[1] О.Б. Скасків, О.М. Трусевич. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів* // Препринт № 17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.

Діофантові умови розв'язності однієї нелокальної задачі для факторизованого гіперболічного оператора парного порядку

Савка І. Я.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
s-i@ukr.net

Гой Т. П.
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
tarasgoy@yahoo.com

Діофантові умови розв'язності часто зустрічаються в теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях через так звану проблему малих знаменників [1, 2].

Зокрема, проблема малих знаменників виникає при дослідженні розв'язності крайової задачі для факторизованого гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами з нелокальними умовами за часовою змінною t та умовами періодичності за просторовими змінними $x = (x_1, \ldots, x_p)$:

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta + c_j^2 \right) u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega_{2\pi}^p, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mu_1 \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} + \mu_2 \frac{\partial^{j-2} u(t,x)}{\partial t^{j-2}}\Big|_{t=0} + \mu_3 \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} - \\ -\mu_2 \frac{\partial^{j-2} u(t,x)}{\partial t^{j-2}}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, 2n, \end{gathered} \tag{2}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $c_m \neq c_j$ $(m \neq j)$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$, $\mu_2 \neq 0$, $T > 0$, $\Omega_{2\pi}^p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$, $u_t^{(-1)} \equiv \int_0^t u(t,\tau)d\tau$.

Нехай $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $\|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, $\lambda_{sk} = \sqrt{a_s^2 \|k\|^2 + c_s^2}$,

$$M_{sk}^{\pm} = \mu_1 + \mu_3 \exp(\pm i\lambda_{sk} T) + \mu_2 (\pm i\lambda_{sk})^{-1} (1 - \exp(\pm i\lambda_{sk} T)), \qquad (3)$$

де $s \in \{1, \ldots, n\}$.

У роботі показано, що діофантові умови коректної розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва мають вигляд нерівностей для малих знаменників M_{sk}^{+} і M_{sk}^{-}, визначених у (3):

$$\left| M_{sk}^{\pm} \right| \geq C \|k\|^{-\gamma}, \quad s = 1, \ldots, n, \qquad (4)$$

які повинні виконуватись з деяким показником $\gamma \in \mathbb{R}$ та деякою сталою $C > 0$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для довільного фіксованого параметра $T > 0$ виконання нерівностей (4) доведено з показником $\gamma = 1$, якщо

$$(|\mu_1| - |\mu_3|)^2 + \mathrm{Im}^2 \left(\frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_2} \right) \neq 0. \qquad (5)$$

Якщо нерівність (5) не виконується, то за допомогою метричного підходу доведено виконання діофантових умов (4) тільки для майже всіх за мірою Лебега значень параметра $T > 0$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівності (4) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > p + 1$.*

Зауважимо, що оператори вигляду (1) виникають у квантовій теорії поля. Наприклад, компоненти деякого поля Q, які відповідають вільним елементарним частинкам з різними масами $m_1, \ldots, m_n$, повинні задовольняти рівняння [3]

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_j^2 \right) Q = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

[1] Ільків В. С., Пташник Б. Й. *Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників*, Укр. мат. журн., **58** (12) (2006), 1624–1650.

[2] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наук. думка (2002), 416 с.

[3] Умэдзава Х. *Квантовая теория поля*, М.: Изд-во иностр. лит. (1958), 380 с.

Про потужність множини виключних значень в розумінні Валірона для мероморфних функцій

Савчук Я. І.
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
math@nung.edu.ua

Характеристикою росту цілої функції $f(z)$ ї максимум $M(r, f)$ її модуля в крузі $\{|z| \le r\}$, який досягається на колі $\{|z| = r\}$. Виявляється, що з цією характеристикою тісно пов'язана величина

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r,$$

де $n(r, a, f)$ — кількість a-точок з врахуванням їх кратності в крузі $\{|z| \le r\}$, яка для «більшості» a-точок еквівалентна $\ln M(r, f)$.

Характеристика росту $T(r, f)$ для мероморфної в C функції, яку можна вважати часткою двох цілих, визначається по-іншому [1], однак для «більшості» a-точок також $N(r, a, f) \sim T(r, f)$ при $r \to \infty$. Ті a-точки, для яких це порушується, природно назвати виключними значеннями. Зокрема, якщо $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{N(r,a,f)}{T(r,f)} < 1$, то a називається виключним значенням в розумінні Валірона. Множину усіх таких значень позначають $E_V(f)$.

Множину $U \subset C$ назвемо H-множиною, якщо існують $\alpha > 0$ та числа $a_1, a_2, \ldots \in C$, такі що для довільного $a \in U$виконується $|a - a_n| < \exp(-e^{n\alpha})$ для нескінченної кількості значень n.

В [2] показано, що для будь-якої H-множини U існує така мероморфна функція скінченного порядку, що $U \subset E_V(f)$. В [3] отримано уточнення цього результату.

Мною побудовано H-множину, яка має потужність континуум. Тим самим показано, що для мероморфних функцій $f(z)$ множина $E_V(f)$ може мати потужність континуум.