УДК 519.25: 336.76 Буртняк І.В.

Моделирование динамики индекса ПФТС

Вступление. В современной мировой финансовой системе именно фондовый рынок может служить независимым индикатором стабильности и определенности перераспределения, финансовых и денежных ресурсов, потому что этот рынок является одновременно сегментом денежного рынка и рынка капиталов. То есть фондовый рынок рассматривается в качестве одного из наиболее эффективных механизмов регуляции перетекания финансовых ресурсов с помощью разных инструментов.

Исследование развития фондового рынка является основой, способствующей определению направлений в преобразовании экономики. Сбалансированность и взаимосвязанность разнообразных индикаторов фондового рынка является залогом стойкости движения финансовых ресурсов между разными экономическими агентами. Наиболее известным среди отечественных фондовых индексов является индекс Первой Фондовой Торговой Системы (ПФТС).

Состояние развития фондового рынка, условия и эффективность перераспределения финансовых ресурсов во многом отображаются в соответствующих фондовых индексах, которые представляют собой агрегированный показатель изменений в определенных экономических событиях на этом сегменте рынка. К тому же, чтобы прогнозировать динамику фондовых рынков, нужно четко, на количественном уровне знать соответствующие тенденции. Это снова-таки находит определенное отображение в динамике фондовых индексов и определяет их множественность.

Постановка задания. Рассмотрим индекс ПФТС, который отображает свыше 90% общего объема торгов организованного фондового рынка в Украине, то беспристрастный взгляд на его динамику дает основание говорить о неопределенности фондового рынка.

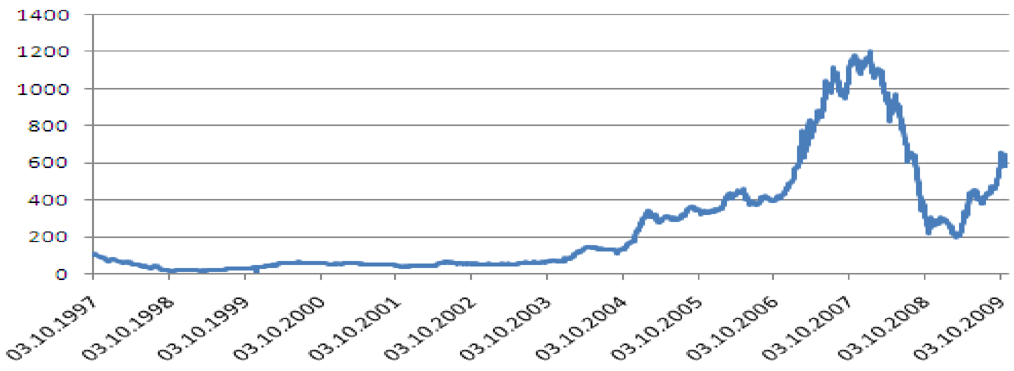

Рис.1. Динамика индекса ПФТС с 03.10.97 по 13.11.09.

Существующая динамика временных интервалов значений фондового индекса ПФТС не дает возможности построить единую модель соответствующих прогнозных оценок, а применение винеровской модели описания такого процесса, как наиболее распространенной среди брокеров и инвесторов, является также малопригодной, что обусловливает другую сторону неопределенности – построение адекватной прогнозной модели.

Таблица 1

Основные статистические характеристики индекса ПФТС в 2009 г.

Статистические характеристики				
Среднее	Стандартное отклонение	Медиана	Ексцесс	Асимметрия
397,79	128,92	413,09	2,19	0,22

Так среднее значение, характеризующее рассеивание средней доходности является достаточно значительным. Это, в свою очередь, осложняет не только выбор инвестора, но и свидетельствует о неоднозначности движения финансовых потоков на разных сегментах рынка.

Стандартное отклонение, что характеризует степень соответствующего риска вложения в ценные бумаги подтверждает не единодушие в движении соответствующих финансовых ресурсов и потоков. Основой его есть значительное рассеивание стандартного отклонения доходностей за разными фондовыми индексами.

