Нові інтегральні функції, породжені центральними факторіалами

Гой Т.П., *доц.*; Шевчук О.В., *студ.*
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ

Нехай $n^{\overline{m}}$, $n^{\underline{m}}$ і $n^{[m]}$ $(n, m \in \mathbf{N})$ – відповідно зростаючі, спадні та центральні факторіальні степені

$$n^{\overline{m}} = n\,(n+1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n+m-1), \quad n^{\underline{m}} = n\,(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-m+1),$$

$$n^{[m]} = n\,(n+m/2-1)(n+m/2-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n+m/2+1)$$

і $F(a_1,\ldots,a_q;\, b_1,\ldots,b_p;\, z)$ – узагальнена гіпергеометрична функція, тобто

$$F(a_1,\ldots,a_q;\, b_1,\ldots,b_p;\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}} a_2^{\overline{n}} \ldots a_q^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}} b_2^{\overline{n}} \ldots b_p^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

За аналогією з відомими степеневими розвиненнями функцій $\cos x$, $\sin x$, у яких звичайні факторіали можна розглядати як спадні факторіальні степені ($m! = m^{\underline{m}}$), розглянемо функції дійсної змінної, побудовані при допомозі центральних факторіальних степенів

$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{[2n]}} x^{2n}, \qquad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{[2n+1]}} x^{2n+1},$$

а також функції типу інтегралів Френеля

$$\widetilde{C}\,(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}(t^2)\,dt, \qquad \widetilde{S}\,(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}(t^2)\,dt.$$

Теорема. Для всіх $x \in \mathbf{R}$ справджуються тотожності

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{4} F\left(1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{x^2}{27}\right), \quad \mathrm{Sin}(x) = xF\left(1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}; -\frac{x^2}{27}\right),$$

$$\widetilde{C}\,(x) = x - \frac{x^5}{20} F\left(1, \frac{5}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}; -\frac{x^4}{27}\right), \quad \widetilde{S}(x) = \frac{x^3}{3} F\left(\frac{3}{4}, 1; \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}; -\frac{x^4}{27}\right).$$