І.В. ФЕДАК

ТРИНАДЦЯТЬ ТУРНІРІВ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ПРИКАРПАТТЯ

(2005 – 2017 рр.)

Івано-Франківськ
– 2017 –

ББК: 22.1
УДК: 51(075.8)
Ф 45

Федак І. В. Тринадцять турнірів юних математиків Прикарпаття (2005 – 2017 рр.). – Івано-Франківськ: ПНУ, 2017. – 196 с.

Друкується за рішеннями вченої ради факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (*протокол №3 від 17 листопада 2017р.*)

Рецензенти:

Кукуш О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка),

Никифорчин О. Р., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника).

Зібрані задачі I – XIII обласних турнірів юних математиків Прикарпаття 2005 – 2017 років та їх розв’язання. Наведені правила проведення та рекомендації щодо оцінювання виступів учасників турніру.

Для учнів 9–11 класів загальноосвітніх шкіл, гімназій та ліцеїв, професійно-технічних навчальних закладів, студентів, які навчаються за напрямом підготовки «математика», учителів математики, керівників математичних гуртків та всіх любителів нестандартних математичних задач.

Передмова

З 1998 в Україні започатковано ще один вид змагань – Всеукраїнські турніри юних математиків, членом журі яких автор посібника є з 2006 року. На відміну від математичних олімпіад, ТЮМ – це колективне змагання учнів в умінні розв'язувати складні задачі проблемного дослідницького характеру, переконливо відстоювати свій розв'язок, брати участь у наукових дискусіях.

На Прикарпатті такі турніри проводяться з 2005 року. Їх переможцями ставали команди Надвірнянського ліцею (2005 рік), Івано-Франківського обласного фізико-технічного ліцею-інтернату (2006 – 2010, 2012, 2014 та 2016 роки), Парищенської ЗОШ (2011 рік), Івано-Франківського природничо-математичного ліцею (2013, 2015, 2017 роки).

Переможці обласних турнірів 6 разів ставали другими та 9 – третіми призерами Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. Зокрема, 9 разів відзначилися команди Івано-Франківського обласного фізико-технічного ліцею-інтернату, з них 3 рази тріумфуючи другими. Ще тричі були другими команди природничо-математичного ліцею Івано-Франківської міської ради. Кожна з цих команд по одному разі змагалася в фіналі такого турніру.

Серед переможців також збірна команда області та, що особливо приємно, команда «Париська Сорбонна» моєї рідної Парищенської ЗОШ I – III ступенів Надвірнянської районної ради, яка першою з сільських шкіл у 2011 році стала призером XIV Всеукраїнського турніру юних математиків, продемонструвавши найкращий результат серед команд, які фінішували третіми.

При підготовці до цього турніру вдалося розв'язати одну з проблем, сформульованих Леонардом Ейлером ще понад 250 років тому, щодо нескінченності множини трійок натуральних чисел a, b, c таких, що найбільший спільний дільник трійки чисел a, b, c дорівнює 1, і кожне з чисел $a+b+c$, $ab+bc+ca$ та abc є квадратом натурального числа. Детальніше про розв'язання цієї проблеми ви зможете прочитати в даному посібнику.

Слід відзначити також команди Манявської ЗОШ І – ІІІ ступенів Богородчанської районної ради, які двічі були учасниками півфінальних боїв на Всеукраїнських турнірах юних математиків, що, безумовно, є значним досягненням сільських школярів та їх вчителя Білусяка Івана Танасовича.

Не залишилися без призових місць команди Прикарпаття і в 2017 році. Дипломами третього ступеня ювілейного XX Всеукраїнського ТЮМ нагороджені команди Івано-Франківського природничо-математичного та Надвірнянського ліцеїв.

Відзначилися учні з Івано-Франківщини і в особистій першості. У 2007 році абсолютним переможцем X Всеукраїнського турніру став учень Івано-Франківського обласного фізико-технічного ліцею-інтернату Возняк Андрій. А в 2011 році його успіх повторив капітан команди «Париська Сорбонна» Парищенської ЗОШ Чіх Володимир, який став першим володарем призу пам'яті професора Лейфури В.М.

У пропонованому вашій увазі посібнику зібрані завдання I – XIII Івано-Франківських обласних турнірів юних математиків. До переважної більшості задач наведені розв'язання, до окремих задач – суттєві просування в їх розв'язуванні чи посилання на джерела, в яких такі розв'язання викладені детальніше. Для частини задач обґрунтовані загальніші твердження.

У додатках наведені правила проведення обласних турнірів юних математиків та рекомендації щодо оцінювання виступів учасників турнірів.

На завершення хочу подякувати своїм колегам-математикам Никифорчину О.Р., Казмерчуку А.І., Шарманському Б.Я. за багаторічну творчу співпрацю у проведенні тренувальних зборів до заключних етапів всеукраїнських турнірів юних математиків.

Також висловлюю вдячність всім учасникам, членам журі, оргкомітетів та експерт-консультантам Івано-Франківських та Всеукраїнських турнірів, з якими мені було приємно спілкуватися на протязі багатьох років їх проведення.

ЗАВДАННЯ ОБЛАСНИХ ТУРНІРІВ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

2005 рік

Перший обласний турнір юних математиків

1. Числа 1, 2, 3, ..., 25 записують у таблиці 5×5 так, щоб у кожному рядку вони були записані у порядку зростання. Яке найбільше та найменше значення може набувати при цьому сума чисел третього стовпчика?

2. Всередині правильного трикутника ABC вибрали точку M так, що $\angle AMB = 115^\circ$, $\angle BMC = 125^\circ$. Доведіть, що існує трикутник зі сторонами AM, BM, CM, і знайдіть кути цього трикутника.

3. Знайдіть довжини сторін всіх рівнобедрених трикутників, які медіана, проведена до бічної сторони, ділить на два трикутники з периметрами 24 см та 30 см.

4. Порівняйте числа $\dfrac{2^2}{1^1}+\dfrac{3^3}{2^2}+\ldots+\dfrac{2005^{2005}}{2004^{2004}}$ та 2005^2.

5. Виясніть, чи існує прямокутний трикутник з цілочисловими довжинами сторін, всі вершини якого лежать у вузлах решітки зі стороною 1, а жодна зі сторін не проходить по лініях решітки.

6. Дослідіть, для яких $n\in N$ число $a_n = 11...1$, у записі якого використано 3^n одиниць, ділиться на 3^n.

7. Довжини сторін трикутника дорівнюють 30 см, 45 см та 60 см. Кожну сторону поділили на 15 рівних частин, а точки поділу з'єднали з протилежними вершинами. Підрахуйте кількість точок всередині трикутника, в яких перетинаються по три з проведених відрізків.

8. Є три бікфордові шнури, кожен з яких згорає нерівномірно на протязі однієї години. Які відрізки часу можна відміряти з їх допомогою? Вкажіть всі можливі варіанти.

9. Не користуючись поняттям похідної, знайдіть найбільше та найменше значення функції $y=\sqrt{x}+4\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$.

10. Знайдіть хоч один многочлен з цілими коефіцієнтами, який має своїм коренем число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Який найменший степінь може мати такий многочлен?

11. Точки сторін правильного трикутника розмалювали у два кольори. Чи обов'язково існує: а) рівносторонній, б) прямокутний трикутник, всі вершини якого мають однаковий колір?

12. Послідовність $(a_n), n \in N,$ така, що $a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 5,$ $a_{n+3} \cdot a_n - a_{n+2} \cdot a_{n+1} = 9 \cdot (-2)^n,\ n \geq 0.$ Чи правильно, що всі елементи цієї послідовності є натуральними числами?

13. На площині задані дві паралельні прямі і відрізок на одній з них. З допомогою лише лінійки:

а) поділіть цей відрізок пополам;

б) намалюйте вдвічі довший за нього відрізок.

Врахуйте, що лінійкою можна проводити лише прямі лінії.

14. Доведіть, що якщо для кутів трикутника виконується рівність $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3},$ то хоч один з цих кутів дорівнює 60°.

15. Розв'яжіть у цілих числах нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \leq ab + 3b + 2c.$$

16. На сторонах AB та BC гострокутного трикутника ABC побудуйте такі точки M та K відповідно, щоб виконувалися рівності: а) $AM = MK = KC$; б) $BM = MK = KC$.

17. Доведіть, що для всіх натуральних n виконується нерівність $\sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n}}} < 2.$

18. Чотири прямі при перетині обмежують чотири трикутники. Чи правильно, що кола, описані навколо цих трикутників, перетинаються в одній точці? Якщо ні, то у яких випадках таке твердження буде справедливим?

19. Відомо, що $x + y + z = a,\quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c}.$ Обчисліть $x^3 + y^3 + z^3.$

20. Знайдіть всі функції $f : N \to N$ такі, що виконується рівність $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$ для всіх натуральних $n \geq 2.$

2006 рік

Другий обласний турнір юних математиків

1. $a_n = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 2.$ Знайдіть множину всіх $n \in N,$ для яких a_n є квадратом натурального числа.

2. Дослідіть, для яких $n \in N$ число $n!$ закінчується на 20060...0.

3. Числа 2^n та 5^n (мова йде про їх десятковий запис) записані одне за одним. Опишіть множину всіх тих $n \in N,$ для яких у результаті таких дій отримуємо $n+1-$ цифрове число.

4. У десятковому записі числа 8^{2006} закреслили останню цифру і додали її до числа, яке утворилося після закреслювання. З отриманим при цьому числом проробили аналогічні операції, і так далі. Чи правильно, що на деякому кроці у результаті таких дій появиться число вигляду 10^n, де $n \in N$?

5. Квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ для всіх $x \in Z$ набуває цілочислових значень. Які необхідні та достатні умови повинні задовольняти при цьому його коефіцієнти a, b, c?

6. Корені кожного з рівнянь $x^2 + p_k x + q_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, 2006,$ є дійсними і за абсолютною величиною не перевищують одиниці. Чи правильно, що й корені рівняння $x^2 + \frac{p_1 + \ldots + p_{2006}}{2006} x + \frac{q_1 + \ldots + q_{2006}}{2006} = 0$ також дійсні і, якщо це так, то чи обов'язково вони за абсолютною величиною не перевищують одиниці ?

7. Чи правильно, що числа $tg^2 20^\circ, tg^2 40^\circ, tg^2 80^\circ$ є коренями рівняння $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$?

8. Дослідіть, для яких чисел $m, n, k \in N$ корені рівняння $x^3 - mx^2 + nx - k = 0$ можуть бути довжинами сторін деякого трикутника.

9. Невід'ємні числа x_1 та x_2 такі, що їх сума дорівнює 2. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2}$?

10. Послідовність (a_n), $n \in N$, визначається таким чином:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}},\ n \in N.$$

Дослідіть, чи для всіх натуральних чисел n виконується нерівність

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < \frac{3}{2}.$$

11. У деякій країні кожні два міста з'єднані між собою дорогою з одностороннім рухом. Чи обов'язково знайдеться таке місто, починаючи з якого вдасться об'їхати всі міста цієї країни, побувавши у кожному з них по одному разові?

12. У Миколки було 100 кульок, занумерованих числами від 1 до 100 включно. Він загубив n кульок. При якому найбільшому n ви завжди зумієте із тих кульок, які залишилися, вибрати 4 кульки так, щоб сума номерів на двох із них дорівнювала сумі номерів на двох інших кульках?

13. Діаметром фігури називають відстань між двома її найбільш віддаленими точками. Відома теорема про те, що відношення довжини лінії, яка обмежує опуклу фігуру, до діаметра цієї фігури не перевищує π. Які ви зможете виділити класи опуклих фігур, для яких таке відношення дорівнює π?

14. Який висновок ви зробите про площу трикутника у кожному з наступних випадків:

а) довжини всіх сторін трикутника менші за одиницю;

б) довжини всіх медіан трикутника менші за одиницю;

в) довжини всіх бісектрис трикутника менші за одиницю;

г) довжини всіх висот трикутника менші за одиницю?

15. При якому найбільшому k для довжин сторін і площі довільного трикутника виконується нерівність:

а) $ab + bc + ca \ge kS$; б) $a^2 + b^2 + c^2 \ge kS$?

16. Для яких трикутників довжини сторін, радіуси вписаного та описаного кіл задовольняють співвідношення $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}$?

17. Для яких $a, b, c \in Z$ виконується рівність

$$\sin\frac{180^{\circ}}{a} + \cos\frac{120^{\circ}}{b} + tg\frac{90^{\circ}}{c} = 2?$$

18. Яке з чисел: $\cos 36^{\circ}$ чи $\mathrm{tg} 36^{\circ}$, є, на вашу думку, більшим? Відповідь обґрунтуйте.

19. Які правильні многокутники ви зможете отримати при перетині куба площиною?

20. Яку найбільшу кількість прямокутних паралелепіпедів розмірами $1\times1\times4$ ви зумієте помістити у такий же паралелепіпед розмірами $6\times6\times2006$?

2007 рік

Третій обласний турнір юних математиків

1. В одній багатодітній сім'ї семеро дітей любили капусту, шестеро – моркву, п'ятеро – горох, четверо – капусту і моркву, троє – капусту і горох, двоє – моркву і горох, а один із задоволенням їв і капусту, і моркву, і горох. Скільки дітей було у цій сім'ї?

2. У прямокутній таблиці розмірами $m\times n$ кожне число дорівнює добутку суми всіх чисел рядка на суму всіх чисел стовпчика, на перетині яких воно знаходиться. Яких значень може набувати сума всіх чисел такої таблиці?

3. Є лінійка довжиною 1метр. Яку мінімальну кількість поділок ви зумієте нанести на цю лінійку, щоб, прикладаючи її у кожному з випадків лише один раз, можна було відміряти будь-яке ціле число сантиметрів від 1 до 100 включно?

4. Нехай $m,\ n,\ k\ -$ попарно взаємно прості цілі числа, більші за одиницю. Вивчіть питання про розв'язність рівняння $x^m + y^n = z^k$ у натуральних числах $x,\ y,\ z$.

5. Перемножуючи різні шестицифрові числа на число 142857, учень виявив одну цікаву особливість, яку проілюстровано у наступному прикладі:

$$135426\cdot142857 = \frac{135425864574}{7} = 19346552082.$$

Сформулюйте та обґрунтуйте загальне правило множення у такий спосіб інших шестицифрових чисел на 142857.

6. Знайдіть усі трійки простих чисел $p,\ q,\ r,$ для яких виконується рівність $p(p+3)+q(q+3)=r(r-3)$.

7. Дослідіть, скінченною чи нескінченною є множина розв'язків рівняння $x^3+y^3+z^3=2$ у цілих числах x, y, z.

8. Для додатних чисел $a, b, c,$ таких що $abc=1,$ знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}.$$

9. Доведіть, що для $x\ge\sqrt{2},\ y\ge\sqrt{2}$ виконується нерівність

$$x^4+x^2y^2+y^4\ge(xy+1)(x^2+y^2).$$

10. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $m,\ n,\ k,$ які мають таку властивість: для будь-яких натуральних чисел a та $b,$ які дають однакові остачі при діленні на $m,$ однакові остачі при діленні на n і однакові остачі при діленні на $k,$ остачі від ділення цих чисел на mnk також однакові.

11. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{y}}+\dfrac{3}{\sqrt{z}}=1, \\ \sqrt{y}-\dfrac{3}{\sqrt{z}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2, \\ \sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}=3. \end{cases}$$

12. Для $x=\dfrac{\pi}{2007}$ обчисліть значення виразу

$$tgx\cdot tg2x+tg2x\cdot tg3x+...+tg2006x\cdot tg2007x.$$

13. Знайдіть усі неперервні функції $f:R\to R,$ для яких для всіх дійсних $x,\ y$ виконується рівність $f^2(x)+f(x)f(y)=x^2+xy.$ Чи існують розривні функції, які також задовольняють цю рівність для всіх дійсних $x,\ y$?

14. Доведіть або спростуйте наступні «ознаки» рівності трикутників за двома сторонами і: а) медіаною; б) висотою; в) бісектрисою, проведеною до третьої сторони.

15. Дослідіть, яку найбільшу площу може мати трикутник, бісектриса одного з кутів якого ділить протилежну сторону на відрізки з довжинами 3 см та 2 см.

16. Доведіть, що відрізки, які з'єднують вершини довільного трикутника з точками дотику вписаного у цей трикутник кола до протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

17. Перевірте, чи існує шестикутник, всі кути якого рівні, а з довжин його сторін можна утворити:

а) арифметичну прогресію з різницею $d \neq 0$;

б) геометричну прогресію із знаменником $q \neq 1$.

18. У п'ятикутнику $ABCDE$, вписаному в коло, відстані від точки E до прямих AB, BC та CD дорівнюють відповідно a, b та c. Знайдіть відстань від E до прямої AD.

19. На площині задана пряма m і точки A та B, які лежать в одній півплощині відносно цієї прямої, але на різних відстанях від неї. На прямій m вибрали точку C, рівновіддалену від точок A та B, і таку точку D, що сума відстаней від неї до точок A та B набуває найменшого з усіх можливих значень. Доведіть, що точки A, B, C, D належать одному колу.

20. На столі знаходиться n сірників. Двоє по черзі забирають їх зі столу. У кожному із двох можливих варіантів гри за один хід дозволяється забрати 1 або 2 сірники. Але у першому варіанті один і той же гравець двічі підряд не може брати по одному сірникові, а у другому варіанті – двічі підряд не може брати по два сірники. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Який варіант гри слід вибрати першому гравцеві, щоб шанси на виграш у нього були більшими, якщо до свого вибору:

а) він не знає початкової кількості сірників;

б) знає лише, що їх або 2006, або 2007, або 2008 ?

(Після вибору варіанту гри стартова кількість сірників стає відомою).

2008 рік

Четвертий обласний турнір юних математиків

1. У центрі круглого озера плаває Василина Прекрасна. Навколо озера бігає Кощій Безсмертний. Чи зможе вона врятуватися, якщо плаватиме в 4 рази повільніше, ніж бігає Кощій, а бігтиме швидше від нього?

2. На прямокутному листку паперу розмірами 2007×2008, починаючи з одного кута, точка рухається по бісектрисі цього кута. Дійшовши до сторони, вона здійснює поворот на 90^{o} і продовжує рухатися далі за цим же правилом. Чи зможе така точка через деякий час знову опинитися в куті цього чотирикутника?

3. На площині довільним чином вибрали три точки. Яка ймовірність того, що вони є вершинами гострокутного трикутника?

4. Миколка і Петрусь незалежно один від одного виклали плитками 1×2 прямокутник розмірами $n\times(n+3)$. Петрусь стверджує, що положення принаймні двох покладених ним плиток співпадає з розташуванням плиток Миколки. Дослідіть, для яких n його слова можуть бути правдою при довільному розміщенні плиток Миколки.

5. Розшифруйте приклад на множення

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} п\ п\ н \\ н\ н \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} п\ н\ п\ н \\ п\ н\ н\ \ \ \end{array} \\ \hline н\ н\ н\ н\ н \end{array}$$

в якому буквами $п$ позначені парні цифри, а буквами $н-$ непарні цифри.

6. Знайдіть всі многочлени $P(x)$, які для кожного $x\in R$ задовольняють рівність $P(x+x^2)=P(x)+P(x^2)$.

7. На дошці записані числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2008}$. За один крок дозволяється витерти будь-які два числа x та y і записати замість них число $x+y-xy$. Ці дії повторюються доти, поки не залишиться

одне число. Яким може бути це число? Вкажіть всі можливі варіанти.

8. Порівняйте числа $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}$ та $\frac{1}{50}$.

9. Доведіть, що якщо $n\neq m^2$, то $\left\{\sqrt{n}\right\}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

10. Перевірте, чи всяка нескінченна арифметична прогресія містить як підмножину нескінченну геометричну прогресію.

11. Послідовність $\left(a_n\right)$, $n\in N$, натуральних чисел назвемо майже геометричною прогресією, якщо для всіх $n\geq 2$ виконується рівність $\left|a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}\right|=1$. Які майже геометричні прогресії, що починаються з числа $a_1=1$, ви зумієте виділити?

12. Чотири діагоналі опуклого п'ятикутника паралельні до відповідних сторін цього п'ятикутника. Чи обов'язково п'ята діагональ також буде паралельною до сторони п'ятикутника?

13. Нехай M та $N-$ середини діагоналей чотирикутника, $K-$ точка перетину його середніх ліній, $L-$ середина відрізка MN. Дослідіть, для яких чотирикутників точки K та L можуть співпадати.

14. Зобразіть на площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність $\min\left\{\max\left\{|x|,|y|\right\},|x|+|y|-1\right\}\leq 2$.

15. Задано три відрізки. Якщо з них не можна скласти трикутник, то більший з них вкорочують на суму довжин двох менших відрізків. Якщо трикутник знову не можна утворити, то повторюють вказану операцію. Чи може такий процес тривати до нескінченності?

16. Задано опуклий чотирикутник $ABCD$, в якому $AB=AD$, $\angle ACB=\angle ADB$. Нехай N і $K-$ основи перпендикулярів, опущених з вершини A на прямі BC та BD відповідно. Доведіть, що пряма NK перпендикулярна до AC.

17. Миколка задумав двоцифрове число, а Петрусь намагається його вгадати. Число вважається вгаданим, якщо точно вгадана хоч одна з його цифр, а щодо другої цифри допущена похибка, не більша одиниці. Наприклад, для вгадування числа 37 Петрусеві достатньо назвати одне з таких п'яти чисел: 37, 36, 38, 27, 47. Чи зможе Петрусь

за 22 спроби гарантовано вгадати задумане Миколкою число? А за 21 спробу?

18. На засіданні комісії присутні n осіб. Дослідіть, для яких $n \in N$ може статися так, що: а) жодні двоє з них; б) жодні троє з них не матимуть однакової кількості знайомих.

19. Дослідіть, для яких $k \in N$ існує таке натуральне число n, для якого виконується нерівність

$$1+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}<2008<1+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^k}.$$

20. Доведіть нерівність $\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \le \frac{1}{2}.$

2009 рік

П'ятий обласний турнір юних математиків

1. Знайдіть загальну кількість всіх натуральних чисел $n \ge 10$, цифри яких записані або лише у порядку зростання (кожна наступна цифра більша від попередньої), або лише у порядку спадання (кожна наступна цифра менша від попередньої).

2. Нехай $S(n)-$ сума цифр натурального числа n. Знайдіть всі такі натуральні числа n та k, для яких виконується рівність

$$n+S(n)+S(S(n))+\ldots+\underbrace{S(S\ldots(S}_{k}(n)))=2009.$$

3. Дослідіть, для яких натуральних чисел n та k число $(n-1)^k+n^k+(n+1)^k$ може бути квадратом натурального числа.

4. Доведіть, що існує нескінченна кількість взаємно простих цілих чисел a та b, для яких рівняння $ax^3+by^3+2009^3=3^{2009}$ не має розв'язків у цілих числах x та y.

5. Дійсні числа a,b,c задовольняють такі три нерівності:

$$a+b+c>0,\ ab+bc+ca>0,\ abc>0.$$

Чи обов'язково всі вони є додатними?

6. Знайдіть найбільше значення m та найменше значення k, для яких довжини сторін будь-якого трикутника задовольняють нерівності

$$m(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 < k(ab+bc+ca).$$

7. Для дійсних значень параметрів a та b розв’яжіть рівняння

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-a}\right)^2 = b^2.$$

8. Для кожного значення параметра $a \in R$ розв’яжіть нерівність

$$\sqrt{a+x} + \sqrt[4]{a^2 - x} \le \sqrt[6]{a^3 - x^2}.$$

9. Знайдіть найменше значення функції $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-1} + \dfrac{y^2}{x-1}$, якщо $x > 1,\ y > 1.$

10. Доведіть, що для кожного $k \in N$ існує таке $n \in N,$ для якого виконується рівність $НСД(n,1) + НСД(n,2) + ... + НСД(n,n) = kn.$ Знайдіть найменше значення $k,$ для якого існують принаймні два різні значення $n,$ які задовольняють цю рівність.

11. Знайдіть хоч одну функцію $f : R_+ \to R_+$ таку, що для всіх $x \ge 0$ виконується рівність $f(f(x)) = 1 + x + 2\sqrt{x}.$

12. Обчисліть такі добуток та суму косинусів:

а) $\cos\dfrac{\pi}{2009} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{2009} \cdot ... \cdot \cos\dfrac{1004\pi}{2009},$

б) $\cos\dfrac{2\pi}{2009} + \cos\dfrac{4\pi}{2009} + ... + \cos\dfrac{2008\pi}{2009}.$

13. Задані два ірраціональні числа $\alpha > 1$ та $\beta > 1$ і побудовані послідовності натуральних чисел $a_n = [n\alpha]$ та $b_n = [n\beta].$ Вкажіть хоч одну пару таких α та $\beta,$ для яких ці послідовності не мають спільних елементів, а їх об’єднання співпадає з множиною всіх натуральних чисел. Відповідь обґрунтуйте.

(Тут $[x]$ означає найбільше ціле число, яке не перевищує x).

14. Середини сторін двох опуклих чотирикутників співпадають. Доведіть, що площі таких чотирикутників рівні. Чи залишиться справедливим таке твердження для опуклих: а) п’ятикутників, б) шестикутників?

15. Бісектриси AM та BK нерівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці I, причому $MI = KI$. Доведіть, що існує безліч трикутників з такими властивостями, і знайдіть множину всіх можливих значень величин кута ACB таких трикутників.

16. Знайдіть множину всіх точок M всередині гострокутного трикутника ABC, для яких виконуються рівності

$$AB^2 + MC^2 = BC^2 + MA^2 = CA^2 + MB^2.$$

Чи існують такі точки всередині тупокутного трикутника?

17. Дослідіть, чи можуть дві різні параболи бути гомотетичними між собою. Якщо так, то знайдіть всі можливі коефіцієнти гомотетії.

18. У Миколки є лінійка з поділками через 1 см. Допоможіть йому з допомогою такої лінійки провести хоч одну пряму, перпендикулярну до заданої прямої. Використання лінійки в ролі циркуля для побудови кіл не дозволяється.

19. Поділіть заданий на площині відрізок пополам, користуючись лише циркулем. Знайдіть всі $n > 1$, для яких такий відрізок можна поділити циркулем на n рівних частин.

20. Дослідіть, з якої найменшої кількості однакових пірамід може бути складений куб.

2010 рік

Шостий обласний турнір юних математиків

1. Спостерігач знаходиться на березі річки у точці C і хоче виміряти її ширину. Він фіксує точку A на протилежному березі так, щоб кут між лінією берега і прямою CA був близьким до прямого. Потім витягує вперед праву руку з піднятим вгору великим пальцем, заплющує ліве око і суміщає піднятий палець з точкою A. Далі, відкриває ліве око, заплющує праве і оцінює відстань між точкою B на протилежному березі, на яку вказує палець, і точкою A. Цю відстань множить на 10 і отримує наближене значення відстані до точки A, тобто ширини річки. Обґрунтуйте такий спосіб вимірювання відстані.

2. Знайдіть число підмножин множини $\{1, 2, ..., n\}$ (включаючи порожню множину), які не містять жодної пари послідовних чисел.

3. Доведіть, що для довільних дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

та дослідіть необхідні і достатні умови, за яких у ній досягається рівність.

4. Доведіть нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le (n-2)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3\right),$$

де $a_1, a_2, ..., a_n \in R$, $n \ge 3$. В якому випадку досягається рівність?

5. Відомо, що $a > c$, $b > c$, $c > 0$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \le \frac{ab}{c}.$$

6. Дослідіть, для яких натуральних показників k сума $1^k + 2^k + ... + n^k$ ділиться на $1 + 2 + ... + n$ для всіх натуральних n.

7. Для кожного простого числа p знайдіть усі натуральні n такі, що $(p-n)!(n-1)! + (-1)^{n-1}$ ділиться на p.

8. Нехай $m, n -$натуральні числа. Доведіть наступні твердження:

а). Якщо двочлен $x^n - 1$ ділиться на двочлен $x^m - 1$, то n ділиться на m.

б). Якщо двочлен $x^n + 1$ ділиться на двочлен $x^m + 1$, то $\frac{n}{m}$ – непарне число.

9. Доведіть, що існує натуральне число, яке саме є точним квадратом і може бути подане як сума квадратів двох, трьох, чотирьох, п’яти, шести та семи різних натуральних чисел. Чи може число з такими властивостями бути меншим за 2010?

10. Послідовність Фібоначчі (F_n) задається рівностями:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \ge 2.$$

Доведіть, що $F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ не може бути точним квадратом при жодному значенні n.

11. На координатній площині зобразіть множину всіх тих точок $(x;y)$, для яких $\max(|x+1|,|y|)=\max(|x-1|,|y|)$.

12. Дослідіть кількість дійсних коренів рівняння

$$x\left(x^2-1\right)\left(x^2-2010\right)=a$$

в залежності від значення параметра $a\in R$. Яку максимальну кількість цілих коренів може мати таке рівняння?

13. Знайдіть кількість розв'язків рівняння $\sqrt{[x]}+\sqrt{\{x\}}=a$, де $[x]-$ ціла частина числа x, $\{x\}=x-[x]-$ дробова частина числа x, в залежності від значення параметра $a\in R$.

14. На площині зображено трикутник ABC і коло ω, яке проходить через вершину C, середини сторін AC та BC і точку перетину медіан трикутника ABC. На колі ω відзначена точка K така, що $\angle AKB=90°$. Доведіть, що дотична до кола ω у точці K проходить через середину сторони AB, і проведіть її, користуючись лише лінійкою.

15. Всередині трикутника ABC знайдіть точку G, для якої середнє геометричне відстаней до сторін трикутника набуває максимального значення.

16. Тура відвідує кожну клітинку шахової дошки рівно один раз і повертається на початкове поле. За один хід вона переходить на сусідню клітинку по горизонталі або по вертикалі. Тобто маршрут тури замкнений і є неопуклим многокутником без самоперетинів. Знайдіть площу цього многокутника, якщо площа однієї клітинки дорівнює 1, а маршрут тури проходить через центри клітинок.

17. На сторонах трикутника ABC зовнішнім чином побудовані правильні трикутники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ збігаються.

18. Плоскі кути при вершині трикутної піраміди прямі. Дослідіть взаємозв'язок між площами граней цієї піраміди.

19. Маємо 7 словосполучень мовою *сеймат* (одна з 800 мов у Папуа-Новій Гвінеї) та їх переклад у довільному порядку: {tehu ing, huhua seilon, tel seilon, toluhu ing, toluok sinen, tok sinen, huok

sinen}, {три собаки, один будинок, дві собаки, один собака, дві людини, одна людина, три будинки}.

У першому стовпчику виконані дії з числами, у другому – ті ж дії у тому ж порядку, записані словами:

$\ldots \times 2 = \ldots$	tepanim toluhu × huohu = …;
$3 \times 31 = 93$	… × … = seilon hinalo huopanim toluhu;
$\ldots + \ldots = 17$	huopanim + tepanim huohu = tolupanim huohu;
$\ldots + \ldots = 23$	… + huopanim huohu = seilon tel toluhu;
$\ldots + 60 = \ldots$	… + seilon tohu = seilon tepanim.

Заповніть пропуски та опишіть систему числівників мовою *сеймат*.

20. Грають двоє. Перший називає цифру від 2 до 9. Другий множить її на довільну цифру від 2 до 9. Потім перший множить результат на довільну цифру від 2 до 9 і т.д. Виграє той, хто вперше отримає добуток, більший за: а) 2010; б) задане число C. Хто виграє при правильній грі: перший гравець чи другий?

2011 рік

Сьомий обласний турнір юних математиків

1. Дослідіть, якого найменшого значення може набувати вираз $\frac{1024}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{2}$ для натуральних чисел $a, b, c,$ та знайдіть усі трійки таких чисел, для яких воно набувається.

2. Доведіть, що при $n=1, 2, 3$ для довільних наборів дійсних чисел: $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$; $c_1, c_2, ..., c_n$ виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^3 \le \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

3. Послідовність (a_n), $n \in N$, натуральних чисел, виписаних у довільному порядку, така, що у ній кожне натуральне число зустрічається рівно один раз. Чи завжди знайдеться таке m, що у множині $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ існує підмножина, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1+a_2+...+a_m}{2}$?

4. Доведіть, що для кожного натурального числа $n \geq 2$ існує таке натуральне число $m,$ квадрат якого можна подати у вигляді суми квадратів двох, трьох, … , n різних натуральних чисел.

5. Дослідіть, для яких натуральних чисел $n \geq 2$ існує таке натуральне число $m,$ яке можна подати у вигляді суми кубів двох, трьох, … , n натуральних чисел, не обов'язково різних.

6. Доведіть, що для кожного натурального числа $n \geq 3$ існує таке натуральне число $m,$ куб якого можна подати у вигляді суми кубів n різних натуральних чисел.

7. Для нерівних додатних чисел x, y доведіть нерівність

$$\frac{8}{(x+y)^2} \leq \frac{2}{(x-y)^2} + \frac{1}{2xy}$$

та дослідіть, для яких пар (x, y) у ній досягається рівність.

8. Знайдіть усі пари додатних чисел $x, y,$ для яких виконується нерівність

$$\frac{18}{(x+y)^4} \geq \frac{2}{(x-y)^4} + \frac{1}{x^3y + xy^3}.$$

9. Дослідіть, чи існують такі додатні числа $x, y,$ для яких виконується нерівність

$$\frac{16}{(x+y)^6} > \frac{4}{(x-y)^6} + \frac{1}{3x^5y + 10x^3y^3 + 3xy^5}.$$

10. Доведіть, що існує така трійка натуральних чисел $a, b, c,$ що кожне з чисел $a+b+c,$ $ab+bc+ca,$ $a^2+b^2+c^2$ та abc є точним квадратом.

11. Позначимо через $\{a\} = a - [a]$ дробову частину числа $a.$ Доведіть, що існує додатне число $x,$ яке задовольняє наступні три умови:

$$\frac{1}{10} < \{x\} < \frac{9}{10}, \quad \{x^2\} < \frac{1}{10^6}, \quad \{x^3\} < \frac{1}{10^6}.$$

12. Знайдіть усі такі функції $f : R \to R,$ для яких для всіх дійсних значень x, y виконується рівність $f\left(f(x) + y^2\right) = x + y^2.$

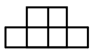
13. Дослідіть, чи існують такі функції $f: R \to R$, відмінні від $f(x) \equiv x$, для яких для всіх дійсних значеннях x, y виконується рівність $f\left(f\left(f(x)\right)+y\right)=x+y$.

14. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\frac{3x-y}{x-3y}=x^2, \quad \frac{3y-z}{y-3z}=y^2, \quad \frac{3z-x}{z-3x}=z^2.$$

15. Перевірте, чи для кожного натурального $n \le 5$ суми квадратів коефіцієнтів многочленів $P_{2n}(x)=\left(6x^2+5x+1\right)^n$ та $Q_{2n}(x)=\left(3x^2+7x+2\right)^n$, записаних у стандартному вигляді $a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$, співпадають.

16. Дослідіть, як за розкладами натуральних чисел m та n у двійковій системі числення визначити, чи є біноміальний коефіцієнт $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ парним числом.

17. Проаналізуйте умови (необхідні, достатні, або необхідні і достатні), при яких клітчасті прямокутники розмірами $m \times n$ можна розрізати по лініях сітки на фігурки, кожна з яких є або квадратом розміру 2×2, або має вигляд  у довільній орієнтації.

18. Вісім кіл радіуса r розташовані послідовно одне за одним вздовж катетів прямокутного трикутника так, що кожне наступне дотикається до попереднього. При цьому до одного катета дотикаються 5 кіл, а до іншого – 4 (одне з кіл, розташоване у вершині прямого кута, дотикається до обох катетів). Крім того, крайні кола дотикаються ще й до гіпотенузи трикутника. Знайдіть радіус кола, вписаного у цей трикутник.

19. Дослідіть питання щодо найбільшої кількості сторін многокутників, які можна отримати у перерізі площиною кожного із правильних многогранників.

20. Коло ω_0 радіуса R_0 дотикається до прямої l у точці A. Розглядаються всілякі кола ω радіуса $R=R_0$, які дотикаються до прямої l та мають з колом ω_0 дві різні спільні точки B та C, причому

точка B більш віддалена від l, ніж C. Нехай D – точка дотику кола ω до прямої l. Доведіть, що центри кіл, описаних навколо всіх отриманих таким чином трикутників ABD, лежать на колі радіуса R_0 з центром у точці A.

2012 рік

Восьмий обласний турнір юних математиків

1. П'ять нірок, де знаходиться рівно одна мишка, з'єднані за схемою 1 – 2 – 3 – 4 – 5. Хід кота полягає у перевірці рівно однієї з нірок, а мишка за один хід переходить в одну із сусідніх нірок. Кіт ходить першим і має на меті знайти мишку. Чи має він виграшну стратегію?

2. На столі лежать дві купки кульок: у першій купці m кульок, у другій n. Два гравці по черзі беруть одну, дві або три кульки із одної з купок. Виграє той, хто робить останній хід, тобто після його ходу не залишається кульок. Котрий з гравців має виграшну стратегію в залежності від m, n? Опишіть цю стратегію.

3. Попарно різні числа x, y, z задовольняють рівність

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = xyz^4 + yzx^4 + zxy^4.$$

Доведіть, що ці числа, записані у деякому порядку, утворюють геометричну прогресію.

4. Для натурального числа k визначте дійсні числа $A_0, A_1, ..., A_k$ так, щоб рівність

$$\frac{k!}{x(x+1)...(x+k)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + ... + \frac{A_k}{x+k}$$

виконувалася для всіх допустимих значень x.

5. Для натуральних чисел $n \geq 2k$ обчисліть суму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{k!}{i(i+1)...(i+k)}.$$

6. Доведіть, що послідовність

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{k!}{i(i+1)...(i+k)}, \; n \in N,$$

збіжна, та знайдіть її границю.

7. Доведіть, що число $44...488...853$, для запису якого використали 2012 четвірок та 2010 вісімок, одну п'ятірку та одну трійку, є складеним, і представте його у вигляді добутку двох натуральних чисел так, щоб модуль різниці отриманих множників був найменшим з можливих.

8. Знайдіть всі значення параметра a, за яких для всіх додатних чисел x, y виконується нерівність

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{a}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

9. Знайдіть всі натуральні числа m, n такі, що $3m^2+5n^2=A,$ де: а) $A=456$; б) $A=747$; в) $A=2012$.

10. Числа $F_n=2^{2^n}+1,\ n\geq 0,$ називаються числами Ферма. Для $n\geq 3$ представте кожне з них у вигляді суми квадратів трьох різних натуральних чисел.

11. Для кожного значення параметра $a\in[0;2]$ знайдіть усі розв'язки рівняння $[a\cdot\sin x]=[a\cdot\cos x]$ де запис $[b]$ позначає цілу частину числа b.

12. Дослідіть, яку найменшу кількість нулів може мати функція

$$T(x)=a_{2012}\cos^3(2012x)+a_{2011}\cos^3(2011x)+...+a_{15}\cos^3(15x)$$

на відрізку $[-\pi,\pi]$. Тут $a_{15}, a_{16}, ..., a_{2012}$ – деякі дійсні числа.

13. Задано числа 1, 2, 3, … , 999999999. Чи можна розбити їх на 10 груп так, щоб суми восьмих степенів чисел всіх груп були однакові?

14. Поверхню куба розмірами $5\times5\times5$ розбито на 150 одиничних квадратиків. Яку найбільшу кількість одиничних квадратиків можна вибрати так, щоб жодні два вибрані квадратики (у тому числі і квадратики на різних гранях куба) не мали спільної сторони?

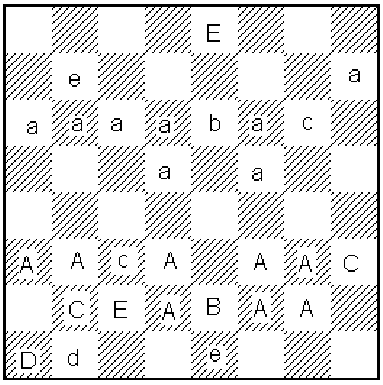
15. Поверхню прямого паралелепіпеда $m\times n\times k$ розбито на $2(mn+nk+km)$ одиничних квадратиків. Дефектом паралелепіпеда назвемо величину $\Delta=\frac{S}{2}-C$, де S – площа повної поверхні паралелепіпеда, а C – найбільша кількість одиничних квадратиків,

яку можна вибрати так, щоб жодні два вибрані квадратики (на одній чи на різних гранях) не мали спільної сторони. Знайдіть дефект паралелепіпеда розмірами $2012\times15\times8$.

16. У тупокутному трикутнику ABC пряма, яка проходить через точку перетину медіан та точку перетину бісектрис цього трикутника, паралельна до однієї з його сторін. Відомо, що довжини двох сторін трикутника дорівнюють 4 см та 6 см. Знайдіть довжину його третьої сторони.

17. На дошці був намальований трикутник ABC, в якому $AB+AC=2BC.$ У ньому провели бісектриси $AL_1, BL_2, CL_3.$ Потім усе витерли, крім точок $L_1, L_2, L_3.$ Відновити трикутник.

18. Чотири діагоналі опуклого п'ятикутника паралельні до його сторін. Чи обов'язково п'ята діагональ цього п'ятикутника також паралельна до його сторони?



19. На діаграмі зображено позицію, яка могла б трапитися у шаховій партії. Білі фігури зашифровано великими літерами, а чорні – малими (усього 14 білих і 14 чорних фігур). Фігури однакового типу зашифровано однаковими буквами: наприклад, X – білий король, x – чорний король. Розшифрувати позицію.