Медиана, указывает на значение доходности и делит распределение на равные части и показывает, что индекс за исследуемый период имеет подавляющий рост в динамике доходностей;

Эксцесс и асимметрия, указывают на возможное отличие, от нормального закона распределения (который, кстати, положен в основу классических методов оценки и управления финансовыми потоками на рынках развитых стран) показывают, что положительный эксцесс определяет островершинность распределения [1].

Результаты. На разных промежутках индекс может иметь разные распределения, в частности выборка с 08.01.2009 по 13.11.2009 не подтверждает нормальный, а подтверждает показательное распределение.

Таблица 2

Проверка гипотезы о показательном распределении индекса ПФТС

Интервал	Верхняя граница интервала	Частота v_k	Относительная частота v_k / n	Вероятность попадания на k-й интервал p_k	χ_k^2
(199.1; 234.64)	234.64	30	0.122	0.050	1.443
(234.64; 270.18)	270.18	16	0.065	0.046	0.415
(270.18; 305.72)	305.72	26	0.106	0.042	1.498
(305.72; 376.8)	376.8	15	0.061	0.075	-0.185
(376.8; 412.34)	412.34	34	0.138	0.033	3.185
(412.34; 447.88)	447.88	53	0.215	0.030	6.086
(447.88; 483.42)	483.42	29	0.118	0.028	3.211
(483.42; 554.5)	554.5	11	0.045	0.050	-0.097
(554.5; 590.04)	590.04	7	0.028	0.022	0.302
(590.04; 625.58)	625.58	12	0.049	0.020	1.425
(625.58; 661.12)	661.12	13	0.053	0.019	1.853

Суммируя значение χ_k^2 (см. столбец табл.2) получаем $\chi^2 = 19.136$. Таким образом, выборочная статистика не превышает критического табличного значения $\chi^2_{êðèò} = 21.1$, что отвечает $\beta = 0,01$ и $l - 3 = 8$ степеням свободы. Учитывая это, мы можем принять нашу гипотезу.

Однако дисперсия выборки не совпадает с дисперсией генеральной совокупности, что подтверждает неопределенность фондового рынка.

Разработаны методы прогнозирования и мониторинга, для рассмотренной выборки с 08.01.2009 по 13.11.2009 приростов ежедневных та средненедельных значений индекса ПФТС, подтверждено двойное экспоненциальное распределение, или распределение Лапласа.

Таблица 3

Проверка гипотезы о распределении Лапласа приростов, отвечающие ежедневным значениям индекса ПФТС

Интервал	Верхняя граница интервала	Частота v_k	Относительная частота v_k / n	Вероятность попадания на k-й интервал p_k	χ_k^2
$(-\infty, \overline{m}-3\overline{s})$	-24.05	2	0.009	0.007	0.163
$(\overline{m}-3\overline{s}, \overline{m}-2\overline{s})$	-15.51	2	0.009	0.022	1.576
$(\overline{m}-2\overline{s}, \overline{m}-\overline{s})$	-6.98	25	0.116	0.092	1.378
$(\overline{m}-\overline{s}, \overline{m})$	1.56	86	0.400	0.378	0.275
$(\overline{m}, \overline{m}+\overline{s})$	10.10	73	0.340	0.378	0.842
$(\overline{m}+\overline{s}, \overline{m}+2\overline{s})$	18.63	18	0.084	0.094	0.242
$(\overline{m}+2\overline{s}, \overline{m}+3\overline{s})$	27.17	7	0.033	0.022	1.089
$(\overline{m}+3\overline{s}, +\infty)$		2	0.009	0.007	0.163

Суммируя значение получаем $\chi^2 = 5.727$, выборочная статистика не превышает критического табличного значения $\chi^2_{\hat{e}\eth\grave{e}\grave{o}} = 12.6$, при $\beta = 0{,}05$ и $l - 3 = 5$ степенях свободы. Следовательно, мы можем принять нашу гипотезу.

