І. В. Федак

Розв'язування задач підвищеної складності з математики

Спеціальний курс

Івано-Франківськ
2010

ББК 22.1
УДК 51(031)
Ф 48

Друкується за рішенням вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рецензенти:

Кукуш О.Г., професор кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук

Черевко І.М., декан факультету прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, доктор фізико-математичних наук, професор

Ясінський В.А., доцент кафедри алгебри і методики викладання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, Заслужений учитель України

Федак І. В.

Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ, 2010. – 100 с.

У формі п'ятнадцяти навчальних занять систематизовані основні підходи до розв'язування задач підвищеної складності з математики.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, учителів математики, керівників математичних гуртків, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

Пропонований Вашій увазі посібник побудований у формі 15 навчальних занять з розв'язування задач підвищеної складності з математики. У вигляді окремих статей його матеріали з незначними відмінностями публікувалися протягом 2004 – 2006 років у журналі «Математика в школах України».

На кожному з занять читач має змогу ознайомитися з одинадцятьма основними підходами до розв'язування задач на ту чи іншу тему та самостійно розв'язати 5 задач для закріплення засвоєного матеріалу. Знання учнями таких підходів є необхідною передумовою для їх успішного виступу на математичних олімпіадах різних рівнів.

Але посібник розрахований не лише на учасників математичних олімпіад, а й на вчителів, які працюють з обдарованими дітьми, готуючи учнів до таких олімпіад на заняттях математичних гуртків чи факультативів. Зокрема, як апробацію посібника, за його матеріалами автором прочитані 30-годинні спецкурси для вчителів математики Івано-Франківської, Чернівецької та Вінницької областей.

Крім того, для майбутніх вчителів читання однойменного спецкурсу передбачене навчальним планом на факультеті математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника. Тематика занять даного посібника відповідає робочій програмі такого спецкурсу.

Заняття №1.

Парність, подільність та остачі

1. *Парність.*

Основними ідеями, які використовуються при розв'язуванні олімпіадних задач, пов'язаних з парністю є: чергування, парність як інваріант, метод групування, підрахунок двома способами. Застосування їх усіх в одній задачі ілюструє наступний приклад з третього етапу олімпіади 2001-го року.

Задача. Одну вершину 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту вершин – у білий. За один крок можна вибрати три сусідні вершини і змінити у них кольори на протилежні. Чи вдасться за декілька таких кроків перефарбувати всі вершини у білий колір?

Розв'язання. Зауважимо, що після кожного перефарбовування кількість чорних вершин змінюється на непарне число. Тому вказане перефарбовування має складатися з непарного числа кроків. Позначимо вершини через $A_1, A_2, ..., A_{2001}$, починаючи з вершини A_1 чорного кольору. Нехай $a_k -$ кількість тих кроків, при яких центром зміни кольорів була вершина A_k. Тоді $S = a_1 + a_2 + ... + a_{2001} -$ загальна кількість всіх кроків і вона, згідно доведеного, має бути непарним числом. З іншого боку $S = (a_1 + a_2 + a_3) + ... + (a_{1999} + a_{2000} + a_{2001})$. Тут у кожних дужках суми трьох записаних доданків співпадають із загальною кількістю змін кольору у вершинах $A_2, A_5, ..., A_{2000}$. Справді, наприклад, у вершині A_2 колір змінюється лише тоді, коли центром зміни є вершини A_1, A_2, A_3, а сумарна кількість таких змін дорівнює $a_1 + a_2 + a_3$. Оскільки у них і спочатку, і вкінці колір буде білим, то кожна з цих сум, а з ними і сума S, є парною. Одержане протиріччя доводить неможливість вказаного перефарбування.

2. *Парність і подільність на* 2^k.

Задача. Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівняння

$$m^{2010} = n(n+m)(n+2m)...(n+2009m).$$

Розв'язання. Зауважимо, що ліва і права частина рівності матимуть однакову парність тоді і тільки тоді, коли m та n будуть парними. Поклавши $n = 2n_1, m = 2m_1$, після скорочення на 2^{2010}

прийдемо до початкового рівняння відносно змінних $n_1, m_1,$ з якого випливатиме, що і вони можуть бути лише парними. Отже, m та n діляться на 4. Міркуючи і далі аналогічно, одержимо, що m та n при кожному $k \in N$ діляться на $2^k,$ а тому можуть бути лише нулями.

3. *<u>Подільність на прості та складені числа.</u>*

Кожне натуральне число, крім одиниці, єдиним способом розкладається у добуток простих множників. Це твердження називають *основною теоремою арифметики.* Зрозуміло, що число a ділиться на просте число p тоді і тільки тоді, коли p є одним із множників згаданого розкладу. Два числа називаються взаємно простими, якщо у них немає спільних дільників, відмінних від одиниці. Легко довести такі очевидні твердження:

а) якщо деяке число ділиться на два взаємно прості числа m та $n,$ то воно ділиться і на їх добуток $mn;$

б) якщо число pa ділиться на $n,$ де p і n взаємно прості, то a ділиться на $n.$

<u>Задача.</u> Доведіть, що для простих чисел p та $q,$ більших за 3, число $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

Розв'язання. Оскільки $24 = 3 \cdot 8$ і числа 3 та 8 взаємно прості, то досить довести окремо подільність на кожен зі цих множників. Представимо $p^2 - q^2$ у вигляді $\left(p^2 - 1\right) - \left(q^2 - 1\right).$ Тоді число $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ як добуток двох сусідніх парних чисел, одне з яких ділиться на 2, а інше – на 4, ділитиметься на 8. А, оскільки серед трьох послідовних цілих чисел $p-1, p, p+1$ одне (не p) є кратне трьом, то отримаємо подільність і на 3. Аналогічно доводимо подільність на 24 для $q^2 - 1.$

4. *<u>Використання властивостей спільного дільника.</u>*

В окремих випадках, як, до речі, і у попередньому прикладі, доцільно скористатися властивістю спільного дільника кількох чисел бути також дільником їх суми чи різниці.

<u>Задача.</u> Числа $n+7$ та $5n-2$ при деякому натуральному n діляться на просте число $p.$ Доведіть, що й $2004n+5$ ділиться на $p.$

Розв'язання. Зауважимо, що $5(n+7) - (5n-2) = 37 \,\vdots\, p.$ Отже, $p = 37.$ Тому й $2004n + 5 = 1998n + (n+7) + (5n-2)$ ділиться на $p.$

5. ***Ознаки подільності та остачі від ділення на 3 і на 9.***

При розв'язуванні задач, пов'язаних із подільністю чисел, важливу роль відіграють ознаки подільності. Деякі з них добре відомі учням. Зокрема, число a ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3; на 4 — якщо число, складене з двох останніх його цифр, ділиться на 4; на 9 – якщо сума цифр ділиться на 9 тощо. Для подільності натурального числа a на 11 необхідно і достатньо, щоб сума цифр, які у десятковому записі числа a стоять на непарних місцях, мінус сума цифр, які стоять на парних місцях, ділилась на 11. Для встановлення подільності числа $\overline{abcdeh}$ на 7, 11 та 13 достатньо перевірити, чи ділиться відповідно на 7, 11 чи 13 число $\overline{deh}-\overline{abc}$. Такий спосіб перевірки ґрунтується на рівностях

$$7\cdot 11\cdot 13=1001,\ \overline{abcdeh}=1001\cdot\overline{abc}+\left(\overline{deh}-\overline{abc}\right).$$

Відзначимо також, що натуральне число n і сума його цифр при діленні на 3 (чи на 9) дають відповідно одну і ту ж остачу.

<u>Задача.</u> Нехай $S(k)$ означає суму цифр натурального числа k. Знайдіть всі натуральні числа n, які задовольняють рівність:

а). $n+S(n)=2009$; б). $n+S(n)+S(S(n))=2009$.

Розв'язання. а). Зрозуміло, що $n<2009, S(n)\le 28$. Тому $n\ge 2009-28=1981$. Для зменшення варіантів перебору зауважимо, що n та $S(n)$ при діленні на 9 дають однакові остачі. А отже, щоб отримати в сумі число 2009 з остачею 2, необхідно, щоб $n=9k+1$. У знайденому проміжку цю умову задовольняють числа 1981, 1990, 1999, 2008. Легко переконатися, що лише 1990 є розв'язком.

б). Таких n не існує, бо при діленні на 3 кожен доданок лівої частини рівності має одну і ту ж остачу. Отже, при кожному натуральному n вираз зліва ділиться на 3, а 2009 на 3 не ділиться.

6. ***Остачі та дії над ними.***

При розв'язуванні багатьох задач успішно можуть бути використані наступні властивості остач та дій над ними:

1). Сума будь-яких двох натуральних чисел і сума їх остач при діленні на натуральне число $m\ge 2$ дають однакові остачі;

2). Добуток будь-яких двох натуральних чисел і добуток їх остач при діленні на натуральне число $m\ge 2$ теж дають однакові остачі.

<u>Задача.</u> Якою максимальною кількістю нулів може закінчуватися число $1^n+2^n+3^n+4^n$?

Розв'язання. Зауважимо, що при $n=3$ дане число дорівнює 100, а отже, закінчується двома нулями. Покажемо, що більшої кількості нулів отримати не вдасться. Оскільки 1000 ділиться на 8, то для цього достатньо довести, що дане число при жодному n не може ділитися на 8. Для $n=1$ та $n=2$ це перевіряємо безпосередньо, а при інших n отримуємо на основі згаданих вище тверджень, що остачі від ділення на 8 можуть дорівнювати лише 2, якщо n парне, або 4, якщо n непарне.

7. *Властивості остач квадратів натуральних чисел.*

У ряді задач до успіху приводить знання того факту, що квадрати натуральних чисел при діленні на 3 та 4 можуть давати лише остачі 0 або 1, а при діленні на 8 – лише остачі 0, 1 або 4.

Задача. У деякій клітинці таблиці $n\times n$ сидить жук. За один хід він може переповзати на сусідню клітинку в одному з трьох таких напрямків: вгору, вправо, по діагоналі вліво вниз. Чи зможе він, побувавши у кожній клітинці по одному разові, завершити свій обхід у клітинці, сусідній справа від початкової ?

Розв'язання. Не зможе. Нехай у напрямку вгору зроблено k кроків. Тоді, щоб опинитись на початковій горизонталі, стільки ж кроків слід зробити по діагоналі вліво вниз. А, щоб перейти на сусідню справа від початкової вертикалі, вправо слід переповзати $k+1$ раз. Отже, всього одержимо $3k+1$ хід. З іншого боку ця кількість дорівнює $n^2-1.$ Звідси маємо $n^2=3k+2,$ що неможливо.

8. *Властивості остач вищих степенів. Мала теорема Ферма.*

Цікавими є й властивості остач для вищих степенів. Зокрема, куби натуральних чисел при діленні на 7 можуть давати лише остачі 0, 1 та 6, а при діленні на 9 – лише остачі 0, 1, 8.

Справедлива також наступна ***теорема***: якщо $p-$ просте число, то $n^p-n \vdots p.$ (*мала теорема Ферма*).

Задача. Доведіть, що число n^9-n^3 ділиться на 504 при кожному натуральному $n.$

Розв'язання. Оскільки $504=7\cdot8\cdot9,$ а числа 7, 8, 9 попарно взаємно прості, то достатньо довести подільність числа n^9-n^3 на кожне з цих чисел. Запишемо $n^9-n^3=\left(n^3-1\right)\cdot n^3\cdot\left(n^3+1\right).$ Враховуючи властивості остач від ділення кубів натуральних чисел на 7 та на 9, одержимо, що принаймні один із множників справа ділиться на 7 і принаймні один з них ділиться на 9. Котрий саме, очевидно, залежить від того, якою є остача від ділення числа n^3 на 7 (чи на 9). Отже, добуток цих множників ділиться на 7 і на 9. Якщо n парне, то множник n^3 ділиться на 8; якщо ж n непарне, то n^3-1 та n^3+1 – два сусідні парні числа. Але тоді одне з них ділиться на 4, а їхній добуток – на 8. Тому n^9-n^3 ділиться на 504 при всіх $n \in N$.

9. *<u>Метод остач.</u>*

Ідея цього методу полягає у тому, що якщо ліва і права частина рівності набувають цілочислових значень, то їх рівність можлива лише при умові, що при діленні цих частин на будь-яке натуральне число їхні остачі будуть рівні між собою.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі натуральні числа $x, y, z,$ для яких виконується рівність $105^x + 211^y = 106^z$.

Розв'язання. При $z \geq 3$ число 106^z ділиться на 8. Оскільки $105 = 8 \cdot 13 + 1,$ то при кожному натуральному x число 105^x при діленні на 8 дає остачу 1. Оскільки, далі, $211 = 8 \cdot 26 + 3,$ а степені трійки при діленні на 8 почергово дають остачі 3 та 1, то і в числах 211^y ці дві остачі теж будуть чергуватися. Тому при $z \geq 3$ рівність виконуватися не може. При $z=1$ маємо нерівність $211^y > 106^z$. Тому досить перевірити $z=2$. Оскільки $211^2 > 106^2$, то $y=1$. Легко побачити, що тоді $x=2$. Отже, $x=2,\ y=1,\ z=2$ – єдиний розв'язок цієї задачі.

10. *<u>„Китайська теорема про лишки".</u>*

<u>Задача.</u> Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – остачу 2, на 4 – остачу 3, ... , на 10 – остачу 9.

Розв'язання. Якщо збільшити шукане число на 1, то отримане число буде ділитися на 2, 3, 4, ..., 10 без остачі. Найменшим натуральним числом, яке має таку властивість, є $2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$. А отже, шуканим буде число 2519.

Узагальнюючи, відзначимо, що для довільного набору попарно взаємно простих чисел $m_1, m_2, ..., m_n$ і цілих чисел $r_1, r_2, ..., r_n,$ де $0 \leq r_i < m_i,$ існує таке число $k,$ яке при діленні на m_i дає остачу $r_i,\ i = 1, 2, ..., n.$ Цей факт носить назву *"китайська теорема про лишки"*. Вона була відома у стародавньому Китаї ще 2000 років тому.

11. ***Остачі та дробова частина числа.***

З поняттям „остача" тісно пов'язане поняття „дробова частина числа". У зв'язку з цим розглянемо один з характерних прикладів такого роду.

Задача. Доведіть, що у десятковому записі числа $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2010}$ перші 2010 цифр після коми є однаковими.

Розв'язання. Розглянемо суму $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2010}+\left(5-\sqrt{26}\right)^{2010}$. Після піднесення до степеня доданки з радикалами взаємно знищуються, а отже, така сума є цілим числом. Крім того, $0<(5-\sqrt{26})^{2010}=\dfrac{1}{(5+\sqrt{26})^{2010}}<\dfrac{1}{10^{2010}}$. Тому у числі $\left(5+\sqrt{26}\right)^{2010}$ перші 2010 цифр після коми є дев'ятками.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Всі двоцифрові числа від 32 до 86 включно виписали у деякому порядку одне за одним. Чи могли при цьому одержати запис простого числа?

2. Учень виписав на дошці чотири множини натуральних чисел, які складалися відповідно з усіх дільників наступних чисел:

$$a=2^{2009}-11;\ \ b=2009^2-11;\ \ c=2^{2009}+11;\ \ d=2009^2+11.$$

Встановіть, які дільники йому довелося виписувати рівно тричі.

3. Доведіть, що рівняння $x^3-y^3=2010$ не має розв'язків у цілих числах.

4. Доведіть, що всяке складене число може бути подане у вигляді суми $1+xy+yz+zx,$ де $x,y,z-$натуральні числа.

5. Жодне з десяти чисел на 5 не ділиться. Доведіть, що сума їх четвертих степенів ділиться на 5.

Заняття №2.

Принцип Діріхле

1. ***<u>Ввідна задача.</u>*** Запишіть 5 таких натуральних чисел, щоб різниця жодних двох із них не ділилась на 4.

Розв'язання. Такі 5 чисел записати не вдасться. Справді, при діленні на 4 можливі лише 4 різні остачі: 0, 1, 2, 3. А оскільки записаних чисел 5, то принаймні два з них при діленні на 4 даватимуть одну і ту ж остачу. Але тоді їх різниця ділитиметься на 4.

2. ***<u>Суть принципу Діріхле. Де „кролики", а де „клітки" ?</u>***

Попередня задача допускає одне цікаве узагальнення, яке носить назву «*принцип Діріхле*». Сформулюємо його у загально відомому популярному вигляді: „якщо m кроликів розмістити у n клітках і $m > n,$ то принаймні в одній з кліток опиниться не менше двох кроликів". Справді, якщо б у кожній клітці було не більше одного кролика, то у n клітках могло би поміститися не більше n кроликів.

У попередній задачі роль кроликів відігравали 5 чисел, а роль кліток – 4 можливі остачі від ділення на 4. Але не завжди все так просто. Іноді доводиться самому здогадатися, що вважати „кроликами", а що „клітками".

<u>Задача.</u> Доведіть, що серед будь-яких десяти цілих чисел можна вибрати одне чи декілька, сума яких ділиться на 10.

Розв'язання. Складемо такі 11 сум: 0, $a_1,$ $a_1 + a_2,$ $a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}.$ Принаймні дві з них при діленні на 10 дають однакові остачі. Але у такому випадку їхня різниця буде шуканою сумою, яка ділиться на 10.

3. ***<u>Принцип Діріхле і підрахунок двома способами.</u>***

Часто при розв'язуванні задач доводиться застосовувати міркування, аналогічні принципу Діріхле, виконуючи при цьому обчислення однієї і тієї ж величини двома способами.

<u>Задача.</u> Деяка комісія засідала 40 разів, причому у кожному засіданні брали участь 10 її членів, жодні два з яких не зустрічалися на засіданнях більше одного разу. Доведіть, що до складу комісії входить понад 60 осіб.

Розв'язання. Якщо у комісії менше осіб, то ніхто з них не брав участь більше, ніж у шести засіданнях (кожного разу з іншими членами комісії), бо вже $7 \cdot 9 > 60.$ Оскільки учасників всіх засідань

$40\cdot 10=400,$ а на кожного учасника припадає не більше шести засідань, то членів комісії не менше $400:6>60.$ Одержане протиріччя доводить: припущення, що членів комісії не більше 60, було невірним.

4. ***Узагальнення принципу Діріхле.***

Припустимо тепер, що $m>nk.$ Зрозуміло, що при цьому принаймні в одну з кліток доведеться помістити не менше $k+1$ кролика.

Задача. У квадраті зі стороною 1 взяли 51 точку. Доведіть, що деякі три зі цих точок можна накрити кругом радіуса 1/7.

Розв'язання. Розіб'ємо квадрат на 25 однакових менших квадратиків зі стороною 0,2. Оскільки $51>25\cdot 2,$ то принаймні в одному з них опиниться не менше трьох зі цих точок. Круг радіуса 1/7 з центром у центрі такого квадратика, очевидно, також покриє ці точки. Пропонуємо читачам переконатися у цьому самостійно.

5. ***На межі застосовності принципу Діріхле.***

А чи можна застосувати узагальнення принципу Діріхле, якщо $m=nk$? Взагалі кажучи, ні. Але іноді вдається скористатися деякими додатковими міркуваннями і розв'язати задачу і у цьому випадку.

Задача. Доведіть, що у десятковому записі числа 1999^6 принаймні одна цифра використовується не менше трьох разів.

Розв'язання. Оскільки $1900^6<1999^6<2000^6$, і кожне з двох крайніх чисел двадцятицифрове, то і 1999^6 теж є двадцятицифровим. Тому зразу стверджувати, що у його десятковому записі хоч одна цифра повторюється принаймні тричі, не можна. Але, припустивши, що це не так, отримаємо, що кожна з цифр використана рівно два рази. У такому випадку сума цифр цього числа мала би дорівнювати 90. Та цього бути не може, бо 1999^6 не ділиться на 3.

6. ***Остерігаємося поспішних висновків.***

Іноді при поверховому підході до застосування принципу Діріхле легко допустити помилку.

Задача. 50 каменів розташовані за спаданням їхньої маси. Перший камінь важить 468*кг*, а кожен наступний – на 2*кг* легший від попереднього. Якою найменшою кількістю вантажівок можна перевезти ці камені, якщо на кожну з них дозволяється вантажити не більше трьох тон ?

Розв'язання. Вісьмома. Загальна маса всіх каменів менша за 21 тону, то, здавалось би, має вистачити 7 вантажівок Але в такому разі принаймні на одній з них необхідно перевозити не менше 8 каменів.

Та навіть найлегших 8 каменів на одну з них завантажити не вдасться, оскільки їх маса перевищує 3 тони. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що 8 вантажівок справді буде достатньо.

7. *Принцип Діріхле і комбінаторні обчислення.*

Як ми вже бачили вище при застосуванні принципу Діріхле іноді доводиться користуватися й іншими міркуваннями. Часто на допомогу приходять комбінаторні обчислення.

Задача. 8 шахістів провели турнір в одне коло. Виявилося, що серед будь-яких трьох шахістів принаймні двоє зіграли між собою внічию. Яка найменша можлива кількість нічиїх на цьому турнірі.

Розв'язання. Розіб'ємо шахістів на дві групи по чотири учасники. Припустимо, що в кожній із цих груп усі шахісти зіграли між собою внічию. Кількість зіграних партій у кожній групі така ж, як і кількість способів вибору двох шахістів із чотирьох, тобто $C_4^2=6.$ Отже, разом маємо 12 нічиїх. Яких би трьох шахістів ми не взяли, принаймні два з них попадуть в одну групу. Отже, при 12-ти нічиїх умови задачі будуть виконані. При цьому звернемо увагу на те, що кожен шахіст зіграв внічию тричі. Меншою кількість нічиїх могла б бути тоді, коли б хтось зіграв внічию не більше двох разів. Припустимо, що таким є гравець A. Тоді знайдуться принаймні 5 шахістів, з якими він не розійшовся миром. Складемо трійку, в яку входить A та довільні два гравці із вказаних п'яти. Оскільки A із вибраними гравцями не зіграв внічию, то вони мусили зіграти внічию між собою. Отже, всі партії у цій п'ятірці завершилися внічию. Таких було $C_5^2=10$. Якщо з двома іншими шахістами A зіграв внічию, то разом маємо не менше 12-ти нічийних зустрічей. Якщо ж ні – то аналогічними міркуваннями уже для шістки гравців встановлюємо, що нічиїх було не менше $C_6^2=15$. Тому найменша можлива кількість нічиїх на турнірі дорівнює 12.

8. *Багаторазове використання принципу Діріхле.*

У деяких задачах принцип Діріхле доцільно послідовно використати декілька разів, поєднуючи його з іншими міркуваннями.

Задача. На площині задано 17 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві точки з'єднані між собою відрізком одного з трьох можливих кольорів. Доведіть, що існує трикутник з вершинами у цих точках, всі сторони якого мають однаковий колір.

Розв'язання. Виділимо одну зі цих точок, яка з'єднана відрізками з 16-ма іншими. Кольорів 3, а $16>3\cdot5,$ то принаймні 6 проведених з неї відрізків будуть одного кольору. Якщо серед цих шести відрізків є два, протилежні кінці яких з'єднані відрізком цього ж кольору, то ми зразу отримуємо потрібний трикутник. Якщо таких двох відрізків немає, то отримаємо 6 точок, які з'єднуються між собою відрізками двох інших кольорів. Виділимо серед них одну, з якої до решти п'яти точок виходитиме 5 відрізків. Оскільки $5 > 2 \cdot 2$, то принаймні три з них будуть одного кольору. Якщо серед цих трьох є два, протилежні кінці яких з'єднані відрізком того ж кольору, то потрібний трикутник існує. Якщо ж таких немає, то протилежні кінці всіх цих трьох відрізків з'єднані між собою відрізками третього з можливих кольорів. А отже, в кожному з можливих випадків знайдеться трикутник з вершинами у заданих точках, всі сторони якого мають однаковий колір.

9. ***<u>Геометричні застосування принципу Діріхле.</u>***

Часто принцип Діріхле використовують в якій-небудь геометричній формі, наприклад:

а) якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша $l,$ то хоч два з цих відрізків мають спільну точку;

б) якщо на колі радіуса R розташовано декілька дуг, сума довжин яких більша $2\pi R,$ то хоч дві з цих дуг мають спільну точку;

в) якщо всередині фігури з площею S розташовано декілька фігур, сума площ яких більша $S,$ то хоч дві з цих фігур мають спільну точку.

<u>Задача.</u> У квадраті з площею 4 $см^2$ розміщено 7 прямокутників, кожен з яких має площу 1 $см^2$. Доведіть, що площа спільної частини принаймні двох із цих прямокутників не менша за 1/7 $см^2$.

Розв'язання. Припустимо, що площа спільної частини кожної пари таких прямокутників менша 1/7 $см^2$. Оскільки всіх можливих попарних перетинів є $C_7^2 = 21,$ то разом вони займають менше, ніж $3 см^2$. Отже, сума площ тих частин прямокутників, які не перекриваються між собою, повинна бути більшою, ніж $7 - 3 = 4\left(см^2\right),$ тобто більшою площі квадрата, що неможливо.

10. ***<u>Принцип Діріхле і міра множини.</u>***

Застосувати принцип Діріхле можна і у випадку, коли структура досліджуваної множини є досить складною, або й взагалі невизначеною.