20. Пропагандист отримав завдання: довести, що впродовж останніх 5 років ситуація в країні монотонно покращувалась. Для доведення йому надали таблицю розміром 3×5, в якій указано три показники P, Q, R за останні 5 років. Він має право зробити наступні дві речі:

а) по-перше, йому дозволено міняти будь-яке число або числа в таблиці (хоча б і всі одразу), але тільки останню значущу цифру. Наприклад, число 711 він має право замінити на 710, 711, …, 719, а число 8300 – на 8000, 8100, …, 8900 тощо.

б) по-друге, він може на свій розсуд скласти з чисел P, Q, R «інтегральний показник», котрий має вигляд $aP+bQ+cR$

(наприклад, $20P-12Q+R$). При цьому числа a, b, c він також вибирає на свій розсуд.

Чи завжди пропагандист може виконати завдання, тобто зробити так, щоб інтегральний показник за останні 5 років незмінно зростав?

2013 рік

Дев'ятий обласний турнір юних математиків

1. Квадрат розміром 8×8 пофарбовано у білий колір. Дозволяється обирати у ньому довільний прямокутник із трьох клітинок та перефарбовувати його білі клітинки у чорний колір, чорні – у білий. Чи можна за декілька таких операцій перефарбувати весь квадрат у чорний колір?

2. Випробування автомобіля показали, що шини на колесах повністю зношуються через 36, 45, 54 або 60 тисяч кілометрів у залежності від їх розміщення (шини є однаковими, під час випробувань їх місцями не міняли). Чи вдасться, маючи 4 нові шини, проїхати 48 тисяч кілометрів, якщо при цьому дозволяється переставляти шини довільним чином?

3. Миколка та Андрійко грають у таку гру. Спочатку Миколка на свій розсуд записує на дошці 2013 непарних простих чисел (записані ним числа можуть і повторюватися). Після цього Андрійко витирає будь-яку кількість чисел, записаних Миколкою. Далі гравці по черзі (починає Миколка) виконують такі дії: гравець обирає довільну кількість простих чисел $p_1,\dots,p_n$, які залишилися, витирає їх, а замість них записує всі прості дільники числа $p_1\cdot\ldots\cdot p_n-2$. Наприклад, якщо обрані числа 5, 13, то замість них будуть записані числа 3, 3, 7, а якщо обране лише одне число 3, то після його витирання не буде записано жодного числа, бо $3-2=1$ простих дільників не має. Програє той гравець, після ходу якого на дошці не залишиться жодного числа. У котрого з гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію.

4. Дослідіть, скінченною чи нескінченною є множина пар цілих чисел (a,b), для яких серед дійсних коренів рівняння $x^{2013}=ax+b$

знайдуться такі два корені, добуток яких дорівнює 1.

5. Доведіть, що число $\sqrt{44...455...5-66...6}$, для запису якого використали 2012 четвірок, 2014 п'ятірок та 2013 шестірок, є натуральним і обчисліть його.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^5-20y^3+13z=0, \\ y^5-20z^3+13x=0, \\ z^5-20x^3+13y=0. \end{cases}$$

7. Дослідіть, якого найменшого значення набуває вираз $\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab}$ для додатних a та b.

8. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких $3^n+5^n+7^n$ ділиться на $3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}$.

9. Довжини сторін трикутника ABC, один з кутів якого дорівнює 48°, задовольняють співвідношення $(a-c)(a+c)^2+bc(a+c)=ab^2$. Запишіть у градусах величини двох інших кутів цього трикутника.

10. У чотирикутнику $ABCD$ зі сторонами $AB=BC=CD$ точки M та N є відповідно серединами діагоналей AC та BD, а точка E на стороні $BC-$ основа перпендикуляра, опущеного з точки O перетину діагоналей на цю сторону. Доведіть, що $EO-$ бісектриса кута MEN.

11. Задано многочлен $Q(x)$ третього степеня з дійсними коефіцієнтами і набір дійсних чисел $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4$. Спростіть вираз $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{4}a_iQ(x+\lambda_i)$, де $a_i=\prod_{j=1,\,j\neq i}^{4}(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}, 1\le i\le 4$.

12. Дослідіть, чи існують такі многочлени $P(x)$ та $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a та b і для всіх дійсних чисел x виконуються рівності:

а) $P\left(x+x^2\right)=x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014}$;

б) $Q\left(x+x^2+x^3\right)=x+x^2+x^3+...+x^{2010}+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}$.

13. 2027 піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили розподілити його між собою. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще 2013-ту частину від решти монет. Коли в такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з'ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну. Знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

14. Нехай $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_k$ – алфавіт дикунів племені Мумбо, а $b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_m$ – алфавіт дикунів племені Юмбо (запис «$x \prec y$» означає, що літера x передує літері y). Ці алфавіти (позначимо їх через A і B відповідно) не мають жодної спільної літери. Обидва племені вирішили об'єднатись та створити нову мову. Словом мови племені Мумбо-Юмбо вважатиметься послідовність літер $c_1 c_2 \ldots c_n$, $c_i \in A \bigcup B, 1 \le i \le n,$ яка задовольняє такі чотири умови:

а) якщо для $i < j$, $c_i \in A$ і $c_j \in A$, то $c_i \prec c_j$ або $c_i = c_j$;

б) якщо для $i < j$, $c_i \in B$ і $c_j \in B$, то $c_i \prec c_j$ або $c_i = c_j$;

в) $c_i \ne c_{i+1}$ для всіх i, $1 \le i \le n-1$;

г) $c_i \ne c_{i+2}$ для всіх i, $1 \le i \le n-2$.

Яку найбільшу довжину можуть мати слова нової мови?

15. Дано коло ω, на якому позначаються точки A, B і C. Нехай BF і CE – висоти трикутника ABC, M – середина сторони AC. Знайдіть геометричне місце точок перетину прямих BF і ME для всіляких положень точки A на колі ω.

16. Знайдіть усі такі прості числа p, для яких $37p^2 - 47p + 4$ є квадратом натурального числа.

17. Числовий автомат «ТЮМ» може виконувати такі операції з натуральними числами:

а) відняти від даного числа 3 (якщо воно більше за 3);

б) помножити дане число на 3;

в) поділити дане число на 3 (якщо воно ділиться на 3 без остачі).

Дослідіть, за яку найменшу кількість операцій можна з числа 82 отримати число 81. А з числа 81 – число 82?

18. Знайдіть усі $k \in Z$, для кожного з яких існує такий многочлен від трьох змінних $P(u,v,w)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x \in R$ і $y \in R$ виконується рівність

$$\cos(20x+13y) = P(\cos x, \cos y, \cos(x+ky)).$$

19. Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови: а) відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10; б) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по іншій.

20. Для $n=2$ та $n=3$ і додатних чисел $a_1,...,a_n$ таких, що $a_1 \cdot ... \cdot a_n = 1$, знайдіть найбільше значення виразу

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+...+a_n}.$$

2014 рік

Десятий обласний турнір юних математиків

1. На площині задані чотири точки з координатами $(0;0)$, $(0;14)$, $(20;0)$ та $(20;14)$. Ще дві точки, обидві координати яких є натуральними числами, вибрані так, що існує шестикутник (не обов'язково опуклий) з вершинами у таких шести точках. Яку найменшу площу може мати цей шестикутник?

2. 100 гир з масами 1г, 2г, 3г, …, 100г поставлені на шальки терезів так, що шальки знаходяться у положенні рівноваги. Чи завжди вдасться зняти деякі три із цих гир, щоб після їх зняття рівновага шальок збереглася?

3. Задане додатне число a є різницею обернених квадратів, тобто $a = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}$, де $n, m -$ деякі натуральні числа. Чи може так трапитись, що число $2a$ також є різницею обернених квадратів?

4. Знайдіть усі такі шістки простих чисел, для яких сума квадратів п'яти із них дорівнює квадрату шостого числа.

5. На дошці записаний квадратний тричлен $x^2 + x + 2014$. Миколка і Петрусь по черзі (розпочинає Миколка) роблять ходи у такій грі. За один хід Миколка має право збільшити або зменшити на 1 коефіцієнт біля x, а Петрусь – збільшити або зменшити на 1 останній доданок тричлена. Миколка перемагає, якщо у деякий момент отриманий тричлен матиме два (не обов'язково різні) цілі корені. Дослідіть, чи є у нього виграшна стратегія.

6. У трикутнику ABC зі сторонами $AB = 3$см, $BC = 5$см, $AC = 7$см проведені бісектриси AA_1, BB_1 та CC_1. Запишіть у градусах величину кута $A_1B_1C_1$.

7. Нехай a, b, c – додатні числа такі, що $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Знайдіть найменше можливе значення виразу $a + \frac{b^2}{2} + \frac{c^3}{3}$.

8. Відомо, що сума квадратів діагоналей довільного паралелограма дорівнює сумі квадратів чотирьох його сторін. Як виглядатиме аналогічна формула для суми квадратів чотирьох діагоналей довільного паралелепіпеда?

9. У кожній вершині трикутної піраміди записане число. На кожному ребрі записана сума чисел, які стоять на його кінцях. Відомо, що сума всіх чисел на ребрах дорівнює 3 і сума їх квадратів також дорівнює 3. Яких значень може набувати сума їх кубів?

10. Відстань між пунктами A та B становить 40км. Два велосипедисти одночасно виїхали з цих пунктів назустріч один одному. Перший рухався зі швидкістю 23км/год, а другий – зі швидкістю 17км/год. Разом з ними з одного з цих пунктів вилетіла муха, яка до їхньої зустрічі весь час літала від одного велосипедиста до іншого. Яку найменшу відстань могла пролетіти муха, якщо в одному напрямі вона летіла зі швидкістю 40км/год, а в іншому – 30км/год?

11. Орися записала у зошиті подвійну тотожність, після чого зачитала її вголос: ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс*** дорівнює ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс на ікс плюс ікс*** дорівнює ***ікс плюс ікс на ікс плюс ікс***. Наведіть приклад тотожності, яку могла записати Орися, або доведіть, що дівчина помилилася.

12. Обчисліть знакозмінну суму біноміальних коефіцієнтів:

$$C_{2014}^{0}-C_{2013}^{1}+C_{2012}^{2}-C_{2011}^{3}+\ldots+C_{1008}^{1006}-C_{1007}^{1007}.$$

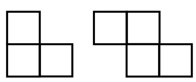
13. Для послідовності (a_n), $n\in N$, цілих чисел виконується умова $a_{n+1}=\min(a_n,0)-a_{n-1}$ для всіх $n\geq 2$. Доведіть, що ця послідовність періодична.

14. Знайдіть усі набори натуральних чисел k та додатних чисел a_1, a_2, …, a_k таких, що $\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{20}+\sqrt[n]{14}$ для всіх натуральних $n\geq 2$.

15. У трикутнику ABC на промені BA відзначили точку K таку, що $\angle BCA=\angle KCA$, а на медіані BM відзначили точку T таку, що $\angle CTK=90°$. Доведіть, що $\angle MTC=\angle MCB$.

16. Жодна грань опуклого многогранника не є трикутником. Доведіть, що існує не менше восьми його вершин, з яких виходить рівно по три ребра. (Наприклад, у куба таких вершин рівно вісім).

17. У Миколки є набір із 2014 фігурок: 1007 кутиків та 1007 зигзагів (див. рисунок справа). Яку найбільшу кількість квадратів, кожен з яких складається з непарної кількості клітинок, зможе викласти Миколка, якщо кутики та зигзаги дозволяється довільним чином повертати чи перевертати? Вже викладені квадрати він не розбирає. Жодні два з викладених квадратів не мають спільних клітинок.



18. Катруся й Михайлик мають по калькулятору. Катрусин калькулятор може або збільшити число на 1, або помножити число на 2. Калькулятор Михайлика також може збільшувати число на 1, проте множить на 3. Жодні інші операції калькулятори не виконують. У початковий момент на обох калькуляторах нулі. Катруся й Михайлик хочуть отримати на своїх калькуляторах з нуля

число 2013. Яка найменша кількість операцій знадобиться для цього Катрусі, а яка Михайлику? Розв’яжіть аналогічну задачу про отримання числа 2014.

19. Господиня чекає гостей і приготувала велику каструлю компоту. Але вона достеменно не знає, скільки буде гостей: чи то 3, чи то 7, чи то 11. Якого найбільшого об’єму може бути черпак, щоб ним напій можна було розділити приблизно порівну? «Приблизно» означає, що дозволені відхилення до 5%, тобто якщо гостей буде троє, то кожному повинно дістатися напою від 1/3 – 1/60 до 1/3 + 1/60, якщо семеро – від 1/7 – 1/140 до 1/7 + 1/140 від об’єму каструлі, аналогічно для 11 гостей.

20. Нехай

$$P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0,\ Q(x)=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0 -$$

два многочлени, причому їх коефіцієнти дорівнюють 1 або 2014. Відомо, що $Q(x)$ ділиться на $P(x)$. Доведіть, що $m+1$ є дільником числа $n+1$.

2015 рік

Одинадцятий обласний турнір юних математиків

1. Знайдіть найменше складене число n, для якого число $2^{n-1}-1$ ділиться на n.

2. Для кожного натурального числа n знайдіть усі пари натуральних чисел $x, y,$ які задовольняють рівняння $x^n - y^n = 2015.$

3. Знайдіть кількість натуральних чисел, менших за 1000, що мають таку властивість: сума цифр числа дорівнює кількості складів (тобто голосних літер) у його назві.

4. На островах $A,$ B і C живе по 2000 людей, а на острові D – 2015 жителів. Кожні два острови з’єднані між собою окремим мостом. Час від часу по мостах із якогось із островів три жителі переселяються на три інші острови – по одному на кожен острів. Чи може в результаті вийти, що на острові A житимуть 2015 осіб, а на островах B, C та D – по 2000 осіб?

5. Є набір з дев'яти цифр від 1 до 9. Виконайте наступні завдання:

а) з цього набору складіть дев'ятицифрове число, кратне 37;

б) обґрунтуйте, що існує понад 215 різних дев'ятицифрових чисел, кратних 37, які можна утворити з такого набору;

в) дослідіть, чи може їх бути більше ніж 2015.

6. Восьмицифрове натуральне число n назвемо бузковим, якщо воно складається з цифр 1, 2, …, 8, кожна з яких використовується по одному разу; число $2n$ також складається з цифр 1, 2, …, 8, кожна з яких також використана лише один раз. Розв'яжіть наступні задачі:

а) знайдіть хоч одне бузкове число;

б) доведіть, що існує більше ста бузкових чисел;

в) доведіть, що кількість бузкових чисел ділиться на 3.

7. Розв'яжіть у додатних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - 20y + 15z = 11, \\ \dfrac{1}{y} - 15z + 11x = 20, \\ \dfrac{1}{z} - 11x + 20y = 15. \end{cases} .$$

8. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}} - \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \ge \frac{1}{3}.$$

9. b_1, b_2, b_3 – перестановка невід'ємних чисел a_1, a_2, a_3. Доведіть, що

$$\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)\left(1+a_3+a_3^2\right) \ge \left(1+a_1+a_1b_1\right)\left(1+a_2+a_2b_2\right)\left(1+a_3+a_3b_3\right).$$

10. Для $x \ge 1$, $y \ge 1$ доведіть нерівність $x^y + y^x \le x^x + y^y$. Для яких ще додатних чисел x, y справджується ця нерівність?

11. Нехай

$M = \{\sin x, \arcsin x, \cos x, \arccos x, \mathrm{tg}\, x, \mathrm{arctg}\, x, \mathrm{ctg}\, x, \mathrm{arcctg}\, x\}$ – множина елементарних тригонометричних функцій від змінної x.

Дослідіть, чи існує таке натуральне число n та такі функції $f_1, f_2, ..., f_n \in M$, що $f_1\left(... f_{n-1}\left(f_n(1)\right)...\right) = 2015$.

12. На площині задано 6 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві із заданих точок провели пряму. Точку площини, яка відмінна від заданих, називатимемо потрійною, якщо через неї проходить рівно три проведені прямі. Знайдіть максимальну можливу кількість потрійних точок.

13. Дослідіть, яку найбільшу кількість ребер може мати граф з вісьмома вершинами, в якому відсутні цикли довжини 4.

14. Дослідіть, яка максимальна кількість точок, відстань між будь-якими двома із яких не менша за 1, може належати кільцю $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

15. У трикутнику ABC серединні перпендикуляри до сторін AB та BC перетинають висоту, проведену з вершини B у точках K та M відповідно. Знаючи положення точок $B, K, M,$ відновіть трикутник ABC.

16. В опуклому п'ятикутнику $A_1A_2A_3A_4A_5$ позначимо

$$a_i = \frac{A_iA_{i+1}}{\sin\left(\angle A_{i+2} + \angle A_{i+4}\right)},\ 1 \le i \le 5,$$

де $A_{k+5} = A_k,\ k \ge 1$. Доведіть, що якщо всі a_i рівні між собою, то навколо п'ятикутника можна описати коло. Чи справедливе обернене твердження?

17. Знайдіть мінімум відношення бічної сторони рівнобедреного трикутника до радіуса вписаного у нього кола.

18. Дослідіть, чи можна трьома різними хордами, жодна з яких не є діаметром, розбити круг на декілька рівновеликих частин.

19. Папа Карло витесав із дерев'яного поліна опуклий многогранник, усі грані якого – трикутники, і пофарбував його поверхню у синій колір. Буратіно розрізав цей многогранник на тетраедри: усі вершини тетраедрів є вершинами многогранника і будь-які два тетраедри або не мають спільних вершин, або мають спільну вершину, спільне ребро чи спільну грань. Буратіно стверджує,

що він це зробив так, що у кожного тетраедра рівно одна грань синя. Чи не бреше він?

20. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається сторін BC, CA, AB у точках D, E, F відповідно. Нехай X, Y, Z – точки, які діаметрально протилежні до точок D, E, F у колі ω. Прямі AX, BY, CZ перетинають сторони BC, CA, AB у точках D', E', F' відповідно. На відрізках AD', BE', CF' відзначили відповідно точки X', Y', Z' так, що $D'X' = AX$, $E'Y' = BY$, $F'Z' = CZ$. Доведіть, що точки X', Y', Z' збігаються.

2016 рік

Дванадцятий обласний турнір юних математиків

1. На Олімпійських іграх з хокею за перемогу в основний час присуджують 3 очки, за перемогу в додатковий час – 2 очки, за поразку в додатковий час – 1 очко, а за поразку в основний час – 0 очок. Дванадцять команд грають між собою турнір в одне коло.

а) Яку найменшу кількість очок може набрати команда-переможець турніру?

б) Яку найбільшу кількість очок може набрати команда, що зайняла останнє місце?

2. У Буратіно є 2016 золотих. Карабас Барабас пропонує йому зіграти в музичне казино з виконанням трьох пісень. Перед кожною з пісень Буратіно ставить якусь кількість золотих на кін і намагається вголос вгадати, хто буде співати наступну пісню: Карабас Барабас або Дуремар. Ті чують прогноз Буратіно і після цього обирають, хто буде співати. Якщо Буратіно вгадує, то поставлена сума подвоюється і повертається Буратіно. В іншому випадку Карабас Барабас і Дуремар забирають її собі. Умовою гри передбачено, що Дуремар буде співати більше пісень, аніж Карабас Барабас. Який найбільший гарантований виграш може забезпечити собі Буратіно?

3. Послідовності (x_n) та (y_n) натуральних чисел такі, що

$$x_1 = y_1 = 1; \quad x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \quad y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}, \ n \geq 2.$$

Для кожного натурального n обчисліть значення виразу $2x_n^2 - y_n^2$ та запропонуйте, як скористатися отриманим результатом для наближеного обчислення числа $\sqrt{2}$.

4. Для натуральних чисел $n=2$ та $n=3$ доведіть нерівність

$$\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}-\ldots+\sqrt{\frac{4n-3}{n}}-\sqrt{\frac{4n-2}{n}}+\sqrt{\frac{4n-1}{n}}>1.$$

Чи справджується така нерівність для $n=12$?

5. Розв’яжіть рівняння

$$2^x=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1.$$

6. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $x>y>z$, для яких справджуються рівності:

а) $x^2+y^2+z^2=2016$, б) $x^3+y^3+z^3=2016$.

7. Піфагорова трійка $(x,y,z)=(3,4,5)$ має таку властивість: x,y – два послідовні натуральні числа. Чи існують ще такі трійки? Якщо так, то скільки їх існує – скінченна чи нескінченна кількість?

8. Чи можна заповнити цілими числами таблицю 6×6 так, щоб сума всіх чисел у кожному квадраті 3×3 цієї таблиці дорівнювала 2016, а сума всіх чисел у кожному квадраті 5×5 таблиці дорівнювала 2015 ?

9. Розв’яжіть у натуральних числах k,l,m рівняння

$$1+2^k+2^{k+l}=5^m.$$

10. Для кожного дійсного значення параметра a розв’яжіть нерівність $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

11. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC вибрали точки K та N такі, що $\frac{BN}{AK}=tg^2A$. Доведіть, що ортоцентр трикутника BCK збігається з ортоцентром трикутника ACN.

12. У нерівнобедреному трикутнику ABC, в якому $\angle BAC=120^{\circ}$, провели бісектрису AL, медіану AM і відмітили центр O описаного кола. Прямі OL та AM перетинаються в точці K. Доведіть, що $\angle BKC=60^{\circ}$.

13. Послідовність (u_n), у якій $u_1=u_2=1$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$, $n\geq 2$,

називається послідовністю чисел Фібоначчі. Дослідіть, чи існують такі натуральні числа $m \geq 2$, що сума будь-яких m послідовних чисел Фібоначчі ділиться на m.

14. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$\sqrt{x^3 - 3xy^2 + 2y^3} = \sqrt[3]{13x + 8}.$$

15. У футбольному турнірі «на виліт» грає 64 команди із рівнями гри від 1 до 64 (усі команди мають різний рівень гри; матч між двома командами завжди виграє команда з вищим рівнем гри). Спершу команди розбивають на 32 пари і ці пари грають між собою, потім 32 переможців розбивають на 16 пар, які грають між собою, і т. д., поки не залишиться єдина команда — переможець турніру. *Видовищністю матчу* між двома командами назвемо модуль різниці рівнів цих команд, *видовищністю турніру* назвемо суму видовищностей усіх проведених ігор. Знайдіть найменше і найбільше можливі значення видовищності турніру.

16. У шаховому турнірі змагалися 5 шахістів: A, B, C, D, E. Турнір проходив у декілька кіл (кожен із кожним зіграв одну й ту саму кількість партій). Відомо, що всі учасники набрали різну кількість очок і за кількістю очок розташувались у порядку $ABCDE$ (за перемогу нараховується 1 очко, за нічию – $1/2$, за поразку – 0). Відомо також, що за кількістю здобутих перемог вони розташувались у зворотному порядку: $EDCBA$, тобто найбільшу кількість перемог здобув E, учасник D здобув перемог менше за E, проте більше за C тощо. Доведіть, що не менше 15 партій завершились унічию.

17. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC за такими трьома точками: точкою M перетину його медіан, точкою I – центром його вписаного кола і точкою Q_α дотику вписаного кола до сторони BC.

18. Андрійко та Миколка грають у таку гру. Андрійко вибирає 2016 точок на проміжку $(0,\infty)$. Миколка довільним чином фарбує кожну з них у синій або зелений колір. Після цього Андрійко вибирає додатне число a і фарбує проміжки $(0,a)$, $(2a,3a)$, $(4a,5a)$, ... у

синій колір, а проміжки $(a,2a)$, $(3a,4a)$, $(5a,6a)$, ... – у зелений. Якщо кожна з вибраних на початку гри Андрійком точок належатиме інтервалу того ж самого кольору, то виграє Андрійко. В іншому випадку переможцем буде Миколка. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу?

19. Послідовність невід'ємних дійсних чисел (x_n) є такою, що $x_{n+3} \le \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3}$ для всіх натуральних n. Доведіть, що ця послідовність має скінченну границю.

20. Знайдіть усі пари цілих чисел x та y, для яких

$$\left[\frac{x^2 - y^3}{x + y^2}\right] = 1 + x - y.$$

Тут $[a]$ – ціла частина числа a.

2017 рік

Тринадцятий обласний турнір юних математиків

1. На XIII обласному ТЮМ-2017 відзначили 13 переможців особистої першості. Всі вони виявилися різного зросту, але отримали однакові призи з 17 цукерок. Кожен хлопець-переможець подарував по одній цукерці кожному вищому за себе переможцеві, а кожна дівчина-переможець – кожному нижчому за себе переможцеві. В результаті в переможців Саші, Жені та Роми кількість подарованих їм цукерок виявилася однаковою. Чи обов'язково серед названих трьох учнів є: а) хоч одна дівчинка; б) хоч один хлопчик?

2. Таблицю розмірами 5×5 Миколка заповнив різними натуральними числами від 1 до 25 включно і стверджує, що всі 12 сум чисел по рядках, стовпцях та діагоналях таблиці є простими числами. Чи не помиляється він?

3. Числа Фібоначчі визначаються рівностями:

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{k+2} = F_k + F_{k+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

4. Дослідіть, яких значень можуть набувати площі трикутників $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$, $m \ge 0$, координатами яких є числа Фібоначчі.

5. Розв'яжіть наступні системи рівнянь:

$$\text{а)}\begin{cases} x^3+x+y=x^2+2, \\ y^3+y+z=y^2+2, \\ z^3+z+x=z^2+2; \end{cases} \quad \text{б)}\begin{cases} x^3+x+y=x^2+3, \\ y^5+y+z=2y^4+5, \\ z^7+2z+x=3z^6+7; \end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases} x^7+x+y=4x^6+7, \\ y^7+2y+z=3y^6+7, \\ z^7+3z+x=z^6+7. \end{cases}$$

6. Для додатних чисел a, b, c, x доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{ax^2+2bx+c}+\frac{b^3}{bx^2+2cx+a}+\frac{c^3}{cx^2+2ax+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{\left(x+1\right)^2}.$$

7. Для $a>b>c>0$ обґрунтуйте нерівності:

а) $\left(a-c\right)\left(a^2+c^2\right)>\left(a-b\right)\left(a^2+b^2\right)+\left(b-c\right)\left(b^2+c^2\right)$;

б) $\left(a+c\right)\left(a^2-c^2\right)<\left(a+b\right)\left(a^2-b^2\right)+\left(b+c\right)\left(b^2-c^2\right)$.

8. У рівнобічній трапеції $ABCD$ з основами AD та BC діагоналі перетинаються в точці P, а прямі AB та CD – в точці Q. O_1 та O_2 – центри кіл, описаних навколо трикутників ABP та CDP, r – радіус цих кіл. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними відрізками O_1O_2, PQ та радіусом r.

9. У нерівнобедреному трикутнику ABC проведено висоти AH, BT, CR. На стороні BC відмітили точку P; точки X та Y – проекції P на AB та CA відповідно. Дві спільні зовнішні дотичні до описаних кіл трикутників XBH та HCY перетинаються в точці Q. Доведіть, що точка Q лежить на фіксованій прямій, не залежно від вибору P.

10. Вкажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку

M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існують принаймні два таких трикутники, які не є подібними?

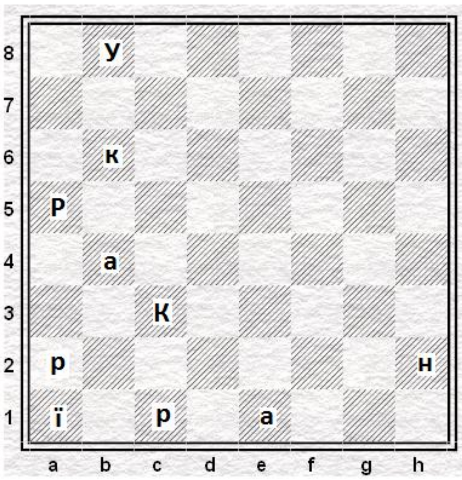
11. Знайдіть хоч одну четвірку натуральних чисел a, b, c, d таких, що $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

12. Знайдіть усі натуральні числа n, k такі, що $C_{n-1}^{k+1} = C_{n+1}^{k-1}$.

13. Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

14. Паркан складається з 20 непофарбованих дощок. Марічка і Петрик по черзі фарбують дошки в блакитний або жовтий колір (кожен з гравців може пофарбувати будь-яку не пофарбовану дошку в будь-який із двох кольорів). Починає Марічка. Вона хоче, щоб у пофарбованому паркані було якомога більше кольорових переходів, Петрик – щоб їх було якомога менше. Таким чином, ідеал Марічки – це паркан, пофарбований у шаховому порядку (19 переходів), а ідеал Петрика – однокольоровий паркан (0 переходів). Як слід грати Марічці та Петрику, щоб кожен з них досягнув своєї мети, та яку кількість кольорових переходів матиме паркан?

15. На діаграмі зображено позицію, яка могла би виникнути в шаховій партії. Різні літери позначають різні шахові фігури. Великі літери відповідають певному кольору фігури, маленькі – іншому кольору. Треба визначити цю позицію.



16. Для множини $\{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$

17. Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п’ять взаємно простих доданків, які більші за 1.

18. Яку найбільшу кількість дільників може мати число m, якщо відомо, що воно менше за 1 000 000 ? (Одиниця та m також вважаються дільниками).

19. Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$ відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3.$$

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

20. На деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n\left(\sqrt{n}+1\right)$.

Примітка. Для узагальнень окремих задач рекомендується використати умови завдань заключного етапу Всеукраїнського турніру юних математиків.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

2005 рік

1. Розташуємо рядки таблиці так, щоб числа у третьому стовпчику були записані у порядку зростання. Розглянемо 5 прямокутників, в яких верхня ліва клітинка співпадає з верхньою лівою клітинкою таблиці, а права нижня клітинка знаходиться у третьому стовпчику таблиці. Кожне число у правій нижній клітинці таких прямокутників виявиться більшим від усіх інших чисел відповідного прямокутника. Тому числа третього стовпчика не можуть бути меншими, ніж 3, 6, 9, 12 та 15, а їх сума – меншою за 45. Аналогічно доводиться, що така сума не перевищує 85. У разі рівності в третьому стовпчику будуть записані числа 11, 14, 17, 20, 23.

2. Виконаємо поворот трикутника AMC на кут 60° навколо точки A так, щоб точка C перейшла у точку B, а точка M – у точку K. Тоді трикутник AKM рівносторонній, KBM – той трикутник, існування якого слід було довести. Нескладно переконатися, що його кути дорівнюють 60°, 65° та 55° відповідно.

3. Розглянемо трикутник ABC, в якому $AB = BC = b,\ AC = a,$ $2b > a,$ медіана $AM = m.$ Тоді $a + 2b + 2m = 24 + 30 = 54,\ \ |a - b| = 6.$ Якщо периметр трикутника AMC дорівнює 30см, то звідси знаходимо $a = b + 6,\quad m = 24 - \dfrac{3b}{2}.$ Доповнивши трикутник ABC до паралелограма, для його сторін і діагоналей отримаємо рівність $2(b+6)^2 + 2b^2 = b^2 + 2(48 - 3b)^2$. Звідси легко знайти b, а отже й a. Аналогічно розглядається випадок, коли периметр трикутника AMC дорівнює 24см. Слід лише не забути для кожного з чотирьох отриманих при цьому розв'язків перевірити виконання нерівностей для сторін трикутників AMC та BMC.

4. З нерівності $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \ge (n+1)a - nb$ для додатних чисел a та b отримуємо

$$\frac{2^2}{1^1}+\frac{3^3}{2^2}+\ldots+\frac{2005^{2005}}{2004^{2004}}>4+\left(3\cdot3-2\cdot2\right)+\ldots+\left(2005\cdot2005-2004\cdot2004\right)=2005^2.$$

5. Існує. Наприклад, це трикутник, вершини якого мають координати: $A(16;0)$, $B(9;24)$, $C(0;12)$. Тоді $AC=20$, $BC=15$, $AB=25$, $AC^2+BC^2=AB^2$. На основі теореми, оберненої до теореми Піфагора, $\angle ACB=90^\circ$.

6. Для всіх $n\in N$. Для доведення методом математичної індукції достатньо скористатись рівністю вигляду $a_{n+1}=a_n\cdot10...010...01.$.

7. Нехай для конкретності $AB=60$см, $BC=30$см, $AC=45$см. Для того, щоб відрізки AA_m, BB_n, CC_k перетинались в одній точці, на основі теореми Чеви необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\frac{AB_n}{B_nC}\cdot\frac{CA_m}{A_mB}\cdot\frac{BC_k}{C_kA}=1$. Якщо $AB_n=3n$(см), $CA_m=2m$(см), $BC_k=4k$(см), де $m,n,k=1,2,...,14,$ то отримуємо рівняння $mnk=(15-m)(15-n)(15-k)$. З рівності $10\cdot10\cdot3=5\cdot5\cdot12$ знаходимо 6 можливих точок перетину, оскільки дорівнювати 3 може будь-який із множників попереднього рівняння, і при цьому значення решти множників встановлюються однозначно. Легко перевірити, що інших розв'язків таке рівняння не має.

8. Послідовно запалюючи кожен наступний шнур після повного згорання попереднього, зможемо відміряти 1, 2 та 3 години. Перший шнур, запалений одночасно з двох кінців, згорить за півгодини. Якщо тепер послідовно запалювати кожен наступний шнур після повного згорання попереднього, то зможемо відміряти півтори та дві з половиною години. Якщо одночасно запалити перший шнур двох кінців, а другий – з одного кінця, і після згорання першого шнура запалити другий з другого кінця, то завершення його горіння залишиться 15 хвилин. При цьому від самого початку пройде 45 хвилин. Запаливши ж після цього третій шнур з одного чи двох кінців одночасно, зможемо відміряти відповідно 1 годину 45 хвилин чи 1 годину 15 хвилин. І, нарешті, якщо одночасно запалити всі три шнури – перший з двох кінців, а два інші – з одного, після згорання

першого запалити другий шнур з другого кінця, а після згорання другого запалити третій шнур з другого кінця, то вдасться відміряти відповідно $52\frac{1}{2},\ 22\frac{1}{2},\ 7\frac{1}{2}$ хвилин в залежності від того, з моменту котрого запалювання розпочинатимемо відлік часу. Можливі й інші варіанти.

9. Оскільки $D(y)=[0,2]$, то покладемо $x=2\sin^2 t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$y=f(t)=\sqrt{2}\sin t+4\cos t=3\sqrt{2}\cos(t-\varphi)\le 3\sqrt{2},$$

де $\sin\varphi=\frac{1}{3},\ \cos\varphi=\frac{4}{3\sqrt{2}},\ \varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки $f(0)=4,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2},$ $f(\varphi)=3\sqrt{2},$ то $\min\{y\}=\sqrt{2},\ \max\{y\}=3\sqrt{2}.$

10. Позначимо $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=x$. Звідси послідовно знаходимо: $\left(x-\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2,\ x^4=4\left(\sqrt{5}x+\sqrt{6}\right)^2,\ \left(x^4-20x^2-24\right)^2=\left(8\sqrt{30}x\right)^2$. Отже, многочлен $P_8(x)=\left(x^4-20x^2-24\right)^2-1920x^2$ є шуканим.

11. а). Не обов’язково. Наприклад, якщо одна вершина та внутрішні точки протилежної до неї сторони зафарбовані в один колір, а решта точок трикутника – в інший.

б). Обов’язково. Розділимо кожну зі сторін трикутника на три рівні частини. При цьому точки поділу будуть вершинами правильного шестикутника. Якщо деякі дві його протилежні вершини мають однаковий колір, то, якими би не були кольори інших чотирьох вершин, існує шуканий прямокутний трикутник з вершинами у точках поділу. Якщо ж усі пари протилежних вершин мають різний колір, то знайдуться дві сусідні вершини різного кольору, які лежать на різних сторонах трикутника. Позначимо їх буквами A та B, а протилежні до них вершини шестикутника – буквами C та E відповідно. Зрозуміло, що дві останні знаходяться на одній стороні трикутника. Якщо тепер X – довільна, відмінна від них точка на цій же стороні, то один із трикутників AEX чи BCX буде шуканим.

12. Правильно. Методом математичної індукції легко довести, що $a_n = 2^n + (-1)^n$, $n \in Z_+$.

13. а). Нехай AB – заданий відрізок. Виберемо довільну точку P, яка не лежить на заданих прямих та між ними, і проведемо прямі AP та BP. Точки їх перетину з другою паралельною прямою позначимо D та C відповідно. Нехай Q – точка перетину прямих AC та BD. Тоді пряма PQ ділить відрізок AB пополам. Для обґрунтування достатньо розглянути паралельний до AB відрізок MN з кінцями на AD та BC, який проходить через точку Q, і доведіть, що $MQ = NQ$.

б). Виберемо на другій прямій довільний відрізок EF. Нехай M – середина цього відрізка. Її легко знайти методом, описаним у попередньому пункті. Якщо G – точка перетину прямих AM та BE, H – точка перетину прямих FG та AB, то $HB = 2AB$.

14. Запишемо задану рівність у вигляді:

$$2(\sin A + \sin B + \sin C)\cdot\cos 60^\circ = 2(\cos A + \cos B + \cos C)\cdot\sin 60^\circ.$$

Перетворивши тут добутки тригонометричних функцій у суми, одержимо $\sin\left(A - 60^\circ\right) + \sin\left(B - 60^\circ\right) + \sin\left(C - 60^\circ\right) = 0.$ Позначимо $A - 60^\circ = \alpha,\ B - 60^\circ = \beta,\ A - 60^\circ = \gamma.$ Тоді $\alpha + \beta + \gamma = 0,$ отже маємо $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) = 0,$ $\quad 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} - \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0,$ $4\sin\dfrac{\gamma}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2} = 0,$ звідки й випливає твердження задачі.

15. Помножимо обидві частини нерівності на 2 і запишемо її у вигляді: $a^2 + (a-b)^2 + (b-3)^2 + (c-2)^2 + c^2 \le 7.$ Оскільки доданки у лівій частині отриманої нерівності можуть набувати лише значень 0, 1, 4, то повний перебір можливих варіантів виконати нескладно.

16. а). Виберемо на стороні AB довільну точку P таку, що $AP < BC,$ а на стороні BC – точку H таку, що $AP = HC.$ Побудуємо коло радіуса PA з центром у точці P. Через точку H проведемо пряму, паралельну до AC. Позначимо через E ту із точок перетину

цієї прямої з колом, для якої пряма AE перетинає сторону BC. Отримана при цьому точка перетину зі стороною BC і буде шуканою точкою K. Проведемо через неї пряму, паралельну до PE. На перетині цієї прямої зі стороною AB отримаємо шукану точку M .

б). Оскільки за умовою задачі $MB = MK$ та $MK = KC,$ то $\angle MBK = \angle MKB = 2\angle MCK.$ Звідси випливає, що точку M слід вибрати на AB так, щоб $\angle BCM = \frac{1}{2}\angle ABC,$ а точку K взяти на перетині серединного перпендикуляра до CM зі стороною BC.

17. Позначимо $\sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}} = a > 0.$ Тоді

$$a^2 = 1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}} = 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3+...+\sqrt{n}}} =$$

$$= 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+...+\sqrt{\frac{n}{2^{2^{n-2}}}}}} < 1+\sqrt{2}a.$$

З отриманої квадратичної нерівності знаходимо $a < \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} < 2.$

18. Правильно. З умови задачі випливає, що жодні три прямі не перетинаються в одній точці. Три точки перетину цих прямих, які лежать в одній півплощині відносно однієї з проведених прямих, позначимо буквами A, B, C. Нехай прямі AB, AC, BC перетинають четверту пряму у точках D, E, F відповідно. Позначимо через P точку перетину кіл, описаних навколо трикутників ABC та CEF, відмінну від точки C. Оскільки

$$\angle BPF = \angle BPC + \angle CPF = \angle DAC + \angle CED = 180^\circ - \angle BDF,$$

то точка P лежить на колі, описаному навколо трикутника BDF. Аналогічно доводиться, що вона лежить і на колі, описаному навколо трикутника ADE. Цю точку називають точкою Мікеля.

19. $xy + yz + zx = \frac{1}{2}\Big[\left(x+y+z\right)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right)\Big] = \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right),$

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{c} \Rightarrow xyz = \frac{1}{2}c\left(a^2-b^2\right).$$

Звідси отримуємо, що

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz=$$
$$=a^3+\frac{3}{2}(a^2-b^2)(c-a).$$

20. Нехай $f(m)=k-$ найменше значення такої функції при $n\ge 2$. Оскільки $f(f(m-1))\ge 1$, то при $f(m+1)\ne 1$ одержимо, що $f(f(m+1))\ge k$. А отже, задана рівність для такого $n=m\ge 2$ виконуватися не буде. Якщо ж $f(m+1)=1$, то $k=1$. Але у такому випадку при $n=m$ ліва частина заданої рівності дорівнює 1, а права не менша 2. Отже, вказаної функції не існує.

2006 рік

1. $n=1$. Для інших натуральних n справджується нерівність

$$(n^2+n)^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+2<(n^2+n+1)^2.$$

2. Для жодного. Для $n\le 4$ таке число не закінчується нулем, а для $n\ge 5$ у його розкладі на прості множники степінь множника 2 принаймні на 2 більший за степінь множника 5. Але 2006 на 4 не ділиться.

3. Всі $n\in N$. Нехай десятковий запис числа 2^n містить m цифр, а запис числа 5^n складається з k цифр. Тоді $10^{m-1}<2^n<10^m$, $10^{k-1}<5^n<10^k$, $10^{m+k-2}<2^n\cdot 5^n<10^{m+k}$. Звідси отримуємо $m+k=n+1$.

