УДК 517.957

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЗБУРЕНОГО НЕЛІНІЙНИМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ДОДАНКОМ

Т.П. Гой

T.P. Goy. *The problem with nonlocal conditions for partial differential equation perturbed by a nonlinear integro-differential summand*, Matematychni Studii, **8**(1997) 71–78.

Well-posedness of classical solution of the problem with nonlocal two-point conditions for typeless linear partial differential operator with variable by x coefficients perturbed by a nonlinear integro-differential operator in a tube domain is investigated.

1. Дана стаття є розвитком робіт [1,2]. У ній досліджено питання класичної коректності задачі з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t і умовами типу умов Діріхле за змінними $x_1, ..., x_p$ для безтипних рівнянь з частинними похідними зі змінними за x коефіцієнтами, збурених нелінійним інтегро-диференціальним доданком, у циліндрі, основою якого є довільна обмежена область із гладкою межею.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\hat{s} = (s_0, s_1, ..., s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$, $|s| = s_1 + ... + s_p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + ... + s_p$, $G \subset \mathbb{R}^p$ — обмежена область із гладкою межею ∂G, $Q = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in G\}$; $C^{(l,m)}(\overline{Q})$ — банахів простір функцій $u(t,x)$, які l разів неперервно диференційовні за змінною t і m разів — за змінною x, з нормою

$$\left\|u(t,x)\right\|_{C^{(l,m)}(\overline{Q})} = \sum_{s_0=0}^{l} \sum_{|s|\le m} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left| \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$\mathrm{C}^{q+\nu}$ — клас визначених в області $\overline{G}$ функцій, q-ті похідні яких задовольняють в $\overline{G}$ умову Єельдера з показником ν, $0 < \nu < 1$; $\mathrm{A}^{q+\nu}$ — клас замкнених областей таких, що функції, які задають у локальних координатах рівняння межевих поверхонь цих областей, належать класу $C^{q+\nu}$.

2. В області Q розглянемо задачу

$$Pu \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{h} a_{jq} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j (-L)^q u(t,x) =$$

$$= f(t,x) + \varepsilon \int_G K(t,x,y) F(t,y,\overline{u}(t,x))\, dy, \quad (1)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35G21.

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{h} b_{jq}^{(l)}\,(-L)^q\left(\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T}\right) = 0, \quad l = 1,...,n, \tag{2}$$

$$L^j u(t,x)\big|_{\partial G} = 0, \quad j = 0,1,...,h-1, \tag{3}$$

де $a_{jq}, b_{jq}^{(l)} \in \mathbb{C}$, $\mu, \varepsilon \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $L \equiv \sum_{i,j=1}^{p} \partial/\partial x_j\big(p_{ij}(x)\partial/\partial x_j\big) - q(x)$ — самоспряжений еліптичний в $\overline{G}$ оператор з дійснозначними коефіцієнтами $p_{ij}(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) > 0$; $\overline{u}(t,x) = \big\{\partial^{|\hat{s}|}u(t,x)/\partial t^{s_0}\partial y_1^{s_1}\ldots\partial y_p^{s_p}, \quad s_0 \leq n, |s| \leq 2h\big\}$; функція $K(t,x,y)$ визначена в області $Q_1 = \big\{(t,x,y) : (t,x) \in \overline{Q}, y \in \overline{G}\big\}$ і неперервна за змінними t,y; функція $F(t,y,\overline{u})$ визначена і неперервна за змінними $t,y,\overline{u}$ в області $Q_2 = \big\{(t,y,\overline{u}) : (t,y) \in \overline{Q}, u(t,x) \in \Omega\big\}$, де $\Omega = \big\{u(t,x) \in C^{(n,2h)}(\overline{Q}) : \|u - u^0\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \leq r\big\}$, $u^0 \equiv u^0(t,x)$ — розв'язок незбуреної задачі (1)-(3) (коли $\varepsilon = 0$); крім цього функція $F\big(t,y,\overline{u}(t,y)\big)$ задовольняє в області Q_2 умову Ліпшиця відносно всіх компонент вектора $\overline{u}(t,u)$:

$$\big|F\big(t,y,\overline{u}_2(t,y)\big) - F\big(t,y,\overline{u}_1(t,y)\big)\big| \leq$$
$$\leq \theta \sum_{s_0\leq n}\sum_{|s|\leq 2h}\left|\frac{\partial^{|\hat{s}|}u_2(t,y)}{\partial t^{s_0}\partial y_1^{s_1}...\partial y_p^{s_p}} - \frac{\partial^{|\hat{s}|}u_1(t,y)}{\partial t^{s_0}\partial y_1^{s_1}...\partial y_p^{s_p}}\right|. \tag{4}$$