<u>Задача.</u> На листку паперу знаходиться пляма невизначеної форми з площею, меншою за 1 $см^2$. Доведіть, що на цьому листку можна побудувати систему координат з одиницею масштабу 1 *см* так, що жодна точка з обома цілочисловими координатами не належатиме плямі

Розв'язання. Намалюємо спочатку довільну систему координат із одиницею 1*см*. Кожній точці M плями із координатами (x, y) поставимо у відповідність точку P з координатами $(\{x\}, \{y\})$, де $\{x\} = x - [x]$ – дробова частина числа x. Зрозуміло, що всі точки P опиняться в одиничному квадраті, причому площа (міра) фігури, складеної із точок P, не перевищить площі плями, складеної з точок M. Отже, всередині цього одиничного квадрата знайдеться точка, яка не співпадає із жодною точкою P. Виберемо її за початок нової системи координат з осями, паралельними до осей попередньої системи. Пропонуємо читачам самостійно обґрунтувати, що побудована таким чином система координат буде шуканою.

11. ***<u>Просторовий варіант використання принципу Діріхле.</u>***

У просторовому випадку застосування принципу Діріхле, як правило, пов'язане з об'ємами. Але можливе також поєднання дискретного та неперервного варіантів цього принципу.

<u>Задача.</u> Археологи виявили піраміду у формі правильного тетраедра, складену з дев'яти монолітних блоків. Знайдений ними папірус стверджував, що кожен блок був витесаний із однієї з дев'яти однакових кам'яних брил, які також мали форму правильних тетраедрів. Доведіть, що відходи цього будівництва перевищили 11%.

Розв'язання. Розглянемо 10 точок – вершин піраміди та середин всіх її ребер. Оскільки брил лише 9, то принаймні дві з виділених точок належатимуть якомусь одному зі цих блоків. А отже, діаметр такого блоку, тобто відстань між найвіддаленішими його точками, не менший за половину ребра піраміди. Звідси випливає, що об'єм кожної з брил не менший 1/8 об'єму всієї піраміди. А це означає, що об'єм принаймні однієї з дев'яти брил пішов у відходи, які у такому разі перевищили 11%.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Кожна точка на колі замальована в один із двох кольорів. Доведіть, що існує вписаний у це коло рівнобедрений трикутник, всі вершини якого мають однаковий колір.

2. Доведіть, що існує число вигляду 20102010...2010, яке ділиться на 2009.

3. Чи можна зі 100 довільних цілих чисел вибрати: а) 15; б) 16 таких, що різниця будь-яких двох із них ділиться на 7?

4. На сторонах опуклого чотирикутника як на діаметрах побудовані круги. Доведіть, що ці круги повністю покривають даний чотирикутник.

5. У прямокутнику 3×4 довільним чином розташували 6 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані, яка не перевищує $\sqrt{5}$.

Заняття №3.

Метод розфарбовування

При розв'язуванні багатьох олімпіадних задач доцільно скористатися допоміжним розфарбуванням. Проілюструємо це на конкретних прикладах.

1. *<u>Шахова дошка.</u>*

<u>Задача.</u> Чи може шаховий кінь пройти з поля a_1 шахівниці на поле h_8, побувавши на кожному з решти полів по одному разові ?

Розв'язання. Зрозуміло, що для виконання умови задачі кінь повинен зробити 63 ходи. Але при цьому, рухаючись за правилами шахової гри, він почергово ставатиме на біле або на чорне поле шахівниці. Оскільки поле a_1 чорне, то після кожного непарного ходу кінь займатиме білі поля. Отже, після 63-го ходу він не зможе опинитися на полі h_8 чорного кольору.

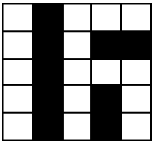
2. *<u>Розфарбовування у шаховому порядку.</u>*

<u>Задача.</u> У кожній клітинці дошки 5×5 сидить жук. У деякий момент часу всі жуки переповзають у сусідні по горизонталі чи по вертикалі клітинки. Доведіть, що при цьому принаймні одна клітинка залишиться порожньою.

Розв'язання. Розфарбуємо дошку 5×5 у шаховому порядку. Нехай в результаті цього одержали 13 клітинок чорного та 12 білого кольору. Зрозуміло, що переповзаючи в сусідню клітинку, жук опиняється в клітинці протилежного кольору. Тому 12 жуків, які знаходилися спочатку у клітинках білого кольору, не зможуть зайняти всі 13 клітинок чорного кольору. Принаймні одна із таких клітинок залишиться вільною.

3. *<u>Виділення клітинок за певною ознакою.</u>*

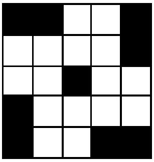
<u>Задача.</u> Яка максимальна кількість клітинок в умовах попередньої задачі може залишитися порожньою?



Мал. 1

Розв'язання. Легко переконатися, що всі жуки можуть у результаті таких переповзань зібратися, наприклад, на дев'яти клітинках, виділених на малюнку 1.

Щоб довести, що ця кількість є мінімальною розглянемо малюнок 2. Жодні два жуки із виділених на ньому клітинок після переповзання не можуть



Мал. 2

опинитися в одній і тій же клітинці дошки. Тому ними виявляться зайнятими не менше дев'яти клітинок. Отже, найбільше може звільнитися 16 клітинок.

4. *Виділення фіксованої частини таблиці.*

Наступна задача ілюструє, як можна з допомогою розфарбування обмежитися аналізом не всього досліджуваного об'єкта, а лише його частини.

Задача. Кутове поле таблиці 7×7 замальоване у чорний колір. За один раз дозволяється поміняти на протилежний колір у всіх клітинках довільного рядка чи довільного стовпчика. Чи вдасться через деяке число кроків замалювати всю таблицю у чорний колір ?

Розв'язання. Не вдасться. Виділимо у цій таблиці кутовий квадратик розмірами 2×2, який містить зафарбоване у чорний колір поле. При вказаних перефарбуванням кількість чорних клітинок у ньому весь час залишатиметься непарною.

5. *Розфарбовування і покриття.*

Метод розфарбовування особливо ефективний при розв'язуванні задач, пов'язаних з різноманітними покриттями. При цьому часто буває доцільним розфарбування такою кількістю кольорів, зі скількох клітинок складаються покриваючі фігурки.

Задача. Із шахової дошки вирізали кутову клітинку. Чи вдасться залишок дошки покрити 21-єю плиткою розмірами 3×1?

Розв'язання. Не вдасться. Повернемо дошку так, щоб вирізана клітинка опинилася у лівому верхньому куті, і, починаючи з неї, розфарбуємо дошку у три кольори так, щоб кожна плитка вказаного вигляду покривала по одній клітинці кожного з кольорів. Тоді на тій частині дошки, яка залишилася, клітинок першого кольору буде лише 20, а другого кольору – аж 22. Зрозуміло що покрити останні 21 плитка не зможе.

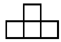
6. *Розфарбовування у задачах, не пов'язаних з суцільними покриттями.*

Ідею, аналогічну до методу попередньої задачі, можна використати і в ряді інших випадків.

Задача. Яку мінімальну кількість „пострілів" у морському бої слід зробити, щоб гарантовано „поранити" на дошці розміром 10×10 корабель 4×1?

Розв'язання. Розфарбуємо дошку 10×10 у чотири кольори так, щоб кожна фігурка 4×1 покривала по одній клітинці кожного кольору. Тоді клітинок першого і третього кольору виявиться по 25, другого – 26, четвертого – 24. Тоді “поранення” чотирьохпалубного корабля гарантують 24 постріли, зроблені у клітинки четвертого кольору. Щоб довести, що меншої кількості може бути недостатньо, намалюємо на цій дошці 24 прямокутники 4×1 та один квадрат 2×2. Очевидно, що у випадку відсутності “пострілу” хоч в один із таких прямокутників, ми могли б у чотирьохпалубний корабель і не попасти.

7. <u>*„Розфарбовування” числами.*</u>

<u>Задача.</u> Доведіть, що дошку 10×10 не можна покрити 25-ма плитками вигляду .

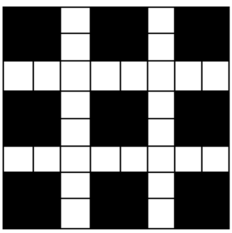
Зауваження. Неважко переконатися, що розфарбувати дошку у чотири кольори так, щоб кожна фігурка вказаного вигляду покривала 4 клітинки різного кольору, не вдасться. Для розв’язання задачі можна було би скористатися уже знайомим нам розфарбуванням у шаховому порядку. Але проілюструємо ще й інший підхід.

Розв’язання. Заповнимо дану дошку у шаховому порядку числами 1 та -1. Зрозуміло, що кожна фігурка вказаного вигляду покриватиме або одну, або три одиниці. А отже, добуток чисел, покритих однією фігуркою кожного разу дорівнюватиме -1. Тому і добуток чисел, покритих 25-ма фігурками теж буде дорівнювати -1. А це суперечить тому, що добуток чисел на всій дошці дорівнює 1.

8. <u>*Розфарбовування і вирізання.*</u>

Ще один важливий тип задач, пов’язаних з розфарбуванням, складають задачі на вирізання фігурок. У таких задачах доцільно виділяти фігурки саме такої форми, які слід буде вирізати.

<u>Задача.</u> Хуліган вирізав із шахової дошки 8 квадратиків 2×2, кожен з яких складався з двох чорних та двох білих клітинок. Доведіть, що із решти цієї дошки вдасться вирізати ще принаймні один такий квадратик.

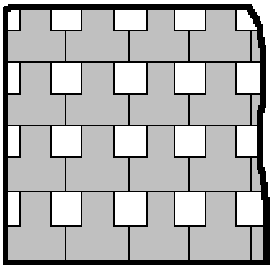


Мал. 3

Розв‘язання. Виділимо на дошці 9 квадратиків 2×2 так, як показано на мал. 3. Як би не був вирізаний із дошки квадратик 2×2 за вказаними в умові правилами, він не перекриється більше, ніж з одним із виділених квадратиків. А тому 8 вирізаних квадратиків можуть мати спільні клітинки не більше, ніж з вісьмома виділеними. Отже, принаймні на місці одного із виділених квадратиків можна буде вирізати ще один квадратик 2×2.

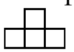
9. *<u>Ущільнене розфарбовування.</u>*

Звертаємо увагу читачів, що у попередній задачі було важливо, щоб вирізаний квадратик перекривався не більше як з одним намальованих. Але часто така вимога не дає змоги намалювати достатньої кількості фігурок. У такому випадку доцільно здійснювати розфарбовування трохи щільніше.



Мал. 4

<u>Задача.</u> На дошці 100×100 розташовано 800 зображених вище фігурок, кожна з яких покриває 4 клітинки дошки, і жодні дві фігурки не покривають одну і ту ж клітинку. Доведіть, що вдасться поставити ще одну таку фігурку, яка повністю покриє 4 вільні клітинки.

Розв'язання. Розфарбуємо дошку з використанням фігурок заданого вигляду так, як показано на мал. 4. Всього по горизонталі поміститься 33 фігурки, а по вертикалі – 50. Разом будемо мати $33 \cdot 50 = 1650$ фігурок. Як би не була розташована на дошці фігурка вигляду  за вказаними в умові задачі правилами, вона зможе перекритися не більше, ніж з двома намальованими фігурками. Тому, як би не були розташовані на дошці задані 800 фігурок, принаймні $1650 - 2 \cdot 800 = 50$ намальованих позицій залишаться вільними для виставлення нових фігурок. Це значно більше однієї, як того вимагається в умові задачі.

10. *<u>Розфарбовування у просторі.</u>*

Розфарбовувати можна не лише плоскі, а й просторові об'єкти.

<u>Задача.</u> Мишка гризе куб, складений із 27 одиничних кубиків. З'ївши один кубик, вона переходить до сусіднього з ним через спільну грань. Чи може мишка таким способом з'їсти весь куб, крім центрального кубика?

Розв'язання. Розфарбуємо кубики у два кольори так, щоб кожні два сусідні кубики, які мають спільну грань, були різного кольору. Тоді кубиків, колір яких співпадає із кольором центрального кубика буде 13, а кубиків другого кольору – 14. Дотримуючись умови задачі, мишка почергово мінятиме кольори з'їдених кубиків, а тому серед 26 таких кубиків буде по 13 кубиків кожного кольору. Отже, центральний кубик залишитися не може.

11. *Розфарбовування в алгебраїчних обчисленнях.*

Метод розфарбовування може бути корисним і при розв'язуванні окремих алгебраїчних задач, які, на перший погляд, до розфарбовування не мають ніякого відношення.

Задача. n – кутник розбитий на трикутники діагоналями, які попарно не перетинаються, причому у кожній вершині сходиться непарна кількість таких трикутників. Доведіть, що n ділиться на 3.

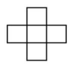
Розв'язання. Розфарбуємо трикутники, з яких складається многокутник, у два кольори так, щоб будь-які два трикутники зі спільною стороною були різного кольору. Оскільки з кожної вершини виходить парне число діагоналей, то всі трикутники, які прилягають до сторін многокутника, будуть одного кольору. Отже, різниця між кількістю всіх сторін трикутників цього кольору і кількістю всіх сторін трикутників іншого кольору буде дорівнювати n. Оскільки така різниця ділиться на 3, то і n ділиться на 3.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. У кожній клітинці шахової дошки 8×8 знаходилося по два жуки. У деякий момент часу всі вони переповзли на сусідні по горизонталі чи вертикалі клітинки, причому жуки з однієї клітинки переповзали у різних напрямках. Яка максимальна кількість клітинок могла при цьому звільнитися?

2. Із дошки 7×7 вирізали кутову клітинку. Чи можна решту дошки покрити плитками 1×2 так, щоб рівно половина з них лежали горизонтально?

3. Дно прямокутної коробки було викладене прямокутними плитками 2×2 та 4×1. Плитки висипали із коробки і при цьому загубили плитку розміром 2×2. Її замінили плиткою 4×1. Чи вдасться при цьому знову викласти дно коробки?

4. Яку максимальну кількість фігурок вигляду  можна вирізати з дошки 8×8?

5. Замок має форму рівностороннього трикутника зі стороною 36 $м$. Він розбитий на 16 трикутних залів зі сторонами 9 $м$. Між сусідніми залами є двері. Довести, що коли людина захоче пройти по замку, побувавши в кожному залі не більше одного разу, то вона зможе оглянути не більше 13 залів.

Заняття №4.

Інваріанти

При розв’язуванні задач інколи доводиться мати справу з такою ситуацією: задана система послідовно змінює свій стан, і необхідно визначити певну характеристику її кінцевого стану. Повністю прослідкувати за всіма переходами буває складно, а то й неможливо. Тоді знайти розв’язок допомагає обчислення деякої величини, що характеризує стан системи і зберігається при всіх її переходах. Таку величину називають *інваріантом* даної системи. При цьому значення інваріанта у початковому та кінцевому станах співпадають. Ми поняттю інваріанта надамо дещо ширшого змісту і називатимемо інваріантом системи не лише кількісну, але й кожну якісну характеристику, яка не змінюється при таких перетвореннях.

1. *Кількість як інваріант.*

Задача. Для участі у розиграші кубка країни з футболу подали заявки 2010 команд. Як скласти календар зустрічей між ними, щоб для визначення володаря кубка провести найменшу кількість ігор ?

Розв’язання. Для визначення володаря кубка необхідно, щоб із розіграшу вибули 2009 команд. Тому, при будь-якому календарі для виявлення переможця доведеться провести 2009 матчів.

2. *Інваріанти, пов’язані з парністю.*

Задача. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 2010. Дозволяється витерти з дошки довільні два числа, а замість них записати модуль їхньої різниці. Чи може після 2009-ьох таких кроків на дошці залишитися число 0 ?

Розв’язання. Оскільки числа $x+y$ та $|x-y|$ є однієї парності, то число, яке залишиться після 2009-ьох кроків, матиме ту ж парність, що і сума всіх записаних спочатку чисел, а отже, також буде непарним. Тому число 0 залишитися не зможе.

Зауважимо, що можна було міркувати ще й так. При кожній заміні кількість непарних чисел або не змінюється, або зменшується на 2. Оскільки спочатку було 1005 непарних чисел, то і вкінці на дошці залишиться непарне число.

3. *Остачі як інваріанти.*

Задача. У числі 2^{2010} закреслили останню цифру і додали її до числа, яке при цьому утворилося. З одержаним числом поступили аналогічно і так далі – поки не утворилося десятицифрове число. Доведіть, що у ньому принаймні одна цифра повторюється.

Розв'язання. Зауважимо, що число і сума його цифр при діленні на 3 дають однакові остачі. Тому на кожному кроці будемо отримувати числа, суми цифр яких при діленні на 3 дають ту саму остачу, що й початкове число. Оскільки 2^{2010} на 3 не ділиться, то і отримане десятицифрове число ділитися на 3 не буде. Але, якщо би всі його цифри були різними, то їх сума дорівнювала би 45, і воно мало би ділитися на 3. Отже, принаймні одна цифра такого числа буде повторюватися.

4. *Інваріантні перерозподіли.*

У деяких випадках при перетвореннях зберігаються не конкретні остачі, а весь їх набір у сукупності. При цьому кожна з них, взята окремо, може і змінюватися.

Задача. На острові Сіробуромалиновому є 2008 сірих, 2009 бурих та 2010 малинових хамелеонів. При зустрічі двох хамелеонів різного кольору вони обидва міняють своє забарвлення на третій із можливих кольорів. Чи зможуть за таких умов всі хамелеони стати одного кольору ?

Розв'язання. Зауважимо, що числа 2008, 2009 та 2010 при діленні на 3 дають три різні остачі. Зрозуміло, що при зустрічі хамелеонів різного кольору кількість хамелеонів кожного з цих двох кольорів зменшується на 1, а кількість хамелеонів третього кольору збільшується на 2. Неважко переконатися, що після цього кількості хамелеонів усіх трьох кольорів при діленні на 3 знову даватимуть три різні остачі. Але для того, щоб всі хамелеони стали одного кольору необхідно, щоб хоч дві з цих остач співпали.

5. *Алгебраїчні інваріанти.*

Крім конкретних числових значень, інваріантами можуть служити і значення алгебраїчних виразів. При цьому ще слід зуміти здогадатися, який саме вираз доцільно розглянути у тому чи іншому випадку.

Задача. На дошці записані числа 1, 2, 3, 4, 5. Дозволяється витерти будь-які два записані числа $x, y,$ і замість них записати число $xy + x + y.$ Доведіть, що після чотирьох таких кроків завжди отримуватимемо число 719.

Розв'язання. Зауважимо, що $xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1).$ Звідси випливає, що до і після витирання добуток усіх чисел, збільшених на 1, не змінюється. Тому після чотирьох кроків отримаємо число $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-1=719$.

6. *<u>Інваріанти в нерівностях.</u>*

Зауважимо, що як інваріанти значення числових виразів не обов'язково мають залишатися сталими. Вони, зокрема, можуть мати також властивість монотонності.

<u>Задача.</u> На дошці записані 2010 чисел. Дозволяється витерти довільні два з них, наприклад, a та b, і замість них написати $\dfrac{a+b}{4}$. Доведіть, що, якщо спочатку були записані самі одиниці, то число, яке залишиться після 2009-и кроків, не менше 1/2010.

Розв'язання. Оскільки $(a-b)^2\geq 0$, то, додавши до обох частин цієї нерівності $4ab$, дістанемо: $(a+b)^2\geq 4ab$. Звідси $\dfrac{a+b}{ab}\geq\dfrac{4}{a+b}$, тобто $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}=\dfrac{1}{\frac{a+b}{4}}$. Тому на кожному кроці сума обернених величин усіх записаних чисел не збільшується (властивість-інваріант!). Спочатку ця сума дорівнювала 2010, а отже, для числа c, яке залишиться, маємо $\dfrac{1}{c}\leq 2010$, тобто $c\geq\dfrac{1}{2010}$.

7. *<u>Форма запису як інваріант.</u>*

Для розв'язування наступної задачі доцільно спочатку узагальнити її.

<u>Задача.</u> Доведіть, що число 4...48...89, у десятковому записі якого використано 2010 четвірок, 2009 вісімок та одну дев'ятку, є точним квадратом.

Розв'язання. Нехай у записі числа A використано n четвірок, $n-1$ вісімок та одну дев'ятку. Тоді

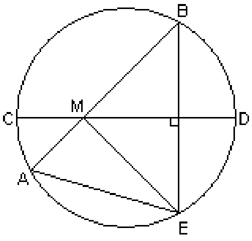
$$A=\frac{4}{9}\cdot\left(10^n-1\right)\cdot10^n+\frac{8}{9}\cdot\left(10^{n-1}-1\right)\cdot10+9=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2.$$

Оскільки сума цифр числа, записаного у чисельнику останнього дробу, дорівнює 3, то при кожному натуральному n число A є точним квадратом. Зокрема, і при $n=2010$.

8. *<u>Геометричні інваріанти: кути, відстані.</u>*

Широкий спектр інваріантів зустрічаємо в геометрії: сума кутів трикутника; величини вписаних кутів, що спираються на одну дугу; суми протилежних кутів у вписаному чотирикутнику; суми довжин протилежних сторін в описаному чотирикутнику тощо.

Задача. Хорда AB перетинає діаметр кола у точці M під кутом 45°. Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від розташування точки M на цьому діаметрі.



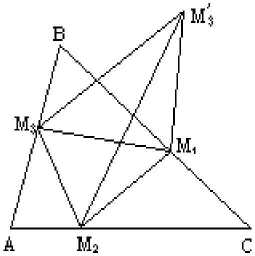
Мал. 5

Розв'язання. Нехай точка E симетрична до B відносно діаметра CD (див. мал. 5). Тоді $\angle AME = 90°$, $AM^2 + BM^2 = AM^2 + EM^2 = AE^2$. Отже, незалежно від розташування точки M, вписаний кут ABE дорівнює $45°$. Тому і довжина хорди AE, а з нею і сума $AM^2 + BM^2$, від розташування M не залежить.

9. *Площа як інваріант.*

У багатьох задачах інваріантами виступають площі фігур.

Задача. На площині задано трикутник ABC. На кожній його стороні (не у вершинах) сидить по одній мусі. У деякий момент часу одна з мух переповзає площиною вздовж прямої, паралельної до прямої, на якій знаходяться нерухомо дві інші мухи. Після її зупинки аналогічне переповзання здійснює інша муха, і так далі, Чи зможуть після кількох таких переповзань всі три мухи опинитися у вершинах трикутника ABC?



Мал. 6

Розв'язання. Нехай мухи M_1 та M_2 нерухомі, а M_3 переповзла у положення M_3'. Оскільки за умовою прямі M_3M_3' та M_1M_2 паралельні, то $S_{\Delta M_1M_2M_3'} = S_{\Delta M_1M_2M_3}$. Отже, при вказаних переміщеннях площа трикутника з вершинами у місцях розташування мух не змінюється. Оскільки у початковій позиції $S_{\Delta M_1M_2M_3} < S_{\Delta ABC}$, то ніякими переміщеннями, описаними в умові задачі, мухам не вдасться опинитися у вершинах A, B та C одночасно.

10. *Геометричні інваріанти в алгебраїчних задачах.*

До розгляду геометричних інваріантів буває доцільно звести і розв'язування окремих алгебраїчних задач.

Задача. Дано купу із 2009-ьох сірників. Її ділять на дві менші купки. Потім кожну купку, в якій є більше одного сірника, знову ділять на дві, і так далі. При кожному поділі купи на дві записується добуток сірників у двох отриманих менших купках. Доведіть, що після завершення поділів сума всіх записаних чисел ділиться на 2009.

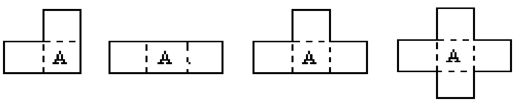
Розв'язання. Купі із n сірників поставимо у відповідність квадрат зі стороною n. Розбиття купи на m та k сірників інтерпретуємо як поділ цього квадрата на два квадрати зі сторонами m та k відповідно, і два прямокутники зі сторонами m та k. Один із цих прямокутників заштрихуємо. Його площа дорівнює числу mk, яке записують після здійснення ходу. При цьому кожен раз будемо заштриховувати саме той прямокутник, який лежить нижче діагоналі початкового квадрата. Після завершення гри заштрихованою виявиться площа, величина якої дорівнює $\frac{1}{2}\cdot 2009^2-\frac{1}{2}\cdot 2009=1004\cdot 2009$ і не залежить від порядку зроблених ходів. Зрозуміло, що ця площа чисельно дорівнює сумі всіх записаних чисел. А отже, сума цих чисел ділиться на 2009.

11. ***Геометричні інваріанти в нерівностях.***

Як і для алгебраїчних виразів, геометричні інваріанти також можуть виражатися в нерівностях.

Задача. Квадратне поле розбите на 100 однакових квадратних ділянок, 9 із яких заросли бур'янами. Всяка інша ділянка заростає бур'янами тоді і тільки тоді, коли в бур'янах опиняються принаймні дві сусідні (через межу) ділянки. Доведіть, що при таких умовах все поле не зможе зарости бур'янами.

Розв'язання. Можливі чотири принципово різні розташування поки що незабур'яненої ділянки A (див. мал. 7) в оточенні не менше



Мал. 7

двох забур'янених ділянок:

Межі ділянки A з її забур'яненими "сусідами" позначені пунктирними лініями. Якщо a – довжина сторони однієї ділянки, то суми периметрів забур'янених "сусідів" ділянки A відповідно дорівнюють $8a$, $8a$, $12a$ та $16a$. Після забур'янення ділянки A

периметри нової “критичної” площі (без врахування пунктирних ліній) уже будуть відповідно $8a$, $8a$, $10a$ та $12a$. Таким чином, при забур’яненні нової ділянки сумарний периметр забур’яненої площі не збільшується (інваріант!). Але спочатку периметр дев’яти таких ділянок не перевищував (був меншим, якщо деякі з них межували) $36a$. Тому він не міг стати рівним $40a$, тобто рівним периметру всього поля. Отже, все поле зарости бур’янами не може.

