

Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В.

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний
посібник для студентів напрямів підготовки “математика” та “прикладна
математика” вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-10274 від 14. 12. 2009 р.).*

Івано-Франківськ
2010

УДК 519.62: 519.63

ББК 22.193.2

Г 55

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як
навчальний посібник для студентів напрямів підготовки
“математика” та “прикладна математика”
вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-10274 від 14. 12. 2009 р.).*

Рецензенти:

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор
(Національний університет «Львівська політехніка»).

Черевко І.М., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький
національний університет імені Юрія Федьковича),

Боднар Д.І., доктор фізико-математичних наук, професор
(Тернопільський національний економічний університет),

Г55 Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В. Наближені методи розв’язування диференціальних рівнянь. Навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “математика” та “прикладна математика” . – Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ Центру інформаційних технологій Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2010. – 148 с.

У посібнику розглядаються основні методи наближеного розв’язування задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, числові та варіаційні методи розв’язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними другого порядку. Наведені приклади розв’язування конкретних задач кожним із пропонованих методів. Пропонуються також задачі для самостійного розв’язування, які можуть бути використані при проведенні практичних занять.

Для студентів напрямів підготовки “математика” та “прикладна математика” вищих навчальних закладів III-IV рівнів акредитації.

ISBN 978-966-640-289-2

© *Гой Т.П., Копач М.І., Федак І.В., 2010.*

© Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2010.

РОЗДІЛ І.

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§ 1. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Нагадаємо деякі основні поняття з курсу звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної

$$y' = f(x, y). \quad (1.1)$$

Задача Коші для рівняння (1.1) полягає у знаходженні такого розв'язку $y = y(x)$, який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.2)$$

Задача Коші (1.1), (1.2) має єдиний розв'язок, наприклад, за виконання умов теореми Пікара (див., наприклад, [16], § 1.2).

Теорема 1.1 (Пікара). *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненому прямокутнику*

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad a > 0, b > 0$$

і задовольняє у ньому умову Ліпшица за змінною y , тобто існує така стала $L > 0$, що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (1.3)$$

для будь-яких точок $(x, y_1) \in Q$, $(x, y_2) \in Q$, то існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (1.1), який задовольняє початкову умову (1.2). Цей розв'язок визначений і неперервно диференційований принаймні на відрізьку $|x - x_0| < h$, де

$$h = \min\{a, b/M\}, \quad M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|.$$

Умова (1.3), зокрема, виконується, якщо функція $f(x, y)$ в прямокутнику Q має обмежену частинну похідну $f'_y(x, y)$ ([16], § 1.2).

Задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.4)$$

полягає у знаходженні такого розв'язку $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.5)$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – задані числа.

Більшість числових методів, розроблених для розв'язування одного звичайного диференціального рівняння, легко узагальнюються на системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.6)$$

полягає у знаходженні розв'язку $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}, \quad (1.7)$$

де $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ – задані числа.

Систему, яка містить похідні вищих порядків і розв'язана відносно старших похідних шуканих функцій, введенням нових невідомих функцій можна звести до вигляду (1.6).

Зокрема, диференціальне рівняння (1.4) зводиться до системи вигляду (1.6) за допомогою заміни

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

При цьому нові функції y_1, y_2, \dots, y_n задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1.8)$$

Відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1.6), (1.7) дає така теорема ([8], розділ 1, § 1).

Теорема 1.2. *Нехай функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, \dots, n$, визначені і неперервні в замкненій області*

$$Q = \{ (x, y_1, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, |y_1 - y_{10}| \leq b, \dots, |y_n - y_{n0}| \leq b \}$$

та задовольняють у ній умови Ліпшица за змінними y_1, \dots, y_n , тобто

$$|f_k(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) - f_k(x, y_1, \dots, y_n)| \leq L \cdot \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - y_j|, \quad k = 1, \dots, n,$$

для будь-яких $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in Q$, $(x, y_1, \dots, y_n) \in Q$, де L – деяка додатна стала (стала Ліпшица). Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1.6), (1.7) $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, який визначений принаймні на інтервалі $|x - x_0| < h$, де

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Зауважимо, що замість умов Ліпшица достатньо вимагати обмеженості в області Q частинних похідних $\frac{\partial f_k}{\partial y_j}$, $k, j = 1, 2, \dots, n$. Тоді

можна прийняти, що $L = \max_{k,j} \left| \frac{\partial f_k}{\partial y_j} \right|$.

Надалі вважатимемо, що на проміжку, де шукається розв'язок, виконуються всі умови, які забезпечують його існування та єдиність. Водночас, у кожному конкретному випадку можуть накладатися додаткові умови, які враховують специфіку методу.

Враховуючи зв'язок між рівнянням (1.4) та системою (1.8), а також можливість запису системи (1.6) у вигляді векторного рівняння

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (1.9)$$

де $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, надалі обмежимося викладом методів лише для рівняння (1.1). Одержані при цьому формули легко можуть бути перенесені на відповідні векторні рівняння вигляду (1.9).

§ 2. Метод послідовних наближень

Розглянемо задачу Коші для рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.2)$$

Відомо, що задача знаходження розв'язку задачі (2.1), (2.2) рівносильна задачі знаходження неперервного розв'язку інтегрального рівняння

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.3)$$

Рівняння (2.3) будемо розв'язувати *методом послідовних наближень (методом ітерацій)*, який полягає у наступному.

Виберемо спочатку деяку функцію $y_0(x)$, яка задовольняє початкову умову (2.2). Цю функцію назвемо *нульовим (початковим) наближенням*. Потім підставимо $y_0(x)$ у праву частину формули (2.3) і матимемо *перше наближення*:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt.$$

Аналогічно, маючи перше наближення $y_1(x)$, знайдемо друге наближення $y_2(x)$ і так далі. У загальному випадку для n -го наближення одержуємо рекурентне співвідношення

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що якщо функція $f(x, y)$ в області Q , яка містить точку (x_0, y_0) , задовольняє умови теореми 1.1, то незалежно від вибору нульового наближення функціональна послідовність $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$ рівномірно збігається на відрізку $|x - x_0| \leq h$ до функції

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

яка є розв'язком задачі Коші (2.1), (2.2) (див., наприклад, [16], § 1.2).

Оцінимо похибку $\varepsilon_n(x)$ наближеного розв'язку $y_n(x)$

$$\varepsilon_n(x) = |y(x) - y_n(x)|,$$

використовуючи при цьому формули (2.3), (2.4) та умову Ліпшица (1.3):

$$\varepsilon_n(x) \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_{n-1}(t) dt, \quad (2.5)$$

де L – стала Ліпшица.

Враховуючи тепер початкове наближення $y_0(x) \equiv y_0$ та формулу Лагранжа про скінченний приріст, маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= |y(x) - y_0| = |y'(\xi)| \cdot |x - x_0| = \\ &= |f(\xi, y(\xi))| \cdot |x - x_0| \leq M |x - x_0|, \end{aligned}$$

де

$$M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)|.$$

Далі з (2.5) одержуємо

$$\varepsilon_1(x) \leq L \int_{x_0}^x \varepsilon_0(t) dt \leq LM \int_{x_0}^x |t - x_0| dt = LM \frac{(x - x_0)^2}{2!}.$$

Звідси встановлюємо оцінку похибки наближеного розв'язку $y(x)$ на відрізку $|x - x_0| \leq h$:

$$\varepsilon_n(x) \leq ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

де

$$h = \min \{a, b/M\}. \quad (2.7)$$

Приклад 2.1. Методом послідовних наближень знайти наближений розв'язок задачі Коші $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (2.3), замінимо задачу Коші інтегральним рівнянням

$$y(x) = \int_0^x (t + 2y^2) dt.$$

За початкове наближення візьмемо $y_0(x) \equiv 0$. За формулою (2.4) можемо знайти наступні послідовні наближення:

$$y_1(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{2} \right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} \quad \text{і т.д.}$$

Оцінимо похибку цих наближень. Оскільки права частина рівняння визначена і неперервна на всій площині, то в якості чисел a та b (параметрів області Q) можна взяти довільні додатні числа. Візьмемо для визначеності прямокутник

$$Q = \{(x, y) : |x| \leq 0,5, |y| \leq 0,5\}.$$

Тоді

$$M = \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)| = \max_{(x,y) \in Q} |x + 2y^2| \leq \max_{(x,y) \in Q} (|x| + 2y^2) \leq 1,$$

$$L = \max_{(x,y) \in Q} |f'_y(x, y)| = \max_{(x,y) \in Q} |4y| \leq 4 \max_{(x,y) \in Q} |y| \leq 2.$$

Згідно з умовою (2.7) виберемо $h = 0,5$. Таким чином, для знаходження розв'язку на відрізку $[-0,5; 0,5]$ з точністю, наприклад, до $0,01$, число n необхідно вибрати так, щоб виконувалась нерівність (2.6), тобто

$$\frac{2^n (0,5)^{n+1}}{(n+1)!} < 0,01.$$

Для цього досить взяти $n = 4$. ■

Зауважимо, що в окремих випадках методом послідовних наближень розв'язок задачі Коші можна знайти точно.

Приклад 2.2. Розв'язати задачу Коші $y' = x - y$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Виберемо $y_0(x) \equiv 1$. За формулою (2.4) послідовно знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t-1) dt = 1 - x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t-1 + t - \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}, \quad y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{120}.$$

За допомогою методу математичної індукції легко встановити, що

$$y_n(x) = 1 - x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, будемо мати

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 - x + 2(e^{-x} - (1-x)) = 2e^{-x} - 1 + x. \quad \blacksquare$$

Метод послідовних наближень можна застосовувати для розв'язування систем диференціальних рівнянь, а також для розв'язування рівняння n -го порядку, якщо його записати у вигляді системи.

Приклад 2.3. Методом послідовних наближень на відрізку

$[-0,5; 0,5]$ з точністю до $0,05$ знайти розв'язок системи $\begin{cases} y' = x + yz, \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$ з

початковими умовами $y(0) = 1, z(0) = 0,5$.

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді

$$y = 1 + \int_0^x (t + yz) dt, \quad z = \frac{1}{2} + \int_0^x (t^2 - y^2) dt.$$

Враховуючи початкові умови $y(0) = 1, z(0) = 0,5$, з заданої системи знаходимо $y'(0) = 0,5$ і $z'(0) = -1$, тому за початкові наближення $y_0(x), z_0(x)$ виберемо

$$y_0(x) = 1 + \frac{x}{2}, \quad z_0(x) = \frac{1}{2} - x.$$

Знайдемо наближення $y_1(x)$ і $z_1(x)$:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{6}x^3,$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - 1 - x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

Аналогічно одержуємо

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7,$$

$$z_2(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \frac{29}{960}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7.$$

Оцінимо тепер різниці $y_1(x) - y_2(x)$ і $z_1(x) - z_2(x)$ на відрізку $[-0,5; 0,5]$. Будемо мати:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| -\frac{7}{48}x^3 - \frac{5}{96}x^4 + \frac{11}{240}x^5 + \frac{11}{576}x^6 - \frac{1}{168}x^7 \right| \leq \\ &\leq |x^3| \cdot \left| \frac{7}{48} + \frac{5}{96}x + \frac{1}{168}x^4 \right| \leq 0,03, \end{aligned}$$

$$|z_1(x) - z_2(x)| = \left| -\frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{96}x^4 + \frac{29}{960}x^5 + \frac{1}{144}x^6 - \frac{1}{252}x^7 \right| \leq \\ \leq |x^3| \cdot \left| \frac{1}{12} + \frac{1}{252}x^4 \right| \leq 0,02.$$

Враховуючи, що доданки, які містять степені x вище третього, на вибраному відрізку є досить малими, то з точністю до 0,05 можна обмежитися лише трьома першими наближеннями, тобто

$$y(x) \approx 1 + 0,5x + 0,125x^2 - 0,312x^3, \quad z(x) \approx 0,5 - x - 0,5x^2 + 0,167x^3. \blacksquare$$

До наближеного розв'язування систем рівнянь можна звести розв'язування звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Приклад 2.4. Знайти два перші наближення розв'язку задачі Коші $y'' = xy$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Якщо позначити $y' = z$, то задану задачу Коші можна записати у вигляді системи $\begin{cases} y' = z, \\ z' = xy \end{cases}$ з початковими умовами

$y(0) = 1$, $z(0) = 1$. Оскільки з цієї системи випливає, що $z'(0) = 0$, то виберемо такі нульові наближення:

$$y_0(x) = 1 + x, \quad z_0(x) = 1.$$

Записуючи систему у вигляді

$$y(x) = 1 + \int_0^x z(t) dt, \quad z(x) = 1 + \int_0^x t y(t) dt,$$

знаходимо наступні наближення:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x, \quad z_1(x) = 1 + \int_0^x t(1+t) dt = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Тоді

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right) dt = 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4. \blacksquare$$

Відзначимо дві характеристики методу послідовних наближень, які можна віднести до його недоліків. По-перше, через проблеми з ефективним знаходженням первісних у явному вигляді рекурентні формули (2.4) не завжди можуть бути реалізовані. По-друге, цей метод є локальним, тобто придатним для наближеного розв'язку задачі Коші лише у малому околі початкової точки. Більше значення цей метод має для доведення існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Окрім цього, метод послідовних наближень буває необхідним для теоретичного дослідження інших методів наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, а також є допоміжним засобом для дослідження наближених методів, які застосовуються на порівняно більших відрізках інтегрування. Це, зокрема, відноситься до обчислення початкових значень шуканої функції у декількох точках при інтегруванні методом Адамса (§ 10).

§ 3. Метод степеневих рядів

Розв'язуючи наближено звичайні диференціальні рівняння першого порядку, а також рівняння вищих порядків, іноді використовують представлення шуканого розв'язку у вигляді ряду Тейлора, залишаючи у ньому певну кількість доданків.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.2)$$

Припустимо, що $f(x, y)$ є нескінченно диференційовною у деякому околі точки (x_0, y_0) . Тоді розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші (3.1), (3.2) є аналітичною функцією в деякому околі точки x_0 , тобто може бути розвинений у ряд Тейлора ([10], § 17):

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (3.3)$$

Тоді частинна сума цього ряду буде наближеним розв'язком задачі (3.1), (3.2).

Коефіцієнт $y(x_0)$ розвинення (3.3) одержуємо безпосередньо з початкової умови: $y(x_0) = y_0$. З рівняння (3.1) знаходимо коефіцієнт $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Диференціюючи рівняння (3.1) за змінною x , знаходимо, що $y'' = f'_x + f'_y \cdot y'$, а отже,

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

Повторюючи цей прийом крок за кроком, зможемо знайти значення наступних похідних у точці $x = x_0$, тобто коефіцієнти $y'''(x_0)$, ..., $y^{(n)}(x_0)$, ..., а отже, формально побудувати аналітичний розв'язок $y(x)$.

Метод степеневих рядів можна використовувати також для наближеного розв'язування рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.4)$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3.5)$$

у припущенні, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ аналітична в точці $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$.

При цьому з умов (3.5) безпосередньо визначаємо значення $y^{(j)}(x_0)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, які фігурують у перших n коефіцієнтах розвинення (3.3).

Значення $y^{(n)}(x_0)$ знайдемо з рівняння (3.4), підставляючи $x = x_0$ і використовуючи початкові умови (3.5):

$$y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}).$$

Для знаходження $y^{(n+1)}(x_0)$ потрібно здиференціювати (3.4):

$$y^{(n+1)}(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \cdot \frac{d y^{(k)}}{d x}, \quad (3.6)$$

підставити $x = x_0$ і використати початкові умови (3.5).

Диференціюючи (3.6), можемо знайти також наступні похідні, а отже, й їх значення у точці x_0 .

Метод степеневих рядів можна використовувати також для наближеного розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь. У цьому випадку у ряд Тейлора необхідно розвинути кожну з шуканих функцій, а потім послідовно визначити похідні однакового порядку для всіх функцій описаним вище способом. При цьому диференціювати доведеться кожне з рівнянь системи.

Приклад 3.1. Методом степеневих рядів знайти наближений розв'язок задачі Коші

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0. \quad (3.7)$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкової умови маємо $y(0) = 0$. З рівняння та початкової умови (3.7) одержуємо, що

$$y'(0) = 0 + 2y^2(0) = 0.$$

Диференціюючи обидві частини заданого рівняння, одержуємо

$$y'' = 1 + 4yy', \quad (3.8)$$

а отже, $y''(0) = 1 + 4y(0) \cdot y'(0) = 1$.

Диференціюючи послідовно обидві частини рівняння (3.8), знаходимо:

$$\begin{aligned}y''' &= 4(y')^2 + 4yy'', & y'''(0) &= 0, \\y^{(IV)} &= 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy''' = 12y'y'' + 4yy''', & y^{(IV)}(0) &= 0, \\y^{(V)} &= 12(y'')^2 + 16y'y''' + 4yy^{(IV)}, & y^{(V)}(0) &= 12.\end{aligned}$$

Якщо обмежитись першими шістьма членами розвинення, тобто степенями x до п'ятого степеня включно, то

$$y(x) \approx \frac{1}{2!}x^2 + \frac{12}{5!}x^5 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10},$$

що згідно з результатами прикладу 2.2 гарантує точність 0,1 на відрізку $[-0,5; 0,5]$. ■

У деяких випадках розв'язок диференціального рівняння методом степеневих рядів можна знайти точно.

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1. \quad (3.9)$$

Розв'язання. З рівняння та початкової умови знаходимо $y'(0) = 0 - y(0) = -1$. Диференціюючи рівняння з (3.9) і підставляючи $x = 0$, одержуємо:

$$\begin{aligned}y'' &= 1 - y', & y''(0) &= 1 - y'(0) = 2, \\y''' &= -y'', & y'''(0) &= -y''(0) = -2.\end{aligned}$$

У загальному випадку для $n \geq 3$ маємо:

$$y^{(n)} = -y^{(n-1)}, \quad y^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot 2.$$

Таким чином, використовуючи (3.3), знаходимо розв'язок:

$$\begin{aligned}y(x) &= 1 - x + 2 \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = \\&= 1 - x + 2(e^{-x} - (1 - x)) = 2e^{-x} - 1 + x,\end{aligned}$$

який визначений на всій числовій осі. ■

У багатьох випадках методом степеневих рядів можна знайти точний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

Розв'язок задачі Коші (3.1), (3.2) можна також шукати у вигляді степеневому ряду з невизначеними коефіцієнтами, тобто у вигляді

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (3.10)$$

Проілюструємо застосування такого варіанту методу степеневих рядів до задачі Коші (3.9).

Якщо $x_0 = 0$, то з умови $y(0) = 1$ знаходимо $a_0 = 1$. Отже, рівність (3.10) запишеться у вигляді

$$y(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (3.11)$$

Тоді $y'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$. Підставляючи знайдені вирази для y та y' у рівняння задачі (3.9), одержуємо тотожність

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \equiv x - (1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x , для відшукування коефіцієнтів a_k , $k = 1, 2, \dots$, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$a_1 = -1, 2, \quad a_2 = 1 - a_1, \quad 3a_3 = -a_2, \quad \dots, \quad na_n = -a_{n-1}, \quad \dots,$$

з якої послідовно можна знайти усі коефіцієнти розвинення (3.11) або обмежитися декількома першими членами такого розвинення.

Розглянемо тепер застосування степеневих рядів до розв'язування систем диференціальних рівнянь та рівнянь вищих порядків.

Приклад 3.3. Розв'язати наближено систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = x + yz, \\ z' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

з початковими умовами $y(0) = 1$, $z(0) = 0,5$, обмежившись для кожної функції чотирма членами розвинення у ряд Тейлора.

Розв'язання. Функції $y(x)$ і $z(x)$ шукаємо у вигляді степеневих рядів

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (3.12)$$

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!} \cdot x + \frac{z''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (3.13)$$

Безпосередньо з початкових умов знаходимо

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0,5.$$

Розв'язуючи задачу (2.3), було встановлено, що

$$y'(0) = 0,5, \quad z'(0) = -1.$$

Здиференціюємо тепер обидва рівняння системи за змінною x і підставимо в отримані вирази $x = 0$. Будемо мати:

$$y'' = 1 + y'z + yz', \quad y''(0) = \frac{1}{4},$$

$$z'' = 2x - 2yy', \quad z''(0) = -1.$$

Диференціюючи ще один раз, знаходимо

$$y''' = y''z + 2y'z' + yz'', \quad y'''(0) = -\frac{15}{8},$$

$$z''' = 2 - 2y'^2 - 2yy'', \quad z'''(0) = 1.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у ряди (3.12), (3.13), одержуємо остаточні наближені формули:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3,$$

$$z(x) \approx \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3. \blacksquare$$

Приклад 3.4. Знайти перші п'ять членів розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші $y'' = xy$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots$$

З умови $y(0) = 1$ знаходимо, що $a_0 = 1$.

Оскільки

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

то $a_1 = 1$.

Ще раз здиференціюємо одержану рівність і підставимо y та y'' у задане рівняння. Будемо мати:

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots = \\ & = x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots). \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x , для визначення решти коефіцієнтів a_n маємо систему

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 1, \quad 12a_4 = 1, \quad \dots, \quad n(n-1)a_n = a_{n-3}, \quad \dots$$

з якої, зокрема, знаходимо

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}.$$

Отже,

$$y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4. \quad \blacksquare$$

Для деяких числових методів інтегрування диференціальних рівнянь потрібно знайти значення шуканих функцій у декількох точках. Ці значення можуть бути знайдені за допомогою степеневих рядів. Таким чином, метод розвинення розв'язків у степеневі ряди може бути використаний як елемент більш ефективних числових методів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь, наприклад методу Адамса (§ 10), методу Мілна (§ 12) та деяких інших.

§ 4. Метод Чаплигіна двосторонніх наближень

Метод Чаплигіна є одним з найбільш точних аналітичних методів наближеного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Ідея цього методу полягає у тому, що шуканий розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння апроксимується двома послідовностями функцій $u_n(x)$ та $v_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, які для $x \in [x_0, X]$ задовольняють нерівності

$$u_n(x) \leq y(x) \leq v_n(x)$$

і початкові умови

$$u_n(x_0) = v_n(x_0) = y(x_0),$$

причому при $n \rightarrow \infty$ різниця $v_n(x) - u_n(x)$ рівномірно на $[x_0, X]$ прямує до нуля.

Геометрично це означає, що для $x \in [x_0, X]$ інтегральна крива потрапляє у деякий криволінійний сектор – вилку. При цьому вказується спосіб, за допомогою якого цю вилку можна звузити до потрібних розмірів.

Якщо покласти, наприклад, $y(x) \approx v_n(x)$, то похибка $\varepsilon_n(x)$ такого наближення $\varepsilon_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x)$, а отже, на кожному кроці її можна встановити безпосередньо.

Проілюструємо застосування цього методу до розв'язування задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.1)$$

Вважатимемо, що функція $f(x, y)$ неперервна разом з частинними похідними $f'_y(x, y)$, $f''_{y^2}(x, y)$ у деякому околі початкової точки (x_0, y_0) . Для точок з цього околу визначимо диференціальний оператор за формулою

$$A[z] = z' - f(x, z).$$

Лема (Чаплигіна). Якщо функція $u = u(x)$ задовольняє умови

$$A[u] \leq 0, \quad x_0 \leq x \leq X, \quad (4.2)$$

і

$$u(x_0) = y_0, \quad (4.3)$$

то на відрізку $[x_0, X]$ виконується нерівність

$$u(x) \leq y(x), \quad (4.4)$$

де $y(x)$ – розв'язок задачі (4.1).

Доведення. З (4.1) та (4.2) маємо $(y - u)' - (f(x, y) - f(x, u)) \geq 0$

або

$$(y - u)' - p(x)(y - u) \geq 0, \quad (4.5)$$

де

$$p(x) = \frac{f(x, y(x)) - f(x, u(x))}{y - u}. \quad (4.6)$$

Оскільки для тих x , де $y(x) = u(x)$, вираз (4.6) втрачає зміст, то у цьому випадку покладемо

$$p(x) \equiv \lim_{u \rightarrow y} \frac{f(x, y) - f(x, u)}{y - u} = f'_y(x, y(x)).$$

Визначена таким чином функція $p(x)$ є, очевидно, неперервною на всьому відрізку $[x_0, X]$.

Помножимо обидві частини нерівності (4.5) на $\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx}$ і запишемо одержану нерівність у вигляді

$$\frac{d}{dx} (\mu(x) \cdot (y(x) - u(x))) \geq 0. \quad (4.7)$$

Проінтегруємо (4.7) у межах від x_0 до x . Будемо мати:

$$\mu(x) \cdot (y(x) - u(x)) - \mu(x_0) \cdot (y(x_0) - u(x_0)) \geq 0. \quad (4.8)$$

Оскільки $y(x_0) = u(x_0)$ і $\mu(x) > 0$, то з (4.8) одержуємо (4.4). ►

Аналогічно можна довести, що якщо $A[v] \geq 0$, де $v = v(x)$, $x_0 \leq x \leq X$, і $v(x_0) = y_0$, то на відрізку $[x_0, X]$ справджується нерівність $y(x) \leq v(x)$.

Як наслідок з леми Чаплигіна одержуємо таке твердження.

Теорема 1.3 (Чаплигіна). *Якщо функції*

$$y = y(x), u = u(x), v = v(x)$$

на відрізку $[x_0, X]$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$y' = f(x, y), u' = f_1(x, u), v' = f_2(x, v) \quad (4.9)$$

відповідно, де $f_1(x, z) \leq f(x, z) \leq f_2(x, z)$, та задовольняють спільну початкову умову $y(x_0) = u(x_0) = v(x_0) = y_0$, то

$$u(x) \leq y(x) \leq v(x), \quad x \in [x_0, X]. \quad (4.10)$$

Не завжди вдається такими способами одержати відразу достатньо “вузькі” межі для розв'язку $y(x)$, а тому виникає потреба у покращенні цих меж. Чаплигін запропонував спосіб, як маючи знайдені наближення $u_0(x)$ і $v_0(x)$, одержати покращенні наближення $u_1(x)$ і $v_1(x)$.

Для цього припустимо, що $f''_{y^2}(x, y) \geq 0$, а функції $u_0 = u_0(x)$ і $v_0 = v_0(x)$ є такі, що

$$A[u_0] = -\varphi_0(x) \leq 0, \quad A[v_0] = \psi_0(x) \geq 0, \quad (4.11)$$

причому

$$u_0(x_0) = v_0(x_0) = y_0.$$

Наприклад, для функції $f(x, y)$, яка неперервна в області

$$Q = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}, \quad (4.12)$$

такими функціями можуть бути

$$u_0(x) = y_0 + m \cdot (x - x_0), \quad v_0(x) = y_0 + M \cdot (x - x_0),$$

де $m = \min_{(x,y) \in Q} f(x, y)$, $M = \max_{(x,y) \in Q} f(x, y)$.

Якщо при цьому $h = \min\{a, b/|m|, b/|M|\}$, то на відрізку $[x_0, x_0 + h]$ умови (4.11) будуть виконані.

Перейдемо тепер до уточнення наближень. Для цього позначимо

$$u_1(x) = u_0(x) + \rho_0(x), \quad v_1(x) = v_0(x) - \sigma_0(x),$$

де функції $\rho_0 = \rho_0(x)$ та $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ визначимо як розв'язки задач Коші

$$\rho_0' = p_0(x)\rho_0 + \varphi_0(x), \quad \rho_0(x_0) = 0, \quad (4.13)$$

$$\sigma_0' = q_0(x)\sigma_0 + \psi_0(x), \quad \sigma_0(x_0) = 0, \quad (4.14)$$

відповідно, де

$$p_0(x) = f'_y(x, u_0(x)), \quad q_0(x) = \frac{f(x, v_0(x)) - f(x, u_0(x))}{v_0(x) - u_0(x)}. \quad (4.15)$$

З (4.13), (4.14), використовуючи формулу для загального розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку ([16], § 1.6), одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{\int_{x_0}^x p_0(x) dx} \cdot \int_{x_0}^x \varphi_0(x) e^{-\int_{x_0}^x p_0(x) dx} dx, \quad (4.16)$$

$$\sigma_0(x) = e^{\int_{x_0}^x q_0(x) dx} \cdot \int_{x_0}^x \psi_0(x) e^{-\int_{x_0}^x q_0(x) dx} dx. \quad (4.17)$$

Оскільки функції $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$ невід'ємні, то з (4.16), (4.17) випливає, що $\rho_0(x) \geq 0$, $\sigma_0(x) \geq 0$, $x_0 \leq x \leq X$.

У [3] (розділ 3, § 13) доведено, що на відрізку $[x_0, X]$ справджуються нерівності $A[u_1] \leq 0$, $A[v_1] \geq 0$.

Таким чином, $u_1(x)$ і $v_1(x)$ є відповідно нижнім і верхнім наближенням до точного розв'язку u і утворюють вужчу вилку, ніж функції $u_0(x)$ і $v_0(x)$.