Припустимо, що $p_{ij}(x) \in C^{2h-1+\nu}$, $i,j = 1,...,p$, $q(x) \in C^{2h-2+\nu}$, $\overline{G} \in A^{2h+\nu}$. На тип оператора P обмежень не накладається.

Позначимо через $\{X_k(x)\}$ і $\Lambda = \{\lambda_k\}, k \in \mathbb{N}$, відповідно множини власних функцій та власних значень задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)\Big|_{\partial G} = 0. \tag{5}$$

При зроблених вище припущеннях відносно області G та коефіцієнтів оператора L функції $X_k(x) \in C^{2h}(\overline{G}), k \in \mathbb{N}$, утворюють ортогональну і повну в просторі $L_2(G)$ систему (будемо вважати, що вона є ортонормована); при цьому справедливі оцінки [3,4]:

$$\overline{c}_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq c_0 k^{2/p}, \quad 0 < \overline{c}_0 \leq c_0, \tag{6}$$

$$\max_{x\in\overline{G}} |X_k^{(j)}(x)| \leq c_1 \lambda_k^{p/4+j/2}, \quad c_1 = c_1(j), \quad j = 0,1,...,2h. \tag{7}$$

Нехай функції $f(t,x)$ і $K(t,x,y)$ як функції змінної x (при довільних фіксованих значеннях решти змінних) належать простору $L_2(G)$. Тоді

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x), \qquad K(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(t,y)X_k(x),$$

де $f_k(t) = \int\limits_G f(t,x)X_k(x)\,dx$, $K_k(t,y) = \int\limits_G K(t,x,y)X_k(x)\,dx$.

Всюди нижче вважаємо виконаними обмеження накладені на K, F і т. п., які описані у п. 2.

3. Розглянемо спочатку незбурену задачу (1)–(3). °ї розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) X_k(x). \tag{8}$$

Якщо ряд (8) і ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними $x_1, ..., x_p$ до порядку $2h$ включно, рівномірно збігаються в області $\overline{Q}$, то функція $u^0(t,x)$, визначена формулою (8), задовольняє умови (3). Кожна з функцій $u_k^0(t), k \in \mathbb{N}$, є відповідно розв'язком такої нелокальної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^n u_k^0(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{h} a_{jq} \lambda_k^q \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j} = f_k(t), \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{h} b_{jq}^{(l)} \lambda_k^q \left(\frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j}\bigg|_{t=0} - \mu\, \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j}\bigg|_{t=T} \right) = 0, \quad l = 1, ..., n. \tag{10}$$

Припустимо, що для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ всі корені $\eta_j(\lambda_k)$, $j = 1, ..., n$, рівняння

$$\eta^n + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{h} a_{jq} \lambda_k^q \eta^j = 0 \tag{11}$$

попарно різні та відмінні від нуля (результати можуть бути перенесені також на випадок кратних коренів рівняння (11)). Тоді однорідне рівняння

$$\frac{d^n u_k^0(t)}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{h} a_{jq} \lambda_k^q \frac{d^j u_k^0(t)}{dt^j} = 0 \tag{12}$$

має таку фундаментальну систему розв'язків: $u_{kj}^0(t) = \exp\Big(\eta_j(\lambda_k) t\Big)$, $j = 1, ..., n$, а характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k)$ задачі (10),(12) обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = D(\lambda_k) \prod_{j=1}^{n} \Big(1 - \mu \exp(\eta_j(\lambda_k) T)\Big) \prod_{1 \le m < l \le n} \Big(\eta_l(\lambda_k) - \eta_m(\lambda_k)\Big), \tag{13}$$

де

$$D(\lambda_k) = \det \left\| \sum_{q=0}^{h} b_{jq}^{(l+1)} \lambda_k^q \right\|_{l,j=0}^{n-1}.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку незбуреної задачі (1)–(3) у просторі* $C^{(n,2h)}$ $(\overline{Q})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \quad 1 - \mu \exp\Big(\eta_j(\lambda_k) T\Big) \ne 0, \; j = 1, ..., n; \quad D(\lambda_k) \ne 0. \tag{14}$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [5,розд.2] і випливає з теореми про єдиність розвинення функції з простору $L_2(G)$ у ряд за повною системою ортогональних функцій.