Задачі для самостійного розв’язування.

1. У вершинах куба записані деякі числа. Кожне з чисел замінили середнім арифметичним трьох сусідніх (через спільні ребра), причому всі заміни проводяться одночасно. Після 2010-ти таких операцій в кожній вершині виявилось початкове число. Чи обов’язково всі початкові числа були рівними між собою?

2. Задано числа 1, $\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$. Дозволяється будь-які два з них замінити їх сумою та різницею, поділеними на $\sqrt{2}$. Чи вдасться за декілька таких замін дістати трійку чисел $\sqrt{2},\ 2,\ \frac{1}{\sqrt{2}}$?

3. На дошці записано 100 одиниць. За один крок дозволяється замість будь-яких двох записаних чисел x та y записати число $\frac{xy\sqrt{2}}{x+y}$. Після 99 кроків залишилось одне число. Доведіть, що воно не менше за $0{,}1$.

4. Правильний трикутник ABC вписаний в коло. Довести, що відстань від довільної точки M на цьому колі до однієї з вершин трикутника дорівнює сумі відстаней до двох інших його вершин.

5. Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки правильного тетраедра до його граней є величина стала.

Заняття №5.

Ігри двох осіб

1. *Ігри-жарти. Гра без виграшу.*

Задача. На дошці записане число 10. Грають двоє, роблячи ходи почергово. За один хід дозволяється дописати справа від числа, записаного останнім, 10 або 1010. Виграє той, хто першим одержить число, яке ділиться на 2008. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Незалежно від гри суперників, кожного разу будуть записані числа, які закінчуються на 10, а отже, не діляться на 4. А 2008 на 4 ділиться. Тому в жодного з гравців немає виграшної стратегії.

2. *Метод інваріантів.*

Задача. Двоє по черзі розламують шоколадну плитку 6×8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків вздовж заглиблення на плитці. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У кого зі гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. При кожному розламуванні кількість шматків збільшується на 1. Спочатку був 1 шматок. В кінці гри, коли не можна зробити уже жодного ходу, їх 48. Отже, гра триватиме 47 ходів. Але кожний непарний хід робить перший гравець, то він зробить і останній 47-ий хід, а отже, переможе, незалежно від гри обох гравців.

3. *Метод симетрії.*

Задача. Розв'яжіть попередню задачу, користуючись міркуваннями симетрії.

Розв'язання. Нехай спочатку перший гравець розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6×4. Тоді, яку б із цих частин не розламав другий, у першого є можливість зробити аналогічний (симетричний) розлом у тотожній їй другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Який би шматок не розламав тепер другий гравець, перший знову може зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в одну пару. Отже, скільки б не тривала гра, ходи першого гравця вичерпаються не раніше, ніж ходи другого. Але число розломів плитки є скінченним, то врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. З попередніх міркувань випливає, що останній хід буде за починаючим гру.

4. *<u>Взаємно однозначна відповідність.</u>*

<u>Задача.</u> У ряд записано 12 зірочок. Двоє по черзі замінюють зірочки цифрами, відмінними від нуля. Доведіть, що гравець, який вступив у гру другим, може добитися, щоб отримане 12-цифрове число ділилося на 77.

Розв'язання. Розіб'ємо ці зірочки на 4 групи по 3 зірочки у кожній. Другому гравцеві для перемоги достатньо добитися, щоб відповідні цифри першої і другої та третьої і четвертої груп співпадали. Тоді записане число поділиться на 1001, а отже, і на 77.

5. *<u>Врахування специфіки задачі.</u>*

<u>Задача.</u> На дошці записана рівність $*x^2 + *x + * = 0.$ Перший гравець називає три цілі числа, а другий записує їх довільно замість зірочок. Які числа слід назвати першому гравцеві, щоб одержане квадратне рівняння мало два різні раціональні корені?

Розв'язання. Першому гравцеві достатньо назвати три різні цілі числа, жодне з яких не дорівнює нулю, а їх сума дорівнює нулю. Тоді одним з коренів буде $x = 1,$ а другий, враховуючи теорему Вієта, також виявиться раціональним. Зрозуміло, що існує безліч способів добитися потрібного результату.

6. *<u>Метод розфарбовування.</u>*

<u>Задача.</u> Є дошка розмірами $2009 \times 2010.$ Двоє ходять почергово. За один хід можна вирізати одну, дві чи три клітинки цієї дошки, не обов'язково поруч. Кожен робить по 1000 ходів. Другий виграє, якщо отриманий після цього залишок дошки можна розрізати на прямокутники $1 \times 2.$ Доведіть, що у нього є виграшна стратегія.

Розв'язання. Розділимо (розфарбуємо) дошку на $1005 \cdot 2009$ частин у формі плиток $1 \times 2.$ Якщо перший гравець своїм ходом вирізає повністю одну з таких частин, то другий у відповідь вирізає довільну іншу. Якщо ж після ходу першого гравця у деяких із виділених частинок вирізано по одній клітинці, то другий своїм ходом вирізає всі інші клітинки цих же частинок. Тоді після 1000 ходів кожного із гравців, на дошці залишаться лише виділені частинки $1 \times 2,$ з яких не вирізано жодної клітинки. Кожну з них можна покрити плиткою $1 \times 2.$

7. *<u>Орієнтоване розфарбовування.</u>*

<u>Задача.</u> У центральній клітинці дошки 2009×2009 стоїть фішка. Два гравці по черзі пересувають її на сусідню по горизонталі чи вертикалі клітинку. При цьому перший гравець або зберігає

напрямок руху фішки, або повертає ліворуч, а другий гравець або зберігає напрямок руху, або повертає праворуч. Програє той, хто не може зробити хід. У котрого зі гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання. Заповнимо цю дошку стрілками, які займають по дві сусідні клітинки, за таким принципом: початок першої стрілки, спрямованої вправо, знаходиться над центральною клітинкою; початок другої стрілки, спрямованої вниз, знаходиться на одну клітинку нижче кінця першої; початок третьої стрілки, спрямованої вліво, знаходиться на одну клітинку лівіше кінця другої і так далі, щоб утворена спіраль зі стрілок заповнила всю дошку, була орієнтована за стрілкою годинника і весь час віддалялася від центра. Перший гравець перший хід змушений буде зробити у початок однієї зі стрілок. Тоді другий гравець іде вздовж стрілки, а у першого знову вимушеним є хід у початок стрілки, і так далі. При цьому першому гравцеві доведеться весь час першим віддалятися від центра, і першим вийти на край дошки. Тоді другий гравець зможе, рухаючись вздовж цього краю, попасти у кутову клітинку, з якої у першого гравця ходу не буде. Тому така стратегія виграшна для другого гравця.

8. *<u>Метод виграшних позицій.</u>*

<u>Задача.</u> На дошці записане число 2009. За один хід можна замінити записане число a числом $a-2^n \geq 0,\ n \in Z_+$. Виграє той, хто одержить нуль. У кого з двох гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Зауважимо, що 2^n не ділиться на 3, причому при діленні на 3 числа 2^{2k-1} дають остачу 2, а числа 2^{2k} – остачу 1. Перший гравець, віднявши своїм першим ходом число 2, залишить суперникові число 2007, яке ділиться на 3. Якщо надалі другий гравець відніме двійку в непарному степені, то перший відповість відніманням двійки у парному степені, і навпаки, на віднімання двійки в парному степені – відніманням двійки в непарному степені. Таким чином, перший гравець завжди має змогу займати виграшні позиції – числа, що діляться на 3, а другий – весь час змушений записувати числа, що на 3 не діляться. А оскільки при кожному ході записувані числа весь час зменшуються, залишаючись невід'ємними, то через певне скінченне число кроків перший гравець отримає число 0 і виграє.

9. *<u>Аналіз з кінця та класифікація позицій.</u>*

При розв'язуванні попередньої задачі ми вжили термін „виграшна позиція". Які ж ознаки характерні для неї? Насамперед, вважатимемо такою кінцеву позицію, яка, згідно правил гри, відповідає перемозі одного із гравців. Всі позиції, з яких можна дістатися до кінцевої за один хід, назвемо програшними. Адже гравець, який займе їх своїм ходом, програє вже після наступного ходу суперника. В той же час позицію, після довільного ходу з якої суперник займе програшну позицію, знову можна вважати виграшною. А всі позиції, з яких хоч один хід веде у виграшну позицію, знову будуть програшними. Тому для здобуття перемоги при правильній грі потрібно весь час займати виграшні позиції. Отже, знаходження множини виграшних позицій рівносильне визначенню стратегії гри. Якщо початкова позиція була програшною, то при правильній грі переможе гравець, який вступає в гру першим, а якщо виграшна – то його суперник. Для класифікації позицій якраз і доцільно застосувати аналіз з кінця.

Задача. На столі лежать 2010 сірників. За один хід можна взяти не більше половини наявних у даний момент сірників. Двоє роблять ходи по черзі. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто з них має виграшну стратегію?

Розв'язання. Гравець, який залишить суперникові 1 сірник, переможе. Тому кінцева позиція 1 є виграшною. А позиція 2, єдиний хід з якої веде в 1, програшна. Позиція 3 знову виграшна, бо єдиний хід з неї веде у програшну позицію 2. Позиції – 4, 5, 6 програшні, бо з кожної з них можна попасти у виграшну позицію 3. А ось позиція 7 знову виграшна, бо всі три можливі ходи із неї ведуть у програшні позиції. Аналогічно, встановимо послідовно наступні виграшні позиції – 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023. Останню з них перший гравець може зайняти, забравши спочатку 987 сірників. Отже, у нього є виграшна стратегія, яка полягає у тому, щоб послідовно займати виграшні позиції 1023, 511, 255, 127, 63, 31, 15, 7, 3, 1.

10. *Умовно виграшні позиції.*

Якщо черговий хід гравця залежить від попередніх його ходів, то класифікувати позиції дещо складніше.

Задача. На столі лежать 24 сірники. Двоє по черзі беруть їх зі столу. За один хід можна взяти 1 або 2 сірники, причому один і той же гравець не має права взяти 2 сірники двічі підряд. Виграє той, хто візьме останній сірник. Котрий зі гравців має виграшну стратегію ?

Розв'язання. Проведемо аналіз з кінця. Число 0 є виграшною позицією. Число 1, безумовно, програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, виграє суперник. З числами 2 та 3 однозначно визначитися не вдається. Справді, 2 буде виграшною позицією, якщо суперник в даний час не має права брати 2 сірники, і програшною – якщо у нього таке право є. Аналогічно, число 3 буде виграшною позицією лише при одній додатковій умові, що своїм попереднім ходом було взято 1 сірник. Такі позиції будемо називати *умовно виграшними*. Від виграшних вони відрізняються тим, що їх використання приводить до виграшу лише за певної додаткової умови, яка залежить не тільки від останнього, а й від попередніх ходів суперників. Таким чином, пошук наступної виграшної позиції необхідно продовжити. Число 4 – програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, суперник має змогу зайняти уже точно виграшну для себе позицію 3. Оцінимо тепер число 5. Якщо суперник забирає 1 сірник, то він попадає у програшну позицію 4, а якщо забирає 2 сірники, то позиція 3 для нього теж є програшною. Адже, якщо перед наступним його ходом залишити 2 сірники, то взяти обидва з них він уже не має права. Отже, число 5 є виграшною позицією. Аналогічно встановлюємо, що наступною виграшною позицією є число 10, а потім – і всі числа, кратні 5, тобто 15 та 20. Відповідно всі позиції вигляду $5n+1$ та $5n+4$ будуть програшними, зокрема, і початкова позиція 24. Таким чином, виграшна стратегія є у першого гравця. Для перемоги йому достатньо у кожній парі з двох своїх послідовних ходів першим ходом завжди забирати 1 сірник, а другим ходом, у залежності від гри суперника, забирати 1 чи 2 сірники так, щоб кількість сірників, які залишаються на столі, була кратною 5.

11. ***Грають троє.***

Хоч у більшості олімпіадних задач в іграх беруть участь два гравці, все ж можуть існувати цілком осмислені стратегії ігор з іншою кількістю учасників гри.

Задача. Троє по черзі кладуть однакові монети на круглий стіл. Програє той, хто не зможе зробити хід так, щоб монети не перекривалися. Доведіть, що перший і третій гравці можуть домовитися і грати так, щоб весь час програвав другий гравець.

Розв'язання. Припустимо, що перший гравець спочатку поставив свою монету у центр стола. Тоді, куди б не поставив монету другий гравець, третій та перший гравці можуть поставити свої монети так, щоб разом з монетою другого гравця вони лежали у вершинах правильного трикутника. Якщо після цього у другого гравця залишається місце для його наступної монети, то, зрозуміло, що третій та перший гравець знову зможуть виставити свої монети за аналогічним принципом, і так далі. Оскільки розміри стола обмежені, то на деякому кроці місця для монети другого гравця уже не вистачить.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. На столі стоять 9 стаканів вверх дном. Двоє роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється перевернути будь-які 4 стакани або доставити нові 2 стакани вверх дном. Виграє той, після ходу якого всі стакани стоятимуть вниз дном. У кого з гравців є виграшна стратегія?

2. Два учні виписують цифри 2009-цифрового числа, починаючи з ненульової цифри старшого розряду і далі – по порядку. Починаючий гру виграє, якщо записане ними число ділиться на 11. Чи може суперник завадити йому здобути перемогу?

3. Із дошки 10×10 двоє по черзі вирізають по 2 клітини зі спільною стороною. Програє той, хто не може зробити хід. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

4. На дошці записане рівняння $x^3 + \_\_ x^2 + \_\_ x + \_\_ = 0$. Два учні по черзі вписують на вільних місцях цілі числа – коефіцієнти рівняння. Доведіть, що починаючий гру може досягти того, щоб усі корені рівняння були цілими числами.

5. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 21. Двоє роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється витерти одне або два записані числа. Програє той, хто не зможе зробити хід. У котрого із гравців є виграшна стратегія, якщо:

а) дозволяється витирати будь-які одне або два числа;

б) при витиранні двох чисел вони мають бути сусідніми натуральними числами;

в) при витиранні двох чисел вони мають бути сусідніми числами, причому менше з них – непарне;

г) двічі підряд один і той же гравець не має права витирати два числа:

д) двічі підряд один і той же гравець не має права витирати одне число.

Заняття №6.

Квадратний тричлен

Вираз вигляду ax^2+bx+c, де $a\neq 0$, називається квадратним тричленом. Його дискримінант $D=b^2-4ac$. Якщо $D>0$, то рівняння $ax^2+bx+c=0$ має два дійсні корені: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}, x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. При цьому $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Якщо $D=0$, то обидва корені співпадають і дорівнюють $-\dfrac{b}{2a}$. Якщо $D<0$, то квадратне рівняння дійсних коренів не має. У такому разі зручно вважати, що $\sqrt{D}=\sqrt{(-D)(-1)}=\sqrt{(-D)}i$, де i – уявне число, для якого $i^2=-1$, $-D>0$. Визначаючи x_1 та x_2 за записаними вище формулами при $D<0$, одержимо два комплексні корені. Зауважимо, що у кожному з цих випадків справедливі формули Вієта: $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$.

Крім того, при $D<0$ і $a>0$ для всіх дійсних x виконується нерівність $ax^2+bx+c>0$, а при $D<0$ і $a<0$ – нерівність $ax^2+bx+c<0$.

Розглянемо основні ідеї, пов’язані із застосуванням властивостей квадратного тричлена до розв’язування задач.

1. *Квадратний тричлен та кількість його коренів.*

Задача. Доведіть тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1,$$

якщо a,b,c – попарно різні дійсні числа.

Розв’язання. Вираз, що знаходиться у лівій частині записаної рівності, є многочленом відносно змінної x не вище другого степеня. Тому, розглядаючи цю рівність як рівняння з невідомим x, ми одержали би не більше двох різних коренів. Але легко перевірити, що її задовольняють принаймні три різні значення x: $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$. Отже, записана рівність є тотожністю.

Принагідно зауважимо, що коли многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

набуває значення A більше, ніж у n точках, то $P_n(x) \equiv A.$

2. *<u>Множина значень квадратного тричлена.</u>*

<u>Задача.</u> Петрусь виписав на дошці 2010 зведених квадратних рівнянь і переконався, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і отримане у такий спосіб рівняння також не має дійсних коренів.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти біля x^2 у всіх рівняннях дорівнюють одиниці і рівняння не мають дійсних коренів, то їх ліві частини набувають лише додатних значень. А отже, і ліва частина отриманого рівняння також набуватиме лише додатних значень. Тому таке рівняння не матиме дійсних коренів.

3. *<u>Формули Вієта.</u>*

<u>Задача.</u> Корені рівняння $x^2 + ax + b + 1 = 0$ є натуральними числами. Доведіть, що число $a^2 + b^2$ складене.

Розв'язання. Оскільки $x_1 + x_2 = -a,\ x_1 \cdot x_2 = b + 1,$ то $a^2 + b^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(x_1 x_2 - 1\right)^2 = \left(x_1^2 + 1\right)\left(x_2^2 + 1\right),$ причому обидва множники, які входять у цей добуток, більші від одиниці натуральні числа. Отже, число $a^2 + b^2$ складене.

4. *<u>Зведення до квадратного тричлена.</u>*

<u>Задача.</u> Знайдіть найменше значення функції

$$y = \left(x^2 + 4x + 3\right)\left(x^2 + 6x + 8\right).$$

Розв'язання. Розкладемо вирази у кожній з дужок на множники. Тоді $y = \left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+4\right).$ Згрупувавши перший множник з четвертим, а другий – з третім, отримаємо $y = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6).$ Покладемо $x^2 + 5x + 5 = t.$ Тоді $y = t^2 - 1.$ Таким чином, найменше значення функції дорівнює $-1.$ Воно досягається при $t = 0.$ тобто при тих значеннях $x,$ які є коренями рівняння $x^2 + 5x + 5 = 0.$ Обидва корені останнього рівняння дійсні.

5. *<u>Квадратний тричлен відносно параметра.</u>*

<u>Задача.</u> Знайдіть множину значень функції $y = \dfrac{x}{\left(x-1\right)^2}.$

Розв'язання. Сформулюємо задачу таким чином: знайти всі значення p, при кожному з яких рівняння $\dfrac{x}{(x-1)^2}=p$ має дійсні корені. Записане рівняння, як легко переконатися, рівносильне рівнянню $px^2-(2p+1)x+p=0.$ Якщо $p=0,$ то $x=0$ є його коренем. Якщо ж $p\neq 0,$ то наявність дійсних коренів випливає з умови $D\geq 0,$ тобто $(2p+1)^2-4p^2\geq 0,$ або $4p+1\geq 0.$ Отже, множина значень даної функції $\left[-0,25;+\infty\right).$

6. ***<u>Квадратний тричлен як допоміжний елемент доведення.</u>***

<u>Задача.</u> Доведіть, що коли $\left(a-b+c\right)c<0,$ то $b^2>4ac.$

Розв'язання. Якщо $a=0,$ то достатньо довести, що $b^2>0,$ тобто $b\neq 0.$ Це справді так, бо при $b=0$ з умови задачі одержали би, що $c^2<0.$ Якщо ж $a\neq 0,$ то для квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ маємо: $f(-1)\cdot f(0)<0.$ Отже, даний тричлен набуває як додатних, так і від'ємних значень Тому його дискримінант $D=b^2-4ac$ додатний. Звідси $b^2>4ac.$

7. ***<u>Нерівність Коші-Буняковського.</u>***

<u>Задача.</u> Доведіть нерівність

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

Розв'язання. При кожному дійсному значенні x виконуються нерівності $(a_kx-b_k)^2\geq 0,$ $1\leq k\leq n.$ Додавши їх, для всіх дійсних x отримаємо нерівність

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\geq 0.$$

Тому дискримінант цього квадратного тричлена $D\leq 0,$ тобто

$$4(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\leq 0.$$

Звідси і випливає необхідна нерівність.

Зауважимо, що рівність у ній досягається, якщо набори чисел $a_1,a_2,...,a_n$ і $b_1,b_2,...,b_n$ пропорційні, тобто, якщо існує таке $x_0,$ що $a_kx_0=b_k$ або $b_kx_0=a_k$ для всіх k одночасно.

8. ***<u>Квадратний тричлен і дотична до параболи.</u>***

<u>Задача.</u> Запишіть рівняння спільних дотичних до графіків функцій $y=x^2-4x+3$ та $y=-x^2+6x-10.$

Розв'язання. Зауважимо, що спільна дотична до заданих парабол не може бути вертикальною. Тому її рівняння має такий загальний вигляд $y = ax + b.$ Для знаходження коефіцієнтів цієї прямої скористаємося тим, що обидва рівняння $x^2 - 4x + 3 = ax + b$ та $-x^2 + 6x - 10 = ax + b$ повинні мати лише по одному кореневі. Прирівнюючи їх дискримінанти до нуля, отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} a^2 + 8a + 4b + 4 = 0, \\ a^2 - 12a - 4b - 4 = 0. \end{cases}$$

З неї знаходимо два розв'язки $a_1 = 0,\ b_1 = -1$ та $a_2 = 2,\ b_2 = -6.$ Таким чином, отримуємо такі два рівняння шуканих дотичних: $y = -1$ та $y = 2x - 6.$

9. *Формули Вієта для многочленів.*

Зауважимо, що формули Вієта були отримані не лише для квадратних рівнянь. Аналогічні формули мають місце і для рівнянь вищих степенів. Зокрема, якщо x_1, x_2, x_3 – корені рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0,$ то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},\ \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a},\ \ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Подібні формули можна записати і для рівнянь вищих степенів.

Задача. Обчисліть значення виразу

$$\frac{7 + 2009xy}{7 + 7x + xy} + \frac{7 + 2009yz}{7 + y + yz} + \frac{1 + 2009zx}{1 + z + zx},$$

якщо x, y, z – корені рівняння $t^3 + 9t^2 - 9t - 7 = 0.$

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник другого дробу на $x,$ а третього дробу — на $xy.$ Враховуючи, що за формулами Вієта для заданого рівняння $xyz = 7,$ дістанемо, що значення заданого виразу буде дорівнювати

$$\frac{(7 + 2009xy) + (7x + 2009 \cdot 7) + (xy + 2009 \cdot 7x)}{7 + 7x + xy} = \frac{2010(7 + 7x + xy)}{(7 + 7x + xy)} = 2010.$$

Зауважимо, що для функції $f(t) = t^3 + 9t^2 - 9t - 7$ виконуються нерівності $f(-10) < 0,\ \ f(-1) > 0,\ \ f(0) < 0,\ \ f(2) > 0.$ Тому задане в цій задачі рівняння має три дійсні корені. Проте безпосереднє їх обчислення пов'язане з певними труднощами. Та, навіть, і за наявності конкретних значень цих коренів їх підстановка у заданий вираз привела би до громіздких обчислень з радикалами. Таким чином, застосування однієї з формул Вієта дає тут подвійний виграш.

10. ***<u>Розклад многочленів на множники.</u>***

З квадратним тричленом тісно пов'язаний і розклад довільного многочлена на множники. У загальному випадку такий розклад многочлена $P_n(x)$ має вигляд:

$$a_0(x-c_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_m)^{\alpha_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_ex+q_e)^{\beta_e},$$

де $c_1,c_2,\ldots,c_m$ – деякі дійсні числа, $\alpha_1+\ldots+\alpha_m+2(\beta_1+\ldots+\beta_e)=n,$ причому записані у цьому розкладі квадратичні множники не мають дійсних коренів. Існує багато способів такого розкладу на множники. Зупинимося на одному з них.

<u>Задача.</u> Розкладіть на два квадратичні множники вираз $x^4+4.$

Розв'язання. Додавши і віднявши $4x^2$, отримуємо:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2=\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right).$$

11. ***<u>Застосування розкладу на множники.</u>***

У деяких задачах буває достатнім лише самого знання про можливість розкладу на множники. Як приклад розглянемо таке завдання з четвертого етапу Всеукраїнської олімпіади з математики.

<u>Задача.</u> Чи існує многочлен $P_n\left(x\right), n\geq 1,$ з коефіцієнтом 1 при старшому степені, який при всіх $x\in\left[0,3^n\right]$ задовольняє нерівність $\left|P_n\left(x\right)\right|\leq 1$?

Розв'язання. Скористаємося розкладом многочлена $P_n(x)$ на лінійні та квадратичні множники. Назвемо проміжок $[a;b]$ забороненим, якщо у всіх його точках принаймні один із множників набуває лише таких значень, які за абсолютною величиною не перевищують 1.

Зауважимо, що лінійний множник $x-c$ набуває таких значень лише на проміжку $[c-1;c+1]$. Квадратний тричлен x^2+px+q із від'ємним дискримінантом набуває мінімуму при $x=-\dfrac{p}{2}$, причому значення цього мінімуму додатне. Тоді для всіх x таких, що $\left|x+\dfrac{p}{2}\right|\geq 1,$ будемо мати:

$$x^2+px+q \ge \left(-\frac{p}{2}\pm 1\right)^2+p\left(-\frac{p}{2}\pm 1\right)+q=-\frac{p^2}{4}+1+q>1.$$

Таким чином, кожен із множників розкладу визначає заборонений проміжок, довжина якого не перевищує 2. А оскільки усіх таких множників не більше n, то і загальна довжина усіх заборонених проміжків не перевищує $2n$. Але для кожного натурального n виконується нерівність $2n<3^n$. Тому на відрізку $[0;3^n]$ знайдеться принаймні одна точка x_0, яка не належить жодному забороненому проміжку. Тоді $|P_n(x_0)|>1$. Отже, такого многочлена $P_n(x), n\ge 1$, із коефіцієнтом 1 при старшому степені, який при всіх $x\in[0;3^n]$ задовольняє нерівність $|P_n(x)|\le 1$, не існує.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ має два корені, для яких $x_1<a<x_2$.

