Формула Фаа ді Бруно та параперманенти трикутних матриць

Гой Т.П., *доцент*
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
м. Івано-Франківськ

Задачу про встановлення загального вигляду формули для похідної n-го порядку складеної функції $y=f(g(x))$ розв'язав Ф. Фаа-ді-Бруно [1]. Ця формула має вигляд

$$y^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f^{(k)} \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=k}} \frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!}\left(\frac{g^{(1)}}{1!}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{g^{(2)}}{2!}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{g^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda_n}.$$

Нам вдалося виразити похідну n-го порядку від складеної функції через параперманент трикутної матриці (означення функцій від трикутних матриць можна знайти, наприклад, в [2, 3]).

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ n разів диференційовні. Тоді

$$\frac{d^n f(g(x))}{dx^n}=\left[\begin{array}{ccccc} C_{n-1}^{0}g'f & & & & \\ \dfrac{C_{n-1}^{1}g''}{C_{n-2}^{0}g'} & C_{n-2}^{0}g'f & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & \\ \dfrac{C_{n-1}^{n-2}g^{(n-1)}}{C_{n-2}^{n-3}g^{(n-2)}} & \dfrac{C_{n-2}^{n-3}g^{(n-2)}}{C_{n-3}^{n-4}g^{(n-3)}} & \cdots & C_{1}^{0}g'f & \\ \dfrac{C_{n-1}^{n-1}g^{(n)}}{C_{n-2}^{n-2}g^{(n-1)}} & \dfrac{C_{n-2}^{n-2}g^{(n-1)}}{C_{n-3}^{n-3}g^{(n-2)}} & \cdots & \dfrac{C_{1}^{1}g''}{C_{0}^{0}g'} & C_{0}^{0}g'f \end{array}\right],$$

де $\left[a_{ij}\right]_{1\le j\le i\le n}$ – параперманент трикутної матриці, C_n^m – біноміальні коефіцієнти, $g^{(i)}\equiv\dfrac{d^i g(x)}{dx^i}$, $f^k\equiv f^{(k)}(g(x))$.

1.W.P. Johnson, *Amer. Math. Monthly.* **109** (2002).
2.Р.А. Заторський, *Числення трикутних матриць та його застосування* (Івано-Франківськ: Сімик: 2010).
3.R. Zatorsky, T. Goy, *J. Integer Seq.* **19** (2016), Article 16.2.2.