Зауважимо, що з рівняння (11) випливають такі оцінки:

$$\Big|\eta_j(\lambda_k)\Big| \le \alpha\lambda_k^h,\ j=1,...,n, \quad \lambda_k\in\Lambda, \alpha>0. \tag{15}$$

4. Розглянемо питання про існування розв'язку незбуреної задачі (1)-(3). Нехай виконуються умови (14). Тоді для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ існує єдина функція Єріна $G_k(t,\tau)$ задачі (10),(12), за допомогою якої розв'язок задачі (9),(10) зображається у вигляді

$$u_k^0(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau. \tag{16}$$

У квадраті $K_T=\Big\{(t,\tau)\in\mathbb{R}_+^2 : 0\le t,\tau\le T\Big\}$, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, визначаються формулами:

$$G_k(t,\tau)=\sum_{j=1}^n \exp\Big(\eta_j(\lambda_k)(t-\tau)\Big)\prod_{\substack{q=1\\ q\ne j}}^n\Big(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big(\mathrm{sign}(t-\tau)+(1+\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T))\Big/(1-\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T))\Big)\Big/2,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

На стороні $\tau=0\,(\tau=T)$ квадрату K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{N}$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

Розв'язок незбуреної задачі (1)–(3) формально зображається рядом

$$u^0(t,x)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\,X_k(x), \tag{18}$$

збіжність якого, взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази $1-\mu\exp\big(\eta_j(\lambda_k)T\big)$, $\prod\big\{\big(\eta_j(\lambda_k)-\eta_q(\lambda_k)\big)\mid q=1,\dots,n, q\ne j\big\}$, $j=1,...,n$, що входять знаменниками у формулу (17), можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченної множини $\lambda_k\in\Lambda$.

Введемо функціональні простори, які будемо використовувати при дослідженні розв'язності задачі (1)–(3):

$$B_q^\omega=\Big\{\varphi(x)\in L_2(G) : \varphi(x)=\sum_{k=1}^\infty\varphi_kX_k(x), \|\varphi\|_{q,\omega}=\sum_{k=1}^\infty|\varphi_k|\exp\Big(qk^\omega\Big)<\infty\Big\}, q,\omega>0;$$

$C([0,T],B_q^\omega)$ — простір функцій $v(t,x)$, які визначені і неперервні в області $\overline{Q}$ і для кожного $t\in[0,T]$ належать B_q^ω,

$$\Big\|v(t,x)\Big\|_{C\big([0,T],B_q^\omega\big)}=\sum_{k=1}^\infty\max_{t\in[0,T]}\Big|v_k(t)\Big|\exp\Big(qk^\omega\Big);$$

$C(\overline{Q},B_q^\omega)$ — простір функцій $w(t,x,y)$, які визначені і неперервні в області $\overline{Q}\times\overline{G}$ і для кожної точки $(t,y)\in\overline{Q}$ належать B_q^ω,

$$\Big\|w(t,x,y)\Big\|_{C\big(\overline{Q},B_q^\omega\big)}=\sum_{k=1}^\infty\max_{(t,y)\in\overline{Q}}\Big|w_k(t,y)\Big|\exp\Big(qk^\omega\Big),$$

де $w_k(t,y)=\int\limits_G w(t,x,y)X_k(x)\,dx$.

Теорема 2. *Нехай існують додатні сталі $m_1, m_2, \gamma_1, \gamma_2$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності*

$$\Big|1 - \mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T))\Big| \geq m_1\lambda_k^{-\gamma_1}\exp(-|\operatorname{Re}\,\eta_j(\lambda_k)|T), \quad j = 1, ..., n, \tag{19}$$

$$\prod_{\substack{q=1\\ q\neq j}}^{n}\Big|\eta_j(\lambda_k) - \eta_q(\lambda_k)\Big| \geq m_2\lambda_k^{-\gamma_2}, \quad j = 1, ..., n, \tag{20}$$

і нехай $f(t,x) \in C\big([0,T], B_\beta^{2h/p}\big)$, де $\beta > 3\alpha T c_0^h$. Тоді існує єдиний розв'язок незбуреної задачі (1)–(3) з простору $C^{(n,2h)}(\overline{Q})$, який неперервно залежить від функції $f(t,x)$.