2. Один із коефіцієнтів тричлена x^2+px+q зменшили чи збільшили на 0,001. Чи міг при цьому його корінь змінитися на 1000?

3. Відомо, що модулі всіх коренів рівнянь $x^2+bx+c=0$ та $x^2+px+q=0$ менші за 1. Доведіть, що й модулі коренів рівняння $x^2+\frac{b+p}{2}x+\frac{c+q}{2}=0$ також менші за 1.

4. Числа a,b,c задовольняють нерівності $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. Доведіть, що всі вони додатні.

5. Розкладіть на множники вираз x^5+x+1.

Заняття №7.

Деякі методи розв'язування рівнянь

1. *<u>Метод розкладу на множники.</u>*

Розглянемо рівняння вигляду $f(x)=0.$ Якщо вираз $f(x)$ можна розкласти на множники $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$, то початкове рівняння можна замінити сукупністю рівнянь $f_1(x)=0,\;\; f_2(x)=0,\;\ldots,\; f_n(x)=0$ корені кожного з яких, якщо вони належать області визначення функції $f(x),$ є також і коренями початкового рівняння.

<u>Задача.</u> Розв'яжіть рівняння $x^3+x-2-0.$

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x^3+x-2=(x^3-1)+(x-1)=(x-1)\cdot((x^2+x+1)+1)=(x-1)\cdot(x^2+x+2).$$

Отже, задане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь $x-1=0$ та $x^2+x+2=0.$ З першого знаходимо корінь $x=1.$ Друге рівняння дійсних коренів не має.

При розкладі на множники тут не випадково виділено доданки x^3-1 та $x-1.$ Справа в тому, що $x=1$ є коренем заданого рівняння, а виділені доданки діляться на $x-1.$ Таким чином, "вгадування" одного з коренів рівняння значно спрощує розв'язування задачі. Зауважимо, що цілочислові корені рівняння $P_n(x)=0,$ де $P_n(x)-$ многочлен степеня n з цілими коефіцієнтами, завжди є дільниками вільного члена цього многочлена, взятими зі знаками плюс чи мінус. Якщо один з таких дільників $x=a$ задовольняє умову $P_n(a)=0,$ то серед множників розкладу многочлена $P_n(x)$ буде і множник $x-a.$

2. *<u>Метод невизначених коефіцієнтів.</u>*

Відзначимо, що для розкладу многочлена на множники можна скористатися й методом невизначених коефіцієнтів. Зокрема, у попередній задачі при діленні многочлена x^3+x-2 на $x-1$ має вийти квадратний тричлен. Його можна записати у вигляді $x^2+px+q,$ де $p,q-$ невідомі числа. Тоді

$$x^3+x-2\equiv(x-1)(x^2+px+q)=x^3+(p-1)x^2+(p-q)x-q\,.$$

Прирівнюючи в цій тотожності коефіцієнти при однакових степенях $x,$ знайдемо $p=1,\;\; q=2.$ Отже, $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2).$

Метод невизначених коефіцієнтів часто приходить на допомогу і тоді, коли корені многочлена $P_n(x)$ не є цілими.

Задача. Розв'яжіть рівняння $x^4+3x^3+3x^2-2=0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники вигляду x^2+bx+c та x^2+px+q. Перемноживши їх, дістанемо тотожність

$$x^4+3x^3+3x^2-2\equiv x^4+(p+b)x^3+(c+q+pb)x^2+(bq+pc)x+cq.$$

Отже, коефіцієнти b,c,p,q задовольняють такі співвідношення: $b+p=3,\ c+q+bp=3,\ bq+pc=0,\ cq=-2.$ Починаючи з останнього рівняння, легко перевірити, що для цього підходять числа: $b=1$, $c=-1$, $p=q=2$. Тому $x^4+3x^3+3x^2-2=(x^2+x-1)(x^2+2x+2)$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: $x^2+x-1=0$ та $x^2+2x+2=0$. З першого з них знаходимо: $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Друге рівняння дійсних коренів не має.

3. *Використання підстановки вигляду* $y=ax^2+bx+c$.

Часто рівняння можна звести до квадратного, скориставшись квадратичною підстановкою. Але іноді для цього доведеться дещо перетворити вихідне рівняння.

Задача. Розв'яжіть рівняння $x(x+1)\left(x^2+7x+12\right)=2010$.

Розв'язання. $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$. Тому, згрупувавши множники у лівій частині рівняння відповідним чином, запишемо його у вигляді $\left(x^2+4x\right)\left(x^2+4x+3\right)=2010$. Тоді заміна $y=x^2+4x$ приведе нас до квадратного рівняння $y^2+3y-2010=0$, яке вже просто розв'язати. Пропонуємо читачам завершити розв'язання самостійно.

4. *Підстановки вигляду* $y=ax+b+\dfrac{c}{x}$.

Задача. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{3x}{2x^2-3x+4}-\dfrac{2x}{2x^2-x+4}=\dfrac{3}{5}$.

Розв'язання. У знаменниках обох доданків у лівій частині рівняння співпадають коефіцієнти при x^2 та вільні члени. Оскільки $x=0$ не є коренем, то перепишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{3}{2x-3+\frac{4}{x}}-\frac{2}{2x-1+\frac{4}{x}}=\frac{3}{5}.$$

Нехай $y=2x-1+\frac{4}{x}$. Тоді $\frac{3}{y-2}-\frac{2}{y}=\frac{3}{5}$, звідки маємо $3y-2(y-2)=\frac{3}{5}y(y-2)$ при $y\neq 0$, $y\neq 2$. Розв'язавши останнє квадратне рівняння, знаходимо $y_1=5$, $y_2=-\frac{4}{3}$. Отже, $2x-1+\frac{4}{x}=5$ або $2x-1+\frac{4}{x}=-\frac{4}{3}$. З першого з цих рівнянь знаходимо $x_1=1$, $x_2=2$. Друге рівняння дійсних коренів не має.

Зауважимо, що підстановка вигляду $y=ax+b+\frac{c}{x}$ може бути використана і для розв'язування рівнянь:

$$(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2,$$
$$p(ax^2+b_1x+c)^2+q(ax^2+b_2x+c)^2=Ax^2.$$

5. ***<u>Симетричні рівняння. Метод симетрії.</u>***

При розв'язуванні так званого симетричного рівняння вигляду $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0$, де $A\neq 0$, результативним є використання ідей симетрії Справді, значення $x=0$ не є його коренем. Тому рівняння може бути переписане у вигляді $Ax^2+Bx+C+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}=0$. Покладемо $y=x+\frac{1}{x}$ і врахуємо, що $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$. Тоді прийдемо до квадратного рівняння $Ay^2+By+C-2A=0$, розв'язати яке вже нескладно.

Зауважимо, що симетричні кубічні рівняння, тобто рівняння вигляду $Ax^3+Bx^2+Bx+A=0$, завжди мають одним зі своїх коренів число $x=-1$. Тому їх розв'язування також легко зводяться до розв'язування квадратних рівнянь. Такий же корінь має і всяке симетричне рівняння непарного степеня. Що ж стосується симетричних рівнянь парних степенів $2n$, то після ділення на x^n і заміни $y = x + \dfrac{1}{x}$ вони зводяться до рівнянь степеня n відносно y.

Але ідеї симетрії можуть проявлятися і в іншій формі.

Задача. Розв'яжіть рівняння $(x+2)^4 + x^4 = 2010.$

Розв'язання. Покладемо $y = x+1.$ Тоді задане рівняння запишеться у вигляді $(y+1)^4 + (y-1)^4 = 2010.$ Після піднесення до степенів та очевидних спрощень дістанемо біквадратне рівняння $y^4 + 6y^2 - 1004 = 0,$ яке вже нескладно розв'язати.

6. *Розв'язування рівняння відносно параметра.*

Задача. Розв'яжіть рівняння $x^3 - \left(\sqrt{7}+1\right)x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0.$

Розв'язання. Покладемо $\sqrt{7} = a$ і запишемо рівняння у вигляді $a^2 - \left(x^2+1\right)a + x^3 - x^2 + x = 0.$ Розв'язуючи його як квадратне відносно параметра, знайдемо $D = \left(x-1\right)^4.$ Таким чином, приходимо до сукупності рівнянь $x^2 - x + 1 = \sqrt{7}$ та $x = \sqrt{7},$ з якої легко визначити всі три корені. Зауважимо, що рівняння можна було б розв'язати, вгадавши попередньо один з його коренів $x = \sqrt{7}.$

7. *Виділення точних степенів.*

Іноді при розв'язуванні рівнянь на допомогу приходить виділення повних квадратів. А ось аналогічний приклад з кубами.

Задача. Розв'яжіть рівняння $ax^3 = x^2 + x + \dfrac{1}{3}.$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 3 і запишемо його у вигляді $\left(3a+1\right)x^3 = \left(x+1\right)^3.$ Отже, $\sqrt[3]{3a+1}\cdot x = x+1.$ Звідси знаходимо $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3a+1}-1}$ при $a \neq 0.$ Якщо ж $a = 0,$ то рівняння дійсних коренів не має.

8. *Використання монотонності функцій.*

Часто при розв'язуванні рівнянь використовують властивість монотонної функції набувати кожне своє значення лише при одному значенні аргументу. Наступний приклад ілюструє таку можливість і у випадку, коли рівняння має два корені.

Задача. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} = 1.$

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \left(\sqrt{3}\right)^x - \frac{1}{2}\cdot 2^x.$ Областю її визначення є вся числова вісь. Маємо: $y' = \left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 2^x \ln 2.$ Рівність $y' = 0$ приводить до рівняння $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = \frac{\ln 2}{\ln 3},$ звідки $x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3}$ – єдина критична точка даної функції. Отже, на кожному з проміжків $(-\infty; x_0)$ та $(x_0; +\infty)$ дана функція є монотонною. Тому вона може набувати значення 1 не більше, ніж у двох точках. Легко переконатися, що такими точками є $x_1 = 2$ та $x_2 = 4$. Ці числа і є коренями заданого рівняння.

9. ***Врахування множини значень функцій.***

Задача. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{z^2 - 2x - 7} = \sqrt{6z - y^2 - 14} - \sqrt{4y - x^2 - 7}.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і запишемо його у вигляді

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 + \left(z-3\right)^2 + 2\sqrt{6z - y^2 - 14}\sqrt{4y - x^2 - 7} = 0.$$

Оскільки всі доданки зліва є невід'ємними, то рівність можлива лише при умові, що кожен з них дорівнює нулю. Легко бачити, що тоді $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$ Перевірка, яка тут є необхідною, показує, що вони є також коренями вихідного рівняння.

10. ***Врахування множини значень при підстановках.***

Задача. Знайдіть всі значення параметра $a,$ при яких рівняння $4^x - 3\cdot 2^{x+1} + a = 0$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Нехай $y = 2^x.$ Тоді рівняння набуває вигляду $y^2 - 6y + a = 0.$ Якщо його дискримінант від'ємний, то воно дійсних коренів не має. Якщо ж він дорівнює нулю, то $a = 9,\ y = 3,\ x = \log_2 3.$ На цьому часто учнівське „розв'язання" і завершується. Але очевидно, що при $a \le 0$ одержане квадратне рівняння хоч і має два корені, та тільки один з них додатний. Враховуючи, що 2^x може набувати лише додатних значень, отримаємо, що і при таких a початкове рівняння також матиме лише один корінь.

11. ***<u>Дослідження рівняння на наявність кратних коренів.</u>***

<u>Задача.</u> Чи може рівняння $1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}=0$ мати кратні корені при деякому натуральному n?

Розв'язання. Якщо $x=a$ – корінь кратності m многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)=(x-a)^m P_{n-m}(x)$, де $P_{n-m}(a)\neq 0$. Тоді $P_n{}'(x)=m(x-a)^{m-1}\cdot P_{n-m}(x)+(x-a)P_{n-m}{}'(x)$. Тому при $m>1$ рівняння $P_n{}'(x)=0$, а отже, і рівняння $P_n(x)-P_n{}'(x)=0$ також має корінь $x=a$. У цій задачі останнє рівняння набуває вигляду $\frac{x^n}{n!}=0$ і має єдиний корінь $x=0$, який, однак, не є коренем початкового рівняння. Тому задане рівняння не має кратних коренів при жодному натуральному n.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Розв'яжіть рівняння $x^4-x^3-4x^2+x+1=0$:

   а) методом невизначених коефіцієнтів;

   б) з допомогою заміни $y=x-\frac{1}{x}$.

2. Доведіть, що рівняння $x^4+7x^2-12x+5=0$ не має дійсних коренів.

3. Дослідіть кількість коренів рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=a$ в залежності від значень параметра a.

4. Розв'яжіть рівняння $x^4-2\sqrt{5}x^2+x+5-\sqrt{5}=0$.

5. При яких значеннях параметра a рівняння $e^{|x|}-\cos x=a^2-2a+1$ має лише один дійсний корінь?

Заняття №8.

Нестандартні методи розв'язування рівнянь. Діофантові рівняння

1. ***<u>Метод суперпозиції для монотонної функції.</u>***

<u>Задача.</u> Розв'яжіть рівняння $\underbrace{\sqrt{a-\sqrt{a-...-\sqrt{a-x}}}}_{2009}=x.$

Розв'язання. Зрозуміло, що $x\geq 0,\ \ a-x\geq 0.$ Тому рівняння має дійсні корені лише при $a\geq 0.$ Якщо $a=0,$ то $x=0.$ Якщо $a>0,$ то на області визначення функції $f(x),$ заданої лівою частиною рівняння, послідовно одержимо: функція $\sqrt{a-x}$ – спадаюча, функція $\sqrt{a-\sqrt{a-x}}$ – зростаюча, і т. д. Оскільки у рівнянні кількість радикалів непарна, то функція $f(x)$ – монотонно спадаюча. Але функція $y=x$ – монотонно зростаюча, то це рівняння має не більше одного кореня. Нехай x_0 – корінь рівняння $\sqrt{a-x}=x.$ Тоді

$$\sqrt{a-x_0}=x_0,\ \sqrt{a-\sqrt{a-x_0}}=\sqrt{a-x_0}=x_0,\ ...\ ,\ f(x_0)=x_0,$$

тобто $x_0=\dfrac{\sqrt{4a+1}-1}{2}$ є єдиним коренем заданого рівняння $f\left(x\right)=x.$

Знаходження кореня x_0 тут ґрунтувалося на використанні принципу суперпозиції функцій, суть якого полягає в тому, що коли x_0 – корінь рівняння $f(x)=x,$ то x_0 є також коренем рівняння $f(f(x))=x.$ Але у загальному випадку звідси ще не випливає, що рівняння $f(f(x))=x$ не може мати інших коренів.

2. ***<u>Метод суперпозиції для немонотонних функцій.</u>***

<u>Задача.</u> Доведіть, що якщо $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ – такий квадратний тричлен, що рівняння $f\left(x\right)=x$ не має дійсних коренів, то і рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ не має дійсних коренів.

Розв'язання. Хоч функція $f\left(x\right)$ і не є монотонною, але для квадратичної функції виконання при кожному x нерівності $f\left(x\right)\neq x$

означає, що для всіх x або $f(x)>x,$ або $f(x)<x.$ Тоді відповідно і $f(f(x))>f(x)>x,$ або $f(f(x))<f(x)<x.$ Отже, рівняння $f(f(x))=x$ також не має дійсних коренів.

3. *Метод домножування.*

Задача. Розв'яжіть рівняння $\cos x\cdot\cos 2x=\frac{1}{4}.$

Розв'язання. Помножимо обидві частини заданого рівняння на $4\sin x.$ В результаті одержимо рівняння $\sin 4x=\sin x$ чи $\sin 4x-\sin x=0.$ Звідси отримуємо $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0.$ Отже, $\sin\frac{3x}{2}=0$ або $\cos\frac{5x}{2}=0.$ Тобто $x=\frac{2\pi n}{3}$ або $x=\frac{\pi(2n+1)}{5},$ де $n\in Z.$ Оскільки при $\sin x=0$ маємо $\cos x=\pm 1,$ $\cos 2x=1,$ то з одержаних розв'язків слід вилучити числа вигляду $x=\pi k,$ де $k\in Z,$ які не задовольняють початкове рівняння.

4. Множення на сталу.

Зауважимо, що в окремих випадках корисним може бути навіть множення на сталу, як, наприклад, у наступній задачі автора цього посібника із Соросівської олімпіади 2001-го року.

Задача. Розв'яжіть рівняння

$$(x-1)(500x-501)(1000x-1001)^2=2001.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 2000 і запишемо його у такому вигляді:

$$(1000x-1000)(1000x-1002)(1000x-1001)^2=2000\cdot 2001.$$

Якщо $y=1000x-1001,$ то $(y+1)(y-1)y^2=2000\cdot 2001.$ Отримане біквадратне рівняння уже легко розв'язати.

5. *Зведення до системи рівнянь.*

Задача. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{4-x}=3.$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{1+x}=u,$ $\sqrt{4-x}=v.$ Тоді $u+v=3,$ $u^3+v^2=5.$ Звідси маємо $u^3+(3-u)^2=5,$ $u_1=1,$ $u_2=-1+\sqrt{5},$ $u_3=-1-\sqrt{5}.$ При цьому числа v_1,v_2,v_3 додатні. Отже, отримуємо

$$x_1=0,\ x_2=\left(\sqrt{5}-1\right)^3-1=8\sqrt{5}-17, x_3=\left(-\sqrt{5}-1\right)^3-1=-8\sqrt{5}-17.$$

6. *Тригонометричні підстановки.*

Задача. $f(x)=2x^2-1.$ Розв'яжіть рівняння $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=x.$

Розв'язання. Зауважимо, що $f(x)>1$ при $|x|>1.$ Тоді також $f\left(f\left(f(x)\right)\right)>1,$ а отже, отримуємо, що $x>1$. При цьому $f(x)-x=2x^2-1-x=(x-1)(2x+1)>0,$ тобто $f(x)>x>1.$ Звідси маємо $f\left(f(x)\right)>f(x)>x>1,$ $f\left(f\left(f(x)\right)\right)>f\left(f(x)\right)>f(x)>x>1.$ Тому корені рівняння задовольняють нерівність $|x|\le 1.$ Для їх знаходження позначимо $x=\cos t.$ Тоді

$$f(x)=2\cos^2 t-1=\cos 2t,\quad f\left(f(x)\right)=\cos 4t,\quad f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\cos 8t.$$

Остаточно одержимо $\cos 8t=\cos t.$ Отже,

$$\left[\begin{array}{l}8t=t+2\pi n,\\ 8t=-t+2\pi n,\end{array}\right.\qquad t=\frac{2\pi n}{8\pm 1},\quad x=\cos\frac{2\pi n}{8\pm 1},\quad n\in Z.$$

7. *Геометричні методи.*

Задача. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}=\sqrt{2}.$

Розв'язання. Спочатку зауважимо, що при $x\le 0$ ліва частина нерівності не менша двох. Тому таких коренів рівняння не має. Розглянемо тепер прямокутний трикутник з катетами $AC=BC=1.$ Нехай $CX=x>0,$ $\angle XCA=60°,$ $\angle XCB=30°.$ За теоремою косинусів $\sqrt{x^2-x+1}=AX,$ $\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}=BX,$ $\sqrt{2}=AB.$ На основі заданого рівняння маємо, що $AX+BX=AB.$ Тому точка X лежить на відрізку $AB.$ Значить, для площ відповідних трикутників маємо рівність $S_{ACB}=S_{ACX}+S_{BCX},$ тобто $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}x\cdot\sin 30°.$ Звідси знаходимо $x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1.$

8. *Векторний метод.*

Задача. Розв'яжіть рівняння $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$

Розв'язання. Нехай $\vec{a}=(x;1),$ $\vec{b}=\left(\sqrt{1+x};\sqrt{3-x}\right).$ Тоді

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=(\vec{a},\vec{b})\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=2\sqrt{x^2+1}.$$

Оскільки рівність тут можлива лише за умови однакової направленості векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то приходимо до співвідношення $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}}{1}$. Отже, $1+x=x^2(3-x)$, або ж $x^3-3x^2+x+1=0$, причому $0<x\le 3$. Розкладаючи ліву частину одержаного рівняння на множники, маємо $(x-1)(x^2-2x-1)=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1-\sqrt{2}$. Зрозуміло, що корінь $x_3<0$ є стороннім.

9. ***<u>Лінійні діофантові рівняння.</u>***

Діофантовими називають алгебраїчні рівняння з раціональними коефіцієнтами з вимогою визначити розв'язки у цілих або раціональних числах.

Важливим класом діофантових рівнянь є лінійні рівняння вигляду $ax+by=c$, де $a,b,c-$ цілі числа. Зрозуміло, що коли c не ділиться на спільний дільник чисел a та b, то таке рівняння не має розв'язків у цілих числах. Якщо ж числа a та b взаємно прості, то існує нескінченна множина розв'язків: $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$, $n\in Z$, де $(x_0;y_0)-$ який-небудь один (частковий) із розв'язків. Справді, якщо $(x_0;y_0)-$ розв'язок, то $ax_0+by_0=c$. Віднімаючи цю рівність від заданого рівняння, одержимо $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, звідки $x=x_0+\frac{b}{a}(y_0-y)$. Для того, щоб число x було цілим, необхідно, щоб другий з доданків в останній рівності був цілим числом. Оскільки a та $b-$ взаємно прості, то y_0-y має ділитися на a. Отже, $y_0-y=an, n\in Z$. Звідси знаходимо всі цілочислові розв'язки $(x;y)$ за вказаними вище формулами.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі розв'язки рівняння $19x+99y=2010$: а) у цілих числах, б) у натуральних числах.

Розв'язання. Виразимо x через y: $x=\frac{201`0-99y}{19}$.

Надаватимемо змінній y послідовно значень $0, 1, 2, ..., 18,$ перебираючи всі можливі остачі від ділення $2010-99y$ на 19. Оскільки 19 та 99 – взаємно прості, то $2010-99y$ ділитиметься на

19 лише для одного такого y. Легко переконатись, що таким значенням є $y_0 = 18$. Тоді $x_0 = 12$. Отже, всі розв'язки даного рівняння у цілих числах задаються рівностями $x = 12 + 99n$ та $y = 18 - 19n,\ \ n \in Z$. Легко бачити, що серед них $x_0 = 12$ $y_0 = 18$ – єдиний розв'язок даного рівняння у натуральних числах.

Зауважимо, що, виражаючи x через y при розв'язуванні останнього рівняння, ми могли б також записати його у зручнішому для аналізу на подільність вигляді: $x = 105 - 5y + \dfrac{15-4y}{19}$.

10. ***<u>Квадратні діофантові рівняння.</u>***

Серед діофантових рівнянь другого степеня виділимо рівняння вигляду $x^2 - ky^2 = 1,\ k \in N$. Пари $(1;0)$ та $(-1;0)$ є розв'язками цього рівняння при довільному $k \in N$. Якщо $k = n^2$, то дане рівняння можна записати у вигляді $(x - ny)(x + ny) = 1$. Звідси $x - ny = x + ny = \pm 1$, а отже, $y = 0$. Інших цілочислових розв'язків таке рівняння не має. Нехай тепер $k \neq n^2$. Обмежимося знаходженням розв'язків у натуральних числах. Для цього діємо так. Запишемо дане рівняння у вигляді $\left(x + y\sqrt{k}\right)\left(x - y\sqrt{k}\right) = 1$. Якщо $(x_0; y_0)$ – його розв'язок, то

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{k}\right)\left(x_0 - y_0\sqrt{k}\right) = 1,\ \left(x_0 + y_0\sqrt{k}\right)^2 \cdot \left(x_0 - y_0\sqrt{k}\right)^2 = 1.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$\left(x_0 + ky_0 + 2x_0y_0\sqrt{k}\right)^2 \cdot \left(x_0 + ky_0 - 2x_0y_0\sqrt{k}\right)^2 = 1$$

чи $\left(x_0^2 + ky_0^2\right)^2 - k\left(2x_0y_0\right)^2 = 1$. Тому пара $(x_1; y_1)$, де $x_1 = x_0^2 + ky_0^2$, $y_1 = 2x_0y_0$, теж є розв'язком цього рівняння, причому $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$. Аналогічно, із рівності $\left(x_0 + y_0\sqrt{k}\right)^n \cdot \left(x_0 - y_0\sqrt{k}\right)^n = 1$ можна знайти нескінченну множину розв'язків.

До того ж результату приходимо і таким способом. Нехай $(x_0; y_0)$ – один із розв'язків рівняння $x^2 - ky^2 = 1$. Визначимо для натуральних n числа $x_n = x_0x_{n-1} + ky_0y_{n-1}$, $y_n = y_0x_{n-1} + x_0y_{n-1}$. Тоді

$$x_n^2 - ky_n^2 = (x_0x_{n-1} + ky_0y_{n-1})^2 - k(y_0x_{n-1} + x_0y_{n-1})^2 =$$
$$= x_{n-1}^2 \cdot (x_0^2 - ky_0^2) + ky_{n-1}^2(ky_0^2 - x_0^2) = x_{n-1}^2 - ky_{n-1}^2.$$

Оскільки $x_0^2 - ky_0^2 = 1,$ то й $x_n^2 - ky_n^2 = 1$ при кожному $n \in N.$

Задача. Доведіть, що рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$ має безліч розв'язків у натуральних числах. Скільки серед них розв'язків у простих числах?

