Побудова фундаментальної матриці розв'язків для ультрапараболічних систем рівнянь високого порядку

Малицька Г.П.
(ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)
Буртняк І.В.
(ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника)

В даній роботі розв'язана задача побудови фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) для систем такого вигляду

$$\partial_t u_\mu(t,R) - \sum_{j=1}^{n_1} x_j \partial_{y_j} u_\mu(t,R) - \sum_{j=1}^{n_2} y_j \partial_{z_j} u_\mu(t,R) = \sum_{|k|\le 2b} \sum_{\nu=1}^{n_0} a_k^{\nu\mu} D_x^k u_\nu(t,R), \quad (1)$$

де $\mu = \overline{1,n_0}, n > n_1 > n_2, R = (x,y,z), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{n_1}, z \in \mathbb{R}^{n_2}$. Оператор $\partial_t = \sum\limits_{|k|\le 2b} a_k(t,R) D_x^k$ - рівномірно параболічний за І.Г. Петровським в $\Pi = \{[0,T] \times \mathbb{R}^{n_3}\}$, $n_1 + n_2 = n_3, a_k(t,R) = (a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}$.

До (1) можна застосувати метод Леві [1]. Припустимо, що

1)$a_k(t,R), \partial_y a_k(t,R), \partial_z a_k(t,R)$- неперервні, обмежені в Π;

2) існують сталі $c_1 > 0, \alpha \in (0,1], r \in (0,1]$ такі, що для будь-яких $R, S \in \Pi, S = (\xi, \eta, \zeta)$ виконуються нерівності:

$|a_k(t,R) - a_k(t,S)| \le c_1 |x - \xi|^\alpha$, $|\partial_y a_k(t,R) - \partial_y a_k(t,S)| \le c_1 |R - S|^r$, $|\partial_z a_k(t,R) - \partial_z a_k(t,S)| \le c_1 |R - S|^r$, |k|=2b;

3) Матриця $(a_k^{\nu\mu})_{\mu\nu=1}^{n_0}, |k| = 2b$, на характеристиках оператора

$\partial_t - \sum\limits_{j=1}^{n_1} x_j \partial_{y_j} - \sum\limits_{j=1}^{n_2} y_j \partial_{z_j}$ задовольняє умови Лаппо-Данилевського.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1-3 то система* (1) *має ФМРЗК* $G(t,R;\tau,S)$ *s для ФМРЗК разом з її похідними справджуються оцінки* $\partial_t^m |G(t,R;\tau,S)| \le A_m (t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+|m|}{2b}} \Phi(t,R;\tau,S), |m| \le 2b$,

$\partial_{y_j} |G(t,R;\tau,S)| \le A(t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+2b+1}{2b}} \Phi(t,R;\tau,S),\ j = \overline{1,n_1}$,

$\partial_{z_j} |G(t,R;\tau,S)| \le A(t-\tau)^{-\frac{(6b+3)n+4b+1}{2b}} \Phi(t,R;\tau,S),\ j = \overline{1,n_2}$,

де $\Phi(t,R;\tau,S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k \Gamma(1 + \frac{k\alpha}{2b}) \Gamma(\frac{\alpha}{2b}) \Gamma^{-1}(1 + \frac{(k+1)\alpha}{2b}) \exp\{-c\rho(t,x;\tau,\xi) - 2^{-3qk} c(\rho_1(t,R';\tau,S') + \rho_2(t,R;\tau,S))\}$, $R' = (x,y)$, $S' = (\xi,\eta)$, $q = 2b(2b-1)$, $\rho(t,x;\tau,\xi) = (|x-\xi|(t-\tau)^{-1/2b})^2$, $\rho_1(t,R';\tau,S') = (|y - \eta + x(t-\tau)|(t-\tau)^{-(2b+1)/2b})^2$, $\rho_2(t,R;\tau,S) = (|z - \zeta + y(t-\tau) + 2^{-1}x(t-\tau)^2|(t-\tau)^{-(4b+1)/2b})^2$,

Сталі A, A_m, c *залежать від* $n, 2b, c_1, \alpha, r$ *та сталої параболічності* δ.

[1] Малицька Г. П. Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. – 2008.– 60. №12 – С.1650–1663.

e-mail: bvanya@meta.ua