Распределение Лапласа приростов, отвечающих средненедельным значением индекса ПФТС за период с 08.01.2009 г. по 13.11.2009 г. также подтверждается.

Учитывая распределение, рассмотрим адитивную стохастическую модель (АСМ), а на ее базе прогнозирования индекса ПФТС. АСМ динамики финансового ресурса может быть записана в виде рекурентного соотношения

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_{t-1} + \tilde{\alpha}_t, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}$ – объем ресурса на момент времени t и $t-1 \left(t \in 0:T\right)$, $\tilde{\alpha}_t$ – прирост величины ресурса за момент времени $\left[t-1, t\right]$. Значения, которые принимает $\tilde{\alpha}_t$, рассматриваем как реализацию некоторой случайной величины. На основе (1) можно выразить состояние ресурса в какой-нибудь момент через его состояние в начальный момент времени x_0: $\tilde{x}_t = x_0 + \sum_{i=1}^{t} \tilde{\alpha}_i$.

Последующее развитие АСМ связано с принятием предпосылок, которые касаются характера распределения случайных величин $\tilde{\alpha}_t$. Достаточно естественном есть предположение о том, что $\tilde{\alpha}_t$, распределенные за двойным показательным распределением, так называемое распределение Лапласа с некоторыми параметрами m_t, s_t, т.е. $\alpha_t \in L\left(m_t, s_t\right)$ плотность этого распределения имеет вид $f\left(x\right) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-m|}, x \in R^1, \quad \lambda > 0$; m_t – математическое равно

$$M\left[\alpha\right] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{m} x e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{m}^{+\infty} x e^{-\lambda(x-m)} dx = m.$$

Дисперсия будет выглядеть так $D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - M^2\left(X\right) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx - m^2$,

$$M\left[X^2\right] = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda|x-m|} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{m} x^2 e^{\lambda(x-m)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{m}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda(x-m)} dx = m^2 + \frac{2}{\lambda^2},$$

$$D\left(X\right) = m^2 + 2\lambda^{-2} - m^2 = 2\lambda^{-2}.$$

Также будем считать, что случайные величины $\tilde{\alpha}_t$, являются взаимно независимыми. Тогда для случайной величины $\tilde{\alpha}_{1,t}$, математическое ожидание и дисперсия будут иметь вид $m_{1,t} = \sum_{i=1}^{t} m_i$, $s_{1,m}^2 = \sum_{i=1}^{t} s_i^2$.

Как правило, для непродолжительных временных периодов, которые характеризуются относительной стабильностью условий, может быть принята гипотеза о том, что для каких-нибудь моментов $t \in 0:T$ случайные величины $\tilde{\alpha}_t$, имеют одинаковое распределение и могут рассматриваться как серия реализаций случайной величины $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_t$, где $\tilde{\alpha} \in L(m, \lambda)$. Математическое ожидание случайного прироста $\tilde{\alpha}_{1,t}$, может быть выражено как: $M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right] = m_{1,t} = tm$, а дисперсия: $D\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right] = s_{1,t}^2 = ts^2 = 2t\lambda^{-2}$.

Значение $M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]$ может быть использовано при построении прогноза ожидаемой величины ресурса на момент t при известном значении x_0:

$$x_t = x_0 + M\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right] = x_0 + m_{1,t} = x_0 + tm \tag{2}$$

Соответственно, точность такого прогноза может быть оценена с помощью стандартного отклонения

$$s_t = \sqrt{D\left[\tilde{x}_t\right]} = \sqrt{D\left[\tilde{\alpha}_{1,t}\right]} = \sqrt{2t}\lambda^{-1} \tag{3}$$

s_t может быть использовано при построении доверительного интервала $\left[x_t - \gamma s_t, x_t + \gamma s_t\right]$, в который возможные значения наблюдаемого ресурса (в момент времени t) попадают с заданной вероятностью. Выбор коэффициента $\gamma > 0$ позволяет обеспечить желаемую вероятность попадания значений случайной величины ресурса $\tilde{x}_t$, в указанный интервал.