Розв'язання. Твердження задачі випливає з міркувань, наведених вище. Для знаходження всіх розв'язків у натуральних числах при $k = 2$ досить покласти $x_0 = 3, y_0 = 2.$

Доведемо, що у простих числах такий розв'язок буде єдиним. Справді, число x має бути непарним. Тому $2y^2$ ділиться на 4. Цю умову задовольняє єдине просте число $y = 2.$ Тоді $x = 3.$

11. *Метод вирівнювання степенів.*

Іноді, якщо змінні входять у рівняння в різних степенях, такі степені при розв'язуванні вдається вирівняти.

Задача. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^3 + z^5 = t^7$ має безліч розв'язків у натуральних числах.

Розв'язання. Неважко підібрати один з розв'язків такого рівняння: $x_0 = 10,\ y_0 = 3,\ z_0 = 1,\ t_0 = 2.$ Тепер легко переконатися, що числа $x_n = 10n^{105},\ y_n = 3n^{70},\ z_n = n^{42},\ t_n = 2n^{30}$ при кожному натуральному n також задовольняють дане рівняння.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Розв'яжіть рівняння $\left(x^2 + x - a\right)^2 + x^2 = 2a,$ скориставшись методом суперпозиції функцій.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x,$ звівши його до:

   а) системи рівнянь;

   б) рівняння, квадратного відносно параметра.

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + 1} - x = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}},$ скориставшись тригонометричною підстановкою.

4. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 = n$ має розв'язки у цілих числах тоді і тільки тоді, коли рівняння $x^2 + y^2 = 2n$ має розв'язки у цілих числах.

5. Доведіть, що рівняння $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$ не має розв'язків у натуральних числах.

Заняття №9.

Функціональні рівняння

Функціональним називають рівняння, з якого треба визначити невідому функцію на основі співвідношень між значеннями цієї функції при деяких значеннях її аргументу.

1. ***<u>Рівняння Коші.</u>***

Розглянемо спочатку рівняння $f(x+y)=f(x)+f(y)$, яке ще називається *рівнянням Коші*.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R$, для яких при всіх дійсних x,y виконується рівність $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Розв'язання. Нехай $x=y=0$. Тоді $f(0)=0$. Підставимо $y=-x$. Отже, $f(0)=f(x)+f(-x)$. Звідси $f(-x)=-f(x)$. Покладемо $f(1)=a$. Якщо $x=y=1$, то $f(2)=2a$. Оскільки з рівняння Коші випливає, що $f(x_1+...+x_n)=f(x_1)+...+f(x_n)$, то при $x_1=...=x_n=1$ отримаємо $f(n)=na$. А при $x_1=...=x_n=\frac{1}{n}$ знайдемо $a=nf\left(\frac{1}{n}\right)$, $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}a$. Якщо ж $x_1=...=x_m=\frac{1}{n}$, то $f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}a$. Також $f\left(-\frac{m}{n}\right)=-f\left(\frac{m}{n}\right)=-\frac{m}{n}a$ та $f(0)=0=0\cdot a$. Отже, $f(x)=ax$ для всіх $x\in Q$. Якщо ж $x\notin Q$, то розглянемо послідовність раціональних чисел $x_n\in Q$, яка збігається до x. Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то $f(x)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}ax_n=ax$. Тому $f(x)=ax$ для всіх $x\in R$. Перевірка показує, що тут $a-$ довільне дійсне число.

2. ***<u>Неоднорідне рівняння Коші.</u>***

<u>Задача.</u> Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R$, для яких $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ при всіх дійсних x,y.

Розв'язання. Зауважимо, що функція $f_0(x)=\frac{1}{2}x^2$ задовольняє дане рівняння. Тому розв'язок задачі шукатимемо у вигляді $f\left(x\right)=g\left(x\right)+\frac{1}{2}x^2.$ Підставляючи цю функцію у початкове рівняння, отримаємо рівність $g(x+y)=g(x)+g(y).$ На основі попередньої задачі знаходимо $g\left(x\right)=ax,\ a\in R.$ Отже, $f\left(x\right)=ax+\frac{1}{2}x^2,\ a\in R.$

3. ***<u>Аналоги рівнянь Коші.</u>***

До рівняння Коші зводяться і деякі інші рівняння.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R,$ для яких $f(x+y)=f(x)f(y)$ при всіх дійсних $x,y.$

Розв'язання. Нехай $y=x.$ Тоді $f\left(2x\right)=f^2\left(x\right)\geq 0.$ Отже, значення функції $f\left(x\right)$ невід'ємні. Якщо існує $y_0,$ для якого $f\left(y_0\right)=0,$ то $f\left(x+y_0\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y_0\right)=0$ для всіх $x\in R,$ тобто $f\left(x\right)\equiv 0.$ В іншому разі $\log_b f\left(x+y\right)=\log_b f\left(x\right)+\log_b f\left(y\right)$ для всіх $x,y\in R.$ Нехай $\varphi\left(x\right)=\log_a f\left(x\right).$ Тоді $\varphi\left(x+y\right)=\varphi\left(x\right)+\varphi\left(y\right),$ причому $\varphi\left(x\right),$ як і $f\left(x\right),$ є неперервною функцією. Тому $\varphi\left(x\right)=ax,\ \ f\left(x\right)=b^{ax}=\left(b^a\right)^x=c^x,$ де $c-$ довільне додатне число.

4. ***<u>Метод підстановок.</u>***

При розв'язуванні попередніх рівнянь ми надавали аргументам x та y певних конкретних значень. Наступний приклад ілюструє ефективність підстановок, в яких фігурує й невідома поки що функція.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі такі функції $f:R\to R,$ для яких $f(x-f(y))=1-x-y$ при всіх дійсних $x,y.$

Розв'язання. Якщо $x=f\left(y\right),$ то $f\left(0\right)=1-f\left(y\right)-y.$ Якщо тепер $y=0,$ то $f\left(0\right)=1-f\left(0\right),\ \ f\left(0\right)=\frac{1}{2}.$ Отже, $f\left(y\right)=\frac{1}{2}-y.$ Тоді $x-f\left(y\right)=x+y-\frac{1}{2},\ \ \ f\left(x-f\left(y\right)\right)=\frac{1}{2}-\left(x+y-\frac{1}{2}\right)=1-x-y.$ Тому $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-x$ є шуканою функцією.

5. *Метод нескінченного спуску.*

Задача. Доведіть, що якщо функція $f(x)$ неперервна, і для всіх дійсних x виконується рівність $f(2x)=f(x),$ то $f(x)=const.$

Розв'язання. Замінимо у заданій рівності x на $\frac{x}{2}.$ Тоді отримаємо $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right).$ Міркуючи далі аналогічно, одержимо наступний нескінченний ланцюжок рівностей: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^2}\right)=\ldots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\ldots.$ Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f\left(0\right)=const.$

6. *Зведення до системи рівнянь.*

Окремі функціональні рівняння вдається звести до лінійної системи алгебраїчних рівнянь.

Задача. Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R,$ для яких $2xf(x)-x^2f(-x)=x-3x^2$ при всіх дійсних $x.$

Розв'язання. Замінимо у заданій рівності x на $-x.$ Одержимо співвідношення $-2xf\left(-x\right)-x^2f\left(x\right)=-x-3x^2.$ Виключивши з цих двох співвідношень $f\left(-x\right),$ знайдемо $f\left(x\right)=\frac{3x^2-5x+2}{x^2+4}.$

7. *Абелеві групи дробово-лінійних відображень.*

Узагальнюючи попередню задачу, розглянемо рівняння $F\Big(x, f\left(x\right), f\left(\varphi\left(x\right)\right)\Big)=0.$ Підставивши замість x вираз $\varphi\left(x\right),$ одержимо $F\Big(\varphi\left(x\right), f\left(\varphi\left(x\right)\right), f\Big(\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)\Big)\Big)=0.$ Якщо $\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=x,$ то друге рівняння набуде вигляду $F\Big(\varphi\left(x\right), f\left(\varphi\left(x\right)\right), f\left(x\right)\Big)=0.$ Виключаючи із нього і початкового рівняння $f\left(\varphi\left(x\right)\right),$ знаходимо $f\left(x\right).$ Відзначимо, що часто такий метод приводить до успіху і у випадку $\varphi\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}.$

Задача. Знайдіть всі функції $f: R\setminus\{-1,0,1\}\to R,$ які задовольняють рівняння $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1.$

Розв'язання. Тут $\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1},\ \varphi(\varphi(x))=-\frac{1}{x},$

$$\varphi(\varphi(\varphi(x)))=-\frac{x+1}{x-1},\quad \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))=x.$$

Отже, ми одержали таку лінійну систему з чотирьох рівнянь:

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1,\quad \frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=1,\quad -\frac{x+1}{x-1}f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=1.$$

З неї знаходимо $f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}.$

8. ***Зведення до системи рівнянь у випадку двох незалежних аргументів.***

Задача. Знайдіть всі функції $f: R\to R,$ для яких при всіх дійсних *x, y* виконується рівність $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$

Розв'язання. Нехай t – довільне дійсне число. Тоді задана рівність повинна виконуватися, зокрема, і для таких пар чисел: $x,y:(0,t),\left(\frac{\pi}{2},t+\frac{\pi}{2}\right),\left(t+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$ Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t,\\ f(t+\pi)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t,\\ f(t+\pi)+f(t)=0.\end{cases}$$

Взявши $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a,\ f(0)=b,$ знаходимо $f(t)=a\sin t+b\cos t,\ a,b\in R.$

9. ***Функціональні рівняння на множині натуральних чисел.***

Задача. Знайдіть $f(2009),$ якщо $f: N\to N$ і $f(f(n))+f(n)=2n+3$ для всіх натуральних $n.$

Розв'язання. $f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=5.$ Оскільки $f\left(n\right)\in N,$ то $1\leq f\left(1\right)\leq 4.$ Розглянемо різні можливі значення для $f\left(1\right).$ Зрозуміло, що значення $f\left(1\right)=1$ неможливе, бо тоді $f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=2\neq 5.$ $f\left(1\right)=4$ теж неможливе, бо тоді $5=f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=f\left(4\right)+4,$ тобто $f\left(4\right)=1.$ Але при цьому $f\left(f\left(4\right)\right)+f\left(4\right)=f\left(1\right)+1=5,$ що суперечить умові $f\left(f\left(4\right)\right)+f\left(4\right)=2\cdot 4+3.$ Аналогічно розглядаємо випадок $f\left(1\right)=3.$ Тоді $5=f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=f\left(3\right)+3.$ Звідси $f\left(3\right)=2.$ Отже, $2\cdot 3+3=f\left(f\left(3\right)\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)+2,$ тобто $f\left(2\right)=7.$ Але тоді $2\cdot 2+3=f\left(f\left(2\right)\right)+f\left(2\right)=f\left(7\right)+7,$ звідки знаходимо $f\left(7\right)=0,$ що суперечить умові задачі. Нарешті, останній можливий варіант: $f\left(1\right)=2.$ Тоді $5=f\left(f\left(1\right)\right)+f\left(1\right)=f\left(2\right)+2,$ звідки $f\left(2\right)=3.$ Аналогічно при $n=2$ знаходимо $2\cdot 2+3=f\left(f\left(2\right)\right)+f\left(2\right)=f\left(3\right)+3,$ звідки маємо $f\left(3\right)=4.$ Припустивши, що при $n=k$ виконується рівність $f\left(k\right)=k+1,$ одержимо, що $2k+3=f\left(f\left(k\right)\right)+f\left(k\right)=f\left(k+1\right)+k+1,$ тобто $f\left(k+1\right)=k+2.$ Звідси на основі принципу математичної індукції отримуємо, що $f\left(n\right)=n+1$ для всіх $n\in N.$ Отже, $f\left(2009\right)=2010.$

10. *<u>Різницеві функціональні рівняння.</u>*

При розв'язуванні функціональних рівнянь на множині натуральних чисел можливий ще й такий підхід.

<u>Задача.</u> Знайдіть всі функції $f:N\to R,$ для яких

$$\begin{cases} f(n+2)=3f(n+1)-2f(n), \\ f(1)=3,\ f(4)=31. \end{cases}$$

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді $f\left(n\right)=\lambda^{n},$ $\lambda\neq 0.$ Тоді одержимо: $\lambda^{n+2}-3\lambda^{n+1}+2\lambda^{n}=0$ чи $\lambda^{2}-3\lambda+2=0,$ $\lambda_1=1,$ $\lambda_2=2.$ Отже, $f_1\left(n\right)=1^{n}=1,$ $f_2\left(n\right)=2^{n}.$ Легко переконатися, що при довільних сталих c_1 та c_2 функція $f\left(n\right)=c_1f_1\left(n\right)+c_2f_2\left(n\right)$ також задовольняє першу умову. А тому $f\left(n\right)=c_1+c_2\cdot 2^{n}.$

Підставляючи сюди $n=1$ та $n=4,$ одержимо $c_1+c_2\cdot 2=3$ та $c_1+c_2\cdot 16=31.$ Отже, $c_1=-1,$ $c_2=2.$ Тому $f(n)=2^{n+1}-1.$

У випадку $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ функцію $f(n)$ шукають у вигляді $(c_1+nc_2)\lambda^n.$ Для k різних дійсних коренів $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ покладають $f(n)=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+...+c_k\lambda_k^n.$ Дійсному кореню λ кратності k у розв'язку відповідає доданок $\left(c_1+nc_2+...+n^{k-1}c_k\right)\lambda^n.$

11. ***Функціональні нерівності.***

Відзначимо, що для знаходження невідомої функції можуть бути задані не лише рівняння, але й нерівності.

Задача. Чи існує така монотонна функція $f:R\to R,$ для якої при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x^2)-\left(f(x)\right)^2\geq 0,25?$

Розв'язання. Доведемо, що такої функції не існує. Справді, покладаючи $x=0$ та $x=1,$ одержуємо $f(0)-\left(f(0)\right)^2\geq 0,25$ та $f(1)-\left(f(1)\right)^2\geq 0,25.$ Записуючи ці нерівності у вигляді $\left(f(0)-0,5\right)^2\leq 0$ та $\left(f(1)-0,5\right)^2\leq 0,$ знаходимо $f(0)=f(1)=0,5.$ А це суперечить умові монотонності $f(x).$

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайдіть всі многочлени $f(x),$ для яких $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ при всіх дійсних $x,y.$

2. Знайдіть всі неперервні функції $f:R\to R,$ для яких $f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y)$ при довільних дійсних x та $y.$

3. Знайдіть всі такі функції $f(x),$ для яких $2f(x)+xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+1$ при всіх дійсних $x\neq 0.$

4. Знайдіть всі функції $f(x),$ для яких $xf(x)+2f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$ при всіх $x,$ відмінних від 0, 1, –1.

5. Знайдіть всі функції $f:R\to R,$ які при довільних дійсних x,y задовольняють нерівності $f(x)\leq x$ та $f(x+y)\leq f(x)+f(y).$

Заняття №10.

Метод математичної індукції та його модифікації

1. *Повна індукція як повний перебір.*

Задача. Доведіть, що всі елементи множини $\{1,4,16,25\}$ є точними квадратами.

Розв'язання. Оскільки $1=1^2$, $4=2^2$, $16=4^2$, $25=5^2$, то справді всі числа даної множини є точними квадратами.

Такий метод доведення називається методом повної індукції.

2. *Неповна індукція.*

А як бути, коли множина містить нескінченну кількість елементів, і повний перебір стає неможливим?

Задача. Неважко переконатися, що для кількох перших натуральних n значення виразу n^2+n+41 є простими числами. Чи обов'язково для всіх $n\in N$ значення цього виразу є простими числами?

Розв'язання. Ні. Уже для $n=40$ таке число є складеним і ділиться на 41.

Цікаво зауважити, що для всіх натуральних $n\le 39$ значеннями цього виразу є простими числами. Але це не дає підстави робити відповідний висновок для всіх натуральних чисел.

3. *Повна індукція для нескінченної множини.*

Часто нескінченну множину можна розбити на скінчену кількість однотипних підмножин і вже до цього розбиття застосувати метод повної індукції.

Задача. Доведіть, що n^3-4n ділиться на 3 при всіх $n\in N$.

Розв'язання. При діленні натуральних чисел на 3 можливі лише остачі 0, 1, 2. Оскільки при кожному $k\in Z_+$ числа $(3k)^3-4\cdot 3k$, $(3k+1)^3-4\cdot(3k+1)$ та $(3k+2)^3-4\cdot(3k+2)$ діляться на 3, то n^3-4n ділиться на 3 при кожному натуральному n.

4. *Метод математичної індукції.*

Інший шлях доведення тверджень, що залежать від натурального параметра, дає *метод математичної індукції*. Твердження $A(n)$ вважається доведеним для всіх $n\in N$, якщо воно доведене для $n=1$, і з припущення про виконання твердження $A(k)$ для якого-небудь натурального k виведено, що справджується твердження $A(k+1)$. Справді, як би при деякому $n\geq 2$ твердження $A(n)$ було неправильним, то ми могли б вибрати із всіх таких n найменше. Нехай ним є $n=n_0$. Але для всіх $n<n_0$ твердження $A(n)$ правильне, то $A(n-1)$ теж правильне. Отже, воно повинно справджуватися і для $n=(n_0-1)+1=n_0$. Одержане протиріччя і доводить правильність $A(n)$ для всіх натуральних значень n.

Задача. Числа $a_1,a_2,...,a_n$ є сумами квадратів двох цілих чисел. Доведіть, що їх добуток також є сумою квадратів двох цілих чисел.

Розв'язання. Для $n=1$ твердження задачі справедливе. Нехай $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k=\alpha_k^2+\beta_k^2$ для $n=k$, $a_{k+1}=\alpha^2+\beta^2$. Тоді

$$a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_k\cdot a_{k+1}=\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=\left(\alpha_k\alpha+\beta_k\beta\right)^2+\left(\alpha_k\beta-\beta_k\alpha\right)^2.$$

Отже, твердження справедливе для $n=k+1$, а значить, і для всіх $n\in N$.

5. *Індукція для* $n\geq n_0$.

У попередніх прикладах ми кожен раз перевіряли індукційне припущення для $n=1$. А як же бути, якщо при $n=1$ твердження неправильне? Це ще не означає, що воно неправильне і для інших n, зокрема, для всіх натуральних $n\geq n_0>1$. У такому разі доведення справедливості твердження $A(1)$ замінюють доведенням справедливості твердження $A(n_0)$. Це ж стосується і випадків, коли $A(1)$ правильне, але для скінченого числа значень n твердження $A(n)$ неправильне.

Задача. Доведіть, що $2^n\geq n^2$ для всіх $n\geq 4$.

Розв'язання. Для $n_0=4$ маємо $2^4\geq 4^2$. Якщо нерівність правильна для $n=k\geq 4$, то для $n=k+1$ одержимо $2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2>(k+1)^2$. Справді, $2^k>k^2$ за індукційним припущенням, а $2k^2>(k+1)^2$, бо квадратний тричлен k^2-2k-1 при $k\geq 4$ набуває додатних значень. Отже, нерівність справедлива для всіх натуральних $n\geq 4$.

6. *Індукція, база якої складається з кількох тверджень.*

Іншу модифікацію методу математичної індукції одержуємо, якщо база індукції складається з перевірки m тверджень, а висновок про $(n+m)-$те твердження робиться на основі m

попередніх тверджень: $A(n),\ A(n+1),...,A(n+m-1)$. При $m=1$ отримуємо традиційний метод математичної індукції.

Задача. Доведіть, що всі елементи послідовності Фібоначчі є натуральними числами.

Розв'язання. $a_1=1,\ a_2=1-$ натуральні числа. Припустимо, що a_k та a_{k+1} також є натуральними. Оскільки $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$, то і воно буде натуральним. Тому всі члени послідовності Фібоначчі є натуральними числами.

7. *Індукція із припущенням для всіх* $k<n.$

Інколи метод математичної індукції застосовують у наступній видозміненій, але еквівалентній формі. Якщо справедливе твердження $A(1)$ і для всякого натурального $n>1$ із припущення про справедливість твердження $A(k)$ для будь-якого натурального $k<n$ випливає справедливість твердження $A(n)$, то твердження $A(n)$ справедливе при всіх натуральних $n.$

Задача. Доведіть, що будь-яке натуральне число можна записати у вигляді суми одного чи кількох різних степенів двійки, можливо, включаючи і доданок $2^0=1$.

Розв'язання. Для $n=1$ маємо запис $1=2^0$. Припустимо, що вказані записи можливі для всіх $k<n.$ Тоді, якщо $n=2^m$, то n уже записано у вказаному вигляді. Якщо ж n не є степенем двійки, то розглянемо таке максимальне значення $m,$ для якого $2^m<n.$ Тоді $k=n-2^m<n.$ Зрозуміло, що k є натуральним числом і $k<2^m$, бо інакше одержали б, що $n=k+2^m\geq 2^{m+1}$, і число m не було б найбільшим. Оскільки за припущенням число k можна записати у вигляді суми різних степенів двійки і серед доданків немає 2^m, то і число n можна записати у такому ж вигляді. Отже, вказаний запис можливий для всіх натуральних $n.$

8. *Індукція по підмножині.*

Іноді метод математичної індукції проходить не для всіх $n,$ а лише для $n,$ які мають певну специфіку. Проілюструємо це на доведенні нерівності Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним невід'ємних чисел $x_1,x_2,...,x_n$.

Задача. Доведіть нерівність Коші $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ для $n=2^k$, $k\in N$.

Розв'язання. При $n=2$ нерівність $\frac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{x_1x_2}$ безпосередньо випливає з очевидної нерівності $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\ge 0.$ Припустимо справедливість нерівності Коші для $n=2^k$, $k\in N$. Тоді для $n=2^{k+1}$ покладемо $y_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y_2=\frac{1}{2}(x_3+x_4)$, … , $y_{2^k}=\frac{1}{2}(x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}})$.

Отже, $$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{2^k}}{2^k}\ge\sqrt[2^k]{y_1y_2\ldots y_{2^k}}=$$

$$=\sqrt[2^k]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{2^{k+1}-1}+x_{2^{k+1}}}{2}}\ge\sqrt[2^k]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{x_{2^{k+1}-1}x_{2^{k+1}}}}=\sqrt[2^{k+1}]{x_1x_2\ldots x_{2^{k+1}}}.$$

Тому нерівність Коші справедлива для всіх n вигляду 2^k.

9. *Зворотна індукція та її двоїстий варіант.*

Двоїстим до методу математичної індукції є метод зворотної індукції чи індукції вниз. При цьому перехід індукції полягає у доведенні справедливості твердження $A(n-1)$ за припущення, що справедливе твердження $A(n)$. Якщо, крім того, виявиться, що існують як завгодно великі значення n, для яких твердження $A(n)$ справедливе, то воно буде справедливим для всіх натуральних n. У зв'язку з цим часто поєднують методи індукції по підмножині та зворотної індукції. Ілюстрацією такого поєднання є доведення нерівності між середніми арифметичним та геометричним.

Задача. Доведіть нерівність Коші для всіх натуральних n.

Розв'язання. Доведемо, що із справедливості нерівності Коші для $n=m>1$ випливає її справедливість для $n=m-1$. Позначивши $a=x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}$, $b=x_1x_2\ldots x_{m-1}$, покладемо $x_m=\frac{a}{m-1}$. Тоді

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_m}{m}\ge\sqrt[m]{x_1x_2\ldots x_m}\Leftrightarrow\frac{a+\frac{a}{m-1}}{m}\ge\sqrt[m]{b\cdot\frac{a}{m-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{m-1} \geq \sqrt[m]{\frac{ab}{m-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{m-1}\right)^{m-1} \geq b \Leftrightarrow \frac{a}{m-1} \geq \sqrt[m-1]{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1}}{m-1} \geq \sqrt[m-1]{x_1 x_2 \ldots x_{m-1}}.$$

Враховуючи твердження попередньої задачі і те, що 2^k може набувати як завгодно великих значень, нерівність Коші доведено повністю. Зауважимо, що рівність у ній досягається лише при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{m-1}$.

Відзначимо, що даний метод може бути корисним і для доведення того, що деяка властивість не виконується при жодному натуральному n. Справді, припустивши, що $A(n)$ правильне при деякому $n_0 \geq 2$, ми послідовно одержали б, що $A(n)$ правильне для всіх натуральних $n \leq n_0$. Але, якщо при цьому виявиться, що $A(1)$ неправильне, то приходимо до протиріччя.

10. ***Специфіка методу математичної індукції при доведенні нерівностей.***

З доведенням нерівностей пов'язані ще й такі цікаві модифікації методу математичної індукції:

а) якщо $a_0 \geq b_0$ і $a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}$ для всіх $n \in N$, то $a_n \geq b_n$ для всіх $n \in N$;

б) якщо $a_0 \geq b_0 > 0$ і $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0$ для всіх $n \in N$, то $a_n \geq b_n$ для всіх $n \in N$.

Для обґрунтування справедливості сформульованих тверджень досить відповідно додати нерівності

$$a_0 \geq b_0,\ a_1 - a_0 \geq b_1 - b_0,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}$$

чи перемножити нерівності

$$a_0 \geq b_0 > 0,\ \frac{a_1}{a_0} \geq \frac{b_1}{b_0} > 0,\ \ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0.$$

Задача. Доведіть нерівність $n^n \geq (n+1)^{n-1}$, $n \in N$.