Зрозуміло, що описаний процес може бути продовжений. А саме, якщо відомі функції $u_n(x)$ та $v_n(x)$, то можна покласти

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \rho_n(x), \quad v_{n+1}(x) = v_n(x) - \sigma_n(x), \quad (4.18)$$

де функції $\rho_n(x)$, $\sigma_n(x)$ визначаються з задач

$$\rho'(x) = p_n(x)\rho_n + \varphi_n(x), \quad \rho_n(x_0) = 0, \quad (4.19)$$

$$\sigma'(x) = q_n(x)\sigma_n + \psi_n(x), \quad \sigma_n(x_0) = 0 \quad (4.20)$$

відповідно, де $\varphi_n(x) = -A[u_n]$, $\psi_n(x) = A[v_n]$,

$$p_n(x) = f'_y(x, u_n), \quad q_n(x) = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n}.$$

У результаті одержуємо дві функціональні послідовності

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq y, \quad y \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0.$$

Можна довести, що при $n \rightarrow \infty$ різниця $v_n - u_n$ досить швидко прямує до нуля. А отже, якщо $v_n - u_n < \varepsilon$, то наближено можна покласти

$$y \approx \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Якщо оцінювати похибку немає потреби, то можна обмежитися лише однією з послідовностей, покладаючи, наприклад, $y \approx u_n$.

Зауважимо, що у випадку, коли $f''_{y^2}(x, y) \leq 0$, функції u_n та v_n у попередніх викладках потрібно поміняти місцями.

Приклад 4.1. Методом Чаплигіна на відрізку $[0; 0,5]$ розв'язати задачу Коші

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0. \quad (4.21)$$

Розв'язання. Маємо $f(x, y) = x + 2y^2$, $f''_{y^2}(x, y) = 4 > 0$,

$$A[z] = z' - x - 2z^2.$$

Нехай $u_0(x) = 0$, $v_0(x) = x$. Тоді $A[u_0] = -x \equiv -\varphi_0(x) \leq 0$,

$A[v_0] = 1 - x - 2x^2 \equiv \psi_0(x) \geq 0$ для $x \in [0; 0,5]$

Далі знаходимо

$$p_0(x) = f'_y(x, u_0) = 4u_0 = 0,$$

$$q_0(x) = \frac{f(x, v_0) - f(x, u_0)}{v_0 - u_0} = \frac{(x + 2v_0^2) - (x + u_0^2)}{v_0 - u_0} = 2(u_0 + v_0) = 2x.$$

Використовуючи формули (4.16), (4.17), одержуємо

$$\rho_0(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &= e^{\int_0^x 2x dx} \cdot \int_0^x (1 - x - 2x^2) e^{-\int_0^x 2x dx} dx = e^{x^2} \cdot \int_0^x (1 - x - 2x^2) e^{-x^2} dx = \\ &= e^{x^2} \left(\int_0^x e^{-x^2} dx - \int_0^x x e^{-x^2} dx + \int_0^x x d(e^{-x^2}) \right) = \\ &= e^{x^2} \left(\int_0^x e^{-x^2} dx + \frac{1}{2} (e^{-x^2} - 1) + x e^{-x^2} - \int_0^x e^{-x^2} dx \right) = -\frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} + x. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad v_1(x) = x - \left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} e^{x^2} \right) = \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1).$$

Оцінимо різницю

$$v_1(x) - u_1(x) = \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1) - \frac{x^2}{2}.$$

Оскільки $(v_1(x) - u_1(x))' = x(e^{x^2} - 1) \geq 0$ для $x \in [0; 0,5]$, то

$$\max_{x \in [0; 0,5]} (v_1(x) - u_1(x)) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{4}} - 1 \right) - \frac{1}{8} \approx 0,017,$$

а отже, функція

$$y(x) \approx \frac{1}{2} (u_1(x) + v_1(x)) = \frac{1}{4} (e^{x^2} - 1 + x^2)$$

на відрізку $[0; 0,5]$ є наближенням розв'язку задачі (4.21) з точністю до 0,01. ■

Недоліком методу Чаплигіна є те, що він часто приводить до появи інтегралів, які не можуть бути знайдені у скінченному вигляді. У деяких випадках ці труднощі вдається подолати так, як це було зроблено при знаходженні функції $\sigma_0(x)$ з інтегралом $\int_0^x e^{-x^2} dx$ у прикладі 4.1. В інших випадках такі інтеграли доводиться обчислювати наближено.

У наступному прикладі точний розв'язок лінійного рівняння першого порядку методом Чаплигіна знаходимо вже на першому кроці.

Приклад 4.2. Методом Чаплигіна розв'язати задачу Коші $y' = x - y$, $y(0) = 1$ у прямокутнику $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, |y - 1| \leq 1\}$.

Розв'язання. Тут

$$f(x, y) = x - y, \quad f''_{y^2}(x, y) = 0, \quad A[z] = z' - x + z.$$

Оскільки

$$m = \min_{(x,y) \in Q} f(x, y) = -2, \quad M = \max_{(x,y) \in Q} f(x, y) = 1,$$

то покладемо

$$u_0(x) = 1 - 2x, \quad v_0(x) = 1 + x.$$

Тоді для $x \in [0; 1]$

$$A[u_0] = -1 - 3x \equiv -\varphi_0(x) \leq 0, \quad A[v_0] = 2 \equiv \psi_0(x) \geq 0.$$

Далі знаходимо

$$p_0(x) = f'_y(x, u_0) = -1,$$

$$q_0(x) = \frac{f(x, v_0) - f(x, u_0)}{v_0 - u_0} = \frac{(x - v_0) - (x - u_0)}{v_0 - u_0} = -1.$$

Використовуючи (4.16), (4.17), одержуємо

$$\rho_0(x) = e^{-\int_0^x dx} \cdot \int_0^x (3x + 1) e^{\int_0^x dx} dx = 2e^{-x} + 3x - 2,$$

$$\sigma_0(x) = e^{-\int_0^x dx} \cdot \int_0^x 2e^0 dx = -2e^{-x} + 2.$$

Звідси

$$u_1(x) = 1 - 2x + (2e^{-x} + 3x - 1) = 2e^{-x} + x - 1,$$

$$v_1(x) = 1 + x - (-2e^{-x} + 2) = 2e^{-x} + x - 1.$$

Отже, $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$. ■

§ 5. Метод Ейлера та його модифікації

У попередніх параграфах розглядалися аналітичні методи розв'язування задачі Коші. **Метод Ейлера** відноситься до числових методів, які дозволяють знайти розв'язок у вигляді таблиці наближених значень шуканої функції.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (5.1)$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

Виберемо достатньо малий крок h і побудуємо сукупність рівновіддалених точок

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

У методі Ейлера наближені значення $y(x_i) \approx y_i$ обчислюють послідовно за формулами

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

При цьому шукану інтегральну криву $y = y(x)$, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$, наближено замінюємо ламаною $M_0M_1M_2\dots$ з вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Кожний відрізок M_iM_{i+1} цієї ламаної, яку називатимемо **ламанною Ейлера**, має напрям, який збігається з напрямом тієї інтегральної кривої рівняння (5.1), яка проходить через точку M_i .

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна, то послідовність ламаних Ейлера при $h \rightarrow 0$ на достатньо малому відрізку $[x_0, x_0 + H]$ рівномірно збігається до шуканої інтегральної кривої $y = y(x)$ ([13], розділ 2, § 2).

Метод Ейлера легко можна поширити на системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння вищих порядків, якщо їх попередньо звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Основними недоліками методу Ейлера є його мала точність і систематичне накопичення похибок. У зв'язку з цим розроблені різні модифікації цього методу.

Першою такою модифікацією є *удосконалений метод Ейлера*, ідея якого полягає у наступному: спочатку обчислюють допоміжні значення $y_{i+1/2}$ шуканої функції в точках

$$x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$$

за допомогою формули

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i), \quad (5.4)$$

а потім обчислюють значення правої частини рівняння (5.1) в середній точці $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ і покладають

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right). \quad (5.5)$$

Другою модифікацією методу Ейлера є *удосконалений метод Ейлера-Коші*, коли спочатку шукають “грубе” наближення

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad (5.6)$$

а потім наближено покладають

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})}{2}. \quad (5.7)$$

Зауважимо, що позначаючи значення y_{i+1} , знайдене за формулою (5.7), через \bar{y}_{i+1} , ми маємо змогу знову за формулою (5.7) шукати нове значення для y_{i+1} . Такий процес можна продовжити доти, поки два послідовні наближення y_{i+1} не співпадуть із точністю до відповідних десяткових знаків. Цей процес має назву *ітераційної обробки*.

Проілюструємо застосування цих методів для розв'язування конкретної задачі.

Приклад 5.1. За допомогою методу Ейлера та його модифікацій розв'язати задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad (5.8)$$

на відрізку $[0; 0,5]$, беручи крок $h = 0,1$.

Розв'язання. Результати наближеного розв'язування задачі (5.8) різними методами, а також точні значення розв'язку рівняння $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$, знайденого у прикладі 2.2, наведено у таблиці.

x	y			
	Метод Ейлера	Удосконалений метод Ейлера	Удосконалений метод Ейлера-Коші	Точні значення розв'язку
0	1	1	1	1
0,1	0,9	0,91	0,91	0,9096748
0,2	0,82	0,83805	0,83805	0,8374615
0,3	0,758	0,7824352	0,7824353	0,7816364
0,4	0,7122	0,7416039	0,7416039	0,7406401
0,5	0,68098	0,7141516	0,7141515	0,7130613

Бачимо, що удосконалені методи більш точні, ніж звичайний метод ламаних Ейлера. Причини цього будуть проаналізовані у наступних параграфах.

§ 6. Загальні поняття теорії різницевих схем

Метод Ейлера та його модифікації є найпростішими представниками різницевих методів розв'язування диференціальних рівнянь. Серед наближених методів розв'язування задачі Коші різницеві методи є найбільш точними. Вони використовуються для диференціальних рівнянь першого та вищих порядків.

Для застосування різницевих методів розв'язування задачі Коші разом з заданими початковими умовами необхідно мати значення $y_k = y(x_k)$ шуканого розв'язку у деяких додаткових точках

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Ці значення доведеться шукати будь-яким з раніше розглянутих методів.

Розглянемо різницеві методи із загальної точки зору. Для більшості з них достатньо вказати алгоритм обчислення наближеного розв'язку у скінченній кількості точок x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, відрізка $[x_0, X]$, на якому розв'язується задача

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (6.1)$$

Множину цих точок $\{x_i\}$ називають **сіткою**, а самі точки x_i цієї множини – **вузлами сітки**. Відстані

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

називають **кроками сітки**.

У випадку, коли $h_i = h = \text{const}$, кажуть, що сітка є **рівномірною**. Зрозуміло, що у цьому випадку $h = (X - x_0)/n$.

Надалі розглядатимемо тільки рівномірні сітки.

Функцію $y(x_i)$ дискретного аргументу, яка визначена у вузлах сітки, називають **сітковою функцією**. Надалі такі функції позначатимемо через \bar{y} , а їхні значення $\bar{y}(x_i)$ – через \bar{y}_i .

Основою різницевих методів розв'язування задач для диференціальних рівнянь є заміна відповідної диференціальної задачі для функцій неперервного аргументу на алгебраїчну задачу для сіткової функції. Остання є системою алгебраїчних рівнянь, яка пов'язує між собою значення сіткової функції, додаткових умов та праві частини рівняння у вузлах сітки $\{x_i\}$.

Але задача визначення сіткових функцій ставиться не довільно. Вона повинна бути сформульована так, щоб при $h \rightarrow 0$ сіткові функції у певному сенсі збігалися до точного розв'язку диференціальної задачі.

Поняття такої збіжності можна ввести по-різному. Найчастіше для цього користуються так званою **рівномірною нормою**:

$$\|u\| = \max_i |u(x_i)|, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

Кажуть, що сім'я сіткових функцій $\{\bar{y}_h\}$ збігається до точного розв'язку $y(x)$ вихідної задачі, якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|y - \bar{y}_h\| = 0. \quad (6.3)$$

Інакше кажучи, $\bar{y}_h \rightarrow y$, якщо максимальне відхилення між значеннями цих функцій у вузлах сітки прямує до нуля. Якщо, крім того, виконується нерівність

$$\|y - \bar{y}_h\| \leq ch^k, \quad (6.4)$$

де c, k – деякі сталі, не залежні від h , то кажуть, що маємо збіжність порядку k за відповідною нормою.

Але у загальному випадку дослідження на таку збіжність та її порядок точності викликають значні труднощі. Вихід з цього полягає у тому, що збіжність різницевої задачі може бути зведена до двох більш доступних для перевірки властивостей – порядку апроксимації та стійкості.

Для визначення порядку апроксимації зауважимо, що точний розв'язок диференціальної задачі, взагалі кажучи, не задовольняє різницеву задачу. Запишемо диференціальну задачу у вигляді

$$Ly = \varphi, \quad (6.5)$$

а відповідну їй різницеву задачу, яку ще іноді називають *різницевою схемою*, у вигляді

$$L_h \bar{y} = \bar{\varphi}_h. \quad (6.6)$$

Зауважимо, що така різницева схема по суті є деякою системою алгебраїчних рівнянь. При цьому у вирази L та L_h увійшли сукупності лівої частини диференціального рівняння і додаткових умов для точного розв'язку $y = y(x)$ та відповідно лівих частин різницевих рівнянь та додаткових умов для \bar{y} . Праві ж частини φ та $\bar{\varphi}_h$ є сукупностями правих частин відповідних рівнянь та додаткових умов.

Підставимо розв'язок задачі (6.5) у рівняння (6.6) і визначимо $\|L_h y - \varphi_h\|_0$ як максимум норм $\|L_h^p y - \varphi_h^p\|$ для кожного з рівнянь системи (6.6), де p – номер рівняння у цій системі. Якщо для деяких сталих c, k , не залежних від h , виконується нерівність

$$\|L_h y - \varphi_h\|_0 < ch^k, \quad (6.7)$$

то кажуть, що різницева схема апроксимує задачу (6.5) з порядком k , а найбільше з таких k називають *порядком апроксимації схеми* для розв'язку диференціальної задачі.

Порядок апроксимації схеми можна визначити й інакше. А саме, нехай для кожного p виконуються нерівності

$$\|L_h^p y - \varphi_h^p\| < c_p h^{k_p}, \quad (6.8)$$

де сталі c_p і k_p не залежать від h . Тоді найбільші з чисел k_p називають *порядками апроксимації* відповідних рівнянь, а число $k = \min\{k_p\}$ – *порядком апроксимації схеми* (6.6).

Якщо $L_h^p u = \varphi_h^p$, то вважають, що $k_p = \infty$.

Часто замість нерівностей (6.7), (6.8) відповідно записують

$$\|L_h u - \varphi_h\|_0 = O(h^k) \quad \text{і} \quad \|L_h^p u - \varphi_h^p\| = O(h^{k_p}).$$

Зрозуміло, що чим вищий порядок апроксимації схеми, тим точніше її розв'язок – сіткова функція \bar{y} – наближає розв'язок $y = y(x)$ задачі (6.5). Але для збіжності \bar{y}_h до y важливим критерієм є також стійкість різницевої схеми, яка фактично означає неперервну залежність розв'язку схеми (6.6) від початкових умов і правих частин рівняння. Інакше кажучи, схему (6.6) називають **стійкою**, якщо існує таке h_0 , що для $h < h_0$ виконується нерівність

$$\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| < c^* \|\bar{\varphi}_h - \bar{\bar{\varphi}}_h\|_0, \quad (6.9)$$

де c^* – деяка стала, яка не залежить від h , а $\bar{\bar{y}}$ – розв'язок різницевої схеми

$$L_h \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{\varphi}}_h.$$

Введені поняття дають можливість довести теорему, яка має фундаментальне значення для дослідження збіжності різницевих схем.

Теорема 1.4. *Якщо стійка різницева схема (6.6) апроксимує задачу (6.5) з порядком апроксимації k , то її розв'язок \bar{y}_h при $h \rightarrow 0$ збігається до розв'язку $y = y(x)$ задачі (6.5) з порядком збіжності k .*

Доведення. Згідно з (6.5), (6.7) маємо нерівність

$$\|y - \bar{y}_h\| < c^* \|\varphi - \bar{\varphi}_h\|_0 = c^* \|L_h u - \bar{\varphi}_h\|_0 < c^* c h^k,$$

з якої й випливає доведення теореми. ►

Зауважимо, що усі різницеві схеми, які розглядаються надалі, є стійкими, і надалі на доведенні їх стійкості зупинятися не будемо.

§ 7. Різницева схема Ейлера та її узагальнення

Розглянемо з точки зору теорії різницевих схем метод Ейлера для задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (7.1)$$

Рівність (5.3) разом з початковою умовою можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = f(x_i, \bar{y}_i), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (7.2)$$

замінивши наближено значення функції $y(x)$ значеннями сіткової функції \bar{y} . Схему (7.2) називають *різницевою схемою Ейлера*.

З'ясуємо порядок апроксимації цієї схеми, шукаючи порядок апроксимації кожного з її рівнянь. Для цього додатково припустимо, що функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні за обома змінними у деякому прямокутнику D , в якому існує єдиний розв'язок задачі (7.1). Тоді розв'язок $y(x)$ цієї задачі буде двічі неперервно диференційовною функцією і за формулою Тейлора одержуємо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Якщо підставити тепер розв'язок задачі (7.1) у перші n рівнянь схеми (7.2), то

$$\begin{aligned} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i, y(x_i)) &= y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h) - f(x_i, y(x_i)) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot y''(x_i + \theta h). \end{aligned}$$

Оскільки при накладених вище умовах функція $y''(x)$ обмежена, то кожне з цих рівнянь має порядок апроксимації $k = 1$. Враховуючи, що рівність $y(x_0) = y_0$ є точною, знаходимо, що порядок апроксимації всієї схеми $k = 1$.

Схема (7.2) є стійкою (див., наприклад, [12], розділ 6, § 1). Таким чином, порядок збіжності схеми Ейлера також дорівнює 1.

Якщо в області D $|f(x, y)| \leq M$, $|f'_x(x, y)| \leq K$, $|f'_y(x, y)| \leq K$, то для похибки $\delta(x)$ справджується оцінка ([12], розділ 6, § 1):

$$|\delta(x)| \leq h(1 + M)(e^{K(x-x_0)} - 1).$$

Як видно з (7.2), у схемі Ейлера похідна $y'(x_i)$ наближено замінена відношенням $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$, що дозволило добитися лише першого порядку апроксимації. Якщо ж наближено взяти

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h},$$

то одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_{i-1}}{2h} = f(x_i, \bar{y}_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \\ \bar{y}_1 = y_1, \end{cases} \quad (7.3)$$

де число y_1 буде визначене пізніше.

Припустимо, що розв'язок $y(x)$ задачі (7.1) тричі неперервно диференційовний. Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_i \pm h) = y(x_i) \pm hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + O(h^3).$$

Якщо підставити тепер точний розв'язок $y(x)$ у (7.3), то одержуємо для перших $n-1$ рівнянь:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - f(x_i, y(x_i)) = y'(x_i) + O(h^2) - f(x_i, y(x_i)) = O(h^2),$$

тобто їх порядок апроксимації $k = 2$.

Рівність $y(x_0) = y_0$ виконується точно, а з рівності

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \cdot y'(x_0) + O(h^2)$$

знаходимо

$$y(x_1) - y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) - y_1 + O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб схема (7.3) мала порядок апроксимації $k = 2$, необхідно і достатньо, щоб

$$y_1 = y_0 + h \cdot y'(x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Схему (7.3) називають *узагальненням різницевої схеми Ейлера*.

У наступному параграфі встановимо порядок апроксимації різницевих схем, які відповідають модифікаціям методу Ейлера.

§ 8. Метод Рунге-Кутта

Знову розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{8.1}$$

але різницеву схему запишемо тепер у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = p_1 k_1 + \dots + p_m k_m, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \tag{8.2}$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), & k_2 &= f(x_i + \alpha_1 h, \bar{y}_i + \alpha_1 h k_1), & \dots &, \\ k_m &= f(x_i + \alpha_{m-1} h, \bar{y}_i + \alpha_{m-1} h k_{m-1}) \end{aligned} \right\} \tag{8.3}$$

а $p_1, \dots, p_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ – деякі параметри, вибір яких забезпечить необхідний порядок апроксимації схеми.

Якщо $m = 1$, то для $p_1 = 1$ схема (8.2) збігається із схемою Ейлера (7.2), порядок апроксимації якої $k = 1$ (§ 7).

Нехай тепер $m = 2$. Припустимо додатково, що єдиний розв'язок задачі (8.1) є тричі неперервно диференційовною функцією (для цього достатньо, щоб були неперервними $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$).

Тоді за формулою Тейлора

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x_i) + O(h^3).$$

Підставляючи точний розв'язок у перші n рівнянь схеми (8.2), одержуємо

$$\begin{aligned} & y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - \\ & - p_1 f(x_i, y(x_i)) - p_2 f(x_i + \alpha_1 h, y(x_i) + \alpha_1 h f(x_i, y(x_i))) = \\ & = y'(x_i) + \frac{h}{2} y''(x_i) + O(h^2) - p_1 f(x_i, y(x_i)) - p_2 f(x_i, y(x_i)) - \\ & - p_2 \alpha_1 h \cdot \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} - p_2 \alpha_1 h \cdot f(x_i, y(x_i)) \cdot \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} + O(h^2). \end{aligned}$$

Підставляючи сюди

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad y''(x_i) = \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y(x_i))}{\partial y} \cdot y'(x_i),$$

одержуємо

$$(1 - p_1 - p_2) y'(x_i) + h \cdot (0,5 - \alpha_1 p_2) y''(x_i) + O(h^2).$$

Таким чином, для того, щоб задані рівняння мали другий порядок апроксимації, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ \alpha_1 p_2 = 0,5. \end{cases} \quad (8.4)$$

Умови (8.4) залишаються необхідними і достатніми для другого порядку апроксимації всієї схеми, оскільки рівність $y(x_0) = y_0$ є точною.

Система (8.4) складається з двох рівнянь з трьома невідомими, тому один з параметрів можна вибирати довільно. Як правило, довільно вибирають параметр α_1 , беручи його з проміжку $(0;1]$ так, щоб не виходити за межі відрізка $[x_i, x_{i+1}]$.

Найчастіше використовують схеми з $\alpha_1 = 0,5$ та $\alpha_1 = 1$.

Якщо $\alpha_1 = 0,5$, то $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ і схема набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, \bar{y}_i)\right), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0. \end{cases}$$

Якщо ж $\alpha_1 = 1$, то $p_1 = p_2 = 0,5$ і одержуємо схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{2}\left(f(x_i, \bar{y}_i) + f\left(x_{i+1}, \bar{y}_i + h \cdot f(x_i, \bar{y}_i)\right)\right), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0. \end{cases}$$

У цих двох схемах маємо дві модифікації методу ламаних Ейлера, кожна з яких має порядок апроксимації $k = 2$.

Аналогічно можна одержати *схеми Рунге-Кутта* й для інших значень m . Наприклад, для $m = 3$ маємо схеми з порядком апроксимації $k = 3$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), & i = 0, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{2}\right), \\ k_3 &= f(x_i + h, \bar{y}_i + (2k_2 - k_1)h), \end{aligned}$$

та

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$k_1 = f(x_i, \bar{y}_i),$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{3}\right), \quad k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, \bar{y}_i + \frac{2k_2 h}{3}\right).$$

Для $m = 4$ маємо схему з порядком апроксимації $k = 4$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases}$$

де

$$k_1 = f(x_i, \bar{y}_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{3}, \bar{y}_i + \frac{k_1 h}{3}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{2h}{3}, \bar{y}_i + \frac{2k_2 - k_1}{3} \cdot h\right), \quad k_4 = f\left(x_i + h, \bar{y}_i + (k_1 - k_2 + k_3)h\right).$$

Але найчастіше для $m = 4$ використовують схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (8.5)$$

де

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_i, \bar{y}_i), & k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}k_2\right), & k_4 &= f\left(x_i + h, \bar{y}_i + hk_3\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Схема (8.6) також має четвертий порядок апроксимації. Застосуємо її до розв'язування конкретної задачі.

Приклад 8.1. Розв'язати методом Рунге-Кутта на відрізку $[0; 0,5]$ з кроком $h = 0,1$ задачу Коші $y' = x - y$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Наведемо результати наближеного розв'язування задачі у вигляді таблиці:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1	0,909675	0,8374618	0,7816369	0,7406406	0,7130619

Порівнюючи ці результати з тими, які були отримані при розв'язуванні цієї задачі у прикладі 5.1, та точними значеннями розв'язку, бачимо, що точність наближення є вищою. ■

Зазначимо також, що метод Рунге-Кутта можна застосовувати і до нормальних систем диференціальних рівнянь. Для цього у кожній з рівностей (8.2) функції y та f необхідно розуміти як вектор-функції, а числа k_1, k_2, \dots, k_m – як вектори.

Для наближеного розв'язування задачі Коші для рівняння другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

можна скористатися формулами

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \bar{y}'_i h + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)h^2,$$

$$\bar{y}'_{i+1} = \bar{y}'_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h,$$

де

$$k_1 = f\left(x_i, \bar{y}_i, \bar{y}'_i\right), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{y}'_i h}{2}, \bar{y}'_i + \frac{k_1 h}{2}\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{\bar{y}'_i h}{2} + \frac{k_1 h^2}{4}, \bar{y}'_i + \frac{k_2 h}{2}\right),$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, \bar{y}_i + \bar{y}'_i h + \frac{k_2 h^2}{2}, \bar{y}'_i + k_3 h\right).$$

Ефективна оцінка похибки методу Рунге-Кутта є доволі проблематичною. Наближений спосіб оцінки похибки розв'язку, який одержується методом Рунге-Кутта за формулою

$$\bar{y}'_{i+1} = \bar{y}'_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h,$$

і вибір кроку інтегрування запропонований у [6]: якщо у процесі розрахунків величина $\frac{|k_3 - k_2|}{|k_2 - k_1|}$ стає більшою, ніж декілька сотих, то крок інтегрування потрібно зменшити. Однак величина похибки залишається невідомою.

Для визначеності правильності вибору кроку h на практиці зазвичай на кожному етапі з двох кроків застосовуються подвійний перерахунок. А саме, виходячи з поточного вірного значення \bar{y}_i , обчислюють значення \bar{y}_{i+2h} двома способами: один раз з кроком h , а інший – з кроком $2h$. Якщо розходження отриманих значень не перевищує допустимої похибки, то крок h для цього етапу вибраний правильно і одержане з його допомогою значення можна прийняти за \bar{y}_{i+2h} . В інакшому випадку крок зменшують вдвічі.

Метод Рунге-Кутта має велику точність і, незважаючи на труднощі, широко використовується для числового розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою ЕОМ.

Пропонуємо читачам самостійно скористатися методом Рунге-Кутта для наближеного розв'язування задачі Коші

$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

§ 9. Застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів

У схемах Рунге-Кутта, які розглядалися у § 8, порядок апроксимації збігався з числом m . Наприклад, для $m=2$ була отримана система двох рівнянь з трьома невідомими. Для $m=3$ маємо 3 рівняння і 5 невідомих, для $m=4$ – 4 рівняння і 7 невідомих. Тому виникає питання: чи можна у випадку більшої гладкості розв'язку

досягнути порядку апроксимації більшого, ніж m . Проаналізуємо таку можливість для $m = 2$.

