УДК 512.643.8

ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТИ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

Т. П. Гой*, к.ф.-м.н., доцент*
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника
tarasgoy@yahoo.com

Використовуючи апарат трикутних матриць, встановлені деякі нові формули для чисел Фібоначчі з парними (непарними) індексами.

Goy T. P. Fibonacci numbers and parapermanents of triangular matrices. Applying the apparatus of triangular matrices, we found some new formulas for Fibonacci numbers with even (odd) indices.

Ключові слова: ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ, ТРИКУТНА МАТРИЦЯ, ПАРАПЕРМАНЕНТ ТРИКУТНОЇ МАТРИЦІ.
Keywords: FIBONACCI NUMBERS, TRIANGULAR MATRIX, PARAPERMANENT OF TRIANGULAR MATRIX.

Класична послідовність Фібоначчі

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

та її узагальнення широко використовуються в різноманітних розділах математики, зокрема, у теорії кодування, криптографії, у теорії графів. [1, 2]

Для дослідження деяких властивостей чисел Фібоначчі ефективним виявилися трикутні матриці та функції від них.

Параперманентом трикутної матриці n-го порядку [3]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

називають функцію $\operatorname{pper}(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$

де $\{a_{ij}\} = a_{ij} \cdot \ldots \cdot a_{ii}$, $p_1, \ldots, p_r \in \mathbf{N}$.

У [3, с. 137] встановлений зв'язок між числами Фібоначчі з парними індексами та параперманентами трикутних матриць:

$$F_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 2/1 & 1 & & & & \\ 3/2 & 2/1 & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ (n-1)/(n-2) & (n-2)/(n-3) & (n-3)/(n-4) & \cdots & 1 & \\ n/(n-1) & (n-1)/(n-2) & (n-2)/(n-3) & \cdots & 2/1 & 1 \end{bmatrix}_n,$$

де $\left[a_{ij}\right]_{1 \le j \le i \le n} \equiv \operatorname{pper}(A)$, а також доведена рекурентна формула для чисел Фібоначчі з непарними індексами [3, с. 131]:

$$F_{2n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ F_2 & 1 & & & & & \\ 0 & F_4/F_1 & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{2n-4}/F_{2n-7} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{2n-2}/F_{2n-5} & 1 \end{bmatrix}_n, \quad n \ge 1. \quad (1)$$

Твердження 1. *Справджуються формули*:

$$F_{2n-1} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ 1/2 & 2 & & & & \\ 1 & 1/2 & 2 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1/2 & 2 \end{bmatrix}_n, \quad n \ge 2,$$

$$F_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ F_3 & 1 & & & & & \\ 0 & F_5/F_2 & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{2n-3}/F_{2n-6} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{2n-1}/F_{2n-4} & 1 \end{bmatrix}_n. \quad (2)$$

Використовуючи тепер зв'язок між параперманентом трикутної матриці та звичайним визначником [3, с. 198], з (1), (2) одержуємо наступне твердження.

Твердження 2. *Справджується рекурентні формули*:

$$F_{2n-1} = \frac{1}{F_3 F_5 \cdots F_{2n-5}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -F_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_4 & F_1 & F_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_6 & F_3 & F_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -F_{2n-4} & F_{2n-7} & F_{2n-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -F_{2n-2} & F_{2n-5} \end{vmatrix}$$

і

$$F_{2n} = \frac{1}{F_2 F_4 \cdots F_{2n-4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -F_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -F_5 & F_2 & F_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_7 & F_4 & F_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -F_{2n-3} & F_{2n-6} & F_{2n-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -F_{2n-1} & F_{2n-4} \end{vmatrix}.$$

Висновки. Використовуючи представлення чисел Фібоначчі через параперманенти трикутних матриць, встановлені нові рекурентні формули для цих чисел з парними і непарними індексами через визначники Якобі.

Література

1. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications / T. Koshy. – N.Y.: John Wiley & Sons, 2001. – 648 p.
2. Stakhov A.P. Introduction into Fibonacci coding and cryptography / A.P. Stakhov, V. Massingue, A. Sluchenkova. – Kharkiv: Osnova, 1999. – 236 p.
3. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р.А. Заторський. – Івано-Франківськ: Сімик, 2010. – 508 с.