4. Правильно. Остачі від ділення чисел 8^k на 9 чергуються: 8, 1, 8, 1, … . Тому $8^{2006}\equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$. За вказаних операцій отримані числа з кожним кроком зменшуються і кожен раз при діленні на 9 дають остачу 1. Якщо на жодному кроці не отримаємо число 10^n, $n\ge 2$, то на деякому кроці прийдемо до двоцифрового числа. Воно або саме дорівнюватиме 10, або сума його цифр дорівнюватиме 10. Тоді 10 отримаємо на наступному кроці.

5. Нехай $f(x)=ax^2+bx+c$ для всіх $x\in Z$ набуває цілочислових значень. Звідси маємо: $f(0)=c\Rightarrow c\in Z$, $f(1)=a+b+c\Rightarrow a+b\in Z$, $f(-1)=a-b+c\Rightarrow a-b\in Z$. Тому також $2a\in Z$ та $2b\in Z$.

Навпаки, якщо $c \in Z$, $a+b \in Z$ та $a-b \in Z$, то квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c = 2a\frac{x(x+1)}{2} + (b-a)x + c$ для всіх $x \in Z$ набуває цілочислових значень.

6. Не обов'язково. Наприклад, рівняння $x^2 - (-1)^k \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ мають дійсні корені $x_1 = (-1)^k$ та $x_2 = (-1)^k \cdot \frac{1}{2}$, які за абсолютною величиною не перевищують одиниці, для кожного $k = \overline{1,2006}$. Але рівняння $x^2 + \frac{1}{2} = 0$ дійсних коренів не має.

Зауважимо, що у випадку наявності дійсних коренів рівняння $f(x) \equiv x^2 + \frac{p_1 + ... + p_{2006}}{2006}x + \frac{q_1 + ... + q_{2006}}{2006} = 0$, вони за модулем не перевищуватимуть одиниці. Справді, з умови задачі випливає, що $x^2 + p_k x + q_k > 0,\ k = \overline{1,\ 2006},$ для $|x| > 1$. Додавши 2006 таких нерівностей, отримаємо $2006 f(x) > 0,$ якщо $|x| > 1.$

7. Правильно. Оскільки $\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$, то для кутів $\alpha = 20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ отримаємо $\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\left(3 - \mathrm{tg}^2\alpha\right)^2}{\left(1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha\right)^2} = 3.$ Взявши $x = \mathrm{tg}^2\alpha,$ будемо мати $x(3-x)^2 = 3(1-3x)^2$. Звідси $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$.

8. Нехай $a, b, c -$ сторони такого трикутника. За формулами Вієта маємо: $a+b+c=m$, $ab+bc+ca=n$, $abc=k$. З нерівностей $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ та $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ отримуємо $n^3 \geq 27k^2$ та $m^2 \geq 3n$, тобто $m^6 \geq 27n^3 \geq (27k)^2$.

Для існування трикутника необхідно, щоб його найбільша сторона була меншою за суму двох інших, отже, меншою за $\frac{m}{2}$.

З геометричних міркувань це означає, що для функції $f(x)=x^3-mx^2+nx-k$ повинна виконуватися нерівність

$$f\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{m^3}{8}-\frac{m^3}{4}+\frac{mn}{2}-k=-\frac{m^3}{8}+\frac{mn}{2}-k>0\Leftrightarrow m^3-4mn+8k<0.$$

Зауважимо, що така нерівність справджується і у випадку, коли два з коренів рівняння є більшими за $\frac{m}{2}$, а третій – менший, але така ситуація неможлива, бо при цьому $a+b+c>m$.

Підсумовуючи сказане, отримаємо наступні умови існування трикутника: $m^6\geq 27n^3\geq(27k)^2$ та $m^3-4mn+8k<0$.

9. Нехай $x_1=1+t$, $x_2=1-t$, $t\in[-1;1]$. Розглянемо функцію

$$f(t)=\frac{1}{1+(1+t)^2}+\frac{1}{1+(1-t)^2}=\frac{4+2t^2}{4+t^4}.$$

Прирівнюючи її похідну $f'(t)=\frac{-4t\left(t^4+4t^2-4\right)}{\left(4+t^4\right)^2}$ до нуля, отримаємо точку мінімуму $t_1=0$ та дві точки максимуму, для яких $t^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)<1$. Тому найбільшим значенням заданого виразу є значення

$$\frac{4+4\left(\sqrt{2}-1\right)}{4+\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

10. Нехай $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$a_1=\sin\alpha,\ a_2=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2},\ \ldots,\ a_n=\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}<\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Тому

$$a_1+a_2+\ldots+a_n<a_1+\alpha\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\approx 1{,}4925<\frac{3}{2},\ n\in N.$$

11. Обов'язково. Для двох міст це очевидно. Припустимо, що такий об'їзд можливий для $n\leq k$ міст (для $n=1$ виїздити з міста

нікуди не потрібно). Тоді для $n = k + 1$ розглянемо місто M. Якщо з решти міст всі дороги ведуть до нього, то об'їзд k міст можна продовжити до міста M. Якщо ж хоч одна дорога виходить з M, то решту міст розіб'ємо на дві групи. До першої включимо міста, з яких дороги ведуть до M. Об'їхавши їх згідно зробленого припущення, маршрут можна буде продовжити до M. До другої групи включимо міста, до яких ведуть дороги з міста M. За зробленим припущенням їх теж можна об'їхати. Тому достатньо буде продовжити рух з міста M до міста, з якого розпочинається цей об'їзд.

12. Суми номерів на двох кульках можуть набирати довільних цілих значень від 3 до 199 включно, всього – 197 можливостей. Знайдемо найменше m, за якого з m кульок можна вибрати дві більше, ніж 197 способами. З нерівності $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2} > 197$ знаходимо, що таким є $m = 21$. Отже, серед 21 кульок завжди знайдуться пари кульок (p, q) та (l, k) такі, що $p + q = l + k$. Це будуть чотири різні кульки, бо, наприклад, за рівності $p = l$ отримали би, що й $q = k$, тобто мали би не дві, а одну і ту ж пару. Отже, максимум може бути загублено $n = 100 - 21 = 79$ кульок.

13. Зрозуміло, що це відношення задовольняють круги. Крім них, виділимо ще декілька класів таких фігур. Нехай ABC – правильний трикутник зі стороною a. Побудуємо дуги BC, CA та AB кіл з центрами у точках A, B та C відповідно і радіусами $R = a$. Сума довжин таких дуг дорівнює πa, а обмежена ними фігура має діаметр a. Аналогічну конструкцію отримаємо, відштовхуючись від правильних многокутників з довільною непарною кількістю вершин.

14. а), б), в). Площа трикутника менша за 1. Зокрема, у першому випадку вона не перевищує $\frac{1}{2}$, а у двох інших – $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

г). Площа трикутника може набувати як завгодно великих значень. Розглянемо рівнобедрений тупокутний трикутник, бічні сторони якого дорівнюють $2n$, а проведена до них висота $h = 1$. Тоді висота проведена до третьої основи менша за 1, а площа такого трикутника дорівнює n.

15. а). $k = 4\sqrt{3}$. Поклавши $a = b = c = 1$, отримаємо $3 \ge \frac{\sqrt{3}}{4}k$, звідки $k \le 4\sqrt{3}$. Доведемо, що для сторін довільного трикутника справджується нерівність $ab + bc + ca \ge 4\sqrt{3}S$, яка після ділення на $2S$ зводиться до нерівності $\frac{1}{\sin\angle C} + \frac{1}{\sin\angle A} + \frac{1}{\sin\angle B} \ge 2\sqrt{3}$. Оскільки на інтервалі $(0;\pi)$ функція $\frac{1}{\sin x}$ має напрям опуклості вниз, то за нерівністю Єнсена отримуємо:

$$\frac{1}{\sin\angle C} + \frac{1}{\sin\angle A} + \frac{1}{\sin\angle B} \ge \frac{3}{\sin\left(\frac{\angle A + \angle B + \angle C}{3}\right)} = 2\sqrt{3}.$$

б). $k = 4\sqrt{3}$. Поклавши $a = b = c = 1$, отримаємо $3 \ge \frac{\sqrt{3}}{4}k$, звідки $k \le 4\sqrt{3}$. Далі, з врахуванням доведеної в а) нерівності, для сторін довільного трикутника отримуємо: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \ge 4\sqrt{3}S$.

16. Для всіх. З рівностей $S = \frac{abc}{4R}$ та $S = pr = \frac{(a+b+c)r}{2}$ отримуємо $\frac{1}{2Rr} = \frac{4S}{abc} \cdot \frac{a+b+c}{4S} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$.

17. Враховуючи множину значень функцій синус та косинус і область визначення функції тангенс, отримуємо, що $c \ge 2$, отже, $0 < tg\frac{90^{\circ}}{c} \le 1$ та $1 \le \sin\frac{180^{\circ}}{a} + \cos\frac{120^{\circ}}{b} < 2$. Звідси випливає, що $a > 0$ та $|b| \ge 2$. Умову задачі задовольняють такі трійки цілих чисел: $a = 6,\ b = 2,\ c = 2$ та $a = 6,\ b = -2,\ c = 2$.

18. $\cos 36^{\circ} > \mathrm{tg} 36^{\circ}$. Справді, маємо:

$$\cos 36^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \cos^2 36^{\circ} = \frac{3+\sqrt{5}}{8} \Rightarrow \sin^2 36^{\circ} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow \mathrm{tg}^2 36^{\circ} = \frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$$

Тому достатньо порівняти числа $\frac{3+\sqrt{5}}{8}$ та $\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{10-4\sqrt{5}}{7}$.

Це рівносильне порівнянню чисел $39\sqrt{5}$ та 59. Перше з них більше, бо $39\sqrt{5}>39\cdot 2=78$.

19. Оскільки у куба лише 6 граней, то не вдасться отримати у перетині многокутників більш як з шістьма вершинами. При цьому правильний шестикутник отримаємо з вершинами у серединах шістьох ребер куба; правильний чотирикутник – при перетині куба площиною, паралельною до однієї з його граней; правильний трикутник – при перетині куба площиною, перпендикулярною до його діагоналі.

Доведемо, що правильний п’ятикутник отримати не вдасться. Справді, переріз куба, в результаті якого утворюється п’ятикутник, проходить через одну з вершин куба і перетинає дві протилежні грані вздовж паралельних прямих. А у правильному п’ятикутнику паралельних сторін немає.

20. Починаючи від вершини, зафарбуємо одиничні кубики, з яких складається такий паралелепіпед, у чотири кольори так, щоб кожен паралелепіпед розмірами $1\times1\times4$ складався з одиничних кубиків чотирьох різних кольорів. При такому розфарбуванні кубиків двох кольорів виявиться порівну, а двох інших – теж порівну, але на 2 більше, ніж перших двох. Тому помістити більше, ніж $\frac{6\times6\times2006}{4}-1=18053$ паралелепіпедів не вдасться. Саме таку кількість паралелепіпедів розмістити можна. Спочатку заповнюємо паралелепіпед розмірами $6\times6\times2000$, а потім у кубі розмірами $6\times6\times6$ залишаємо незаповненими два одиничні кубики, які прилягають до кутового кубика, та два симетричні до них кубики відносно центра куба.

2007 рік

1. Десять. Справді,

$$\left(n_К+n_М+n_Г\right)-\left(n_{КМ}+n_{КГ}+n_{МГ}\right)+n_{КМГ}=\left(7+6+5\right)-\left(4+3+2\right)+1=10.$$

2. $S=0$ або $S=1$. Нехай $S-$ сума чисел всієї таблиці, а S_k – сума чисел $k-$того рядка. Тоді для кожного k справджується рівність: $S_k = S_k \cdot S$. Якщо при цьому всі S_k дорівнюють нулю, то й $S=0$. Це можливо, наприклад, за умови, що всі елементи таблиці є нулями. Якщо ж хоч одне $S_k \neq 0$, то отримуємо $S=1$. Зокрема, таке значення набувається, якщо всі елементи таблиці дорівнюють $\frac{1}{mn}$.

3. Без поділок можна виміряти лише відстань 100. Одна поділка дасть змогу додатково виміряти щонайбільше дві різні відстані, наступна – щонайбільше три, …, чотирнадцята – щонайбільше 15 різних відстаней. Оскільки $2+3+...+14<99<2+3+...+15$, то потрібно нанести не менше 14 поділок.

4. Розв'язками такого рівняння, зокрема, є розв'язки системи рівнянь: $x^m = 2^p,\ y^n = 2^p,\ z^k = 2^{p+1}$, де $p \vdots m,\ p \vdots n,\ p+1 \vdots k$. Оскільки числа m, n взаємно прості, то $p = amn,\ p+1 = bk$. Звідси отримуємо лінійне діофантове рівняння $kb - mna = 1$ відносно натуральних чисел a, b із взаємно простими коефіцієнтами, яке, як відомо, має безліч розв'язків. Відповідно отримуємо і безліч натуральних чисел p, які задовольняють записані вище умови подільності, а отже, і безліч розв'язків заданого діофантового рівняння: $x = 2^{an}$, $y = 2^{am}$, $z = 2^b$.

Знайдений набір розв'язків не єдиний. Нехай числа x_0, y_0, z_0 задовольняють дане рівняння. Позначимо $q = mnk$. Тоді при кожному $l \in N$ розв'язками будуть також: $x_l = x_0 \cdot l^{nk}$, $y_l = y_0 \cdot l^{mk}$, $z_l = z_0 \cdot l^{mn}$.

Цікавим є питання, чи має дане рівняння попарно взаємно прості розв'язки. Якщо один із степенів дорівнює 2, то відповідні приклади відомі. Якщо ж всі показники степеня не менші 3, то така проблема досі залишається нерозв'язаною.

5. Такий спосіб множення ґрунтується на тотожності

$$142857a \equiv \frac{(a-1)10^6 + (10^6 - a)}{7} \equiv \frac{999999}{7}a.$$

Його суть полягає в тому, що у чисельнику дробу записують дванадцятицифрове число, перші 6 цифр якого утворюють число

$a-1$, а останні 6 цифр доповнюють a до 1000000.

6. Якщо жодне з цих чисел не ділиться на 3, то при діленні на 3 ліва частина дає остачу 2, а права – остачу 1. Тому принаймні одне з таких простих чисел дорівнює 3. Ним не є число r, бо ліва частина рівняння набуває лише додатних значень. Для конкретності будемо вважати, що $q=3$ і запишемо отримане при цьому рівняння у вигляді $(r-p-3)(r+p)=18$. Для простих чисел r та p з нього отримуємо такі три системи рівнянь:

$$\begin{cases} r-p-3=1, \\ r+p=18, \end{cases} \quad \begin{cases} r-p-3=2, \\ r+p=9, \end{cases} \quad \begin{cases} r-p-3=3, \\ r+p=6. \end{cases}.$$

Перша з них розв'язків у простих числах не має, а другої та третьої відповідно знаходимо $r=7$, $p=2$ та $r=11$, $p=7$. Аналогічно розглядається випадок, коли $p=2$. При цьому отримаємо $r=7$, $q=2$ та $r=11$, $q=7$.

7. Така множина є нескінченною. Нескладно переконатися, що

$$\left(1+6n^3\right)^3+\left(1-6n^3\right)^3+\left(-6n^2\right)^3\equiv 2.$$

8. Скориставшись нерівностями $a^2+b^2\ge 2ab$, $b^2+c^2\ge 2bc$, $c^2+a^2\ge 2ca$ та рівністю $abc=1$, отримаємо

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\le$$

$$\le\frac{1}{2(1+a+ab)}+\frac{1}{2(1+b+bc)}+\frac{1}{2(1+c+ca)}=$$

$$=\frac{1}{2(1+a+ab)}+\frac{a}{2a(1+b+bc)}+\frac{ab}{2ab(1+c+ca)}=\frac{1+a+ab}{2(1+a+ab)}=\frac{1}{2}.$$

Рівність досягається за умови $a=b=c=1$.

9. Віднімемо від обох частин нерівності праву частину і додамо до обох частин x^2y^2. Тепер запишемо нерівність у вигляді

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-xy-1)\ge x^2y^2.$$

Оскільки $x^2+y^2\ge 2xy>0$, то буде достатньо довести нерівність $x^2+y^2-xy-1\ge\dfrac{xy}{2}$, або, що те саме, $2\left(x^2+y^2\right)\ge 3xy+2$.

Ще раз скористаємося нерівністю $x^2+y^2\ge 2xy$ і отримаємо для доведення нерівність $x^2+y^2\ge xy+2$. Справедливість останньої випливає з таких двох нерівностей: $\left(y^2-2\right)+x\left(x-y\right)\ge 0,\ x\ge y\ge\sqrt{2}$, та $\left(x^2-2\right)+y\left(y-x\right)\ge 0,\ y\ge x\ge\sqrt{2}$.

10. З умови задачі маємо: якщо $a-b$ ділиться на кожне з чисел m, n, k, то $a-b$ має ділитися й на mnk. Для цього числа m, n, k повинні бути попарно взаємно простими.

11. Покладемо $1=a,\ 2=b,\ 3=c$ і запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}-b\sqrt{y}+c\sqrt{z}=a,\\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-c\sqrt{z}+a\sqrt{x}=b,\\ \dfrac{1}{\sqrt{z}}-a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=c,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+\sqrt{y}b-\sqrt{z}c=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\\ -\sqrt{x}a+\sqrt{b}+\sqrt{z}c=\dfrac{1}{\sqrt{y}},\\ \sqrt{x}a-\sqrt{y}b+c=\dfrac{1}{\sqrt{z}}.\end{cases}$$

Визначник отриманої системи трьох лінійних рівнянь відносно невідомих a, b, c дорівнює

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \sqrt{y} & -\sqrt{z}\\ -\sqrt{x} & 1 & \sqrt{z}\\ \sqrt{x} & -\sqrt{y} & 1\end{vmatrix}=1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\ne 0$$

для довільних додатних чисел x, y, z, тому за таких x, y, z вона має єдиний розв’язок. Легко переконатися, що $a=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ b=\dfrac{1}{\sqrt{y}},\ c=\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

Звідси $x=\dfrac{1}{a^2}=1,\ y=\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4},\ z=\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{9}$.

12. З рівності $\operatorname{tg}\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ отримаємо

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\left(\alpha-\beta\right)}-1.$$

Тому

$$tgx\cdot tg2x+tg2x\cdot tg3x+...+tg2006x\cdot tg2007x=$$

$$=\left(\frac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}-1\right)+\left(\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}x}-1\right)+...+\left(\frac{\operatorname{tg}2007x-\operatorname{tg}2006x}{\operatorname{tg}x}-1\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}2007x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}-2006=\frac{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2007}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2007}}-2006=-2007.$$

13. Підставивши у задане рівняння $y=x$, отримаємо $f^2(x)=x^2$, звідки $|f(x)|=|x|$. Припустимо, що існують такі дійсні аргументи t та z, що $f(t)=t$, $f(z)=-z$. Поклавши $x=t$, $y=z$, отримаємо $-tz=tz$. Тому принаймні один цих аргументів дорівнює нулю. Отже, рівняння має лише такі два розв'язки $f(x)=x$ та $f(x)=-x$. Обидва вони є неперервними функціями.

14. а). За сторонами a, b та медіаною m, проведеною до третьої сторони з рівності $c^2+(2m)^2=2\left(a^2+b^2\right)$ однозначно визначається сторона c. Отже, ця ознака зводиться до ознаки рівності трикутників за трьома сторонами.

б). За сторонами a, b та висотою h, проведеною до третьої сторони, остання у випадку $a\neq b$ визначається неоднозначно: $c=\left|\sqrt{a^2-h^2}\pm\sqrt{b^2-h^2}\right|$. Тому така «ознака» неправомірна.

в). За сторонами a, b та бісектрисою l, проведеною до третьої сторони, з того, що площа трикутника дорівнює сумі площ двох його частин, розділених бісектрисою, знаходимо $\cos\frac{\angle C}{2}=\frac{(a+b)l}{2bc}$. Оскільки $0<\frac{\angle C}{2}<90^\circ$, то ця ознака зводиться до ознаки рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.

15. Нехай вершини трикутника ABC знаходяться у точках $A(x,y)$, $B(-3;0)$, $C(2;0)$. Оскільки бісектриса AL, де $L(0;0)$, ділить протилежну сторону на пропорційні прилеглим сторонам відрізки, то

$$\frac{(x+3)^2+y^2}{3^2}=\frac{(x-2)^2+y^2}{2^2}\Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=6^2.$$

Отже, висота такого трикутника з основою BC щонайбільше може дорівнювати 6. Тому максимальна площа $S=\frac{5\cdot 6}{2}=15.$

16. Нехай вписане коло дотикається до сторін BC, CA, AB трикутника ABC у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Оскільки $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$, то $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$. Тому за теоремою Чеви відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

17. а). Існує. Наприклад, його можна отримати, відрізавши по кутах правильного трикутника зі стороною 9 правильні трикутники зі сторонами 1, 2 та 3 відповідно.

б). Не існує.

18. Нехай відстань від точки E до прямої AD дорівнює d. Маємо: $a=AE\sin\angle BAE$, $b=CE\sin\angle BCE$, $c=CE\sin\angle DCE$, $d=AE\sin\angle DAE$. Оскільки чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло, і вписані кути, які спираються на одну дугу, рівні, то $\sin\angle BAE=\sin\angle BCE$ та $AE\sin\angle DAE=\sin\angle DCE$. Тому отримуємо $ac=bd$, звідки знаходимо $d=\frac{ca}{b}$.

19. Нехай точка K симетрична до точки A відносно прямої m. Тоді D лежить на перетині відрізка BK з прямою m. Позначимо M та H – середини відрізків AK та AB відповідно. Тоді MH – середня лінія трикутника KAB, отже, $MH\,||\,AB$. Оскільки у чотирикутнику $AHCM$ два протилежні кути прямі, то навколо нього можна описати коло. Тому маємо: $\angle ACH=\angle AMH=\angle MKD$. Звідси випливає, що $\angle ACH+\angle BDC=\angle MKD+\angle MDK=90^\circ$. Також $\angle ACH+\angle HAC=90^\circ$. Тому $\angle BDC=\angle HAC$, отже, точки A, B, C, D належать одному колу.

20. Проведемо аналіз кожного з варіантів гри з кінця. Назвемо кінцеву позицію, яка за умовою задачі відповідає перемозі одного із гравців, виграшною. Всі позиції, з яких можна дістатися до неї за один хід, – програшними. Кожну позицію, після довільного ходу з

якої суперник займе програшну позицію, також вважатимемо виграшною. Відповідно, всі позиції, з яких хоч один хід веде у виграшну позицію, знову будуть програшними. Для здобуття перемоги гравцеві при правильній грі потрібно весь час займати виграшні позиції.

Спочатку проаналізуємо другий варіант гри. У ньому число 0 є виграшною позицією. Число 1, безумовно, програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, виграє суперник. З числами 2 та 3 однозначно визначитися не вдається. Справді, 2 буде виграшною позицією, якщо суперник в даний час не має права брати 2 сірники, і програшною – якщо у нього таке право є. Аналогічно, число 3 буде виграшною позицією лише при одній додатковій умові, що своїм попереднім ходом було взято 1 сірник. Такі позиції будемо називати умовно виграшними. Від виграшних вони відрізняються тим, що їх використання приводить до виграшу лише за певної додаткової умови, яка залежить не тільки від останнього, а й від попередніх ходів суперників. Таким чином, пошук наступної виграшної позиції необхідно продовжити. Число 4 – програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, суперник має змогу зайняти уже точно виграшну для себе позицію 3. Оцінимо тепер число 5. Якщо суперник забирає 1 сірник, то він попадає у програшну позицію 4, а якщо забирає 2 сірники, то позиція 3 для нього теж є програшною. Адже, якщо перед наступним його ходом залишити 2 сірники, то взяти обидва з них він уже не має права. Отже, число 5 є виграшною позицією. Аналогічно встановлюємо, що така ситуація з позиціями повторюється з періодом 5.

Далі все залежить від початкового числа сірників. Оскільки перед цим попереднього ходу не було, то відповідні їм позиції висновок можна зробити однозначно: виграшними будуть усі початкові позиції вигляду $5k$ та $5k+3$, а програшними – позиції $5k+1$, $5k+2$ та $5k+4$. За виграшної початкової позиції перемогу одержить другий гравець, а за програшної – перший. При цьому виграшна стратегія полягає в тому, щоб спочатку на першому чи другому кроці залишити суперникові $5k$ сірників, а далі в кожній серії двох своїх послідовних ходів першим ходом брати 1 сірник, а другим – 1 чи 2 сірники так, щоб загальна кількість сірників, які залишаються, зменшилася на 5.

Так само може бути проаналізований перший варіант гри, в якому ситуація з позиціями повторюється з періодом 7. Зокрема, початкові позиції $7k$, $7k+3$ та $7k+4$ будуть виграшними, а позиції $7k+1$, $7k+2$, $7k+5$ та $7k+6$ – програшними. При цьому виграшна стратегія полягатиме в тому, щоб спочатку на першому чи другому кроці залишити суперникові $7k$ сірників, а далі в кожній серії двох своїх послідовних ходів першим ходом брати 2 сірники, а другим – 1 чи 2 сірники так, щоб загальна кількість сірників, які залишаються, зменшилася на 7.

Перейдемо до відповідей на питання задачі:

а). Першому гравцеві вигідніше вибрати другий варіант гри, оскільки при цьому ймовірність його перемоги дорівнює $\frac{3}{5}$ і є більшою за $\frac{4}{7}$ – ймовірність перемоги у першому варіанті гри;

б). Аналізуючи остачі від ділення чисел 2006, 2007 та 2008 на 5 та на 7, переконуємося, що в обох варіантах гри ймовірність перемоги першого гравця становить $\frac{2}{3}$.

2008 рік

1. Зможе. Для цього їй потрібно відплисти від центра на деяку відстань $x < \frac{R}{4}$. Далі поплисти по колу з центром у центрі озера, щоб опинитися на одній прямій з Кощієм по різні сторони від центра. Після цього плисти по такій прямій до найближчої точки берега. Якщо при цьому $R - x < \frac{\pi R}{4} \Leftrightarrow x > \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R$, то Василина врятується. Залишилось зауважити, що таке x існує, бо $\frac{R}{4} > \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)R$.

2. Зможе. Дана задача зводиться до задачі про рух точки площиною, розбитою на одиничні квадратики. Вийшовши з початку

координат вздовж бісектриси першого квадранта, точка обов'язково опиниться у вузлі, обидві координати якого дорівнюють $2007 \cdot 2008$. Цей факт рівносильний попаданню її у кут прямокутного листка паперу розмірами 2007×2008.

3. Нехай довжина найбільшої сторони трикутника дорівнює 1, а довжини двох інших сторін дорівнюють x та y. Тоді $0 < x \le 1$, $0 < y \le 1$ та $x + y > 1$. Щоб такий трикутник був гострокутним, за теоремою косинусів необхідно і достатньо виконання нерівності $x^2 + y^2 > 1$. Шукана ймовірність $p = \dfrac{4-\pi}{2}$ як відношення площі фігури, обмеженої лініями $x = 1$, $y = 1$ та $x^2 + y^2 = 1$, до площі трикутника, обмеженого лініями $x = 1$, $y = 1$ та $x + y = 1$.

4. Для всіх натуральних $n \ne 2$. Серед чисел n та $n + 3$ одне число парне. Тому, в залежності від парності n, Петрусь може викласти всі свої плитки або лише горизонтально, або лише вертикально. Тоді для $n \ne 2$ так само стоятимуть принаймні дві плитки Миколки. Якщо $n = 2$, то можна гарантувати співпадання розташувань принаймні однієї з плиток.

5. Оскільки перший множник не менший 201, то перша цифра другого множника менша за 5. Вона непарна і не дорівнює 1, бо четвертий рядок запису не співпадає з першим, отже, дорівнює 3. Оскільки $3 \cdot 401 = 1203 > 899$, то перша цифра першого числа дорівнює 2. Оскільки $7 \cdot 289 = 2023$, а в третьому рядку знаходиться чотирицифрове число, перша цифра якого парна, а друга непарна, то друга цифра другого числа дорівнює 9. Оскільки $8 \cdot 289 = 2601 < 3000$, то перша цифра третього рядка дорівнює 2. Щоб при додаванні цього рядка з четвертим відбувся перехід в інший розряд, перша цифра четвертого рядка повинна дорівнювати 8. Оскільки $3 \cdot 269 = 807 < 811$, то перше число не менше за 281. Перевіряючи добутки $281 \cdot 39 = 10959$, $283 \cdot 39 = 11037$, $285 \cdot 39 = 11115$, $287 \cdot 39 = 11193$, $289 \cdot 39 = 11271$, переконуємося, що з них лише добуток $285 \cdot 39$ задовольняє всі умови задачі.

6. Нехай $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, де $a_n\neq 0$, $n\geq 2$. Тоді $P(x+x^2)$ містить доданок na_nx^{2n-1}, а в сумі $P(x)+P(x^2)$ коефіцієнт біля x^{2n-1} дорівнює нулю. Отже, $n\leq 1$. Якщо $x=0$, то маємо $P(0)=P(0)+P(0)\Rightarrow P(0)=0$. Тому $P(x)=ax$. Перевірка показує, що такий многочлен є розв'язком при кожному дійсному значенні a.

7. Оскільки $(x-1)(y-1)=-(x+y-xy-1)$, то при кожній такій операції добуток всіх чисел, зменшених на одиницю, змінює лише свій знак. Якщо після 2006 кроків залишилося число a, то

$$a=(-1)^{2006}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot...\cdot\left(\frac{1}{2008}-1\right)+1=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{2007}{2008}+1=-\frac{1}{2008}+1=\frac{2007}{2008}.$$

8. Позначимо $a=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2007}{2008}$, $b=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}...\cdot\frac{2008}{2009}$. Звідси маємо $a^2<ab=\frac{3}{2009}<\left(\frac{1}{25}\right)^2$. Отже, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2007}{2008}=\frac{1}{2}a<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}=\frac{1}{50}$.

9. Нехай $m^2<n<(m+1)^2$. Тоді $\left[\sqrt{n}\right]=m$, отже, з рівності $\left(\sqrt{n}-\left\{\sqrt{n}\right\}\right)^2=m^2$ отримуємо:

$$2\sqrt{n}\cdot\left\{\sqrt{n}\right\}=n+\left(\left\{\sqrt{n}\right\}\right)^2-m^2>n-m^2\geq 1\Rightarrow\left\{\sqrt{n}\right\}>\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

10. Не всяка. Розглянемо арифметичну прогресію, в якій $a_1=\sqrt{2}$, $d=1$. Припустимо, що її елементи $\sqrt{2}+m$, $\sqrt{2}+n$ та $\sqrt{2}+k$ є трьома послідовними членами геометричної прогресії. З рівності $\left(\sqrt{2}+m\right)\left(\sqrt{2}+k\right)=\left(\sqrt{2}+n\right)^2$ отримаємо $mk-n^2=(2n-m-k)\sqrt{2}$, що можливо лише за виконання умов $mk-n^2=0$ та $2n-m-k=0$, тобто $m=k=n$. Отримали суперечність.

Зауважимо, що кожна арифметична прогресія натуральних чисел містить у собі нескінченну геометричну прогресію. Наприклад, $b_1=a_1=k$, $b_2=k+kd=k(1+d)$, …, $b_n=k(1+d)^{n-1}$, … .

11. Найпростішим прикладом такої послідовності є $a_n = n,\ n \in N,$ для якої $\Delta_n = a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = n^2 - (n-1)\cdot(n+1) = 1.$

Іншим цікавим прикладом служить послідовність Фібоначчі: $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \in N,$ для якої при кожному натуральному $n \ge 2$ виконується рівність Кассіні:

$$\Delta_n = a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

Розглянемо довільні рекурентні послідовності другого порядку такі, що $a_1 = 1,\ a_2 = a,\ a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$ і $|\Delta_n| = 1,\ n \ge 2.$

Нехай λ_1, λ_2 – різні дійсні корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$ Тоді $a_n = \frac{a-\lambda_1}{\lambda_2^2+\beta}\lambda_1^n + \frac{a-\lambda_2}{\lambda_1^2+\beta}\lambda_2^n.$

Нескладно переконатися, що $|\Delta_n| = 1,\ n \ge 2,$ лише у наступних випадках:

1). $\beta = 1,\ \alpha = a,\ a \in N.$ При $a = 1$ як частковий випадок отримуємо послідовність Фібоначчі.

2). $\beta = -1,\ \alpha = a,\ a \in N,\ a > 2.$ При $a = 3$ це є підпослідовність послідовності Фібоначчі з парними номерами.

3). $\beta = -1,\ \alpha = 3,\ a = 2.$ Це підпослідовність послідовності Фібоначчі з непарними номерами.

4). $\beta = 1,\ \alpha = 1,\ a = 2.$ Це підпослідовність послідовності Фібоначчі, починаючи з другого номера.

5). $\beta = -1,\ \alpha = 3,\ a = 1.$ Ще одна з підпослідовностей послідовності Фібоначчі.

У випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ при $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ a = 2$ отримуємо згадану першою послідовність $a_n = n,\ n \in N.$

Аналогічно можуть бути знайдені рекурентні послідовності вищих порядків.

12. Обов'язково. Нехай маємо п'ятикутник $ABCDE$, в якому $CE \parallel AB$, $DA \parallel BC$, $EB \parallel CD$, $AC \parallel DE$. Тоді для площ відповідних трикутників послідовно отримуємо: $S_{ABE} = S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDE} = S_{ADE}$. З рівності $S_{ABE} = S_{ADE}$ випливає, що $BD \parallel EA$.

13. Для всіх. Для доведення зосередимо у вершинах чотирикутника $ABCD$ одиничні маси. Тоді центр мас системи точок A, C лежить у точці M – середині AC, а центр мас системи точок B, D знаходиться у точці N – середині BD. Тому L – центр мас системи всіх чотирьох точок A, B, C, D. Врахуємо, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма. Міркуючи аналогічно, встановимо, що й точка K є центром мас системи точок A, B, C, D. Отже, K збігається з L.

14. Розглянемо спочатку випадок $x \geq y \geq 0$. При цьому задана нерівність набуде вигляду $\min\{x,\ x+y-1\} \leq 2$. Звідси маємо:

$$\begin{cases} x \leq x+y-1, \\ x \leq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1, \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x+y-1 \leq x, \\ x+y-1 \leq 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 1, \\ y \leq 3-x. \end{cases}$$

Далі залишається таку чотирикутну область симетризувати відносно прямої $y = x$, а отриману після цього множину ще й симетризувати відносно кожної з осей та початку координат. Любителів кулінарії зацікавить отримана при цьому гарна форма для печива.

15. Може. Нехай довжини відрізків дорівнюють $1,\ x,\ x^2$, де x – корінь рівняння $x^3 + x^2 + x = 1$, який належить інтервалу $(0;1)$. Тоді $1 > x > x^2$ та $1 > x + x^2$. Вкоротивши відрізок довжиною 1 на суму довжин двох менших відрізків, отримаємо три відрізки, довжини яких дорівнюють $x,\ x^2,\ 1 - x - x^2 = x^3$ і пропорційні довжинам початкових відрізків. Така пропорційність зберігатиметься до нескінченності.

16. З умови $\angle ACB = \angle ADB$ випливає, що чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. Враховуючи рівність $AB = AD$, отримаємо, що $\angle ACB = \angle ABD$. Оскільки $\angle ANB = \angle AKB$, то й чотирикутник $ABNK$ вписаний. Тому маємо: $\angle ANK = \angle ABK = \angle ABD$. Отже, отримуємо: $\angle ACB + \angle KNC = 90^\circ \Rightarrow NK \perp AC$.

17. За 22 спроби задумане Миколкою число можна гарантовано вгадати. Числа, які для цього потрібно називати Петрусеві, виділені у наступній таблиці:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Як видно з таблиці, кожне її число або виділене, або межує з виділеним спільною стороною, отже, буде вгаданим при одній зі спроб. Щодо 21 спроби, то відповіді на питання отримати не вдалося.

18. а). Тільки для $n=1$, бо при цьому двох членів комісії просто не буде. Нехай $n \geq 2$. Якщо кожен член комісії знайомий принаймні з одним зі своїх колег, то різні кількості знайомств змінюються у межах від 1 до $n-1$. Отже, за принципом Діріхле принаймні два члени комісії матимуть однакову кількість знайомих. Якщо ж дехто з членів комісії не знайомих ні з ким іншим, то різні кількості знайомств змінюються у межах від 0 до $n-2$. Тому і в цьому разі принаймні два члени комісії матимуть однакову кількість знайомих.

б). Для всіх $n \in N$. Для $n=1$ та $n=2$ це очевидно. Для $n=3$ припустимо, що два члени комісії знайомі між собою і не знайомі з її третім членом, отже, не існує трьох членів комісії з однаковою кількістю знайомств. А далі будемо кожен раз добавляти по одному члену комісії і знайомити його з усіма, хто був у комісії до нього. При цьому у кожного з попередніх членів комісії додасться по одному знайомству, а новий член комісії матиме знайомих більше, ніж кожен з інших її членів.

19. Нехай $k=1$. Оскільки

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)>1+\frac{m}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right)>1+\frac{m}{2},$$

то сума $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ може набувати як завгодно великих значень. Доведемо, що для $n>1$ значення цієї суми не є цілими числами. Нехай m – таке найбільше натуральне число, для якого $2^m \le n$. Зведемо вказану суму до найменшого спільного знаменника. Зрозуміло, що він буде парним. А в чисельнику непарним виявиться лише доданок, який відповідає дробу $\frac{1}{2^m}$. Тому відношення непарного числа до парного цілим бути не може. З доведеного випливає існування потрібного $n>1$ для $k=1$.

Нехай тепер $k>1$. Оскільки

$$1+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^k}<1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<$$

$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{1}{n+1}<2008,$$

то в цьому випадку потрібного n не існує.

20. Покладемо $x=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\operatorname{tg}\beta$. Після очевидних перетворень отримаємо

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|=\left|\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}\right|=$$

$$=\left|\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}\right|=$$

$$=\left|\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\right|=\left|\frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)\right|\le\frac{1}{2}.$$

2009 рік

1. Числа, в яких цифри записані за зростанням, не більше, ніж дев'ятицифрові, причому єдиним таким дев'ятицифровим числом є число 123456789. Щоб отримати з нього восьмицифрові числа з описаною властивістю, необхідно і достатньо витерти довільну його цифру. Щоб отримати потрібні семицифрові числа, треба витерти довільні дві цифри і так далі. Тому всього отримаємо

$$1+C_9^1+C_9^2+C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6+C_9^7=2^9-C_9^8-1=502$$

натуральні числа $n\geq 10$, цифри яких записані за зростанням.

Міркуючи аналогічно, встановимо, що числа, в яких цифри записані за спаданням, не більше, ніж десятицифрові, причому єдиним таким десятицифровим числом є число 9876543210. Щоб отримати з нього дев'ятицифрові числа з описаною властивістю, необхідно і достатньо витерти довільну його цифру. Щоб отримати потрібні восьмицифрові числа, треба витерти довільні дві цифри і так далі. Тому всього отримаємо

$$1+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8=2^{10}-C_{10}^9-1=1013$$

натуральні числа $n\geq 10$, цифри яких записані за спаданням.

Разом маємо $502+1013=1515$ вказаних чисел.

2. Оскільки число і сума його цифр при діленні на 3 дають однакові остачі, то для k, кратних 3, таких натуральних n не існує. Справді, при цьому для всіх натуральних n ліва частина рівності ділиться на 3, права – ні.

Надалі будемо здійснювати аналіз значень, яких набуває доданок $S(n)$ з проміжку від 1 до 28 включно, які не діляться на 3. При цьому для значень $S(n)$, які дорівнюють 1, 10, 19, 28, всі доданки, починаючи з третього будуть одиницями, а для інших $S(n)$ – рівними між собою одноцифровими числами, які дорівнюють остачам від ділення на 9 чисел $S(n)$ та n.

У результаті отримаємо як інші значення k, за яких такого натурального n не існує (наприклад, для k від 2001 до 2008 включно), так і безпосередньо знайдемо шукані n для тих k, за яких вони існують. Зокрема, для $k=1$ отримаємо $n=2009$, для $k=2009$ знайдемо $n=1$, а для $k=2000$ матимемо $n=10$ тощо.

Зауважимо, що для $k=2$ можна міркувати ще й так. $1\le n\le 2008$, $1\le S(n)\le 28$, отже, $n\ge 2009-28=1981$. Крім того, обидва доданки у лівій частині рівняння $n+S(n)=2009$ дають однакові остачі при діленні на 9. Щоб у сумі отримати остачу правої частини 2 необхідно, щоб ці дві остачі дорівнювали 1. Для натуральних чисел з проміжку від 1981 до 2008 цю умову задовольняють лише числа 1981, 1990, 1999 та 2008. З них розв'язком рівняння є тільки $n=1990$.

3. Зауважимо, що для парних k ліва частина записаної рівності для кожного натурального n при діленні на 3 дає остачу 2, а квадрати натуральних чисел при діленні на 3 можуть мати лише остачі 0 або 1. Тому числа k можуть бути лише непарними. Зокрема, для $k=1$ отримаємо $n=3^{2m-1}, m\in N$, а для $k=3$ приходимо до рівності $3n\left(n^2+2\right)=l^2$. Оскільки для $n\ge 3$ числа n та n^2+2 взаємно прості, причому останнє не є точним квадратом, то будемо мати тільки $n=1$ та $n=2$.