Отже, розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (9.1)$$

та різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i}{h} = p_1 k_1 + p_2 k_2, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = y_0, \end{cases} \quad (9.2)$$

де

$$k_1 = f(x_i, \bar{y}_i), \quad k_2 = f(x_i + \alpha h, \bar{y}_i + \alpha h k_1), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Вважаємо, що функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні третього порядку за обома змінними, що гарантує неперервність четвертої похідної розв'язку $y(x)$ задачі Коші. Тоді за формулою Тейлора одержуємо

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i h^2}{2} + \frac{y'''_i h^3}{6} + O(h^4).$$

Підставляючи точний розв'язок у перші n рівнянь схеми (9.2), знаходимо різницю між її лівою і правою частинами у вигляді

$$\Delta_i(h) = y'_i + \frac{1}{2} y''_i h + \frac{1}{6} y'''_i h^3 + O(h^3) - p_1 f_i - p_2 \left(f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \alpha h + \frac{\partial f_i}{\partial y} \alpha h f_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 \right) (\alpha h)^2 + O(h^3) \right),$$

де позначено

$$f_i \equiv f(x_i, y_i).$$

Оскільки з (9.1) випливають рівності

$$y'_i = f_i, \quad y''_i = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} f_i,$$

$$y_i''' = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} f_i + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} f_i^2 + \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i'',$$

то

$$\Delta_i(h) = (1 - p_1 - p_2) y_i' + \left(\frac{1}{2} - \alpha p_2 \right) y_i'' h + \left(\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \right) y_i''' + \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \frac{\partial f_i}{\partial y} y_i'' \right) h^2 + O(h^3).$$

Отже, третій порядок апроксимації матимемо лише тоді, коли

$$\begin{cases} 1 - p_1 - p_2 = 0, \\ \frac{1}{2} - \alpha p_2 = 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 = 0, \\ \frac{1}{2} \alpha^2 p_2 \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Із системи (9.3) знаходимо

$$\alpha = \frac{2}{3}, \quad p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0. \quad (9.4)$$

Таким чином, якщо права частина рівняння (9.1) не залежить від змінної y , то, поклавши $x_0 = a$, $y_0 = 0$, одержуємо задачу Коші

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = 0. \quad (9.5)$$

Звідси

$$y(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (9.6)$$

і якщо функція $f(x)$ тричі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, то враховуючи (9.4), з точністю до $O(h^3)$ знаходимо

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{4} \cdot \left(f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) \right), \quad (9.7)$$

де

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Зокрема, для $i = n-1$

$$y(x_n) = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.8)$$

Зауважимо, що якщо $f(x)$ є квадратичною функцією, тобто $f(x) = ax^2 + bx + c$, то за формулою (9.7) інтеграл (9.8) буде обчислений точно, причому незалежно від n та величини h . Справді, для будь-якого h

$$\begin{aligned} \int_0^h (ax^2 + bx + c) dx &= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \\ &= 0 + \frac{h}{4} \left(c + 3 \left(a \left(\frac{2}{3}h \right)^2 + b \left(\frac{2}{3}h \right) + c \right) \right) = y(h). \end{aligned}$$

З'ясуємо зв'язок отриманого результату з іншими формулами числового інтегрування. Для цього запишемо (9.7) у вигляді

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{4} \cdot \left(f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) \right). \quad (9.9)$$

Зрозуміло, що з міркувань симетрії справджується також рівність

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{4} \cdot \left(f(x_{i+1}) + 3f\left(x_{i+1} - \frac{2h}{3}\right) \right). \quad (9.10)$$

Додавши (9.9) і (9.10), одержуємо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{8} \cdot \left(f(x_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right) + f(x_{i+1}) \right). \quad (9.11)$$

Формула (9.11) збігається з відомою формулою методу кубічних парабол. Аналогічно можна одержати відому формулу Сімпсона ([11], розділ 4, § 2) – для цього потрібно підставити у (9.2)

$$\alpha = 1/2, \quad p_1 = 1/3, \quad p_2 = 2/3.$$

Але легко переконатися, що схема (9.2) матиме при цьому лише перший порядок апроксимації, а відповідні її формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_i) + 2f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \right) \quad (9.12)$$

при однаковій кількості обчислень, що і у (9.7), призведуть до значно гірших результатів. Зокрема, вже для лінійної функції $f(x) = ax + b$ з (9.12) не впливає рівності

$$y(h) = \int_0^h (ax + b) dx.$$

Отже, при вказаній кількості обчислень формула (9.8), запропонована в [15], є найбільш оптимальною формулою числового інтегрування функцій однієї змінної.

Пропонуємо читачам самостійно порівняти формули (9.9) і (9.11) із схемами Рунге-Кутта для $m = 3$ та $m = 4$, наведеними у § 8.

§ 10. Метод Адамса

Наближено розв'язуючи диференціальне рівняння методом Рунге-Кутта, необхідно виконувати досить багато обчислень для знаходження кожного y_i . Якщо права частина рівняння має складний аналітичний вираз, використання методу Рунге-Кутта приводить до значних труднощів. Тому на практиці у цьому випадку часто використовують *метод Адамса*, який не вимагає багаторазового підрахунку значень правої частини рівняння.

Для задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (10.1)$$

покладаючи $y_i = y(x_i)$, будемо мати

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx. \quad (10.2)$$

Оскільки на підставі другої інтерполяційної формули Ньютона ([10], розділ 3, § 1) з точністю до різниць четвертого порядку маємо

$$y' = y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 y'_{i-3},$$

де $q = (x - x_i)/h$,

$$\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

$$\Delta^2\varphi_k = \Delta\varphi_{k+1} - \Delta\varphi_k = \varphi_{k+2} - 2\varphi_{k+1} + \varphi_k,$$

$$\Delta^3\varphi_k = \Delta^2\varphi_{k+1} - \Delta^2\varphi_k = \varphi_{k+3} - 3\varphi_{k+2} + 3\varphi_{k+1} - \varphi_k,$$

то з (10.2) одержуємо

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h \cdot \int_0^1 \left(y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2 + q}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3 + 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y'_{i-3} \right) dq = \\ &= h \cdot \left(y'_i + \frac{1}{2}\Delta y'_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 y'_{i-3} \right) = \\ &= \frac{h}{24} \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}). \end{aligned}$$

Таким чином, наближено можемо покласти

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24} \cdot (55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \\ &+ 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Формулу (10.3) називають **формулою Адамса**. Зрозуміло, що для обчислень за формулою Адамса необхідно мати чотири перші наближення y_0, y_1, y_2, y_3 , які можна одержати, наприклад, одним із методів Рунге-Кутта або з розвинення у ряд Тейлора:

$$y_i = y(x_0 + ih) = y_0 + ih y'_0 + \frac{(ih)^2}{2} y''_0 + \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

При цьому

$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y''_0 = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y'_0 \quad \text{і т. д.}$$

Приклад 10.1. Розв'язати методом Адамса задачу Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad (10.4)$$

на відрізку $[0; 0,5]$, беручи $h = 0,1$.

Розв'язання. Скористаємося знайденими у § 8 методом Рунге-Кутта значеннями y_1, y_2, y_3 . Наведемо результати обчислень у вигляді таблиці:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1	0,909675	0,8374618	0,7816369	0,7406463	0,7130714

Звертаємо увагу на високу точність одержаних результатів. Їх порядок $k = 4$, як і методу Адамса в цілому ([4], розділ 3, § 8). ■

Метод Адамса можна легко поширити на нормальні системи диференціальних рівнянь, а також на рівняння n -го порядку.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати методом Адамса на відрізку $[0; 0,5]$ задачу Коші $y' = x + 2y^2, y(0) = 0$.

§ 11. Метод послідовних зближень Крилова

Ефективність методу Адамса значно залежить від точності знайдених перших наближень y_1, y_2 та y_3 . Розглянемо спосіб їх знаходження *методом послідовних зближень Крилова*.

Якщо права частина рівняння $y' = f(x, y)$ задана аналітично, то необхідні перші наближення можна знайти за допомогою, наприклад, методу послідовних наближень, степеневих рядів або Рунге-Кутта. Але якщо функція $f(x, y)$ задана таблично, то жоден з цих методів застосувати не можна. У цьому випадку досить зручним є метод Крилова.

У § 10 наведено формулу Адамса

$$\Delta y_i = h \left(y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{i-3} \right). \quad (11.1)$$

Враховуючи, що

$$\Delta y'_{i-1} = \Delta y'_i - \Delta^2 y'_{i-1}, \quad \Delta^2 y'_{i-2} = \Delta^2 y'_{i-1} - \Delta^3 y'_{i-2},$$

та покладаючи

$$\Delta^3 y'_{i-3} \approx \Delta^3 y'_{i-2},$$

з (11.1) одержуємо формулу

$$\Delta y_i = h \cdot \left(y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{i-2} \right). \quad (11.2)$$

Далі, враховуючи, що

$$\Delta^2 y'_{i-1} = \Delta^2 y'_i - \Delta^3 y'_{i-1}, \quad \Delta^3 y'_{i-2} \approx \Delta^3 y'_{i-1},$$

з формули (11.2) знаходимо

$$\Delta y_i = h \left(y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_i + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{i-1} \right). \quad (11.3)$$

І, нарешті, покладаючи у (11.3)

$$\Delta^3 y'_{i-1} \approx \Delta^3 y'_i,$$

будемо мати

$$\Delta y_i = h \left(y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_i - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_i + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_i \right). \quad (11.4)$$

Використовуючи одержані формули, побудуємо зближення таким чином:

$$\begin{aligned} \underline{y}'_0 &= f(x_0, y_0), \quad \underline{\Delta y}_0 = h y'_0, \quad \underline{y}_1 = y_0 + \underline{\Delta y}_0, \quad \underline{y}'_1 = f(x_1, \underline{y}_1), \\ \underline{\Delta y}'_0 &= \underline{y}'_1 - y'_0, \quad \underline{\underline{\Delta y}}_0 = h \left(y'_0 + \frac{1}{2} \underline{\Delta y}'_0 \right), \quad \underline{\underline{\Delta y}}_1 = h \left(\underline{y}'_1 + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Delta y}}'_0 \right), \\ \underline{\underline{y}}_1 &= y_0 + \underline{\underline{\Delta y}}_0, \quad \underline{\underline{y}}_2 = \underline{y}_1 + \underline{\underline{\Delta y}}_1, \quad \underline{\underline{y}}'_1 = f(x_1, \underline{\underline{y}}_1), \quad \underline{\underline{y}}'_2 = f(x_2, \underline{\underline{y}}_2), \\ \underline{\underline{\Delta y}}'_0 &= \underline{\underline{y}}'_1 - y'_0, \quad \underline{\underline{\Delta y}}'_1 = \underline{\underline{y}}'_2 - \underline{y}'_1, \quad \underline{\underline{\Delta^2 y}}'_0 = \underline{\underline{\Delta y}}'_1 - \underline{\underline{\Delta y}}'_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\Delta y_0}} &= h \left(\overline{y'_0} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_0}} \right), \\ \overline{\overline{\Delta y_1}} &= h \left(\overline{y'_1} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} \right), \quad \overline{\overline{\Delta y_2}} = h \left(\overline{y'_2} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_2}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_2}} \right), \\ \overline{y_1} &= \overline{y_0} + \overline{\overline{\Delta y_0}}, \quad \overline{y_2} = \overline{y_1} + \overline{\overline{\Delta y_1}}, \quad \overline{y_3} = \overline{y_2} + \overline{\overline{\Delta y_2}}, \\ \overline{y'_1} &= f \left(\overline{x_1}, \overline{y_1} \right), \quad \overline{y'_2} = f \left(\overline{x_2}, \overline{y_2} \right), \quad \overline{y'_3} = f \left(\overline{x_3}, \overline{y_3} \right), \\ \overline{\overline{\Delta y'_0}} &= \overline{y'_1} - \overline{y'_0}, \quad \overline{\overline{\Delta y'_1}} = \overline{y'_2} - \overline{y'_1}, \quad \overline{\overline{\Delta y'_2}} = \overline{y'_3} - \overline{y'_2}, \\ \overline{\overline{\Delta^2 y'_0}} &= \overline{\overline{\Delta y'_1}} - \overline{\overline{\Delta y'_0}}, \quad \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} = \overline{\overline{\Delta y'_2}} - \overline{\overline{\Delta y'_1}}, \quad \overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} = \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} - \overline{\overline{\Delta^2 y'_0}}. \end{aligned}$$

Звідси у підсумку одержуємо

$$\begin{aligned} \overline{y_1} &= \overline{y_0} + h \cdot \left(\overline{y'_0} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_0}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_0}} + \frac{1}{24} \overline{\overline{\Delta^3 y'_0}} \right), \\ \overline{y_2} &= \overline{y_1} + h \cdot \left(\overline{y'_1} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_1}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_1}} + \frac{1}{24} \overline{\overline{\Delta^3 y'_1}} \right), \\ \overline{y_3} &= \overline{y_2} + h \cdot \left(\overline{y'_2} + \frac{1}{2} \overline{\overline{\Delta y'_2}} - \frac{1}{12} \overline{\overline{\Delta^2 y'_2}} + \frac{1}{24} \overline{\overline{\Delta^3 y'_2}} \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що якщо знайдені $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, $\overline{y_3}$ відрізняються від $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, $\overline{y_3}$ більше, ніж наперед задана точність, то процес зближення не можна вважати завершеним. У такому випадку доцільно зменшити крок h або знову взяти знайдені $\overline{y_i}$ замість $\overline{y_i}$. Як правило, у таких випадках крок h зменшують вдвічі.

Зреалізуємо цей метод на прикладі задачі Коші $y' = x - y$, $y(0) = 1$:

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	0,909675	0,837467	0,781675

Як бачимо, отримані результати є досить близькими до точних значень, знайдених у § 5.

§ 12. Метод Мілна

Розглянемо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (12.1)$$

Будемо вважати, що перші чотири значення шуканого розв'язку значення y_0, y_1, y_2, y_3 нам уже відомі. Їх можна одержати з початкової умови та, наприклад, з використанням методу Рунге-Кутта або методу послідовних наближень.

Для виведення формул Мілна скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона ([11], розділ 3, § 1):

$$y' = y'_k + q\Delta y'_k + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y'_k + \frac{q(q-1)(q-2)}{6}\Delta^3 y'_k,$$

де $q = (x - x_k)/h$. Будемо мати:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-4}}^{x_i} y' dx = \\ & = h \cdot \left(y'_{i-4} \int_0^4 dq + \Delta y'_{i-4} \int_0^4 q dq + \Delta^2 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^2 - q}{2} dq + \Delta^3 y'_{i-4} \int_0^4 \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6} dq \right) = \\ & = h \cdot \left(4y'_{i-4} + 8\Delta y'_{i-4} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{i-4} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{i-4} \right) = \frac{4h}{3}(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$\int_{x_{i-2}}^{x_i} y' dx = h \cdot \left(2y'_{i-2} + 2\Delta y'_{i-2} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{i-2} \right) = \frac{h}{3} \cdot (y'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}).$$

Таким чином, одержуємо **формули Мілна**:

$$\underline{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-1} - y'_{i-2} + 2y'_{i-3}), \quad (12.2)$$

$$y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\underline{y}'_i + 4y'_{i-1} + y'_{i-2}). \quad (12.3)$$

Ідея цього методу полягає в тому, що спочатку шукаємо значення \underline{y}_i за формулою (12.2), а потім, використовуючи його, з формули (12.3) знаходимо y_i . Як показав Мілн, абсолютна похибка значення y_i приблизно дорівнює $\varepsilon_i = \frac{1}{29} |y_i - \underline{y}_i|$. Доведення цього факту можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 3, § 10). Там само встановлено, що сумарна похибка методу Мілна є величиною порядку h^4 .

Наведемо результати обчислень для задачі Коші $y' = x - y$, $y(0) = 1$ у вигляді таблиці:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1	0,909675	0,837467	0,781675	0,74064	0,7130982

Метод Мілна можна використовувати для наближеного розв'язування нормальних систем диференціальних рівнянь, а також для рівнянь вищих порядків, які попередньо потрібно звести до таких систем.

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати методом Мілна на відрізку $[0;0,5]$ задачу Коші $y' = x + 2y^2$, $y(0) = 0$.

§ 13. Деякі зауваження та узагальнення

До цього розглядалися методи, в яких використовувалися лише перші похідні шуканого розв'язку. Використання похідних вищих порядків дозволяє добитися більшої точності розв'язку на заданому проміжку (див., наприклад, [4], розділ 3, § 11). Використаємо похідні другого порядку для розв'язування задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (13.1)$$

Враховуючи, що

$$y' = f(x, y), \quad y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y', \quad (13.2)$$

можна деяким числовим методом скласти вихідну таблицю значень:

$$\begin{array}{cccc} x_0, & y_0, & y'_0, & y''_0, \\ x_1, & y_1, & y'_1, & y''_1, \\ x_2, & y_2, & y'_2, & y''_2. \end{array}$$

Після цього за формулою

$$\underline{y}_i = y_{i-3} + 3(y_{i-1} - y_{i-2}) + h^2(y''_{i-1} - y''_{i-2}) \quad (13.3)$$

з [4] (розділ 3, § 11) для $i = 3$ можна обчислити перше наближення \underline{y}_3 для y_3 . Використовуючи формули (13.2), далі можна знайти $\underline{y}'_3, \underline{y}''_3$. Тоді за формулою

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(y'_{i-1} - \underline{y}'_i) + \frac{h^2}{2}(y''_{i-1} - \underline{y}''_i) \quad (13.4)$$

для $i = 3$ знаходимо y_3 . Для контролю обчислень можна перерахувати y_3 , покладаючи у формулі (13.4) $i = 3$, $\underline{y}'_3 = y'_3$, $\underline{y}''_3 = y''_3$. Аналогічно можна знайти інші наближення. Порядок точності описаного методу $k = 5$.

Ще більшої точності з порядком $k = 7$ можна домогтися, якщо використовувати похідні третього порядку і формули

$$\underline{y}_i = y_{i-3} + 3(y_{i-1} - y_{i-2}) + \frac{h^3}{2}(y'''_{i-1} + y'''_{i-2}), \quad (13.5)$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(\underline{y}'_i + y'_{i-1}) - \frac{h^2}{10}(\underline{y}''_i - y''_{i-1}) + \frac{h^3}{120}(\underline{y}'''_i + y'''_{i-1}). \quad (13.6)$$

Пропонуємо читачам самостійно розв'язати вказаними методами на відрізку $[0; 0,5]$ дві задачі Коші:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1 \quad \text{і} \quad y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0.$$

Зауважимо, що використання навіть дуже точних методів не гарантує від спотворення результату, тобто одержаний результат може виявитись надто далеким від точного значення.

Розглянемо, наприклад, задачу про знаходження наближеного на відрізку $[0;3]$ розв'язку задачі Коші ([6], розділ 2, § 5)

$$y'' = 10y' + 11y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (13.7)$$

Загальним розв'язком рівняння з (13.7) є $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{11x}$.

Враховуючи початкові умови, знаходимо $y = e^{-x}$, а тому

$$y(3) = e^{-3} \approx 0,0498.$$

Враховуючи похибки заокруглень, застосування числових методів дасть нам розв'язок $\bar{y} = (1 + \varepsilon_1) e^{-x} + \varepsilon_2 e^{11x}$. Навіть якщо $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 10^{-10}$, то

$$\bar{y}(3) = (1 \pm 10^{-10}) \cdot e^{-3} \pm 10^{-10} e^{33} \approx \pm 2 \cdot 10^4,$$

що надто відрізняється від точного значення.

На практиці подібні ситуації трапляються доволі рідко, але їх існування вказує на необхідність використання контрольних обчислень для перевірки правильності обчислень. Зокрема, можна скористатися перерахунком із подвійним кроком. Якщо \bar{y}_{2n} – наближене значення розв'язку на $2n$ -му кроці з кроком h , а \bar{y}_n – наближене значення у цій же точці, знайдене із кроком $2h$, то наближено покладають ([4], розділ 3, § 15)

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{2n}}{2^k - 1}, \quad (13.8)$$

де k – порядок точності вибраного методу. Наприклад, для методу Рунге-Кутта з $k = 4$ формула (13.8) набуває вигляду

$$y_{2n} = \bar{y}_{2n} - \frac{1}{15} (\bar{y}_n - \bar{y}_{2n}).$$

Проте й у цьому випадку не завжди вдається врахувати поточні похибки, пов'язані із заокругленнями на кожному кроці обчислень.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ I

Задано задачу Коші. Потрібно:

- 1) знайти її точний розв'язок методом послідовних наближень;
- 2) дослідити, для якого найменшого n похибка наближення $\bar{y}(x) = y_n(x)$ в прямокутнику $Q = \{(x, y) : |x| \leq 0,5, |y| \leq 5\}$ не перевищує 0,01;
- 3) знайти точний розв'язок методом степеневих рядів;
- 4) для $n=1$ знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ методом Чаплигіна;
- 5) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ методом ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$;
- 6) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ за першою модифікацією методу ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$;
- 7) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ за другою модифікацією методу ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$;
- 8) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ за узагальненою схемою Ейлера з кроком $h = 0,1$;
- 9) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ за схемою Рунге-Кутта для $m = 4$ з кроком $h = 0,1$;
- 10) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ методом Адамса з кроком $h = 0,1$;
- 11) знайти наближений розв'язок на відрізку $[0;0,5]$ методом Мілна з кроком $h = 0,1$.

Обчислення проводити з точністю до чотирьох знаків після коми. Результати наближених обчислень оформити у вигляді таблиці:

Метод	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,2$	$x_3 = 0,3$	$x_4 = 0,4$	$x_5 = 0,5$

1. $y' = y - 2x + 3, y(0) = 0.$

2. $y' = -y - 2x - 1, y(0) = 0.$

3. $y' = -y - x + 2, y(0) = 0.$

5. $y' = y + x + 1, y(0) = 0.$

7. $y' = -y + 2x - 1, y(0) = 0.$

9. $y' = y + 3x - 2, y(0) = 0.$

11. $y' = -y - 2x - 3, y(0) = 0.$

13. $y' = y - x + 3, y(0) = 0.$

15. $y' = -y + x + 2, y(0) = 0.$

17. $y' = y + 2x + 1, y(0) = 0.$

19. $y' = -y + 3x - 1, y(0) = 0.$

21. $y' = y - 2x - 2, y(0) = 0.$

23. $y' = -y - x - 3, y(0) = 0.$

25. $y' = y + x + 3, y(0) = 0.$

27. $y' = -y + 2x - 2, y(0) = 0.$

29. $y' = y + 3x + 1, y(0) = 0.$

4. $y' = y - x - 2, y(0) = 0.$

6. $y' = -y + x - 3, y(0) = 0.$

8. $y' = y + 2x + 3, y(0) = 0.$

10. $y' = -y + 3x + 2, y(0) = 0.$

12. $y' = y - 2x + 1, y(0) = 0.$

14. $y' = -y - x + 1, y(0) = 0.$

16. $y' = y + x - 2, y(0) = 0.$

18. $y' = -y + 2x - 3, y(0) = 0.$

20. $y' = y + 3x + 3, y(0) = 0.$

22. $y' = -y - 2x + 2, y(0) = 0.$

24. $y' = -y + x - 1, y(0) = 0.$

26. $y' = y - x + 2, y(0) = 0.$

28. $y' = y + 2x - 1, y(0) = 0.$

30. $y' = -y + 3x - 3, y(0) = 0.$

РОЗДІЛ II.
НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§ 1. Постановка крайових задач. Функція Гріна

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \quad (1.1)$$

де $g(x)$, $h(x)$, $f_0(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції. Якщо помножити обидві частини рівняння (1.1) на функцію

$$p(x) = e^{\int_a^x g(t) dt},$$

то рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$L[y] \equiv (p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (1.2)$$

де

$$q(x) = -p(x)h(x), \quad f(x) = p(x)f_0(x).$$

Для рівняння (1.2) розглянемо лінійні **крайові умови**

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (1.3)$$

де α_1 , α , β_1 , β , A , B – задані числа, причому $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$.

Якщо $A = B = 0$, то умови (1.3) називають **однорідними**.

Задачу про відшукування розв'язків рівняння (1.2), які задовольняють умови (1.3), називають **крайовою задачею**. Якщо функція $f(x)$ тотожно не дорівнює нулю, то задачу (1.2), (1.3) називають **неоднорідною**, а якщо $f(x) \equiv 0$, $A = B = 0$, то **однорідною крайовою задачею**.

Розв'язок крайової задачі (1.2), (1.3) може бути представлений у вигляді

$$y(x) = z(x) + \varphi(x), \quad (1.4)$$

де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$ функція, яка задовольняє умови (1.3). Підставляючи $y(x)$ з (1.4) у рівняння (1.2), одержуємо, що

$$L[z] \equiv (p(x)z')' - q(x)z = f(x) - (p(x)\varphi'(x))' + q(x)\varphi(x).$$

При цьому функція $z(x)$ повинна задовольняти однорідні крайові умови (1.3). У зв'язку з цим надалі розглядатимемо лише крайові задачі з однорідними умовами (1.3).

Для представлення розв'язку таких задач використовують **функцію Гріна** $G(x, t)$, яка визначена для будь-яких $x, t \in [a, b]$ і задовольняє умови:

1) для кожного фіксованого $t \in [a, b]$ $G(x, t)$ як функція змінної x на проміжках $[a, t)$ і $(t, b]$ є розв'язком однорідного рівняння (1.2);

2) $G(x, t)$ для кожного $t \in [a, b]$ задовольняє однорідні крайові умови (1.3);

3) $G(x, t)$ для кожного $t \in (a, b)$ неперервна на $[a, b]$, а її похідна в точці $x = t$ має розрив першого роду зі стрибком

$$G'_x(x, t)|_{t=+0} - G'_x(x, t)|_{t=-0} = \frac{1}{p(t)}.$$

Відомо ([13], розділ 4, § 2), що неоднорідна крайова задача (1.2), (1.3) з однорідними крайовими умовами має єдиний розв'язок для будь-якої неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ за умови, якщо однорідна крайова задача (1.2), (1.3) має тільки тривіальний розв'язок. Цей розв'язок виражається формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt. \quad (1.5)$$

Функція $G(x, t)$ може бути знайдена у вигляді

$$G(x,t) = \begin{cases} c_1 y_1(x), & a \leq x \leq t, \\ c_2 y_2(x), & t \leq x \leq b, \end{cases}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв’язки рівняння (1.2), які задовольняють однорідні умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1'(a) + \alpha y_1(a) = 0, \\ \beta_1 y_2'(b) + \beta y_2(b) = 0. \end{cases}$$

Коефіцієнти c_1 , c_2 при цьому можна однозначно визначити з системи

$$\begin{cases} c_2 y_2(t) - c_1 y_1(t) = 0, \\ c_2 y_2'(t) - c_1 y_1'(t) = \frac{1}{p(t)}. \end{cases}$$

Методи наближеного розв’язування крайових задач можна розділити на дві групи: різницеві методи і аналітичні методи. Розгляду цих методів присвячені наступні параграфи.

§ 2. Метод стрільби

Розглянемо крайову задачу для рівняння другого порядку у більш загальному вигляді:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (2.1)$$

$$\varphi_1(y(a), y'(a)) = 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi_2(y(b), y'(b)) = 0, \quad (2.3)$$

де f , φ_1 , φ_2 – задані достатньо гладкі функції своїх аргументів, причому рівняння (2.2) та (2.3) можна однозначно розв’язати відносно $y'(a)$ та $y'(b)$ відповідно. Окрім того, припустимо, що крайова задача (2.1)-(2.3) має єдиний розв’язок, а задача Коші для рівняння (2.1) має єдиний розв’язок для довільних початкових умов.

Виберемо деяку початкову умову $\bar{y}(a) = \bar{y}_0$. Тоді з (2.2) знахо-

димо $\bar{y}'(a) = \bar{y}_1$. Маючи ці умови, одержуємо розв'язок рівняння (2.1) – функцію $\bar{y}(x)$, яка задовольняє крайові умови (2.2). Якщо $\varphi_2(\bar{y}(b), \bar{y}'(b)) = 0$, то $\bar{y}(x)$ є розв'язком крайової задачі (2.1)-(2.3). Але ймовірність такого “точного попадання” надзвичайно мала. Тому швидше за все пошук розв'язку доведеться продовжити.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що

$$\varphi_2(\bar{y}(b), \bar{y}'(b)) < 0.$$

Виберемо нове значення $\bar{y}(a) = \bar{y}_0$ і аналогічно побудуємо функцію $\bar{y}(x)$. Оскільки за припущенням задача (2.1)-(2.3) має розв'язок, а функції f, φ_1, φ_2 є достатньо гладкими, то знайдуться такі число \bar{y}_0 і функція $\bar{y}(x)$, що $\bar{y}(a) = \bar{y}_0$ та $\varphi_2(\bar{y}(b), \bar{y}'(a)) \geq 0$. Таким чином, пошук \bar{y}_0 будемо продовжувати, доки не доб'ємося виконання останньої нерівності.

Враховуючи неперервну залежність $y(x)$ від початкового значення y_0 , робимо висновок, що число y_0 повинно знаходитись між \bar{y}_0 та \bar{y}_0 . Знайти його з потрібною точністю можна, використовуючи, наприклад, метод половинного поділу відрізка $[\bar{y}_0, \bar{y}_0]$ або $[\bar{y}_0, \bar{y}_0]$.

Таким чином, розв'язування крайової задачі зводиться до кількарізного розв'язання задачі Коші з різними початковими умовами.

Для лінійного рівняння (1.2) з однорідними лінійними умовами (1.3) достатньо буде розв'язати лише дві задачі Коші. Справді, якщо $z(x)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (1.2), який задовольняє початкові умови $z(a) = \alpha_1, z'(a) = -\alpha$, а $y_0(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння, який задовольняє умови $y_0(a) = \alpha_1, y_0'(a) = -\alpha$, то для довільного значення сталої C функція

$$y(x) = z(x) + C \cdot y_0(x) \tag{1.4}$$

є розв'язком рівняння (1.2), який задовольняє крайову умову

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0.$$

Тоді для $x = b$ одержуємо співвідношення

$$\beta_1 z'(b) + \beta z(b) + C \cdot (\beta_1 y'_0(b) + \beta y_0(b)) = 0, \quad (1.5)$$

з якого знаходимо C . При цьому, згідно з припущенням про єдиність розв'язку крайової задачі, коефіцієнт біля C у формулі (1.5) не перетворюється в нуль.

Таким чином, знаходження розв'язку крайової задачі звелось до розв'язування двох задач Коші, які можна буде розв'язати точно або наближено, використовуючи методи з розділу I.

§ 3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'' - q(x)y = f(x) \quad (3.1)$$

та крайові умови

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (3.2)$$

Задачу (3.1), (3.2) називають *найпростішою крайовою задачею*. Вважатимемо, що функції $q(x)$ та $f(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$. Якщо, крім того, $q(x) > 0$, то така задача має єдиний розв'язок ([13], розділ 6, § 2).