Розв'язання. Нехай $a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$. Очевидно, що $a_1 \geq b_1$. Крім того, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \geq \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-2}} = \frac{b_n}{b_{n-1}}$, оскільки

$n^{2n-2} \ge (n+1)^{n-1}(n-1)^{n-1} \Leftrightarrow (n^2)^{n-1} \ge (n^2-1)^{n-1}$. Отже, нерівність справедлива для всіх натуральних n.

11. ***Метод математичної індукції у випадку тверджень, залежних від кількох натуральних аргументів.***

Задача. Доведіть, що $2^{m+n-2} \ge mn$ для довільних натуральних чисел m та n.

Розв'язання. Запишемо дану нерівність у вигляді $2^{m-1} \cdot 2^{n-1} \ge mn.$. Тепер достатньо показати, що при кожному натуральному n виконується нерівність $2^{n-1} \ge n.$ При $n=1$ вона очевидна, а із припущення $2^{k-1} \ge k$ легко одержуємо, що $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \ge 2k \ge k+1.$ Отже, дана нерівність справедлива для всіх натуральних m та n.

Як бачимо, доведення твердження задачі фактично розпалося на розгляд двох цілком ідентичних випадків. Проте інколи метод математичної індукції застосовується спочатку по змінній n, вважаючи число m довільним фіксованим, а потім по змінній m, вважаючи n фіксованим.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Доведіть, що при кожному натуральному n виконуються рівності:

а) $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Дано n квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, щоб з них вдалося скласти один великий квадрат.

3. Число $x+\dfrac{1}{x}$ є цілим. Доведіть, що число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ при кожному натуральному n також ціле.

4. Послідовність (a_n) така, що $a_1=3,$ $a_2=5,$ $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$. Доведіть, що $a_n=2^n+1$ для всіх натуральних n.

5. Доведіть, що при всіх натуральних n виконується нерівність $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$

Заняття №11.

Деякі методи доведення нерівностей

На попередньому занятті ми вже доводили нерівності методом математичної індукції. Зупинимося коротко на інших методах.

1. *Метод групування.*

Задача. Доведіть нерівність $\frac{77}{60} < \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \ldots + \frac{1}{10050} < \frac{25}{12}$.

Розв'язання. Згрупуємо записані доданки у чотири групи по 2010 доданків у кожній. Тоді для першої групи матимемо

$$\frac{1}{2} = 2010 \cdot \frac{1}{2010 \cdot 2} < \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012} + \ldots + \frac{1}{2010 \cdot 2} < 2010 \cdot \frac{1}{2010} = 1.$$

Аналогічно для другої групи дістанемо оцінку зліва $\frac{1}{3}$, а справа – $\frac{1}{2}$.

Для третьої групи матимемо відповідно оцінки $\frac{1}{4}$ та $\frac{1}{3}$, а для четвертої групи – $\frac{1}{5}$ та $\frac{1}{4}$. Залишається лише додати одержані нерівності.

2. *Метод підсилення.*

Суть цього методу полягає в тому, що замість нерівності вигляду $a > b$ доводять дві нерівності: $a > c$ та $c > b$. Іноді таких проміжних нерівностей може бути і більше.

Задача. Доведіть нерівність $513^{18} > 623^{17}$.

Розв'язання.

$$513^{18} > 512^{18} = 2^{162} > 2^{161} = 128^{23} > 125^{23} = 5^{69} > 5^{68} = 625^{17} > 623^{17}.$$

3. *Вироджене підсилення.*

У деяких варіантах методу підсилення замість однієї з нерівностей може доводитися рівність.

Задача. Доведіть нерівність

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}} < 5,$$

якщо в обох доданках використано по 2010 радикалів.

Розв'язання.

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}} <$$

$$< \sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}} = 3+2=5.$$

4. ***Зведення до очевидної нерівності.***

Ряд нерівностей у результаті доведення вдається звести до очевидних нерівностей. Проілюструємо це на простому, але дуже важливому щодо застосувань прикладі.

Задача. Доведіть при $a>0$ нерівність $a+\frac{1}{a}\ge 2.$

Розв'язання. Оскільки $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\ge 0$ при $a>0,$ то $a+\frac{1}{a}\ge 2,$ причому рівність досягається тільки при $a=1.$

Зауважимо, що при $a<0$ справедлива нерівність $a+\frac{1}{a}\le -2.$

5. ***Запис очевидної нерівності у рівносильному вигляді.***

Часто при доведенні нерівностей використовують відомі нерівності, записані у рівносильному їм вигляді. Наприклад, нерівність $(a-b)^2\ge 0$ при $b>0$ рівносильна нерівності $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b.$

Задача. Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge a+b+c.$$

Розв'язання.

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge \frac{a}{b}(2a-b)+\frac{b}{c}(2b-c)+\frac{c}{a}(2c-a)=$$

$$=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)-(a+b+c)\ge$$

$$\ge 2\big((2a-b)+(2b-c)+(2c-a)\big)-(a+b+c)=a+b+c.$$

Зауважимо, що можна було також зразу скористатися нерівністю

$$\frac{x^n}{y^{n-1}}\ge nx-(n-1)y,\text{ де } x>0, y>0, n\in N.$$

6. ***Заміна нерівності рівносильною.***

Іноді і задану для доведення нерівність доцільно замінити рівносильною їй нерівністю. Наприклад, $a>b\Leftrightarrow 1-a<1-b,$ чи

$a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ при додатних a,b тощо.

Задача. Доведіть для $a,b,c \geq 1$ нерівність $\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \geq 1.$

Розв'язання. Позначимо $A=\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$. Оскільки $A>0,$ то розглянемо вираз $\frac{1}{A}=\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$. Зрозуміло, що $\frac{1}{A} \leq \frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}=1.$ Тому $A \geq 1.$

7. *Складніші випадки отримання рівносильних нерівностей.*

Рівносильні нерівності можуть мати і дещо хитрішу структуру: $A \geq B \Leftrightarrow A \geq 2B-A,$ $A \geq B \Leftrightarrow A+A \geq 2B$ тощо.

Задача. Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Розв'язання.

$$A=\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=$$

$$=\frac{\left(a^3-b^3\right)+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{\left(b^3-c^3\right)+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{\left(c^3-a^3\right)+a^3}{c^2+ca+a^2}=$$

$$=(a-b)+(b-c)+(c-a)+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Отже,

$$A+A=\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Крім того,

$$2B=\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}.$$

Далі отримуємо

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^2}{3\left(a^2+ab+b^2\right)} \geq 0.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{b+c}{3}, \quad \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{c+a}{3}.$$

Додавши три останні нерівності, отримуємо потрібний результат.

8. ***<u>Метод взаємного скорочування.</u>***

<u>Задача.</u> Доведіть нерівності:

$$\text{а)}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}, \qquad \text{б)}\ \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102} < \frac{1}{17}.$$

Розв'язання. Справедливість даних нерівностей випливає з наступних міркувань:

а). Оскільки $\frac{1}{2} < \frac{2}{3},\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots,\ \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$, то

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}\right) = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}.$$

б). Враховуючи, що

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{4},\ \frac{4}{6} < \frac{5}{7}, \ldots,\ \frac{100}{102} < \frac{101}{103} \quad \text{та} \quad \frac{1}{3} < \frac{3}{5},\ \frac{4}{6} < \frac{6}{8}, \ldots,\ \frac{100}{102} < \frac{102}{104},$$

отримаємо

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102}\right)^3 < \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{102}\right)\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{101}{103}\right)\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{102}{104}\right) =$$

$$= \frac{2}{103\cdot 104} < \frac{1}{102\cdot 51} = \frac{1}{18\cdot 17\cdot 17} < \frac{1}{17^3}.$$

9. ***<u>Деякі штучні прийоми зведення до відомих нерівностей.</u>***

В окремих задачах для доведення нерівності доводиться використовувати додавання і віднімання одного і того ж числа, чи множення і ділення на одне і те ж число.

<u>Задача.</u> Доведіть нерівність $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Розв'язання.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c}+1\right) + \left(\frac{b}{c+a}+1\right) + \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - 3 =$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 =$$

$$=\frac{1}{2}((a+b)+(b+c)+(c+a))\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{c+a}}-3=\frac{3}{2}.$$

Відзначимо, що доводити дану нерівність можна було ще й так. Позначимо $b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z.$ Тоді отримаємо

$$a=\frac{y+z-x}{2},\ b=\frac{x-y+z}{2},\ c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Отже,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right)-\frac{3}{2}\geq\frac{1}{2}(2+2+2)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

10. ***Умовні нерівності.***

Часто в задачах на доведення нерівностей накладаються додаткові умови на змінні у вигляді деяких співвідношень.

Задача. Доведіть, що якщо для додатних чисел x, y виконується рівність $x-y=x^{2010}+y^{2010}$, то $x^{2009}+y^{2009}<1.$

Розв'язання. Якщо x та y додатні, то $x^{2009}+y^{2009}>0,$ $x^{2010}+y^{2010}>0,$ $x-y>0,$ $x>y.$ Помножимо ліву частину заданої рівності на $x^{2009}+y^{2009},$ а праву – на 1. Різниця цих добутків

$$(x-y)(x^{2009}+y^{2009})-(x^{2010}+y^{2010})\cdot 1=-xy(x^{2008}-y^{2008})-2y^{2010}<0.$$

Тому $x^{2009}+y^{2009}<1.$

11. ***Допоміжне використання заданих додаткових умов.***

В окремих задачах додаткові умови доцільно використовувати для отримання допоміжної нерівності у методі підсилення.

Задача. Доведіть, що при $x, y, z\geq 2$ виконується нерівність

$$\left(x^3+y\right)\left(y^3+z\right)\left(z^3+x\right)\geq 125xyz.$$

Розв'язання. Оскільки $x, y, z\geq 2,$ то $x^3\geq 4x,\ y^3\geq 4y,\ z^3\geq 4z.$ Звідси випливає, що

$$\left(x^3+y\right)\left(y^3+z\right)\left(z^3+x\right)\geq$$

$$\geq\left(x+x+x+x+y\right)\left(y+y+y+y+z\right)\left(z+z+z+z+x\right)\geq$$

$$\geq 5\sqrt[5]{x^4y}\cdot 5\sqrt[5]{y^4z}\cdot 5\sqrt[5]{z^4x}=125xyz.$$

Задачі для самостійного розв’язування.

1. Доведіть нерівність $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2010}>6.$
2. Доведіть, що $\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2010^3}\right)>\frac{1}{2}.$
3. Порівняйте числа $\frac{2^2}{1^1}+\frac{3^3}{2^2}+\ldots+\frac{2010^{2010}}{2009^{2009}}$ та 2010^2.
4. При додатних a,b,c знайдіть найменше значення виразу

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

5. Доведіть, що якщо $x,y,z>0,$ $x+y+z=1,$ то

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y}\geq\frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

Заняття №12.

Інші підходи до доведення нерівностей

1. ***Застосування похідної. Нерівність Бернуллі.***

Задача. Доведіть, що $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x,$ якщо $x>-1, \alpha \notin (0,1).$ Як зміниться ця нерівність для $\alpha \in (0,1)$?

Розв'язання. Розглянемо при $x>-1$ функцію $f(x)=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x).$ Її похідна $f'(x)=\alpha\left((1+x)^{\alpha-1}-1\right)$ перетворюється в нуль при $\alpha \neq 0$ та $\alpha \neq 1$ лише у точці $x=0.$ Якщо, крім того, $\alpha \notin (0,1),$ то $x=0$ є точкою мінімуму функції $f(x).$ Тому для всіх $x>-1$ справедлива нерівність $f(x) \geq f(0)=0,$ тобто $(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha x.$ При $\alpha=0$ вона перетворюється у рівність $1=1,$ а при $\alpha=1-$ у рівність $1+x=1+x.$ Якщо ж $\alpha \in (0,1),$ то $x=0-$ точка максимуму $f(x),$ і знак нерівності зміниться на протилежний.

2. ***Середні степеневі та співвідношення між ними.***

Середнім степеневим додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ порядку $k,$ де $k \neq 0-$ довільне дійсне число, називають число

$$C_k=\left(\frac{x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

При $k=1$ число C_k є *середнім арифметичним*, при $k=2-$ середнім квадратичним, а при $k=-1-$ *середнім гармонійним* заданих чисел. Нагадаємо також, що число $G=\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ називається їх *середнім геометричним*.

Задача. Для $n=2$ доведіть, що $C_{-1} \leq G \leq C_1 \leq C_2$: а) алгебраїчно, б) геометрично.

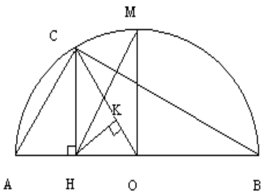
Розв'язання. а). $G \leq C_1$ є нерівністю Коші. Далі маємо

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{2x_1 x_2}{x_1+x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow G \leq C_1$$

та

$$\frac{x_1+x_2}{2}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\le\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\Leftrightarrow 2x_1x_2\le x_1^2+x_2^2.$$

Зауважимо, що рівності досягаються лише при $x_1=x_2$.



Мал. 8

б). Позначимо $x_1=a,\ x_2=b.$ Побудуємо півколо з центром O і діаметром $AB=a+b$ (див. мал. 8). Нехай $AH=a,\quad BH=b,\quad AO=OB,\quad CH\perp AB,$, $MO\perp AB,\quad HK\perp CO.$ Тоді $\angle ACB=90°,$ $CH=\sqrt{ab},\quad MO=\frac{a+b}{2},\quad HO=\frac{|b-a|}{2},$ $HM=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ CK=\frac{CH^2}{CO}=\frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$ Зрозуміло, що $CK\le CH\le MO\le MH,$ а це рівносильне нерівностям, які необхідно довести. При $a=b$ усі чотири відрізки $CK,\ CH,\ MO$ та MH співпадають, а нерівності перетворюються у рівності.

3. *Однаково впорядковані послідовності.*

Дві скінченні послідовності дійсних чисел $\{a_k\}$ та $\{b_k\},$ $(k=1,2,...,n),$ називаються однаково впорядкованими, якщо для будь-яких $k\le n, p\le n$ виконується нерівність $(a_k-a_p)(b_k-b_p)\ge 0,$ і зворотно впорядкованими, якщо $(a_k-a_p)(b_k-b_p)\le 0.$

Позначимо $(\{a_k\},\{b_k\})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$ і припустимо, що послідовності $\{a_k\}$ та $\{b_k\},\ 1\le k\le n,-$ однаково впорядковані, а $\{b_k'\}-$ довільна перестановка членів послідовності $\{b_k\}.$ Тоді $(\{a_k\},\{b_k\})\ge(\{a_k\},\{b_k'\}).$ Справді, якщо $\{b_k\}$ не співпадає з $\{b_k'\},$ то знайдеться пара індексів k та $p,$ що послідовності з двох елементів $a_k,\ a_p$ та b_k', b_p' зворотно впорядковані. Помінявши місцями елементи b_k' та $b_p',$ дістанемо,

$$(a_kb_k'+a_pb_k')-(a_kb_k'+a_pb_p')=(a_k-a_p)(b_p'-b_k')\ge 0,$$

тобто в результаті такої заміни загальна сума $(\{a_k\},\{b_k'\})$ не зменшується. Тому найбільшою з усіх сум є $(\{a_k\},\{b_k\}).$ Навпаки, для $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ зворотно впорядкованих $(\{a_k\},\{b_k\}) \le (\{a_k\},\{b_k{}'\})$.

Задача. Для додатних чисел a,b,c доведіть нерівність

$$3(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Розв'язання. $\{a,b,c\}$ та $\{a^2,b^2,c^2\}$ однаково впорядковані, тому

$$a^3+b^3+c^3 \ge ab^2+bc^2+ca^2,\ \ a^3+b^3+c^3 \ge ac^2+ba^2+cb^2.$$

Залишилось тільки додати ці дві нерівності до рівності

$$a^3+b^3+c^3 = a\cdot a^2+b\cdot b^2+c\cdot c^2.$$

4. *Принцип крайнього.*

При доведенні окремих нерівностей доцільно розглянути найбільші чи найменші елементи, які входять до них, або кілька з них.

Задача. $a_1, a_2, \ldots a_{2010}$ – натуральні числа, $b_1, b_2, \ldots, b_{2010}$ – їх довільна перестановка. Доведіть, що

$$1 < \frac{a_1}{a_1+b_1} + \frac{a_2}{a_2+b_2} + \ldots + \frac{a_{2010}}{a_{2010}+b_{2010}} < 2009.$$

Розв'язання. Якщо a_k та a_m – два найменші з цих чисел, то

$$\frac{a_k}{a_k+b_k} + \frac{a_m}{a_m+b_m} - 1 = \frac{a_k a_m - b_k b_m}{(a_k+b_k)(a_m+b_m)} \le 0,\ \ \frac{a_k}{a_k+b_k} + \frac{a_m}{a_m+b_m} \le 1.$$

Але кожен з решти 2008 доданків менший від 1. Тому й сума всіх 2010 доданків менша 2009. Якщо ж a_k та a_m – два найбільші елементи, то

$$\frac{a_k}{a_k+b_k} + \frac{a_m}{a_m+b_m} \ge 1.$$

Оскільки решта доданків додатні, то вся сума більша, ніж 1.

5. *Опуклість графіка функції.*

Функція $y = f(x)$ називається опуклою вгору на відрізку $[a,b]$, якщо $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для будь-яких точок $x_1, x_2 \in [a,b]$. Відповідно, функція опукла вниз на $[a,b]$, якщо знак цієї нерівності є протилежним. Інакше, хорда, яка з'єднує точки з абсцисами x_1 та x_2 на графіку опуклої вгору (вниз) функції, знаходиться не вище (не нижче) графіка цієї функції на проміжку $[x_1; x_2]$.

Задача. Доведіть нерівність $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$.

Розв'язання. З опуклості функції $y = x^4$ вниз випливає, що $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \le \frac{a^4 + b^4}{2}$ для всіх $a, b \in R.$ Залишилось тільки помножити обидві частини цієї нерівності на 16.

6. *Нерівність Єнсена.*

Зауважимо, що коли функція $f(x)$ на $[a,b]$ опукла вгору, то

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

для будь-яких точок $x_1, x_2, ..., x_n$ з цього відрізка (*нерівність Єнсена*). Для опуклої вниз функції знак цієї нерівності змінюється на протилежний.

Задача. Доведіть, що для кутів трикутника ABC виконується нерівність $\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Розв'язання. Оскільки функція $y = \sin x$ на відрізку $[0;\pi].$ опукла вгору, то за нерівністю Єнсена маємо:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси просто отримуємо потрібну нерівність.

7. *Використання векторів для доведення нерівностей.*

Розглянемо вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n),$ $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ і позначимо через $(\vec{a}, \vec{b})$ їх скалярний добуток, тобто число $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n,$ а через $|\vec{a}|,$ $|\vec{b}|$ – – їх довжини $\left(|\vec{x}| = \sqrt{\left(\vec{x}, \vec{x}\right)}\right).$

Тоді за нерівністю Коші-Буняковського $|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$ Така форма її запису дає змогу застосовувати вектори для доведення нерівностей.

Задача. Нехай $a + b + c = 1$ Доведіть, що, $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} + \sqrt{2c+1} \le \sqrt{15}$ для всіх допустимих значень $a, b, c.$

Розв'язання. Нехай $\vec{x} = \left(\sqrt{2a+1}, \sqrt{2b+1}, \sqrt{2c+1}\right),$ $\vec{y} = (1,1,1).$

Тоді

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}=$$

$$=(\vec{x},\vec{y})\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|=\sqrt{(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}.$$

8. *<u>Використання теореми косинусів.</u>*

<u>Задача.</u> Знайдіть найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}.$$

Розв'язання. Вираз набуває найменшого значення при невід'ємних x. Запишемо його у вигляді

$$\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos 60^0+1^2}+\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 60^0+2^2}.$$

Нехай $CA=1,\ CB=2,\ \angle ACB=120^0,\ \angle ACX=\angle BCX=60^0,\ CX=x.$ Тоді за теоремою косинусів отримуємо

$$\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-2x+4}=AX+BX\ge AB=\sqrt{7}.$$

причому рівність досягається, якщо точка X лежить на відрізку AB. Отже, найменшим значенням даного виразу є число $\sqrt{7}$.

9. *<u>Тригонометричні підстановки.</u>*

<u>Задача.</u> $a^2+b^2=c^2+d^2=1.$ Доведіть, що $ac+bd\le 1.$

Розв'язання. Позначимо $a=\cos\alpha,\ \ b=\sin\alpha,\ \ c=\cos\beta,\ \ d=\sin\beta.$ Тоді отримуємо очевидну нерівність

$$ac+bd=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)\le 1.$$

10. *<u>Використання нерівностей для площ та об'ємів.</u>*

<u>Задача.</u> Числа x,y,z належать інтервалу $(0,1)$. Доведіть нерівності: а) $x(1-y)+y(1-x)<1,$ б) $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$

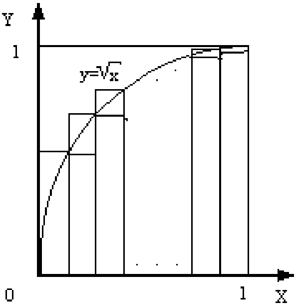
Розв'язання.

а). Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо дві його суміжні сторони на відрізки з довжинами $x,1-x$ та $y,1-y$ відповідно. Прямі, проведені через точки поділу, розіб'ють квадрат на чотири прямокутники, площі двох з яких чисельно дорівнюють доданкам лівої частини нерівності. А отже, їх сума менша, ніж площа всього квадрата, тобто менша від одиниці.

б). Достатньо записати нерівність у вигляді $x\cdot(1-y)\cdot 1+1\cdot y\cdot(1-z)+(1-x)\cdot 1\cdot z<1$ і потрактувати доданки її лівої частини як об'єми трьох прямокутних паралелепіпедів, поміщених у куб з ребром 1 так, щоб їх ребра з довжиною 1 були попарно перпендикулярними.

11. *Використання інтегралів для доведення нерівностей.*

Задача. Доведіть нерівність $0 < \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} - \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{2n}.$



Мал. 9

Розв'язання. Розглянемо на відрізку [0;1] функцію $y=\sqrt{x}$. Розіб'ємо цей відрізок на n рівних частин, довжина кожної з яких дорівнює $\dfrac{1}{n}$. Тоді

$$\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}y\left(\frac{1}{n}\right), \ \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}y\left(\frac{2}{n}\right), ...,$$

$\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}y\left(\dfrac{n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}y(1).$ Отже, сума $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ дорівнює сумі площ виділених на малюнку прямокутників, основи яких дорівнюють $\dfrac{1}{n}$. З допомогою інтегрального числення можна встановити, що площа фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=0$ та $x=1$, дорівнює $\dfrac{2}{3}$. Звідси безпосередньо випливає справедливість лівої частини нерівності. Оскільки ж проекції на вісь Oy тих криволінійних трикутників, які знаходяться вище параболи $y=\sqrt{x}$, не перетинаються, то їх загальна площа не перевищує площі одного прямокутника з основою $\dfrac{1}{n}$ та висотою 1. А, враховуючи опуклість функції $y=\sqrt{x}$ вгору, отримаємо, що у кожному з прямокутників, в яких парабола проходить через протилежні вершини, площа тієї частини, яка знаходиться над параболою, менша половини площі відповідного прямокутника. Звідси випливає справедливість другої частини нерівності.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Доведіть нерівності: а) $e^x \geq 1+x$; б) $\cos x \geq 1-\dfrac{x^2}{2}$.

2. Для довільних дійсних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$abc^2 + bca^2 + cab^2 \le a^4 + b^4 + c^4.$$

3. Доведіть, що

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ge \sqrt{\left(a_1 + \ldots + a_n\right)^2 + \left(b_1 + \ldots + b_n\right)^2}.$$

4. Доведіть, що для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n,\ n > 1,$ таких, що $a_1 a_2 \ldots a_n = 1,$ виконується нерівність $\dfrac{1}{1+a_1} + \dfrac{1}{1+a_2} + \ldots + \dfrac{1}{1+a_n} \le n - 1.$

5. Доведіть нерівність

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Заняття №13.

Відрізки, кути, вписані кути.

При розв'язуванні багатьох олімпіадних задач доводиться мати справу з обчисленням чи порівнянням довжин відрізків або величин кутів. Зупинимося на основних ідеях, які використовуються при розв'язуванні таких задач.

1. *<u>Використання теореми Фалеса.</u>*

<u>Задача.</u> Пряма AK ділить медіану BM трикутника ABC пополам. У якому відношенні вона ділить сторону BC?

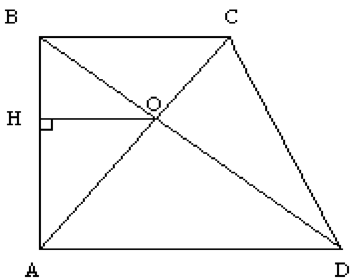
Розв'язання. Проведемо через точку M пряму $MN \parallel AK$, $\left(N \in BC,\, K \in BC\right)$. Оскільки $AM = MC$, то $KN = NC$. Нехай P – точка перетину прямих AK та BM. Оскільки $BM = PM$, то $BK = KN$. Отже, AK ділить BC у відношенні $BK : KC = 1 : 2$.

Зауважимо, що якщо $AM : MC = m : n$, $BP : PM = p : q$, то $BK : KC = pm : q\left(m+n\right)$. Для доведення покладіть $KN = qx = my$ і знайдіть довжини відрізків BK та NC, врахувавши, що за теоремою Фалеса $KN : NC = AM : MC = m : n$, $BK : KN = BP : PM = p : q$.

2. *<u>Метод виключення допоміжних величин.</u>*

В багатьох задачах при порівнянні відповідних елементів подібних фігур доводиться мати справу з відрізками, довжини яких нам не відомі. Але часто і вони з успіхом можуть бути використані на проміжних етапах розв'язання, а потім виключені з розгляду.