4. Зауважимо, що куби цілих чисел при діленні на 7 можуть давати лише остачі 0, 1 або 6. Тому як для чисел $(7n+3)x^3$, так і для чисел $(7n+4)y^3$ отримаємо лише остачі з множини $\{0,3,4\}$ при кожному $n\in N$. Оскільки число 2009 ділиться на 7, то у разі вибору $a=7n+3,\ b=7n+4,\ n\in N,$ можливі остачі лівої частини рівняння для всіх цілих x та y належатимуть множині $\{0,1,3,4,6\}$. Далі відзначимо, що остачі чисел $3^k, k\in N,$ при діленні на 7 послідовно дорівнюють 3, 2, 6, 4, 5, 1, … і повторюються з періодом 6. Тому $3^{2009}\equiv 5(\operatorname{mod} 7)$. Отже, при таких виборах пар взаємно простих цілих чисел a та b рівняння $ax^3+by^3+2009^3=3^{2009}$ не матиме розв'язків у цілих числах x та y.

5. Обов'язково. За формулами Вієта числа a,b,c можна трактувати як корені кубічного рівняння

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc>0.$$

Оскільки для $t\le 0$ його ліва частина набуває від'ємних значень, то всі його корені є додатними.

6. $m=3,\ k=4$. Підставимо $a=b=c=1$. Тоді $3m\le 9\Rightarrow m\le 3$, і для $m=3$ справджується нерівність

$$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0.$$

Розглянемо тепер рівнобедрені трикутники з основами $a=\dfrac{1}{n},\ n\in N,$ та бічними сторонами $b=c=1$. За умовою задачі маємо $\left(\dfrac{1}{n}+2\right)^2<k\left(\dfrac{2}{n}+1\right)$ для всіх $n\in N$. Перейшовши до границі при $n\to N$, отримаємо $k\ge 4$. Нерівність $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$ рівносильна нерівності $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$, яку доводимо, додавши нерівності: $a^2<a(b+c),\ b^2<b(c+a)$ та $c^2<c(a+b)$.

7. Зауважимо, що $b=0\Leftrightarrow x=0$. Для знаходження інших розв'язків позначимо $\dfrac{x}{a}=y,\ \dfrac{x}{x-a}=z.$ В результаті отримаємо систему двох рівнянь: $y^2+z^2=b^2$ та $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1.$ З другого рівняння системи маємо $2yz=2(y+z)$. Додавши цю рівність до першого рівняння, одержимо: $(y+z)^2-2(y+z)-b^2=0.$ Звідси знаходимо $y+z=1\pm\sqrt{1+b^2}$. Також $yz=1\pm\sqrt{1+b^2}$. Враховуючи формули Вієта, числа y знаходимо як корені таких двох квадратних рівнянь:

$$y^2-\left(1+\sqrt{1+b^2}\right)y+\left(1+\sqrt{1+b^2}\right)=0$$

та

$$y^2-\left(1-\sqrt{1+b^2}\right)y+\left(1-\sqrt{1+b^2}\right)=0$$

за умови невід'ємності для $b\ne 0$ їх дискримінантів:

$$D=\left(1+\sqrt{1+b^2}\right)\left(-3+\sqrt{1+b^2}\right) \text{ та } D=\left(1-\sqrt{1+b^2}\right)\left(-3-\sqrt{1+b^2}\right).$$

І, на завершення, отримаємо $x=ay$. Зауважимо, що при цьому $x\neq a$, бо $y=1$ не є коренем жодного з цих двох рівнянь.

8. Для $a<0$ множина допустимих значень x є порожньою.

Для $a>0$ множина допустимих значень x утворює проміжок $\left[\max\left\{-a,-a\sqrt{a}\right\};\min\left\{a^2,a\sqrt{a}\right\}\right]$. При цьому для $x=0$ отримуємо $\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^2}=2\sqrt{a}>\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3}$, а для $x>0$ та $x<0$ відповідно справджуються нерівності

$$\sqrt{a+x}>\sqrt{a}>\sqrt[6]{a^3-x^2},\ \sqrt[4]{a^2-x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{a+x}+\sqrt[4]{a^2-x}>\sqrt[6]{a^3-x^2}$$

та

$$\sqrt[4]{a^2-x}>\sqrt{a}>\sqrt[6]{a^3-x^2},\ \sqrt{a+x}\geq 0\Rightarrow\sqrt{a+x}+\sqrt[4]{a^2-x}>\sqrt[6]{a^3-x^2}.$$

Тому для $a>0$ розв'язків немає.

І, нарешті, для $a=0$ отримуємо єдиний розв'язок $x=0$.

9. $\min f(x,y)=8$. З нерівності

$$\left(\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\right)-\left(\frac{x^2}{x-1}+\frac{y^2}{y-1}\right)=\frac{(x-y)^2(x+y)}{(x-1)(y-1)}\geq 0,$$

справедливої для всіх $x>1,\ y>1$, випливає, що

$$f(x,y)\geq\frac{x^2}{x-1}+\frac{y^2}{y-1}=\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)+\left(y-1+\frac{1}{y-1}\right)+4\geq 8.$$

Рівність досягається для $x=y=2$.

10. Нескладно переконатися, що для $k=1$ підходить лише $n=1$, а для $k=2$ умову задовольняє $n=4$. Доведемо, що для довільного натурального значення k підійде $n=2^{2k-2}$. Справді, для такого значення n у лівій частині рівності є 2^{2k-3} одиниць, 2^{2k-4} двійок, …, два числа 2^{2k-4}, одне число 2^{2k-3} та останній доданок 2^{2k-2}. Разом така сума дорівнює $k\cdot 2^{2k-2}=kn$.

Знайдемо найменше k, для якого існують принаймні два такі числа n. Для $k=1$ маємо тільки $n=1$. Для простих чисел n сума лівої частини дорівнює $2n-1<2n$. Для чисел $n=m^2$, $m>2$ отримаємо, що така сума не менша за $\left(m^2-2\right)\cdot 1+m+m^2>2m^2=2n$. Для чисел $n=ml,\ m>l\ge 2$, вона не менша за $\left(ml-3\right)\cdot 1+m+l+ml>2ml=2n$. Тому $k=2$ також не задовольняє. А для $k=3$ легко переконатися, що, крім $n=16$, підходить ще й $n=15$.

11. Оскільки $1+x+2\sqrt{x}=\left(1+\sqrt{x}\right)^2$, то $f\left(x\right)$ будемо шукати серед функцій вигляду $\left(a+b\sqrt{x}\right)^2$. Тоді

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\left(a+b\sqrt{x}\right)^2\right)=\left(a+b\sqrt{\left(a+b\sqrt{x}\right)^2}\right)^2=\left(a+ab+b^2\sqrt{x}\right)^2.$$

З рівностей $a+ab=1,\ b^2=1$ маємо $a=\frac{1}{2},\ b=1$ та $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x}\right)^2$.

Зауважимо, що за наявності в лівій частині заданої рівності суперпозиції n функцій f як розв’язок підійде $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x}\right)^2$.

12. а). Позначимо:

$$A=\cos\frac{\pi}{2009}\cdot\cos\frac{2\pi}{2009}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{1004\pi}{2009},$$

$$B=\sin\frac{\pi}{2009}\cdot\sin\frac{2\pi}{2009}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{1004\pi}{2009}.$$

За формулами синуса подвійного аргумента з врахуванням формул зведення отримаємо

$$AB=\frac{1}{2^{1004}}\sin\frac{2\pi}{2009}\cdot\sin\frac{4\pi}{2009}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{2008\pi}{2009}=\frac{1}{2^{1004}}B\ne 0\Rightarrow A=\frac{1}{2^{1004}}.$$

б). Позначимо $A=\cos\frac{2\pi}{2009}+\cos\frac{4\pi}{2009}+\ldots+\cos\frac{2008\pi}{2009}$. Тоді

$$2A\sin\frac{\pi}{2009}=\left(\sin\frac{3\pi}{2009}-\sin\frac{\pi}{2009}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{2009}-\sin\frac{3\pi}{2009}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\sin\frac{2009\pi}{2009}-\sin\frac{2007\pi}{2009}\right)=-\sin\frac{\pi}{2009}\ne 0\Rightarrow A=-\frac{1}{2}.$$

13. Наприклад, $\alpha=\sqrt{2},\ \beta=2+\sqrt{2}$. Ці числа ірраціональні, тому

$n\sqrt{2}$ та $n(2+\sqrt{2})$ також ірраціональні, причому $n\sqrt{2} \neq m(2+\sqrt{2})$, бо $\sqrt{2} \neq \frac{2m}{n-m}$. Для кожного натурального $k \geq 2$ на інтервалі $(1,k)$ міститься $P_k = \left[\frac{k}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{k}{2+\sqrt{2}}\right]$ членів із об'єднання елементів послідовностей $n\sqrt{2}$ та $n(2+\sqrt{2})$. Але $\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{k}{2+\sqrt{2}} = k$ і числа $\frac{k}{\sqrt{2}}, \frac{k}{2+\sqrt{2}}$ ірраціональні, то сума їх дробових частин дорівнює 1. Отже, $P_k = k-1$. Тому між будь-якими сусідніми натуральними числами знаходиться рівно один елемент із сукупності $n\sqrt{2}$ та $n(2+\sqrt{2})$, а для їх цілих частин справедливе твердження задачі.

Зауважимо, що числа $\sqrt{2}$ та $2+\sqrt{2}$ можна замінити довільними додатними ірраціональними числами α та β, для яких $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

14. Скористаємося відомим фактом, що середини сторін опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма, площа якого дорівнює половині площі чотирикутника. Тому площі всіх опуклих чотирикутників, середини сторін яких співпадають рівні між собою.

а) Залишиться. Нехай точки A_1, A_2, A_1, A_2, A_5 є вписаними послідовно серединами сторін опуклого п'ятикутника $ABCDE$. Розглянемо довільну точку A площини. Симетрією її відносно точки A_1 отримаємо точку B. Симетрією B відносно точки A_2 отримаємо точку C. Симетрією C відносно точки A_3 отримаємо точку D. Симетрією D відносно точки A_4 отримаємо точку E. І, нарешті, симетрією E відносно точки A_5 отримаємо деяку точку F, яка у випадку існування вказаного п'ятикутника мала би співпадати з точкою A. Якщо цього не сталося, то виберемо M – середину. Із рівності відповідних пар трикутників з вершинами в точках A_n легко встановити, що при кожній наступній симетрії відносно точок A_n довжина відображуваного вектора $\overrightarrow{MA}$ не змінюється, а напрям міняється на протилежний. Після п’яти таких симетрій вектор $\overrightarrow{MA}$ перейде в $\overrightarrow{MF}$, тобто точка M перейде сама в себе. Звідси випливає, що опуклий п’ятикутник однозначно визначається серединами своїх послідовних сторін.

б). Залишиться. Розіб’ємо шестикутник $ABCDEF$ діагоналлю AD на два чотирикутники. Тоді його площа дорівнюватиме подвоєній сумі площ паралелограмів, вершини яких є серединами сторін таких чотирикутників.

15. Нехай ABC – довільний нерівнобедрений трикутник такий, що $\angle ACB = 60^\circ$. Тоді $\angle KIM = 120^\circ$, отже, навколо чотирикутника $KIMC$ можна описати коло. Оскільки CI бісектриса кута MCK, то хорди MI та KI рівні між собою, бо вони стягують рівні дуги кола. Зрозуміло, що таких трикутників є нескінченна кількість.

Нехай тепер $\angle ACB \neq 60^\circ$. Розглянемо коло, описане навколо трикутника KMC. Простим підрахунком кутів легко переконатися, що воно не проходить через точку I. Позначимо через N точку перетину бісектриси кута MCK з цим колом. Зрозуміло, що $MN = KN$, тому точка N лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AB. Оскільки трикутник ABC не є рівнобедреним, точка I лежить на промені CN і не збігається з N, то I не лежить цьому перпендикулярі. Тому $MI \neq KI$. Таким чином, множина всіх можливих значень величин кутів ACB складається з єдиного елемента – 60°.

16. Запишемо рівність $AB^2 + MC^2 = BC^2 + MA^2$ у вигляді $AB^2 - BC^2 = MA^2 - MC^2$. Опустимо з точок M та B на сторону AC перпендикуляри MN та BK відповідно. За теоремою Піфагора отримаємо $AB^2 - BC^2 = AK^2 - KC^2$ та $MA^2 - MC^2 = AN^2 - NC^2$. Тому $AK^2 - KC^2 = AN^2 - NC^2$. Розкладаючи тут різниці квадратів на множники, з врахуванням рівностей $AK + KC = AN + NC = AC$ будемо мати $AK - KC = AN - NC$. Це означає, що точки N та K збігаються, тобто M лежить на висоті BK трикутника ABC. Аналогічно доводимо, що вона знаходиться на двох інших висотах цього трикутника, отже, є його ортоцентром.

Всередині тупокутних трикутників точок з такою властивістю немає.

17. Можуть. Параболи $y = x^2$ та $y = \frac{x^2}{k}$ гомотетичні при кожному $k \neq 0$ з центром гомотетії у точці $O(0;0)$ та коефіцієнтом гомотетії k. Кожна пряма $y = ax, a \neq 0,$ перетинає їх у точках $A(a;a^2)$ та $B(ka;ka^2)$ відповідно. При цьому $\frac{OB}{OA} = k$ для всіх $a \neq 0$ одночасно.

18. Виберемо на заданій прямій довільну точку A. На промені, проведеному з неї під довільним гострим кутом, відкладемо точки M та B такі, що $AB = 1$ см, $AB = 2$ см. Прикладемо початок лінійки у точку M і повернемо лінійку так, щоб поділка 1 см знаходилася на заданій прямій у деякій точці C. За властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника, пряма BC виявиться перпендикулярною до заданої прямої.

19. Нехай маємо відрізок AB. На перетині кіл з центрами у точках A та B і радіусами $r = AB$ отримаємо точку C. На перетині кіл з центрами у точках B та C і радіусами $r = AB$ отримаємо точку D. На перетині кіл з центрами у точках B та D і радіусами $r = AB$ отримаємо точку E, яка лежить на прямій AB, причому $AE = 2AB$. На перетині кола з центром у точці A радіуса $r = AB$ та кола з центром у точці E радіуса $R = AE = 2AB$ отримаємо точку F. І, нарешті, на перетині кола з центром у точці F радіуса $r = AB$ з відрізком AB отримаємо точку G, яка ділить цей відрізок пополам. Справедливість такого висновку випливає з подібності рівнобедрених трикутників AFG та AEF, відношення бічних сторін яких дорівнює $1:2$.

Подібно можна здійснити поділ відрізка AB на $n > 2$ частин. Для цього спочатку побудовою $3(n-1)$ рівносторонніх трикутників потрібно отримати на промені AB точку H таку, що $AH = nAB$. Потім на перетині кола з центром у точці A радіуса $r = AB$ та кола з центром у точці H радіуса $R = AH = nAB$ отримати точку K. І, нарешті, на перетині кола з центром у точці K радіуса $r = AB$ з відрізком AB отримати точку N таку, що $AN = \frac{AB}{n}$. Решту точок поділу знаходимо з допомогою описаної вище побудови вершин правильних трикутників.

20. З трьох. Наприклад, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворюють три однакові піраміди зі спільною вершиною C_1 та основами $ABCD$, AA_1B_1B, AA_1D_1D відповідно.

2010 рік

1. Зауважимо, що у людини довжина руки приблизно у 10 більша за відстань між зіницями очей. Будемо вважати, що ширина річки суттєво більша за довжину витягнутої руки. Тоді з врахуванням властивостей відношення відповідних катетів подібних прямокутних трикутників отримаємо, що й $\frac{CA}{BA} \approx 10$.

2. Доведемо, що такі числа є послідовними елементами послідовності Фібоначчі. Легко бачити, що $P_1 = 2 = F_3$, $P_2 = 3 = F_4$. Розглянемо довільну підмножину множини $\{1, 2, ..., n\}$, яка задовольняє умови задачі. Якщо вона не містить число n, то елемент $n+1$ до неї можна як приєднати, так і не приєднувати. А якщо містить його, то елемент $n+1$ до неї не може бути приєднаний. Звідси випливає, що $P_{n+1} = P_{n-1} + P_n$, $n \geq 2$. Тому $P_n = F_{n+2}$. Скориставшись формулою Біне, отримуємо:

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

3. Якщо $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, то нерівність очевидна. Якщо ж хоч одне $a_k \neq 0$, то розглянемо нерівності $(a_k x - b_k)^2 \geq 0$, $1 \leq k \leq n$. Додавши їх, для всіх дійсних x отримаємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0.$$

Тому дискримінант цього квадратного тричлена $D \leq 0$, тобто

$$4\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2-4\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le 0.$$

Звідси й випливає задана нерівність (нерівність Коші-Буняковського).

Зауважимо, що рівність у ній досягається, якщо набори чисел $a_1,a_2,...,a_n$ і $b_1,b_2,...,b_n$ пропорційні, тобто, якщо існує таке x_0, що $a_kx_0=b_k$ або $b_kx_0=a_k$ для всіх k одночасно.

4. Для доведення достатньо скористатися нерівністю Коші-Буняковського для наборів $(a_1+a_2+a_3,a_4,a_5,...,a_n)$ та $(1,1,1,...,1)$ довжиною $m=n-2$. Рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $a_1+a_2+a_3=a_4=a_5=...=a_n$.

5. Розглянемо трикутник зі сторонами a та b, висотою c, проведеною до його третьої сторони, і площею S. Тоді

$$\left(\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\right)c=2S\le ab\Rightarrow\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}.$$

6. Для парних k твердження про подільність не справджується уже для $n=2$. Доведемо, що для всіх непарних k сума $S_n=1^k+2^k+...+n^k$ ділиться на $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Якщо число n парне, то маємо:

$$S_n=\left(1^k+n^k\right)+\left(2^k+(n-1)^k\right)+...+\left(\left(\frac{n}{2}\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right)\vdots(n+1),$$

$$S_n=\left(0^k+n^k\right)+\left(1^k+(n-1)^k\right)+...+\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)^k+\left(\frac{n}{2}+1\right)^k\right)+\left(\frac{n}{2}\right)^k\vdots\frac{n}{2}.$$

Числа $n+1$ та $\dfrac{n}{2}$ взаємно прості, отже, твердження доведене.

Якщо ж число n непарне, то отримуємо:

$$S_n=\left(1^k+(n-1)^k\right)+\left(2^k+(n-2)^k\right)+...+\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k\right)+n^k\vdots n,$$

$$S_n=\left(1^k+n^k\right)+\left(2^k+(n-1)^k\right)+...+\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^k+\left(\frac{n+3}{2}\right)^k\right)+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k\vdots\frac{n+1}{2}.$$

Числа n та $\dfrac{n+1}{2}$ взаємно прості, отже, твердження також доведене.

7. Такими є всі натуральні числа $n \le p$. Оскільки числа k та $k-p=-(p-k)$ дають однакові остачі при діленні на p, то

$$(p-n)!(n-1)!+(-1)^{n-1} \equiv \left((-1)^{n-1}(p-1)!+(-1)^{n-1}\right)(\mathrm{mod}\, p) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p),$$

бо $(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p)$ за теоремою Вільсона.

8. Нехай $n = km + l,\ l = \overline{0, m-1}$. Тоді:

а). $x^n - 1 = \left(x^m - 1\right)\left(x^{n-m} + x^{n-m} + \ldots + x^l\right) + x^l - 1$. Звідси випливає, що $x^n - 1$ ділиться на $x^m - 1$ лише за умови $l = 0$, тобто за умови: n ділиться на m.

б). $x^n + 1 = \left(x^m + 1\right)\left(x^{n-m} - x^{n-m} + \ldots + (-1)^{k-1} x^l\right) + (-1)^k x^l + 1$. Отже, $x^n + 1$ ділиться на $x^m + 1$ лише у разі $l = 0$ та непарного k. При цьому $\dfrac{n}{m} = k$ – також непарне.

9. Доведемо, що таку умову задовольняє число 5^{12}. Справді,

$$5^{12} = \left(5^6\right)^2 = \left(5^5 \cdot 3\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2 = \left(5^4 \cdot 3^2\right)^2 + \left(5^4 \cdot 4^2\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2 =$$

$$= \left(5^3 \cdot 3^3\right)^2 + \left(5^3 \cdot 4^3\right)^2 + \left(5^4 \cdot 4^2\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2 =$$

$$= \left(5^2 \cdot 3^4\right)^2 + \left(5^2 \cdot 4^4\right)^2 + \left(5^3 \cdot 4^3\right)^2 + \left(5^4 \cdot 4^2\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2 =$$

$$= \left(5 \cdot 3^5\right)^2 + \left(5 \cdot 4^5\right)^2 + \left(5^2 \cdot 4^4\right)^2 + \left(5^3 \cdot 4^3\right)^2 + \left(5^4 \cdot 4^2\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2 =$$

$$= \left(3^6\right)^2 + \left(4^6\right)^2 + \left(5 \cdot 4^5\right)^2 + \left(5^2 \cdot 4^4\right)^2 + \left(5^3 \cdot 4^3\right)^2 + \left(5^4 \cdot 4^2\right)^2 + \left(5^5 \cdot 4\right)^2.$$

10. Враховуючи співвідношення Кассіні, маємо:

$$F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2} = F_{n+1} \cdot \left(F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}\right).$$

Оскільки множники отриманого добутку є взаємно простими, а вираз у дужках не може бути точним квадратом, то й $F_n \cdot F_{n+1} \cdot F_{n+2}$ не буде точним квадратом при жодному значенні n.

11. Якщо $|x-1| \le |y| < |x+1|$, то

$$\max\left(|x+1|,|y|\right)=\max\left(|x-1|,|y|\right)\Leftrightarrow|y|=|x+1|.$$

А якщо $|x+1|\le|y|<|x-1|$, то

$$\max\left(|x+1|,|y|\right)=\max\left(|x-1|,|y|\right)\Leftrightarrow|y|=|x-1|.$$

В обох випадках отримуємо порожню множину.

Якщо одночасно $|y|\le|x+1|$ та $|y|\le|x-1|$, то

$$\max\left(|x+1|,|y|\right)=\max\left(|x-1|,|y|\right)\Leftrightarrow|x+1|=|x-1|\Leftrightarrow x=0,\ |y|\le 1.$$

Звідси отримуємо, що до шуканої множини належать точки осі ординат, для яких $|y|\le 1$.

І, нарешті, за одночасного виконання нерівностей $|y|\ge|x+1|$ та $|y|\ge|x-1|$ всі точки площини, координати яких задовольняють такі дві умови, належать шуканій множині.

12. Позначимо $f(x)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-2010\right)$. Ця функція непарна і перетворюється в нуль у точках: $-\sqrt{2010},-1,0,1,\sqrt{2010}$. Точки екстремуму знаходимо з рівняння $f'(x)=0\Leftrightarrow 5x^4-6033x^2+2010=0$. Випишемо їх послідовно зліва направо, позначивши: $-p,-q,q,p$. Тут $-p\in\left(-\sqrt{2010};-1\right)$, $-q\in(-1;0)$, $q\in(0;1)$, $p\in\left(1;\sqrt{2010}\right)$, причому $-p$ та q є точками максимуму, а $-q$ та p – точками мінімуму. Нехай $f(q)=b$, $f(-p)=c$. Тоді $f(-q)=-b$, $f(p)=-c$ та $c>b>0$.

Схематично зобразивши графік функції $f(x)$, отримаємо:

1) для $|a|>c$ рівняння має один корінь;

2) для $|a|=c$ – два корені;

3) для $b<|a|<c$ – три корені;

4) для $|a|=b$ – чотири корені;

5) для $|a|<b$ – п’ять коренів.

З них цілими можуть бути щонайбільше три. Наприклад, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ для $a=0$. Для $a\ne 0$ за наявності у рівняння $f(x)=0$ більшої кількості коренів принаймні один, а то й два з них, відмінний від нуля і за модулем менший за 1, тому не є цілим.

13. Для $a<0$ рівняння не має розв’язків, бо його ліва частина набуває лише невід’ємних значень.

Для $a\in\left[0;1\right)$ маємо $x\in\left[0;1\right)$, $\left[x\right]=0$. Тому $x=\left\{x\right\}=a^2$ – єдиний корінь рівняння.

Для $a\geq 1$ з нерівності $0\leq\sqrt{\left\{x\right\}}=a-\sqrt{\left[x\right]}<1$ отримаємо

$$a-1<\sqrt{\left[x\right]}\leq a\Rightarrow\left(a-1\right)^2<\left[x\right]\leq a^2.$$

Отже, для $a\geq 1$ рівняння матиме $\left[a^2\right]-\left[\left(a-1\right)^2\right]$ коренів.

14. Нехай M – точка перетину медіан трикутника ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB відповідно. Розглянемо гомотетію кола ω з центром C та коефіцієнтом $k=2$. Точку перетину отриманого кола з прямою CM позначимо M_1. Зрозуміло, що $M_1C_1=MC_1$. За властивістю відрізків хорд отримаємо $AC_1\cdot BC_1=M_1C_1\cdot CC_1=C_1M\cdot CC_1$. Оскільки, крім того, маємо $AC_1=BC_1=KC_1$, то $C_1K^2=C_1M\cdot C_1C$. Проведемо через точку A_1 дотичну до кола ω. Нехай P – її точка дотику до цього кола. Тоді $C_1P^2=C_1M\cdot C_1C$. Отже, $C_1K=C_1P$. Звідси випливає, що пряма C_1K також є дотичною до кола ω.

Для її побудови проведемо пряму AA_1, де A_1 – точка перетину кола ω зі стороною BC. На перетині прямої AA_1 з колом ω отримаємо точку M перетину медіан трикутника ABC. Далі проводимо пряму CM, на перетині якої зі стороною AB знаходимо точку C_1. Провівши пряму C_1K, отримуємо шукану дотичну.

15. Нехай M – шукана точка всередині трикутника ABC, x, y, z – відстані від неї до прямих, які містять сторони $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$ відповідно. Позначимо: $S=S_{\triangle ABC}$, $S_1=S_{\triangle ABM}$, $S_2=S_{\triangle BCM}$, $S_3=S_{\triangle CAM}$. Тоді за нерівністю Коші

$$\sqrt[3]{xyz}=\frac{2}{\sqrt[3]{abc}}\cdot\sqrt[3]{S_1S_2S_3}\leq\frac{2}{\sqrt[3]{abc}}\cdot\frac{S_1+S_2+S_3}{3}=\frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Рівність досягається за умови $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$, тобто для точки M перетину медіан трикутника ABC.

16. Розглянемо прямокутну решітку з цілочисловими вузлами в центрах клітинок шахової дошки. За формулою Піка для площі многокутника з вершинами в її вузлах маємо $S = n + \frac{k}{2} - 1$, де n – кількість вузлів решітки, які знаходяться всередині многокутника, а k – кількість таких вузлів на його границі. За умовою задачі $n = 0$, $k = 64$. Отже, $S = 31$.

17. Нехай M – точка перетину медіан трикутника ABC. Вона є центром мас цього трикутника, отже, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. Обчислимо

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA_1}\right) + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_1}\right) + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC_1}\right) =$$
$$= \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1} = 0,$$

бо при повороті кожного вектора останньої суми на 60° справджується рівність $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$. Звідси випливає, що M – центр мас трикутника $A_1B_1C_1$, тобто й точка перетину його медіан.

18. Розглянемо піраміду з вершинами у точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, та $O(0;0;0)$ прямокутної системи координат. Сума квадратів площ трьох її граней, які прилягають до початку координат, дорівнює $\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4}$. Обчислюючи квадрат площі четвертої грані за формулою Герона для трикутника зі сторонами $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ та $\sqrt{c^2 + a^2}$, приходимо до цього ж результату. Отже, сума квадратів площ трьох граней цієї піраміди дорівнює квадрату площі четвертої грані.

19. Перший висновок, який можна зробити з умови задачі, полягає в тому, що записи числівників для визначення числа людей, інших живих істот та чисел чи неживих об’єктів виглядає по різному. Наприклад: 1 – tehu, 2 – huohu, 3 – toluhu, 4 – hinahu, але одна людина

– tel seilon, дві людини – huhua seilon, три людини – tohu seilon, чотири людини – hinalo seilon.

Другий висновок полягає у тому, що слово panim як означає «рука» або «нога», так і визначає число 5 – кількість пальців на руці чи нозі; а слово seilon, крім значення «людина», ще й визначає число 20 – загальну кількість пальців у людини.

Третій висновок полягає у тому, що мовою *сеймат* підрахунок ведеться від 1 до 4, далі п’ятірками (5 – tepanim – одна п’ятірка; 10 – huopanim – дві п’ятірки; 15 – tolupanim – три п’ятірки), перед якими пишеться відповідний числівник від 1 до 3 без закінчення hu, а ще далі двадцятками (20 – seilon tel, 40 – seilon huhua, 60 – seilon tohu, 80 – seilon hinalo, 100 – seilon tepanim), кількість яких пишеться після слова seilon. При цьому сама система числення є позиційною: спочатку пишеться кількість двадцяток, за ними – кількість п’ятірок, а вкінці – неповну кількість пальців однієї руки.

Враховуючи сказане, відновлюємо записи:

$8\times 2=16$	tepanim toluhu × huohu = tolupanim tehu;
$3\times 31=93$	toluhu × seilon tel huopanim tehu = seilon hinalo huopanim toluhu;
$10+7=17$	huopanim + tepanim huohu = tolupanim huohu;
$11+12=23$	huopanim tehu + huopanim huohu = seilon tel toluhu;
$40+60=100$	seilon huhua + seilon tohu = seilon tepanim.

20. а). Виграє перший гравець. Назвемо числа $n\geq 2011$ виграшними, бо отримання будь-якого з них забезпечує перемогу. Числа від 224 до 2010 включно вважатимемо програшними, бо множенні суперником будь-якого з них на 9, той забезпечить собі перемогу. Числа від 112 до 223 знову вважатимемо виграшними, бо їх множення на кожну з цифр від 2 до 9 приводить суперника у попередню програшну зону. Числа від 13 до 111 також виявляться програшними, бо для кожного з них суперник має можливість за один хід попасти у попередню виграшну зону. І, нарешті, числа від 7 до 12 включно також виграшні, бо й їх множення на кожну з цифр від 2 до

9 приводить суперника у програшну зону. Тому першому гравцеві для перемоги достатньо назвати одну з цифр: 7, 8, 9, а отримані суперником числа множити на такі цифри від 2 до 9, щоб весь час попадати в описані вище зони виграшних чисел.

б). Для кожного конкретного значення C дослідження проводиться так само, як і в а). Можна було б також дослідити множини значень C, за яких перемагатиме перший гравець.

2011 рік

1. Запишемо заданий вираз у вигляді $A=\frac{32^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{2}$ та скористаємося нерівністю $(x-2y)^2\ge 0 \Rightarrow \frac{x^2}{y}\ge 4x-4y,\ y>0,$ рівність в якій досягається при $x=2y.$ Звідси випливає, що

$$A\ge(4\cdot 32-4a)+(4a-4b)+(4b-4c)+(4c-4\cdot 2)=120,$$

причому $A=120$ лише за умови $32=2a,\ a=2b,\ b=2c,\ c=2\cdot 2,$ тобто $\min A=120,\quad a=16,\ b=8,\ c=4.$

2. Нерівність справедлива для всіх $n\in N.$ Для $n=1$ це випливає з нерівності Коші:

$$\frac{a_1^{\ 4}+b_1^{\ 2}}{2}\cdot\frac{b_1^{\ 4}+c_1^{\ 2}}{2}\cdot\frac{c_1^{\ 4}+a_1^{\ 2}}{2}\ge$$

$$\ge\sqrt{a_1^{\ 4}b_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 4}c_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{c_1^{\ 4}a_1^{\ 2}}=\left|a_1b_1c_1\right|^3\ge(a_1b_1c_1)^3..$$

А для $n\ge 2,\ n\in N,$ за нерівністю Коші-Буняковського

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\right)^3=\sum_{k=1}^{n}(a_kb_k)c_k\cdot\sum_{k=1}^{n}(b_kc_k)a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}(c_ka_k)b_k\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2b_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2c_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\le$$

$$\le\sqrt{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^4}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^4}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\cdot\sqrt{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^4}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^4}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^4}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^4}}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^4\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^4\cdot\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^4\cdot\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\le\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4+\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4+\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4+\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right).$$

3. Не завжди. Нехай $a_1=1,$ $a_3=2,$ $a_2=4>a_1+a_3,$ $a_5=3,$ $a_4=11>a_1+a_2+a_3+a_5.$ Далі, якщо перші $2k-1$ елементів уже виписані, то спочатку пишемо $(2k+1)-$шим елементом найменше натуральне число, яке досі не було виписане, а потім покладаємо

$$a_{2k}>a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k+1}.$$

За нескінченне число кроків будуть виписані всі натуральні числа.

Обґрунтуємо, що побудована послідовність шукана. Нехай $m=2k$ або $m=2k+1$. Якщо у виділену підмножину входить елемент a_{2k}, то сума елементів цієї підмножини виявиться більшою за $\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_m),$ а якщо ні – то меншою.

4. Для $n=2$ таке число існує. Зокрема, $5^2=4^2+3^2, 13^2=12^2+5^2.$ Припустимо, що існує таке $m,$ для якого виконуються рівності

$$m^2=a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2=\ldots=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2,$$

причому у всіх сумах доданки записані у порядку спадання. Оскільки

$$(5m)^2=(5a_1)^2+(5a_2)^2=(5b_1)^2+(5b_2)^2+(5b_3)^2=\ldots=(5x_1)^2+$$

$$+(5x_2)^2+\ldots+(5x_k)^2=(5x_1)^2+(5x_2)^2+\ldots+(5x_{k-1})^2+(4x_k)^2+(3x_k)^2,$$

то для $n=k+1$ шукане число теж існує. Тому таке число m існує для кожного натурального $n\ge 2.$

5. Для $n=2$ та $n=3$ маємо: $4941=14^3+13^3=17^3+3^3+1^3.$ Припустимо, що існує таке $m,$ для якого

$$m=a_1^3+a_2^3=b_1^3+b_2^3+b_3^3=\ldots=x_1^3+x_2^3+\ldots+x_k^3=y_1^3+y_2^3+\ldots+y_{k+1}^3,$$

причому у всіх сумах доданки записані у порядку спадання. Скориставшись рівністю $6^3=5^3+4^3+3^3,$ отримаємо

$$6^3m=(6a_1)^3+(6a_2)^3=(6b_1)^3+(6b_2)^3+(6b_3)^3=\ldots=$$

$$=(6x_1)^3+(6x_2)^3+\ldots+(6x_k)^3=(6y_1)^3+(6y_2)^3+\ldots+(6y_{k+1})^3=$$

$$=(6x_1)^3+(6x_2)^3+\ldots+(6x_{k-1})^3+(5x_k)^3+(4x_k)^3+(3x_k)^3.$$

Тому для $n=k+2$ шукане число теж існує. Отже, воно існує для кожного $n\ge 2$.

6. Для $n=3$ та $n=4$ маємо:

$$6^3=5^3+4^3+3^3,\ 13^3=12^3+7^3+5^3+1^3.$$

Тому $78^3=65^3+52^3+39^3=72^3+42^3+30^3+6^3$.

А далі достатньо скористатися міркуваннями, як при розв’язуванні задачі 5, для числа $(6m)^3$.

Цікавим виглядає питання про представлення четвертих степенів натуральних чисел m у вигляді суми четвертих степенів 3, 4, … , n попарно різних натуральних чисел. Ейлер висловив гіпотезу, що для $n=3$ це неможливо. Але, як було встановлено пізніше, для чисел $A=20615673,\ B=18796760,\ C=15365639,\ D=2682440$ виконується рівність $A^4=B^4+C^4+D^4$. Крім того, $353^4=315^4+272^4+120^4+30^4$, тому число $m^4=(353\cdot A)^4$ можна подати у вигляді суми четвертих степенів 3 та 4 різних натуральних чисел. А для $n\ge 5$ достатньо буде проаналізувати відповідні представлення числа $(Am)^4$.

7 – 9. Розглянемо таку загальну нерівність

$$\frac{A}{(x+y)^{2k}}\le\frac{B}{(x-y)^{2k}}+\frac{C}{(x+y)^{2k}-(x-y)^{2k}},$$

де $x>0,\ y>0,\ x\ne y,\quad A>0,\ B>0,\ C>0,\quad C=\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2,\ k\in\mathrm{N}.$

Заміною $(x+y)^{2k}=z,\ (x-y)^{2k}=t$ і відніманням її лівої частини від правої вона зводиться до очевидної нерівності вигляду

$$\frac{\left(\sqrt{A}t-\sqrt{B}z\right)^2}{zt(z-t)}\ge 0,\ z>t>0,$$

в якій рівність досягається лише за умови

$$\sqrt{B}z=\sqrt{A}t\Leftrightarrow\sqrt{B}(x+y)^{2k}=\sqrt{A}(x-y)^{2k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+y| = p|x-y| \Leftrightarrow y = \frac{p \pm 1}{p \mp 1}x, \quad p = \sqrt[4k]{A/B}.$$

Врахувавши рівності

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 2 \cdot 2xy,$$

$$(x+y)^4 - (x-y)^4 = 8\left(x^3y + xy^3\right),$$

$$(x+y)^6 - (x-y)^6 = 4\left(3x^5y + 10x^3y^3 + 3xy^5\right),$$

отримаємо нерівності задач 7 – 9 як окремі випадки загальної нерівності при таких значеннях параметрів відповідно:

7) $k=1,\ A=8,\ B=2,\ C=2,$

8) $k=2,\ A=18,\ B=2,\ C=8,$

9) $k=3,\ A=16,\ B=4,\ C=4.$

10. Шуканою є, наприклад, трійка чисел $a=153,\ b=136,\ c=72.$ Цікаво, що наступною трійкою, яку вдалося виявити, йде трійка $a=10839391776,\ b=30130273,\ c=30046752.$ Детальніше див. нижче у пункті «Турніри юних математиків та нерозв'язані проблеми математики».

11. Будемо шукати такі натуральні числа $m, n, k,$ для яких $m^3+n=k^2,\ n \ll m.$ Наприклад, $m=5234,\ n=17,\ k=378661.$

Нехай $\lambda = \sqrt[3]{k}.$ Тоді $\left\{\lambda^3\right\} = 0 < \varepsilon = 10^{-6},\ \ \lambda^2 = \sqrt[3]{k^2} = \sqrt[3]{m^3+n} > m.$ І, оскільки $\sqrt[3]{m^3+n} < m+\varepsilon \Leftrightarrow n < 3m^2\varepsilon + 3m\varepsilon^2 + \varepsilon^3$, то $\left\{\lambda^2\right\} < \varepsilon$ за такої достатньої умови: $n < 3m^2\varepsilon.$ Зокрема, маємо $17 < 3 \cdot 5234^2 \cdot 10^{-6}.$ Враховуючи нерівності

$$(72,3)^3 = 377933,067 < 378661 < 379503,424 = (72,4)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,1 < 0,3 < \left\{\sqrt[3]{378661}\right\} < 0,4 < 0,9,$$

переконуємося, що $\lambda = \sqrt[3]{378661}$ задовольняє умови задачі.

12. Розв'яжемо дане рівняння методом підстановок.

$$x=t, y=0 \Rightarrow f\left(f\left(t\right)\right) = t,\ t \in R.$$

Покладаючи тут $t = f\left(x\right) + y^2$, отримаємо

$$f\left(f\left(f(x)+y^2\right)\right)=f(x)+y^2.$$

А, застосувавши функцію f до обох частин заданого рівняння, маємо

$$f\left(f\left(f(x)+y^2\right)\right)=f\left(x+y^2\right).$$

Тому $f\left(x+y^2\right)=f(x)+y^2,\ x,y\in R.$ Звідси отримуємо:

$$x=0, y^2=t\Rightarrow f(t)=f(0)+t,\ t\geq 0,$$

$$x=t, y^2=-t\Rightarrow f(0)=f(t)-t,\ t\leq 0.$$

Отже, $f(t)=t+c,\ t\in R.$ При цьому $f\left(f(x)+y^2\right)=x+y^2+2c.$ Порівнюючи з заданим рівнянням, знаходимо $c=0$. Тому $f(x)=x$ – єдиний розв'язок такого функціонального рівняння.

13. $x=t, y=0\Rightarrow f\left(f\left(f(t)\right)\right)=t,\ t\in R.$ Далі, з початкового рівняння отримаємо:

$$x=t, y=-f\left(f(t)\right)\Rightarrow f(0)=t-f\left(f(t)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(f(t)\right)=t-c,\ c=f(0),$$

звідки при $t=0$ маємо $f(c)=-c.$ Крім того, звідси випливає ще й рівність $f\left(f\left(f(t)\right)\right)=f(t-c),\ t\in R.$ Отже, $f(t-c)=t, t\in R.$

Покладаючи $t=2c$, знайдемо $f(c)=2c.$ Тому $-c=2c\Leftrightarrow c=0,$ тобто $f(t)=t.$ Тому розв'язків, відмінних від $f(x)\equiv x,$ задане рівняння не має.