Замінивши другу похідну відповідним різницеvim відношенням, приходимо до різницевої схеми

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i-1}}{h^2} - q_i \bar{y}_i = f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = 0, \\ \bar{y}_n = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

де

$$q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Схема (3.3) є системою $(n+1)$ -го лінійного алгебраїчного рівняння. Для існування та єдиності її розв'язку достатньо встановити, що відповідна однорідна система має лише тривіальний розв'язок. Справді, якщо припустити, що ця система має нетривіальний розв'язок

$$\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n),$$

то серед $\bar{y}_i, i = 0, 1, \dots, n$, існує найбільше число $\bar{y}_k = M$. Очевидно, що $M \geq 0$, бо $\bar{y}_0 = \bar{y}_n = 0$. Якщо $M = \bar{y}_0$ або $M = \bar{y}_n$, то $M = 0$. Якщо ж $M = \bar{y}_k$, де $0 < k < n$, то з (3.3) одержуємо

$$(2 + h^2 q_k) M = (2 + h^2 q_k) \bar{y}_k = \bar{y}_{k+1} + \bar{y}_{k-1} \leq 2M,$$

що неможливо для $M > 0$, бо $2 + h^2 q_k > 2$. Отже, $M = 0$. Аналогічно можна встановити, що $m \equiv \min\{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\} = 0$, а тому розв'язок \bar{y} однорідної системи (3.3) є тривіальним. Таким чином, різницева схема (3.3) має єдиний розв'язок для довільної правої частини і для кожного n .

Встановимо порядок апроксимації схеми (3.3). Припустимо, що функції $q(x)$, $f(x)$ мають на відрізку $[a, b]$ неперервні другі похідні. Тоді, використовуючи формули Тейлора для лівих частин перших $n-1$ рівнянь схеми (3.3) та підставляючи точний розв'язок задачі (3.1), (3.2), будемо мати:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2} \left(y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + O(h^4) - 2y(x_i) + \right. \\ & \left. + y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + O(h^4) \right) - q_i y(x_i) = \\ & = y''(x_i) - q(x_i) y(x_i) + O(h^2) = f(x_i) + O(h^2). \end{aligned}$$

Оскільки $y(x_0) = y(x_n) = 0$, то порядок апроксимації схеми (3.3) $k = 2$. Схема (3.3) є стійкою, а тому порядок збіжності розв'язків \bar{y}_h при $h \rightarrow 0$ до розв'язку задачі (3.1)-(3.2) також дорівнює 2 ([13], розділ 6, § 2).

Зауважимо, що на відміну від схем, які розглядались у § 2, ця схема не дає явного алгоритму для послідовного знаходження \bar{y}_i . Методику розв'язування систем вигляду (3.3) розглянемо у наступному параграфі.

§ 4. Метод алгебраїчної прогонки розв'язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \quad (4.1)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \end{cases} \quad (4.2)$$

Замінімо наближено

$$y''(x_i) \approx \frac{\bar{y}(x_{i+1}) - 2\bar{y}(x_i) + \bar{y}(x_{i-1}))}{h^2},$$

$$y'(x_i) \approx \frac{\bar{y}(x_{i+1}) - \bar{y}(x_{i-1}))}{2h}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

та

$$y'(a) \approx \frac{\bar{y}(x_1) - \bar{y}(x_0)}{h}, \quad y'(b) \approx \frac{\bar{y}(x_{n-1}) - \bar{y}(x_n)}{-h},$$

де

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

У результаті одержуємо різницеву схему

$$\begin{cases} \frac{\bar{y}_{i+1} - 2\bar{y}_i + \bar{y}_{i-1}}{h^2} + g_i \frac{\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_{i-1}}{2h} + h_i \bar{y}_i = f_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \alpha_1 \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{h} + \alpha \bar{y}_0 = A, \\ \beta_1 \frac{\bar{y}_n - \bar{y}_{n-1}}{h} + \beta \bar{y}_n = B, \end{cases} \quad (4.3)$$

де

$$g_i = g(x_i), \quad h_i = h(x_i), \quad f_i = f_0(x_i).$$

Аналогічно, як для найпростішої крайової задачі (§ 3 розділу 2) можна переконатись, що для неперервних на $[a, b]$ функцій $g'(x)$, $h''(x)$, $f_0''(x)$ схема (4.3) має порядок апроксимації $k = 2$.

Для дослідження розв'язності цієї схеми запишемо її у такому загальному вигляді

$$\begin{cases} A_i \bar{y}_{i-1} - C_i \bar{y}_i + B_i \bar{y}_{i+1} = F_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = m \bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma \bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \quad (4.4)$$

Зокрема, для схеми (4.3)

$$A_i = \frac{1}{h^2} - \frac{g_i}{2h}, \quad C_i = \frac{2}{h^2} - h_i, \quad B_i = \frac{1}{h^2} + \frac{g_i}{2h}, \quad F_i = f_i,$$

$$m = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha h}, \quad k = \frac{-Ah}{\alpha_1 - \alpha h}, \quad \gamma = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta h}, \quad \delta = \frac{Bh}{\beta_1 + \beta h}.$$

При цьому, вважаємо, що знаменники наведених виразів не дорівнюють нулю (достатні умови цього будуть проаналізовані пізніше).

Шукатимемо такі коефіцієнти m_i та k_i , щоб виконувалися рівності

$$\bar{y}_{i-1} = m_i \bar{y}_i + k_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Тоді з (4.4) одержуємо

$$(A_i m_i - C_i) \bar{y}_i + B_i \bar{y}_{i+1} + (A_i k_i - F_i) = 0.$$

Підставляючи сюди $\bar{y}_i = m_{i+1}\bar{y}_{i+1} + k_{i+1}$, приходимо до рівності

$$\left[(A_i m_i - C) m_{i+1} + B_i \right] \cdot \bar{y}_{i+1} + \left[(A_i m_i - C) k_{i+1} + A_i k_i - F_i \right] = 0. \quad (4.6)$$

Для тотожного виконання рівності (4.6) достатньо прирівняти до нуля вирази у квадратних дужках. Звідси, за умови, що $C_i - A_i m_i \neq 0$, знаходимо

$$m_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i m_i}, \quad k_{i+1} = \frac{A_i k_i - F_i}{C_i - A_i m_i}, \quad (4.7)$$

де $m_1 = m$, $k_1 = k$. Знайшовши m_n та k_n з системи

$$\begin{cases} \bar{y}_{n-1} = m_n \bar{y}_n + k_n, \\ \bar{y}_n = \gamma \bar{y}_{n-1} + \delta, \end{cases}$$

за умови, що $1 - \gamma m_n \neq 0$, одержуємо

$$\bar{y}_n = \frac{\gamma k_n + \delta}{1 - \gamma m_n}. \quad (4.8)$$

Маючи \bar{y}_n , за формулами (4.5) можемо послідовно знайти

$$\bar{y}_{n-1}, \dots, \bar{y}_1, \bar{y}_0.$$

Зазначимо, що для застосування такого методу достатньо, щоб виконувались такі умови:

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 0 \leq m < 1, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (4.9)$$

Справді, у цьому випадку для $i = 1, \dots, n$ будемо мати $0 \leq m_i < 1$, а отже, жоден з знаменників у формулах (4.7) та (4.8) не перетворюється в нуль.

Для схеми (4.3) умови (4.9) виконуються, якщо

$$\begin{cases} h(x) \leq 0, \\ h \cdot \max_{x \in [a,b]} |g(x)| < 2, \\ \alpha_1 / \alpha \leq 0, \\ \beta_1 / \beta \geq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Зауважимо, що для другої задачі, в якій $\alpha = \beta = 0$, отримаємо

$m = \gamma = 1$. У цьому випадку додатково вимагатимемо виконання строгих нерівностей $C_i > A_i + B_i$ та $n > 1$.

Якщо тільки $\alpha = 0$ або $\beta = 0$, то метод алгебраїчної прогонки буде реалізований і при $C_i = A_i + B_i$.

Наголошуємо, що умови (4.10) є тільки достатніми для реалізації методу алгебраїчної прогонки. Але ці умови є суттєвими, бо при їх виконанні не відбувається накопичення похибок проміжних обчислень. Підтвердженням цього твердження може бути приклад 2.2, який розглянемо пізніше, де невиконання згаданих умов приведе до значних похибок в отриманому наближеному розв'язку.

Приклад 2.1. Методом алгебраїчної прогонки знайти наближений розв'язок рівняння

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (4.11)$$

який задовольняє крайові умови

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (4.12)$$

Розв'язання. Маємо $g(x) = -2x$, $h(x) = -2$, $f_0(x) = -4x$,

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta = 1, \quad A = 0, \quad B = 1 + e.$$

Оскільки $\max_{x \in [0;1]} |g(x)| = 2$, то для $h < 1$ умови (4.10) виконуються.

Наведемо результати числового розв'язання крайової задачі (4.11), (4.12) з кроком $h = 0,1$ у порівнянні з значеннями її точного розв'язку $y(x) = x + e^{x^2}$:

x	y	Значення точного розв'язку
0	1,046537	1
0,1	1,151191	1,11005
0,2	1,277175	1,240811
0,3	1,426202	1,394174
0,4	1,601483	1,573511

0,5	1,808068	1,784025
0,6	2,053411	2,033329
0,7	2,348233	2,332316
0,8	2,707827	2,696481
0,9	3,154044	3,147908
1	3,718282	3,718282

Наведемо приклад, який ілюструє, що при невиконанні достатніх умов (4.10) похибки обчислень можуть бути достатньо великими.

Приклад 2.2. Розв'язати методом алгебраїчної прогонки крайову задачу $y'' - 4y' + 4y = xe^x$, $y'(0) - y(0) = 1$, $y'(1) + y(1) = 7e$.

Розв'язання. Точним розв'язком цієї крайової задачі є $y = e^x(x + 2)$. Тут $g(x) = -4$, $h(x) = 4$, $f_0(x) = xe^x$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta = 1$, $A = 1$, $B = 7e$. Умова $h(x) \leq 0$ не виконується. У результаті маємо:

x	y	Значення точного розв'язку
0	1,196251	2,0
0,1	1,415876	2,320859
0,2	1,675902	2,687086
0,3	1,985198	3,104675
0,4	2,359945	3,580379
0,5	2,799277	4,121803
0,6	3,336115	4,737509
0,7	3,988233	5,437133
0,8	4,784614	6,231515
0,9	5,762223	7,132849
1,0	6,968188	8,154845

§ 5. Інший підхід до розв'язування систем з трьохдіагональною матрицею

Повернемося до системи (4.4), вважаючи коефіцієнти A_i, B_i, C_i сталими, і запишемо її у вигляді

$$\begin{cases} A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = F_i, & i = 1, \dots, n-1, \\ \bar{y}_0 = m\bar{y}_1 + k, \\ \bar{y}_n = \gamma\bar{y}_{n-1} + \delta. \end{cases} \quad (5.1)$$

Припустимо, що $A > 0, B > 0, C > A + B$. Розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$A\bar{y}_{i-1} - C\bar{y}_i + B\bar{y}_{i+1} = 0 \quad (5.2)$$

шукатимемо у вигляді $\bar{y}_i = \lambda^i$, $\lambda \neq 0$. Якщо підставити $\bar{y}_i = \lambda^i$ у (5.2), то одержимо характеристичне рівняння $A - C\lambda + B\lambda^2 = 0$ з невід'ємним дискримінантом:

$$D = C^2 - 4AB > (A + B)^2 - 4AB = (A - B)^2 \geq 0.$$

Таким чином, існують два прості додатні корені цього характеристичного рівняння, які позначимо λ_1 та λ_2 , а отже, загальним розв'язком рівняння (5.2) є

$$\bar{y}_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.3)$$

Оскільки функція $f_0(x)$ неперервна, то наближено одержуємо

$$F_{i+1} \approx F_i \quad \text{і} \quad F_{i-1} \approx F_i.$$

Тому за частинний розв'язок рівняння (5.1) можна взяти

$$\bar{y}_{ic} \approx \frac{F_i}{A + B - C}.$$

Загальний розв'язок системи (5.1) одержуємо у вигляді

$$\bar{y}_i = C_1\lambda_1^i + C_2\lambda_2^i + \frac{F_i}{A + B - C}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (5.4)$$

Вважаючи, що рівність (5.4) виконується також для $i=0$ та $i=n$, з двох останніх рівнянь системи (5.1) знаходимо значення коефіцієнтів C_1 та C_2 . Підставляючи їх у (5.4), можемо знайти \bar{y}_i для всіх $i=0,1,\dots,n$.

Зауважимо, що при цьому розв'язок відповідного однорідного рівняння знайдено точно ([7]). А використання заміни частинного розв'язку його наближенням є правомірним, бо при $n \rightarrow \infty$ різниця між ними прямує до нуля.

Це ж стосується і коефіцієнтів C_1, C_2 : чим більше n , тим точніше вони будуть знайдені.

Приклад 2.3. Знайти наближений розв'язок крайової задачі $y'' - y = x$, $y(0) = y(1) = 0$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Різницева схема для крайової задачі має вигляд

$$\frac{\bar{y}_{i-1}}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right)\bar{y}_i + \frac{\bar{y}_{i+1}}{h^2} = x_i,$$

причому $A + B - C = -1 \neq 0$. За формулою (5.4) знаходимо

$$\bar{y}_i = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i - x_i,$$

де λ_1, λ_2 – корені квадратного рівняння

$$\frac{\lambda^2}{h^2} - \left(1 + \frac{2}{h^2}\right)\lambda + \frac{1}{h^2} = 0.$$

$$\text{Отже, } \lambda_1 = \frac{2 + h^2 + \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2 + h^2 - \sqrt{h^4 + 4h^2}}{2}.$$

Покладемо $n=10$. Тоді $h=0,1$, $\lambda_1 \approx 1,105$, $\lambda_2 \approx 0,905$.

Враховуючи крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 \lambda_1^{10} + C_2 \lambda_2^{10} = 1, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx 0,426, \quad C_2 = \frac{-1}{\lambda_1^{10} - \lambda_2^{10}} \approx -0,426.$$

Отже, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}_i = 0,426 \cdot (1,105^i - 0,905^i) - x_i, \quad i = 0,1,\dots,10.$$

Порівняємо одержаний результат з точним розв'язком

$$y(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{e^2 - 1} - x.$$

Результати обчислень наведені у таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y_i	—	—	—	—	—	—	—	—	—
\bar{y}_i	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Бачимо, що у точках x_i значення наближеного розв'язку збігаються зі значеннями y_i точного розв'язку з точністю до 0,001. ■

§ 6. Метод колокації

Розглянемо рівняння

$$L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \quad (6.1)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (6.2)$$

де $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0, |\beta_1| + |\beta| \neq 0$.

Спробуємо наближений розв'язок задачі (6.1), (6.2) знайти у вигляді аналітичного виразу. Для цього виберемо спочатку сукупність лінійно незалежних функцій $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$, щоб $u_0(x)$ задовольняла умови (6.2), а інші функції – відповідні однорідні крайові умови. Якщо $A = B = 0$, то вважатимемо, що $u_0(x) \equiv 0$.

Наближений розв'язок задачі (6.1), (6.2) шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x). \quad (6.3)$$

Функція $\bar{y}(x)$ задовольняє крайові умови (6.2) для довільних сталих c_i , $i = 1, \dots, n$. Доберемо коефіцієнти c_i , $i = 1, \dots, n$, так, щоб $\bar{y}(x)$ у певному сенсі найбільш точно задовольняла рівняння (6.1).

Підставляючи (6.3) у рівняння (6.1), одержуємо

$$R(x, c_1, \dots, c_n) \equiv L[\bar{y}] - f_0(x) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i]. \quad (6.4)$$

Якщо для деякого набору коефіцієнтів c_i , $i = 1, \dots, n$, виконується рівність

$$R(x, c_1, \dots, c_n) \equiv 0, \quad a \leq x \leq b,$$

то функція $\bar{y}(x)$ є точним розв'язком. Але так вдало підібрати коефіцієнти, взагалі кажучи, неможливо. Тому будемо вимагати, щоб функція $R(x, c_1, \dots, c_n)$ перетворювалася в нуль на деякому наборі точок x_1, \dots, x_n з відрізка $[a, b]$. Ці точки називають **точками колокації**.

Таким чином, коефіцієнти c_i , $i = 1, \dots, n$, можуть бути визначені з системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} R(x_1, c_1, \dots, c_n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ R(x_n, c_1, \dots, c_n) = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

якщо вона є сумісною. З практичної точки зору важливо, щоб система (6.5) мала ранг $r = n$. Якщо $r < n$, то до точок колокації доцільно додати ще $n - r$ нових точок і знову дослідити новоутворену систему на сумісність.

Приклад 2.4. Розв'язати методом колокації на відрізку $[0; 1]$ крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (6.6)$$

Розв'язання. Розглянемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3.$$

Функція $u_0(x)$ задовольняє крайові умови з (6.6), а функції $u_1(x)$ та $u_2(x)$ – відповідні однорідні умови.

Нехай

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3).$$

Тоді

$$\bar{y}'(x) = 2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2),$$

$$\bar{y}''(x) = 2 + e^x + c_1(6x - 2) + c_2(12x^2 - 6x).$$

Отже,

$$\begin{aligned} R(x, c_1, c_2) = & 2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x + \\ & + c_1 \cdot (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2) + c_2 \cdot (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Виберемо точки колокації $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$. У результаті одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2c_1 + 1 = 0, \\ 2c_1 + 4c_2 - 3e = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3e - 1}{4}.$$

Отже, наближено маємо

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2) + \frac{3e - 1}{4}(x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, $\bar{y}(0,5)$ і точне значення $y(0,5)$:

$$\bar{y}(0,5) = 0,5^2 + e^{0,5} + \frac{1}{2}(0,5^3 - 0,5^2) + \frac{3e - 1}{4}(0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,724427,$$

$$y(0,5) = 0,5 + e^{0,25} \approx 1,784025. \blacksquare$$

Для досягнення більшої точності потрібно взяти значення $n > 2$. Але і для $n = 2$ добитися кращої точності іноді вдається за рахунок більшої щільності точок колокації. Зокрема, у прикладі 2.4 доцільніше було вибрати $x_1 = 1/4$, $x_2 = 3/4$ або $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$.

§ 7. Метод найменших квадратів

Розглянемо крайову задачу

$$\begin{cases} y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \end{cases} \quad (7.1)$$

Дотримуючись позначень попереднього параграфа, розв'язок задачі (7.1) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x), \quad (7.2)$$

але тепер вимагатимемо, щоб

$$I = \int_a^b R^2(x, c_1, \dots, c_n) dx \quad (7.3)$$

набував мінімуму (*інтегральний метод найменших квадратів*). Для цього необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial c_1} = 2 \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial I}{\partial c_n} = 2 \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_n} dx = 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Приклад 2.5. Інтегральним методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (7.5)$$

Розв'язання. Візьмемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3,$$

які задовольняють відповідні крайові умови. Тоді

$$R(x, c_1, c_2) = 2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x + c_1(-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2) + c_2(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x) \equiv g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x).$$

Оскільки

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -8x^3 + 6x^2 + 6x - 2 \equiv g_1(x),$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_2} = -10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x \equiv g_2(x),$$

то система (7.4) має вигляд

$$\begin{cases} \int_0^1 (g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x))g_1(x)dx = 0, \\ \int_0^1 (g_0(x) + c_1g_1(x) + c_2g_2(x))g_2(x)dx = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} c_1 \int_0^1 g_1^2(x)dx + c_2 \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = -\int_0^1 g_0(x)g_1(x)dx, \\ c_1 \int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx + c_2 \int_0^1 g_2^2(x)dx = -\int_0^1 g_0(x)g_2(x)dx. \end{cases}$$

З цієї системи можна знайти значення коефіцієнтів c_1 і c_2 . Для цього обчислимо спочатку визначені інтеграли з цієї системи:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1^2(x)dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)^2 dx = \\ &= 4 \int_0^1 (16x^6 - 24x^5 - 15x^4 + 26x^3 + 3x^2 - 6x + 1) dx = \frac{22}{7}; \end{aligned}$$

$$\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)dx =$$

$$= 4 \int_0^1 (20x^7 - 31x^6 - 27x^5 + 47x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 3x)dx = \frac{101}{35};$$

$$\int_0^1 g_0(x)g_1(x)dx = \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (24x^5 - 34x^4 - 14x^3 + 24x^2 + 2x - 2 + e^x(8x^4 - 2x^3 - 9x^2 - x + 1))dx =$$

$$= -\frac{1873}{5} + 136e;$$

$$\int_0^1 g_2^2(x)dx = \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)^2 dx =$$

$$= 4 \int_0^1 (25x^8 - 40x^7 - 44x^6 + 78x^5 + 12x^4 - 36x^3 + 9x^2)dx = \frac{1124}{315};$$

$$\int_0^1 g_0(x)g_2(x)dx =$$

$$= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (30x^6 - 44x^5 - 30x^4 + 50x^3 - 6x + e^x(10x^5 - 3x^4 - 16x^3 + 3x))dx =$$

$$= \frac{49537}{21} - 870e.$$

Отже, маємо систему

$$\begin{cases} \frac{22}{7}c_1 + \frac{101}{35}c_2 = \frac{1873}{5} - 136e, \\ \frac{101}{35}c_1 + \frac{1124}{315}c_2 = -\frac{49537}{21} + 870e, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \frac{22 \cdot 5}{101} c_1 + c_2 = \frac{1873 \cdot 7}{101} - \frac{136 \cdot 35}{101} e, \\ \frac{101 \cdot 9}{4 \cdot 281} c_1 + c_2 = -\frac{49537 \cdot 15}{4 \cdot 281} + \frac{870 \cdot 9 \cdot 35}{4 \cdot 281} e. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння системи друге, одержуємо

$$\begin{aligned} & \frac{123640 - 91809}{101 \cdot 4 \cdot 281} c_1 = \\ & = \frac{14736764 + 75048555}{101 \cdot 4 \cdot 281} - \frac{5350240 + 27679050}{101 \cdot 4 \cdot 281} e, \\ & 31831 c_1 = 89785319 - 33029290 e, \\ & c_1 = \frac{89785319 - 33029290 e}{31831} \approx 0,075402. \end{aligned}$$

Підставляючи значення сталої c_1 в перше рівняння системи, знаходимо

$$c_2 \approx 1,620636.$$

Таким чином, наближеним розв'язком крайової задачі (7.5) є

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,075402 \cdot (x^3 - x^2) + 1,620636 \cdot (x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, $\bar{y}(0,5)$ і порівняємо його із точним значенням $y(0,5)$:

$$\begin{aligned} \bar{y}(0,5) &= 0,5^2 + e^{0,5} + 0,075402 \cdot (0,5^3 - 0,5^2) + \\ &+ 1,620636(0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,788006, \\ y(0,5) &= 0,5 + e^{0,25} \approx 1,784025. \blacksquare \end{aligned}$$

Замість мінімуму інтеграла (7.3) можна шукати мінімум скінченної суми (**точковий метод найменших квадратів**)

$$I_N = \sum_{i=1}^N R^2(x_i, c_1, \dots, c_n),$$

де x_1, \dots, x_n – деяка достатньо щільна сукупність точок відрізка $[a, b]$, $N \geq n$. При цьому одержуємо такі необхідні умови мінімуму

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N R_i \frac{\partial R_i}{\partial c_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^N R_i \frac{\partial R_i}{\partial c_n} = 0, \end{array} \right. \quad (7.6)$$

де $R_i = R(x_i, c_1, \dots, c_n)$.

Зокрема, розв'язуючи крайову задачу (7.5), одержуємо систему

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \sum_{i=1}^N g_1^2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N g_1(x_i)g_2(x_i) = -\sum_{i=1}^N g_0(x_i)g_1(x_i), \\ c_1 \sum_{i=1}^N g_1(x_i)g_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^N g_2^2(x_i) = -\sum_{i=1}^N g_0(x_i)g_2(x_i). \end{array} \right.$$

Зауважимо, що для випадку $N = n$ значення сталих c_1, \dots, c_n у системі (7.6) можна знайти методом колокації.

§ 8. Метод Гальоркіна

Застосування *методу Гальоркіна* ґрунтується на відомій теоремі з теорії рядів Фур'є про тотальність повної ортогональної системи, доведення якої можна знайти, наприклад, в [4] (розділ 4, § 8).

Теорема 2.1. *Якщо $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, – повна ортогональна сукупність функцій на відрізку $[a, b]$, а $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$ функція, ортогональна на $[a, b]$ до всіх $u_n(x)$, тобто*

$$\int_a^b f(x)u_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

то $f(x) \equiv 0$, $a \leq x \leq b$.

У загальному випадку для повної ортогональної системи $\{u_n(x)\}$ маємо

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

де

$$c_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_a^b f(x) u_n(x) dx, \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x) dx,$$

причому справджується **рівність Парсеваля**

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2.$$

Припускаючи, що $f(x)$ ортогональна лише до функцій $u_1(x), \dots, u_N(x)$, маємо

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Таким чином, функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ виявиться для великих N в середньому квадратичному достатньо малою.

Повернемося до крайової задачі

$$\begin{cases} L[y] \equiv y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \\ \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \quad (8.3)$$

розв'язок якої знову шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(x), \quad (8.4)$$

де $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ задовольняють відповідні крайові умови, описані у § 6. Аналогічно одержуємо

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[u_0] - f_0(x) + \sum_{i=1}^n c_i L[u_i].$$

Для того, щоб зробити цю нев'язку у середньому квадратичному якомога меншою, вимагатимемо ортогональності R до функцій $u_1(x), \dots, u_n(x)$, тобто

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_1(x) dx = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \int_a^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_n(x) dx = 0. \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Систему (8.5) можна записати також у вигляді

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b u_j(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_j(x) (f(x) - L[u_0]) dx, \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.6)$$

Приклад 2.6. Розв'язати методом Гальоркіна на відрізьку $[0;1]$ крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (8.7)$$

Розв'язання. Виберемо функції

$$u_0(x) = x^2 + e^x, \quad u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3.$$

Виконання відповідних крайових умов для цих функцій було встановлено раніше. Перевіримо ортогональність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$ на відрізьку $[0;1]$. Оскільки

$$\int_0^1 u_1(x) u_2(x) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2)(x^4 - x^3) dx = \frac{1}{168} \neq 0,$$

то умова ортогональності не виконується, але відхилення від нуля є досить незначним. Нехтуючи цим відхиленням, шукатимемо розв'язок у вигляді

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3).$$

Враховуючи (6.7) та відповідні позначення з § 7 цього розділу, систему (8.5) запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2) dx + c_2 \int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2) dx = - \int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2) dx, \\ c_1 \int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3) dx + c_2 \int_0^1 g_2(x)(x^4 - x^3) dx = - \int_0^1 g_0(x)(x^4 - x^3) dx. \end{array} \right.$$

З цієї системи знайдемо коефіцієнти c_1 та c_2 . Для цього обчислимо спочатку значення інтегралів:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_1(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^3 - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^6 + 7x^5 - 4x^3 + x^2) dx = -\frac{1}{7};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_2(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)(x^3 - x^2) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-5x^7 + 9x^6 + 2x^5 - 9x^4 + 3x^3) dx = -\frac{47}{420};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_0(x)(x^3 - x^2) dx &= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(x^3 - x^2) dx = \\ &= \int_0^1 (-6x^5 + 10x^4 - 2x^3 - 2x^2 + e^x(-2x^4 + x^3 + x^2)) dx = \frac{311}{6} - 19e;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_1(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (-8x^3 + 6x^2 + 6x - 2)(x^4 - x^3) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-4x^7 + 7x^6 - 4x^4 + x^3) dx = -\frac{1}{10};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_2(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (-10x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 6x)(x^4 - x^3) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (-5x^8 + 9x^7 + 2x^6 - 9x^5 + 3x^4) dx = -\frac{113}{1260};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_0(x)(x^4 - x^3) dx &= \int_0^1 (2 + 4x - 6x^2 - e^x - 2xe^x)(x^4 - x^3) dx = \\ &= \int_0^1 (-6x^6 + 10x^5 - 2x^4 - 2x^3 + e^x(-2x^5 + x^4 + x^3)) dx = -\frac{54199}{210} + 95e.\end{aligned}$$

Отже, для знаходження c_1 і c_2 одержуємо систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{7}c_1 - \frac{47}{420}c_2 = -\frac{311}{6} + 19e, \\ -\frac{1}{10}c_1 - \frac{113}{1260}c_2 = \frac{54199}{210} - 95e, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} -c_1 - \frac{47}{60}c_2 = -\frac{2177}{6} + 133e, \\ c_1 + \frac{113}{126}c_2 = -\frac{54199}{21} + 950e. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо наближені значення сталих c_1, c_2 :

$$c_1 \approx 0,189738, \quad c_2 \approx -1,419717.$$

Таким чином, наближеним розв'язком крайової задачі (8.7) є

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,189738 \cdot (x^3 - x^2) + 1,419717 \cdot (x^4 - x^3).$$

Для порівняння обчислимо, наприклад, значення $\bar{y}(0,5)$:

$$\begin{aligned} \bar{y}(0,5) &= 0,5^2 + e^{0,5} + 0,189738 \cdot (0,5^3 - 0,5^2) + \\ &+ 1,419717 \cdot (0,5^4 - 0,5^3) \approx 1,786272. \blacksquare \end{aligned}$$

Одержали точніше значення розв'язку при $x=0,5$, ніж у §§ 6,7 (приклади 2.4, 2.5). Значенням точного розв'язку при $x=0,5$ є

$$y(0,5) = 0,5 + e^{0,25} = 1,784025.$$

Зауважимо, що для більшої точності кількість функцій $u_i(x)$ необхідно збільшити. Їх можна вибирати серед функцій вигляду

$$u_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

§ 9. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі

Нехай в області G з межею Γ задано лінійне диференціальне рівняння з неперервними коефіцієнтами (звичайне або з частинними похідними) і потрібно знайти розв'язок цього рівняння, який на межі Γ задовольняє лінійні крайові умови.

