015. P. 90.
18. Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Tsvigun V.L. Levy's phenomenon for analytic functions in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. *International conference "Complex Analysis and Related Topics"* (Lviv, 30 May – 4 June, 2016). Abstracts, Lviv, 2016. P. 53–54.
19. Куриляк А., Скасків О., Цвігун Л. Нерівність Вімана для аналітичних функцій в $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Друга Всеукр. наук. конф. "Прикладні задачі математики"* (Івано-Франківськ, 13–15 жовтня, 2016 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2016. С. 11–12.
20. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Цвігун В.Л., Шаповаловська Л.О. Нерівність Вімана для функцій аналітичних у полікрузі з швидко осцилюючими коефіцієнтами. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 98–99.
21. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками. *Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу"* (Ворохта, 22–25 лютого, 2017 року). Тези доповідей, Івано-Франківськ, 2017. С. 12–13.
22. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. The abscissa of absolute convergence of Dirichet series with randon exponents. *International conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach* (Lviv, 18–23 September, 2017). Abstracts, Lviv, 2017. P. 136–137.

ЗМІСТ

Анотація	2
Abstract	8
Перелік умовних позначень	20
Вступ	28
Розділ 1. Вихідні положення, огляд літератури та основні напрямки дослідження	37
1.1. Огляд відомих результатів, які відносяться до тематики дисертаційного дослідження	37
1.2. Основні напрямки та результати дослідження	59
1.2.1. Нерівність типу Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної	59
1.2.2. Ефект Леві та нерівність Вімана для аналітичних функцій у кратно-кругових областях Рейнхарда	62
1.2.3. Нерівність Бітляна–Гольдберга для лакунарних рядів за однорідними поліномами та нерівність Вімана для кратних рядів Діріхле	73
1.2.4. Асимптотичні властивості ймовірності відсутності нулів для випадкових цілих та аналітичних функцій	79
1.2.5. Асимптотичні властивості інтегралів Лапласа–Стілт’єса	82
Розділ 2. Нерівність типу Вімана для аналітичних та випадкових аналітичних функцій від однієї змінної	96
2.1. Нерівність типу Вімана для цілих та аналітичних функцій і h -міри виняткової множини	96
2.2. Субгаусові випадкові величини і ефект Леві для цілих лакунарних функцій	100
2.3. Нерівність Вімана для аналітичних функцій та субгаусові випадкові величини	108
Розділ 3. Ефект Леві та нерівність Вімана для аналітичних функцій у кратно-кругових областях Рейнхарда	115
3.1. Нерівність Вімана у кратно-круговій області Рейнхарда	115
3.2. Аналітичні функції в кратно-кругових областях: ефект Леві і виняткові множини	125

3.3. Нерівність типу Вімана для степеневих рядів з швидко коливними коефіцієнтами в кратно-кругових областях Рейнхарда	133
3.4. Випадкові цілі функції багатьох змінних та нерівність Вімана	135
3.5. Ефект Леві для функцій аналітичних у полікрузі	147
3.6. Нерівність типу Вімана для кратних степеневих рядів у необмеженій циліндричній області	157
 Розділ 4. Нерівності типу Бітляна–Гольдберга для лакунарних рядів за одно- рідними поліномами та нерівність Вімана для кратних рядів Діріхле	178
4.1. Нерівність Бітляна–Гольдберга для цілих функцій і діагональний ма- ксимальний член	178
4.2. Нерівність типу Вімана для цілих кратних рядів Діріхле з довільни- ми комплексними показниками	187
 Розділ 5. Асимптотичні властивості розподілу нулів випадкових аналітичних функцій	200
5.1. Асимптотичні властивості ймовірність відсутності нулів для випадко- вих цілих функцій	200
5.2. Ймовірність відсутності нулів для випадкових аналітичних функцій в одиничному крузі	215
 Розділ 6. Асимптотичні властивості інтегралів Лапласа–Стілт’єса	230
6.1. Про співвідношення Бореля для інтегралів Лапласа–Стілт’єса	230
6.2. Про зростання інтегралів Лапласа–Стілт’єса	237
6.3. Банахові простори та простори Фреше інтегралів Лапласа–Стілт’єса	253
 Висновки	266
 Список використаних джерел	268
 Додаток А	282