14. Легко бачити, що система має два комплексні розв'язки:

$$x=y=z=\pm i,\ i^2=-1.$$

Для знаходження інших розв'язків запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$y=\frac{x^3-3x}{3x^2-1},\ z=\frac{y^3-3y}{3y^2-1},\ x=\frac{z^3-3z}{3z^2-1}.$$

Враховуючи тотожність $tg3\alpha=\dfrac{tg^3\alpha-3tg\alpha}{3tg^2\alpha-1}$, покладемо $x=tg\alpha.$ Тоді $y=tg3\alpha,\ z=tg9\alpha,\ x=tg27\alpha,$ отже, $tg27\alpha=tg\alpha.$

Звідси знаходимо

$$27\alpha = \alpha + \pi n \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi n}{26}, \quad n \in Z, n \neq 13 + 26k, k \in Z.$$

Тому, внаслідок періодичності функції «тангенс», отримаємо:

$$x = tg\frac{\pi n}{26},\ y = tg\frac{3\pi n}{26},\ z = tg\frac{9\pi n}{26}, \quad n = \overline{1,12} \text{ та } n = \overline{14,25}.$$

Зауважимо, що $n = 13$ ми відкинули вище, а $n = 0$ приводить нас до розв'язку $x = y = z = 0$, який не задовольняє початкову систему через нулі у знаменниках.

15. Вказані многочлени мають такий загальний вигляд:

$$P^n(x) = (1+2x)^n(1+3x)^n = \left(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n\right)\cdot\left(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n\right),$$

$$Q^n(x) = (2+x)^n(1+3x)^n = \left(a_n + a_{n-1}x + ... + a_0x^n\right)\cdot\left(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n\right).$$

Тому отримаємо такі суми квадратів їх коефіцієнтів:

$$S_n\left(P(x)\right) = (a_0b_0)^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)^2 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)^2 + ... + (a_nb_n)^2 =$$

$$= \sum_{d=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=d} a_ib_j\right)^2 = \sum_{d=0}^{2n}\left(\left(\sum_{i+j=d} a_ib_j\right)\left(\sum_{k+l=d} a_kb_l\right)\right) = \sum_{\substack{i,j,k,l=0\\ i+j=k+l}}^{n} a_ib_ja_kb_l.$$

$$S_n\left(Q(x)\right) = (a_nb_0)^2 + (a_nb_1 + a_{n-1}b_0)^2 + (a_nb_2 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_0)^2 + ... + (a_0b_n)^2 =$$

$$= \sum_{d=-n}^{n}\left(\sum_{i-l=d} a_ib_l\right)^2 = \sum_{d=-n}^{n}\left(\left(\sum_{i-l=d} a_ib_l\right)\left(\sum_{k-j=d} a_kb_j\right)\right) = \sum_{\substack{i,j,k,l=0\\ i-l=k-j}}^{n} a_ib_la_kb_j = \sum_{\substack{i,j,k,l=0\\ i+j=k+l}}^{n} a_ib_ja_kb_l.$$

Зауважимо, що аналогічні рівності для сум квадратів коефіцієнтів справджуються для довільних многочленів вигляду

$$P^n(x) = (A+ax)^n(B+bx)^n,\ Q^n(x) = (a+Ax)^n(B+bx)^n.$$

16. Якщо $n! = a\cdot 2^{p_n}, m! = b\cdot 2^{p_m}, (n-m)! = c\cdot 2^{p_{n-m}}$, де a,b,c – непарні числа, то $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} \ \vdots\ 2^{p_n - p_m - p_{n-m}}$.

Тому для розв'язування задачі потрібно вміти знаходити максимальні степені двійки у факторіалах натуральних чисел.

Доведемо методом математичної індукції, що $p_n = 2^k - 1$ для

$n=2^k,\ k\in Z_+.$ Справді, для $k=0$ маємо $\left(2^0\right)!=1,\ p_1=2^0-1.$ Припустимо, що $p_n=2^i-1$ для $k=i.$ Зауваживши, що максимальні степені двійок, на які діляться відповідні числа з діапазонів $1,2,...,2^i-1$ та $2^i+1,2^i+2,...,2^{i+1}-1,$ співпадають, а степінь двійки у числі 2^{i+1} на 1 більший, ніж у числі 2^i, для $k=i+1$ отримаємо $p_n=\left(2^i-1\right)\cdot 2+1=2^{i+1}-1,$ що й треба було довести.

Нехай $2^k<n<2^{k+1},\ m=n-2^k.$ Оскільки максимальні степені двійок, на які діляться відповідні числа з діапазонів $1,2,...,m$ та $2^k+1,2^k+2,...,2^k+m,$ співпадають, то отримуємо: $p_n=p_{2^k}+p_m=\left(2^k-1\right)+p_m.$

Узагальнюючи цю рівність, для числа $n=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_l}$, де $k_1>k_2>...>k_l\geq 0,$ одержимо $p_n=2^{k_1}+2^{k_2}+...+2^{k_l}-l=n-l.$ Звідси для $n=\left(\overline{a_1a_2...a_k}\right)_2$ маємо $p_n=n-l_n,$ де l_n- кількість одиниць у двійковому записі числа $n.$

Оскільки за двійковими записами чисел m,n відніманням можна знайти двійковий запис числа $n-m,$ то знайдемо і показник

$$\alpha=p_n-p_m-p_{n-m}=\left(n-l_n\right)-\left(m-l_m\right)-\left(n-m-l_{n-m}\right)=l_m+l_{n-m}-l_n.$$

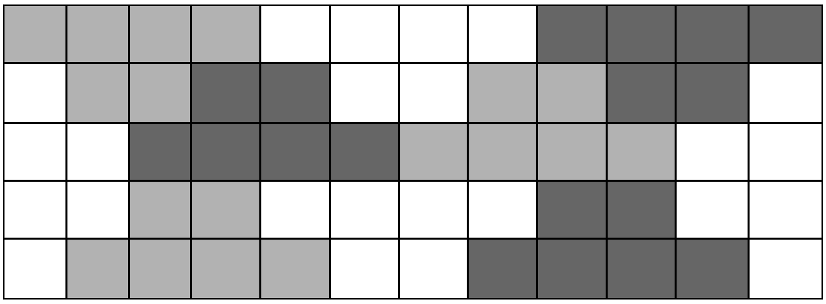
Якщо $\alpha=0,$ тобто у двійкових записах чисел m та $n-m$ разом використано одиниць стільки ж, як у двійковому записі числа $n,$ то біноміальний коефіцієнт непарний, а якщо $\alpha>0,$ то він парний. Зокрема, всі біноміальні коефіцієнти є непарними лише тоді, коли $n=2^k-1,\ k\in N,$ і записується у двійковій системі лише одиницями.

З доведеного випливає таке просте правило: якщо $n=\left(\overline{a_p...a_1a_0}\right)_2,\ \ m=\left(\overline{b_k...b_1b_0}\right)_2,\ k\leq p,$ та $a_i\geq b_i$ для всіх $i=\overline{1,k},$ то біноміальний коефіцієнт C_n^m непарний, а якщо $a_i<b_i$ хоч для одного $i,$ то – парний.

17. Оскільки обидві фігурки складаються з парної кількості клітинок, то очевидною необхідною умовою вказаного розрізання є парність хоч одного з чисел $m,\ n.$

Якщо при цьому обидва ці числа парні, то прямокутник можна розрізати, наприклад, на квадратики розмірами 2×2. Отже, отримуємо найпростішу достатню умову для вказаного розрізання.

Ця достатня умова не є необхідною, бо прямокутник розмірами 12×5 можна розрізати на 10 гексаміно:

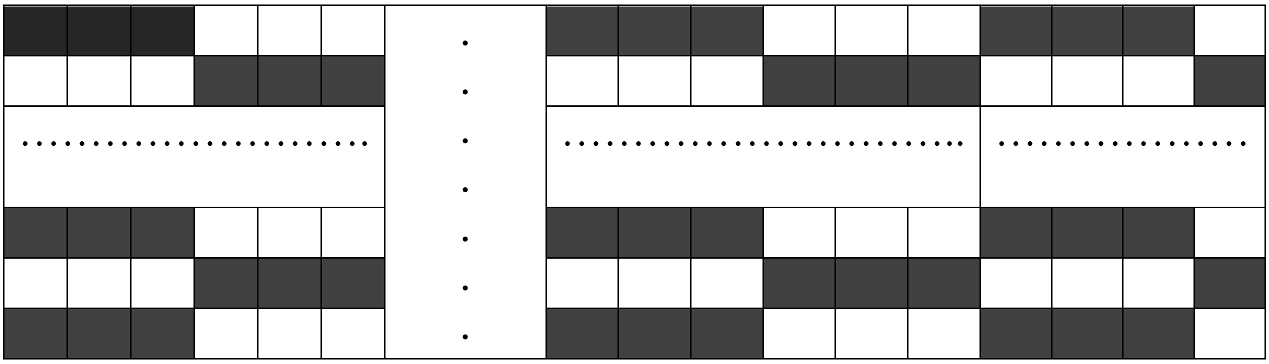


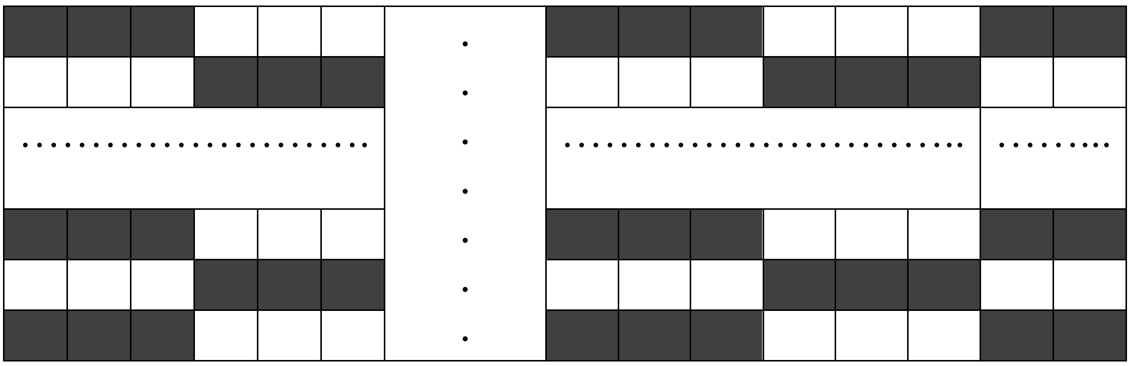
Зрозуміло, що у смузі шириною 5 таких прямокутників можна викласти скільки завгодно. Крім того, до них можна прикласти зверху чи знизу смуги шириною 2, які розрізаються на квадратики. Тому отримуємо ще одну достатню умову для розрізання прямокутника на вказані фігурки – розміри прямокутника мають бути такими:

$$12l\times(2k+1),\quad l,k\in\mathrm{N},\ k\ge2.\quad (*)$$

Але не відомо, чи є умова **(*)** необхідною за одного непарного виміру.

Тому методом від супротивного доведемо, що парний вимір ділиться на 6. Для цього розглянемо такі два розфарбовування:

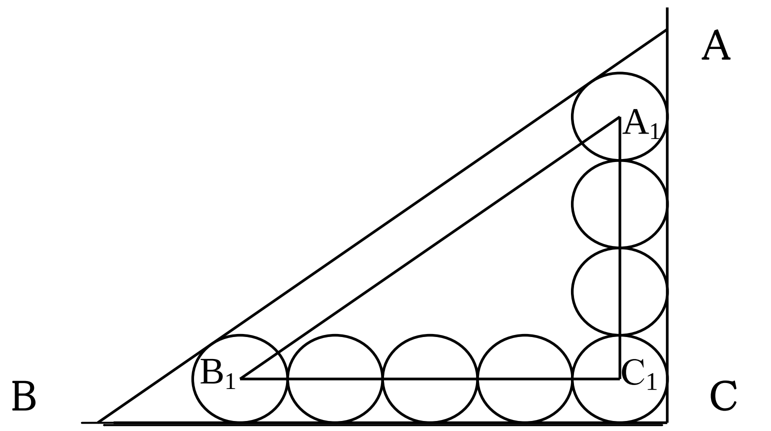




В обох випадках кожна вирізана фігурка містить порівну клітинок чорного та білого кольору, але в обох таблицях чорних клітинок на дві більше, ніж білих. Тому при діленні парного виміру на 6 ні остача 4 (див. першу таблицю), ні остача 2 (див. другу таблицю) неможливі.

18. Нехай вершини трикутника $A_1B_1C_1$ (див. рисунок) знаходяться у центрах кіл, розташованих у вершинах заданого трикутника. Його сторони паралельні до відповідних сторін трикутника ABC. Тому він прямокутний, причому його сторони дорівнюють: $a' = 8r,\ b' = 6r,\ c' = 10r,$ а радіус кола, вписаного у цей трикутник, дорівнює $r' = \frac{1}{2}\left(a' + b' - c'\right) = 2r.$

Зауважимо, що сторони трикутника $A_1B_1C_1$ віддалені від відповідних сторін трикутника ABC на відстань r. Отже, його центр буде рівновіддаленим від сторін трикутника ABC на $3r$. Тому радіус кола, вписаного у трикутник ABC, дорівнює $3r$.



Відзначимо, що у разі розміщення вздовж катетів прямокутного трикутника $m+1$ та $n+1$ кіл радіуса r відповідно радіус вписаного у нього кола дорівнюватиме $\left(m+n-\sqrt{m^2+n^2}+1\right)r.$

19. Многогранник називається правильним, якщо він опуклий, всі його грані є однаковими правильними многокутниками, у кожній його вершині сходиться однакова кількість ребер. Існує лише 5 правильних многогранників:

Назва	Число сторін грані	Число ребер біля вершини	Всього вершин	Всього ребер	Всього граней
Тетраедр	3	3	4	6	4
Гексаедр	4	3	8	12	6
Октаедр	3	4	6	12	8
Додекаедр	5	3	20	30	12
Ікосаедр	3	5	12	30	20

Оскільки у тетраедра лише 4 грані, то в його перерізі площиною можна отримати не більше як чотирикутник. Його отримуємо, провівши, наприклад, площину через середини чотирьох ребер.

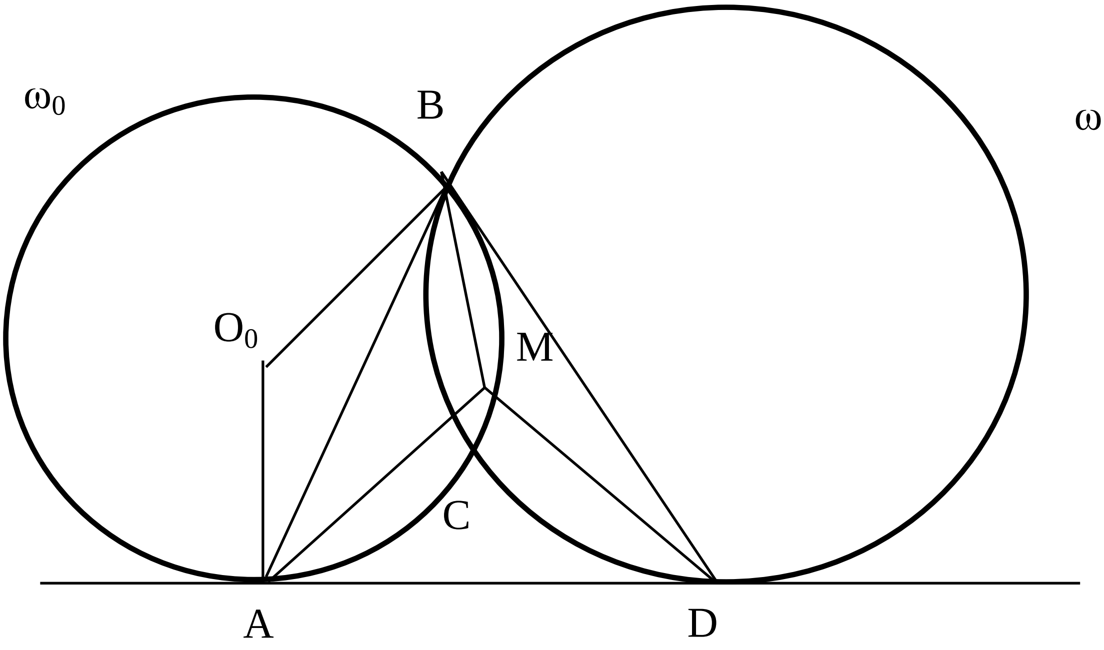
Оскільки у гексаедра (куба) лише 6 граней, то в його перерізі площиною можна отримати не більше як шестикутник. Його отримуємо, провівши площину через центр куба перпендикулярно до головної діагоналі. Вона пройде через середини шістьох ребер гексаедра.

Оскільки ребра октаедра лежать лише у трьох різних (взаємно перпендикулярних) площинах, то в його перерізі площиною можна отримати не більше як шестикутник. Його отримуємо, провівши площину паралельно до двох протилежних граней октаедра.

Оскільки у додекаедра 12 граней, то в його перерізі площиною можна отримати не більше як дванадцятикутник. Але насправді можливо отримати лише десятикутник, провівши площину через його центр паралельно до двох протилежних граней. Для доведення достатньо проаналізувати всі можливі варіанти перетину площиною однієї з граней додекаедра. В кожному з таких варіантів знайдуться принаймні дві грані, які дана площина не зможе перетнути.

Оскільки у ікосаедрі ребра лежать лише у 12 площинах, причому кожне ребро належить одночасно до двох таких площин, то в його перерізі площиною можна отримати не більше як дванадцятикутник. Його отримуємо, провівши площину через центр ікосаедра паралельно до двох протилежних граней.

20. Розв'яжемо загальнішу задачу для кіл ω довільного радіуса R. Розглянемо рисунок



Нехай M – центр кола, описаного навколо трикутника ABD. (Для спрощення рисунка це коло на ньому не зображене). Тоді $\angle BMD = 2\angle BAD = \angle BO_0D$, бо центральний кут вдвічі більший вписаного кута, а інший центральний вдвічі більший кута між хордою і дотичною.

Оскільки, трикутники AO_0B та DMB рівнобедрені, то звідси випливає, що вони подібні. Отже,

$$\frac{AM}{R_0} = \frac{DM}{AO_0} = \frac{DB}{AB} \Rightarrow AM = \frac{DB}{AB}R_0.$$

Будемо вважати, що $B(x, y)$, $D(d, 0)$ у прямокутній системі координат з центром у точці A. Оскільки $B(x, y)$ належить обом колам, то $(x-d)^2 + (y-R)^2 = R^2$ та $x^2 + (y-R_0)^2 = R_0^2$. Тому

$$AM^2 = \frac{DB^2}{AB^2}R_0^2 = \frac{(x-d)^2 + y^2}{x^2 + y^2}R_0^2 = \frac{2yR}{2yR_0}R_0^2 = RR_0,$$

і точка M лежить на колі радіуса $\sqrt{RR_0}$ з центром у точці A.

2012 рік

1. Має. Якщо мишка спочатку знаходилася у нірці з парним номером, то кіт спіймає її не пізніше третього ходу, послідовно перевіривши нірки 2, 3, 4. Якщо за ці три ходи мишка не спіймана, то у клітинці з парним номером вона опиниться після свого третього ходу. Котові залишиться ще раз послідовно перевірити нірки 2, 3, 4.

2. Якщо остачі від ділення чисел m та n на 4 різні, то переможе перший гравець. Для цього йому достатньо кожен раз забирати з тієї купки, де остача від ділення кількості кульок на 4 більша (на 1, 2 чи 3), таку кількість кульок, щоб вказані остачі в обох купках вирівнялись. Якщо ж спочатку такі остачі були однаковими, то переможе другий, дотримуючись описаної вище стратегії.

3. Запишемо задану рівність у вигляді

$$\left(xy - z^2\right)\left(yz - x^2\right)\left(zx - y^2\right) = 0.$$

Принаймні один з множників лівої частини дорівнює нулю. За умовою всі числа різні, то при цьому жодне з них не може бути нулем. Тому в деякому порядку вони утворюють геометричну прогресію.

4. Такі числа існують згідно з теоремою про розклад відношення двох многочленів у суму найпростіших дробів. Для знаходження коефіцієнтів розкладу помножимо обидві частини тотожності

$$\frac{k!}{x(x+1)\ldots(x+k)} \equiv \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \ldots + \frac{A_k}{x+k}$$

на $x + i,\ i = \overline{0,k}$. Перейшовши в отриманій рівності до границі при $x \to -i$, знаходимо

$$A_i = \lim_{x \to -i} \frac{k!(x+i)}{x(x+1)\ldots(x+k)} = (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} = (-1)^i C_k^i,\ i = \overline{0,k}.$$

5. Маємо

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{iC_{i+k}^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k!}{i(i+1)\ldots(i+k)} = (k-1)!\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+k)-i}{i(i+1)\ldots(i+k)} =$$

$$= (k-1)!\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i(i+1)\ldots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)\ldots(i+k)} \right) =$$

$$=(k-1)!\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{C_{n+k}^{k}}\right).$$

Зауважимо, що умова $n\geq 2k$ виявилася зайвою.

6. Враховуючи результат завдання 5, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{C_{n+k}^{k}}\right)=\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right)=\frac{1}{k}.$$

7. Нескладно переконатися, що

$$\underbrace{44\ldots4}_{2012}\underbrace{88\ldots8}_{2010}53=\underbrace{44\ldots4}_{2012}\underbrace{88\ldots8}_{2011}9-36=\left(\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012}\underbrace{00\ldots0}_{2012}+\frac{8}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2011}0+1\right)-36=$$

$$=\left(\frac{4}{9}\cdot\left(10^{2012}-1\right)\cdot 10^{2012}+\frac{4}{9}\cdot\left(10^{2011}-1\right)\cdot 10+1\right)-36=\left(\frac{2\cdot 10^{2012}+1}{3}\right)^2-6^2=$$

$$=\frac{2\cdot 10^{2012}-17}{3}\cdot\frac{2\cdot 10^{2012}+19}{3}=\underbrace{66\ldots6}_{2010}61\cdot\underbrace{66\ldots6}_{2010}73.$$

Отже, задане число – складене, а модуль різниці отриманих множників дорівнює 12. Доведемо, що меншим він бути не може. Справді, при діленні заданого числа як на 3, так і на 4 отримуємо остачу 1. Це можливо, якщо обидва множники розкладу як при діленні на 3, так і при діленні на 4 мають однакові остачі. А оскільки числа 3 та 4 – взаємно прості, то різниця таких множників ділиться на 12. Залишилось зауважити, що дорівнювати 0 вона не може, бо задане число закінчується цифрою 3, отже, не є точним квадратом.

8. Зауважимо, що для $x>0,\ y>0$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\Leftrightarrow\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+xy+y^2\right)^2>\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2\Leftrightarrow x^2y^2>0.$$

Тому для $a=1$ задана нерівність виконується для всіх додатних чисел x,y. Зрозуміло, що вона залишиться правильною і для всіх $a<1$, оскільки у такому разі

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{a}{x+y}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Якщо ж $a>1$, то, наприклад, для чисел $x=1,\ y=\dfrac{1}{a-1}$ нерівність не виконується, бо при цьому її ліва частина дорівнює 1, а права є більшою за 1. Отже, отримуємо відповідь: $a\le 1$.

9. а). Число 456 ділиться на 3, тому n ділиться на 3. Крім того, $5n^2<456$, тому $n\le 9$. Підставляючи послідовно $n=3,\ n=6$ та $n=9$, переконуємося у відсутності розв'язків записаної рівності.

б). Число 747 ділиться на 9, тому n ділиться на 3, отже, m також ділиться на 3. Нехай $m=3k$, $n=3l$. Тоді $3k^2+5l^2=83$. Оскільки $5l^2<83$, то перебором по $l\le 4$ знаходимо єдину пару $k=1,\ l=4$, отже, і єдиний розв'язок: $m=3,\ n=14$.

в). Зрозуміло, що m та n однакової парності. Для непарних m та n ліва частина рівності ділиться на 8, а 2012 на 8 не ділиться. Покладаючи $m=2k$, $n=2l$, отримаємо $3k^2+5l^2=503$. З нерівності $5l^2<503$ отримуємо $l\le 10$. Оскільки 503 не ділиться на 3, то й l не ділиться на 3. Розглядаючи остачі від ділення на 4, встановимо, що число k непарне , а l парне. Перебором по таких l знаходимо єдину пару $k=1,\ l=10$, отже, й єдиний розв'язок: $m=2,\ n=20$.

10. Представлення випливає з рівності

$$2^{2^n}+1=\left(\frac{2\cdot 2^{2^{n-1}}+1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\cdot 2^{2^{n-1}}-2}{3}\right)^2+\left(\frac{2^{2^{n-1}}+2}{3}\right)^2,$$

яку, позначивши $a_n=2^{2^{n-1}}$, можна подати у вигляді тотожності

$$F_n=a_n^2+1\equiv\left(\frac{2a_n+1}{3}\right)^2+\left(\frac{2a_n-2}{3}\right)^2+\left(\frac{a_n+2}{3}\right)^2.$$

Оскільки $a_3=16\equiv 1(\bmod 3)$ та $a_{n+1}=a_n^2$, то $a_n\equiv 1(\bmod 3)$ при кожному $n\ge 3$. Звідси випливає, що всі записані тут дроби при $n\ge 3$ є натуральними числами, причому всі вони різні.

11. Для розв'язання достатньо розглянути наступні випадки:

1). $a=0$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]\Leftrightarrow[0]=[0]\Rightarrow x\in R.$$

2). $0<a<1$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-1\Rightarrow x\in\left(-\pi+2\pi n,-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=0\Rightarrow x\in\left[2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

3). $a=1.$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=-1\Rightarrow x\in\left(-\pi+2\pi n,-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=0\Rightarrow x\in\left(2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

4). $1<a<\sqrt{2}.$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=-1\Rightarrow x\in\left[-\pi+\arccos\frac{1}{a}+2\pi n,-\pi+\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=0\Rightarrow x\in\left(\arccos\frac{1}{a}+2\pi n,\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

5). $a=\sqrt{2}.$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=-1\Rightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

6). $\sqrt{2}<a\le 2.$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=-2\Rightarrow x\in\left(-\pi+\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n,-\pi+\arccos\frac{1}{a}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$\left[a\sin x\right]=\left[a\cos x\right]=1\Rightarrow x\in\left[\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n,\arccos\frac{1}{a}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

Інших цілих значень ліва і права частини рівняння одночасно набувати не можуть.

12. Якщо $a_{15}=1,$ а решта коефіцієнтів многочлена дорівнюють нулю, то він матиме 30 нулів на відрізку $\left[-\pi,\pi\right].$ Покажемо, що меншою кількість нулів бути не може. Надалі розглядатимемо лише ті нулі, в яких $T\left(x\right)$ змінює свій знак на інтервалі $\left(-\pi,\pi\right).$ Зрозуміло, що число $x=0$ не входить до множини таких нулів. Внаслідок парності $T\left(x\right)$ їх можна представити у вигляді: $\pm x_1,\pm x_2,\ldots,\pm x_n.$ Припустимо, що $n\le 14.$ Нехай $f_k\left(x\right)=\cos x+\beta_k,\ k=\overline{1,n}.$ Вибравши

числа β_k так, щоб виконувалися рівності $f_k(\pm x_k)=0,$ розглянемо функцію $F(x)=f_1(x)f_2(x)...f_n(x),$ яка на інтервалі $(-\pi,\pi)$ змінює свій знак у тих самих точках, що й многочлен $T(x).$ Тому неперервна, відмінна від тотожного нуля функція $T(x)F(x)$ не змінює свого знака на відрізку $[-\pi,\pi].$ Звідси випливає, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x)F(x)dx \neq 0.$ З іншого боку, врахувавши при цьому рівності

$$\cos^3\varphi=\frac{\cos 3\varphi+3\cos\varphi}{4} \quad \text{та} \quad \cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

представимо $T(x)F(x)$ у вигляді

$$b_{6036+n}\cos(6036+n)x+b_{6035+n}\cos(6035+n)x+...+b_{15-n}\cos(15-n)x.$$

Звідси для $n\le 14$ знаходимо, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} T(x)F(x)dx=0.$ Отримана суперечність доводить, що $n\ge 15,$ тобто навіть тих нулів, в яких $T(x)$ змінює свій знак на інтервалі $(-\pi,\pi),$ є не менше 30.

13. Таке розбиття можливе. Для зручності додамо до наявних чисел ще й число 0. У кожну групу $A_m,\ m=\overline{0,9},$ будемо включати ті числа від 0 до 999999999, сума цифр яких закінчується цифрою $m.$ Покажемо, що таке розбиття підходить. Для цього представимо кожне з чисел від 000000000 до 999999999 у вигляді

$$10^8a_8+10^7a_7+10^6a_6+10^5a_5+10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10^1a_1+10^0a_0.$$

Для піднесення його до восьмого степеня необхідно перемножити дане число саме на себе 8 разів. Такий добуток складатиметься зі всіх можливих доданків вигляду

$$\left(10^8a_8\right)^{k_8}\left(10^7a_7\right)^{k_7}\left(10^6a_6\right)^{k_6}\left(10^5a_5\right)^{k_5}\left(10^4a_4\right)^{k_4}\left(10^3a_3\right)^{k_3}\left(10^2a_2\right)^{k_2}\left(10^1a_1\right)^{k_1}\left(10^0a_0\right)^{k_0},$$

де $k_8+k_7+k_6+k_5+k_4+k_3+k_2+k_1+k_0=8.$ Тому у кожному з таких доданків принаймні один зі степенів k_i дорівнює нулю. Якщо відповідну йому цифру a_i замінити на будь-яку іншу, то отримаємо рівний йому доданок, який входить у суму при піднесенні до восьмого степеня деякого числа з іншої групи A_m. При цьому різним замінам відповідатимуть різні групи. Звідси випливає, що суми восьмих степенів чисел кожної групи однакові.

Зрозуміло, що аналогічний висновок можна зробити про суми довільних натуральних степенів даних чисел від 1 до 8 включно. Але вже для дев'ятих степенів така рівність не виконується.

14. Розфарбуємо кожну грань куба зі стороною 5 у три кольори, як у наступній таблиці

1	2	3	2	1
2	2	3	2	2
3	3	3	3	3
2	2	3	2	2
1	2	3	2	1

У кожній вершині куба сходяться три клітинки з цифрою 1. З них зафарбувати у чорний колір вдасться лише одну. Отже, максимально отримаємо зафарбованих у чорний колір 8 клітинок з одиницею. Далі, навколо кожної вершини маємо замкнений ланцюжок з дев'яти клітинок з двійками (по три двійки на кожній грані). З них зафарбувати у чорний колір можна не більше чотирьох клітинок. Разом на всій поверхні куба таких отримаємо не більше 32. Нарешті, на кожній грані маємо по 9 клітинок з трійками, з яких зафарбувати у чорний колір вдасться не більше п'яти. Якщо на деякій грані у чорний колір зафарбовано 5 таких клітинок, то це можна зробити єдиним способом. Але тоді на чотирьох сусідніх з нею через спільне ребро гранях чорних вийде не більше чотирьох, і тільки на протилежній грані їх знову матимемо 5. Отже, отримаємо максимум 26 чорних клітинок з трійками. Всього – не більше 66 чорних клітинок. Рівно 66 чорних квадратиків матимемо, якщо не будемо фарбувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до вертикальних ребер куба на двох його протилежних гранях, а всі інші зафарбуємо у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. У результаті на двох гранях куба виявиться по 13, на двох – по 12 і на двох – по 8 чорних квадратиків. Разом – 66.

15. Справедлива така загальна рівність:

$$\Delta(m,n,k)=\begin{cases} mn+mk+nk-(2k-1), & m\ge n\ge k,\ k=2l-1,\\ mn+mk+nk-2k, & m\ge n\ge k,\ k=2l, \end{cases}\qquad m,n,k,l\in N.$$

З неї отримуємо $\Delta(2012,15,8)=2012\cdot 15+2012\cdot 8+15\cdot 8-16=46380.$

16. Бісектриса AL трикутника ABC ділиться точкою I перетину бісектрис у відношенні $\frac{AI}{IL}=\frac{AB+AC}{BC}$, а медіана AM точкою перетину медіан ділиться у відношенні $2:1$. Тому, враховуючи умову задачі, отримуємо $AB+AC=2BC$.

Нехай довжина третьої сторони трикутника дорівнює x см. Внаслідок попередньої рівності можливі такі три варіанти для сторін трикутника:

1). 2 см, 4 см та 6 см. Такого трикутника не існує, бо сума довжин двох сторін дорівнює довжині третьої сторони.

2). 4 см, 5 см та 6 см. Такий трикутник є гострокутним, бо $4^2+5^2-6^2=5>0$.

3). 4 см, 6 см та 8 см. Такий трикутник є шуканим тупокутним трикутником, бо $4^2+6^2-8^2=-12<0$.

17. Нехай $I-$ точка перетину бісектрис цього трикутника. Тоді $\frac{AB}{BL_1}=\frac{AC}{CL_1}=\frac{AI}{IL_1}=k.$ Враховуючи умову задачі, звідси отримуємо

$$2BC=AB+AC=k\left(BL_1+CL_1\right)=kBC\Rightarrow k=2.$$

Також (див. Кушнір І.А. Трикутник у задачах. – К.: Либідь, 1994. – С. 65.)

$$tg\angle L_2L_1L_3=\frac{2\left(\sin\angle B+\sin\angle C\right)}{1+2\cos\angle A}.$$

З умови $AB+AC=2BC$ випливає, що BC є середньою за довжиною стороною трикутника ABC, тому кут A гострий, $\cos\angle A>0,$ отже, кут $\varphi=\angle L_2L_1L_3$ також є гострим. Далі, враховуючи умову задачі та теорему синусів, отримуємо

$$tg\varphi=tg\angle L_2L_1L_3=\frac{2\left(\frac{AC}{BC}+\frac{AB}{BC}\right)\sin\angle A}{1+2\cos\angle A}=\frac{4\sin\angle A}{1+2\cos\angle A}=\frac{8\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{3\cos^2\frac{\angle A}{2}-\sin^2\frac{\angle A}{2}},$$

звідки знаходимо

$$tg\frac{\angle A}{2}=\frac{\sqrt{16+3tg^2\varphi}-4}{tg\varphi}.$$

Виберемо довільний відрізок, який вважаємо одиничним. З врахуванням властивостей прямокутних та подібних трикутників за відомим гострим кутом φ послідовно побудуємо $\mathrm{tg}\varphi,\ \mathrm{tg}^2\varphi,\ 3\mathrm{tg}^2\varphi,$

$$16+3\mathrm{tg}^2\varphi,\ \sqrt{16+3\mathrm{tg}^2\varphi},\ \sqrt{16+3\mathrm{tg}^2\varphi}-4,\ \frac{\sqrt{16+3\mathrm{tg}^2\varphi}-4}{\mathrm{tg}\varphi}.$$

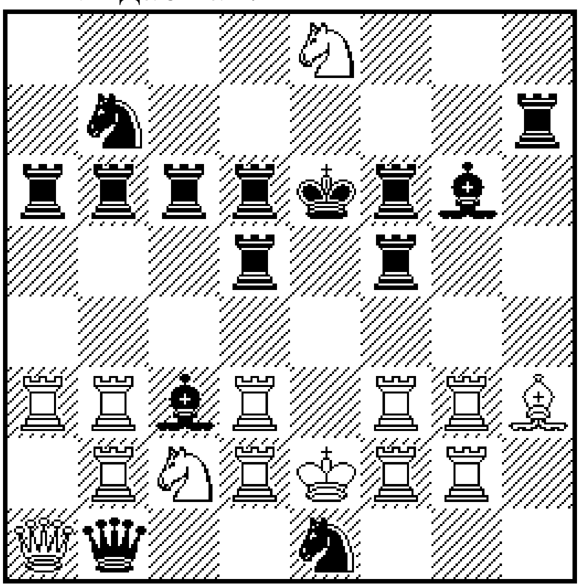
Маючи $\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2}$, побудуємо рівнобедрений трикутник L_2VL_3, з основою L_2L_3, у якому $tg\frac{\angle V}{2}=tg\frac{\angle A}{2}$, так, щоб вершина V і точка L_1 лежали по різні сторони від прямої L_2L_3. Опишемо коло навколо побудованого трикутника. На його дузі L_2L_3, яка містить точку V, лежатиме вершина A трикутника ABC. Якщо точка M, яка є серединою іншої дуги L_2L_3 цього кола, не співпадає з точкою L_1, то вершину A отримуємо на перетині побудованого кола і прямої ML_1. Поділивши відрізок AL_1 у відношенні 2:1, знайдемо точку I перетину бісектрис трикутника ABC. Тоді на перетині прямих AL_3 та IL_2 отримаємо вершину B, а на перетині прямих AL_2 та IL_3 отримаємо вершину C шуканого трикутника. Якщо ж точка M співпадає з точкою L_1, то трикутник $L_2L_1L_3$ (а з ним і трикутник ABC) є рівнобедреним. При цьому вершина A співпаде з точкою V.

18. Обов'язково. Нехай маємо п'ятикутник $ABCDE$, в якому $CE\parallel AB$, $DA\parallel BC$, $EB\parallel CD$, $AC\parallel DE$. Тоді для площ відповідних трикутників послідовно отримуємо: $S_{ABE}=S_{ABC}=S_{BCD}=S_{CDE}=S_{ADE}$. З рівності $S_{ABE}=S_{ADE}$ випливає, що $BD\parallel EA$.

19. Спочатку відзначимо, що A, a – не пішаки, бо з обох сторін збито по дві фігури, а на трьох вертикалях дошки є по дві фігури A, що вимагало би трьох боїв з боку білих. Отже, A, a – однакові фігури, утворені після проходження пішаків до восьмої та першої горизонталей відповідно. Очевидно, що A, a – не ферзі, бо їх могло

утворитися максимум по 7. Для утворення по 8 таких фігур необхідно, щоб з обох сторін таке проходження здійснили як мінімум по 6 пішаків. Для цього знадобиться чотири взяття – по одному на кожній парі вертикалей $a+b$, $c+d$, $e+f$, $g+h$. Оскільки цим вичерпується ліміт збитих фігур, то інших взяттів бути не могло, а в кожній парі вказаних вертикалей по 3 пішаки перетворилися в однакові фігури, причому всі 3 на полях одного кольору. Звідси випливає, що A, a – не слони, бо у такому разі різниця між загальною кількістю слонів, які стоять на білих полях, і слонів, які стоять на чорних полях, мала би бути кратною трьом, а на дошці модуль такої різниці дорівнює 2. Таким чином, пішаків на дошці не залишилося взагалі.

По одній фігурі кожного кольору можуть бути лише ферзі та королі. Такими є тільки B, b і D, d. Оскільки королі не можуть стояти на суміжних полях, то однозначно отримуємо: B, b – королі, D, d – ферзі. Оскільки обидва королі не можуть одночасно знаходитися під шахом, то E, e – не тури. Вони також – не слони, бо два E знаходяться на білих полях. Таким чином, E, e – коні. Отже, слонами можуть бути тільки C, c, а тоді турами – A, a. Відновлена, дещо штучна, позиція виглядає так:



20. Не завжди. Нехай отримана пропагандистом таблиця має вигляд

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5

Тоді утворені ним інтегральні показники за 5 років будуть такими:

$$I_k = aP_k + bQ_k + cR_k,\ k = \overline{1,5},$$

і для їх щорічного зростання необхідно, щоб всі прирости $\Delta_k = I_{k+1} - I_k,\ k = \overline{1,4},$ були додатними.

Позначимо: $u_k = P_{k+1} - P_k,\ v_k = Q_{k+1} - Q_k,\ w_k = R_{k+1} - R_k,\ k = \overline{1,4}.$ Тоді $\Delta_k = au_k + bv_k + cw_k = (a,b,c)\cdot(u_k,v_k,w_k),\ k = \overline{1,4}.$ Таким чином, додатними повинні бути скалярні добутки векторів (a,b,c) та $(u_k,v_k,w_k),\ k = \overline{1,4}.$ Тому вектор (a,b,c) має утворювати гострий кут з кожним із векторів $(u_k,v_k,w_k),\ k = \overline{1,4}.$

Покажемо, що досягти цього вдасться не завжди. Нехай координати таких векторів задані таблицею:

k	1	2	3	4
u_k	n	n	$-n$	$-n$
v_k	n	$-n$	n	$-n$
w_k	n	$-n$	$-n$	n

Геометрично це означає, що вказані вектори виходять з центра O правильного тетраедра до чотирьох його вершин $A, B, C, D.$ Але, яким би не був вектор (a,b,c) з початком у точці $O,$ він буде напрямлений в один з чотирьох однакових тетраедрів $OABC,$ $OABD,$ $OACD,$ $OBCD,$ отже, утворить тупий кут принаймні з одним із векторів $(u_k,v_k,w_k).$ Не допоможе пропагандисту і право змінювати окремі показники, бо при достатньо великих значеннях $n \in N$ в отриманому при цьому тетраедрі $A_1B_1C_1D_1$ кути між векторами $OA_1,$ $OB_1,$ $OC_1,$ OD_1 мало відрізнятимуться від кутів між векторами $OA,$ $OB,$ $OC,$ $OD.$ Тому кут між будь-яким вектором (a,b,c) і принаймні одним з векторів $OA_1,$ $OB_1,$ $OC_1,$ OD_1 виявиться тупим.

2013 рік

1. Не можна. Заповнимо квадрат 8×8 числами 1, 2, 3 як на рисунку:

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

До перефарбовування у ньому маємо 21 клітинку білого кольору з одиницею, 22 клітинки з двійкою та 21 клітинку з трійкою. Кожне перефарбовування змінює колір у трьох клітинках з трьома різними записаними числами. Для того, щоб всі клітинки з числами 1 та 3 стали чорними, знадобиться непарна кількість перефарбувань. При цьому непарна кількість клітинок з цифрою 2 (принаймні одна) обов'язково залишиться білою.