Розглянемо ліву частину цього рівняння як лінійний оператор L , визначений на множині K функцій, які мають неперервні похідні відповідного порядку у $G \cup \Gamma$ та задовольняють задані крайові умови. Функції з класу K називають *допустимими функціями*.

Таким чином, неоднорідна крайова задача запишеться у вигляді

$$L[u] = f(P), \quad P \in G, \quad (9.1)$$

$$R[u] = \varphi(P), \quad P \in \Gamma, \quad (9.2)$$

де R – відомий лінійний функціонал або оператор нижчого порядку, ніж L , f та φ – відомі функції, які будемо вважати неперервними.

Зауважимо, що неоднорідну крайову задачу (9.1), (9.2) можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, зробивши заміну $u = v + u_0$, де $v = v(x)$ – нова невідома функція, $u_0 = u_0(x)$ належить області визначення оператора L (а, отже, й оператора R), причому $R[u_0] = \varphi(P)$. Тоді з (9.1), (9.2) одержуємо

$$L[v] = f(P) - L[u_0], \quad R[v] = 0.$$

Оскільки функцію u_0 , як правило, неважко знайти підбором, то надалі будемо вважати, що $\varphi(P) = 0$, і розглядатимемо крайову умову (9.2) у вигляді

$$R[u] = 0, \quad P \in \Gamma, \quad (9.3)$$

а відповідний клас K позначимо через K_0 .

Оператор L називають *симетричним*, якщо для будь-яких допустимих функцій u та v справджується рівність

$$\int_G v \cdot L[u] d\omega = \int_G u \cdot L[v] d\omega$$

або $(L[u], v) = (u, L[v])$.

Оператор L називають *додатним*, якщо для будь-яких допустимих функцій u справджується нерівність

$$(L[u], u) \geq 0,$$

причому $(L[u], u) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u \equiv 0$.

Приклад 2.7. Довести, що оператор $L[u] = -u''$, визначений на множині двічі неперервно диференційовних на відрізьку $[0;1]$ функцій, для яких $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$, є симетричним і додатним.

Доведення. Для будь-яких допустимих функцій u та v маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 (v L[u] - u L[v]) dx &= \int_0^1 (-vu'' + uv'') dx = \\ &= \int_0^1 (uv' - vu')' dx = (uv' - vu') \Big|_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_0^1 v \cdot L[u] dx = \int_0^1 u \cdot L[v] dx,$$

звідки й випливає симетричність оператора L . Окрім того,

$$(L[u], u) = \int_0^1 (u, L[u]) dx = - \int_0^1 uu'' dx = -uu' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'^2 dx = \int_0^1 u'^2 dx \geq 0,$$

причому $(L[u], u) = 0$ лише тоді, коли $u \equiv 0$, оскільки це єдина допустима функція, для якої з врахуванням крайових умов виконується тотожність $u' \equiv 0$. Отже, оператор L додатний. ■

Теорема 2.2. Нехай L – додатний лінійний оператор, визначений у класі допустимих функцій K_0 . Тоді, якщо існує розв’язок задачі (9.1), (9.3), то він єдиний.

Доведення. Якщо u_1 та u_2 – два розв’язки задачі (9.1), (9.3) у класі K_0 , тобто $L[u_1] \equiv f(P)$, $R[u_1] \equiv 0$ і $L[u_2] \equiv f(P)$, $R[u_2] \equiv 0$, то $L[u_1 - u_2] \equiv 0$, $R[u_1 - u_2] \equiv 0$. Отже, $u_1 - u_2 \in K_0$. Домноживши скалярно перше з отриманих рівнянь на $u_1 - u_2$, одержуємо

$$(L[u_1 - u_2], u_1 - u_2) = 0,$$

а оскільки за умовою оператор L додатний у класі K_0 , то одержуємо $u_1 - u_2 \equiv 0$, тобто $u_1 \equiv u_2$, що й потрібно було довести. ►

§ 10. Зведення лінійної крайової задачі до розв’язування варіаційної задачі

Ідея варіаційного методу розв’язування крайових задач полягає у тому, що задача (9.1), (9.3) замінюється рівносильною задачею відшукування функції, яка надає екстремуму деякому функціоналу.

Теорема 2.3. Нехай L – симетричний лінійний оператор, визначений і додатний у класі допустимих функцій K_0 , а $F[u]$ – функціонал вигляду

$$F[u] = (L[u], u) - 2(f, u) \equiv \int_G (L[u] - 2f) \cdot u \, d\omega, \quad (10.1)$$

де $f = f(P)$ – права частина рівняння (9.1). Тоді, якщо крайова задача (9.1), (9.3) має розв’язок $u = \bar{u}$, то на цьому розв’язку досягається мінімум функціоналу $F[u]$.

Доведення. Якщо \bar{u} – розв’язок задачі (9.1), (9.3), то

$$L[\bar{u}] \equiv f(P), \quad R[\bar{u}] \equiv 0.$$

Окрім того, з симетричності оператора L випливає, що

$$(L[\bar{u}], u) = (\bar{u}, L[u]) = (L[u], \bar{u}).$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 F[u] &= (L[u], u) - 2(f, u) = (L[u], u) - 2(L[\bar{u}], u) = \\
 &= (L[u], u) - (L[u], \bar{u}) - (L[\bar{u}], u) = \\
 &= (L[u], u - \bar{u}) - ((L[\bar{u}], u) - (L[\bar{u}], \bar{u})) - (L[\bar{u}], \bar{u}) = \\
 &= (L[u], u - \bar{u}) - (L[\bar{u}], u - \bar{u}) - (L[u], \bar{u}) = \\
 &= (L[u - \bar{u}], u - \bar{u}) - (L[\bar{u}], \bar{u}) \geq - (L[\bar{u}], \bar{u}),
 \end{aligned}$$

причому, оскільки оператор L є додатним, то рівність досягається лише тоді, коли $u - \bar{u} \equiv 0$, тобто $u \equiv \bar{u}$. Таким чином,

$$\min_{u \in K_0} F[u] = F[\bar{u}] = - (L[\bar{u}], \bar{u}). \blacktriangleright$$

Зауваження. Теорема 2.3 дає можливість звести розв'язування крайової задачі (9.1), (9.3) до знаходження функції \bar{u} , на якій функціонал $F[u]$ набуває мінімуму. Справджується й обернене твердження: якщо у класі K_0 існує функція \bar{u} , на якій досягається мінімум функціоналу $F[u]$, то ця функція є розв'язком рівняння (9.1).

З теореми 2.3 та зауваження до неї випливає, що крайова задача (9.1), (9.3) із симетричним додатним оператором L рівносильна варіаційній задачі відшукування функції \bar{u} , на якій досягається мінімум функціоналу $F[u]$, визначеного рівністю (10.1).

§ 11. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі

Розглянемо рівняння

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x) \tag{11.1}$$

з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = 0, \end{cases} \tag{11.2}$$

де $g(x), h(x), f_0(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції,
 $\alpha_1^2 + \alpha^2 \neq 0, \beta_1^2 + \beta^2 \neq 0$.

Помноживши обидві частини рівняння (11.1) на функцію

$$p(x) = e^{\int_a^x g(t) dt} > 0,$$

запишемо це рівняння у вигляді

$$(p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (11.3)$$

де

$$q(x) = -h(x)p(x), \quad f(x) = f_0(x)p(x),$$

причому функції $q(x), f(x)$ та $p'(x)$ – неперервні на $[a, b]$.

За допомогою лінійного оператора

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y \quad (11.4)$$

рівняння (11.3) можна записати у вигляді

$$L[y] = -f(x). \quad (11.5)$$

Покажемо, що оператор L у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій, які задовольняють крайові умови (11.2), є симетричним. Справді, якщо $u \in K_0$ та $v \in K_0$, то з (11.4) одержуємо

$$\begin{aligned} & (L[u], v) - (u, L[v]) = \\ & = \int_a^b \left(\left(-(p(x)v')' + q(x)v \right) v - \left(-(p(x)u')' + q(x)u \right) u \right) dx = \\ & = \int_a^b (p(x)(uv'' - vu'') + p'(x)(uv' - vu')) dx = \\ & = \int_a^b (p(x)(uv' - vu'))' dx = p(x)(uv' - vu') \Big|_a^b = p(b)\omega(b) - p(a)\omega(a), \end{aligned}$$

де $\omega(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$.

Оскільки функції $u(x)$ та $v(x)$ задовольняють однорідні крайові умови

$$\begin{aligned}\alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) &= 0, & \beta_1 u'(b) + \beta u(b) &= 0, \\ \alpha_1 v'(a) + \alpha v(a) &= 0, & \beta_1 v'(b) + \beta v(b) &= 0\end{aligned}$$

відповідно, то $\omega(a) = \omega(b) = 0$. Отже,

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

тобто оператор L є симетричним у класі K_0 .

З'ясуємо, за яких умов цей оператор буде додатним. Для функції $y \in K_0$

$$\begin{aligned}(L[y], y) &= \int_a^b \left(-(p(x)y')' + q(x)y \right) y \, dx = \\ &= - \int_a^b (p(x)y')' y \, dx + \int_a^b q(x)y^2 \, dx = \\ &= -p(x)yy'|_a^b + \int_a^b p(x)y'^2 \, dx + \int_a^b q(x)y^2 \, dx.\end{aligned}\tag{11.6}$$

Оскільки $p(x) > 0$, то для того, щоб оператор L був додатним, достатньо, щоб справджувались умови

$$q(x) > 0, \quad y(a) \cdot y'(a) \geq 0, \quad y(b) \cdot y'(b) \leq 0.\tag{11.7}$$

Використовуючи рівність (11.2), умови (11.7) можна записати у вигляді

$$q(x) > 0, \quad \alpha \cdot \alpha_1 \leq 0, \quad \beta \cdot \beta_1 \geq 0.\tag{11.8}$$

Таким чином, якщо справджуються умови (11.8), то крайова задача (11.1), (11.2) рівносильна задачі про мінімум у класі K_0 функціоналу

$$F[y] = (L[y], y) + 2(f, y).\tag{11.9}$$

Враховуючи (11.6), одержуємо

$$F[y] = p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \int_a^b (p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y) dx. \quad (11.10)$$

Очевидно, що для дослідження на мінімум функціонала $F[y]$ досить дослідити на мінімум інтегральний доданок у виразі (11.10), який позначимо через $\Phi[y]$.

§ 12. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов

Розглянемо крайову задачу для рівняння (11.1) з неоднорідними умовами

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \quad (12.1)$$

Її розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x) = z(x) + y_0(x),$$

де $y_0(x)$ – двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$ функція, яка задовольняє умови (12.1), а $z(x)$ – розв'язок рівняння

$$L[z] = -f(x) - L[y_0] \equiv -f_1(x),$$

який задовольняє відповідні однорідні крайові умови. Розв'язок $z(x)$ на підставі формули (11.10) можна знайти, досліджуючи на мінімум функціонал

$$F_1[z] = p(a)z(a)z'(a) - p(b)z(b)z'(b) + \int_a^b (p(x)z'^2 + q(x)z^2 + 2f_1(x)z) dx \quad (12.2)$$

у класі функцій $z \in K_0$.

Зазначимо, що функцію z можна було і не вводити, а замінити її у формулі (12.2) на $y - y_0$. При цьому мінімум функціонала F_1 потрібно було б шукати у класі K двічі неперервно диференційовних

на відрізку $[a, b]$ функцій, які задовольняють умови (12.1).

Оскільки, крім того,

$$\begin{aligned} F_1[y - y_0] &= (L[y - y_0], y - y_0) + 2(f + L[y - y_0], y - y_0) = \\ &= (L[y], y) + 2(f, y) - (L[y_0], y_0) - 2(f, y_0) + (L[y_0], y) - (L[y], y_0) = \\ &= F[y] - F[y_0] + \int_a^b ((p(x)y')y_0 - (p(x)y'_0)y) dx = \\ &= F[y] - F[y_0] + p(x)(y_0(x)y'(x) - y(x)y'_0(x)) \Big|_a^b = F[y] + C, \end{aligned}$$

то достатньо дослідити на мінімум лише функціонал $\Phi[y]$ у класі K .

§ 13. Наближене розв'язування варіаційної задачі методом Рітца

Розглянемо функціонал

$$F[u] = (L[u], u) - 2(f, u), \quad (13.1)$$

який визначений на множині K функцій u , що задовольняють крайову умову

$$R[u] = \varphi(p), \quad (13.2)$$

де L – додатний лінійний оператор, R – відомий лінійний оператор, f та φ – неперервні функції.

Нехай $u_0(p), u_1(p), \dots, u_n(p)$ – такі функції з області визначення оператора L , що

$$R[u_0] = \varphi(p), \quad R[u_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.3)$$

Позначимо

$$\bar{u}(p) = u_0(p) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(p). \quad (13.4)$$

Оскільки

$$R[\bar{u}] = R[u_0] + \sum_{i=1}^n c_i R[u_i] = \varphi(p) + \sum_{i=1}^n c_i \cdot 0 = \varphi(p),$$

то $\bar{u} \in K$ для будь-яких значень сталих c_1, c_2, \dots, c_n .

Підставимо функцію $\bar{u}(p)$ у функціонал (13.1). Тоді

$$\begin{aligned} F[\bar{u}] &= \left(L \left[u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right], u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right) - 2 \left(f, u_0 + \sum_{i=1}^n c_i u_i \right) = \\ &= (L[u_0], u_0) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_0) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_0], u_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} (L[u_i], u_j) - 2(f, u_0) - 2 \sum_{i=1}^n c_i (f, u_i) \equiv \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n), \end{aligned} \quad (13.5)$$

де Φ – відома функція змінних c_1, c_2, \dots, c_n .

Таким чином, варіаційна задача (13.1), (13.2) зводиться до відшукування точок екстремуму функції $\Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Це приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0, \quad (13.6)$$

з якої можна знайти сталі c_1, c_2, \dots, c_n . Якщо підставити їх у (13.4), то одержимо функцію $\bar{u} \in K$, на якій функціонал $F[\bar{u}]$ набуває екстремуму. Знайдену функцію вважатимемо наближеним розв'язком заданої варіаційної задачі.

Враховуючи (13.5), систему (13.6) у випадку симетричного у класі K_0 оператора L можна записати у вигляді

$$\begin{cases} (L[u_0], u_1) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_1) = (f, u_1), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (L[u_0], u_n) + \sum_{i=1}^n c_i (L[u_i], u_n) = (f, u_n). \end{cases} \quad (13.7)$$

Якщо визначник системи (13.7) відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок. Зауважимо, що у випадку однорідних крайових умов $R[u]=0$ одержуємо $\varphi(p)\equiv 0$. Тоді також $u_0(p)\equiv 0$, а отже, перший доданок у кожному з рівнянь системи (13.7) буде відсутнім.

§ 14. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі

Застосуємо метод Рітца до розв'язування крайової задачі

$$y'' - q(x)y = f(x), \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (14.1)$$

де $q(x)$, $f(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції, $q(x) \geq 0$.

Як випливає з результатів § 11, задача (14.1) зводиться до задачі про мінімум функціоналу $F[y]$, визначеного формулою (11.10), який для задачі (14.1) набуває вигляду

$$F[y] = \int_a^b (p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y) dx \quad (14.2)$$

і розглядається у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[a, b]$ функцій, які на кінцях цього відрізка перетворюються у нуль.

Нехай функції $u_1(x), \dots, u_n(x)$ належать класу K_0 . Розглянемо функцію

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \quad (14.3)$$

і підставимо її у (14.2). Будемо мати:

$$F[\bar{y}] = \int_a^b \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i'(x) \right)^2 + q(x) \left(\sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right)^2 + 2f(x) \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \right) dx.$$

Диференціюючи $F[\bar{y}]$ за змінними c_1, c_2, \dots, c_n і прирівнюючи отримані похідні до нуля, для відшукування c_1, c_2, \dots, c_n одержуємо систему лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (u'_i(x)u'_1(x) + q(x)u_i(x)u_1(x)) dx = - \int_a^b f(x)u_1(x) dx, \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (u'_i(x)u'_n(x) + q(x)u_i(x)u_n(x)) dx = - \int_a^b f(x)u_n(x) dx. \end{array} \right. \quad (14.4)$$

Якщо визначник системи (14.4) відмінний від нуля, то c_1, c_2, \dots, c_n з неї можна знайти однозначно. Підставляючи їх у формулу (14.3), одержимо наближений розв'язок задачі (14.1).

Приклад 2.8. Розв'язати методом Рітца на відрізку $[0;1]$ крайову задачу

$$y'' - y = x, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (14.5)$$

Розв'язання. Функції $q(x) = 1$ і $f(x) = x$ – неперервні на $[0;1]$, причому $q(x) > 0$. Обмежившись випадком $n = 2$, виберемо функції $u_1(x) = x^2 - x$, $u_2(x) = x^3 - x^2$. Тоді $u'_1(x) = 2x - 1$, $u'_2(x) = 3x^2 - 2x$ і система (14.4) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \int_0^1 ((2x-1)^2 + (x^2-x)^2) dx + \\ + c_2 \int_0^1 ((3x^2-2x)(2x-1) + (x^3-x^2)(x^2-x)) dx = - \int_0^1 x(x^2-x) dx, \\ c_1 \int_0^1 ((2x-1)(3x^2-2x) + (x^2-x)(x^3-x^2)) dx + \\ + c_2 \int_0^1 ((3x^2-2x)^2 + (x^3-x^2)^2) dx = - \int_0^1 x(x^3-x^2) dx. \end{array} \right.$$

Виконавши необхідні обчислення, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{11}{30}c_1 + \frac{11}{60}c_2 = \frac{1}{12}, \\ \frac{11}{60}c_1 + \frac{1}{7}c_2 = \frac{1}{20}, \end{cases}$$

з якої знаходимо: $c_1 = \frac{69}{473}$, $c_2 = \frac{7}{43}$.

Таким чином, шуканим наближеним розв'язком є

$$\bar{y}(x) = \frac{69}{473}(x^2 - x) + \frac{7}{43}(x^3 - x^2) \approx 0,163x^3 - 0,017x^2 - 0,146x.$$

Обчислюючи, наприклад, $\bar{y}(0,5) \approx -0,057$, переконуємося, що отриманий результат збігається зі значенням точного розв'язку $y(0,5) = -0,057$, знайденим у § 5. Таким чином, вибір $n = 2$ та функцій $u_1(x), u_2(x)$ виявився вдалим для досягнення точності $\varepsilon = 0,001$. ■

§ 15. Розв'язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами

Розглянемо диференціальне рівняння другого порядку

$$(p(x)y')' - q(x)y = f(x), \quad (15.1)$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції, і задамо неоднорідні крайові умови

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B. \quad (15.2)$$

Будемо вважати також, що $p(x) > 0$, $q(x) > 0$ і

$$\alpha_1 \cdot \alpha \leq 0, \quad \beta_1 \cdot \beta \geq 0.$$

Тоді, як було встановлено у § 12, розв'язання задачі (15.1), (15.2) зводиться до дослідження на мінімум функціонала $\Phi[y]$, визначеного у класі K .

Приклад 2.9. Розв'язати методом Рітца на відрізку $[0; 1]$ крайову задачу

$$y'' - 2xy' - 2y = -4x, \quad (15.3)$$

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 1 + e. \quad (15.4)$$

Розв'язання. Спочатку зведемо рівняння (15.3) до вигляду (15.1). Помноживши обидві частини рівняння (15.3) на функцію

$$p(x) = e^{\int_{-2t}^x dt} = e^{-x^2} > 0,$$

одержуємо

$$\left(e^{-x^2} y' \right)' - 2e^{-x^2} y = -4xe^{-x^2}. \quad (15.5)$$

Таким чином,

$$q(x) = 2e^{-x^2} > 0, \quad f(x) = -4xe^{-x^2},$$

причому функції $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ неперервні на відрізку $[0;1]$. Крім того, оскільки $\alpha_1 = 1$, $\alpha = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta = 1$, то $\alpha_1 \alpha \leq 0$, $\beta_1 \beta \geq 0$.

Розглянемо оператор

$$L[y] = -\left(e^{-x^2} y' \right)' + 2e^{-x^2} y. \quad (15.6)$$

Як доведено у § 11 цього розділу, оператор $L[y]$ є симетричним і додатним у класі K_0 двічі неперервно диференційовних на відрізку $[0;1]$ функцій, які задовольняють відповідні однорідні крайові умови

$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (15.7)$$

Легко перевірити, що функція $u_0(x) = x^2 + e^x$ задовольняє умови (15.4), а функції

$$u_1(x) = x^3 - x^2, \quad u_2(x) = x^4 - x^3$$

задовольняють умови (15.7), причому обидві ці функції – двічі неперервно диференційовні на відрізку $[0;1]$.

Обмежившись випадком $n = 2$, наближений розв'язок крайової задачі (15.3), (15.4) шукатимемо у вигляді

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3). \quad (15.8)$$

При цьому для довільних значень c_1 і c_2 будемо мати

$$\bar{y}(0) = 1, \quad \bar{y}(1) = 1 + e. \quad (15.9)$$

Тоді

$$\Phi[\bar{y}] = \int_0^1 \left((2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2)) \right)^2 +$$

$$+2\left(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)\right)^2 - \\ -8x\left(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)\right) e^{-x^2} dx.$$

Здиференціюємо $\Phi[\bar{y}]$ за змінними c_1 і c_2 :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \int_0^1 \left(2\left(2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2)\right) \cdot (3x^2 - 2x) + \right. \\ \left. + 4\left(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)\right)(x^3 - x^2) - 8x(x^3 - x^2)\right) e^{-x^2} dx,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = \int_0^1 \left(2\left(2x + e^x + c_1(3x^2 - 2x) + c_2(4x^3 - 3x^2)\right) \cdot (4x^3 - 3x^2) + \right. \\ \left. + 4\left(x^2 + e^x + c_1(x^3 - x^2) + c_2(x^4 - x^3)\right)(x^4 - x^3) - 8x(x^4 - x^3)\right) e^{-x^2} dx.$$

Прирівнявши знайдені похідні до нуля, для знаходження невідомих c_1, c_2 одержуємо систему

$$\begin{cases} c_1 \int_0^1 g_{11}(x) dx + c_2 \int_0^1 g_{12}(x) dx = \int_0^1 g_1(x) dx, \\ c_1 \int_0^1 g_{21}(x) dx + c_2 \int_0^1 g_{22}(x) dx = \int_0^1 g_2(x) dx, \end{cases} \quad (15.10)$$

де

$$g_{11}(x) = (2x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 12x^3 + 4x^2) \cdot e^{-x^2},$$

$$g_{12}(x) = (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3) \cdot e^{-x^2},$$

$$g_{21}(x) = (2x^7 - 4x^6 + 14x^5 - 17x^4 + 6x^3) \cdot e^{-x^2},$$

$$g_{22}(x) = (2x^8 - 4x^7 + 18x^6 - 24x^5 + 9x^4) \cdot e^{-x^2},$$

$$g_1(x) = \left(-2x^5 + 6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - (2x^3 + x^2 - 2x)e^x\right) \cdot e^{-x^2},$$

$$g_2(x) = \left(-2x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 6x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 3x^2)e^x\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Оскільки інтеграли у системі (15.10) у скінченному вигляді не беруться, то, обчисливши їх наближено, одержуємо систему

$$\begin{cases} 0,876584 \cdot c_1 + 0,059373 \cdot c_2 = 0,100804, \\ 0,059373 \cdot c_1 + 0,047755 \cdot c_2 = 0,078285, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$c_1 \approx 0,251006, \quad c_2 \approx 1,327222.$$

Отже, шуканий наближений розв'язок має вигляд

$$\bar{y}(x) = x^2 + e^x + 0,251006(x^3 - x^2) + 1,327222(x^4 - x^3). \quad (15.11)$$

Для порівняння його з точним розв'язком $y(x) = x + e^{x^2}$ обчислимо, наприклад, $\bar{y}(0,5) = 1,784394$. Нагадаємо, що $y(0,5) = 1,784025$. Таким чином, вибір $n = 2$ та функцій $u_1(x), u_2(x)$ виявився достатньо вдалим.

Зауважимо також, що $u_0(x)$ можна було шукати також у вигляді $u_0(x) = ax + b$ з невизначеними коефіцієнтами, а інші функції $u_k(x)$ – у вигляді многочленів $(k + 1)$ -го степеня. ■

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II

Розв'язати крайові задачі на інтервалі $(0,1)$:

- 1) методом алгебраїчної прогонки з кроком $h = 0,2$;
- 2) методом колокації ($x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6, x_4 = 0,8$);
- 3) методом Рітца ($n = 2$)

Обчислення проводити з точністю до чотирьох знаків після коми. Результати обчислень оформити у вигляді таблиці:

Метод	$x_0 = 0$	$x_1 = 0,2$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,6$	$x_4 = 0,8$	$x_5 = 1$

- | | |
|---|---|
| <p>1. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 4} y' - xy = x + 1,$
 $y'(0) - 3y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 2.$</p> | <p>2. $y'' + \frac{1}{x+1} y' - xy = x^2 + 1,$
 $y'(0) - 2y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = -2.$</p> |
| <p>3. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' - xy = 2x - 3,$
 $y'(0) - 2y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 1.$</p> | <p>4. $y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 - 1,$
 $3y'(0) - y(0) = 2, y'(1) + 5y(1) = 6.$</p> |
| <p>5. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 3} y' - xy = x - 1,$
 $y'(0) - 2y(0) = 5, 2y'(1) + 3y(1) = 2.$</p> | <p>6. $y'' + \frac{1}{x+3} y' - xy = x^2 + 2,$
 $y'(0) - y(0) = 3, y'(1) + y(1) = 2.$</p> |
| <p>7. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 2} y' - xy = x - 2,$
 $3y'(0) - 2y(0) = 1, y'(1) + 2y(1) = 2.$</p> | <p>8. $y'' + \frac{2}{x+1} y' - xy = x - 2,$
 $2y'(0) - 5y(0) = 3, 2y'(1) + 3y(1) = 5.$</p> |
| <p>9. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 5} y' - xy = x + 2,$
 $4y'(0) - 2y(0) = 1, y'(1) + 4y(1) = 3.$</p> | <p>10. $y'' + \frac{1}{x+2} y' - xy = x^2 + x,$
 $y'(0) - 5y(0) = -4, y'(1) + 3y(1) = 4.$</p> |
| <p>11. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 2} y' - xy = 2x - 1,$
 $y'(0) - y(0) = 3, y'(1) + 5y(1) = 6.$</p> | <p>12. $y'' + \frac{1}{x+3} y' - xy = x^2 + 1,$
 $3y'(0) - 2y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 4.$</p> |

13. $y'' + \frac{2x}{x^2+4}y' - xy = 2x+3,$
 $y'(0) - 2y(0) = -3, y'(1) + 3y(1) = 5.$
14. $y'' + \frac{2}{x+1}y' - xy = x-1,$
 $y'(0) - 5y(0) = 3, y'(1) + 2y(1) = 2.$
15. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' - xy = 2x-1,$
 $5y'(0) - 2y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 4.$
16. $y'' + \frac{1}{x+2}y' - xy = x^2+2,$
 $4y'(0) - 2y(0) = 3, 2y'(1) + y(1) = 3.$
17. $y'' + \frac{1}{x+2}y' - xy = x^2+2,$
 $4y'(0) - y(0) = 3, 2y'(1) + 3y(1) = 3.$
18. $y'' + \frac{2x}{x^2+5}y' - xy = x+3,$
 $y'(0) - 2y(0) = 6, y'(1) + 3y(1) = -2.$
19. $y'' + \frac{1}{x+3}y' - xy = x^2-2,$
 $y'(0) - 2y(0) = -3, y'(1) + 3y(1) = -2.$
20. $y'' + \frac{2x}{x^2+3}y' - xy = 2x+5,$
 $y'(0) - 4y(0) = -3, 2y'(1) + 3y(1) = 5.$
21. $y'' + \frac{1}{x+1}y' - xy = x^2-x,$
 $3y'(0) - 2y(0) = 6, y'(1) + 3y(1) = 5.$
22. $y'' + \frac{2x}{x^2+4}y' - xy = x-1,$
 $y'(0) - 3y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 2.$
23. $y'' + \frac{1}{x+1}y' - xy = x^2-1,$
 $y'(0) - 2y(0) = -3, y'(1) + 3y(1) = -2.$
24. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' - xy = 2x+3,$
 $y'(0) - 2y(0) = 3, y'(1) + 3y(1) = 1.$
25. $y'' + \frac{1}{x+2}y' - xy = x^2+1,$
 $6y'(0) - 2y(0) = 4, y'(1) + 5y(1) = 6.$
26. $y'' + \frac{2x}{x^2+3}y' - xy = x+1,$
 $y'(0) - 2y(0) = 5, 2y'(1) + 3y(1) = 2.$
27. $y'' + \frac{1}{x+3}y' - xy = x^2-2,$
 $y'(0) - y(0) = 3, y'(1) + y(1) = 2.$
28. $y'' + \frac{2x}{x^2+2}y' - xy = x+2,$
 $3y'(0) - 2y(0) = 1, y'(1) + 2y(1) = 2.$
29. $y'' + \frac{2}{x+1}y' - xy = x+2,$
 $2y'(0) - 5y(0) = 3, 2y'(1) + 3y(1) = 5.$
30. $y'' + \frac{2x}{x^2+5}y' - xy = x-2,$
 $4y'(0) - 2y(0) = 1, y'(1) + 4y(1) = 3.$

РОЗДІЛ ІІІ.