При практическом использовании АСМ в приведенных выше формулах происходит замена математического ожидания и дисперсии на их оценки, построенных по сериям эмпирических значений финансового ресурса.

Для распределенной за Лапласом случайной величины $\tilde{\alpha}$, консистентной, несмещенной и эффективной оценкой параметра m может использоваться выборочное среднее $\overline{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k$ эмпирические значения приростов ресурса. В то же время, консистентной и несмещенной оценкой для параметра s^2 служит исправленная выборочная дисперсия $\overline{s}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[\alpha_i - \overline{m}\right]^2$, которой отвечает исправленное выборочное стандартное отклонение .

Подставив оценки параметров m и s^2, мы получаем эмпирические формулы как для прогноза величины ресурса на момент времени t, $x_t = x_0 + tm$, так и для его точности (стандартного отклонения) $\overline{s}_t = \sqrt{t}\cdot\overline{s}$.

На базе сформулированной выше адитивной стохастической модели может быть построен алгоритм процедуры прогнозирования ожидаемых значений финансового ресурса (относительно t_0 на n последующих периодов) [2].

1. Определение величины k — объема базовой выборки, по которой в дальнейшем осуществляется расчет выборочного среднего ($\overline{m}$) и выборочного стандартного отклонения ($\overline{s}$). Отметим также, что выбором k фактически задается степень учета тенденций, что имели место раньше и, как ожидается, что сохранятся в будущем (по меньшей мере на протяжении n следующих периодов).

2. Расчет серии с k приростов: $\alpha_i = x_{t_0-k+i-1} - x_{t_0-k+i}$, ãäå $i = 1,\ldots k$.

3. Расчет выборочного среднего $\overline{m}$, что используется как оценка математического ожидания (m) стохастического приращения $\tilde{\alpha}$: $\overline{m} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$.

4. Расчет исправленного стандартного отклонения $\overline{s}$: $\overline{s} = \sqrt{(k-1)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\left[\alpha_i - \overline{m}\right]^2}$

5. Расчет прогнозных значений величины финансового ресурса (показателя) на моменты времени $t_0+1,\ldots,t_0+n$: $x_t = x_0 + tm, t = 1:n$, где x_0 – объем ресурса в момент времени t_0.

6. Расчет оценки стандартного отклонения случайной величины $\tilde{x}_t$: $\overline{s}_t = \sqrt{t}\cdot\overline{s}, t = 1:n$.

7. Построение нижней $\left(x_t - \gamma s_t\right)$ и верхней $\left(x_t + \gamma s_t\right)$ интервальных оценок возможных отклонений фактических значений ресурса от тех, что предусматриваются (с заданной вероятностью, определенной параметром γ).

Предложенная схема прогнозирования может быть проиллюстрирована для построения прогноза индекса ПФТС на основе ряда его ежедневных значений. В табл. 5 приведено фактические и прогнозные значения индекса, построенными с 01.09.2009 г. на 25 дней. При этом как базовая выборка для определения $\overline{m}$ и $\overline{s}$ использовались предыдущие значения на год назад. Здесь $\overline{m} = 1.56$, $\overline{s} = 8.53$.

Таблица 5.