2. Не вдасться. На 540 тисяч кілометрів знадобиться разом $\frac{540}{36}+\frac{540}{45}+\frac{540}{54}+\frac{540}{60}=15+12+10+9=46$ шин. Тому на 48 тисяч кілометрів потрібно їх не менше, як $46\cdot\frac{48}{540}=4\frac{4}{45}>4$.

3. Виграшна стратегія є у Миколки. Йому достатньо записати 2013 п'ятірок. Тоді, скільки б чисел не витер Андрійко (якщо витре всі, то програє зразу), добуток тих чисел, які залишилися, $\prod_i p_i\equiv1\pmod4$. З умови задачі випливає, що з кожним ходом добуток $\prod_i p_i$ всіх замінених на дошці простих чисел зменшується на 2. Тому, незалежно від наступних дій суперників, завжди буде $\prod_i p_i\equiv3\pmod4$ після ходу Миколки та $\prod_i p_i\equiv1\pmod4$ – після ходу Андрійка, і за скінченну кількість ходів Миколка залишить

суперникові одне число 3. Після цього Андрійкові не залишиться нічого, як вилучити це число і програти.

4. Зауважимо, що рівняння $x^2-nx+1=0$ при кожному натуральному $n\ge 3$ має два різні додатні корені x_1 та x_2 такі, що $x_1+x_2=n,\ \ x_1x_2=1.$ Виберемо числа a та b так, щоб x_1 та x_2 були також коренями рівняння $x^{2013}=ax+b.$ Тоді

$$x^{2013}-ax-b=\left(x^2-nx+1\right)\left(x^{2011}+c_{2010}x^{2010}+...+c_1x+c_0\right)=$$
$$=x^{2013}+\left(c_{2010}-n\right)x^{2012}+\left(c_{2009}-nc_{2010}+1\right)x^{2011}+\left(c_{2008}-nc_{2009}+c_{2010}\right)x^{2010}+$$
$$+...+\left(c_0-nc_1+c_2\right)x^2+\left(-nc_0+c_1\right)x+c_0.$$

Прирівнюючи тут коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо: $c_{2010}=n,\ c_{2009}=nc_{2010}-1,\ c_{2008}=nc_{2009}-c_{2010},\ ...\ ,$

$$c_0=nc_1-c_2,\ \ -a=-nc_0+c_1,\ \ -b=c_0.$$

Оскільки c_{2010} – ціле число, то звідси випливає, що й числа c_{2009}, $c_{2008},\ ...\ ,\ c_0,\ \ a=nc_0-c_1,\ \ b=-c_0$ – також цілі. Зрозуміло, що пари (a,b) для різних $n\ge 3$ будуть різними, тому таких пар цілих чисел є нескінченно багато.

5. Міркуючи аналогічно, як при розв’язуванні задачі 7 за 2012 рік, отримаємо, що це число дорівнює $\sqrt{\left(\frac{20...01}{3}\right)^2}=6...67$. При цьому у записаному для нього виразі використано по 2012 нулів та шестірок.

6. Віднявши від другого рівняння системи третє, отримаємо

$$\left(y^5-z^5\right)+20\left(x^3-z^3\right)+13(x-z)=0.$$

Оскільки задана система циклічна, то достатньо проаналізувати два випадки: $x\le y\le z$ та $x\ge y\ge z.$ У першому з них всі три доданки у лівій частині отриманої рівності не додатні, а у другому – не від’ємні. Тому в обох із них така рівність можлива, якщо одночасно $y^5=z^5$, $x^3=z^3,\ \ x=z,$ тобто $x=y=z.$ Підставляючи $y=x,\ z=x$ у перше рівняння системи, отримаємо $x^5-20x^3+13x=0.$ Отже, одним з розв’язків заданої системи є трійка $(0,0,0),$ а для знаходження інших достатньо розв’язати біквадратне рівняння $x^4-20x^2+13=0.$

7. Позначимо $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=x$. Оскільки $a^2+b^2\ge 2ab$, то задача зводиться до знаходження найменшого значення функції $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ на проміжку $[2;+\infty)$. З нерівності $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}>0,\ x\ge 2,$ випливає, що $\min\limits_{x\ge 2} f(x)=f(2)=2{,}5$.

Можна було б також шукати найменше c, за якого рівняння $x+\dfrac{1}{x}=c$ має розв'язок на проміжку $[2;+\infty)$. Запишемо це рівняння у вигляді $x^2-cx+1=0$. З геометричних міркувань про властивості графіка параболи $y=x^2-cx+1$ знайдемо $c=2{,}5$, підставивши в отримане рівняння $x=2$.

8. Маємо $3^n+5^n+7^n=5\left(3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}\right)+2\left(7^{n-1}-3^{n-1}\right)$, причому $0\le 2\left(7^{n-1}-3^{n-1}\right)<2\left(3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}\right)$. Але $2\left(7^{n-1}-3^{n-1}\right)\ne 3^{n-1}+5^{n-1}+7^{n-1}$, бо ліва та права частини різної парності, а з рівняння $2\left(7^{n-1}-3^{n-1}\right)=0$ знаходимо єдиний розв'язок $n=1$.

9. Нехай $BC=a,\ AC=b,\ AB=c.$ Зауважимо, що умову задачі можна записати у вигляді $(b-a-c)\left(c^2-a^2-ab\right)=0,$ причому для сторін трикутника $b-a-c\ne 0.$ Звідси $c^2=a^2+ab,$ тобто $\dfrac{c}{a}=\dfrac{a+b}{c}.$ Продовжимо сторону BC трикутника ABC поза точку C до точки D такої, що $CD=CA.$ Оскільки при цьому $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB},$ то трикутники ABC та DBA подібні. Отже, $\angle BAC=\angle BDA=\angle CAD.$ Тому $\angle BCA=2\angle BAC.$ Звідси маємо три можливі варіанти для кутів трикутника ABC:

$$\angle A=48^\circ,\ \angle B=36^\circ,\ \angle C=96^\circ;$$

$$\angle A=44^\circ,\ \angle B=48^\circ,\ \angle C=88^\circ;$$

$$\angle A=24^\circ,\ \angle B=108^\circ,\ \angle C=48^\circ.$$

10. Розглянемо три можливі випадки:

1). $AB = BC = CD < AD$. При цьому точка O знаходиться всередині трикутника EMN. Далі маємо: $AB = BC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$, $BC = CD \Rightarrow \angle BNC = 90^\circ$. Крім того, $\angle BEO = \angle CEO = 90^\circ$. Отже, чотирикутники $MBEO$, $MBCN$, $OECN$ – вписані. Тоді $\angle EMO = \angle EBO = \angle CBN = \angle CMN$, $\angle ENO = \angle ECO = \angle BCM = \angle BNM$. Тому O лежить на перетині бісектрис двох кутів трикутника EMN і є центром вписаного у нього кола.

2). $AB = BC = CD = AD$. Тоді точки M, N, O співпадають.

3). $AB = BC = CD > AD$. Точка O знаходиться поза трикутником EMN. З рівностей $\angle BEO = \angle BMO = 90^\circ$, $\angle CEO = \angle CNO = 90^\circ$, $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$ випливає, що чотирикутники $BEMO$, $ECON$, $BCMN$ – вписані. Отже, $\angle NMO = \angle NBC = \angle OBE = \angle QMO$, $\angle MNO = \angle BCM = \angle ECO = \angle PNO$, де $Q = EM \cap CD$, $P = EN \cap AB$. Тому O – центр зовні вписаного кола цього трикутника.

Наслідком кожного з цих трьох випадків є твердження задачі.

11. Розглянемо загальнішу задачу для многочлена $Q(x)$ $n-$го степеня, набору дійсних чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_{n+1}$ та виразу $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i Q(x + \lambda_i)$, де $a_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} (\lambda_i - \lambda_j)^{-1}$, $1 \le i \le n+1$.

Нехай $Q(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \ldots + q_{n-1} x + q_n$. Тоді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) \lambda_i^k = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) \sum_{i=1}^{n+1} a_i \lambda_i^k =$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) \sum_{i=1}^{n+1} b_i \lambda_i^k = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) \varphi_k,$$

де $Q_n(x) = q_0$, $Q_k(x)$, $0 \le k \le n-1$, – деякі многочлени,

$$a = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (\lambda_i - \lambda_j), \quad b_i = (-1)^{i-1} \prod_{\substack{1 \le s < j \le n+1 \\ s \neq i}} (\lambda_s - \lambda_j), \; 1 \le i \le n+1,$$

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \lambda_i^k, \; 0 \le k \le n,$$

Для $k \le n-1$ розглянемо допоміжні функції $\varphi_k(t)$, утворені з виразів φ_k заміною λ_{n+1} на t. Всі такі функції є многочленами від t не вище $(n-1)-$го степеня, причому $\varphi_k(\lambda_i)=0, 1\le i\le n.$ Справді, у виразах $\varphi_k(\lambda_i)=0,\ 1\le i\le n,$ два доданки відрізняються лише знаком, а решта доданків дорівнюють нулю. Тому $\varphi_k(t)\equiv 0, 0\le k\le n-1.$ Отже, також $\varphi_k=0,\ 0\le k\le n-1.$

Відносно виразу φ_n зауважимо, що $\varphi_n=0$ для всіх $\lambda_i=\lambda_j$. Крім того, всі його доданки одного степеня зі степенем виразу a, та коефіцієнт біля доданка $\lambda_1^n\lambda_2^{n-1}\ldots\lambda_{n-1}^2\lambda_n^1$ дорівнює 1, як і у виразі a. Тому, розклавши φ_n на множники, отримаємо $\varphi_n=a$.

Остаточно знаходимо $\varphi(x)=\dfrac{1}{a}q_0a=q_0$, тобто $\varphi(x)$ тотожно дорівнює коефіцієнту при старшому степені заданого многочлена.

12. а). Підставивши $x=1$, отримуємо $P(2)=2014$. А, підставивши $x=-2$, будемо мати

$$P(2)=(-2+4)+(-8+16)+\ldots+\left(-2^{2013}+2^{2014}\right)=2+8+\ldots+2^{2013}\ne 2014.$$

Ця суперечність доводить, що такого многочлена $P(x)$ не існує.

б). Скористаємося комплексними числами. Підставляючи $x=-1$ та $x=i$, отримуємо $Q(-1)=-a+b-1$ та $Q(-1)=i-1-ai+b+i$ відповідно. Прирівнюючи дійсні та уявні частини отриманих значень, приходимо до системи рівнянь $-a+b-1=b-1$ та $2-a=0$, яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена $Q(x)$ також не існує.

13. Позначимо кількість піратів через N, $N>1$. і вважатимемо, що при поділі кожного разу забиралася $k-$та частина від решти монет, $k>1$. Нехай $m-$ найменша кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ є можливим. Нехай x_i- кількість монет, які залишаються у скарбі після того, як свою долю взяв $i-$тий пірат, $1\le i\le N$,. Враховуючи умову задачі, послідовно знаходимо

$$x_1=m-1-\frac{m-1}{k}=(m-1)\frac{k-1}{k},$$

$$x_2=(x_1-1)\frac{k-1}{k}=\left((m-1)\frac{k-1}{k}-1\right)\frac{k-1}{k}=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^2-\frac{k-1}{k},$$

$$x_3=(x_2-1)\frac{k-1}{k}=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^3-\left(\frac{k-1}{k}\right)^2-\frac{k-1}{k},\ldots,$$

$$x_N=(x_{N-1}-1)\frac{k-1}{k}=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{N-1}-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{N-2}-\ldots-\frac{k-1}{k}.$$

Обчисливши тут суму скінченної кількості доданків геометричної прогресії, отримуємо

$$x_N=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N+k\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-(k-1)=(m+k-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-(k-1).$$

Оскільки $k-1$ та $k-$ взаємно прості числа, то x_N, а разом з ним і всі попередні x_i, буде цілим, якщо $m+k-1=l\cdot k^N$ при деякому натуральному l. При цьому отримаємо, що $x_N=l(k-1)^N-(k-1)$.

Вибравши найменше з таких l, для якого $x_N>0$ і ділиться на N, знайдемо розв'язок $m=l\cdot k^N-k+1$.

Для простих чисел N за теоремою Ферма ($a^p-a\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, де $a\in Z$, $p-$просте число) при кожному $k>2$ будемо мати $l=1$ та $m=k^N-k+1$. Звідси, зокрема, випливає, що для $N=2027$, $k=2013$ найменша можлива кількість монет у скарбі $m=2013^{2027}-2012$.

14. Зауважимо, що для отримання найдовшого слова в об'єднаній мові необхідно використати всі літери кожного з алфавітів та найбільшу сумарну кількість повторень таких літер. З умов задачі випливає, що між двома літерами одного алфавіту, які повторюються, повинні знаходитися не менше двох різних літер, взятих з іншого алфавіту. З них надалі повторитися зможе тільки остання літера. Тому найдовше слово в об'єднаному алфавіті отримаємо, якщо між двома однаковими літерами буде рівно дві літери іншого алфавіту. Таким чином, кожній літері, яка повторюється, відповідатиме пара двох літер іншого алфавіту, яка передує повторюваній літері.

Для конкретності будемо вважати, що $k\le m$. Тоді з літер алфавіту A можна утворити максимум $k-1$ пар сусідніх літер:

$a_1a_2, a_2a_3, \dots a_{k-1}a_k$. Це означає, що з алфавіту B може повторитися не більше $k-1$ літери, тобто разом з повтореннями у найдовше слово об'єднаного алфавіту увійде максимум $m+k-1$ символів алфавіту B. Разом вони можуть утворити не більше $\left[\frac{m+k-1}{2}\right]$ пар, які передують повторюваним літерам алфавіту A, з якого внаслідок цього у найдовше слово об'єднаного алфавіту увійдуть максимум $k+\left[\frac{m+k-1}{2}\right]$ символів, де $[a]$ означає найбільше ціле число, яке не перевищує a. Отже, довжина слова об'єднаного алфавіту не може перевищувати

$$m+2k-1+\left[\frac{m+k-1}{2}\right]=\left[\frac{3m+5k-1}{2}\right].$$

Слова такої максимальної довжини в об'єднаному алфавіті існують і мають вигляд

$$a_1b_1b_2a_1a_2b_2b_3a_2a_3\dots b_{k-1}b_ka_{k-1}a_kb_kb_{k+1}a_kb_{k+2}b_{k+3}a_kb_{k+4}b_{k+5}a_k\dots a_kb_{m-2}b_{m-1}a_kb_m,$$
$$m+k=2l,\ l\in N,$$

або

$$a_1b_1b_2a_1a_2b_2b_3a_2a_3\dots b_{k-1}b_ka_{k-1}a_kb_kb_{k+1}a_kb_{k+2}b_{k+3}a_kb_{k+4}b_{k+5}a_k\dots a_kb_{m-1}b_ma_k,$$
$$m+k=2l+1,\ l\in N.$$

Аналогічно розглядається випадок $m\le k$.

Отже, найбільша довжина слова у новій мові дорівнює

$$\min\left\{\left[\frac{3m+5k-1}{2}\right],\left[\frac{3k+5m-1}{2}\right]\right\}.$$

15. Нехай хорда BC розбиває коло ω на дуги α та $180^\circ-\alpha$, відмінні від 45° та 135°, H – точка перетину висот трикутника ABC. Оскільки $\angle BHC=\angle EHF=180^\circ-\angle EAF=180^\circ-\alpha$, то точка H належить колу ω', симетричному до кола ω відносно прямої BC з двома виколотими точками B та C. Тоді точка перетину прямих BF та ME пробігатиме коло, яке є образом кола ω' при гомотетії з центром у точці B та коефіцієнтом $-\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$, з двома виколотими

точками. Якщо ж $\alpha = 45°$ або $\alpha = 135°$, то шуканим ГМТ буде порожня множина – $\varnothing$. Детальніше див. [5], ст. 56 – 57.

16. $p = 3$, $p = 23$ та $p = 71$. Нехай $37p^2 - 47p + 4 = n^2$, $n \in N$, тоді $p(37p - 47) = (n-2)(n+2)$. Отже, $n-2$ або $n+2$ ділиться на просте число p.

Якщо $n - 2 = kp$, $k \in Z_+$, то послідовно знаходимо $n + 2 = kp + 4$, $p(37p - 47) = kp(kp+4)$, $\left(37 - k^2\right)p = 4k + 47$. Звідси випливає, що $k \le 6$. Перебором таких k знаходимо два розв'язки: $p = 3$ при $k = 4$ та $p = 71$ при $k = 6$.

Якщо ж $n + 2 = lp$, $l \in N$, то аналогічно маємо $n - 2 = lp - 4$, $\left(37 - l^2\right)p = 47 - 4l$. Для $l \le 6$ перебором знаходимо ще один розв'язок $p = 23$ при $l = 6$. А для $l > 6$ відсутність інших розв'язків випливає з нерівності $\left(l^2 - 37\right)p > 6l - 37 > 4l - 47$.

17. Наведемо приклади відповідних перетворень:

$82 \to 82 \cdot 3 = 246 \to 246 - 3 = 243 \to 243 : 3 = 81$;

$81 \to 27 \to 24 \to 21 \to 7 \to 4 \to 12 \to 36 \to 33 \to 30 \to 90 \to 87 \to$
$\to 84 \to 252 \to 249 \to 246 \to 82$.

18. $k = \pm 1$ та $k = \pm 13$. Справедливе (див. [5], ст. 62 – 63) таке загальне твердження: функція $f(x, y) = \cos(ax + by)$, де a, b – цілі числа, може бути записаною у вигляді многочлена з цілими коефіцієнтами відносно $\cos x$, $\cos y$ і $\cos(x + ky)$ тоді і тільки тоді, коли b ділиться на k.

19. Зрозуміло, що центри таких кіл повинні знаходитися у вершинах опуклого многокутника, найбільша діагональ якого не перевищує 10. Розглянемо правильний n–кутник $A_1A_2...A_n$ з найбільшою діагоналлю 10 і вершинами на колі радіуса R з центром у точці O. Побудуємо одиничні кола з центрами у його вершинах і проведемо дотичні до них, які перетинають радіуси OA_i, $1 \le i \le n$, під прямим кутом. Дотичні, проведені до трьох послідовно розміщених одиничних кіл, обмежують деякий рівнобедрений трикутник ABC з

кутом $\varphi=\dfrac{2\pi}{n}$ при основі AC. Оскільки $\dfrac{1}{2}AC=(R-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$, то радіус вписаного у цей трикутник кола $r=\dfrac{1}{2}AC\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}=(R-1)\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{n}$.

Умови задачі будуть виконані, якщо $r\ge 1$.

Для $n=6$ маємо $R=5$, $r=4\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}>1$, отже, 6 кіл розмістити таким чином вдасться.

Для $n>6$ окремий випадок розміщення центрів таких кіл у вершинах правильного многокутника. Зокрема, для $n=7$ знаходимо $R=5\Big/\cos\dfrac{\pi}{14}$ і переконуємося, що $r=\left(\left(5\Big/\cos\dfrac{\pi}{14}\right)-1\right)\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{7}<1$. Тому розташувати 7 кіл з центрами у вершинах правильного семикутника так, щоб виконувалися умови задачі, не можна.

20. Доведемо, що найбільше значення заданого виразу дорівнює $\sqrt{2}$, тобто треба довести нерівність:

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right). \qquad (*)$$

Для цього, розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln x,\ x>0.$

Її похідна дорівнює $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}x}$.

Критичні точки функції $f(x)$ знаходимо з умови $f'(x)=0$, тобто з рівняння $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}x}=0,\ x>0$.

Зауважимо, що при цьому

$$f''(x)=\frac{1}{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}<0,$$

бо $\left(x^2+1\right)^3=x^6+3x^4+3x^2+1>2x^4$. Тому функція $f'(x)$ на інтервалі $(0,+\infty)$ спадає. Отже, рівняння $f'(x)=0$ може мати на цьому інтервалі не більше одного кореня. Легко побачити, що ним є $x=1$.

Оскільки $f'(x)>0$ для $0<x<1$ та $f'(x)<0$ для $x>1$, то для всіх $x>0$ справджується нерівність $f(x)\le f(1)=0$, тобто

$$\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x,\ x>0.$$

Це означає, що для додатних $a_1,a_2,...,a_n$ виконуються нерівності:

$$\sqrt{a_1^2+1}\le\sqrt{2}a_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_1,\ \sqrt{a_2^2+1}\le\sqrt{2}a_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_2,\dots,$$

$$\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}a_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_n,$$

додавши які, одержуємо:

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+....+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}\left(a_1+a_2+...+a_n\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(a_1a_2...a_n\right).$$

Оскільки $\ln\left(a_1a_2...a_n\right)=\ln 1=0$, то нерівність (*) доведена. Рівність у ній досягається для $a_1=a_2=...=a_n=1$.

2014 рік

1. Додамо до заданих точок $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(20;14)$, $D(20;0)$ точки $E(1;1)$ та $F(19;13)$. Тоді площа шестикутника $ABECDF$ дорівнює 20. Якщо ж взяти точку $F(21;15)$, то таку ж площу матиме шестикутник $ABEFDC$.

2. Завжди. Нехай монети з масами 1 г та 2 г стоять на різних шальках. Виберемо монету найбільшої маси m г, яка знаходиться на шальці з монетою 1 г. Якщо $m<100$, то після зняття монет 1 г та m г з однієї шальки і монети $m+1$ г з другої рівновага збережеться. Якщо ж $m=100$, то розглянемо найбільше парне k, для якого монета з масою k г знаходиться на одній шальці з монетою 2 г. Зрозуміло, що $k<100$. Крім того, $k>2$, бо у протилежному випадку шалька з мотетами 1 г, 4 г, 6 г, …, 100 г переважила б. Тому зі збереженням рівноваги вдасться зняти монети 2 г та k г з однієї шальки та монету масою $k+2$ г з другої.

Нехай тепер монети з масами 1 г та 2 г стоять на одній шальці.

Виберемо монету найбільшої маси m г таку, що всі монети з масами від 1 г до m г включно знаходяться на одній шальці. Зрозуміло, що $m<100$, бо всі монети не можуть знаходитися на одній шальці. Отже, зі збереженням рівноваги вдасться зняти монети 1 г та m г з однієї шальки і монету $m+1$ г з другої.

3. Може. Наприклад, $a=\frac{8}{225}=\frac{1}{5^2}-\frac{1}{15^2}$, $2a=\frac{16}{225}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}$. Зрозуміло, що помноживши кожен із записаних тут знаменників на квадрат довільного натурального числа, більшого за 1, отримаємо нескінченну кількість чисел a із вказаною властивістю.

Доведемо, що нескінченною є й множина розв'язків рівняння

$$2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{l^2},$$

де n, m, k, l – натуральні числа, для яких $n<m$ і $НСД\left(n, m, k, l\right)=1$.

Покладаючи тут $l=n, m=kn,$ приходимо, до співвідношення $3k^2-n^2=2,$ яке задовольняє пара $k_1=3, n_1=5$. Припускаючи $3k_i^2-n_i^2=2$ отримуємо $3\left(2k_i+n_i\right)^2-\left(3k_i+2n_i\right)^2=3k_i^2-n_i^2=2,$ тобто пара чисел $k_{i+1}=2k_i+n_i>k_i$ та $n_{i+1}=3k_i+2n_i>n_i$ також є розв'язком. При цьому $НСД\left(n_i,k_i\right)=1$ для всіх натуральних $i\geq 1,$ бо він є дільником числа 2, але не дорівнює 2.

Отже, ми отримали нескінченну кількість додатних чисел $a_i=\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{\left(k_in_i\right)^2}$, $i\in N,$ для яких $2a_i=\frac{1}{k_i^2}-\frac{1}{n_i^2}$, $НСД\left(n_i, k_i\right)=1.$

4. Нехай $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=f^2$, де a, b, c, d, e, f – прості числа. $f^2\geq 5\cdot 2^2=20$, тому просте число $f\geq 5$ і непарне. Зауважимо, що квадрати простих чисел $p>3$ при діленні на 24 дають остачу 1. Справді, $p^2-1=\left(p-1\right)\left(p+1\right)$ ділиться на 3, бо один з його множників кратний трьом, і ділиться на 8, бо його множники є сусідніми парними числами, одне з яких кратне чотирьом. Але з п'яти можливих остач доданків лівої частини з множини $\{1;4;9\}$ утворити остачу 1 вдасться лише у випадку, коли чотири з них дорівнюють 4, а

п’яте – 9. Тому існує єдина шістка таких простих чисел: 2, 2, 2, 2, 3, 5.

5. Обчислюватимемо значення тих квадратних тричленів $Q(x)=ax^2+bx+c$, які появлятимуться у процесі гри, при $x=2$. До початку гри $Q(2)=2020$. Нехай Миколка кожним своїм ходом зменшує коефіцієнт біля x на 1. При цьому $Q(2)$ зменшується на 2. Тому, в залежності від гри Петруся, після двох ходів кожного з гравців отримаємо одне з таких значень для $Q(2)$: 2018, 2016 чи 2014, тобто значення $Q(2)$ зменшується на 2, 4 або 6. Отже, після деякого парного ходу Петруся отримаємо $Q(2)=2$, $Q(2)=0$ чи $Q(2)=-2$. У першому випадку Миколці достатньо ще раз зменшити коефіцієнт біля x на 1, в третьому – збільшити його на 1, щоб отримати $Q(2)=0$, а в другому варіанті воно вже є готовим. Таким чином, за описаної вище стратегії Миколки, на деякому кроці отриманий квадратний тричлен матиме корінь $x_1=2$. Зрозуміло, що при цьому його другий корінь $x_2=-b-2$ також буде цілим.

6. За теоремою косинусів отримаємо, що $\angle ABC=120^\circ$. Нехай M,N,K – основи перпендикулярів, опущених з точки A_1 на прямі AB, AC, BB_1 відповідно. Тоді $A_1N=A_1M$, бо AA_1 – бісектриса кута BAC, $A_1K=A_1M$, бо BA_1 – бісектриса кута MBK. Отже, $A_1K=A_1N$, і B_1A_1 – бісектриса кута BB_1C. Аналогічно доводиться, що B_1C_1 – бісектриса кута BB_1A. Тому $A_1B_1C_1$, як кут між бісектрисами суміжних кутів, дорівнює 90°.

7. За нерівністю Коші отримуємо нерівності:

$$3=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\Rightarrow a\cdot b\cdot c\ge 1,$$

$$a+\frac{b^2}{2}+\frac{c^3}{3}=\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{b^2}{6}+\frac{b^2}{6}+\frac{b^2}{6}+\frac{c^3}{6}+\frac{c^3}{6}\ge\frac{11}{6}\sqrt[11]{(abc)^6}\ge\frac{11}{6},$$

причому рівність досягається за виконання умов $a=b=c=1$.

8. Розглянемо вектори $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$, які виходять з однієї вершини паралелепіпеда, а їх довжини дорівнюють його відповідним ребрам.

Тоді для суми S квадратів діагоналей отримаємо:

$$S=\left(\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\right)^2+\left(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z}\right)^2+\left(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)^2+$$
$$+\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)^2=4\left(\left(\vec{x}\right)^2+\left(\vec{y}\right)^2+\left(\vec{z}\right)^2\right).$$

Отже, сума квадратів діагоналей паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів всіх його ребер.

9. Нехай у вершинах піраміди записані числа a, b, c, d. Тоді з умови задачі $(a+b)+(c+d)+(a+c)+(b+d)+(a+d)+(b+c)=3$ отримуємо $a+b+c+d=1$. Оскільки також за умовою задачі маємо

$$3=(a+b)^2+(c+d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2+(a+d)^2+(b+c)^2=$$
$$2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+(a+b+c+d)^2=2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+1,$$

то й $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Звідси, скориставшись розкладом на множники суми кубів, знайдемо

$$\left[(a+b)^3+(c+d)^3\right]+\left[(a+c)^3+(b+d)^3\right]+\left[(a+d)^3+(b+c)^3\right]=$$
$$=(a+b+c+d)\left[4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-(a+b+c+d)^2\right]=1\cdot\left(4\cdot1-1^2\right)=3.$$

10. Розглянемо загальнішу задачу про рух велосипедистів, які знаходяться на відстані d і починають рухатися назустріч один одному зі швидкостями v_1 та v_2 відповідно. Між ними літає муха зі швидкостями $u_1>v_1$ та $u_2>v_2$ у залежності від напряму польоту, вилетівши зі швидкістю u_1 разом з велосипедистом, який рухається зі швидкістю v_1. Вона зустрінеться з іншим велосипедистом за час $t_1=\dfrac{d}{u_1+v_2}$, пролетівши відстань $l_1=u_1t_1=\dfrac{du_1}{u_1+v_2}$. У цей момент відстань між велосипедистами становитиме $d_1=l_1-v_1t_1=\dfrac{d\left(u_1-v_1\right)}{u_1+v_2}$.

Повернувши назад, муха за час $t_2=\dfrac{d_1}{u_2+v_1}=\dfrac{d\left(u_1-v_1\right)}{\left(u_2+v_1\right)\left(u_1+v_2\right)}$ зустрінеться з велосипедистом, разом з яким вона стартувала. При цьому вона подолає відстань $l_2 = u_2 t_2 = \dfrac{d u_2 (u_1 - v_1)}{(u_2 + v_1)(u_1 + v_2)}$. Разом отримаємо:

$$l_1 + l_2 = \frac{d u_1}{u_1 + v_2} + \frac{d u_2 (u_1 - v_1)}{(u_2 + v_1)(u_1 + v_2)} =$$

$$= \frac{d}{u_1 + v_2}\left(u_1 + \frac{u_2 (u_1 - v_1)}{u_2 + v_1} \right) = \frac{d\left(2u_1 u_2 + v_1 (u_1 - u_2)\right)}{(u_2 + v_1)(u_1 + v_2)}.$$

За цей час велосипедисти разом подолають відстань

$$s = (v_1 + v_2)(t_1 + t_2) = \frac{d (v_1 + v_2)(u_1 + u_2)}{(u_1 + v_2)(u_2 + v_1)}.$$

Нехай l – вся відстань, яку пролетить муха до зустрічі велосипедистів між собою. З пропорції $\dfrac{l_1 + l_2}{l} = \dfrac{s}{d}$ знаходимо

$$l = \frac{d (l_1 + l_2)}{s} = d \cdot \frac{d\left(2u_1 u_2 + v_1 (u_1 - u_2)\right)}{(u_2 + v_1)(u_1 + v_2)} :$$

$$: \frac{d (v_1 + v_2)(u_1 + u_2)}{(u_1 + v_2)(u_2 + v_1)} = \frac{d\left(2u_1 u_2 + v_1 (u_1 - u_2)\right)}{(v_1 + v_2)(u_1 + u_2)}.$$

З отриманого результату випливає висновок: відстань l буде найменшою за умови, що $v_1 \geq v_2$, $u_1 \leq u_2$.

Повертаючись до умови задачі, знайдемо мінімальну можливу відстань, яку пролетить муха: $l = \dfrac{40\left(2 \cdot 30 \cdot 40 + 23(30 - 40)\right)}{(23 + 17)(30 + 40)} = 31$ (км).

11. Така тотожність можлива. Наприклад,
$(x + x) \cdot (x + x) \equiv (x + x) \cdot x + x \cdot (x + x) \equiv (x + x) \cdot (x + x) \cdot (x + x) : (x + x) \equiv 4x^2,\ x \neq 0.$

Зауважимо, що фрагментів ***ікс плюс ікс*** у фразі Орисі зі збереженням тотожності можна використати й довільну кількість разів $n \geq 5$. Зокрема, якщо умовно позначити через $[...]$ взятий у дужки вираз із n таких фрагментів, то $[...] \cdot (x + x) : (x + x)$ збереже тотожність для $n + 2$ фрагментів.

12. Домовимось вважати, що $C_m^k = 0$ для $k > m$ і позначимо

$$A_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \ldots + (-1)^{n-1} C_1^{n-1} + (-1)^n C_0^n.$$

Маємо $A_1 = C_1^0 - C_0^1 = 1 - 0 = 1;$ $A_2 = C_2^0 - C_1^1 + C_0^2 = 1 - 1 + 0 = 0.$ Для $n \ge 3,$ скориставшись формулою $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k,$ з врахуванням рівностей $C_n^0 = C_{n-1}^0$ та $C_0^n = 0$ отримаємо

$$A_n = C_{n-1}^0 - \left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1\right) + \left(C_{n-3}^1 + C_{n-3}^2\right) - \left(C_{n-4}^2 + C_{n-4}^3\right) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\left(C_0^{n-2} + C_0^{n-1}\right) + (-1)^n C_0^n =$$

$$= \left(C_{n-1}^0 - C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 - C_{n-4}^3 + \ldots + (-1)^{n-1} C_0^{n-1}\right) -$$

$$- \left(C_{n-2}^0 - C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 - \ldots + (-1)^{n-2} C_0^{n-2}\right) = A_{n-1} - A_{n-2}.$$

Отже, послідовно знаходимо

$$A_3 = A_2 - A_1 = -1,\ A_4 = A_3 - A_2 = -1,\ A_5 = A_4 - A_3 = 0,$$

$$A_6 = A_5 - A_4 = 1,\ A_7 = A_6 - A_5 = 1 = A_1,\ A_8 = A_7 - A_6 = 0 = A_2.$$

Звідси впливає, що послідовність $A_n, n \in N,$ періодична з періодом 6. Тому

$$C_{2014}^0 - C_{2013}^1 + C_{2012}^2 - C_{2011}^3 + \ldots + C_{1008}^{1006} - C_{1007}^{1007} = A_{2014} = A_4 = -1;$$

13. Нехай $a_1 = m,\ a_2 = k.$ Розглянемо 5 можливих випадків:

1). $m < 0,\ k \ge 0.$

$$a_3 = \min(a_2, 0) - a_1 = \min(k, 0) - m = 0 - m = -m;$$

$$a_4 = \min(a_3, 0) - a_2 = \min(-m, 0) - k = 0 - k = -k;$$

$$a_5 = \min(a_4, 0) - a_3 = \min(-k, 0) - (-m) = -k + m;$$

$$a_6 = \min(a_5, 0) - a_4 = \min(-k + m, 0) - (-k) = (-k + m) + k = m;$$

$$a_7 = \min(a_6, 0) - a_5 = \min(m, 0) - (-k + m) = m - (-k + m) = k.$$

2). $m \ge 0,\ k \ge 0.$

$$a_3 = \min(a_2, 0) - a_1 = \min(k, 0) - m = 0 - m = -m;$$

$$a_4 = \min(a_3, 0) - a_2 = \min(-m, 0) - k = -m - k;$$

$$a_5 = \min(a_4, 0) - a_3 = \min(-m - k, 0) - (-m) = (-m - k) + m = -k;$$

$$a_6=\min(a_5,0)-a_4=\min(-k,0)-(-m-k)=(-k)+m+k=m;$$

$$a_7=\min(a_6,0)-a_5=\min(m,0)-(-k)=0+k=k.$$

3). $m\le k<0.$

$$a_3=\min(a_2,0)-a_1=\min(k,0)-m=k-m;$$

$$a_4=\min(a_3,0)-a_2=\min(k-m,0)-k=0-k=-k;$$

$$a_5=\min(a_4,0)-a_3=\min(-k,0)-(k-m)=0-(k-m)=m-k;$$

$$a_6=\min(a_5,0)-a_4=\min(m-k,0)-(-k)=(m-k)+k=m;$$

$$a_7=\min(a_6,0)-a_5=\min(m,0)-(m-k)=m-(m-k)=k.$$

4). $k<m<0.$

$$a_3=\min(a_2,0)-a_1=\min(k,0)-m=k-m;$$

$$a_4=\min(a_3,0)-a_2=\min(k-m,0)-k=(k-m)-k=-m;$$

$$a_5=\min(a_4,0)-a_3=\min(-m,0)-(k-m)=0-(k-m)=m-k;$$

$$a_6=\min(a_5,0)-a_4=\min(m-k,0)-(-m)=0+m=m;$$

$$a_7=\min(a_6,0)-a_5=\min(m,0)-(m-k)=m-(m-k)=k.$$

5). $m\ge 0,\ k<0.$

$$a_3=\min(a_2,0)-a_1=\min(k,0)-m=k-m;$$

$$a_4=\min(a_3,0)-a_2=\min(k-m,0)-k=(k-m)-k=-m;$$

$$a_5=\min(a_4,0)-a_3=\min(-m,0)-(k-m)=-m-(k-m)=-k;$$

$$a_6=\min(a_5,0)-a_4=\min(-k,0)-(-m)=0+m=m;$$

$$a_7=\min(a_6,0)-a_5=\min(m,0)-(-k)=0+k=k.$$

Оскільки у всіх випадках маємо $a_6=a_1,\ a_7=a_2,$ то, враховуючи, що така послідовність є рекурентною послідовністю другого порядку, робимо висновок, що вона періодична з періодом $T=5.$

14. Розглянемо загальнішу задачу для наборів $a_1,\ a_2,\dots,a_k$ та $b_1,\ b_2,\dots,b_m$ додатних дійсних чисел таких, що

$$\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\dots+\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+\dots+\sqrt[n]{b_m}$$

для всіх натуральних $n\ge 2.$

Зауважимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ для всіх $a>0.$ Тому, перейшовши у заданій рівності до границі при $n \to \infty$, отримаємо $k = m$.

Позначимо $u_i = \sqrt[m!]{a_i}$, $v_i = \sqrt[m!]{b_i}$, $i = \overline{1,m}$. Беручи $n_s = \frac{m!}{s}$, $s = \overline{1,m}$, з умов задачі отримуємо систему рівностей $\sigma_s(u) = \sigma_s(v)$, $s = \overline{1,m}$, де

$$\sigma_s(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i^s,\ \sigma_s(v) = \sum_{i=1}^{m} v_i^s,\ s = \overline{1,m}.$$

Нехай

$$p_s(u) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le m} u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_s},\quad p_s(v) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le m} v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_s},\ s = \overline{1,m}.$$

За властивостями симетричних многочленів σ_s та p_s для кожного $s \in N$ існує функція F_s така, що $p_s = F_s(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s)$. Наприклад, $p_1 = \sigma_1$, $p_2 = 0,5\left(\sigma_1^2 - \sigma_2\right), \ldots$. Тому з рівностей $\sigma_s(u) = \sigma_s(v)$, $s = \overline{1,m}$, отримуємо $p_s(u) = p_s(v)$, $s = \overline{1,m}$.

Розглянемо рівняння

$$t^m - p_1(u)t^{m-1} + p_2(u)t^{m-2} - \ldots + (-1)^{m-1} p_{m-1}(u)t + (-1)^m p_m(u) = 0.$$

Внаслідок теореми, оберненої до теореми Вієта, набір його коренів співпаде з набором чисел u_i, $i = \overline{1,m}$. Враховуючи, що $p_s(u) = p_s(v)$, $s = \overline{1,m}$, він співпаде також з набором чисел v_i, $i = \overline{1,m}$. Тому у випадку впорядкування таких двох наборів чисел за зростанням, у них відповідні елементи з однаковими номерами співпадатимуть. Отже, співпадатимуть й впорядковані за зростанням набори a_i, $i = \overline{1,m}$, та b_i, $i = \overline{1,m}$.

Повертаючись до умови задачі, отримаємо відповідь: $k = 2$ та $a_1 = 20$, $a_2 = 14$ або $a_1 = 14$, $a_2 = 20$.

15. Оскільки у трикутниках MTC та MCB кути при вершині M рівні, то достатньо довести подібність цих трикутників на підставі рівності $\frac{MT}{MC} = \frac{MC}{MB}$ або ж $MT \cdot MB = MC^2$.

Для доведення цієї рівності розглянемо систему координат з центром у точці $M(0,0)$, трикутник ABC з вершинами $A(-c,0)$,

$B(b,d)$, $C(c,0)$ та точку $D(b,-d)$, $c>0, d>0, b<0.$ (При $b\geq 0$ потрібної точки K на промені BA не існує.)

Оскільки $\angle BCA=\angle KCA,$ то точка K лежить на перетині променів BA: $\dfrac{x+c}{b+c}=\dfrac{y}{d}$ та CD: $\dfrac{x-c}{b-c}=\dfrac{y}{-d}$. Звідси $K\left(\dfrac{c^2}{b},\dfrac{cd}{b}\right).$

Нехай $T(x_0,y_0)$. Внаслідок перпендикулярності прямих KT та TC для добутку їх кутових коефіцієнтів виконується рівність

$$\frac{y_0-\dfrac{cd}{b}}{x_0-\dfrac{c^2}{b}}\cdot\frac{y_0}{x_0-c}=-1.$$

Оскільки $\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{d}{b}$, то з неї отримуємо $x_0=\dfrac{bc^2}{b^2+d^2}$, $y_0=\dfrac{dc^2}{b^2+d^2}$.

Тому $MT\cdot MB=\sqrt{b^2+d^2}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}=c^2=MC^2.$

16. Якщо в опуклому многограннику m вершин, n граней та k ребер, то за формулою Ейлера $m+n=k+2.$ Нехай з вершин A_i, $i=\overline{1,m},$ виходить α_i ребер, а грані G_j, $j=\overline{1,n},$ мають β_j сторін відповідно. Враховуючи, що кожне ребро з'єднує рівно дві вершини та є спільним рівно двох граней, отримуємо $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j=2k.$

Оскільки за умовою всі $\beta_j\geq 4,$ то $2k=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\geq 4n\Rightarrow n\leq\dfrac{k}{2}$. Тоді

$$k+2=m+n\leq m+\frac{k}{2}\Rightarrow 2k+8\leq 4m.$$

Тому, припустивши, що по 3 ребра виходять із s вершин, отримаємо

$$2k=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\geq 3s+4(m-s)\Rightarrow 2k+s\geq 4m.$$

Отже, $2k+8\leq 2k+s,$ тобто $s\geq 8,$ що й треба було довести.