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

§ 1. Постановки крайових задач для рівнянь з частинними похідними

Розглянемо рівняння з частинними похідними другого порядку для функції двох змінних

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Функцію $u(x, y)$, яка перетворює рівняння (1.1) у тотожність у деякій області $G \subset \mathbf{R}^2$, називають **розв'язком** цього рівняння в області G .

Рівняння (1.1) називають **лінійним**, якщо функція F лінійно залежить від шуканої функції u та її похідних, тобто якщо це рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вираз

$$D(x, y) \equiv A(x, y) \cdot C(x, y) - B^2(x, y)$$

називають **дискримінантом** рівняння (1.2) [4].

Залежно від знаку $D(x, y)$ виділяють такі типи рівнянь:

$D(x, y) > 0$ – **еліптичний** тип,

$D(x, y) = 0$ – **параболічний** тип,

$D(x, y) < 0$ – **гіперболічний** тип,

$D(x, y)$ не зберігає свій знак – **змішаний** тип.

Наведемо приклади рівнянь перших трьох типів:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ – рівняння Пуассона. Якщо $f(x, y) \equiv 0$, то

це рівняння називають рівнянням Лапласа;

2. $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$ – рівняння теплопровідності;

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$ – хвильове рівняння.

Як і для звичайних диференціальних рівнянь, для визначення конкретного розв'язку із сім'ї всіх розв'язків рівняння з частинними похідними доводиться накладати певні додаткові умови (див. наприклад, [14]). У найпростішому випадку ними є початкові та крайові умови.

Задачу, яка полягає у відшуванні розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} u(x, y_0) = \varphi(x), \\ u'_y(x, y_0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

називають *задачею Коші*.

У загальному випадку початкові умови можуть задаватися не на прямій $y = y_0$, а на довільній гладкій кривій γ , яка описується рівнянням $\Phi(x, y) = 0$. Такі умови будемо записувати у вигляді

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\gamma} = \varphi(x, y), \\ u'_y(x, y)|_{\gamma} = \varphi_1(x, y). \end{cases} \quad (1.4)$$

Задача Коші переважно ставиться для рівнянь (1.2) параболічного та гіперболічного типів, причому в останньому випадку лінія γ не повинна бути характеристикою, тобто інтегральною кривою характеристичного рівняння

$$A(x, y) dy^2 - 2B(x, y) dx dy + C(x, y) dx^2 = 0. \quad (1.5)$$

В окремих випадках, окрім початкових умов, необхідно задавати ще й додаткові крайові умови. Наприклад, для знаходження розв'язку рівняння (1.2) у півсмузі

$$K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y < +\infty\}$$

можуть задаватися початкові умови

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_y(x, 0) = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.6)$$

та крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u'_x(a, y) = \psi(y), \\ \beta_0 u(b, y) + \beta_1 u'_x(b, y) = \psi_1(y), \end{cases} \quad (1.7)$$

де $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $0 \leq y < +\infty$.

Задачу, в якій поєднуються обидва типи додаткових умов, називають *мішаною* задачею. У загальному випадку початкові умови можна трактувати як частковий випадок крайових умов. Для необмеженої області іноді накладають додаткові обмеження на функцію $u(x, y)$ на нескінченності.

Оскільки, вивчаючи фізичні проблеми, початкові та крайові умови встановлюють, як правило, емпірично, то природно вимагати, щоб невеликі похибки в цих умовах не приводили до великих відхилень відповідних розв'язків. Якщо ця вимога виконана, то кажуть, що задача поставлена коректно.

Саме через некоректність для рівнянь еліптичного типу не розглядають задачу Коші. Наприклад, для рівняння Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.8)$$

де $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – *оператор Лапласа*, при $y > 0$ шукатимемо

розв'язок $u(x, y)$, який задовольняє початкові умови

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u'_y(x, 0) = \frac{1}{n} \cos nx, \quad n \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Легко перевірити, що

$$u(x, y) = \frac{\cos nx \cdot \operatorname{sh} ny}{n^2},$$

а отже,

$$u(0, y) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} ny \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, $y > 0$, не зважаючи на те, що для великих n початкові умови можна зробити як завгодно малими. Оскільки нульовим початковим умовам

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, 0) = 0$$

відповідає розв'язок $u_0(x, y) \equiv 0$, то навіть малим змінам початкових умов відповідатимуть нескінченно великі розбіжності розв'язків.

§ 2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Розглянемо рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (2.1)$$

та першу крайову задачу для нього, яка полягає у відшуканні розв'язку $u(x, y)$, який в обмеженій області $G \subset \mathbf{R}^2$ задовольняє рівняння (2.1), а на межі цієї області Γ співпадає із заданою неперервною функцією $\varphi(x, y)$. Таку задачу для рівняння (2.1) називають *задачею Діріхле*.

Нагадаємо, що функцію $u(x, y)$, яка має неперервні частинні похідні другого порядку в області G і задовольняє рівняння Лапласа всередині цієї області, називають *гармонійною*.

Для таких функцій справджується **принцип максимуму**: гармонійна в обмеженій області G функція, неперервна у замкненій області $\bar{G} = G \cup \Gamma$, не може набувати всередині цієї області значень, більших, ніж максимум її значень на межі Γ , і менших, ніж мінімум її значень на Γ ([14], розділ 4, § 2).

Справджується також сильніше твердження: гармонійна в обмеженій і замкненій області функція, відмінна від сталої, не набуває всередині цієї області свого найбільшого та найменшого значень.

З принципу максимуму для гармонійних функцій випливають такі два важливі наслідки.

Наслідок 1 (єдиність розв'язку задачі Діріхле). *Задача Діріхле для замкненої і обмеженої області має не більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай $u_1(x, y)$ та $u_2(x, y)$ – дві гармонійні в області G функції, які співпадають на межі Γ . Тоді гармонійна функція

$$u(x, y) \equiv u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

на межі Γ перетворюється в нуль. З принципу максимуму випливає, що $u(x, y) \equiv 0$, тобто всередині G $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$. ►

Зауваження. З наслідку 1 не випливає, що задача Діріхле в області G обов'язково має розв'язок. Але якщо область G опукла, а межа кусково гладка, то розв'язок задачі Діріхле з неперервними даними на межі Γ існує та єдиний (**теорема Неймана**).

Наслідок 2 (коректність задачі Діріхле). *Розв'язок задачі Діріхле для замкненої і обмеженої області неперервно залежить від крайових умов.*

Доведення. Нехай $u_1(x, y)$ та $u_2(x, y)$ – два розв'язки задачі Діріхле, які на межі Γ збігаються з функціями $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ відповідно. Припустимо, що на Γ виконується нерівність

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)| < \varepsilon,$$

де ε – як завгодно мале додатне число. Тоді гармонійна функція $u(x, y) \equiv u_1(x, y) - u_2(x, y)$ на межі Γ набуватиме значення

$$\varphi(x, y) \equiv \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y),$$

причому $|\varphi(x, y)| < \varepsilon$. З принципу максимуму отримуємо, що і $|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon$, тобто задача Діріхле є коректною. ►

§ 3. Різницеві схеми для рівняння Лапласа

Повернемося до рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{3.1}$$

і замінимо в ньому наближено

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y+h) - 2u(x, y) + u(x, y-h)}{h^2}.$$

Підставляючи у рівняння (3.1), для наближеного розв'язку $\bar{u}(x, y)$ одержуємо, що

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{4} (\bar{u}(x+h, y) + \bar{u}(x-h, y) + \bar{u}(x, y+h) + \bar{u}(x, y-h)). \tag{3.2}$$

Для оцінки точності такого наближення скористаємось формулою Тейлора для функції двох змінних:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + d f(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k), \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.3}$$

Розглянемо дві основні схеми.

Перша основна схема. Виберемо точки $A(x, y)$, $B(x+h, y)$, $C(x-h, y)$, $D(x, y+h)$, $E(x, y-h)$ і обчислимо значення функції $\bar{u}(x, y)$ у точках B, C, D, E за формулою (3.3), поклавши в ній $n = 3$.

При цьому вважаємо, що точний розв'язок $u(x, y)$ – чотири рази неперервно диференційовна функцією. Тоді

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4),$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^4),$$

$$u(x, y+h) = u(x, y) + h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + O(h^4),$$

$$u(x, y-h) = u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + O(h^4).$$

Додавши усі ці рівності, одержуємо

$$\begin{aligned} u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) &= \\ &= 4u(x, y) + h^2 \Delta u + O(h^4), \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{h^2} (u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + \\ &+ u(x, y-h) - 4u(x, y)) + O(h^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Відкинувши в (3.4) $O(h^2)$ і врахувавши (3.1), приходимо до першої основної схеми (3.2), порядок апроксимації якої згідно з (3.4), дорівнює двом.

Друга основна схема. Виберемо точки $A(x, y)$, $B(x+h, y+h)$, $C(x-h, y+h)$, $D(x+h, y-h)$, $E(x-h, y-h)$ і при тих самих припущеннях обчислимо значення функції $u(x, y)$ у точках B , C , D , E .

Будемо мати:

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) &= u(x, y) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4), \end{aligned}$$

$$u(x-h, y+h) = u(x, y) + h \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{6} h^3 \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4),$$

$$u(x+h, y-h) = u(x, y) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4),$$

$$u(x-h, y-h) = u(x, y) + h \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{6} h^3 \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + O(h^4).$$

Додавши всі ці рівності, одержуємо

$$u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) = 4u(x, y) + 2h^2 \Delta u + O(h^4),$$

звідки

$$\Delta u = \frac{1}{2h^2} (u(x+h, y+h) + u(x-h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) - 4u(x, y)) + O(h^2). \quad (3.5)$$

Відкинувши $O(h^2)$ і врахувавши (3.1), одержуємо другу основну схему для рівняння Лапласа:

$$\bar{u}(x, y) = \frac{1}{4} (\bar{u}(x+h, y+h) + \bar{u}(x-h, y+h) + \bar{u}(x+h, y-h) + \bar{u}(x-h, y-h)), \quad (3.6)$$

порядок апроксимації якої згідно з (3.5) дорівнює двом.

§ 4. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле

Розглянемо задачу Діріхле

$$\begin{cases} \Delta = 0, & (x, y) \in G, \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

де $\varphi(x, y)$ – задана неперервна функція, Γ – простий кусково-гладкий контур, який обмежує опуклу область G .

Побудуємо квадратну сітку (S_h) з кроком h і вузлами

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_j = y_0 + jh, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Вузли цієї сітки, віддалені один від одного на відстань h , називають *сусідніми*. Ті вузли, які знаходяться всередині G , називають *внутрішніми*. Усі інші вузли, для яких хоч один із чотирьох сусідніх з ним є внутрішнім, називатимемо *межевими*.

Якщо межовий вузол лежить поза $G \cup \Gamma$, то значення функції $\bar{u}(x, y)$ у ньому вважають рівним значенню функції $\varphi(x, y)$ у найближчій до цього вузла точці межі Γ . Решту вузлів сітки (S_h) у наступних обчисленнях враховуватимемо не будемо.

Позначимо $\bar{u}(x_i, y_j) = \bar{u}_{i,j}$ і на основі формул (3.2) для кожної внутрішньої точки сітки (S_h) запишемо різницеве рівняння

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{4}(\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j-1}). \quad (4.2)$$

Враховуючи задані вище значення функції $\bar{u}(x, y)$ у межових вузлах, одержимо, що у системі (4.2) кількість невідомих співпадає з кількістю внутрішніх вузлів сітки (S_h) .

Доведемо, що така система є сумісною і має єдиний розв'язок. Справді, оскільки (4.2) є неоднорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, то достатньо довести, що відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок.

Припустимо, що у деякому внутрішньому вузлі значення функції $\bar{u}(x, y)$ додатне. Тоді з усіх значень $\bar{u}(x, y)$ у внутрішніх

вузлах виберемо найбільше значення $\bar{u}_{i,j}$. Зрозуміло, що

$$\bar{u}_{i,j} \geq \bar{u}_{i+1,j}, \quad \bar{u}_{i,j} \geq \bar{u}_{i-1,j}, \quad \bar{u}_{i,j} \geq \bar{u}_{i,j+1}, \quad \bar{u}_{i,j} \geq \bar{u}_{i,j-1}.$$

Додавши всі ці нерівності, одержуємо нерівність

$$\bar{u}_{i,j} \geq \frac{1}{4}(\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j-1}).$$

Звідси, враховуючи (4.2), знаходимо, що значення $\bar{u}(x, y)$ в усіх вузлах, сусідніх з (x_i, y_i) , має дорівнювати $\bar{u}_{i,j}$.

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки (S_h) значення $\bar{u}(x, y)$ мають співпадати з $\bar{u}_{i,j}$, а отже, мають бути додатними. Але однорідна система (4.2) була одержана за умови, що в усіх межових вузлах виконується рівність $\bar{u}(x, y) = 0$. Маємо протиріччя, яке доводить, що у внутрішніх вузлах $\bar{u}_{i,j}$ не може набувати додатних значень. Аналогічно можна довести, що $\bar{u}_{i,j}$ не набуває від'ємних значень. Отже, відповідна однорідна система має лише нульовий розв'язок, а неоднорідна система (4.2) має єдиний розв'язок.

Зауваження. Розв'язавши систему (4.2), одержуємо наближений розв'язок задачі Діріхле в області G з точністю $O(h)$ ([4], § 6 розділу 5). При цьому кількість рівнянь системи можна зменшити, покладаючи у внутрішніх вузлах, які знаходяться від межі Γ на відстані, меншій, ніж $h/2$, значення, які дорівнюють значенням $\varphi(x, y)$ у найближчих до цих вузлів точках межі.

§ 5. Ітераційний процес Лібмана

Безпосереднє розв'язування системи (4.2) викликає певні труднощі для великої кількості внутрішніх вузлів. З іншого боку, зменшення їх кількості негативно позначиться на точності знайденого розв'язку. Вихід із такої ситуації полягає у поєднанні методу

сіток з ітераційним процесом Лібмана. При цьому наближене розв'язання задачі Діріхле складається з таких трьох етапів:

1. Розглянемо сітку (S_{2h}) з кроком $2h$ і розв'яжемо для неї систему вигляду (4.2).

2. Візьмемо дрібнішу сітку (S_h) з кроком h , частину вузлів якої складають вузли попередньої сітки, і, використовуючи знайдені значення у вузлах сітки (S_{2h}) та першу і другу основні різниці схеми для оператора Лапласа, знайдемо наближені значення $\bar{u}(x, y)$ в усіх внутрішніх вузлах сітки (S_h) (їх позначимо через $\bar{u}_{i,j}^{(0)}$).

3. Уточнимо значення функції $\bar{u}(x, y)$ у межових вузлах A_h та внутрішніх вузлах (x_i, y_j) сітки (S_h) , по чергово користуючись формулами

$$\bar{u}^{(k)}(A_h) = \frac{\bar{u}(Z)h - \bar{u}^{(k-1)}(V)\delta}{h - \delta} \quad (5.1)$$

та

$$\bar{u}_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4} \left(\bar{u}_{i+1,j}^{(k-1)} + \bar{u}_{i-1,j}^{(k-1)} + \bar{u}_{i,j+1}^{(k-1)} + \bar{u}_{i,j-1}^{(k-1)} \right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

де

$$\bar{u}^{(0)}(A_h) = \bar{u}(Z),$$

Z – найближча до вузла A_h точка межі, V – найближчий до нього внутрішній вузол, δ – відстань від A_h до Z .

Зауваження. Процес обчислення за формулами (5.1), (5.2) необхідно продовжувати доти, поки у межах заданої точності не співпадуть два послідовні наближення для всіх внутрішніх вузлів сітки (S_h) . При цьому похибка наближеного розв'язку

$$\bar{u}_{i,j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_{i,j}^{(k)}$$

має порядок $O(h^2)$.

Приклад 3.1. Знайти функцію $u(x, y)$, гармонійну в області

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\},$$

яка на межі Γ цієї області задовольняє умову $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$.

Розв'язання. 1. Побудуємо сітку з кроком $2h = 0,4$. Для неї єдиним внутрішнім вузлом є точка $A(0,4;0,4)$, а сусідніми до нього межовими вузлами – точки $B(0;0,4)$, $C(0,4;0,8)$, $D(0,8;0,4)$, $E(0,4;0)$. Відповідно, $C_1(0,4;0,6)$ та $D_1(0,6;0,4)$ – найближчі точки межі до вузлів C та D у напрямі вузла A . Отже,

$$\bar{u}(B) = \bar{u}(E) = 0,16, \quad \bar{u}(C) = \bar{u}(D) \approx \bar{u}(C_1) = \bar{u}(D_1) = 0,52.$$

Тоді за формулою (3.2) знаходимо:

$$\bar{u}(A) = \frac{1}{4}(\bar{u}(B) + \bar{u}(C) + \bar{u}(D) + \bar{u}(E)) = 0,34.$$

2. Розглянемо тепер сітку з кроком $h = 0,2$, для якої вже 6 вузлів є внутрішніми, а всі межові вузли лежать на межі Γ . Для зручності покладемо $x_0 = y_0 = 0$ і обчислимо значення $\bar{u}_{i,j}$ в усіх внутрішніх вузлах сітки, використовуючи значення, знайдені на першому етапі:

$$\bar{u}_{1,1} = \frac{1}{4}(\bar{u}(0) + \bar{u}(B) + \bar{u}(A) + \bar{u}(E)) = 0,165 \approx 0,17,$$

$$\bar{u}_{3,1} = \frac{1}{4}(\bar{u}(E) + \bar{u}(A) + \bar{u}(D) + \bar{u}(F)) = 0,415 \approx 0,42,$$

$$\bar{u}_{2,1} = \frac{1}{4}(\bar{u}_{1,1} + \bar{u}(A) + \bar{u}_{3,1} + \bar{u}(E)) = 0,27.$$

З міркувань симетрії одержуємо, що

$$\bar{u}_{1,3} = \bar{u}_{3,1} \approx 0,42, \quad \bar{u}_{1,2} = \bar{u}_{2,1} \approx 0,27.$$

Окрім того, $\bar{u}_{2,2} = \bar{u}(A) = 0,34$.

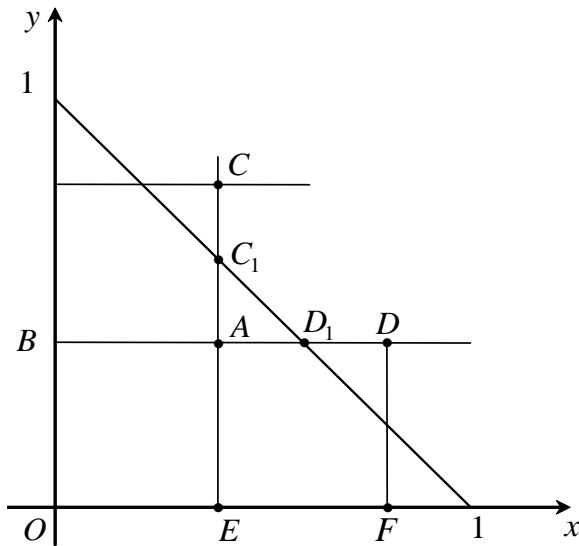


Рис. 1

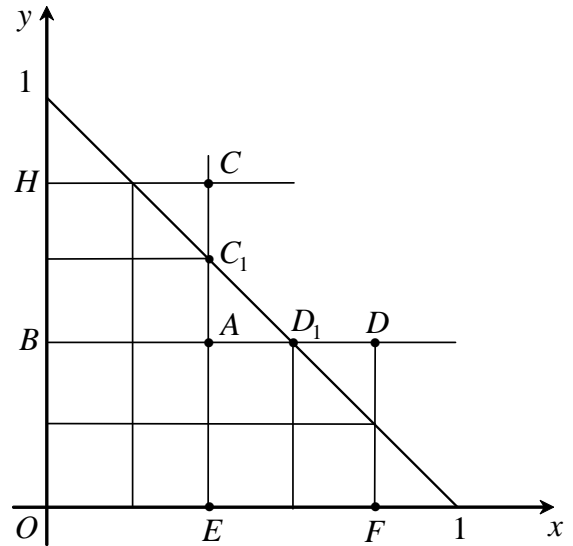


Рис. 2

3. Оскільки всі межові вузли лежать на межі Γ , то уточнювати їх значення немає потреби. Запишемо тільки значення функції $\bar{u}(x, y)$ у цих вузлах:

$$\bar{u}_{0,0} = 0, \quad \bar{u}_{1,0} = \bar{u}_{0,1} = 0,04, \quad \bar{u}_{2,0} = \bar{u}_{0,2} = 0,16, \quad \bar{u}_{3,0} = \bar{u}_{0,3} = 0,36, \\ \bar{u}_{4,0} = \bar{u}_{0,4} = 0,64, \quad \bar{u}_{5,0} = \bar{u}_{0,5} = 1,00, \quad \bar{u}_{4,1} = \bar{u}_{1,4} = 0,68, \quad \bar{u}_{3,2} = \bar{u}_{2,3} = 0,52.$$

Зауважимо, що саме ці значення ми отримували б при кожному $k \geq 1$ за формулою (5.1) при $\delta = 0$.

Тому залишається уточнити значення функції $\bar{u}(x, y)$ у внутрішніх вузлах сітки. Для наочності обчислень складемо шаблон-таблицю, в якій записані вже знайдені нами значення функції $\bar{u}(x, y)$ у всіх внутрішніх та межових вузлах сітки. Надалі зміни значень відбуватимуться тільки у внутрішніх вузлах, тому наступні шаблони будуватимемо лише для цих вузлів, користуючись формулами (5.2):

1,00																			
0,64	0,68																		
0,36	0,42	0,52				0,46		0,46		0,47									
0,16	0,27	0,34	0,52			0,27	0,40	0,30	0,40	0,30	0,41								
0,04	0,17	0,27	0,42	0,68		0,16	0,27	0,46	0,16	0,30	0,46	0,17	0,30	0,47					
0,00	0,04	0,16	0,36	0,64	11,0														

Оскільки значення у всіх відповідних клітинах двох останніх шаблонів відрізняються не більше, ніж на 0,01, то з точністю до 0,01 можна покласти, що

$$\bar{u}_{1,1} = 0,17, \quad \bar{u}_{1,2} = \bar{u}_{2,1} = 0,30, \quad \bar{u}_{1,3} = \bar{u}_{3,1} = 0,47, \quad \bar{u}_{2,2} = 0,41.$$

Зауважимо, що отриманий розв'язок можна було б використати для знаходження розв'язку з кроком $h = 0,1$. Для цього процедуру розв'язування довелось би повторити, починаючи з другого етапу.

§ 6. Розв'язування задачі Діріхле методом моделювання

Під моделюванням будемо розуміти встановлення відповідності між фізичними явищами і певними диференціальними рівняннями. Зокрема, для розв'язування задачі Діріхле скористаємося так званим сітковим електроінтегратором, який складається з двох систем прямолінійних провідників, паралельних до координатних осей і розташованих на відстані h один від одного.

Нехай кінці цих провідників відповідають межевим вузлам, а точки їх перетину – внутрішнім вузлам сітки (S_h). Припустимо, що через вказані системи провідників пропущено електричний струм, причому у мезових вузлах (x_1, y_2) значення потенціалів $\bar{u}_{p,q}$ дорівнюють значенню функції $\varphi(x, y)$ у найближчій до відповідного вузла точці межі Γ .

Якщо припустити, що опір провідника довжини h дорівнює $R > 0$, то із законів Кірхгофа та Ома для потенціалів $\bar{u}_{i,j}$ внутрішніх вузлів одержуємо

$$\frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{R} + \frac{\bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j}}{R} + \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{R} + \frac{\bar{u}_{i,j-1} - \bar{u}_{i,j}}{R} = 0, \quad (6.1)$$

звідки випливає, що

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{4}(\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j-1}). \quad (6.2)$$

Порівнюючи одержаний результат з формулою (4.2), приходимо до висновку, що потенціали $\bar{u}_{i,j}$ дорівнюють наближеним значенням функції $u(x, y)$ – розв’язку задачі Діріхле.

Отже, для знаходження такого розв’язку залишається тільки виміряти вказані потенціали, налаштувавши попередньо прилад так, щоб потенціали у межових вузлах дорівнювали відповідним значенням функції $u(x, y)$.

Зауваження. Враховуючи лінійність виразу (6.2), числові значення потенціалів $\bar{u}_{p,q}$ можна задавати пропорційно значенням функції $u(x, y)$. Відповідно, з таким самим коефіцієнтом пропорції матимемо і значення потенціалів $\bar{u}_{i,j}$.

§ 7. Метод Монте-Карло

Припустимо, що точка M здійснює рівномірні випадкові блукання вузлами сітки (S_h). Це означає, що з довільного внутрішнього вузла $M_{i,j}$ вона з ймовірністю $1/4$ може переміститися у будь-який з чотирьох сусідніх вузлів. При цьому з ймовірністю 1 вона через скінченну кількість кроків опиниться у межовому вузлі. Будемо вважати, що тоді блукання точки M закінчується.

Позначимо через $P(i, j; p, q)$ ймовірність того, що точка, яка почала свій рух з внутрішнього вузла $M_{i,j}$, закінчить блукання у межовому вузлі $M_{p,q}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{p,q} P(i, j; p, q) = 1, \quad (7.1)$$

оскільки точка гарантовано закінчить свій рух через скінченну кількість кроків.

Зауважимо також, що для межових вузлів $M_{p',q'}$ виконується рівність

$$P(p',q';p,q) = \begin{cases} 1, & p' = p, \quad q' = q, \\ 0, & |p' - p| + |q' - q| \neq 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Покладемо у межових вузлах $M_{p,q}$ значення $\varphi_{p,q} = \varphi(Z)$, де Z – найближча до $M_{p,q}$ точка межі Γ , і розглянемо суму

$$\bar{u}_{i,j} = \sum_{p,q} P(i,j;p,q) \cdot \varphi_{p,q}, \quad (7.3)$$

яку можна трактувати як математичне сподівання функції $\varphi(x,y)$ за сукупністю межових вузлів сітки для траєкторій точки M , що розпочинаються з внутрішнього вузла $M_{i,j}$.

Відзначимо, що всі блукання, які виходять з цього вузла, розпадаються на чотири рівноймовірні групи блукань:

1. $M_{i,j}, M_{i+1,j}, \dots$,
2. $M_{i,j}, M_{i-1,j}, \dots$,
3. $M_{i,j}, M_{i,j+1}, \dots$,
4. $M_{i,j}, M_{i,j-1}, \dots$.

Тому за формулою повної ймовірності одержуємо:

$$P(i,j;p,q) = \frac{1}{4} P(i+1,j;p,q) + \frac{1}{4} P(i-1,j;p,q) + \frac{1}{4} P(i,j+1;p,q) + \frac{1}{4} P(i,j-1;p,q). \quad (7.4)$$

Якщо помножити обидві частини рівності (7.4) на $\varphi_{p,q}$ і підсумувати за усіма (p,q) , то матимемо

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{4} (\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j-1}), \quad (7.5)$$

причому $\bar{u}_{p,q} = \varphi_{p,q}$.

Таким чином, знову приходимо до першої основної схеми методу сіток для розв'язування задачі Діріхле.

Покажемо, як практично можна скористатися отриманим результатом. Для цього розглянемо набір випадкових чисел, який легко отримати з допомогою ЕОМ. Наприклад,

57705, 71618, 73710, 70131, 16961, 53324,
43166, 26275, 05926, 66289, ...

