где $B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где функция $\varphi(x)$ задана, и выполняется условие согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)x^k dx = 0. \tag{6}$$

Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$u_{tt} - B_x u = 0$$

с нелокальным интегральным условием (6) изучено в работе [1].

Лемма. *Если выполняется условие согласования* (6) *то задачи* (1) – (5) *и* (1) – (4),

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

эквивалентны.

Теорема. *Задача* (1) – (5) *не может иметь более одного решения.*

1. Бейлин С. А. Об одной нелокальной задаче с интегральным условием. Матем. заметки ЯГУ, 2004, Т. 11, № 2, С. 22—29.

Диференціальні рівняння функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями

Т. П. Гой, Р. А. Заторський

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

tarasgoy@yahoo.com, romazz@rambler.ru

Нехай $n^{\overline{m}} = n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)$ — зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1, $n^{\underline{m}} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ — спадний факторіальний степінь m з кроком -1 ($n^{\overline{0}} = n^{\underline{0}} = 1$).

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються як степеневі ряди із звичайними факторіалами, які можна розглядати як спадні факторіальні степені ($n! = n^{\underline{n}}$). Замінивши у відомих степеневих розвиненнях цих функцій спадні факторіальні степені відповідними зростаючими факторіальними степенями, приходимо до нових функцій з дещо аналогічними властивостями.

За аналогією з відомими степеневими рядами

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\underline{n}}}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\underline{2n}}} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}},$$

розглянемо функції $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$, які означені при допомозі зростаючих факторіальних степенів за формулами

$$\operatorname{Exp} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}, \quad \operatorname{Cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}, \quad \operatorname{Sin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}.$$

Теорема 1. *Для всіх* $x \geq 0$ *справджуються співвідношення*

$$\operatorname{Exp} x = 1 + \sqrt{\pi x}\, e^{\frac{x}{4}} \Phi\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big),$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 + 2\sqrt{x}\,\Big(\cos\tfrac{x}{4}\, S\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big) - \sin\tfrac{x}{4}\, C\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big)\Big),$$

$$\operatorname{Sin} x = 2\sqrt{x}\,\Big(\cos\tfrac{x}{4}\, C\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big) + \sin\tfrac{x}{4}\, S\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big)\Big),$$

де $\Phi(p)$ — *функція помилок (функція Лапласа)*, $S(p)$, $C(p)$ — *інтеграли Френеля*:

$$\Phi(p) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt, \quad S(p) = \int_0^p \sin t^2 dt, \quad C(p) = \int_0^p \cos t^2 dt.$$

Якщо $x < 0$, то в усіх формулах теореми 1 потрібно замінити $\sqrt{x}$ на $i\sqrt{|x|}$.

Теорема 2. *Функції* $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь*:

$$4xy' - (x+2)y = x - 2, \quad y(0) = 1;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = 12 - x^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = -4x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Побудовані графіки функцій $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$. Встановлені деякі співвідношення між цими функціями. Зокрема, справджується формула $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$, аналогічна до формули Ейлера, наслідком якої є

$$\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x = \operatorname{Exp}(ix) \cdot \operatorname{Exp}(-ix).$$