17. На рис. 1 показано, як викласти квадрат із 49 клітинок, використовуючи 15 кутиків та 1 зигзаг.

Оскільки $67\cdot 15=1005<1007<68\cdot 15=1020,$ то цим способом можна викласти щонайбільше 67 таких квадратів.

Доведемо, що більшої кількості квадратів з непарною кількістю клітинок викласти не вдасться. Розглянемо квадрат розмірами $(2n-1)\times(2n-1),\ n\in N,$ і припустимо, що для його викладання використали x кутиків та y зигзагів. Тоді $3x+4y=(2n-1)^2$. Виділимо у ньому n^2 клітинок (див. рис. 2). Кожна фігурка набору покриває не більше однієї виділеної клітинки, тому $x+y\geq n^2$ чи $3x+3y\geq 3n^2$. З врахуванням попередньої рівності звідси отримуємо

$$y\leq(2n-1)^2-3n^2=n^2-4n+1,\ \ x\geq 4n-1.$$

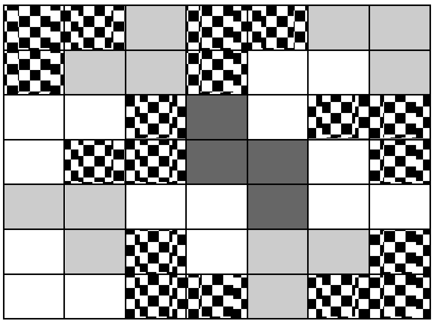


Рис. 1

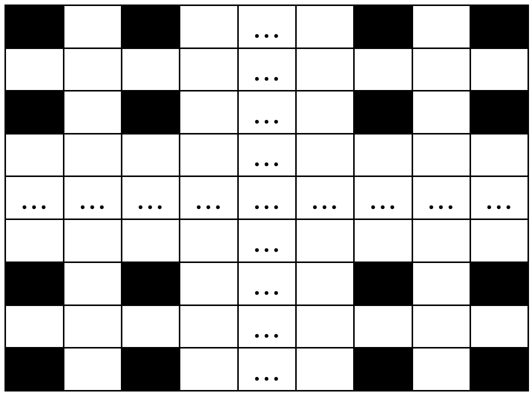


Рис. 2

Оскільки $y<0$ при $n<4$, то $n\geq 4$. Отже, менше 15 кутиків для викладання жодного квадрата з непарною кількістю клітинок використати не вдасться. Тому Миколка зможе викласти максимум 67 квадратів, використавши при цьому 1005 кутиків та 67 зигзагів.

Всі вони повинні складатися з 49 клітинок, бо за наявності серед них хоч одного квадрата з більшою кількістю клітинок, загальна кількість кутиків збільшиться принаймні на 4 і перевершить 1007.

18. Будемо розв’язувати задачу з кінця – від 2013 до нуля, замінивши додавання відніманням, а множення діленням. У результаті отримаємо 19 операцій для Катрусі:

$$2013\to 2012\to 1006\to 503\to 502\to 251\to 250\to 125\to$$
$$\to 124\to 62\to 31\to 30\to 15\to 14\to 7\to 6\to 3\to 2\to 1\to 0;$$

15 операцій для Михайлика:

$$2013\to 671\to 670\to 669\to 223\to 222\to 74\to 73\to$$
$$\to 72\to 24\to 8\to 7\to 6\to 2\to 1\to 0.$$

Повертаючись до умови задачі, залишається виписати такі ланцюжки чисел у зворотному порядку.

Аналогічно розв'язується задача і з отриманням числа 2014.

У результаті також отримаємо 19 операцій для Катрусі:

$$2014 \to 1007 \to 1006 \to 503 \to 502 \to 251 \to 250 \to 125 \to$$
$$\to 124 \to 62 \to 31 \to 30 \to 15 \to 14 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0;$$

але вже 16 операцій для Михайлика:

$$2014 \to 2013 \to 671 \to 670 \to 669 \to 223 \to 222 \to 74 \to 73 \to$$
$$\to 72 \to 24 \to 8 \to 7 \to 6 \to 2 \to 1 \to 0.$$

Зауважимо, що не для кожного натурального числа Катрусі для його отримання знадобиться більше операцій, ніж Михайлику. Наприклад, для числа 26 аналогічні ланцюжки чисел, записаних у зворотному порядку, мають вигляд:

$26 \to 13 \to 12 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$ – для Катрусі;

$26 \to 25 \to 24 \to 8 \to 7 \to 6 \to 2 \to 1 \to 0$ – для Михайлика.

19. Для зручності вважатимемо місткість каструлі за 1, а місткість черпака – за a. Якщо $a = \frac{1}{77}$, то вдасться точно поділити напій на 7 або 11 гостей, а для трьох гостей – налити двом по $\frac{26}{77}$, а третьому $\frac{25}{77}$ напою. При цьому маємо: $\frac{26}{77} - \frac{1}{3} = \frac{1}{231} < \frac{1}{60}$ та $\frac{1}{3} - \frac{26}{77} = \frac{2}{231} < \frac{1}{60}$. Але таке значення a не є найбільшим. Як доведено в [6], ст. 79 – 80, умову вказаного приблизного поділу задовольняють всі $a \in \left[\frac{1}{77}; \frac{1}{77} + \frac{1}{7 \cdot 2200}\right]$.

20. Див. [6], ст. 76 – 77.

2015 рік

1. $n = 341 = 11 \cdot 31$. Справді, за малою теоремою Ферма

$$2^{340} - 1 = \left(2^{34}\right)^{10} - 1 \vdots 11 \text{ та } 2^{340} - 1 = \left(2^5\right)^{68} - 1 = \left(32^{68} - 1^{68}\right) \vdots (32 - 1) = 31.$$

Менші складені числа умову не задовольняють.

Зауважимо, що множина складених чисел з описаною в умові властивістю є нескінченною.

Нехай $n_1 = 341 = 11 \cdot 31.$ Тоді $2^{n_1 - 1} - 1 = n_1 s_1,\ s_1 \in N,\ s_1 > 1.$ Визначимо послідовність складених чисел за формулою $n_{k+1} = 2^{n_k} - 1,\ k \in N.$ Припускаючи, що $2^{n_k - 1} - 1 = n_k s_k,\ s_k \in N,\ s_k > 1,$ отримаємо

$$2^{n_{k+1}-1} - 1 = 2^{2^{n_k} - 2} - 1 = 2^{2\left(2^{n_k-1}-1\right)} - 1 = \left(2^{2^{n_k-1}-1} - 1\right)\left(2^{2^{n_k-1}-1} + 1\right) =$$

$$= \left(\left(2^{n_k}\right)^{s_k} - 1\right)\left(2^{n_k s_k} + 1\right) \vdots\, 2^{n_k} - 1 = n_{k+1}.$$

Отже, всі її елементи є шуканими складеними числами.

2. Для $n = 1$ отримуємо нескінченну кількість пар розв'язків вигляду $x = y + 2015,$ де $y -$ довільне натуральне число. Для $n \geq 2$ запишемо рівняння у вигляді

$$\left(x - y\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) = 2015.$$

Оскільки $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31,$ то $x - y$ може набувати лише значень 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015. Крім того, якщо $x - y = k,$ то

$$x^n - y^n \geq k\left[\left(k+1\right)^{n-1} + \left(k+1\right)^{n-2} + \ldots + 1\right] = \left(k+1\right)^n - 1.$$

Тому $\left(k+1\right)^n \leq 2016 \Rightarrow n \leq 10.$ Звідси для $n = 2$ отримуємо $k \leq 31,$ для $n = 3$ та $n = 4$ знаходимо $k \leq 5$, а для $5 \leq n \leq 10$ матимемо $k = 1.$ Розглядаючи відповідні чотири випадки можливих значень k для $n = 2$, знайдемо пари $\left(x, y\right)$ розв'язків: $\left(1008{,}1007\right)$, $\left(204{,}199\right)$, $\left(84, 71\right)$, $\left(48{,}17\right)$. Оскільки серед них немає пар, складених з точних квадратів, то для парних $n > 2$ задане рівняння не має розв'язків у натуральних числах. Для $n = 3$, підставивши $k = 1$ та $k = 5$, знайдемо ще один розв'язок $\left(14{,}9\right)$. Оскільки числа цієї пари не є точними кубами, то для $n = 9$ розв'язків у натуральних числах не існує. І, нарешті, для $n = 5$ та $n = 7$, підставивши $k = 1$, з врахуванням монотонності виразу $x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$ а, з ним і різниці $x^n - y^n$, перебором переконуємося, що інших розв'язків у натуральних числах задане рівняння не має.

3. Випишемо у таблиці слова, з яких можна утворити назви всіх натуральних чисел, менших за 1000.

Число – слово	Σ	Число – слово	Σ	Число – слово	Σ	Число – слово	Σ
1 – один	2	11 – одинадцять	4	10 – десять	2	100 – сто	1
2 – два	1	12 – дванадцять	3	20 – двадцять	2	200 – двісті	2
3 – три	1	13 – тринадцять	3	30 – тридцять	2	300 – триста	2
4 – чотири	3	14 - чотирнадцять	4	40 – сорок	2	400 – чотириста	3
5 – п’ять	1	15 - п’ятнадцять	3	50 – п’ятдесят	3	500 – п’ятсот	2
6 – шість	1	16 – шістнадцять	3	60 – шістдесят	3	600 – шістсот	2
7 – сім	1	17 – сімнадцять	3	70 – сімдесят	3	700 – сімсот	2
8 – вісім	2	18 – вісімнадцять	4	80 – вісімдесят	4	800 – вісімсот	3
9 – дев’ять	2	19 – дев’ятнадцять	4	90 – дев’яносто	4	900 – дев’ятсот	3

Перебором переконуємося, що умову задачі задовольняють такі 17 чисел, менших за 1000: 12, 20, 31, 100, 112, 120, 131, 200, 212, 220, 231, 301, 310, 321, 412, 420, 431.

4. Не може. Кожне переселення з острова A чи B змінює різницю між числом жителів на цих островах на 4, а кожне переселення з островів C та D не змінює такої різниці. Оскільки спочатку ця різниця дорівнювала нулю, то після кожного переселення вона ділитиметься на 4, тому не може стати рівною $2015-2000=15$.

5. Оскільки число 999 ділиться на 37, то для подільності на 37 дев’ятицифрового числа $A=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ необхідно і достатньо, щоб на 37 ділилася сума

$$S=\overline{a_1a_2a_3}+\overline{a_4a_5a_6}+\overline{a_7a_8a_9}=100\left(a_1+a_4+a_7\right)+10\left(a_2+a_5+a_8\right)+$$
$$+\left(a_3+a_6+a_9\right)=100S_1+10S_2+S_3.$$

Для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 для цього буде достатньо, щоб $S_1=S_2=S_3=15.$ При цьому на практиці для утворення таких сум можна скористатися рядками та стовпчиками магічного квадрата

2	9	4
7	5	3
6	1	8

З нього отримаємо два набори потрібних трійок чисел із сумами 15 у кожній з них: (2,9,4), (7,5,3), (6,1,8) та (2,7,6), (9,5,1), (4,3,8).

Перейдемо до відповідей на питання задачі:

а). Наприклад, число $276951438=37\cdot 7485174$, яке відповідає першому записаному набору.

б). У межах кожної з сум S_1, S_2, S_3 записані доданки можна довільним чином переставляти. Тому кожен із записаних вище наборів із трьох трійок породжує $6^3=216$ різних наборів з потрібними сумами. Отже, уже з першого такого набору можна отримати понад 215 дев'ятицифрових чисел, які діляться на 37.

в). Довільним чином можна переставляти місцями ще й самі трійки чисел кожного з наборів. Тому навіть тих дев'ятицифрових чисел, кратних 37, які відповідають наведеним двом наборам, є $2\cdot 6^4=2592>2015.$ Зауважимо, що ними не вичерпуються всі такі дев'ятицифрові числа, яких в сукупності є 9072.

6. а). Наприклад, $n=41725638,\ 2n=83451276.$

б). У наведеному прикладі цифри 1, 2, 3 можна довільним чином переставляти місцями (6 способів). Те ж саме можна робити з цифрами 6, 7, 8 (також 6 способів). Крім того, цифру 4 можна записати також на третьому, шостому або восьмому місцях. Таким чином, бузкових чисел не менше $6\cdot 6\cdot 4=144$. Відзначимо, що такими перестановками всі бузкові числа не вичерпуються. Наприклад, бузкове число $n=15623784$, для якого $2n=31247568$, при цьому отримати не вдасться.

в). Для отримання у числі $2n$ цифри 1 після цифри 5 може стояти лише одна з цифр: 6, 7 або 8. Для кожного з цих випадків існує однакова кількість бузкових чисел. Тому їх загальна кількість ділиться на 3.

7. Покладемо $11=a$, $20=b$, $15=c$ і запишемо задану систему у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}-by+cz=a, \\ \dfrac{1}{y}-cz+ax=b, \\ \dfrac{1}{z}-ax+by=c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+yb-zc=\dfrac{1}{x}, \\ -xa+b+zc=\dfrac{1}{y}, \\ xa-yb+c=\dfrac{1}{z}. \end{cases}$$

Визначник отриманої системи трьох лінійних рівнянь відносно невідомих a, b, c дорівнює

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & y & -z \\ -x & 1 & z \\ x & -y & 1 \end{vmatrix}=1+xy+yz+zx\neq 0$$

для довільних додатних чисел x, y, z, тому за таких x, y, z вона має єдиний розв'язок. Легко переконатися, що $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{1}{z}$. Звідси $x=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{11}$, $y=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{20}$, $z=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{15}$.

8. Для додатних чисел a_1, a_2, …, a_n доведемо загальнішу нерівність:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\ldots+\dfrac{1}{1+a_n}}-\frac{1}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}\geq\frac{1}{n}.$$

Позначивши $\dfrac{1}{a_k}=x_k$, $x_k>0$, $\dfrac{1}{1+a_k}=\dfrac{x_k}{x_k+1}$, $k=1,2,\ldots,n$, запишемо цю нерівність у вигляді

$$\frac{n}{\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_n+1}} \geq \frac{n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}+1. \qquad (*)$$

Розглянемо функцію $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Вона опукла вгору на проміжку $(-1;+\infty)$. Тому, скориставшись нерівністю Єнсена

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right),$$

отримаємо нерівність

$$\frac{\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_n+1}}{n} \leq \frac{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\dfrac{x_1}{x_1+1}+\dfrac{x_2}{x_2+1}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_n+1}} \geq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+n}{x_1+x_2+\ldots+x_n} \Leftrightarrow (*).$$

9. Розв'яжемо загальнішу задачу. А саме, для довільної перестановки b_1, b_2, …, b_n невід'ємних чисел a_1, a_2, …, a_n, $n \geq 2$, доведемо нерівність

$$\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)\ldots\left(1+a_n+a_n^2\right) \geq \left(1+a_1+a_1b_1\right)\left(1+a_2+a_2b_2\right)\ldots\left(1+a_n+a_nb_n\right).$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Якщо при цьому послідовність b_1, b_2, …, b_n не впорядкована за зростанням, то знайдуться такі номери k та p, що $k<p$, $b_k \geq b_p$. Тоді помінявши b_k та b_p місцями, отримаємо, що

$$\left(1+a_k+a_kb_p\right)\left(1+a_p+a_pb_k\right)-\left(1+a_k+a_kb_k\right)\left(1+a_p+a_pb_p\right)=\left(a_p-a_k\right)\left(b_k-b_p\right) \geq 0,$$

тобто від такої перестановки добуток не зменшується. Тому він буде найбільшим за умови, що $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, тобто за умови $b_k=a_k$, $k=\overline{1,n}$, звідки й випливає вказана нерівність.

10. Для $x=y$ маємо рівність $x^y+y^x=x^x+y^y$.

Нехай тепер для конкретності $x>y$. Якщо при цьому $x \geq 1$, то задана нерівність випливає з нерівності $x^y\left(x^{x-y}-1\right)>y^y\left(y^{x-y}-1\right)$, оскільки при цьому $x^y>y^y>0,\ x^{x-y}-1\geq 0,\ x^{x-y}-1>y^{x-y}-1.$

Залишиться нерівність справедливою і у випадку $0<y<x<1.$

11. Спочатку доведемо існування такого $n\in N$ і таких функцій $g_1\in M,\ g_2\in M,\ \ldots,\ g_n\in M,$ що $g_1\left(\ g_2\ldots\left(g_n(1)\ldots\right)\right)=2015.$

Для $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ маємо

$$\varphi\left(x\right)=\cos\left(\operatorname{arcctg}x\right)=+\sqrt{\frac{\cos^2\left(\operatorname{arcctg}x\right)}{\sin^2\left(\operatorname{arcctg}x\right)+\cos^2\left(\operatorname{arcctg}x\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}x\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\operatorname{arcctg}x\right)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Тоді

$$\varphi\left(\varphi\left(x\right)\right)=\frac{\varphi\left(x\right)}{\sqrt{1+\varphi^2\left(x\right)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

і методом математичної індукції встановимо, що

$$\underbrace{\varphi\left(\varphi\left(\ldots\varphi\left(x\right)\ldots\right)\right)}_{n}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

Покладаючи тут $x=1,\ n=2015^2-1=4060224,$ отримаємо

$$\underbrace{\varphi\left(\varphi\left(\ldots\varphi\left(1\right)\ldots\right)\right)}_{4060224}=\frac{1}{2015}.$$

Оскільки $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}x\right)=\dfrac{1}{x},$ то

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\underbrace{\varphi\left(\varphi\left(\ldots\varphi\left(1\right)\ldots\right)\right)}_{4060224}\right)=2015.$$

Повертаючись тепер до основної задачі, знаходимо

$$\underbrace{\varphi\left(\varphi\left(\ldots\varphi\left(1\right)\ldots\right)\right)}_{4060224}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}2015\right).$$

Позначивши $\psi\left(x\right)=\operatorname{ctg}\left(\arccos x\right),$ отримаємо

$$\underbrace{\psi\left(\psi\left(...\psi\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}2015\right)\right)...\right)\right)}_{4060224}=1.$$

12. 10 потрійних точок отримаємо, якщо вибрати 6 точок у вершинах та центрі правильного п’ятикутника. Доведемо, що на кожній з 15 проведених прямих може бути не більше, ніж 2 потрійні точки, відмінні від заданих, тобто всіх потрійних точок не більше, ніж $(15\cdot 2):3=10$. При цьому ми врахували, що кожна потрійна точка належить трьом прямим. Для доведення зауважимо, що 6 прямих, які попарно проходять через довільні 4 точки можуть перетинатися по дві щонайбільше у трьох різних точках, які не лежать на одній прямій. Тому на прямій, яка проходить через решту дві точки може лежати щонайбільше дві потрійні точки, що й слід було довести.

13. Насамперед зауважимо, що такий граф, який не має циклів довжини 4, внаслідок критерію Понтрягіна-Куратовського є планарним. Нескладно отримати граф з 11 вершинами. Наприклад, граф, який складається з 8 сторін восьмикутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ та трьох його діагоналей A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7. У нього 8 вершин, 11 ребер та 5 граней: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, $A_1A_3A_5A_6A_7A_8$, $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, $A_5A_6A_7$. Доведемо, що більше 11 ребер отримати не вдасться. Справді, за формулою Ейлера: $V+G=R+2$ для 12 ребер отримаємо, що граней повинно бути 6. Враховуючи, що кожне ребро є спільним для двох граней, сума кількостей ребер цих 6 граней дорівнює 24. Припускаючи відсутність циклів довжини 4, отримаємо, що для цього повинен реалізовуватися один з таких трьох варіантів: 1) 4 грані по 3 ребра, одна – із 5 ребер та одна – із 7 ребер, 2) 4 грані по 3 ребра, дві – по 6 ребер, 3) 3 грані по 3 ребра, 3 – по 5 ребер. Оскільки для відсутності циклів довжини 4 грані з трьома ребрами не можуть мати спільного ребра, то для реалізації перших двох варіантів різних вершин всіх чотирьох граней з трьома ребрами має бути не менша за 9. Що ж стосується третього варіанту, то для трьох таких граней можна отримати 7 чи 8 різних вершин, у залежності від того скільки вершин різних трикутників сходяться в одній точці. Але, крім них, ще будуть потрібними як мінімум 3 чи 2 додаткові вершини, щоб

отримати 3 грані з 5 ребер. Таким чином, за відсутності циклів довжини 4 для 8 вершин 12 ребер отримати не вдасться. Зрозуміло, що їх не може бути і більше, бо, вилучаючи зайві ребра, ми звели би цей граф до графа з 12 ребрами.

14. Зрозуміло, що 8 таких точок вказаному кільцю може належати. Для достатньо розмістити їх у вершинах квадрата зі стороною 2, розміщених на колі $x^2+y^2=2$, та у точках дотику цього квадрата до кола $x^2+y^2=1$. При цьому найменші з відстаней між точками дорівнюють 1. Також можна, наприклад, вибрати їх у вершинах правильного восьмикутника, вписаного у коло $x^2+y^2=2$, зі стороною a такою,що $a^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=4-2\sqrt{2}>1.$

Доведемо, що 9 точок таким чином розмістити не вдасться. Справді, для 9 точок найменший кут, під яким з центра O кільця видно відрізок, який з'єднує деякі дві з цих точок A та B, не перевищує 40°. Враховуючи, що у трикутнику AOB принаймні один з кутів A та B гострий, отримуємо, що найбільшою відстань між цими точками буде, якщо принаймні одна з цих точок лежатиме на колі $x^2+y^2=2$, а друга – або на цьому ж колі, або на колі $x^2+y^2=1$. Для цих випадків відповідно отримуємо:

$$AB^2\le\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{9}\approx 0,936<1,$$

$$AB^2\le\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2-2\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{9}\approx 0,834<1.$$

15. Зрозуміло, що вершина A знаходиться на колі радіуса KB з центром у точці K, а вершина C – на колі радіуса MB з центром у точці M. Вибравши довільно на цих колах точки A та C так, щоб прямі AC та KB були перпендикулярними, отримаємо шуканий трикутник. Очевидно, що такий вибір можна здійснити безліччю способами. Тому додатково, як потім вимагалося у відповідному завданні Всеукраїнського турніру, проаналізуємо, за яких умов цей трикутник виявиться прямокутним з прямим кутом ABC:

а) якщо точки K та M збігаються, то пряму AC достатньо провести саме через них як через центр кола описаного навколо ABC;

б) якщо для конкретності $KB < MB$, то на відрізку KM відкладемо точку H таку, що $KH : MH = KB : MB$ і проведемо пряму AC через точку H, вибравши вершини A та C по різні сторони від прямої KB. З подібності прямокутних трикутників AKH та CMH, отримаємо, що $\angle AKH = \angle CMH$. Оскільки при цьому $\angle ABH = \frac{1}{2}\angle AKH$, $\angle CBH = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle CMH$, то кут ABC – прямий. Зрозуміло, що при цьому точка M буде знаходитися на продовженні висоти, а шуканих трикутників отримаємо два, які симетричні один до одного відносно прямої KB.

16. Спочатку доведемо справедливість оберненого твердження. Позначимо $\varphi_i = \cup A_i A_{i+1}, 1 \le i \le 5.$ Маємо

$$a_1 = \frac{A_1A_2}{\sin\left(\angle A_3 + \angle A_5\right)} = \frac{A_1A_2}{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_1\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3\right)\right)} =$$

$$= \frac{A_1A_2}{\sin\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}\left(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5\right)\right)} = \frac{A_1A_2}{\sin\left(\pi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)} = -\frac{A_1A_2}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_1\right)} = -2R.$$

Аналогічно доводимо, що й інші $a_i = -2R,$ де $R-$ радіус описаного кола.

Навпаки, якщо всі a_i рівні між собою, то на сторонах п’ятикутника всередину нього побудуємо рівнобедрені трикутники з основами $A_iA_{i+1},\ 1 \le i \le 5,$ та кутами при протилежних до цих основ вершинах $\varphi_i = 2\left(\angle A_{i+2} + \angle A_{i+4} - \pi\right).$ З рівностей всіх a_i отримаємо рівність всіх відношень $\dfrac{A_1A_2}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_1\right)}$, тобто рівність бічних сторін всіх таких побудованих трикутників. Крім того, сума всіх кутів φ_i дорівнює $2\pi.$ Тому їх спільна вершина і буде центром кола, описаного навколо цього п’ятикутника.

Зауважимо, що наведеним тут методом аналогічні твердження можна довести для довільних многокутників з непарною кількістю сторін. Наприклад, для семикутників потрібно розглядати рівність таких відношень $a_i = \dfrac{A_i A_{i+1}}{\sin\left(\angle A_{i+2} + \angle A_{i+4} + \angle A_{i+6}\right)}$, $1 \le i \le 7$. При цьому отримаємо, що $a_i = 2R$, де $R-$ радіус описаного кола.

А для трикутників маємо як окремий випадок відому теорему синусів.

17. Нехай у трикутнику $\angle ABC = \angle ACB = \beta$, $AB = AC = b$, $BC = a$. Тоді

$$\frac{a}{2} = b\cos\beta,\ r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ r = b\cos\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow \left(\frac{r}{b}\right)^2 = \cos^2\beta \cdot \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}.$$

Позначивши $\cos\beta = x$, розглянемо функцію $f(x) = x^2 \cdot \dfrac{1-x}{1+x}$. Оскільки $f'(x) = -2x \cdot \dfrac{x^2+x-1}{(1+x)^2}$, то з умови $f'(x) = 0$ маємо точку максимуму $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тоді

$$\min\left(\frac{b}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

Цікавою є також задача відповідного завдання Всеукраїнського турніру про мінімум відношення найбільшої сторони трикутника до радіуса вписаного кола. Повертаючи пряму, яка для конкретності містить найменшу сторону BC цього трикутника, так, щоб вона весь час дотикалася до вписаного кола, а в отриманих при цьому трикутниках ABC більша сторона зменшувалася, а середня – збільшувалася, отримаємо, що найменшим таке відношення буде для рівнобедреного трикутника з бічними сторонами $AB = AC = b$ та основою $BC = a \le b$. При цьому $\cos\beta \le \dfrac{1}{2}$. Враховуючи, що знайдена вище точка максимуму $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}>\frac{1}{2}$, отримаємо, що $\min\left(\frac{b}{r}\right)$ досягається для $\cos\beta=x=\frac{1}{2}$, тобто для рівностороннього трикутника, і дорівнює $2\sqrt{3}$.

18. Можливо. Проведемо хорду AB так, щоб вона відтинала від круга його п'яту частину. Відкладемо від її кінців хорди AC та BD, кожна з яких відтинає від круга площу у його дві п'ятих частини, і які перетинаються у деякій точці M. Тоді площі частинок AMD та BMC круга рівні і площі частинок AMB та CMD круга також рівні, причому площа трикутника AMB менша площі фігури AMD. Справді, вважаючи радіус круга рівним 1, з точністю до трьох знаків після коми з рівняння $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{\pi}{5}\approx 0,628$ отримаємо у радіанах $\angle AOB=\alpha\approx 2,113$, а з рівняння $\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\sin\beta=\frac{2\pi}{5}\approx 1,257$ будемо мати $\angle DOB=\beta\approx 2,825$. Тоді

$$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}AB\cdot tg\left(\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=-\sin^2\frac{\alpha}{2}tg\frac{\alpha+\beta}{2}\approx 0,604<\frac{\pi}{5},$$

$$S_{AMD}\approx 1,257-0,604=0,653>\frac{\pi}{5}.$$

Будемо тепер рухати хорди BD та AC вздовж кола так, щоб точка D рухалася у напрямі точки A, а точка C - у напрямі точки B. При цьому для деякого положення цих хорд площі CMD та AMD стануть рівними. Таким чином, отримаємо три хорди, які ділять круг на 5 рівновеликих частин.

19. Буратіно помиляється. Якщо кожен з n отриманих ним тетраедрів має рівно одну синю грань, то всередині многогранника знаходиться $3n$ їх граней. Кожна така грань є спільною для двох тетраедрів, тому цих тетраедрів мало би бути $\frac{3n}{2}$, що є більше, ніж n.

20. Скористаємося методом комплексних координат. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що радіус кола ω дорівнює

1, а його центр має комплексну координату 0. Нехай $D(d)$, $E(e)$, $F(f)$. Тоді $X(-d)$. Враховуючи Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990. – 224с., отримаємо

$$A\left(\frac{2ef}{e+f}\right); \quad BC: \quad \bar{d}z + d\bar{z} = 2;$$

$$AX: \quad \left(\bar{a}-\bar{x}\right)z + (x-a)\bar{z} + a\bar{x} - x\bar{a} = 0.$$

Звідси для точки $D'(d')$ перетину прямих BC та AX знайдемо

$$d' = \frac{2(a-x) + d\left(a\bar{x} - x\bar{a}\right)}{d\left(\bar{a}-\bar{x}\right) + \bar{d}(a-x)}.$$

А з умови $D'X' = AX$ для точки $X'(x')$ отримаємо $x' = a - x + d'$.

Враховуючи тут, що

$$a = \frac{2ef}{e+f},\ \bar{a} = \frac{2\bar{e}\bar{f}}{\bar{e}+\bar{f}} = \frac{2}{e+f},\ x = -d,\ \bar{x} = -\frac{1}{d},\ \bar{d} = \frac{1}{d},$$

послідовно знайдемо

$$a - x = \frac{2ef}{e+f} + d = \frac{2ef + de + ef}{e+f},$$

$$d\left(a\bar{x} - x\bar{a}\right) = d\left(-d\cdot\frac{2}{e+f} + \frac{2ef}{e+f}\cdot\frac{1}{d}\right) = \frac{2\left(ef - d^2\right)}{e+f},$$

$$d\left(\bar{a}-\bar{x}\right) + \bar{d}(a-x) = d\left(\frac{2}{e+f} + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(\frac{2ef}{e+f} + d\right) = \frac{2\left(de + ef + fd + d^2\right)}{d(e+f)},$$

$$x' = \frac{2\left(3def(d+e+f) + d^2e^2 + e^2f^2 + f^2d^2\right)}{(d+e)(e+f)(f+e)}.$$

Оскільки координата x' точки X' симетрично виражається через координати точок $D, E, F,$ то аналогічно отримаємо $y' = x'$ та $z' = x'$ для координат точок $Y'(y')$ та $Z'(z')$ відповідно. Тому точки X', Y', Z' збігаються.

2016 рік

1. Всього на такому турнірі буде зіграно $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ ігор, в яких команди разом наберуть $66\cdot 3=198$ очок. Оскільки $\frac{198}{12}=16,5$, то у переможця не може бути менше 17 очок, а у команди, яка зайняла останнє місце, – більше 16 очок. За умови, що за рівної кількості очок місця розподіляються за додатковими критеріями, можливість отримання цих показників реалізована у такій турнірній таблиці:

Команда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Очки
1		2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1(2)	17(18)
2	1		2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	17
3	1	1		2	2	2	2	2	2	1	1	1	17
4	1	1	1		2	2	2	2	2	2	1	1	17
5	1	1	1	1		2	2	2	2	2	2	1	17
6	1	1	1	1	1		2	2	2	2	2	2	17
7	1	1	1	1	1	1		2	2	2	2	2	16
8	2	1	1	1	1	1	1		2	2	2	2	16
9	2	2	1	1	1	1	1	1		2	2	2	16
10	2	2	2	1	1	1	1	1	1		2	2	16
11	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1		2	16
12	2(1)	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1		16(15)

У дужках наводяться зміни, які необхідно внести у турнірну таблицю, якщо вимагати, щоб команда-переможець набрала принаймні на одне очко більше за інших учасників турніру, а команда, яка виявилася останньою, – принаймні на одне очко менше.

2. Припустимо, що Буратіно поставив на кін $x<2016$ золотих і назвав виконавцем Дуремара. Якщо заспівав Карабас Барабас, то Буратіно два наступні рази знову назве виконавцем Дуремара, ставлячи при цьому на кін всі свої гроші. У результаті цього в нього вкінці стане $4\cdot(2016-x)$ золотих. Якщо ж заспівав Дуремар, то після першої пісні в Буратіно стане $2016+x$ золотих, а з двох наступних пісень Дуремар виконає не менше, ніж Карабас Барабас.

Якщо би Буратіно перший раз запропонував співати Карабасу Барабасу, то у випадку згоди він, називаючи два наступні рази виконавцем Дуремара, отримав би вкінці $4\cdot(2016+x)$ золотих, що є більше, ніж у першому випадку. Але, якщо б при цьому заспівав Дуремар, то ситуація звелась би до другого з розглянутих вище варіантів тільки з $2016-x$ золотих у Буратіно. Отже, Буратіно для отримання найбільшого гарантованого прибутку перший раз необхідно пропонувати співати Дуремарові.

З аналогічних міркувань приходимо до висновку, що у випадку першої пісні, виконаної Дуремаром, друга пропозиція має бути зроблена йому ж з постановкою на кін $y<2016+x$ золотих. У випадку відмови, Буратіно третю пісню також пропонує співати Дуремарові, на що той змушений буде погодитися, і завершує гру, маючи $2\cdot(2016+x-y)$ золотих. А якщо Дуремар заспівав і другу пісню, то після неї в Буратіно виявиться $2016+x+y$ золотих. Але тепер, кому б Буратіно не запропонував співати третю пісню, він в обох випадках може втратити поставлені на кін золоті. Щоб така втрата була мінімальною, у такому разі остання ставка має скласти 1 золотий, після чого у Буратіно залишиться $2016+x+y-1$ золотих.

Визначивши x та y з системи рівнянь

$$4\cdot(2016-x)=2\cdot(2016+x-y)=2016+x+y-1,$$

отримаємо $x=1008\frac{1}{8}$, $y=1008\frac{3}{8}$, що відповідає максимальному гарантованому виграшу Буратіно в $4\cdot\left(2016-1008\frac{1}{8}\right)-2016=2015\frac{1}{2}$ золотих. А оскільки такий виграш має бути цілим числом, то він не перевищить 2015. Саме таку суму отримаємо для $x=y=1008$, якщо гра піде за останнім з описаних сценаріїв.

3. Маємо $2x_n^2-y_n^2=2\left(x_{n-1}+y_{n-1}\right)^2-\left(2x_{n-1}+y_{n-1}\right)^2=-\left(2x_{n-1}^2-y_{n-1}^2\right)$ та $2x_1^2-y_1^2=1$. Тому $2x_n^2-y_n^2=(-1)^{n-1}$, $n\in N$. Оскільки, крім того, $x_n\to\infty$ та $y_n\to\infty$ при $n\to\infty$, то запишемо останню рівність у вигляді $\frac{y_n^2}{x_n^2}-\frac{(-1)^n}{x_n^2}=2$, $n\in N$.

Перейшовши до границі при $n\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n^2}{x_n^2}=2\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\sqrt{2}.$$

4. Помножимо обидві частини заданої нерівності на $\sqrt{n}$ і запишемо її у такому рівносильному вигляді

$$a_n=\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}+...-\sqrt{2}+1>\sqrt{n}=b_n.$$

Тоді

$$2b_n-a_n=\left(\sqrt{4n}-\sqrt{4n-1}\right)+\left(\sqrt{4n-2}-\sqrt{4n-3}\right)+...+\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4n}+\sqrt{4n-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n-3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2}+1}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n-2}}+\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n-4}}+...+\frac{1}{1+0}=$$

$$=\left(\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n-2}\right)+\left(\sqrt{4n-3}-\sqrt{4n-4}\right)+...+(1-0)=a_n.$$

Звідси випливає, що $a_n>b_n$ для всіх $n\in N$.

5. Легко переконатися, що коренями цього рівняння є числа: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. Доведемо, що інших коренів немає.

Нехай $f\left(x\right)=2^x-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1$. Тоді

$$f'\left(x\right)=2^x\ln2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3},\quad f''\left(x\right)=2^x\ln^2 2-\frac{4}{3},\quad f'''\left(x\right)=2^x\ln^3 2>0.$$

Отже, рівняння $f''\left(x\right)=0$ має не більше одного, рівняння $f'\left(x\right)=0$ – не більше двох, а рівняння $f\left(x\right)=0$ – не більше трьох коренів.

6. а). Оскільки при діленні квадратів натуральних чисел на 4 можливі лише остачі 0 або 1, то числа x,y,z – парні. Нехай $x=2m$, $y=2n$, $z=2k$. Тоді $m^2+n^2+k^2=504$. При цьому числа m,n,k – також парні. Якщо $m=2a$, $n=2b$, $k=2c$, то $a^2+b^2+c^2=126$. Звідси простим перебором отримуємо 3 розв'язки $\left(a,b,c\right)$: $\left(11,2,1\right)$, $\left(10,5,1\right)$, $\left(9,6,3\right)$. Відповідно для $\left(x,y,z\right)$ отримаємо розв'язки: $\left(44,8,4\right)$, $\left(40,20,4\right)$, $\left(36,24,12\right)$.

б). Таких натуральних чисел x, y, z не існує. При діленні кубів натуральних чисел на 7 можливі лише остачі 0, 1 або 6, тому одне з чисел x, y, z ділиться на 7, отже, дорівнює 7, бо $14^3 = 2744 > 2016$. При діленні кубів натуральних чисел на 9 можливі лише остачі 0, 1 або 8, тому одне з чисел x, y, z ділиться на 3. Воно менше за 12, бо $7^3 + 12^3 = 2071 > 2016$. Але жодне з рівнянь: $7^3 + 3^3 + z^3 = 2016$, $7^3 + 6^3 + z^3 = 2016$, $7^3 + 9^3 + z^3 = 2016$ не має розв'язків $z \in N$.

7. $x^2 + (x+1)^2 = z^2 \Leftrightarrow 2z^2 - (2x+1)^2 = 1$. Позначивши $2x+1 = t$, отримаємо рівняння $2z^2 - t^2 = 1$, яке, наприклад, задовольняють числа $z_1 = 5, t_1 = 7$. Нехай $z_n = z_{n-1} + t_{n-1}, t_n = 2z_{n-1} + t_{n-1}, n \geq 2$. Тоді, міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні задачі 3, матимемо $2z_n^2 - t_n^2 = 1$ для непарних $n \in N$. Звідси знаходимо нескінченну кількість шуканих трійок (x, y, z): $x = x_n = \frac{1}{2}(t_n - 1)$, $y = y_n = \frac{1}{2}(t_n + 1)$, $z = z_n$, де $n \in N$ – непарні числа. Наприклад, для $n = 3$ отримаємо трійку $(20, 21, 29)$.

Відзначимо, що лише в одній з таких трійок число z є квадратом натурального числа. Це трійка – $(119, 120, 169)$.

8. Існує нескінченна кількість варіантів такого заповнення. Розглянемо наступні дві таблиці:

a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a
a	b	a	a	b	a

x	y	x	x	y	x
y	z	y	y	z	y
x	y	x	x	y	x
x	y	x	x	y	x
y	z	y	y	z	y
x	y	x	x	y	x

У першій з них числа a, b потрібно вибрати такими, що $6a + 3b = 2016 \Leftrightarrow 2a + b = 672$ та $15a + 10b = 2015 \Leftrightarrow 3a + 2b = 403$. Звідси знаходимо $a = 941$, $b = -1210$.

У другій для виконання умов задачі, числа x, y, z потрібно взяти такими, що $4x+4y+z=2016$ та $9x+12y+4z=2015$. Звідси отримуємо: $z=2016-4x-4y$ та $7x+4y=6049$. Оскільки числа 7 та 4 є взаємно простими, то існує нескінченна кількість пар цілих чисел, які задовольняють останнє з цих рівнянь, отже, й нескінченна кількість трійок цілих чисел x, y, z, які задовольняють умови задачі. Наприклад, покладаючи $y=2$, знайдемо $x=863,\ z=-1444$.

9. Для $k=1$ рівність не справджується, бо при діленні на 4 її ліва частина дає остачу 3, а права – остачу 1.

Для $k=2$ рівність не справджується, бо її ліва частина не ділиться на 5, а права – ділиться.

Для $k=3$ при діленні на 8 її ліва частина дає остачу 1, а права дає остачу 1 лише для парних $m=2n$. Тому рівняння можна записати у вигляді $2^{k+l}=\left(5^n-3\right)\left(5^n+3\right)$. При цьому множники у правій частині отриманого рівняння мають бути степенями двійки, різниця яких дорівнює 6. Це можливо лише для $n=1$. Отже, отримуємо розв'язок: $k=3, l=1, m=2$.

Для $k\ge 4$ при діленні на 16 її ліва частина дає остачу 1, а права дає остачу 1 лише для $m=4n$. Тому рівняння можна записати у вигляді $2^k\left(1+2^l\right)=625^n-1$. Для кожного натурального n права частина отриманого рівняння ділиться на $625-1=624=16\cdot 39$, отже, ділиться на 39. А його ліва частина на 39 не ділиться, бо остачі чисел 2^l при діленні на 39 можуть набувати лише значень 1, 2, 4, 8, 16, 32, 25, 11, 22, 5, 10, 20, які періодично повторюються з періодом 12. Тому інших розв'язків у натуральних числах немає.

10. Враховуючи область допустимих значень, отримаємо: $a+x\ge 0,\ a-x\ge 0 \Rightarrow 2a\ge 0 \Rightarrow a\ge 0$.

