УДК 336.71

Буртняк Іван Володимирович,
д.е.н., професор кафедри економічної кібернетики,
ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
м.Івано-Франківськ,Україна
Малицька Ганна Петрівна,
к.фіз-мат.н., доцент кафедри математичного і функціонального аналізу,
ДВНЗ Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
м.Івано-Франківськ,Україна

РЕГУЛЯЦІЯ ФІНАНСОВИХ ПОТОКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Процеси Бесселя відіграють важливу роль у фінансовій математиці, оскільки за своєю природою тісно пов'язані з моделями геометричного Броунівського руху та процесами Кокса-Інгресола-Росса вони допускають явне представлення для щільності переходу зокрема цін облігацій та опціонів це значно полегшує статистичну оцінку параметрів процесу. Ми розглядаємо ті випадки коли похідна фінансового потоку Бесселівського процесу може перетворитися в нуль. При таких умовах визначають надлишкову швидкість росту портфеля акцій, а також пояснюють як перевищення темпів зростання ринкового портфеля забезпечує вимір внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу [1].

Ми розглядаємо одновимірну дифузію процесу Бесселя з дрифтом, який рівний нулю (є ряд процесів цього типу де дрифт не рівний нулю, але їх дослідження можна звести до процесів з нульовим дрифтом). Такі процеси мають застосування при розв'язуванні економічних задач на знаходження короткострокових відсоткових ставок, кредитних спредів та стохастичної волатильності деривативів.

Розроблено підход до моніторингу фінансових потоків, що продукуються двобарєрними Бесселівськими процесами. Ми подаємо щільність у вигляді розвинення через функції Бесселя першого і другого роду, а також їхні похідні. Оскільки ряди Бесселя добре досліджені, а власні значення поставленої крайової задачі затабульовані то розклад щільності в ряди за функціями Бесселя є дуже зручним для використання на практиці при знаходженні цін опціонів з потрібною точністю.

Проблема такого типу розглядається вперше. Для таких задач є нерозв'язаною задача коли дифузія Бесселя має нелокальну волатильність залежну від різних факторів, але така проблема є лише частково розв'язана для звичайних дифузійних процесів породжених Броунівським рухом. Тому потрібні нові підходи і аналіз вже відомих для розв'язання задач такого типу.

Розроблений нами підхід можна застосувати до дослідження для ціноутворення азійських опціонів породжених Бесселівськими процесами. Для цього потрібно розглянути фінансові потоки породжені процесами Бесселівської дифузії розклавши їх по системі функцій Бесселя першого роду при умові, яка враховує лінійну комбінацію потоку та його просторової похідної. Цей розклад дає можливість обчислити величину ринкового портфеля акцій та визначити рівень внутрішньої волатильності на ринку в будь-який момент часу, дозволяє дослідити динаміку фондового ринку.

У загальній теорії розглядаються більш ширші припущення на стохастичні процеси, зокрема такі як мартингальні, але не завжди існує аналітична формула для зображення розв'язку тому ми припускаємо що процеси марківські.

Спектральний метод застосовано до похідних фінансових інструментів, ціноутворення через представлення ціни похідного активу $u(t,x)$ нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу X, тобто як

$u(t,x) = \tilde{E}_x [H(X_t)] = \int H(y)p(t,x,y)\,dy.$

де $p(t,x,y)$ – щільність переходу X за ймовірністю P. Якщо інфінітезимальний генератор L базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розвинення за власними функціями [2]:

$p(t,x,y) = m(y) \sum_n e^{-\lambda nt} \varphi_n(y)\, \varphi_n(x),$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення L і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $\mathrm{L}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$.

Розглянемо бесселівський процес, який описується

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} - p^2 x^{-2} v(t,x), \quad 0 < x < x_0, \tag{1}$$

і крайовою умовою

$v(0,x) = K(e^x - 1)^+, \quad |v(t,0)| < +\infty, \ \ v'_x(t,x_0) + hv(t,x_0) = 0, \ \ h > 0$; (11)

де K страйк. Процес є однорідним тому $v(t,x) = \varphi(t)v(x)$.

Із теорії Штурма-Ліувілля, маємо

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n\,p}\, e^{-\frac{\mu_n^2}{x_0^2}t} J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right), \ \ p \geq 0,$$

де μ_n $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n <..$, додатні корені рівняння $J'_p(\mu_k)\mu_k + h\,J_p(\mu_k) = 0$,

$$c_{n\,p} = \frac{K\int_0^{x_0} x(e^x - 1)\,J_p\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right)dx}{\int_0^{x_0} xJ_p^2\left(\frac{\mu_n}{x_0}x\right)dx},$$

Ми обчислили розклад фінансового потоку по системі функцій Бесселя J_p першого роду, але розподіл потоків задається функцією Гріна відповідної задачі. Тому для обчислень зручно розкласти функцію Гріна по системі Бесселя. Процесу який ми розглядаємо відповідає неоднорідна крайова задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p^2 u(t,x)}{x^2} + f(t,x), \ \ x > 0, \tag{2}$$

де $f(t,x)$ двічі неперервно диференційовна по x та неперервно диференційовна по t, абсолютно інтегровна разом із похідними, $(t,x) \in [0,+\infty)$ і має представлення

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\ J_p\left(\frac{\mu_n x}{x_0}\right), \ \ 0 < x < x_0 < +\infty, \qquad 0 < t < T,$$

μ_n корені рівняння $J_p(\mu_n) = 0$.