Будемо вибирати послідовно по одній цифрі з цього набору і здійснюватимемо блукання за наступною схемою:

Цифра	Напрямок переміщення
0 або 1	крок вліво
2 або 3	крок вгору
4 або 5	крок вправо
6 або 7	крок вниз
8 або 9	“тупцювання на місці”

Зауважимо, що суттєве значення має не конкретна схема вибору напрямку руху, а рівноймовірність вибору кожного з чотирьох можливих напрямків.

Зафіксувавши внутрішній вузол $M_{i,j}$, починаємо блукання точки M з цього вузла. При влученні у межовий вузол $M_{p,q}$ обчислюємо значення $\varphi_{p,q}$. Якщо таких блукань, які починались з вузла $M_{i,j}$, було здійснено n , то наближено вважаємо, що

$$\bar{u}_{i,j} \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \varphi_{p_k,q_k}, \quad (7.6)$$

де M_{p_k,q_k} – межовий вузол, у якому точка M завершила свій рух при k -му блуканні. Такий спосіб розв'язування задачі Діріхле називають *методом Монте-Карло*.

Зауважимо, що з його допомогою можна знайти наближене значення розв'язку у довільному внутрішньому вузлі, не знаючи значень в інших внутрішніх вузлах. Але недоліком цього методу є повільна збіжність за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$.

Приклад 3.2. Використовуючи метод Монте-Карло, знайти значення $u(0,4;0,2)$ гармонійної в області

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$$

функції $u(x, y)$, яка на межі Γ цієї області задовольняє умову $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Побудуємо сітку (S_h) з кроком $h = 0,2$ і запишемо значення $\varphi_{p,q}$ у тих вузлах, в яких можуть закінчуватись траєкторії, що виходять з точки (рис. 3).

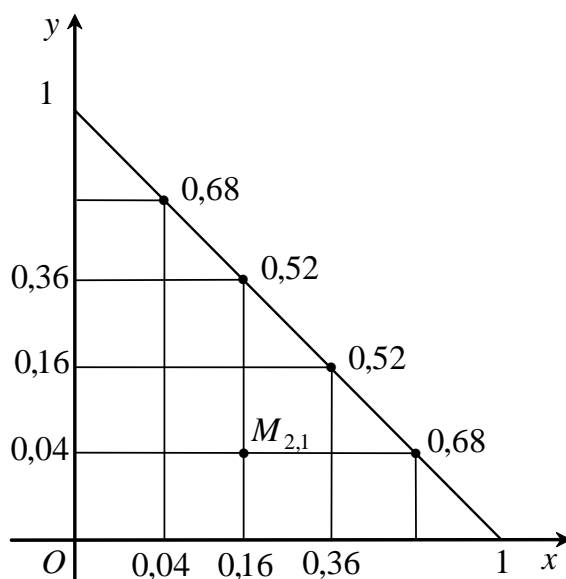


Рис.3

Обмежившись п'ятнадцятьма випадковими блуканнями, одержуємо:

№	Траєкторія блукання	$\varphi_{p,q}$
1.	$(2,1) \xrightarrow{5} (3,1) \xrightarrow{7} (3,0)$	0,36
2.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16

3.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
4.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
5.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{8} (1,1) \xrightarrow{7} (1,0)$	0,04
6.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{7} (2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{0} (0,1)$	0,04
7.	$(2,1) \xrightarrow{7} (2,0)$	0,16
8.	$(2,1) \xrightarrow{0} (1,1) \xrightarrow{1} (0,1)$	0,04
9.	$(2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{1} (1,2) \xrightarrow{1} (0,2)$	0,16
10.	$(2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
11.	$(2,1) \xrightarrow{9} (2,1) \xrightarrow{6} (2,0)$	0,16
12.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{5} (2,1) \xrightarrow{3} (2,2) \xrightarrow{3} (2,3)$	0,52
13.	$(2,1) \xrightarrow{2} (2,2) \xrightarrow{4} (3,2)$	0,52
14.	$(2,1) \xrightarrow{4} (3,1) \xrightarrow{3} (3,2)$	0,52
15.	$(2,1) \xrightarrow{1} (1,1) \xrightarrow{6} (1,0)$	0,04
Сума		3,08

Отже,

$$\bar{u}_{2,1} = \bar{u}(0,4;0,2) \approx 0,21.$$

Зауважимо, що у порівнянні з результатом, отриманим ітераційним процесом Лібмана, похибка становить 0,09, тобто майже 30%. Для досягнення точності 0,01 слід вибрати n значно більшим, ніж 15. ■

§ 8. Метод сіток для рівняння теплопровідності

В області $G = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

з початковою та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u(0,t) = \varphi(t), \\ u(l,t) = \psi(t), \end{cases} \quad (8.2)$$

де $f(x)$ – неперервна на $[0,l]$, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервні на $[0,+\infty)$ функції, причому $f(0) = \varphi(0)$, $f(l) = \psi(0)$.

Для наближеного розв'язування задачі (8.1), (8.2) побудуємо прямокутну сітку з вузлами (x_i, t_j) :

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

де $h = l/n$, $k = \sigma h^2/a^2$, σ – деяка стала, допустимі значення якої будуть встановлені далі.

Рівняння (8.1) наближено замінимо різницевиими рівняннями

$$\frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{k} = a^2 \frac{\bar{u}_{i+1,j} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j}}{h^2}, \quad (8.3)$$

з яких одержуємо

$$\bar{u}_{i,j+1} = \sigma \bar{u}_{i-1,j} + (1 - 2\sigma) \bar{u}_{i,j} + \sigma \bar{u}_{i+1,j}, \quad (8.4)$$

де $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Зазначимо також, що $\bar{u}_{i,0} = f(x_i)$, $\bar{u}_{0,j} = \varphi(t_j)$, $\bar{u}_{n,j} = \psi(t_j)$.

Таким чином, разом з рівнянням (8.3) або (8.4) одержуємо різницеву схему для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (8.1), (8.2).

Отже, за формулою (8.4) вдається послідовно знайти значення наближеного розв'язку в усіх внутрішніх вузлах, які знаходяться на прямих $t = t_j$, $j = 1, 2, \dots$.

Оцінимо порядок апроксимації отриманої схеми. Припускаючи, що точний розв'язок $u(x,t)$ має неперервні похідні за змінною x до шостого, а за змінною t – до третього порядку включно. Тоді, обмежуючись у формулі Тейлора для функції $u(x,t)$ в околі точки

(x_i, t_j) доданками до h^6 включно, і враховуючи, що $k = \sigma h^2 / a^2$, одержуємо, що для точного розв'язку різниця Δ_h між лівою і правою частинами рівності (8.3) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta_h = & \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\bar{u}_{i,j} + \frac{\sigma h^2}{a^2} \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\sigma h^2}{a^2} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\sigma h^2}{a^2} \right)^3 \frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^3} - \bar{u}_{i,j} \right) - \right. \\ & - \left(\bar{u}_{i,j} + h \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^4} + \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^6} \right) - \\ & + \left. \left(\bar{u}_{i,j} - h \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^4} - \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^5} + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^6} \right) \right] + \\ & + o(h^6) = \left(\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^2} - \frac{1}{12} a^4 \frac{\partial^4 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^4} \right) h^2 + \\ & + \frac{1}{a^4} \left(\frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^3} - \frac{1}{360} a^6 \frac{\partial^6 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^6} \right) h^4 + o(h^4). \end{aligned}$$

Оскільки функція $\bar{u}(x, t)$ є розв'язком рівняння (8.1), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2} \right) = \\ &= a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{i,j}}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2} \right) = a^4 \frac{\partial^4 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

і аналогічно встановлюємо, що

$$\frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^3} = a^6 \frac{\partial^6 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^6}.$$

Отже,

$$\Delta_h = \frac{1}{2a^2} \left(\sigma - \frac{1}{6} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^2} h^2 + \frac{1}{6a^4} \left(\sigma^2 - \frac{1}{60} \right) \frac{\partial^3 \bar{u}_{i,j}}{\partial t^3} h^4 + o(h^4),$$

звідки одержуємо, що $\Delta_h = O(h^4)$ для $\sigma = 1/6$ та $\Delta_h = O(h^2)$ для всіх інших значень σ .

Для $\sigma = 1/6$ формула (8.4) набуває вигляду

$$\bar{u}_{i,j+1} = \frac{1}{6} (\bar{u}_{i-1,j} + 4\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j}). \quad (8.5)$$

Зазначимо також, що вже при $h = 0,1$ одержуємо значення кроку $k = \frac{1}{600a^2}$, що є дуже незручно, оскільки вимагає великої кількості обчислень навіть для просування на $t = 1$.

Приклад 3.3. Розв'язати методом сіток рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.6)$$

з початковими та крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & 0 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (8.7)$$

Розв'язання. Виберемо $h = 0,1$. Тоді

$$k = \frac{1}{600}, \quad n = 10, \quad x_i = \frac{i}{10}, \quad t_j = \frac{j}{600}.$$

Результати обчислень оформимо у вигляді таблиці, перший рядок якої при $j = 0$ одержуємо з початкової умови, а стовпці $i = 0$ та $i = 10$ – з крайових умов. Оскільки всі значення у цих стовпцях дорівнюють нулю, то у таблицю вони не включені. Решту комірок таблиці заповнюємо на основі формули (8.5):

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
1	0,347	0,627	0,827	0,947	0,987	0,947	0,827	0,627	0,347

2	0,336	0,613	0,813	0,933	0,973	0,933	0,813	0,613	0,336
3	0,326	0,600	0,800	0,920	0,960	0,920	0,800	0,600	0,326
4	0,317	0,588	0,787	0,907	0,947	0,907	0,787	0,588	0,317
5	0,309	0,576	0,774	0,894	0,934	0,894	0,774	0,576	0,309
6	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
7	0,295	0,553	0,748	0,868	0,908	0,868	0,748	0,553	0,295
8	0,289	0,543	0,736	0,854	0,894	0,854	0,736	0,543	0,289
9	0,283	0,533	0,723	0,841	0,881	0,841	0,723	0,533	0,283
10	0,278	0,523	0,711	0,828	0,868	0,828	0,711	0,523	0,278
11	0,272	0,513	0,699	0,815	0,855	0,815	0,699	0,513	0,272
12	0,267	0,504	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267
13	0,262	0,495	0,676	0,790	0,829	0,790	0,676	0,495	0,262
14	0,257	0,486	0,665	0,777	0,816	0,777	0,665	0,486	0,257
15	0,253	0,478	0,654	0,765	0,803	0,765	0,654	0,478	0,253
16	0,248	0,470	0,643	0,753	0,790	0,753	0,643	0,470	0,248
17	0,244	0,462	0,633	0,741	0,778	0,741	0,633	0,462	0,244
18	0,239	0,454	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
19	0,235	0,446	0,612	0,717	0,753	0,717	0,612	0,446	0,235
20	0,231	0,439	0,602	0,706	0,741	0,706	0,602	0,439	0,231
21	0,227	0,431	0,592	0,694	0,729	0,694	0,592	0,431	0,227
22	0,223	0,424	0,582	0,683	0,718	0,683	0,582	0,424	0,223
23	0,220	0,417	0,573	0,672	0,706	0,672	0,573	0,417	0,220
24	0,216	0,410	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
25	0,212	0,403	0,554	0,650	0,684	0,650	0,554	0,403	0,212
26	0,209	0,396	0,545	0,640	0,673	0,640	0,545	0,396	0,209
27	0,205	0,390	0,536	0,630	0,662	0,630	0,536	0,390	0,205
28	0,202	0,384	0,527	0,619	0,651	0,619	0,527	0,384	0,202
29	0,198	0,377	0,519	0,609	0,640	0,609	0,519	0,377	0,198
30	0,195	0,371	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Останній рядок таблиці відповідає значенню $t = 0,05$.

§ 9. Стійкість скінченно-різницевої схеми для розв'язку рівняння теплопровідності

Після розв'язування прикладу 3.3 у допитливого читача могло виникнути питання: чи не можна відразу покласти $k = 0,05$ і обмежитись лише одним кроком обчислень? Такому k відповідає значення $\sigma = 5$, для якого $\Delta_h = O(h^2)$. Зрозуміло, що при цьому дещо втрачається порядок апроксимації схеми (8.3). Але не тільки! Справа в тому, що точність отриманого наближення залежить не тільки від порядку апроксимації схеми, але й від такої її важливої характеристики, як стійкість.

Скінченно-різницеву схему називають *стійкою*, якщо малі похибки, які допущені у процесі розв'язування, згасають або принаймні залишаються малими для нескінченного збільшення номера поточного шару. В іншому випадку схему називають *нестійкою*. Зрозуміло, що нестійка скінченно-різницева схема не має практичної цінності, бо незначні неминучі похибки (наприклад, похибки заокруглень) можуть спричинити великі відхилення від точного розв'язку крайової задачі, а отже, привести до результатів, далеких від дійсності.

З'ясуємо умови стійкості скінченно-різницевої схеми (8.4) для рівняння теплопровідності (8.1), який задовольняє умови (8.2).

У цьому параграфі для спрощення міркувань вважаємо, що у рівнянні (8.1) $a = 1$ (до цього випадку завжди можна перейти, виконавши заміну незалежної змінної за формулою $\tau = a^2 t$).

Позначимо $\Delta x_i = h$, $\Delta t_i = k$, де $h = l/n$, $k = \sigma h^2$.

Якщо у рівнянні

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.1)$$

перейти до скінченних різниць (як це зроблено у § 8), то одержимо скінченно-різницеву схему:

$$\sigma u(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)u(x_i, t_j) + \sigma u(x_i - h, t_j) - u(x_i, t_j + k) = 0. \quad (9.2)$$

У мезових вузлах сітки $x_i, t_j \in \Gamma$ справджуються умови

$$\begin{cases} u(x_i, 0) = f(x_i), \\ u(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(l, t_j) = \psi(t_j). \end{cases} \quad (9.3)$$

Припустимо, що у точках початкового шару $t = 0$ зроблено помилку, яку позначимо через $\varepsilon_{i,0}$, тобто

$$u(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0},$$

і нехай $v(x_i, t_j)$ – розв'язок рівняння (9.2):

$$\sigma v(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)v(x_i, t_j) + \sigma v(x_i - h, t_j) - v(x_i, t_j + k) = 0, \quad (9.4)$$

який задовольняє крайові умови, що містять помилку:

$$\begin{cases} v(x_i, 0) = f(x_i) + \varepsilon_{i,0}, \\ v(0, t_j) = \varphi(t_j), \quad v(l, t_j) = \psi(t_j). \end{cases}$$

Позначимо похибку через

$$w(x_i, t_j) = v(x_i, t_j) - u(x_i, t_j)$$

і з'ясуємо, як вона зміниться, якщо номер j стане як завгодно великим. Віднімаючи від (9.4) рівняння (9.2), для похибки $w(x_i, t_j)$ одержуємо скінченно-різницеве рівняння

$$\sigma w(x_i + h, t_j) + (1 - 2\sigma)w(x_i, t_j) + \sigma w(x_i - h, t_j) - w(x_i, t_j + k) = 0. \quad (9.5)$$

На межі Γ області

$$\left. \begin{aligned} w(x_i, 0) &= v(x_i, 0) - u(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}, \\ w(0, t_j) &= v(0, t_j) - u(0, t_j) = 0, \\ w(l, t_j) &= v(l, t_j) - u(l, t_j) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Частинний розв'язок рівняння (9.5) шукаємо у вигляді

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin px_i, \quad (9.7)$$

де числа λ і p ($p > 0$) доберемо так, щоб вираз (9.7) був розв'язком рівняння (9.5) і задовольняв однорідні крайові умови

$$w(0, t_j) = 0, \quad w(l, t_j) = 0. \quad (9.8)$$

З (9.7) і (9.8) випливає, що $p = \frac{m\pi}{l}$, $m = 1, 2, \dots$, а тому для похибки $w(x_i, t_j)$ маємо формулу

$$w(x_i, t_j) = \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi x_i}{l},$$

підставляючи яку в рівняння (9.5), одержуємо

$$\begin{aligned} & \sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} + (1 - 2\sigma) \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \\ & + \sigma \lambda^{t_j} \sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} - \lambda^{t_j+k} \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0 \end{aligned}$$

або

$$\left. \begin{aligned} & \sigma \left(\sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} \right) + \\ & + (1 - \lambda^k) \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Вираз у перших дужках рівності (9.9) запишемо інакше:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{m\pi(x_i + h)}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} + \sin \frac{m\pi(x_i - h)}{l} = \\ & = 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} \cos \frac{m\pi h}{l} - 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} = 2 \sin \frac{m\pi x_i}{l} \left(\cos \frac{m\pi h}{l} - 1 \right) = \\ & = -4 \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}. \end{aligned}$$

Підставляючи цей вираз у (9.9) і спрощуючи результат, одержуємо, що

$$\lambda = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (9.10)$$

З (9.10) випливає, що λ не залежить від точки (x_i, t_j) .

Таким чином, одержуємо нескінченну множину частинних розв'язків однорідного рівняння (9.5) вигляду

$$w_m(x_i, t_j) = \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}\right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

причому кожен з цих розв'язків задовольняє однорідні крайові умови (9.8).

Лінійна комбінація розв'язків $w_m(x_i, t_j)$, тобто функція

$$w(x_i, t_j) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m \left(1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}\right)^{\frac{t_j}{k}} \sin \frac{m\pi x_i}{l} \quad (9.11)$$

також є розв'язком рівняння (9.5) і для довільних значень c_m задовольняє умови (9.8). Коефіцієнти c_1, c_2, \dots, c_{N-1} добираються так, щоб виконувалась перша умова з (9.6), тобто щоб $w(x_i, 0) = \varepsilon_{i,0}$.

Для стійкості скінченно-різницевої схеми (9.2) необхідно, щоб для довільних значень сталих c_1, c_2, \dots, c_{N-1} функція $w(x_i, t_j)$ з (9.11) була обмеженою при $t_j \rightarrow \infty$. Для цього достатньо, щоб для всіх m

$$\left|1 - 4\sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l}\right| \leq 1,$$

звідки одержуємо нерівності

$$0 \leq \sigma \sin^2 \frac{m\pi h}{2l} \leq \frac{1}{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Ці нерівності гарантовано виконуватимуться, якщо $0 < \sigma \leq 1/2$. Отримані нерівності дають достатні умови стійкості скінченно-різницевої схеми (9.2) для розв'язування мішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності. Очевидно, що знайдене у § 8 значення $\sigma = 1/6$ гарантує стійкість відповідної скінченно-різницевої схеми.

Зауважимо, що для $\sigma = 1/2$ одержуємо дуже просте скінченно-різницеве рівняння

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}). \quad (9.12)$$

Відповідна схема стійка, однак у цьому випадку порядок відхилення рівняння (9.12) від рівняння теплопровідності дорівнює $O(h^2)$.

§ 10. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності

Як випливає з результатів § 9, стійкість різницевої схеми (8.3) можна гарантувати, якщо $\sigma \leq 0,5$. Але навіть використання значення $\sigma = 0,5$ хоч і зменшує кількість обчислень втричі при втраті точності на два порядки, не вирішує усіх проблем. А отже, вихід з цієї ситуації полягає у використанні замість (8.3) іншої різницевої схеми, яка буде стійкою для досить великих значень k . Прикладом такої схеми є схема

$$\frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j}}{k} = a^2 \cdot \frac{\bar{u}_{i-1,j+1} - 2\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i+1,j+1}}{h^2}, \quad (10.1)$$

яку можна одержати з рівняння (8.1), вважаючи наближено, що

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{i,j}}{\partial x^2}.$$

Запишемо схему (10.1) у вигляді системи рівнянь

$$\bar{u}_{i-1,j+1} - (2+s)\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i+1,j+1} = -s\bar{u}_{i,j}, \quad (10.2)$$

де $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots$,

$$s = \frac{h^2}{ka^2}, \quad \bar{u}_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \quad \bar{u}_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \quad \bar{u}_{i,0} = f(x_i).$$

Система (10.2) для кожного фіксованого j є лінійною алгебраїчною системою з трьохдіагональною матрицею.

Оскільки методика розв'язування таких систем уже розглядалася у параграфах 4 і 5 розділу 2, то обмежимося лише готовими формулами методу алгебраїчної прогонки:

$$\begin{cases} \bar{u}_{0,j+1} = \varphi(t_{j+1}), \\ \bar{u}_{i,j+1} = (u_{i+1,j+1} + b_{i,j+1})a_{i,j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \bar{u}_{n,j+1} = \psi(t_{j+1}), \end{cases} \quad (10.3)$$

де

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{2+s}, \quad b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + s\bar{u}_{1,j},$$

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2+s-a_{i-1,j+1}},$$

$$b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1} \cdot b_{i-1,j+1} + s\bar{u}_{i,j}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Зауважимо, що для $s > 0$ схема (10.2) є стійкою ([4], § 12 розділу 5), а отже, наближений розв'язок задачі (8.1), (8.2) може бути знайдений цим способом для будь-якого кроку k , не залежного від h . При цьому точність такого наближення буде $O(h^2 + k)$.

Для задачі (8.6), (8.7) з прикладу 3.3, одержуємо таблицю, яка відповідає значенням $h = 0,1$, $k = 0,01$, $s = 1$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{u}_{i,0}$	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0,360
$a_{i,1}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,1}$	0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	0,813
$\bar{u}_{i,1}$	0,310	0,572	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0,310
$u_{i,1}^*$	0,302	0,564	0,761	0,881	0,921	0,881	0,761	0,564	0,302
$a_{i,2}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,2}$	0,310	0,675	1,018	1,270	1,406	1,419	1,306	1,071	0,719
$\bar{u}_{i,2}$	0,275	0,514	0,695	0,808	0,845	0,808	0,695	0,514	0,275
$u_{i,2}^*$	0,267	0,504	0,688	0,803	0,841	0,803	0,688	0,504	0,267

$a_{i,3}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,3}$	0,275	0,605	0,922	1,159	1,288	1,300	1,192	0,969	0,645
$\bar{u}_{i,3}$	0,246	0,464	0,632	0,738	0,774	0,738	0,632	0,464	0,246
$u_{i,3}^*$	0,239	0,454	0,622	0,729	0,765	0,729	0,622	0,454	0,239
$a_{i,4}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,4}$	0,246	0,546	0,837	1,057	1,177	1,188	1,086	0,879	0,582
$\bar{u}_{i,4}$	0,222	0,421	0,576	0,673	0,707	0,673	0,576	0,421	0,222
$u_{i,4}^*$	0,216	0,410	0,563	0,661	0,695	0,661	0,563	0,410	0,216
$a_{i,5}$	0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382
$b_{i,5}$	0,222	0,495	0,761	0,963	1,075	1,084	0,990	0,799	0,527
$\bar{u}_{i,5}$	0,201	0,382	0,524	0,614	0,645	0,614	0,524	0,382	0,201
$u_{i,5}^*$	0,195	0,371	0,510	0,599	0,630	0,599	0,510	0,371	0,195

Для порівняння в таблиці наведені значення $u_{i,1}^*$, $u_{i,2}^*$, $u_{i,3}^*$, $u_{i,4}^*$, $u_{i,5}^*$, які відповідають рядкам $j = 6$, $j = 12$, $j = 18$, $j = 24$, $j = 30$ попередньої таблиці. Як бачимо, відхилення одержаних значень для $t = 0,05$ становлять приблизно 0,01.

§ 11. Метод сіток для хвильового рівняння

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11.1)$$

і шукатимемо його розв'язок, який задовольняє умови

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), & u'_x(x,0) = F(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = \varphi(t), & u(l,t) = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

причому $f(0) = \varphi(0)$, $f(l) = \psi(0)$.

Покладаючи $x_i = ih$, $t_j = jk$, $i = 0,1,\dots,n$, $j = 0,1,2,\dots$, де $h = l/n$, $k > 0$, замінимо рівняння (11.1) різницеvim рівнянням

$$\frac{\bar{u}_{i,j+1} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{\bar{u}_{i+1,j} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i-1,j}}{h^2}, \quad (11.3)$$

з якого при $k = h/a$ одержуємо

$$\bar{u}_{i,j+1} = \bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i-1,j} - \bar{u}_{i,j-1}. \quad (11.4)$$

Оскільки $\bar{u}_{i,0} = f(x_i)$, $\bar{u}_{0,j} = \varphi(t_j)$, $\bar{u}_{n,j} = \psi(t_j)$, то, задавши фіктивно $j = -1$, маємо

$$\frac{\bar{u}_{i,-1} - \bar{u}_{i,0}}{-k} \approx F(x_i),$$

звідки

$$\bar{u}_{i,-1} \approx f(x_i) - kF(x_i).$$

Враховуючи ці рівності, зможемо застосувати формулу (11.4) для всіх $i = 1, \dots, n-1$ та $j \geq 0$.

Зауважимо, що можна було також покласти

$$\bar{u}_{i,1} \approx f(x_i) + kF(x_i),$$

а якщо функція $f(x)$ задана аналітично, то отримати більш точне наближення

$$\bar{u}_{i,1} \approx f(x_i) + kF(x_i) + \frac{a^2 k^2}{2} f''(x_i) \quad (11.5)$$

і після цього формулу (11.4) використовувати для $j \geq 1$.

Приклад 3.4. Методом сіток знайти наближений розв'язок рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, який задовольняє умови

$$u(x,0) = x \cdot (\pi - x), \quad u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $a = 1$, то покладемо $k = h$ і виберемо $h = \pi/18$. Для всіх i маємо $F(x_i) = 0$, $f''(x_i) = -2$, а отже, за формулою (11.5) знаходимо

$$\bar{u}_{i,1} = f(x_i) - h^2 = f(x_i) - 0,030.$$

Зауважимо, що з міркувань симетрії відносно прямої $x = \pi/2$ достатньо буде знайти розв'язок лише для $0 \leq x \leq \pi/2$. Обмежуючись, крім того, значеннями $t \leq 5\pi/18$, одержуємо такі результати обчислень за формулою (11.4):

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,518	0,975	1,371	1,706	1,980	2,193	2,346	2,437	2,467
1	0,487	0,944	1,340	1,675	1,950	2,163	2,315	2,406	2,437
2	0,426	0,853	1,249	1,584	1,858	2,071	2,224	2,315	2,346
3	0,366	0,731	1,097	1,432	1,706	1,919	2,071	2,163	2,193
4	0,305	0,609	0,914	1,218	1,493	1,706	1,858	1,950	1,980
5	0,244	0,487	0,731	0,945	1,218	1,432	1,584	1,675	1,706

§ 12. Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона

В області G , яка обмежена лініями $y = \alpha$, $y = \beta$, $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ ($\alpha \leq y \leq \beta$), та повністю знаходиться всередині прямо кутника $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$, розглянемо рівняння

$$\begin{aligned}
 & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
 & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

з аналітичними у Q коефіцієнтами та функцією $f(x, y)$.

Шукатимемо розв'язок рівняння (12.1), який задовольняє умови

$$\begin{aligned}
 u(x, \alpha) &= \varphi_1(x), & u(x, \beta) &= \varphi_2(x), \\
 u(g_1(y), y) &= \psi_1(y), & u(g_2(y), y) &= \psi_2(y).
 \end{aligned}
 \tag{12.2}$$

Припустимо, що в області Q виконується умова еліптичності, тобто

$$A(x, y) \cdot C(x, y) - B^2(x, y) > 0,$$

а отже, $A(x, y) \neq 0$, $C(x, y) \neq 0$.

Окрім того, вважатимемо, що функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ аналітичні на відрізку $[a, b]$, функції $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ аналітичні на $[\alpha, \beta]$, і виконуються умови узгодження

$$\begin{aligned} \varphi_1(g_1(\alpha)) &= \psi_1(\alpha), & \varphi_1(g_2(\alpha)) &= \psi_2(\alpha), \\ \varphi_2(g_1(\beta)) &= \psi_1(\beta), & \varphi_2(g_2(\beta)) &= \psi_2(\beta). \end{aligned}$$

Позначимо $h = (\beta - \alpha)/n$ і проведемо в області G прямі $y = y_j$, де $y_j = \alpha + jh$.