Доведення. Використовуючи формулу (17) та оцінки (6),(7),(15),(19),(20), на основі формули (18) одержуємо таку оцінку:

$$\Big\|u^0(t,x)\Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} = \sum_{s_0=0}^{n}\sum_{|s|\leq 2h}\max_{(t,x)\in\overline{Q}}\Big|\frac{\partial^{|\hat{s}|}}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}...\partial x_p^{s_p}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_O^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau X_k(x)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s_0=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\Big|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_O^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\Big|\sum_{|s|\leq 2h}\max_{x\in\overline{G}}\Big|\partial^{|s|}X_k(x)\Big/\partial x^{|s|}\Big| \leq$$

$$\leq c_2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{f}_k k^{2(p/4+h+\gamma_1+\gamma_2+hn)/p}\exp(3\alpha T c_0^h k^{2h/p}), \tag{21}$$

де $\bar{f}_k = \max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$, $c_2 = c_1 c_0^{p/4+h}T(m_1m_2)^{-1}(\max(1,|\mu|)c_0^{\gamma_1+\gamma_2}n(1+\alpha c_0^h + ... + \alpha^n c_0^{hn}) + m_1m_2)\sum_{j=0}^{2h-1}\frac{(p+j)!}{(j+1)!}$. Зауважимо, що для довільних $\sigma \geq 0, \rho > 0$ справджується нерівність

$$q^\sigma \leq c_3\exp(\rho q), \quad c_3 = c_3(\sigma) > 0,\ q \geq 0. \tag{22}$$

Виберемо $\rho = \beta - 3\alpha T c_0^h$. Тоді з оцінок (21),(22) одержуємо

$$\Big\|u^0(t,x)\Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \leq c_2\sum_{k=1}^{\infty}\overline{f}_k\Big(k^{2h/p}\Big)^{n+1+(p/4+\gamma_1+\gamma_2)/h}\exp\Big(3\alpha T c_0^h k^{2h/p}\Big) \leq$$

$$\leq c_2c_3\sum_{k=1}^{\infty}\overline{f}_k\exp\Big((\rho + 3\alpha T c_0^h)k^{2h/p}\Big) = c_2c_3\Big\|f(t,x)\Big\|_{C\left([0,T],B_\beta^{2h/p}\right)} < \infty. \tag{23}$$

З оцінки (23) випливає доведення теореми.

5. Проаналізуємо можливість виконання оцінок (19),(20).

Лема. *Нехай $\Phi(\lambda_k)$ — обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність*

$$\big|\Phi(\lambda_k) - Td/\lambda_k^h\big| \geq \lambda_k^{-p/2-h-\delta}, \quad 0 < \delta < 1,$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) пар (λ_k, d), $\quad \lambda_k \in \Lambda, d \in \mathbb{Z}$.

Доведення леми проводиться за схемою доведення леми 2.4 з [5,розд.1].

Теорема 3. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівності (19) виконуються при $\gamma_1 > p/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.*

Доведення. Використовуючи нерівність $\sin x \geq 2x/\pi$, яка справедлива для всіх $x \in [0, \pi/2]$, одержуємо

$$\left|1 - \mu\exp\bigl(\eta_j(\lambda_k)T\bigr)\right| \geq |\mu|\exp\bigl(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\bigr)\left|\sin(\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T)\right| \geq$$
$$\geq 2|\mu|\exp\bigl(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\bigr)\left|(\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T)/\pi - d_j(\lambda_k)\right|, \quad j = 1, ..., n, \quad (24)$$

де $\psi = \arg\mu$, а $d_j(\lambda_k)$ — ціле число, для якого $|(\psi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T)/\pi - d_j(\lambda_k)| \leq 1/2$.