Прогнозные и фактические значения индекса ПФТС

№	Дата	Значение x_t	Прогноз $\overline{x}_t$	Нижняя граница-1 $\overline{x}_t - \overline{s}_t$	Верхняя граница-1 $\overline{x}_t + \overline{s}_t$	Нижняя граница-2 $\overline{x}_t - 2\cdot\overline{s}_t$	Верхняя граница-2 $\overline{x}_t + 2\cdot\overline{s}_t$
0	01.09.2009	462.36	462.36	462.36	462.36	462.36	462.36
1	02.09.2009	458.06	463.92	449.530	466.590	441.000	475.120
2	03.09.2009	463.86	465.48	451.797	475.923	439.734	487.986
3	04.09.2009	459.25	467.04	444.476	474.024	429.701	488.799
4	07.09.2009	460.83	468.6	443.770	477.890	426.710	494.950
5	08.09.2009	464.21	470.16	445.136	483.284	426.063	502.357
6	09.09.2009	465.53	471.72	444.636	486.424	423.742	507.318
7	10.09.2009	470.56	473.28	447.992	493.128	425.423	515.697
8	11.09.2009	472.33	474.84	448.204	496.456	424.077	520.583
9	14.09.2009	472.57	476.4	446.980	498.160	421.390	523.750
10	15.09.2009	478.58	477.96	451.606	505.554	424.632	532.528
11	16.09.2009	484.9	479.52	456.609	513.191	428.318	541.482
12	17.09.2009	489.27	481.08	459.721	518.819	430.172	548.368
13	18.09.2009	491.02	482.64	460.265	521.775	429.509	552.531
14	21.09.2009	492.69	484.2	460.774	524.606	428.857	556.523
15	22.09.2009	502.36	485.76	469.323	535.397	436.287	568.433
16	23.09.2009	507.08	487.32	472.960	541.200	438.840	575.320
17	24.09.2009	514.68	488.88	479.510	549.850	444.340	585.020
18	25.09.2009	515.19	490.44	479.000	551.380	442.811	587.569
19	28.09.2009	526.44	492	489.259	563.621	452.077	600.803
20	29.09.2009	548.04	493.56	509.893	586.187	471.745	624.335
21	30.09.2009	553.29	495.12	514.201	592.379	475.111	631.469
22	01.10.2009	573.2	496.68	533.191	613.209	493.182	653.218
23	02.10.2009	570.34	498.24	529.432	611.248	488.523	652.157
24	05.10.2009	580.1	499.8	538.312	621.888	496.523	663.677
25	06.10.2009	596.91	501.36	554.260	639.560	511.610	682.210

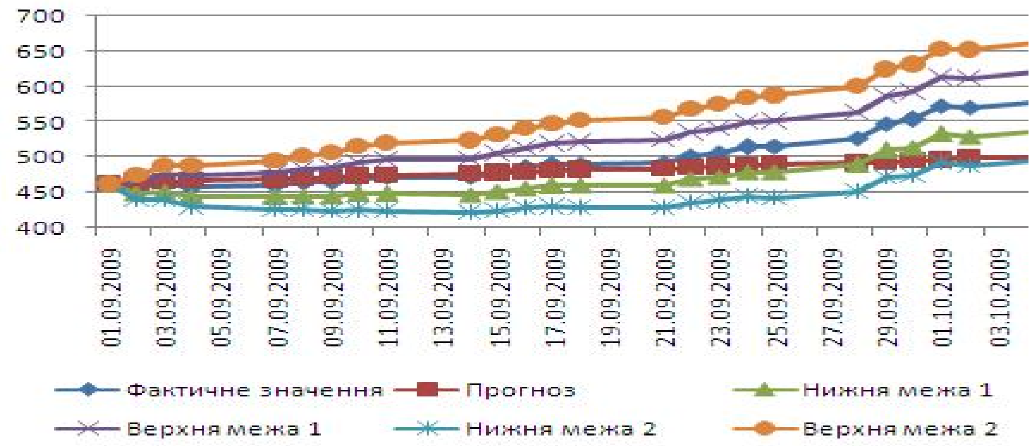

Рис. 3. Прогнозные и фактические ежедневные значения индекса ПФТС

На рис. 3 показанные графики, отображающие соотношение между прогнозными и фактическими значениями индекса ПФТС, можно сделать вывод о том, что существенных отклонений прогнозных от фактических величин, а также относительно коридора, что задается выражениями $\overline{x}_t \pm \overline{s}_t$ не наблюдается.

