Рівномірна стабілізація розв’язків задачі Коші для систем рівнянь типу Колмогорова

Буртняк І.В., Малицька Г.П. *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, bvanya@meta.ua*

Розглянемо систему n рівнянь вигляду:

$$\partial_t u_j(t,X) - x\partial_y u_j(t,X) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{js}(t)\partial_x^k u_s(t,X), \tag{1}$$

$(t,X)\in\Pi_{(0,T]}$, $j=\{1,...,n\}$, $X:=(x,y)\in R^2$, $\Pi_{(0,T]}:=\{(t,X), t\in(0,T], X\in R^2\}$, $\{n,b\}\subset N$, $T>0$, коефіцієнти a_k^{js} – комплекснозначні, неперервні і обмежені функції при $t\ge 0$ і такі, що система $\partial_t w_j = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{js}(t)\partial_x^k w_s$, $j=\{1,...,n\}$, є рівномірно параболічною за Петровським в $\Pi_{[0,T]}$ для будь-якого $T<\infty$.

Розв’язок задачі Коші, побудований по будь-якій вимірній обмеженій в R^2 функції $u_0(X)$ є єдиним і задається інтегралом вигляду $u(t,X)=\int\limits_{R^2} G(t,X;0,S)u_0(s)ds,$ де $G(t,X;0,S)$– фундаментальна матриця розв’язків задачі Коші (ФМРЗК) (1), для її похідних, справджуються нерівності:

$$\left|\partial_y^m\partial_x^k G(t,X;0,S)\right| \le C_{mk}t^{-M}\exp\left\{-c_0\left[\left(\left|y-\eta+(x+\xi)t/2\right|t^{-\frac{2b+1}{2b}}\right)^q + \left(\left|x-\xi\right|t^{-\frac{1}{2b}}\right)^q\right]\right\}$$

$$M=\left[k+1+(2b+1)(m+1)\right]/2b,\ q=2b/(2b-1),\ C_{mk}>0,\ c_0>0. \tag{2}$$

Нехай $a_0^{js}(t)\equiv 0.$ $\mathrm{Re}a:=\{(x,y);a_1\ge\varepsilon_1 x,\ a_2\ge\varepsilon_2 y,\ a=(a_1,a_2),a_j>0, j=\{1,2\}\}$. $\mathrm{Re}ab:=\{(x,y);a_1\le x\le b_1+a_1,\ a_2\le y\le b_2+a_2, \text{ÿêù î } \varepsilon_j=1, j=\{1,2\}; b_1-a_1\le x\le b_1,$ $b_2-a_2\le y\le b_2, \text{ÿêù î } \varepsilon_j=-1\}$, $A=a_1a_2$, $e=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $|\varepsilon_1|=1, |\varepsilon_2|=1.$

Теорема. Нехай виконується одна із умов: 1) $\exists \lim\limits_{\substack{a_1\to+\infty\\ a_2\to+\infty}}\frac{1}{A}\int\limits_{\mathrm{Re}a} u_0(S)dS=l;$

2) в (1) входять тільки $\partial_x^{2r}u_s$, $\exists \lim\limits_{\substack{a_1\to+\infty\\ a_2\to+\infty}}\frac{1}{A}\int\limits_{\mathrm{R}ea+\mathrm{R}-\mathrm{e}a} u_0(S)dS=l;$

3) в (1) входять тільки $\partial_x^{2r}u_s$, $\exists \lim\limits_{\substack{a_1\to+\infty\\ a_2\to+\infty}}\frac{1}{A}\int\limits_{-a_1}^{a_1}\int\limits_{-a_2}^{a_2} u_0(S)dS=l;$ то $u(t,X)\to l$ при $t\to+\infty$ рівномірно в кожній обмеженій області R^2.

Доведення теореми ґрунтується на властивості нормальності ФМРЗК і (2).