<u>Задача.</u> Основи прямокутної трапеції дорівнюють a та b. Доведіть, що відстань від точки перетину діагоналей до меншої бічної сторони не залежить від висоти трапеції. Знайдіть цю відстань.



Мал. 10

Розв'язання. Нехай $AD = a$, $BC = b$, $AB \perp AD$, O – точка перетину діагоналей AC та BD, $OH \perp AB$ (див. мал. 10). Зрозуміло, що OH – шукана відстань, бо $AB < CD$. Врахуємо, що $\Delta AOH \sim \Delta ACB$, $\Delta BOH \sim \Delta BDA$, звідки $\dfrac{HO}{BC}=\dfrac{AH}{AB}$, $\dfrac{HO}{AD}=\dfrac{BH}{AB}$. Додавши ці рівності, одержимо $\dfrac{OH}{BC}+\dfrac{OH}{AD}=\dfrac{AH+BH}{AB}$, тобто $OH\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=1$. Звідси $OH=\dfrac{ab}{a+b}$.

Зрозуміло, що відстань OH тут не залежить від висоти трапеції. Звертаємо увагу читачів на те, що при розв'язуванні задачі ми мали справу аж з трьома невідомими довжинами AH, BH та AB. Але їх всіх успішно вдалося виключити.

3. *<u>Заміна задачі рівносильною задачею.</u>*

При розв'язуванні багатьох геометричних задач плідною є і наступна ідея: побачивши деяку закономірність, спробувати замінити пропоновану задачу рівносильною їй задачею, розв'язати яку буде простіше.

<u>Задача.</u> На сторонах AB та AC трикутника ABC вибрали відповідно точки K_n та M_n так, що $AB=n\cdot AK_n$, $AC=(n+1)\cdot AM_n$. Доведіть, що всі прямі K_nM_n перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нескладно зауважити, що прямі K_1M_1 та K_2M_2 перетинаються у вершині D паралелограма $ABCD$. Тому для розв'язування даної задачі достатньо довести, що при кожному n прямі K_nD проходять через точки M_n відповідно. Нехай P_n – точки перетину цих прямих із прямою AC. З подібності трикутників AK_nP_n та CDP_n випливає, що $AP_n:P_nC=AK_n:DC=AK_n:AB=1:n$, тобто $AP_n:AC=1:(n+1)$. Отже, точки P_n та M_n співпадають. Тому всі прямі K_nM_n проходять через точку D.

4. *<u>Представлення відрізка сумою чи різницею відрізків.</u>*

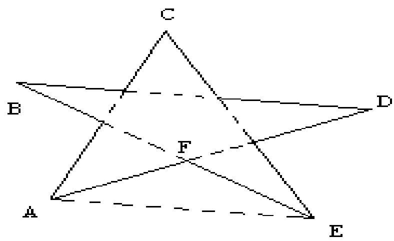
<u>Задача.</u> Нехай CK – бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $AC\cdot BC-AK\cdot BK=CK^2$.

Розв'язання. Продовжимо CK до перетину з описаним навколо ABC колом у точці D і скористаємося рівністю $AK\cdot BK=CK\cdot KD$ для відрізків хорд цього кола. З подібності трикутників KCB та ACD випливає, що $CK:AC=BC:CD$, тобто $AC\cdot BC=CK\cdot CD$. Віднімаючи тепер від цієї рівності отриману вище рівність, і враховуючи, що $CK=CD-KD$, одержуємо справедливість твердження задачі.

Проаналізуємо, за рахунок чого тут вдалося добитися бажаного результату. По суті, ми записали пропоновану для доведення рівність у вигляді $AC \cdot BC - AK \cdot BK = CK \cdot CD - CK \cdot KD,$ вибравши відповідним чином точку D, а потім обґрунтували, що відповідні пари добутків у лівій правій частинах отриманої рівності рівні між собою. Оскільки зліва був знак мінус, то точку D довелося взяти поза відрізком CK. У випадку аналогічної задачі зі знаком плюс точку D треба вибирати всередині цього відрізка, причому так, щоб отримати відповідну пару подібних трикутників. Пропонуємо читачам самостійно скористатися цією ідеєю при доведенні сформульованої нижче теореми Птоломея.

5. ***<u>Обчислення суми кутів.</u>***

<u>Задача.</u> Знайдіть суму кутів при вершинах п'ятикутної зірочки, зображеної на малюнку 11.



Мал.11

Розв'язання. Зрозуміло, що можна було б просто виміряти величину кожного із кутів і додати одержані значення. Але таким чином потрібну суму ми зможемо одержати лише наближено, що не може вважатися розв'язанням. Тому поступимо інакше. З'єднаємо точки A та E і позначимо через F точку перетину відрізків AD та BE. Оскільки $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180°$, $\angle FAE + \angle FEA + \angle AFE = 180°$, $\angle AFE = \angle BFD$, то $\angle B + \angle D = \angle FAE + \angle FEA$. Отже, отримуємо $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + CAE + \angle CEA = 180°$.

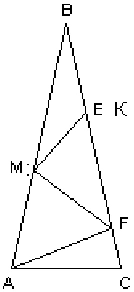
Таким чином, для розв'язування задачі нам вистачило лише знання суми кутів трикутника та рівності вертикальних кутів. Але не всі задачі є такими простими, як це може здатися на перший погляд при читанні їх умов.

6. ***<u>Спочатку поміряємо кут транспортиром.</u>***

Іноді при розв'язуванні олімпіадних задач, пов'язаних зі знаходженням кутів, буває корисним знання правильної відповіді, що дає змогу замінити пропоновану задачу рівносильною задачею, яку розв'язувати легше. Таку відповідь можна отримати просто помірявши потрібний кут транспортиром.

<u>Задача.</u> На сторонах AB та BC рівнобедреного трикутника ABC з кутом 20^0 при вершині B вибрали відповідно точки M та

K так, що $AM = BK = AC.$ Знайдіть величину кута BMK у градусах.



Мал. 12

Розв'язання. Спочатку поміряємо потрібний нам кут транспортиром, а потім доведемо, що справді $\angle BMK = 20^0.$ Для цього відкладемо на стороні BC точки E та F так, щоб $\angle BME = \angle CAF = 20°$ (див. мал. 12). Тоді $\angle MEF = 40^0,$ $\angle AFC = \angle ACF = 80^0,$ $AC = AF.$ Також $\angle MAF = 60°,$ отже, трикутник AMF рівносторонній. Оскільки тепер легко знайти $\angle MFE = 40^0,$ то $ME = MF.$ Отже, встановимо, що $BE = ME = MF = MA = AC.$ Тому $BE = BK,$ $\angle BMK = \angle BME = 20^0.$

7. ***<u>Вписані кути та описані чотирикутники.</u>***

В багатьох геометричних задачах часто використовується рівність вписаних кутів, які спираються на одну і ту ж дугу кола або ж на рівні дуги цього кола. Зрозуміло, що при цьому і відповідні їм хорди такого кола також будуть рівними між собою. Не завжди потрібне коло буває заданим безпосередньо в умові задачі. Але його легко отримати, якщо врахувати, що чотирикутник може бути вписаним у коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють по 180^0.

<u>Задача.</u> Кут B трикутника ABC дорівнює 60^0. Бісектриси AE та CD перетинаються у точці O. Доведіть, $OE = OD.$

Розв'язання. Оскільки $\angle ABC = 60^0,$ то отримуємо, що $\angle BAC + \angle ACB = 120^0,$ $\angle OAC + \angle OCA = 60^0,$ $\angle AOC = 120^0.$ Отже, $\angle DBE + \angle DOE = 180^0,$ і навколо чотирикутника $BEOD$ можна описати коло. Але $\angle OBE = \angle OBD$, то і хорди OE та OD цього кола також рівні.

8. ***<u>Кут між хордою і дотичною.</u>***

Розглядаючи дотичну, як граничне положення січної, отримаємо, що й кут між хордою і дотичною дорівнює величинам відповідних вписаних кутів, що спираються на дугу, яку стягує ця хорда.

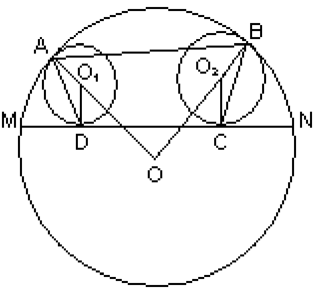
<u>Задача.</u> Побудуйте трикутник, подібний заданому, вписаний у задане коло.

Розв'язання. Нехай кути заданого трикутника дорівнюють $\alpha, \beta, \gamma.$ Проведемо в довільній точці A кола дотичну MN і відкладемо по ту сторону від неї, що і коло, кути $\angle BAM = \gamma,$ $\angle BAC = \alpha,$ $\angle CAN = \beta$. Якщо B та C – точки перетину сторін побудованих кутів з колом, то трикутник ABC – шуканий.

9. ***<u>Доведення рівності кутів за їх складовими частинами.</u>***

Для доведення рівності кутів, так само, як і для доведення рівності відрізків, іноді буває доцільно представити ці кути у вигляді суми чи різниці і довести рівність відповідних складових доданків у таких сумах.

<u>Задача.</u> У колі ω проведена хорда. У сегмент, обмежений дугою кола і цією хордою, вписані два кола. Нехай A, B, C, D – точки їх дотику до кола ω та до проведеної хорди. Доведіть, що ці точки належать одному колу.



Мал. 13

Розв'язання. Нехай $O,$ $O_1,$ O_2 – центри цих кіл, і точки A, D лежать на колі з центром $O_1,$ а точки B, C – на колі з центром O_2 (див. мал. 13). Зауважимо, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA,$ $\angle O_2BC = \angle O_2CB,$ $\angle O_1DC = \angle O_1CD = 90°.$ Тому досить довести, що $\angle O_1AB = \angle O_2BA.$ Але оскільки у точці A дотична є спільною, то радіуси O_1A та OA перпендикулярні до цієї дотичної. Аналогічно O_2B та OB перпендикулярні до дотичної у точці $B.$ Отже, $\angle O_1AB = \angle OAB = \angle OBA = \angle O_2BA.$ Звідси одержуємо, що $\angle ABC + \angle ADC = \angle DAB + \angle DCB,$ а тому точки A, B, C, D лежать на одному колі.

10. ***<u>Використання властивостей бісектриси кута.</u>***

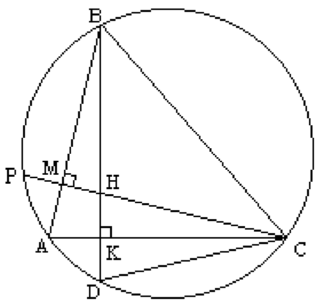
При розв'язуванні задач, пов'язаних з бісектрисами кутів, учні, як правило, користуються лише тим, що бісектриса ділить кут пополам. Тому пропонуємо вам звернути увагу на ще одну цікаву властивість бісектриси: точка X лежить на бісектрисі кута тоді і тільки тоді, коли вона рівновіддалена від сторін цього кута.

Задача. На стороні BC трикутника ABC вибрали точку D так, що $\angle DAC = \angle ABC + \angle ACB.$ Відомо, що $BK -$ бісектриса цього трикутника. Доведіть, що $DK -$ бісектриса трикутника $ADC.$

Розв'язання. Оскільки точка лежить на бісектрисі кута $ABC,$ то вона рівновіддалена від променів BA та $BC.$ Позначимо на продовженні сторони BA поза точку A довільну точку $M.$ За властивістю зовнішнього кута трикутника з врахуванням умови задачі отримаємо, що $\angle DAC = \angle MAC.$ Отже, $AK -$бісектриса кута $DAM.$ Тому точка K рівновіддалена від променів AM та $AD.$ Але в такому разі ця точка рівновіддалена і від променів DA та $DC.$ А отже, вона лежить на бісектрисі кута $ADC,$ що й слід було довести.

11. *Властивість точки перетину висот трикутника.*

Задача. Доведіть, що точки, симетричні до точки перетину висот трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо цього трикутника.



Мал. 14

Розв'язання. Нехай $H -$ точка перетину висот трикутника $ABC,$ $CM \perp AB,$ $BK \perp AC,$ P і $D -$ точки перетину прямих CM і BD відповідно з описаним колом (див. мал. 14). Тоді $\Delta ABK \sim \Delta ACM$ (як прямокутні зі спільним кутом A). Отже, $\angle ABD = \angle ACP$ $\Rightarrow$ $\cup AP = \cup AD$ $\Rightarrow$ $\angle PCA = \angle DCA.$ Тому CK є одночасно висотою і бісектрисою трикутника $HCD,$ тобто точка D симетрична до H відносно сторони $AC.$ Аналогічно доводиться, що точка P симетрична до H відносно $AB.$

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Дві прямі, проведені через вершину A паралелограма $ABCD,$ ділять його діагональ BD на три рівні відрізки з довжинами $2\textit{см}.$ Знайдіть відстань між точками, в яких одна з цих прямих перетинає сторону $BC,$ а друга – сторону $CD.$

2. Кут A трикутника ABC втричі більший кута $C.$ На стороні BC вибрали точку E так, що $\angle AEC = 2\angle ACB.$ Доведіть, що $AB + AE = BC.$

3. У трикутнику ABC довжина медіани BM дорівнює довжині сторони AC. На прямих AB та AC взяли точки D та E відповідно так, що вони відмінні від точок B та M і $AD = AB$, $CE = CM$. Знайдіть величину кута між прямими DM і BE.

4. Доведіть, що сума добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника дорівнює добутку його діагоналей (*теорема Птоломея*).

5. У трикутнику ABC, в якому $\angle ABC = 120^0$, провели бісектриси AA_1, BB_1, CC_1. Знайдіть величину кута $A_1B_1C_1$.

Заняття №14.

Площа фігури. Перерозподіл площ

Поняття площі фігури відноситься до найдавніших понять, з якими довелося стикатися людям у своїх практичних потребах. Зупинимося на деяких ідеях, пов'язаних з використанням властивостей площ при розв'язуванні олімпіадних задач.

1. ***<u>Медіани трикутника і зв'язані з ними площі.</u>***

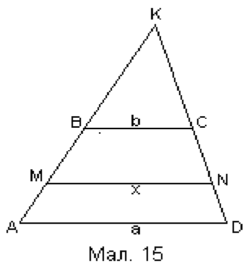
Оскільки медіана поділяє сторону трикутника пополам, то вона ділитиме пополам і площу цього трикутника. А враховуючи, що медіани точкою їх перетину діляться у відношенні $2:1$, легко одержимо, що вони ділять площу трикутника на 6 рівних частин.

<u>Задача.</u> Знайдіть відношення площі трикутника ABC до площі трикутника, сторони якого дорівнюють медіанам трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай медіани трикутника ABC перетинаються у точці M. Продовжимо медіану BK до точки D так, щоб $MK = KD$. Тоді чотирикутник $AMCD$ буде паралелограмом. Враховуючи, що $BM = MD$, $MC = AD$, отримуємо трикутник AMD, сторони якого відповідно дорівнюють двом третинам довжин медіан трикутника ABC. Оскільки його можна скласти із двох частинок, на які медіани розбивають трикутник ABC, а саме із AMK та CMK, то $S_{\vartriangle ABC} : S_{\vartriangle AMD} = 3.$ Тому таке відношення площ дорівнює $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}.$

2. ***<u>Відношення площ подібних фігур.</u>***

При розв'язуванні попередньої задачі ми врахували, що площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних лінійних розмірів цих фігур. А ось ще один цікавий приклад такого роду.



Мал. 15

<u>Задача.</u> Відрізок MN, паралельний до основ трапеції, ділить її площу пополам. Виразіть довжину цього відрізка через довжини основ трапеції.

Розв'язання. Продовжимо сторони AB та CD трапеції $ABCD$ до перетину у точці K (див. мал. 15). Тоді $S_{\Delta BKC} = kb^2$, $S_{\Delta MKN} = kx^2$, $S_{\Delta AKD} = ka^2$ при деякому k.

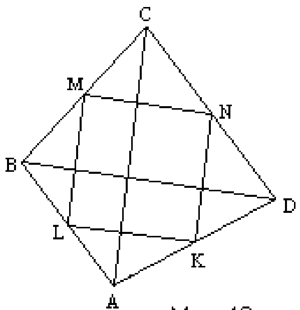
Тому $kx^2 - kb^2 = ka^2 - kx^2$. Отже, $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

3. *<u>Обчислення шуканої площі через площу іншої фігури.</u>*

Іноді при обчисленні площі фігури буває доцільним виразити її через відому площу іншої фігури.

<u>Задача.</u> Діагоналі опуклого чотирикутника рівні між собою. Доведіть, що площа цього чотирикутника дорівнює добутку його середніх ліній.

Розв'язання. Враховуючи властивості середніх ліній відповідних трикутників, нескладно довести, що чотирикутник $MNKL$ є ромбом (див. мал. 16). Справді, його протилежні сторони попарно дорівнюють половинам відповідних діагоналей, а тому всі вони також рівні між собою. Оскільки ж площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей, а площа чотирикутника $ABCD$ вдвічі більша площі чотирикутника $MNKL$ (подумайте, чому), то звідси і випливає твердження задачі.

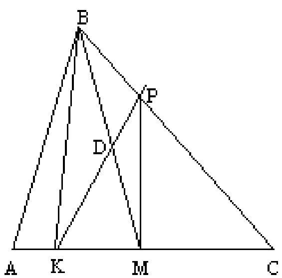


Мал. 16

4. *<u>Перерозподіл площ.</u>*

При дослідженні об'єктів, площі яких повинні мати певну властивість, доцільно порівняти їх з фігурами, для яких вказана властивість площ є очевидною.

<u>Задача.</u> Через точку K на стороні трикутника проведіть пряму, яка ділить площу цього трикутника пополам.



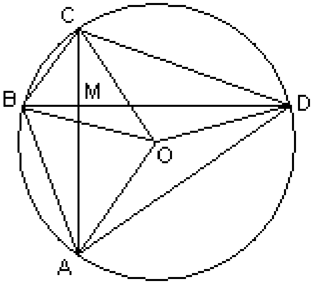
Мал. 17

Розв'язання. Якщо, наприклад, K – середина сторони AC, то медіана BK ділить площу трикутника ABC пополам. Нехай тепер K не є серединою AC (див. мал. 17). Проведемо медіану BM. Тоді $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$. Припустимо, що пряма KP ділить площу трикутника ABC пополам і перетинає медіану BM у точці D. Тоді повинна виконуватись рівність $S_{\Delta KDM} = S_{\Delta BDP}$. Така рівність (подумайте, чому) неодмінно буде виконуватися, якщо $MP \parallel KB$, що й дає нам спосіб для побудови прямої KP. Така пряма єдина, бо якщо точки P та P_1 не співпадають, то не можуть площі фігур, які відрізняються одна від одної на $S_{\Delta KPP_1}$, одночасно дорівнювати половині площі трикутника ABC.

5. *<u>Рівність площ як рівність їх складових.</u>*

У багатьох задачах для доведення рівності площ фігур буде корисно представити кожну з цих фігур як об'єднання їх складових частинок і порівняти площі відповідних складових.

<u>Задача.</u> Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$, вписаного у коло з центром O, перпендикулярні. Доведіть, що ламана AOC ділить його площу пополам.



Мал. 18

Розв'язання. Оскільки вписані кути, які спираються на дуги $AB, BC, CD, DA,-$ гострі (див мал. 18), то O лежить всередині чотирикутника $ABCD$. Оскільки $\angle BAM + \angle ABM = 90°$, то

$$S_{\Delta BCO} = \frac{1}{2}R^2 \sin\angle BOC = \frac{1}{2}R^2 \sin 2\angle BAC =$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \sin 2\angle ABD = \frac{1}{2}R^2 \sin\angle AOD = S_{\Delta ADO}.$$

Аналогічно доводимо, що $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO}$.

6. *<u>Площа як допоміжний засіб.</u>*

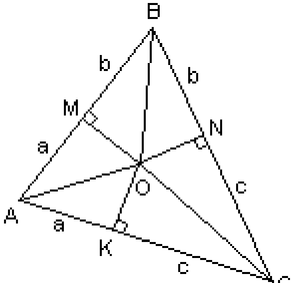
<u>Задача.</u> Доведіть, що якщо всі кути опуклого многокутника рівні, то суми відстаней від довільної його внутрішньої точки до прямих, на яких лежать сторони цього многокутника, є однаковими.

Розв'язання. Побудуємо на найбільшій стороні заданого многокутника правильний многокутник, сторона якого співпадає з цією найбільшою стороною, так, щоб заданий многокутник опинився всередині побудованого. Довільну внутрішню точку заданого спочатку многокутника з'єднаємо з вершинами побудованого многокутника. Оскільки сума площ отриманих при цьому трикутників дорівнює площі побудованого многокутника, то сума їх висот, опущених з вибраної точки, дорівнюватиме сталій величині, а саме – подвоєній площі многокутника, поділеній на довжину його сторони. Зрозуміло, що сума відстаней, про які йде мова в задачі, відрізняється від такої суми висот теж на сталу величину, а саме – на суму відстаней між відповідними паралельними сторонами заданого і побудованого многокутників.

7. *Площа і радіус вписаного кола.*

Використовуючи подібні міркування до тих, які ми мали у попередній задачі, для центра вписаного кола, приходимо до відомої рівності: $S = pr$.

Задача. Знайдіть висоту дерева, якщо його з відстаней a, b, c видно під кутами, сума яких дорівнює 90^0.



Мал. 19

Розв'язання. Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, то $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$. Отже, висоту цього дерева можна трактувати як радіус вписаного кола у трикутник зі сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$ (див. мал. 19). Отже, $h = r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$.

Тут площа S знайдена за формулою Герона.

8. *Площа і радіус описаного кола.*

Для трикутників часто використовують також залежність між площею, сторонами та радіусом описаного кола: $S = \frac{abc}{4R}$.

Задача. Висоти трикутника ABC перетинаються у точці H. Позначимо $AH = x, BH = y, CH = z$. Доведіть, що $abc = ayz + bzx + cxy$.

Розв'язання. Враховуючи, що точки, симетричні до H відносно сторін трикутника, лежать на описаному колі (про це йшла мова на попередньому занятті), легко довести, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC, AHB, BHC та CHA, рівні між собою. Оскільки ж площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AHB, BHC та CHA, то $\frac{abc}{4R} = \frac{ayz}{4R} + \frac{bzx}{4R} + \frac{cxy}{4R}$, звідки й випливає потрібна рівність.

9. *Площа і відношення відстаней.*

Площі фігур зручно використовувати як допоміжний елемент і для знаходження лінійних відношень. Для цього, зокрема, доцільно розглядати площі трикутників, у яких або основи, або ж висоти відповідно рівні між собою.

Задача. Всередині трикутника ABC взяли точку P. Прямі AP, BP та CP перетинають сторони трикутника у точках A_1, B_1 та C_1

відповідно. Доведіть, що $\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=1.$

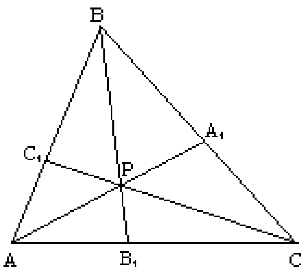
Розв'язання. Справді (див. мал. 20),

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}=\frac{S_{\vartriangle BPC}}{S_{\vartriangle ABC}}+\frac{S_{\vartriangle APC}}{S_{\vartriangle ABC}}+\frac{S_{\vartriangle APB}}{S_{\vartriangle ABC}}=1.$$

10. *Теорема Чеви.*

При розв'язуванні багатьох задач часто враховують, що відповідно медіани, висоти, бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. Але в одній точці всередині трикутника можуть перетинатися й інші відрізки, які виходять з вершин цього трикутника.

Задача. Доведіть, що для того, щоб відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці всередині трикутника ABC, необхідно і достатньо, щоб $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$ (*теорема Чеви*).



Мал. 20

Розв'язання. Припустимо, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці P (див. мал. 20). Тоді

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{\Delta APB_1}}{S_{\Delta B_1PC}}=\frac{S_{\Delta ABB_1}}{S_{\Delta B_1BC}}=\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta BPC}}.$$

Аналогічно встановлюємо, що

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta APB}},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{S_{\Delta BPC}}{S_{\Delta APC}}.$$

Отже, $$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \quad (*)$$

Відзначимо, що і навпаки з виконання рівності (*) випливає, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Дійсно, нехай рівність (*) виконується і AA_1, BB_1 перетинаються в точці P. Проведемо через точку P відрізок CC_2. Тоді також $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1.$ Звідси і з рівності (*) випливає, що $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC_2}{C_2A}$, тобто $C_1=C_2$. Тому CC_1 теж проходить через P.

Пропонуємо читачам самостійно довести з допомогою теореми Чеви, що відповідно медіани, висоти, бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

11. ***Площі криволінійних фігур.***

Цікаві задачі, пов'язані з площами, можуть виникати і при розгляді криволінійних фігур. Ось приклад однієї з них, яка ще раз ілюструє використання ідеї перерозподілу площ.

Задача. Задано еліпс з довжинами осей $2a$ та $2b$. Намалюйте замкнену криву, довжина якої дорівнює довжині еліпса, але площа якої на $(a-b)^2$ більша, ніж площа еліпса.

Розв'язання. Розріжемо еліпс вздовж його осей на чотири рівні частинки. Склавши їх так, щоб вони обмежували всередині квадрат зі стороною $|a-b|$, ми отримаємо шукану фігуру.