На підставі леми та оцінок (6),(24) знаходимо, що для всіх (крім скінченного числа) $\lambda_k \in \Lambda$ і для майже всіх чисел $T > 0$ справджуються оцінки

$$\left|1{-}\mu\exp(\eta_j(\lambda_k)T)\right| \geq |\mu|/T\lambda_k^h\exp\Bigl(\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)T\Bigr)\left|\frac{\psi T/\pi + \operatorname{Im}\eta_j(\lambda_k)T^2/\pi}{\lambda_k^h} - \frac{Td_j(\lambda_k)}{\lambda_k^h}\right| \geq$$

$$\geq |\mu|/T\lambda_k^{-p/2-\delta}\exp\Bigl(-|\operatorname{Re}\eta_j(\lambda_k)|T\Bigr), \quad j = 1, ..., n.$$

Теорему доведено.

Позначимо через $\omega = (\omega_1, ..., \omega_\xi)$ вектор, складений з дійсних та уявних частин коефіцієнтів рівняння (1), де ξ — число цих коефіцієнтів.

Теорема 4. *Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^\xi$) векторів ω нерівності (20) виконуються при $\gamma_2 > (n-1)\bigl(p/2 + h(n-3)\bigr)/2$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$.*

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 6 з [6].

6. Розглянемо тепер збурену задачу (1)–(3). °ї розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x), \quad (25)$$

де сукупність коефіцієнтів $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, визначається як розв'язок крайової задачі для такої нескінченної системи інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{c} u_k^{(n)}(t) + \sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{q=0}^{h} a_{jq}\lambda_k^q u_k^{(j)}(t) = f_k(t) + \varepsilon\int\limits_G K_k(t, y)F\Bigl(t, y, \overline{u}(t, y)\Bigr)\,dy, \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{q=0}^{h} b_{jq}^{(l)}\lambda_k^q\left(u_k^{(j)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T)\right) = 0, \quad l = 1, ..., n. \end{array}\right\} \quad (26)$$

За допомогою функцій Єріна $G_k(t, \tau)$, $k \in \mathbb{N}$, визначених формулою (17), задачу (26) зводимо до еквівалентної їй системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$u_k(t) = u_k^0(t) + \varepsilon\int_Q G_k(t, \tau)K_k(\tau, y)F\Bigl(\tau, y, \overline{u}(\tau, y)\Bigr)\,dyd\tau, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Враховуючи формули (8),(18),(27), для знаходження розв'язку задачі (1)–(3) одержуємо рівняння

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \int_Q G_k(t,\tau) K_k(\tau,y) F\Big(\tau, y, \overline{u}(\tau,y)\Big)\, dyd\tau X_k(x). \qquad (28)$$

Таким чином, якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) K_k(\tau,y) X_k(x) \qquad (29)$$

рівномірно збігається в області $\overline{Q} \times \overline{Q}$ до деякої функції $\Phi(t,x,\tau,y)$, то задача (1)–(3) еквівалентна такому інтегро-диференціальному рівнянню:

$$u(t,x) = u^0(t,x) + \varepsilon \int_Q \Phi(t,x,\tau,y) F\big(\tau, y, \overline{u}(\tau,y)\big)\, dyd\tau. \qquad (30)$$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 2 і* $K(t,x,y) \in C\big(\overline{Q}, B_\beta^{2h/p}\big)$, *де* $\beta > 3\alpha T c_0^h$. *Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел* T, *векторів* ω *і для всіх* $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_0$, *існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3), який належить кулі* $\Omega \subset C^{(n,2h)}(\overline{Q})$ *і неперервно залежить від функції* $f(t,x)$, *де*

$$\varepsilon_0 = \min\Big(\frac{r}{E\overline{F}}, \frac{1}{\theta E}\Big), E = c_2 c_3\, mesG \Big\| K(t,x,y) \Big\|_{C\left(\overline{Q}, B_\beta^{2h/p}\right)}, \overline{F} = \max_{Q_2} \big| F\big(t, x, \overline{u}(t,x)\big)\big|.$$

Доведення. Запишемо рівняння (30) у вигляді

$$u(t,x) = I_{u^0}[u(t,x)],$$

де I_v — інтегро-диференціальний оператор

$$I_v[u(t,x)] \equiv v(t,x) + \varepsilon \int_Q \Phi(t,x,\tau,y) F\big(\tau, y, \overline{u}(\tau,y)\big)\, d\tau dy, \qquad (31)$$