Проблема оцінювання і дослідження двовимірних бар'єрних опціонів зводиться до дослідження і розв'язання крайової задачі [3-4]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + x^{-1}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - \frac{p^2 u(t,x)}{x^2}, \qquad x \in [L,H], \qquad t \in [0,T],$$

$$u'_x(t,L) + hu(t,L) = 0, \ \ u'_x(t,H) + hu(t,H) = 0, \qquad h > 0,$$

$$u(T,x) = \max(\pm(x(T) - K), 0)\, \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}.$$

Ця задача зводиться до розв'язання такої крайової задачі для сингулярного параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^{-1}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{p^2 u(t,x)}{y^2},$$

$y = \ln x, \ y \in [A,B], t \in [0,T], \ A = \ln L, \ B = \ln H,$

$$u'_x(t,A) + hu(t,A) = 0, \ \ u'_x(t,B) + hu(t,B) = 0, \qquad h > 0,$$

$$u(0,y) = \psi\left(e^{y(T)}\right) = \max(\pm(x(T) - K), 0)\, \mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}.$$

Враховуючи всі міркування щодо встановлення розв'язку класичних крайових задач для сингулярного параболічного оператора L, маємо що

$$u(T,x)=\int_0^{\ln\frac{H}{L}}\left(e^{\xi}L-K\right)\mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}G(x,\xi)d\xi=\int_0^{\ln\frac{H}{L}}\left(e^{\xi}L-K\right)\mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(\frac{\mu_n}{\ln\frac{H}{L}}\right)^2 t}J_p\left(\frac{\mu_n\xi}{\ln\frac{H}{L}}\right)J_p\left(\frac{\mu_n\ln\frac{x}{L}}{\ln\frac{H}{L}}\right)\left(\ln\frac{H}{L}\right)^{-2}\left(\left(1+\frac{h\left(\ln\frac{H}{L}\right)^4-v^2}{\mu_k^2\left(\ln\frac{H}{L}\right)^2}\right)\left(J_p(\mu_k)\right)^2\right)^{-1},$$

де $\mathbb{I}_{(L<x(t)<H;t\in[0,T])}$ ступінчаста функція Хевісайда.

Зауваження. Оскільки корені Бесселевої функції першого роду і її похідної прості та є зв'язок між похідною та Бесселевими функціями сусідніх порядків, звідси можна довести, що рівняння $J_p'(x)+h\,J_p(x)=0$ має злічену множину додатних коренів, тому при великих n, квадрати цих коренів ведуть себе як n^2. Тому для функції Гріна та її першої та другої похідної правильна оцінка

$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{2n!}\ln^{2n}t<+\infty,\qquad \forall x\in[L,H],\qquad 0<t<T,\qquad C>0,c_0>0.$$

при наближених обчисленнях через швидку збіжність не потрібно великої кількості коефіцієнтів ряду [5].

Висновки. Розглянуто задачу Штурма-Ліувілля для дифузії Бесселя з крайовими умовами в яких похідна фінансового потоку по ціновій змінній в комбінації з величиною потоку перетворюється в нуль. Побудовано функцію Гріна для цієї задачі, яку розкладено по системі Бесселивих функцій першого роду. Аналітична форма для функції Гріна дає можливість обчислювати величину фінансового потоку, швидкість росту портфеля акцій та досліджувати волатильність на ринку в будь-який момент часу.

Список використаних джерел

1. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу // Бизнес Информ. – 2013. – №4. – С. 152–158.
2. Буртняк І.В., Малицька Г.П. Дослідження процесу Орнштейна–Уленбека методами спектрального аналізу // Проблеми економіки. – 2014. – №2. – С. 349–356.
3. Burtnyak, I.V. & Malytska, H.P. (2017). Calculating the price for derivative financial assets of Bessel processes using the Sturm-Liouville theory, Problems of Economics,. 2, 310–316
4. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). Evaluating the financial flows of Bessel processes by using spectral analysis, Business Inform, 7, pp. 120–124
5. Burtnyak, I.V. & Malytska, A. (2017). The Evaluation of Derivatives of Double Barrier Options of the Bessel Processes by Methods of Spectral Analysis, Investment Management and Financial Innovations, 7, pp. 120–124