Варто зауважити, що, хоч площа еліпса нам відома (вона дорівнює πab), при спробі розв'язувати задачу іншим способом у нас виникли би досить суттєві проблеми з порівнянням довжин кривих.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. На сторонах AB та BC трикутника ABC вибрали відповідно точки E та F так, що відрізки AF та CE перетинаються на медіані BM. Доведіть, що площі трикутників ACE та ACF рівні.

2. Через вершину опуклого чотирикутника проведіть пряму, яка ділить його площу пополам.

3. Через точку M всередині трикутника ABC проведено прямі, паралельні сторонам трикутника. Вони розбивають трикутник на 6 частин, з яких 3 частини є трикутниками, площі яких дорівнюють S_1, S_2 та S_3. Знайдіть площу трикутника ABC.

4. а) На продовженнях сторін трикутника ABC взяли точки A_1, B_1, C_1 так, що $\vec{AB_1} = 2\vec{AB}$, $\vec{BC_1} = 2\vec{BC}$, $\vec{CA_1} = 2\vec{CA}$. Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$ якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

б) Сформулюйте і розв'яжіть аналогічну задачу для опуклого чотирикутника $ABCD$.

5. Довжини сторін трикутника дорівнюють $30\,см$, $45\,см$ та $60\,см$. Кожну сторону поділили на 15 рівних частин. Точки поділу з'єднали відрізками із протилежними вершинами. Доведіть, що всередині цього трикутника існують точки, в яких перетинаються по три з проведених відрізків.

Заняття №15.

Геометричні нерівності. Принцип крайнього

1. ***Нерівність трикутника.***

Однією з найпростіших геометричних нерівностей є так звана нерівність трикутника: сума довжин будь-яких двох сторін трикутника більша від довжини його третьої сторони.

Задача. Для сторін довільного трикутника доведіть нерівність $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$. Чи завжди з відрізків, які задовольняють цю нерівність, вдасться скласти трикутник?

Розв'язання. Оскільки $0<a<b+c,\ 0<b<c+a,\ 0<c<a+b,$ то $a^2<a(b+c),\ b^2<b(a+c),\ c^2<c(a+b).$ Залишається лише додати три останні нерівності. Проте з того, що довжини відрізків задовольняють вказану нерівність, ще не випливає, що з таких відрізків вдасться скласти трикутник. Наприклад, трикутника зі сторонами $a=b=1, c=3$ не існує.

2. ***Метод альтернативи.***

З нерівністю трикутника тісно пов'язане і розв'язання наступної задачі. Але тут допускається також можливість перетворення строгої нерівності в рівність.

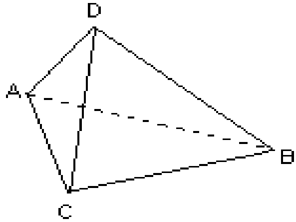
Задача. Всередині кола з радіусом 1 довільним чином вибрали 2010 точок. Доведіть, що на колі існує така точка, сума відстаней від якої до вибраних точок не менша 2010.

Розв'язання. Нехай M та N – дві діаметрально протилежні точки на колі. Тоді $MN=2$. А отже, для будь-якої точки A із заданих 2010 точок виконуватиметься нерівність $MA+AN\geq 2.$ Додавши ці нерівності, одержимо, що сума відстаней від вибраних точок до точок M та N не менша, ніж 4020. Тому хоч до однієї з цих точок сума відстаней не менша від 2010.

3. ***Нерівність трикутника та метод альтернативи для просторових фігур.***

Ідея альтернативи може бути використана і при дослідженні просторових об'єктів.

Задача. Доведіть, що у довільному тетраедрі знайдеться така вершина, що із ребер, які виходять з неї, можна скласти трикутник.



Мал. 21

Розв'язання. Нехай для конкретності $AB-$ найбільше ребро тетраедра $ABCD$ (див. мал. 21). Тоді

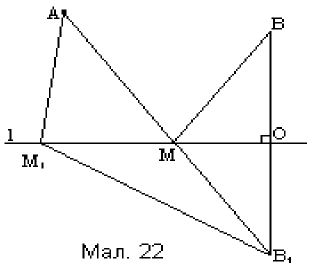
$$\left(AD+AC-AB\right)+\left(BD+BC-BA\right)=$$
$$=\left(AD+BD-AB\right)+\left(AC+BC-AB\right)>0.$$

Отже, принаймні одна з нерівностей $AD+AC>AB$ чи $BD+BC>BA$ виконується. Оскільки $AB-$ найбільше ребро, то або вершина $A,$ або вершина B є шуканою.

4. *Нерівність трикутника у задачах про найменше значення.*

Із геометричними нерівностями тісно пов'язані задачі на найбільше та найменше значення. Але в таких задачах необхідно не лише довести відповідну нерівність, а й показати, що вона може за певних умов перетворюватися в рівність.

Задача. Задана пряма і дві точки з однієї сторони від неї. Знайдіть на цій прямій таку точку $M,$ щоб сума відстаней від неї до заданих точок була найменшою.



Мал. 22

Розв'язання. Нехай точка B_1- симетрична до точки B відносно заданої прямої $l,$ а відрізок AB_1 перетинає пряму l в точці M (див. мал. 22). Тоді $AM+BM=AM+MB_1=AB_1.$ Оскільки для всякої іншої точки M_1 цієї прямої виконується нерівність $AM_1+M_1B=AM_1+M_1B_1>AB_1,$ то точка $M-$ шукана.

5. *Нерівності для інших елементів трикутника.*

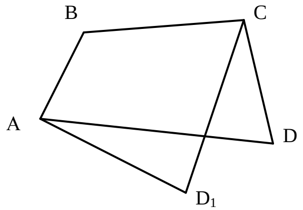
Цікаві нерівності можна отримати не лише для сторін, але й для інших елементів трикутника. Наприклад, для висот, медіан, бісектрис тощо. Детальніше зупинимося на співвідношенні радіусів вписаного та описаного кіл

Задача. Доведіть, що для радіусів описаного і вписаного кіл для трикутника ABC виконується нерівність $R\geq 2r.$

Розв'язання. Скористаємося відомою формулою Ейлера для відстані між центрами описаного та вписаного кіл: $OI^2=R^2-2Rr.$ Оскільки ліва частина цієї рівності невід'ємна, то звідси зразу випливає твердження задачі.

6. *Нерівності для площ.*

Важливу роль відіграють і нерівності, пов'язані з площами. Зокрема, в наступній задачі скористаємося вже відомою вам з попередньої статті ідеєю перерозподілу площ.



Мал. 23

Задача. Для сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ і його площі доведіть нерівність

$$(AB+BC)(CD+DA)\geq 4S.$$

Розв'язання. Легко побачити, що виконується нерівність

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}\leq \frac{1}{2}AB\cdot AD+\frac{1}{2}BC\cdot CD.$$

Побудуємо тепер точку D_1 так, щоб $AD_1=CD,\quad CD_1=AD$ (див. мал. 23). Тоді отримаємо, що

$$S_{ABCD}=S_{ABCD_1}=S_{\Delta ABD_1}+S_{\Delta BCD_1}\leq \frac{1}{2}AB\cdot AD_1+\frac{1}{2}BC\cdot CD_1=$$

$=\dfrac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD).$ Додавши ці нерівності, приходимо до справедливості твердження задачі.

7. *Площа як допоміжний засіб при доведенні нерівностей.*

Площа може виступати і як допоміжний елемент при доведенні нерівностей, пов'язаних з іншими елементами геометричних фігур.

Задача. Доведіть, що для висот трикутника і радіуса вписаного у нього кола виконується нерівність $h_a+h_b+h_c\geq 9r.$

Розв'язання. Скориставшись відомими формулами для площі трикутника, перепишемо задану нерівність у вигляді

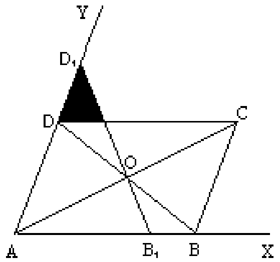
$$\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\geq 9\cdot\frac{2S}{a+b+c}.$$

Справедливість останньої випливає з того, що для додатних чисел $a,b,c,$ виконується нерівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=9.$$

8. *Побудова трикутника найменшої площі.*

Задача. Задано плоский кут XAY і точку O всередині нього. Проведіть через O пряму, яка відтинає від цього кута трикутник найменшої площі.



Мал.24

Розв'язання. Проведемо відрізок AC так, щоб точка O була його серединою, і побудуємо паралелограм $ABCD$ (див. мал. 4). Тоді пряма BD буде шуканою. Справді, будь-яка пряма B_1D_1, яка проходить через точку O, ділить паралелограм $ABCD$ на дві рівні, а отже, і рівновеликі фігури. Трикутник AB_1D_1 складається з однієї з цих фігур і ще з деякого трикутника (на мал. 24 – заштрихованого). Тому шукане положення прямої B_1D_1 буде тим, при якому заштрихований трикутник вироджується в точку, тобто – при співпаданні прямої B_1D_1 з прямою BD.

9. *<u>Принцип крайнього (найменша відстань чи кут).</u>*

При розв'язуванні ряду задач буває доцільним виділити деякий найменший чи найбільший з елементів.

<u>Задача.</u> На рівній галявині росло 11 ялинок, всі попарні відстані між якими були різними. Під кожною ялинкою сидів заєць. Коли завив вовк, кожен заєць перебіг до найближчої ялинки. Доведіть, що: а) принаймні під однією ялинкою опинилося не менше двох зайців; б) під жодною ялинкою не опинилося більше 5 зайців.

Розв'язання.

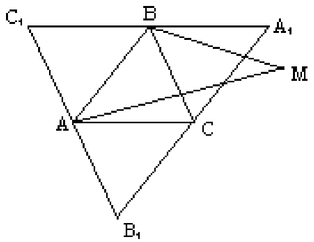
а). Нехай A та $B-$ дві найближчі між собою ялинки. Зрозуміло, що зайці, які були під ними, помінялися місцями. Якщо до однієї з цих ялинок прибіг ще один заєць, то твердження задачі доведене. Якщо ні, то ялинки A та B можна вилучити з розгляду. Міркуючи далі аналогічно, прийдемо вкінці до трьох ялинок. Зрозуміло, що заєць, який був під третьою ялинкою, обов'язково прибіжить або до першої, або другої ялинки, відстань між якими є найкоротшою.

б). Припустимо, що під ялинку A прибігло не менше шести зайців. Виберемо такі дві ялинки B та C, з під яких зайці прибігли до A, щоб кут BAC був найменшим. Тоді такий кут не перевищує 60^0. А отже, враховуючи, що всі попарні відстані були різними, у трикутнику ABC знайдеться кут, більший за 60^0. Але у такому разі сторона напроти цього кута буде більшою за сторону BC. Тому вздовж неї заєць пробігти до ялинки A не міг. Отримане протиріччя доводить, що більше п'яти зайців під однією ялинкою зібратися не могли.

10. *Принцип крайнього (найбільша площа).*

Задача. На площині задано 2010 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Площа довільного трикутника з вершинами у цих точках не перевищує 1. Доведіть, що всі ці точки можна накрити трикутником площа якого дорівнює 4.

Розв'язання. Виберемо з усіх трикутників з вершинами у заданих точках трикутник найбільшої площі. Нехай таким є трикутник ABC: $S_{\Delta ABC} \le 1$ (див. мал. 25). Проведемо через вершини цього трикутника прямі, паралельні до його протилежних сторін. Ці прямі обмежують трикутник $A_1B_1C_1$, площа якого $S_{\Delta A_1B_1C_1} = 4S_{\Delta ABC} \le 4$ (доведіть це самостійно). Припустимо, що деяка із заданих точок лежить поза трикутником $A_1B_1C_1$. Тоді ця точка і принаймні одна зі сторін трикутника ABC лежатимуть по різні боки від паралельної цій стороні сторони трикутника $A_1B_1C_1$. Нехай для визначеності такою є точка M. Оскільки у трикутниках ABC та ABM основа AB спільна, а висота, опущена з M на AB, більша за висоту, опущену з C, то $S_{\Delta ABM} > S_{\Delta ABC}$, що суперечить вибору ABC як трикутника найбільшої площі. Отже, всі 2010 точок знаходяться у трикутнику $A_1B_1C_1$ з площею $S \le 4$. Зрозуміло, що всі ці точки помістяться і в деякому трикутнику з площею $S = 4$.

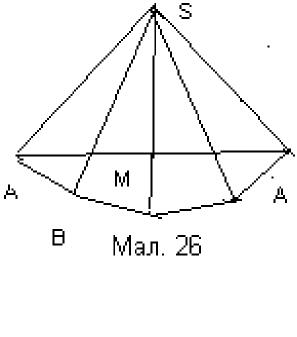


Мал. 25

11. *Нерівності у просторі. Метод розгортки.*

І на завершення розглянемо одну цікаву задачу, пов'язану з нерівностями для відстаней на поверхнях у просторі.

Задача. Довжини сторін основи правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 1*см*, а довжини бічних ребер – 2*см*. Жук почав повзти поверхнею цієї піраміди з точки *A* – перетину бічного ребра з основою піраміди. Побувавши на всіх її бокових гранях, він знову повернувся у точку *A*. Яка найкоротша можлива довжина його шляху?



Мал. 26

Розв'язання. Розглянемо розгортку цієї піраміди (див. мал. 26). З рівнобедреного трикутника *ABS* за теоремою косинусів знаходимо, що $\cos\angle ASB=\frac{7}{8}$. Тоді $\sin\angle ASB=\frac{\sqrt{15}}{8}<\frac{1}{2}$. Тому $\angle ASB<30^0$. Звідси випливає, що малюнок зроблено вірно, оскільки $\angle ASA<180^0$. Отже, шукана найменша довжина його шляху дорівнює довжині відрізка AA і дорівнює $2AM$. Оскільки $\angle ASM=2\angle ASB,$ $\sin\angle ASM=2\sin\angle ASB\cos\angle ASB=\frac{7\sqrt{15}}{32}$, то остаточно знаходимо $AA=2AS\sin\angle ASM=\frac{7\sqrt{15}}{8}$.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Точка A лежить всередині гострого кута O. Побудувати на сторонах цього кута такі точки B та C, щоб периметр трикутника ABC був найменшим.

2. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=BC$, $\angle ABC=110^0$) провели бісектриси AA_1 та BB_1. Доведіть, що $AA_1>2\cdot BB_1$.

3. Дано пряму l і точки A та B поза нею. Знайдіть на l таку точку M, для якої AM^2+BM^2 набуває найменшого значення.

4. Всередині трикутника ABC взяли точку M. Доведіть, що $4S\le AM\cdot BC+BM\cdot AC+CM\cdot AB,$ де $S-$ площа цього трикутника.

5. На площині розташовано 2010 точок, усі попарні відстані між якими різні. Кожну з цих точок з'єднали з найближчою до неї точкою. Дослідіть, чи могла при цьому утворитися замкнена ламана?

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

Заняття №1

1. Ні. Скористайтеся ознакою подільності на 11. **2.** Жодного. Проаналізуйте дільники чисел $c-a$ та $d-b$. **3.** Запишіть рівняння у вигляді $(x-y)\left((x-y)^2+3xy\right)=2010$ і врахуйте, що 2010 ділиться на 3, але не ділиться на 9. **4.** Покладіть $z=1$ і розкладіть отриманий при цьому вираз на множники. **5.** Проаналізуйте остачі від ділення четвертих степенів цілих чисел на число 5.

Заняття №2

1. Проаналізуйте можливі кольори вершин правильного п'ятикутника, вписаного в задане коло. **2.** Розгляньте перші 2010 елементів послідовності 2010, 20102010, 201020102010, … і доведіть, що серед них є такі два, які при діленні на 2009 дають однакові остачі. **3. а)** Так. **б)** Ні. Врахуйте, що $14\cdot 7<100<15\cdot 7$. **4.** Розгляньте довільну точку всередині чотирикутника і доведіть, що з неї хоч одну сторону видно не під гострим кутом. **5.** Розбийте даний прямокутник на три п'ятикутники та два чотирикутники з діаметрами $\sqrt{5}$ кожен.

Заняття №3

1. 24. Виділіть 10 прямокутників 1×2, розташувавши 7 із них по периметру і 3 навколо центрального квадрата 2×2 так, щоб жуки із цих 20 клітинок зайняли 40 різних клітинок дошки. **2.** Ні. Зафарбуйте почергово рядки таблиці у 2 кольори. Тоді клітинок кожного кольору виявиться непарна кількість. **3.** Ні. Виділіть на дні коробки клітинки чорного кольору так, щоб кожна плитка 2×2 покривала рівно одну виділену клітинку, а всяка плитка $4\times 1-$ дві або жодної. **4.** 8. Врахуйте, що із 28 клітинок, які прилягають до краю дошки, 20 не можуть бути вирізаними. **5.** Розфарбуйте зали у два кольори так, щоб кожні два сусідні зали були різного кольору.

Заняття №4

1. Не обов'язково. Наведіть приклад із двома різними числами. **2.** Доведіть, що сума квадратів трійки чисел не змінюється при вказаних перетвореннях. **3.** Прослідкуйте, як змінюється сума квадратів чисел, обернених до x, y. **4.** Нехай точка M знаходиться на дузі AB. Відкладіть на MC точку D так, що $MD=MB$, і доведіть рівність трикутників AMB та CDB. **5.** З'єднайте точку з вершинами тетраедра і порахуйте його об'єм двома способами.

Заняття №5

1. У жодного. Весь час вверх дном стоятиме непарна кількість стаканів. **2.** Може. Для цього він має першим ходом записати цифру на 1 меншу, ніж його суперник, а наступними ходами повторювати цифри, які записує перший гравець. **3.** У другого. Для перемоги йому слід робити ходи, симетричні до ходів суперника відносно центра дошки. **4.** Для перемоги першому гравцеві слід записати -1 перед x, а потім на вільному місці – число, протилежне за знаком до записаного другим гравцем. **5. а).** У другого. Залишати супернику кількість не витертих чисел, кратну трьом. **б).** У першого. Спочатку витерти число 11, а далі грати симетрично до ходів суперника. **в).** У першого. Спочатку витерти число 21, а далі грати з різницею 10 до ходів суперника. **г).** У першого. Спочатку витерти одне число, а потім у кожній парі з двох своїх ходів перший раз витирати одне число, а другим – залишати кількість чисел, кратну 5. **д).** У другого. У кожній парі з двох своїх ходів перший раз витирати два числа, а другим – залишати кількість чисел, кратну 7.

Заняття №6

1. $a\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$. **2.** Міг. Покладіть $p=0$ і порівняйте додатні корені рівнянь $x^2+q=0$ та $0{,}999x^2+q=0$ при достатньо великому за модулем $q<0$. **3.** При $|x|\ge 1$ ліві частини перших двох рівнянь набувають лише додатних значень. Тому і їх пів-сума при цих же x теж додатна. **4.** Дані числа є коренями рівняння $t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0,$ ліва частина якого при $t<0$ від'ємна. **5.** $\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$.

Заняття №7

1. а). $x^4-x^3-4x^2+x+1=\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-2x-1\right)$. **б).** Спочатку поділіть на x^2. **2.** $\left(x^2-1\right)^2+(3x-2)^2=0$. **3.** При $a\in\left[2;\sqrt{6}\right)$ – два корені; при $a\in\left[\sqrt{2};2\right)\cup\left\{\sqrt{6}\right\}$ – один корінь; при інших a – жодного кореня. Для обґрунтування з допомогою похідної знайдіть множину значень лівої частини рівняння. **4.** Розгляньте рівняння як квадратне відносно параметра $\sqrt{5}=a$. **5.** $a=1$. Спочатку обґрунтуйте, що єдиним може бути лише корінь $x=0$.

Заняття №8

1. Запишіть рівняння у вигляді $\left(x^2+x-a\right)^2+\left(x^2+x-a\right)-a=x.$ **2. а).** Розв'яжіть систему рівнянь $\sqrt{a+x}=y, \sqrt{a-y}=x.$ **б).** Спочатку піднесенням до квадрату позбудьтеся радикалів. **3.** Підстановка $x=tgt.$ **4.** Представте розв'язки кожного з рівнянь через розв'язки іншого рівняння. **5.** Доведіть, що x, y, z діляться на 2^n, $n\in N.$

Заняття №9

1. $f\left(x\right)=ax+x^3, a\in R.$ **2.** $f\left(x\right)=a^x-1,\ a>0.$ Покладіть спочатку $f\left(x\right)=\varphi\left(x\right)-1.$ **3.** $f\left(x\right)=x.$ Замініть спочатку x на $\frac{1}{x}$ і розв'яжіть отримане рівняння у системі з заданим. **4.** Тричі поміняйте x на $\frac{x-1}{x+1}$ і розв'яжіть отриману систему з чотирьох рівнянь. **5.** $f\left(x\right)=x.$ Послідовно обґрунтуйте, що $f\left(0\right)=0,\ \ f\left(x\right)\ge x.$

Заняття № 10

1. Скористайтеся методом математичної індукції. **2.** Спочатку вкажіть спосіб як із двох квадратів утворити один. **3.** Врахуйте, що $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right).$ **4.** Застосуйте метод математичної індукції, база якої складається з двох елементів. **5.** Доведіть і додайте n нерівностей вигляду $\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1}.$

Заняття №11

1. Врахуйте, що $\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+...+\frac{1}{2^k}>2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2},$ і згрупуйте доданки відповідним чином. **2.** Порівняйте обидві частини нерівності з числом $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2010^2}\right)=\frac{2011}{4020}.$ **3.** Скористайтеся нерівностями вигляду $\frac{x^n}{y^{n-1}}\ge nx-\left(n-1\right)y.$ **4.** 7.5. Окремо оцініть суми перших та останніх трьох доданків. **5.** Покладіть $1=\left(x+y+z\right)^2$ та скористайтеся нерівностями вигляду $\frac{a^3}{b}=a\cdot\frac{a^2}{b}\ge a\left(2a-b\right)=2a^2-ab$ при додатних $a,b.$

Заняття №12

1. Для дослідження функцій на мінімум використайте похідну. **2.** Врахуйте, що послідовності $(a,b,c),(a,b,c),(a^2,b^2,c^2)$ однаково впорядковані. **3.** Геометрично дана нерівність означає, що довжина ламаної не менша довжини відрізка, який з'єднує кінці цієї ламаної. **4.** Розгляньте два найменші із заданих чисел і доведіть, що сума відповідних їм доданків не перевищує 1. **5.** З допомогою теореми косинусів зведіть нерівність до нерівності для сторін трикутника.

Заняття 13

1. 3*см*. Врахуйте, що точки поділу діагоналі BD є точками перетину медіан трикутників ABC та ACD. **2.** Відкладіть на прямій BA поза точкою A точку D так, що $AD = AE,$ і доведіть, що $\angle BDC = \angle BCD.$ **3.** 90^0. Доведіть, що медіани трикутника $BDE,$ проведені з вершин B та $E,$ проходять через точку M і рівні між собою. **4.** Виберіть на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ точку E так, що $\angle ABE = \angle CBD,$ і доведіть рівності $AB \cdot CD = BD \cdot AE,$ $BC \cdot AD = BD \cdot EC.$ **5.** 90^0. Доведіть, що B_1A_1 та B_1C_1 є бісектрисами кутів CB_1B та AB_1B відповідно.

Заняття №14

1. Через точку перетину відрізків AF та CE проведіть пряму, паралельну до AC і скористайтеся подібністю відповідних трикутників. **2.** Нехай M – середина діагоналі $AC,$ $MP \parallel BD,$ $P \in AD.$ Тоді BP – шукана пряма. **3.** $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_2}\right)^2.$ Врахуйте відношення площ подібних трикутників. **4. а).** $7S.$ Проведіть відрізки $A_1B,\, B_1C,\, C_1A$ і доведіть рівність площ семи утворених трикутників. **б).** $5S.$ **5.** Скористайтеся теоремою Чеви.

Заняття №15

1. Симетризуйте точку A відносно сторін кута і попарно з'єднайте отримані точки. **2.** Нехай AA_1 та BB_1 перетинаються в точці $K.$ Продовжте BB_1 до точки D такої, що $BD = 2 \cdot BB_1,$ і доведіть, порівнюючи кути у трикутниках AKD та $A_1KB,$ що $AK > KD,$ $A_1K > KB.$ **3.** M – проекція середини відрізка AB на пряму $l.$ Скористайтеся теоремою Піфагора. **4.** Додайте до обох частин нерівності подвоєні площі трикутників $BMC,$ $CMA,$ AMB і доведіть отриману нерівність. **5.** Не могла. Доведіть методом від супротивного.

Література.

1. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади: Довідник. – К.: Вища шк., 1993.– 415с.

2. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад.– К.: Вища шк., 1984.– 240с.

3. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993 рр. Збірник задач: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1993,–144с.

4. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х.: Вид. група «Основа», 2008. – 255с.

5. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Задачи Московских математических олимпиад М.: Просвещение, 1986.–304с.

6. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад. – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336с.

7. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2000. – 304с.

8. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 1991-2000: Навчально-методичний посібник. – К.: Техніка, 2003. – 541с.

9. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. – М.: Наука, 1991. – 320с.

10. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2. – М.: Наука, 1991. – 320с.

11. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – Житомир: ЖДПУ, 2002. – 298с.

12. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики: Навчальний посібник. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420с.

13. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987-2005 рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164с.

14. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Вінниця, 1998. – 266 с.

15. Ясінський В.А. Практикум з розв’язування задач математичних олімпіад. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 128с.

Зміст

Підписано до друку 21 січня 2010р.
Формат 61x84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 6,25 друк. арк. Наклад 300 пр.
Замовлення №19 від 20.01.2010

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32