Для кожного фіксованого $j = 1, 2, \dots, n-1$ рівняння (12.1) наближено замінимо на

$$\begin{aligned} &A_j(x)\bar{u}_j''(x) + 2B_j(x)\frac{\bar{u}'_{j+1}(x) - \bar{u}'_{j-1}(x)}{2h} + \\ &+ C_j(x)\frac{\bar{u}_{j+1}(x) - 2\bar{u}_j(x) + \bar{u}_{j-1}(x)}{h^2} + \\ &+ a_j(x)\bar{u}'_j(x) + b_j(x)\frac{\bar{u}_{j+1}(x) - \bar{u}_{j-1}(x)}{2h} + c_j(x)\bar{u}_j(x) = f_j(x), \end{aligned} \quad (12.3)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(x) &= \bar{u}(x, y_j), & \bar{u}'_j(x) &= \frac{\partial \bar{u}(x, y_j)}{\partial x}, & \bar{u}''_j(x) &= \frac{\partial^2 \bar{u}(x, y_j)}{\partial x^2}, \\ A_j(x) &= A(x, y_j), & B_j(x) &= B(x, y_j), & C_j(x) &= C(x, y_j), \\ a_j(x) &= a(x, y_j), & b_j(x) &= b(x, y_j), & c_j(x) &= c(x, y_j). \end{aligned}$$

В результаті одержуємо систему $n-1$ лінійних диференціальних рівнянь другого порядку відносно невідомих функцій

$$\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \dots, \bar{u}_{n-1}(x).$$

Зауважимо, що $\bar{u}_0(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{u}_n(x) = \varphi_2(x)$, а отже,

$$\begin{aligned} \bar{u}'_0(x) &= \varphi'_1(x), & \bar{u}''_0(x) &= \varphi''_1(x), \\ \bar{u}'_n(x) &= \varphi'_2(x), & \bar{u}''_n(x) &= \varphi''_2(x). \end{aligned}$$

Загальний розв'язок системи (12.3) залежить від $2n - 2$ сталих, які можна визначити, враховуючи крайові умови, а саме

$$\begin{cases} \bar{u}_j(g_1(y_j)) = \psi_1(y_j), \\ \bar{u}_j(g_2(y_j)) = \psi_2(y_j), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (12.4)$$

Таким чином, ми зможемо знайти значення наближеного розв'язку на всіх прямих $t = t_j$. Такий метод розв'язування називають **методом прямих**. Різниця між отриманим наближеним розв'язком та точним розв'язком крайової задачі (12.1), (12.2) дорівнює $O(h^2)$.

Система (12.3) у загальному випадку є системою лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, а її розв'язання зазвичай викликає значні труднощі. Тому метод прямих буде ефективним лише тоді, коли коефіцієнти цієї системи є сталими.

Наприклад, для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (12.5)$$

яке розглядаємо у прямокутнику Q , шукаємо розв'язок, який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, \alpha) &= \varphi_1(x), & u(x, \beta) &= \varphi_2(x), \\ u(a, y) &= \psi_1(y), & u(b, y) &= \psi_2(y), \end{aligned} \quad (12.6)$$

де функція $f(x, y)$ неперервна у Q , $\psi_1(y)$ та $\psi_2(y)$ – неперервні на $[\alpha, \beta]$, а $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ – двічі неперервно диференційовні на $[a, b]$, причому

$$\varphi_1(a) = \psi_1(\alpha), \quad \varphi_1(b) = \psi_2(\alpha), \quad \varphi_2(a) = \psi_1(\beta), \quad \varphi_2(b) = \psi_2(\beta).$$

З (12.3) одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\bar{u}_j''(x) + \frac{\bar{u}_{j+1}(x) - 2\bar{u}_j(x) + \bar{u}_{j-1}(x)}{h^2} = f_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12.7)$$

де $\bar{u}_0(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{u}_n(x) = \varphi_2(x)$.

Але використання такого підходу дає похибку порядку $O(h^2)$. У зв'язку з цим встановимо більш точні формули чисельного інтегрування рівняння (12.5).

Знову розглядаємо задачу (12.5), (12.6) і припустимо, що її розв'язок $u(x, y)$ має неперервні частинні похідні за змінною y до шостого порядку включно. Тоді за формулою Тейлора

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1}(x) + u_{j-1}(x) &= \\ &= 2u_j(x) + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} h^4 + O(h^6) \end{aligned} \right\}. \quad (12.8)$$

Якщо у (12.8) замінити всі $u_k(x)$ на $\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2}$, то з точністю до $O(h^4)$ будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} &= \\ &= 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} h^2 + O(h^4). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Поділимо (12.8) на h^2 , а (12.9) на 12 і віднімемо від першої з одержаних рівностей другу. Результат запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)}{h^2} &= \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + 10 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right) + O(h^4). \end{aligned} \quad (12.10)$$

З (12.5) випливає, що

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x),$$

а тому то з точністю до $O(h^4)$ з (12.10) одержуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{j+1}''(x) + 10\bar{u}_j''(x) + \bar{u}_{j-1}''(x) + \frac{12}{h^2}(\bar{u}_{j+1}(x) - 2\bar{u}_j(x) + \bar{u}_{j-1}(x)) = \\ = f_{j+1}(x) + 10f_j(x) + f_{j-1}(x), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Зауважимо, що $\bar{u}_0(x) = \varphi_1(x)$, $\bar{u}_n(x) = \varphi_2(x)$, $\bar{u}_0''(x) = \varphi_1''(x)$, $\bar{u}_n''(x) = \varphi_2''(x)$ та

$$\bar{u}_j(a) = \psi_1(y_j), \quad \bar{u}_j(b) = \psi_2(y_j). \quad (12.12)$$

Відомо, що загальний розв'язок відповідної (12.11) однорідної системи має вигляд

$$\bar{u}_j(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (A_k e^{\lambda_j x} + B_k e^{-\lambda_j x}) \cdot \sin \frac{\pi k j}{n}, \quad (12.13)$$

де $\lambda_j^2 = \frac{12}{h^2} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi j}{n}\right) \left(5 + \cos \frac{\pi j}{n}\right)^{-1}$.

Частинний розв'язок системи (12.11) можна знайти, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів або метод варіації довільних сталих. Коефіцієнти A_k та B_k можна визначити з умов (12.12).

Приклад 3.5. Розв'язати методом прямих рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y \quad (12.14)$$

в області $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, якщо

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & u(x, 2) = x + 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, y) = y, & u(2, y) = 2y, & 0 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (12.15)$$

Розв'язання. Для спрощення міркувань обмежимося випадком $n = 2$. Тоді $h = 1$, а система (12.11) складається з одного рівняння:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2''(x) + 10\bar{u}_1''(x) + \bar{u}_0''(x) + 12(\bar{u}_2(x) - 2\bar{u}_1(x) + \bar{u}_0(x)) = \\ = f_2(x) + 10f_1(x) + f_0(x). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Оскільки $\bar{u}_0(x) = 0$, $\bar{u}_0''(x) = 0$, $\bar{u}_2(x) = x + 2$, $\bar{u}_2''(x) = 0$,

$$f(x, y) = x + y, \quad f_0(x) = x, \quad f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = x + 2,$$

то рівняння (12.16) можна записати у вигляді

$$5\bar{u}_1''(x) - 12\bar{u}_1(x) = -6. \quad (12.17)$$

За формулою (12.13) або безпосередньо розв'язуючи рівняння (12.17), знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$\bar{v}_1(x) = Ae^{\sqrt{2,4}x} + Be^{-\sqrt{2,4}x}.$$

Підставляючи $\bar{u}_{1c} = c$ у (12.7), одержуємо $c = 0,5$. Отже,

$$\bar{u}_1(x) = Ae^{\sqrt{2,4}x} + Be^{-\sqrt{2,4}x} + 0,5.$$

Оскільки $\bar{u}(0;1) = 1$, $\bar{u}(2;1) = 2$, то коефіцієнти A та B визначимо з системи

$$\begin{cases} A + B + 0,5 = 1, \\ Ae^{2\sqrt{2,4}} + Be^{-2\sqrt{2,4}} + 0,5 = 2. \end{cases}$$

Провівши необхідні обчислення, знаходимо

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e^{2\sqrt{2,4}} - 1}{e^{4\sqrt{2,4}} - 1} \approx 0,067, \quad B = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{4\sqrt{2,4}} - 3e^{2\sqrt{2,4}}}{e^{4\sqrt{2,4}} - 1} \approx 0,433.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$\bar{u}_1(x) \approx 0,067e^{1,549x} + 0,433e^{-1,549x} + 0,5.$$

Зауважимо, що для наближеного знаходження розв'язку при $n = 4$ можна було скористатися вже отриманим результатом і розв'язати рівняння (12.14) окремо в областях

$$Q_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}, \quad Q_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\},$$

покладаючи кожного разу $n = 2$.

§ 13. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі

В області $G \subset \mathbf{R}^2$ з межею Γ розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (13.1)$$

де $f(x, y)$ – неперервна в області G функція, і будемо шукати його розв’язок у класі K_0 неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області $\bar{G} = G \cup \Gamma$ функцій, які на межі задовольняють умову

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (13.2)$$

Доведемо спочатку, що у класі K_0 оператор $L[u] = -\Delta u$ є симетричним і додатним. Справді, якщо $u \in K_0$, $v \in K_0$, то

$$\begin{aligned} (L[u], v) - (u, L[v]) &= \iint_G \left(-v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) dx dy = \\ &= \iint_G \left(\left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) dx dy = \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Застосувавши формулу Гріна

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

і врахувавши, що $u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0$, одержуємо:

$$\begin{aligned} (L[u], v) - (u, L[v]) &= \\ &= \int_{\Gamma} \left(- \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, $(L[u], v) = (u, L[v])$, тобто оператор L симетричний.

Покажемо тепер, що оператор L додатний. Маємо

$$\begin{aligned} (L[u], u) &= - \iint_G u \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ &= - \iint_G \left(\left(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right) dx dy = \end{aligned}$$

$$= -\iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) dx dy + \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy.$$

Застосувавши до першого з інтегралів формулу Гріна і врахувавши (13.2), одержуємо:

$$\begin{aligned} (L[u], u) &= -\int_{\Gamma} \left(-u \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \\ &+ \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \geq 0, \end{aligned}$$

причому $(L[u], u) = 0$ лише тоді, коли $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Звідси випливає,

що $u(x, y) = \text{const}$, а враховуючи неперервність функції $u(x, y)$ в області \bar{G} і умову (13.2), одержуємо, що $u(x, y) \equiv 0$. Отже, оператор L додатний.

Таким чином, враховуючи результати § 9 розділу 2, приходимо до важливого висновку: *задача (13.1), (13.2) у класі K_0 еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала*

$$F[u] = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right) dx dy. \quad (13.3)$$

Зазначимо, що у класі K неперервних разом зі своїми похідними першого і другого порядку в області \bar{G} функцій $u(x, y)$, які на межі Γ задовольняють умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (13.4)$$

де $\varphi(x, y)$ – неперервна на Γ функція, крайова задача (13.1), (13.4) також еквівалентна варіаційній задачі про мінімум функціонала (13.3).

Для рівняння Лапласа цей функціонал набуває вигляду

$$F[u] = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \quad (13.5)$$

а інтеграл у правій частині цієї рівності називають *інтегралом Діріхле*.

§ 14. Метод Рітца для задачі Діріхле

Шукатимемо розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (14.1)$$

в області G , обмеженій кусково-гладким контуром Γ , за умови

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (14.2)$$

де $\varphi(x, y)$ – неперервна на Γ функція.

Як показано у § 13, задача (14.1), (14.2) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум для функціонала

$$F[u] = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (14.3)$$

у класі K функцій, які мають неперервні похідні до другого порядку включно в області $\bar{G} = G \cup \Gamma$ і задовольняють умову (14.2).

Нехай $u_0(x, y) \in K$, $u_1(x, y) \in K_0$, ..., $u_n(x, y) \in K_0$. Тоді

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad u_i(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і лінійна комбінація

$$\bar{u}(x, y) = \sum_{i=0}^n c_i u_i(x, y), \quad (14.4)$$

де $c_0 = 1$, належить до класу K для будь-яких сталих c_1, c_2, \dots, c_n .

Підставляючи вираз (14.4) у функціонал (14.3), одержуємо:

$$F[\bar{u}] = \iint_G \left(\left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (14.5)$$

Доберемо коефіцієнти c_1, c_2, \dots, c_n так, щоб функціонал $F[u]$ набував мінімуму. Для цього необхідно, щоб

$$\frac{\partial F[\bar{u}]}{\partial c_j} = 2 \iint_G \left(\left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^n c_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (14.6)$$

для $j = 1, 2, \dots, n$ або

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + c_1 [u_1, u_1] + \dots + c_n [u_n, u_1] = 0, \\ [u_0, u_2] + c_1 [u_1, u_2] + \dots + c_n [u_n, u_2] = 0, \\ \dots \dots \dots \\ [u_0, u_n] + c_1 [u_1, u_n] + \dots + c_n [u_n, u_n] = 0, \end{cases} \quad (14.7)$$

де позначено

$$[u_i, u_j] = \iint_G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

причому $[u_i, u_j] = [u_j, u_i]$.

Функція $\bar{u}(x, y)$ з коефіцієнтами, визначеними з системи (14.7), є наближеним розв'язком задачі Діріхле. Точність наближення залежить від вибору координатних функцій $u_k(x, y)$, а також від кількості цих функцій.

Приклад 3.6. Знайти функцію $u(x, y)$, гармонійну в області $G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, яка на межі Γ цієї області задовольняє умову $u|_{\Gamma} = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Виберемо функції

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy \cdot (1 - x - y),$$

$$u_2(x, y) = x^2 y \cdot (1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2 \cdot (1 - x - y)$$

і утворимо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & x^2 + y^2 + c_1 xy \cdot (1 - x - y) + \\ & + c_2 x^2 y \cdot (1 - x - y) + c_3 xy^2 \cdot (1 - x - y). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Легко перевірити, що функція $\bar{u}(x, y)$ з (14.8) задовольняє задану крайову умову для довільних значень сталих c_1, c_2, c_3 .

Для складання системи (14.7) обчислимо коефіцієнти біля невідомих c_1, c_2, c_3 та вільні члени. Результати обчислень (значення коефіцієнтів біля невідомих) наведені у таблиці.

j	$[u_0, u_j]$	$[u_1, u_j]$	$[u_2, u_j]$	$[u_3, u_j]$
1	$-1/30$	$-1/90$	$1/252$	$1/252$
2	$-1/90$	$1/252$	$3/1120$	$1/70$
3	$-1/90$	$1/252$	$1/70$	$3/1120$

Таким чином, для знаходження c_1, c_2, c_3 одержали систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{90}c_1 + \frac{1}{252}c_2 + \frac{1}{252}c_3 = \frac{1}{30}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{3}{1120}c_2 + \frac{1}{70}c_3 = \frac{1}{90}, \\ \frac{1}{252}c_1 + \frac{1}{70}c_2 + \frac{3}{1120}c_3 = \frac{1}{90}, \end{cases}$$

розв'язком якої, як легко перевірити, є

$$c_1 = 3031/997 \approx 3,0401, \quad c_2 = c_3 = -56/997 \approx -0,0562.$$

Підставляючи знайдені значення c_1, c_2, c_3 у формулу (14.8), одержуємо наближений розв'язок задачі:

$$\bar{u}(x, y) = x^2 + y^2 + (3,0401 - 0,0562(x + y)) \cdot xy(1 - x - y).$$

Зокрема, $\bar{u}(0,4;0,2) = 0,2962 \approx 0,30$, що приблизно співпадає з результатом, отриманим методом Лібмана (§ 5). ■

§ 15. Метод Рітца для рівняння Пуассона

Метод Рітца, який у § 14 застосовували до задачі Діріхле для рівняння Лапласа, можна використати також для розв'язування

рівняння Пуассона. Тільки при цьому доведеться досліджувати на мінімум функціонал, визначений формулою (13.3). Проілюструємо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 3.7. В області $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ знайти методом Рітца розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y, \quad (15.1)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = x + 2, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ u(0, y) = y, \quad u(2, y) = 2y, \quad 0 \leq y \leq 2. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Розв'язання. Оскільки G є прямокутником, а крайові умови на її межі задані лінійними функціями, то шукатимемо функцію $u_0(x, y)$ з невизначеними коефіцієнтами у вигляді

$$u_0(x, y) = Axy + Bx + Cy + D.$$

Підставляючи $u_0(x, y)$ у крайові умови, одержуємо систему

$$\begin{cases} Bx + D = 0, \\ 2Ax + Bx + 2C + D = x + 2, \\ Cy + D = y, \\ 2Ay + 2B + Cy + D = 2y, \end{cases}$$

з якої знаходимо, що

$$A = 0,5, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Таким чином,

$$u_0(x, y) = 0,5xy + y.$$

У якості функцій $u_k(x, y)$ можна вибрати, наприклад, функції

$$u_1(x, y) = xy(x-2)(y-2), \quad u_2(x, y) = x^2y(x-2)(y-2),$$

$$u_3(x, y) = xy^2(x-2)(y-2), \quad u_4(x, y) = xy(x-2)^2(y-2),$$

$$u_5(x, y) = xy(x-2)(y-2)^2, \quad \dots$$

Обмежуючись випадком $n = 1$, шукатимемо наближений розв'язок задачі (15.1), (15.2) у вигляді

$$\bar{u}(x, y) = 0,5xy + y + C_1xy(x - 2)(y - 2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} F[\bar{u}] = & \iint_G \left((0,5y + 2C_1(x - 1)y(y - 2))^2 + \right. \\ & \left. + (0,5x + 1 + 2C_1x(x - 2)(y - 1))^2 + \right. \\ & \left. + 2(x + y)(0,5xy + C_1xy(x - 2)(y - 2)) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що

$$\frac{\partial F[\bar{u}]}{\partial C_1} = \frac{512}{45}C_1 + \frac{64}{9}.$$

Прирівнюючи знайдену похідну до нуля, знаходимо $C_1 = -0,625$, а отже, наближеним розв'язком задачі (15.1), (15.2) є

$$\bar{u}(x, y) = 0,5xy + y - 0,625xy(x - 2)(y - 2). \blacksquare$$

Для порівняння цього розв'язку з розв'язком, отриманим методом прямих, обчислимо наближене значення функції $\bar{u}(x, y)$ в центрі області G – точці $M(1;1)$. За методом Рітца $\bar{u}(1;1) \approx 0,875$, а за методом прямих $\bar{u}(1;1) \approx 0,907$. Різниця у 0,03 вказує на те, що обидва ці методи дають приблизно однаковий наближений розв'язок заданої крайової задачі. Зрозуміло, що для досягнення більшої точності у кожному з методів значення n необхідно збільшити.

ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ ІІІ

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в області $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$:

а) методом сіток з кроком $h = 0,5$;

б) методом прямих з кроком $h = 1$;

в) методом Рітца при $n = 1$.

Усі обчислення проводити з точністю до трьох знаків після коми. Порівняти отримані значення в центрі квадрата Q . Обчислити значення наближеного розв'язку у центрі квадрата Q методом Монте-Карло при $h = 0,5$, $n = 20$.

1. $u(x,0) = 2 + x^2$, $u(x,2) = 4 - x$,
 $u(0,y) = 2 + y$, $u(2,y) = 6 - 2y$.
2. $u(x,0) = -2 + x$, $u(x,2) = 2 - 2x$,
 $u(0,y) = -2 + y^2$, $u(2,y) = -y$.
3. $u(x,0) = 1 + x^2$, $u(x,2) = 5 - x^2$,
 $u(0,y) = 1 + y^2$, $u(2,y) = 5 - y^2$.
4. $u(x,0) = -1 + x^2$, $u(x,2) = 1 - x$,
 $u(0,y) = -1 + y$, $u(2,y) = 3 - y^2$.
5. $u(x,0) = 2 + x$, $u(x,2) = 6 - x^2$,
 $u(0,y) = 2 + y^2$, $u(2,y) = 4 - y$.
6. $u(x,0) = -2 + x^2$, $u(x,2) = -x$,
 $u(0,y) = -2 + y$, $u(2,y) = 2 - 2y$.
7. $u(x,0) = 1 + x$, $u(x,2) = 5 - 2x$,
 $u(0,y) = 1 + y^2$, $u(2,y) = 3 - y$.
8. $u(x,0) = -1 + x^2$, $u(x,2) = 3 - x^2$,
 $u(0,y) = -1 + y^2$, $u(2,y) = 3 - y^2$.
9. $u(x,0) = 2 + x^2$, $u(x,2) = 4 - x$,
 $u(0,y) = 2 + y$, $u(2,y) = 6 - y^2$.
10. $u(x,0) = -2 + x$, $u(x,2) = 2 - x^2$,
 $u(0,y) = -2 + y^2$, $u(2,y) = -y$.
11. $u(x,0) = 1 + x^2$, $u(x,2) = 3 - x$,
 $u(0,y) = 1 + y$, $u(2,y) = 5 - 2y$.
12. $u(x,0) = -1 + x$, $u(x,2) = 3 - 2x$,
 $u(0,y) = -1 + y^2$, $u(2,y) = 1 - y$.
13. $u(x,0) = 2 + x^2$, $u(x,2) = 6 - x^2$,
 $u(0,y) = 2 + y^2$, $u(2,y) = 6 - y^2$.
14. $u(x,0) = -2 + x^2$, $u(x,2) = -x$,
 $u(0,y) = -2 + y$, $u(2,y) = 2 - y^2$.

15. $u(x,0) = 1 + x$, $u(x,2) = 5 - x^2$,
 $u(0,y) = 1 + y^2$, $u(2,y) = 3 - y$.
16. $u(x,0) = -1 + x^2$, $u(x,2) = 1 - x$,
 $u(0,y) = -1 + y$, $u(2,y) = 3 - 2y$.
17. $u(x,0) = 2 + x$, $u(x,2) = 6 - 2x$,
 $u(0,y) = 2 + y^2$, $u(2,y) = 4 - y$.
18. $u(x,0) = -2 + x^2$, $u(x,2) = 2 - x^2$,
 $u(0,y) = -2 + y^2$, $u(2,y) = 2 - y^2$.
19. $u(x,0) = 1 + x^2$, $u(x,2) = 3 - x$,
 $u(0,y) = 1 + y$, $u(2,y) = 5 - y^2$.
20. $u(x,0) = -1 + x$, $u(x,2) = 3 - x^2$,
 $u(0,y) = -1 + y^2$, $u(2,y) = 1 - y$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- вузол сітки, 31
 - внутрішній, 107
 - межовий, 107
 - сусідній, 107
- задача
 - варіаційна, 84, 85, 88, 89, 136
 - Діріхле, 102, 103, 107, 112, 138
 - Коші, 5, 6, 100
 - крайова, 57
 - неоднорідна, 57
 - однорідна, 57
 - мішана, 101
 - різницева, 33
- інтеграл Діріхле, 138
- крок сітки, 31
- ламана Ейлера, 28
- лема Чаплигіна, 22
- метод
 - Адамса, 46
 - алгебраїчної прогонки
 - для крайової задачі, 63
 - для рівняння теплопровідності, 126
 - Гальоркіна, 77
 - Ейлера, 28
 - Ейлера удосконалений, 28
 - Ейлера-Коші удосконалений, 29
 - ітерацій (послідовних наближень), 8
 - колокації, 70
 - Мілна, 51
 - моделювання, 112
 - Монте-Карло, 113
 - найменших квадратів, 73
 - інтегральний, 73
 - точковий, 76
 - послідовних зближень Крилова, 48
 - послідовних наближень (ітерацій), 8
 - прямих
 - для рівняння Пуассона, 130
 - Рітца
 - для варіаційної задачі, 89
 - для задачі Діріхле, 138
 - для найпростішої крайової задачі, 91
 - для крайової задачі з неоднорідними умовами, 93
 - для рівняння Пуассона, 141
 - Рунге-Кутта, 37
 - сіток
 - для задачі Діріхле, 112
 - для рівняння теплопровідності, 118
 - для хвильового рівняння, 128
 - степеневих рядів, 14
 - стрільби, 59
 - Чаплигіна двосторонніх наближень, 21
- методи інтегрування диференціальних рівнянь (наближені)
 - асимптотичні, 3
 - графічні, 3
 - числові, 3
 - різницеві 3, 31
- норма рівномірна, 32
- оператор
 - додатний, 83
 - Лапласа, 101
 - симетричний, 83

- порядок
 - апроксимації рівняння, 33
 - апроксимації різницевої схеми, 33
 - апроксимації розв'язку диференціальної задачі, 33
 - принцип максимуму, 103
 - процес
 - ітераційний Лібмана, 109
 - ітераційної обробки, 30
 - рівність Парсеваля, 78
 - рівняння
 - Лапласа, 100, 101, 104
 - Пуассона, 100, 136, 141
 - теплопровідності, 100, 118, 122
 - хвильове, 100, 128
 - сітка, 31
 - рівномірна, 31
 - стійкість
 - різницевої схеми, 122
 - схема
 - різницева, 33
 - для найпростішої крайової задачі, 61
 - для рівняння Лапласа, 104
 - перша основна, 104
 - друга основна, 110
 - Ейлера, 35
 - Ейлера узагальнена, 37
 - нестійка, 122
 - Рунге-Кутга, 39, 40, 42
 - стійка, 34, 122
- теорема
 - Неймана, 103
 - Пікара, 5
 - Чаплигіна, 23
 - точка колокації, 71
 - умова
 - крайова, 57, 106
 - Ліпшица, 5, 7
 - початкова, 4, 5, 106
 - формула
 - Адамса, 47
 - Мілна, 51
 - функція
 - гармонійна, 102
 - допустима, 82
 - Гріна, 58
 - сіткова, 31

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Наука, 1987. – 600 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Гой Т.П. Звичайні диференціальні рівняння. Частина 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах / Т.П. Гой, А.І. Казмерчук, І.В. Федак. – Івано-Франківськ: Вид-во «ЛПК», 2005. – 120 с.
4. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.Э. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
6. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений / Л. Коллатц. – М.: ИЛ, 1953. – 490 с.
7. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – СПб.: Лань, 1997. – 160 с.
8. Ляшко І.І. Диференціальні рівняння / І.І. Ляшко, О.К. Боярчук, Я.Г. Гай, О.Ф. Калайда. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
9. Лященко М.Я. Чисельні методи / М.Я. Лященко, М.С. Головань. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
10. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
11. Математический практикум / Г.Н. Положий, Н.А. Пахарева, И.З. Степаненко и др.; под. ред. Г.Н. Положиги. – М.: Физматгиз, 1960. – 512 с.

12. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
13. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1985. – 230 с.
14. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
15. Федак І.В. Про одне застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів / І.В. Федак // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Серія “Прикладна математика”. – 2000. – № 411. – С. 326–328.
16. Шкіль М.І. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, В.М. Лейфура, П.Ф. Самусенко. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
17. Двосторонні наближені методи / Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ Прикарпатського нац. ун-ту ім. Василя Стефаника, 2007. – 516 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ I. Наближені методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь	5
§ 1. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.....	5
§ 2. Метод послідовних наближень.....	8
§ 3. Метод степеневих рядів.....	12
§ 4. Метод Чаплигіна двосторонніх наближень.....	19
§ 5. Метод Ейлера та його модифікації.....	26
§ 6. Загальні поняття теорії різницевої схеми.....	29
§ 7. Різницева схема Ейлера та її узагальнення.....	33
§ 8. Метод Рунге-Кутта.....	35
§ 9. Застосування різницевої схеми Рунге-Кутта до наближеного обчислення інтегралів.....	40
§ 10. Метод Адамса.....	44
§ 11. Метод послідовних зближень Крилова.....	46
§ 12. Метод Мілна.....	49
§ 13. Деякі зауваження та узагальнення.....	50
Задачі до розділу I.....	53
Розділ II. Наближені методи розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку	55
§ 1. Постановка крайових задач. Функція Гріна.....	55
§ 2. Метод стрільби.....	57
§ 3. Різницева схема для найпростішої крайової задачі.....	59
§ 4. Метод алгебраїчної прогонки розв'язку лінійних алгебраїчних систем з трьохдіагональною матрицею.....	61
§ 5. Інший підхід до розв'язування систем з трьохдіагональною матрицею.....	66
§ 6. Метод колокації.....	68
§ 7. Метод найменших квадратів.....	72
§ 8. Метод Гальоркіна.....	75
§ 9. Додатні симетричні оператори та єдиність розв'язку крайової задачі.....	80
§ 10. Зведення лінійної крайової задачі до розв'язування варіаційної задачі.....	82

§ 11. Зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь до варіаційної задачі.....	83
§ 12. Зведення до варіаційної задачі у випадку неоднорідних крайових умов.....	86
§ 13. Наближене розв'язування варіаційної задачі методом Рітца.....	87
§ 14. Метод Рітца для найпростішої крайової задачі.....	89
§ 15. Розв'язування методом Рітца крайових задач з неоднорідними крайовими умовами.....	91
Задачі до розділу II.....	95
Розділ III. Наближені методи розв'язування крайових задач для рівнянь з частинними похідними.....	97
§ 1. Постановка крайових задач для рівнянь з частинними похідними.....	97
§ 2. Гармонійні функції та єдиність розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа.....	100
§ 3. Різницеві схеми для рівняння Лапласа.....	102
§ 4. Метод сіток для розв'язування задачі Діріхле.....	105
§ 5. Ітераційний процес Лібмана.....	107
§ 6. Розв'язування задачі Діріхле методом моделювання.....	110
§ 7. Метод Монте-Карло.....	111
§ 8. Метод сіток для рівняння теплопровідності.....	115
§ 9. Стійкість скінченно-різницевої схеми для розв'язку рівняння теплопровідності.....	119
§ 10. Метод алгебраїчної прогонки для рівняння теплопровідності....	124
§ 11. Метод сіток для хвильового рівняння.....	126
§ 12. Метод прямих та його модифікація для рівняння Пуассона.....	128
§ 13. Зведення крайових задач для рівнянь Пуассона та Лапласа до варіаційної задачі.....	133
§ 14. Метод Рітца для задачі Діріхле.....	135
§ 15. Метод Рітца для рівняння Пуассона.....	138
Задачі до розділу III.....	140
Предметний покажчик.....	142
Список літератури.....	146
Зміст.....	148