що діє в кулі Ω. Позначимо через V сукупність функцій $v(t,x) \in C^{(n,2h)}(\overline{Q})$, для яких

$$\big\| v(t,x) - u^0(t,x) \big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le r_0 = r - |\varepsilon| E\overline{F},$$

і покажемо, що для довільної функції $v(t,x) \in V$ оператор I_v переводить кулю Ω у себе. Дійсно, враховуючи формулу (17) та оцінки (6),(7),(15),(19),(20), на основі формули (31) одержуємо

$$\big\| I_v[u(t,x)] - u^0(t,x) \big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le \big\| v(t,x) - u^0(t,x) \big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} +$$

$$+|\varepsilon| \Big\| \int_Q \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) K_k(\tau,y) F(\tau, y, \overline{u}(\tau,y))\, d\tau dy X_k(x) \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le r_0 + |\varepsilon| E\overline{F} = r.$$

Покажемо, що оператор I_v — оператор стиску. Нехай $u_1(t,x)$, $u_2(t,x) \in \Omega$, $v(t,x) \in V$. Тоді

$$\Big\| I_v[u_2(t,x)] - I_v[u_1(t,x)] \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} = |\varepsilon| \Big\| \int_Q \Phi(t,x,\tau,y) \Big(F(\tau,y,\overline{u}_2(\tau,y)) -$$
$$- F(\tau,y,\overline{u}_1(\tau,y)) \Big) \, d\tau dy \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le |\varepsilon| \theta \Big\| u_2(t,x) - u_1(t,x) \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \times$$
$$\times \Big\| \int_Q \Phi(t,x,\tau,y) \, d\tau dy \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})} \le |\varepsilon| \theta E \Big\| u_2(t,x) - u_1(t,x) \Big\|_{C^{(n,2h)}(\overline{Q})}.$$

Неперервність оператора I_v за v очевидна. Згідно з теоремами 1 і 3 з [7,розд.16,§1] рівняння (30) має єдиний розв'язок, що неперервно залежить від функції $f(t,x)$. Зауважимо, що умови, накладені на функцію $K(t,x,y)$, забезпечують рівномірну збіжність ряду (29) в області $\overline{Q} \times \overline{Q}$ для майже всіх чисел T і векторів ω. Цим самим теорему доведено.

Зауваження. Розв'язок задачі (1)–(3) можна шукати як границю послідовності $\{u_q(t,x)\}$, де $u_0 = u^0(t,x), \quad u_{q+1} = I_{u^0}[u_q(t,x)], q \in \mathbb{N}; \quad I_{u^0}$ — інтегральний оператор, визначений формулою (31).

Теорема 6. *Нехай виконані всі умови теореми 5, крім умови (4). Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $T > 0$, векторів ω і для всіх $\varepsilon, |\varepsilon| < r/(E\overline{F})$, існує единий розв'язок задачі (1)-(3), який належить кулі Ω.*

Доведення теореми проводиться за допомогою принципу нерухомої точки Шаудера [7, розд.16,§3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Пташник Б.И., Полищук В.Н. *Периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа* // Proc. 8-th intern. conf. nonlinear oscillations, Prague, Sept. 11-th-15-th, 1978. Prague: Academia, 1979, V.2, P.1017–1022.
2. Пташник Б.И., Полищук В.Н., Илькив В.С. *Задачи с нелокальными краевыми условиями для дифференциальных уравнений в частных производных* // XI Междунар. конф. по нелинейн. колебаниям (Киев, авг.-сент.1981 г.): Тез.докл. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1981, С.262–263.
3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.-М.:Наука, 1983. -424с.
4. Ильин В.А., Шишмарев И.А. *Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных* // Изв. АН СССР. Сер.мат., 1960. Т.24. С.883–896.
5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - К.: Наук.думка, 1984.-264с.
6. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. *Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами* //Дифференц.уравнения. 1977. Т.13. №4. С.637–645.
7. Канторович Л.В, Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.:Наука,1977.-724с.

Івано- Франківськ, Прикарпатський університет

e-mail : shyichuk@ched.stefanyk.ivano-frankivsk.ua

Надійшло 9.01.97
Після переробки 15.04.97