Заметим, что закон распределения суммы независимых одинаково распределенных приростов

$$F(z) = \underbrace{\iint}_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le z}} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - m \right| \right\} dx_1 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{z-x_1} dx_2 \int_{-\infty}^{z-x_1-x_2} dx_3 \ldots \int_{-\infty}^{z-\sum_{j=1}^{n-1} x_j} \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - m \right| \right\} dx_n$$

По теореме Ляпунова [3. С 303]: Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$– независимые случайные величины, имеющие одинаковый закон распределения с математическим ожиданием m и дисперсией s^2, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ неограниченно приближается к нормальному.

На основании этой теоремы, если для вычисления m и s^2 используется достаточно большое число однаково распределённых приростов, то прогнозные значения имеют нормальное распределение и можно применить методику работ [2] для мониторинга математического ожидания и дисперсии.

Поскольку результаты, полученные в ходе применения прогнозных методик, в подавляющем большинстве случаев становятся основой для принятия последующих управленческих решений, постольку выбор конкретной методики определяется технологиями управления, что сложились. Если управленческие решения принимаются в моменты времени, которые существенно отличаются между собой т. е., в сущности, речь идет о разовых актах управленческих действий, то изложенная выше схема является вполне эффективной и реалистичной.

Для оценки эффективности прогнозов используем коэффициент относительного отклонения, который рассчитывается за формулой

$$\zeta_t = \frac{|x_t - \overline{x}_t|}{x_t} \cdot 100\% \qquad (4)$$

x_t – фактическое отклонение ресурса (показателя) в момент времени *t;*

$\overline{x}_t$ – прогнозное значение финансового ресурса в момент времени t.

Среди преимуществ относительного отклонения есть независимость от размерности и масштабов исследуемого финансового ресурса, поэтому временной ряд, как правило, дает объективную картину точности и надежности использованной прогностической методики.

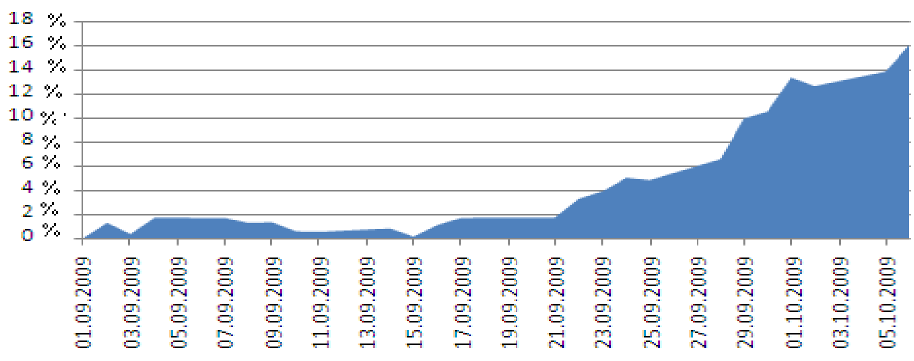

Рис. 5. Относительные отклонения фактических ежедневных значений индекса ПФТС от прогнозных за сентябрь 2009 г.

На рис.5 приведенная гистограмма относительных отклонений фактических значений индекса ПФТС от прогнозов. На основе данной иллюстрации утверждаем, что для большинства дней данного периода значения относительного отклонения не превышает уровень 15%; что свидетельствует о точности прогноза.

Вывод. Разработанная аддитивная модель для прогнозирования индекса ПФТС имеет универсальный характер, что в свою очередь предопределяет возможности для эффективного использования при работе с широким спектром финансовых ресурсов и показателей.

Литература

1. Буртняк І.В. Аналіз перерозподілу фінансових ресурсів / І.В. Буртняк // Моделювання регіональної економіки: зб. наук. праць – Івано-Франківськ : Плай, 2006. –№1(6). – С. 25–38.
2. Благун І.С. Методи моніторингу динаміки фінансового ресурсу / І.С. Благун, І.В. Буртняк // Наукові записки: зб. наук. праць. Серія ,,Економіка”. – Вип. 9. Ч. 4. – Острог : Національний університет “Острозька академія”, 2007. – С. 123–129.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. С. 576.