Для $a=0$ єдине допустиме значення $x=0$ не задовольняє нерівність.

Надалі будемо розглядати лише $a>0$ та допустимі значення x такі, що $|x|\le a$. Після піднесення обох частин нерівності до квадрату отримаємо:

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-x^2}>a(a-2).$$

Якщо $0<a<2$, то звідси отримаємо множину розв'язків $x\in[-a;a]$. А для $a>2$ після піднесення до квадрату будемо мати:

$$4\left(a^2-x^2\right)>\left(a^2-2\right)^2 \Leftrightarrow x^2<\frac{a^3(4-a)}{4}.$$

Якщо $a\geq 4$, то нерівність не має розв'язків. А для $2\leq a<4$ отримаємо множину розв'язків:

$$x\in\left(-\frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2};\frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}\right).$$

При цьому враховано, що $\frac{a^3(4-a)}{4}\leq a^2$, тобто знайдені значення x не виходять за межі області допустимих значень.

11. Нехай $C(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$, $N(m;n)$, $K(k;l)$. Точка H – спільний ортоцентр трикутників BCK та ACN тоді і тільки тоді, коли $H(m;l)$. З рівняння $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ прямої AB маємо кутовий коефіцієнт $k_1=-\frac{b}{a}$, а з рівняння $y=\frac{lx}{m}$ прямої CH – кутовий коефіцієнт $k_2=\frac{l}{m}$. Але $CH\perp AB$, то $k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow\frac{b}{a}\cdot\frac{l}{m}=1\Rightarrow\frac{m}{l}=\frac{b}{a}$.

Тому $\frac{BN}{AK}=\frac{BN}{AB}:\frac{AK}{AB}=\frac{m}{a}:\frac{l}{b}=\frac{m}{l}\cdot\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\mathrm{tg}^2\angle A.$

12. Виберемо $O(0;0)$ – центр кола радіуса 2, описаного навколо трикутника ABC, сторона BC якого паралельна до осі абсцис, а вершина $A(a;b)$, де $a^2+b^2=4, 1<b<2$. Оскільки $\angle BAC=120^\circ$, то рівнянням прямої BC є $y=1$, отже, маємо $M(0;1)$. Бісектриса AL перетинає це коло у точці $P(0;-2)$. Далі послідовно отримаємо:

$$AM:\ \frac{x}{a}=\frac{y-1}{b-1},\ \ AP:\ \frac{x}{a}=\frac{y+2}{b+2},\ \ L=BC\cap AP\Rightarrow L\left(\frac{3a}{b+2};1\right),$$

$$OL:\ y=\frac{b+2}{3a}x,\ K=AM\cap OL\Rightarrow K\left(\frac{3a}{5-2b};\frac{b+2}{5-2b}\right).$$

Нехай точка K^* симетрична до точки K відносно прямої BC. Оскільки $2-\frac{b+2}{5-2b}=\frac{8-5b}{5-2b}$, то $K^*\left(\frac{3a}{5-2b};\frac{8-5b}{5-2b}\right)$. З рівності

$$\left(\frac{3a}{5-2b}\right)^2+\left(\frac{8-5b}{5-2b}\right)^2=\frac{9\left(4-b^2\right)+\left(8-5b\right)^2}{\left(5-2b\right)^2}=4$$

випливає, що точка K^* лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC. Тому $\angle BKC=\angle BK^*C=180^\circ-\angle BAC=60^\circ$.

13. Позначимо $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Методом математичної індукції отримаємо, що $S_n=u_{n+2}-1,\ n\in N$. Якщо m задовольняє умову задачі, то $S_m=\left(u_{m+2}-1\right)\vdots m$ та $S_{m+1}-S_1=\left(S_m+u_{m+1}-1\right)\vdots m.$ Звідси випливає, що $\left(u_{m+1}-1\right)\vdots m$ та $u_m=\left(\left(u_{m+2}-1\right)-\left(u_{m+1}-1\right)\right)\vdots m$. Навпаки, якщо $u_m\vdots m$ та $\left(u_{m+1}-1\right)\vdots m$, то $S_m=\left(u_m+\left(u_{m+1}-1\right)\right)\vdots m$.

Далі, за виконання цих двох умов, скориставшись формулою

$$u_{n+k}=u_ku_{n+1}+u_{k-1}u_n, \qquad (*)$$

для всіх $n\in N$ отримаємо

$$S_{n+m}-S_n=\left(u_{n+m+2}-1\right)-\left(u_{n+2}-1\right)=u_{n+m+2}-u_{n+2}=$$
$$=\left(u_{m+2}u_{n+1}+u_{m+1}u_n\right)-\left(u_2u_{n+1}+u_1u_n\right)=\left(\left(u_{m+2}-1\right)u_{n+1}+\left(u_{m+1}-1\right)u_n\right)\vdots m.$$

Таким чином, за таких умов суми довільних m послідовних чисел Фібоначчі ділитимуться на m.

Безпосереднім перебором переконуємося, що найменшим натуральним $m>1$, яке задовольняє ці дві умови, а з ними й умову задачі, є $m=24$. При цьому $S_{24}=u_{26}-1=121392=24\cdot 5058$.

Зауважимо, що з (*) випливають рівності:

$$u_{2m}=u_mu_{m+1}+u_{m-1}u_m=\left(u_{m+1}+u_{m-1}\right)u_m \text{ та } u_{2m+1}=u_m^2+u_{m+1}^2.$$

Отже, якщо число m є розв'язком і $m\vdots 6$, то $u_{2m}\vdots 2m$. Справді, $u_n\vdots 2\Leftrightarrow n\vdots 3$, тому числа u_{m+1} та u_{m-1} – непарні, а $u_m\vdots m$. Також $\left(u_{2m+1}-1\right)\vdots 2m$, бо при цьому $m=2s,\ u_m=a\cdot 2s,\ u_{m+1}=b\cdot 2s+1,$ де

$a, b, s \in Z$, отже, $u_{2m+1} - 1 = 2\left(a^2 + b^2 + b\right) \cdot 2s = \left(a^2 + b^2 + b\right) \cdot 2m$. Тому разом з числом $m \vdots 6$ підійдуть також всі числа вигляду $m \cdot 2^k,\ k \in N$.

Звідси отримуємо такий ланцюжок розв'язків: $m = 12 \cdot 2^k,\ k \in N$.

Відзначимо, що він не єдиний. Використовуючи таблицю чисел Фібоначчі та доведені вище умови отримаємо ще й такі ланцюжки розв'язків: $m = 36 \cdot 2^k,\ k \in N,\ m = 60 \cdot 2^k,\ k \in N,\ m = 168 \cdot 2^k,\ k \in N$, тощо.

Як узагальнення, відзначимо, що отримані висновки залишаться справедливими і для рекурентних послідовностей другого порядку вигляду: $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + \mu a_n,\ n \in N$, де $\mu -$довільне непарне число таке, що $(\mu, m) = 1$. Для обґрунтування цього факту достатньо буде скористатися рівностями $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{a_{n+2} - 1}{\mu}$ та $a_{n+k} = a_k a_{n+1} + \mu a_{k-1} a_n$, які легко доводяться методом математичної індукції, і міркуваннями, аналогічними до наведених вище. Наприклад, для $\mu = 5,\ \mu = 11,\ \mu = 17,\ \mu = 23$ та $\mu = 29$ отримаємо найменше потрібне значення $m = 6$, а з ним і ланцюжок таких значень $m = 3 \cdot 2^k,\ k \in N$. А для $\mu = 7,\ \mu = 13,\ \mu = 19$ та $\mu = 25$ знову матимемо $m = 24$, якому відповідає ланцюжок: $m = 12 \cdot 2^k,\ k \in N$.

Доведемо, що значення $m = 6$ підійде для всіх $\mu = 6n - 1,\ n \in Z$. Справді,

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = 1 + (6n-1) \cdot 1 = 6n - 1,\ a_4 = 6n + (6n-1) \cdot 1 = 12n - 1,$$

$$a_5 = 12n - 1 + (6n-1) \cdot 6n = 36n^2 + 6n - 1,$$

$$a_6 = 36n^2 + 6n - 1 + (6n-1) \cdot (12n-1) = 108n^2 - 12n \equiv 0 \pmod 6,$$

$$a_7 = 108n^2 - 12n + (6n-1) \cdot \left(36n^2 + 6n - 1\right) =$$

$$= 144n^3 + 108n^2 - 24n + 1 \equiv 1 \pmod 6.$$

Аналогічно можна довести, що для $\mu = 6n + 1,\ n \in Z$ підійде $m = 24$. Але простіше такий висновок зробити на підставі того, що $m = 24$ ми вже отримали для $\mu = 1,\ \mu = 7,\ \mu = 13$ та $\mu = 19$.

14. Запишемо рівняння задачі у такому рівносильному вигляді: $|x - y|\sqrt{x + 2y} = \sqrt[3]{13x + 8}$. Нехай $x - y = m \in Z$, $x + 2y = n^2 \in N$, $(n = 0$

умову задачі не задовольняє). Тоді $13x+8=\left(|m|n\right)^3$. Числа x, $|m|$ та n^2 є цілими, тому звідси випливає, що число n раціональне, отже, й ціле, бо його квадрат – натуральне число. Можна вважати, що $n\in N$.

Оскільки $3x=n^2+2m$, то останню рівність запишемо у вигляді: $3\left(|m|n\right)^3=13n^2+26m+24$. Якщо $n\geq 2$ та $|m|\geq 2$, то $3\left(|m|n\right)^3\geq 48n^2$ та $3\left(|m|n\right)^3\geq 96|m|$. Отже, $3\left(|m|n\right)^3\geq 24n^2+48|m|>13n^2+26m+24$. Тому принаймні одне з чисел $|m|$ чи n повинно дорівнювати 1. Розглянемо чотири можливі випадки:

1). $n=1, m>0\Rightarrow 3m^3=26m+37$;

2). $n=1, m<0\Rightarrow -3m^3=26m+37$;

3). $m=-1, n\in N\Rightarrow -3n^3=13n^2-2$;

4). $m=1, n\in N\Rightarrow 3n^3=13n^2+50$.

Перші три рівняння розв'язків у цілих числах не мають. А четверте рівняння запишемо у вигляді: $(n-5)\left(3n^2+2n-10\right)=0$. Звідси знаходимо єдиний цілий розв'язок $n=5$. При цьому пара $x=9$ та $y=8$ виявиться єдиним розв'язком задачі.

15. Найменше значення видовищності турніру отримаємо, якщо на кожному етапі зустрічатимуться команди з найменшими можливими різницями рейтингів:

I тур: 64 – 63, 62 – 61, …, 4 – 3, 2 – 1;

II тур: 64 – 62, 60 – 58, …, 8 – 6, 4 – 2;

III тур: 64 – 60, 56 – 52, …, 16 – 12, 8 – 4;

IV тур: 64 – 56, 48 – 40, 32 – 24, 16 – 8;

V тур: 64 – 48, 32 – 16;

VI тур: 64 – 32.

При цьому сума видовищностей матчів кожного туру дорівнює 32, а видовищність турніру становить $6\cdot 32=192$.

Найбільшу видовищність отримаємо, якщо видовищності кожного з турів будуть найбільшими з можливих, тобто коли у турі команди з верхньої половини рейтингу зустрічаються з командами з нижньої половини рейтингу. Наприклад, вона досягається у такому випадку розподілу зустрічей команд по турах:

I тур: 64 – 32, 63 – 31, …, 34 – 2, 33 – 1;

II тур: 64 – 48, 63 – 47, …, 50 – 34, 49 – 33;

III тур: 64 – 56, 63 – 55, …, 58 – 50, 57 – 49;

IV тур: 64 – 60, 63 – 59, 62 – 58, 61 – 57;

V тур: 64 – 62, 63 – 61;

VI тур: 64 – 63.

При цьому видовищність турніру дорівнює

$$32\cdot 32+16\cdot 16+8\cdot 8+4\cdot 4+2\cdot 2+1\cdot 1=\frac{64^2-1}{3}=1365.$$

Узагальнюючи, зауважимо, що за участі в такому турнірі 2^k команд мінімальна видовищність турніру дорівнюватиме $k\cdot 2^{k-1}$, а максимальна становитиме $\frac{4^k-1}{3}$.

16. Оскільки кількості перемог учасників турніру різні, то в учасника D принаймні на 3 нічиї більше, ніж в E, в C – принаймні на 3 більше, ніж в D, в B – принаймні на 3 більше, ніж в C, в A – принаймні на 3 більше, ніж в B. Разом в учасників A, B, C, D маємо нічиїх принаймні на $3+6+9+12=30$ більше, ніж в E. При цьому кожна нічия врахована двічі, тому всього буде не менше 15 нічиїх. Рівно 15 нічиїх можна отримати, наприклад, у випадку шести кіл, якщо при цьому турнірна таблиця виглядатиме таким чином:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	Очки	Перемоги	Нічиї
A		+0=6–0	+1=4–1	+2=2–2	+4=0–2	13	7	12
B	+0=6–0		+2=2–2	+2=1–3	+4=0–2	12,5	8	9
C	+1=4–1	+2=2–2		+3=0–3	+3=0–3	12	9	6
D	+2=2–2	+3=1–2	+3=0–3		+2=0–4	11,5	10	3
E	+2=0–4	+2=0–4	+3=0–3	+4=0–2		11	11	0

17. Скористаємося методом координат. Нехай задані точки $Q_a(0;0), I(0;r)$, $r=IQ_a$. Тоді вершини $B(b;0)$ та $C(c;0)$ трикутника ABC лежатимуть на осі абсцис.

Якщо $M\left(m;\frac{n}{3}\right)$, то за властивістю медіан ділитися своєю точкою перетину у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини, отримаємо $A(a;n)$, де a визначимо нижче.

Якщо $n \le 2r$, то шуканого трикутника ABC не існує, що суперечить вимозі його відновити. Тому надалі вважаємо, що $n > 2r$.

Проведемо через точку A пучок прямих $x = k(y-n)+a$. Знайдемо кутові коефіцієнти k_1 та k_2 тих прямих, які дотикаються до вписаного в трикутник кола, рівняння якого має вигляд

$$x^2+(y-r)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2ry=0.$$

Підставляючи тут $x=k(y-n)+a$, отримаємо рівняння

$$(k(y-n)+a)^2+y^2-2ry=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1+k^2\right)y^2+2\left(ak-k^2n-r\right)y+\left(a^2-2akn+k^2n^2\right)=0.$$

Тому k_1 та k_2 визначимо з рівності нулю дискримінанта

$$D=\left(2\left(ak-k^2n-r\right)\right)^2-4\left(1+k^2\right)\left(a^2-2akn+k^2n^2\right)=$$
$$=4\left(n(2r-n)k^2+2a(n-r)k+\left(r^2-a^2\right)\right)$$

цього рівняння.

Маючи k_1 та k_2, з врахуванням рівняння пучка, запишемо абсциси точок перетину таких дотичних з віссю абсцис: $b=a-k_1n$ та $c=a-k_2n$. Оскільки $a+b+c=3m$, то звідси, з врахуванням однієї з формул Вієта, отримаємо рівність

$$3a-(k_1+k_2)n=3m \Rightarrow \left(3-\frac{2(n-r)}{n-2r}\right)a=3m \Rightarrow (n-4r)a=3m(n-2r).$$

Отже, для $n \ne 4r$ знаходимо $a=\frac{3m(n-2r)}{n-4r}$. Якщо ж $n=4r$, то для $m=0$ отримуємо, що значення a може бути довільним, а для $m \ne 0$ жодне значення a умову задачі не задовольняє. Таким чином трикутник може бути відновлений однозначно за виконання умов: $n>2r,\ \ n\ne 4r$. За їх виконання опишемо процедуру відновлення трикутника ABC за точками M, I, Q_a: 1) через точку Q_a проводимо пряму IQ_a та пряму l, перпендикулярну до IQ_a; 2) за допомогою циркуля та лінійки визначаємо величини $|m|, \frac{n}{3}, r$; 3) проводимо паралельну до l пряму l' на відстані n від прямої l таку, щоб точки M, I лежали між цими прямими; 4) знаходимо величину $|a| = \left|\frac{3m(n-2r)}{n-4r}\right|$ і від точки K перетину прямої l' з прямою IQ_a відкладаємо на l' відрізок KA довжиною $|a|$ вліво чи вправо у залежності від знака a; 5) будуємо коло радіуса $r = IQ_a$ з центром у точці I ; 6) через точку A проводимо дотичні до побудованого кола і на їх перетині з прямою l отримуємо дві інші вершини трикутника ABC.

18. Виграшна стратегія є в Андрійка. Спочатку він відзначає точки $x_n = \frac{1}{p_n}, n = \overline{1,2016},$ де p_n – різні непарні прості числа. Після того, як Миколка зафарбує їх, Андрійко вибирає число a вигляду $a = \frac{1}{2^m}, m \in N$. Зрозуміло, що для кожного $m \in N$ справджуються нерівності:

$$k_1 < \frac{2^m}{p_1} < k_1 + 1,\ k_2 < \frac{2^m}{p_2} < k_2 + 1,\ \ldots,\ k_{2016} < \frac{2^m}{p_{2016}} < k_{2016} + 1,$$

де k_n – деякі невід'ємні цілі числа. Для перемоги Андрійка парні з них мають відповідати синім точкам, а непарні – зеленим. Пробігаючи всі значення $m \in N$, отримаємо нескінченну підмножину таких значень, для яких точка x_1 виявиться на проміжку свого кольору. На наступному кроці у цій підмножині виділимо нескінченну підмножину значень m, для яких точка x_2 виявиться на проміжку свого кольору. Повторивши цю процедуру 2016 разів, знайдемо нескінченну множину таких m, для яких всі виділені Андрійком точки опиняться на інтервалах свого кольору. Вибираючи одне з них, знайдемо шукане значення a.

19. Зауважимо, що послідовність обмежена знизу числом 0, а зверху числом $c=\max\{x_1,x_2,x_3\}$. Нехай α_1 – точна нижня грань її елементів. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер n_1, що $\alpha_1\le x_{n_1}<\alpha_1+\varepsilon$. Нехай α_2 – точна нижня грань елементів послідовності з номерами $n>n_1$. Тоді знайдеться такий номер $n_2>n_1$ що $\alpha_2\le x_{n_2}<\alpha_2+\varepsilon$ і так далі. Зокрема, на $k-$тому кроці знайдемо α_k – точну нижня грань елементів послідовності з номерами $n>n_{k-1}$ та номер $n_k>n_{k-1}$ що $\alpha_k\le x_{n_k}<\alpha_k+\varepsilon$. Продовживши цей процес до нескінченності, отримаємо монотонно неспадну послідовність чисел α_k, яка обмежена зверху числом $c=\max\{x_1,x_2,x_3\}$. Тому ця послідовність має скінченну границю. Враховуючи вибір елементів x_{n_k}, цю ж границю матиме і послідовність чисел x_n.

20. Додавши до обох частин рівності ціле число $y-x$, запишемо її у вигляді $\left[\dfrac{-xy(y-1)}{x+y^2}\right]=1$. Оскільки $\dfrac{-xy(y-1)}{x+y^2}\le 0$ для $x\ge 0$ та довільних цілих y, то підійдуть лише від'ємні цілі значення x. При цьому для $x\le -3$ отримаємо: $\dfrac{-xy(y-1)}{x+y^2}\ge\dfrac{3y(y-1)}{y^2-3}\ge 2$ для $x+y^2>0$ та $\dfrac{-xy(y-1)}{x+y^2}\le 0$ для $x+y^2<0$. Тому залишається проаналізувати лише два значення x:

1). $x=-1\Rightarrow\left[\dfrac{y(y-1)}{y^2-1}\right]=1\Rightarrow\left[\dfrac{y}{y+1}\right]=1\Rightarrow y=-n,\ n\ge 3;$

2). $x=-2\Rightarrow\left[\dfrac{2y(y-1)}{y^2-2}\right]=1\Rightarrow y=m,\ m\ge 3.$

2017 рік

1. а). Не обов'язково. Наприклад, якщо у порядку спадання зросту імена перших п'яти переможців будуть Саша, Оксана, Женя, Світлана та Рома, то у трьох хлопчиків – Саші, Жені та Роми – кількість подарованих їм цукерок виявиться однаковою.

б). Не обов’язково. Відповідний приклад пропонуємо читачам підібрати самостійно.

2. Не обов’язково. Наводимо один з варіантів такого заповнення:

11	2	14	19	21
8	13	3	22	1
20	17	15	6	9
7	24	18	10	12
25	5	23	16	4

Цікаво, що в цій таблиці всі 12 сум квадратів чисел по рядках, стовпцях та діагоналях також є простими числами.

3. Доведемо загальніше твердження:

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}+\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=\frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}}+\frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}}-\frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}=3.$$

За формулами Кассіні $F_{2n}^2+1=F_{2n-1}F_{2n+1}$ та $L_{2n}^2-5=L_{2n-1}L_{2n+1}$ маємо

$$F_{2n-1}^2+F_{2n+1}^2+1=\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)^2+1+2F_{2n-1}F_{2n+1}=$$
$$=\left(F_{2n}^2+1\right)+2F_{2n-1}F_{2n+1}=3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n-1}^2+L_{2n+1}^2-5=\left(L_{2n+1}-L_{2n-1}\right)^2-5+2L_{2n-1}L_{2n+1}=$$
$$=\left(L_{2n}^2-5\right)+2L_{2n-1}L_{2n+1}=3L_{2n-1}L_{2n+1}.$$

Тому для всіх $n\in\mathbb{N}$ обидві частини заданої рівності дорівнюють 3.

Подібна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}+\frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=\frac{L_{2n}}{L_{2n+2}}+\frac{L_{2n+2}}{L_{2n}}+\frac{5}{L_{2n}L_{2n+2}}.$$

Для всіх натуральних n обидві її частини також дорівнюють 3. Для доведення використовуємо аналогічні перетворення та формули Кассіні у вигляді $F_{2n+1}^2-1=F_{2n}F_{2n+2}$ та $L_{2n+1}^2+5=L_{2n}L_{2n+2}$.

4. Спочатку доведемо, що $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, тобто доводимо рівність

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}.$$

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо $\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}=\frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}$.

Крім того, маємо

$$F_{m+7}-F_{m+1}=\left(F_{m+6}+F_{m+5}\right)-\left(F_{m+3}-F_{m+2}\right)=$$
$$=\left(\left(F_{m+4}+F_{m+5}\right)+F_{m+5}\right)-\left(F_{m+3}-\left(F_{m+4}-F_{m+3}\right)\right)=$$
$$=2F_{m+5}+2F_{m+4}-2F_{m+3}=4F_{m+4}.$$

Аналогічно доводимо, що $F_{m+8}-F_{m+2}=4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}}=\frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

З доведеного випливає, що для всіх чотирикутників $A_1A_2A_3A_4$ з вказаними в умові задачі вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, $A_3\left(F_{m+5};F_{m+6}\right)$ та $A_4\left(F_{m+7};F_{m+8}\right)$ рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї. Тому площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1\left(F_1;F_2\right)$, $A_2\left(F_3;F_4\right)$, $A_3\left(F_5;F_6\right)$, тобто з вершинами $A_1(1;1)$, $A_2(2;3)$, $A_3(5;8)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій:

$$S_{A_1A_2A_3}=S_{F_1A_1A_2F_3}+S_{F_3A_2A_3F_5}-S_{F_1A_1A_3F_5}=$$
$$=\frac{1}{2}(1+3)\cdot 1+\frac{1}{2}(3+8)\cdot 3-\frac{1}{2}(1+8)\cdot 4=\frac{1}{2}.$$

Зауважимо також, що площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n\ge 3$, з вершинами $A_1\left(F_{m+1};F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3};F_{m+4}\right)$, …, $A_n\left(F_{m+2n-1};F_{m+2n}\right)$ не залежить від вибору числа $m\ge 0$ і дорівнює $\frac{F_{2n-2}-n+1}{2}$.

Справедливе й загальніше твердження: площа многокутника $A_1A_2...A_n,\ n\ge 3,$ з вершинами $A_1\left(F_{m+k};F_{m+2k}\right),\ A_2\left(F_{m+3k};F_{m+4k}\right),\ \ldots,$ $A_n\left(F_{m+(2n-1)k};F_{m+2nk}\right),\ k\in\mathbb{N},$ не залежить від вибору чисел $m\ge 0$ і дорівнює $\dfrac{F_k\left(F_{2k(n-1)}-(n-1)F_{2k}\right)}{2}$.

Ще загальніший результат доведений автором цього посібника при розв'язуванні задачі B-1195 з журналу The Fibonacci Quarterly (Vol. 55.3, August 2017. Elementary problems and solutions).

5. а) $(1,1,1)$; б) $(1,2,3)$; в) $(4,3,1)$. Для доведення єдиності запишіть задані системи рівнянь у вигляді:

$$\text{а) }\begin{cases}(x-1)\left(x^2+1\right)=1-y,\\(y-1)\left(y^2+1\right)=1-z,\\(z-1)\left(z^2+1\right)=1-x;\end{cases}\qquad \text{б) }\begin{cases}(x-1)\left(x^2+1\right)=2-y,\\(y-2)\left(y^4+1\right)=3-z,\\(z-3)\left(z^6+2\right)=1-x;\end{cases}$$

$$\text{в) }\begin{cases}(x-4)\left(x^6+1\right)=3-y,\\(y-3)\left(y^6+2\right)=1-z,\\(z-1)\left(z^6+3\right)=4-x.\end{cases}$$

Припускаючи, наприклад, для системи а), що $x>1$, з рівнянь цієї системи послідовно отримаємо $y<1,\ z>1,\ x<1$, що суперечить припущенню. Аналогічно аналізуємо випадок з $x<1$.

Ця ж ідея застосовна для розв'язування системи рівнянь з XX Всеукраїнського ТЮМ імені професора М.Й. Ядренка:

$$x_1^3+x_1+x_2=F_1x_1^2+F_3,$$
$$x_2^5+x_2+x_3=F_2x_2^4+F_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{2016}^{4033}+x_{2016}+x_{2017}=F_{2016}x_{2016}^{4032}+F_{2018},$$
$$x_{2017}^{4035}+\frac{F_{2019}-1}{F_{2017}}x_{2017}+x_1=F_{2017}x_{2017}^{4034}+F_{2019}.$$

Скориставшись рівностями $F_1=F_2=1,\ F_{k+2}=F_k+F_{k+1},\ k\in\mathbb{N},$

запишемо систему рівнянь у вигляді:

$$\left(x_1-F_1\right)\left(x_1^2+1\right)=F_2-x_2,$$

$$\left(x_2-F_2\right)\left(x_2^4+1\right)=F_3-x_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$\left(x_{2016}-F_{2016}\right)\left(x_{2016}^{4032}+1\right)=F_{2017}-x_{2017},$$

$$\left(x_{2017}-F_{2017}\right)\left(x_{2017}^{4034}+\frac{F_{2019}-1}{F_{2017}}\right)=F_1-x_1.$$

Звідси отримуємо єдиний розв’язок: $x_k=F_k,\ k=1,2,\ldots,2017$.

6. Розв’яжемо загальнішу задачу, а саме для додатних чисел $a,\ b,\ c,\ u,\ v,\ w$ доведемо нерівність

$$\frac{a^3}{au+bv+cw}+\frac{b^3}{bu+cv+aw}+\frac{c^3}{cu+av+bw}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

Скориставшись нерівностями

$$\frac{y^2}{z}\geq 2y-z,\ z>0,\qquad a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca,$$

отримаємо

$$\frac{a^3}{au+bv+cw}+\frac{b^3}{bu+cv+aw}+\frac{c^3}{cu+av+bw}=$$

$$=\frac{1}{(u+v+w)^2}\left[a\cdot\frac{a^2(u+v+w)^2}{au+bv+cw}+b\cdot\frac{b^2(u+v+w)^2}{bu+cv+aw}+c\cdot\frac{c^2(u+v+w)^2}{cu+av+bw}\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{(u+v+w)^2}\Big[a\cdot\big(2a(u+v+w)-(au+bv+cw)\big)+$$

$$+b\cdot\big(2b(u+v+w)-(bu+cv+aw)\big)+c\cdot\big(2c(u+v+w)-(cu+av+bw)\big)\Big]=$$

$$=\frac{1}{(u+v+w)^2}\Big[\left(a^2+b^2+c^2\right)(u+v+w)+$$

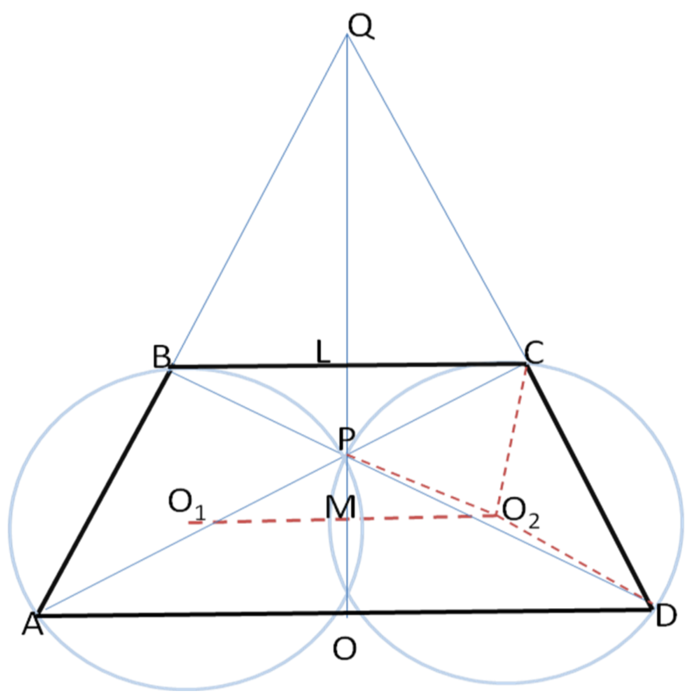
$$+\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)(v+w)\Big]\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

Для $u=x^2,\ v=2x,\ w=1$ як окремий випадок отримуємо нерівність з умови. Рівність досягається для $a=b=c$.

7. а). Запишіть доданки нерівності як подвоєні площі прямокутних трапецій з двома вершинами на осі абсцис та двома на параболі $y=x^2$ і скористайтеся вгнутістю графіка цієї параболи;

б). Замініть задані числа a, b, c їх квадратними коренями й запишіть доданки отриманої при цьому нерівності як подвоєні площі прямокутних трапецій з двома вершинами на осі абсцис та двома на параболі $y=\sqrt{x}$. Скористайтеся опуклістю графіка цієї параболи.

8. Спочатку доведемо (див. рисунок), що $\angle O_2PO=\angle ODC$.



Справді,

$$\angle O_2PO=180^0-\angle O_2PC-\angle OPA=$$

$$=180^0-\left(90^0-\angle PAO\right)-\frac{180^0-\angle PO_2C}{2}=$$

$$=\angle PAO+\frac{\angle PO_2C}{2}=\angle PDO+\angle PDC=\angle ODC.$$

Тепер опишемо покрокову побудову трапеції:

а). Будуємо заданий відрізок O_1O_2.

б). Будуємо кола з центрами в точках O_1 та O_2 з заданими радіусами r, одну з точок перетину яких позначаємо через P.

в). Через точку P проводимо серединний перпендикуляр до відрізка O_1O_2, на якому за відомою відстанню PQ відкладаємо точку Q у напрямі, протилежному до O_1O_2.

г). Проводимо відрізок PO_2.

д). З точки Q проводимо промені під кутами до променя QP, які дорівнюють куту O_1O_2P.

е). На перетині цих променів з побудованими вище колами отримуємо вершини шуканої трапеції.

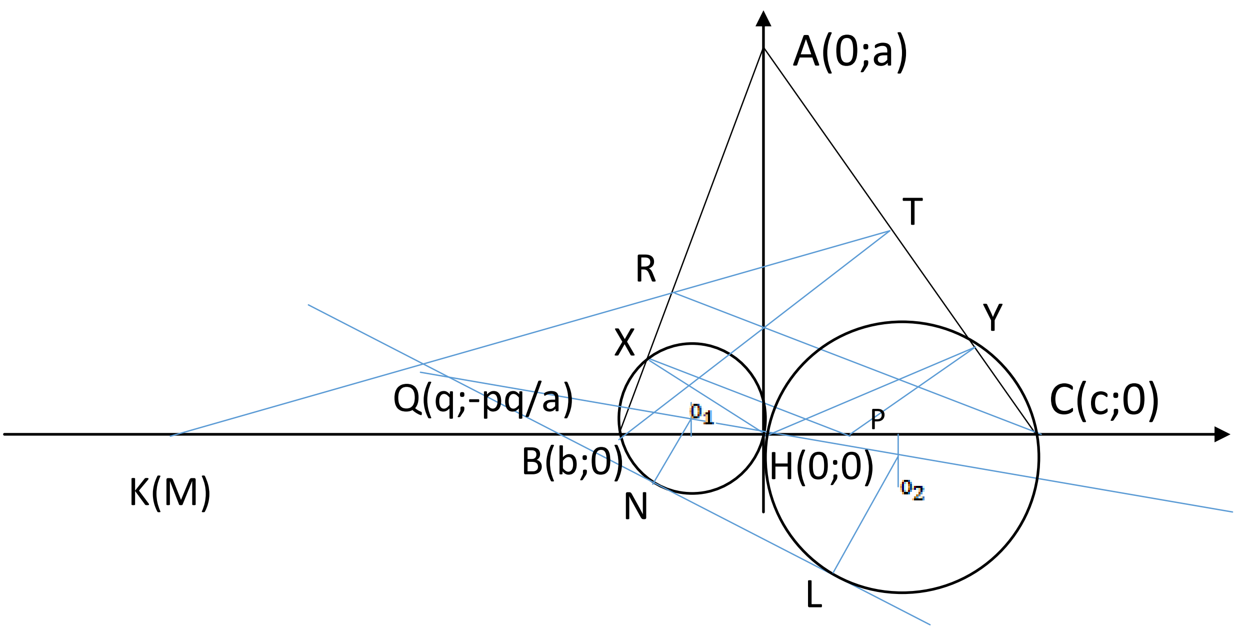
Пропонуємо читачам самостійно дослідити, за яких умов усі описані в пп. а) – е) побудови можуть бути виконані, і переконатися, що отриманий при цьому чотирикутник буде шуканою трапецією.

9. Розглянемо систему координат (дивись рисунок), в якій вершини трикутника ABC мають координати $A(0;a)$, $B(b;0)$, $C(c;0)$.

При цьому для конкретності вважаємо, що $c > -b > 0$.

(Якщо $b = 0$, то коло, описане навколо трикутника XBH, вироджується в точку H; а для $b > 0$ коло, описане навколо трикутника міститься всередині кола, описаного навколо трикутника HCY, і дотикається до останнього в точці H).

Випадок $0 < c < -b$ розглядається аналогічно.



Тоді $H(0;0)$. Виберемо також $P(p;0)$, де $-b < p < c$. Далі послідовно отримуємо:

$$AB: \quad y = -\frac{a}{b}x + a, \qquad AC: \quad y = -\frac{a}{c}x + a,$$

$$PX: \quad y = \frac{b}{a}(x - p), \qquad PY: \quad y = \frac{c}{a}(x - p).$$

Позначимо через O_1 та O_2 центри кіл, описаних навколо трикутників XBH та HCY відповідно. Їх координати знайдемо як координати перетину серединних перпендикулярів відповідних сторін цих трикутників:

$$O_1: \quad \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}\left(x - \dfrac{p+b}{2}\right) \\ x = \dfrac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow O_1\left(\frac{b}{2}; -\frac{bp}{2a}\right).$$

Аналогічно знаходимо $O_2\left(\dfrac{c}{2}; -\dfrac{cp}{2a}\right)$. Тому $O_1O_2: \quad y = -\dfrac{p}{a}x.$

Отже, маємо $Q\left(q; -\dfrac{pq}{a}\right)$, де q визначимо з умови, що через Q проходять спільні зовнішні дотичні вказаних вище двох кіл з радіусами R_1 та R_2 відповідно. З подібності відповідних трикутників отримуємо співвідношення $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{QO_1}{QO_2} = \dfrac{\frac{b}{2} - q}{\frac{c}{2} - q} = \dfrac{b - 2q}{c - 2q}$.

Оскільки також $\dfrac{R_1}{R_2} = -\dfrac{b}{c}$, то з рівняння $\dfrac{b-2q}{c-2q} = -\dfrac{b}{c}$ знаходимо $q = \dfrac{bc}{b+c}$, звідки випливає, що точка Q лежить на прямій $x = \dfrac{bc}{b+c}$, не залежно від вибору точки P.

Як узагальнення, доведемо, що вона рівновіддалена від точок K та H, де K – точка перетину прямих TR та BC (див. рисунок).

Розглянемо точку $M\left(\frac{2bc}{b+c};0\right)$. Зрозуміло, що $MQ=QH$. Враховуючи, що також

$$BT:\quad y=\frac{c}{a}(x-b),\qquad CR:\quad y=\frac{b}{a}(x-c),$$

знайдемо

$$T\left(\frac{c\left(a^2+bc\right)}{a^2+c^2};\frac{ac(c-b)}{a^2+c^2}\right)\quad \text{та}\quad R\left(\frac{b\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2};\frac{ab(b-c)}{a^2+b^2}\right).$$

Оскільки $\frac{x_R-x_M}{y_R}=\frac{x_T-x_M}{y_T}$, то точки M, R, T лежать на одній прямій. Отже, точка K співпадає з точкою M. Тому також $KQ=QH$.

Наведемо також геометричне розв'язання цієї задачі.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $AB<AC$. Побудуємо коло на відрізку AP, як на діаметрі. На цьому ж колі знаходяться й точки X, Y та H, тому $\angle HXP=\angle HYP$. Нехай O_1 та O_2 центри кіл, описаних навколо трикутників XBH та HCY відповідно. $\angle BHO_1=\angle HXP=\angle HYP=\angle CHO_2$, тому описані кола трикутників XBH та HCY дотикаються одне одного.

З подібності трикутників маємо

$$\frac{O_2H}{O_1H}=\frac{QH+O_2H}{QH-O_1H},\ QH=\frac{2\cdot O_1H\cdot O_2H}{O_1H-O_2H}.$$

Нехай $D-$ проекція точки Q на пряму BC. Тоді

$$DH=QH\cos\angle BHO_1=\frac{2\cdot O_2H\cos\angle BHO_1\cdot O_1H\cos\angle BHO_1}{O_2H\cos\angle BHO_1-O_1H\cos\angle BHO_1}=\frac{HB\cdot HC}{HC-HB}.$$

Таким чином, точка Q лежить на фіксованій прямій, не залежно від вибору P.

10. Нескладно переконатися, що таким є, наприклад, трикутник, вершини якого мають координати: $A(80;0)$, $B(0;84)$, $C(0;0)$. Тоді $AC=80$, $BC=84$ і за теоремою Піфагора $AB=116$.

Якщо тепер $M(40;9)$, то за тією ж теоремою Піфагора знаходимо $MA = MC = 41$, $MB = 85$.

Доведемо, що неподібних між собою прямокутних трикутників з такою властивістю існує безліч.

Нехай $A(4mn;0)$, $B\left(0;4m^2-n^2\right)$, $C(0;0)$, де m, n – натуральні числа, $m>n>1$. Тоді $AC = 4mn$, $BC = 4m^2-n^2$ і за теоремою Піфагора $AB = 4m^2+n^2$.

Вибравши тепер всередині точку $M\left(2mn;m^2-n^2\right)$, отримаємо $MA = MC = m^2+n^2$ та

$$MB^2 = \left(3m^2\right)^2 + (2mn)^2 = m^2\left((3m)^2+(2n)^2\right) = m^2\left(n^2+1\right)^2,$$

якщо $3m = n^2-1$.

Покладаючи, наприклад, $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, звідси знаходимо $m = k(3k+2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Серед отриманих при цьому для різних $k \in \mathbb{N}$ прямокутних трикутників є нескінченна кількість таких, жодні два з яких не є подібними, бо відношення катетів

$$\frac{AC}{BC} = \frac{2mm}{4m^2-n^2} = \frac{4k(3k+2)(3k+1)}{4k^2(3k+2)^2-(3k+1)^2} =$$

$$= \frac{4k(3k+1)(3k+2)}{(k+1)(2k+1)(3k-1)(6k+1)}$$

прямує до нуля при $k \to \infty$, отже, або саме утворює спадну послідовність, або містить спадну підпослідовність.

Зокрема, при $k = 1, m = 5, n = 4$ отримуємо наведений першим приклад потрібного прямокутного трикутника.

Відзначимо, що можна було б також вибирати $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому отримали би $m = (k+1)(3k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що точка M не обов'язково повинна знаходитися на середній лінії трикутника. Наприклад, для трикутника з вершинами

$A(69;0)$, $B(0;92)$, $C(0;0)$ і точки $M(21;20)$ отримуємо $AC=69$, $BC=92$, $AB=115$, $MA=52$, $MB=75$, $MC=29$.

11. Такою є, наприклад, четвірка чисел $a=3, b=4, c=5, d=6$. Справді, $3^3+4^3+5^3=27+64+125=216=6^3$.

Доведемо, що множина таких четвірок натуральних чисел, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число, є нескінченною. Представляючи ці числа у вигляді квадратичних функцій від n, доведемо, що записану рівність при кожному натуральному n задовольняють натуральні числа:

$$a=3n^2+11n+3,\ b=4n^2+4n+6,\ c=5n^2+5n-3,\ d=6n^2+8n+6.$$

Справді, якщо

$$f(x)=\left(3x^2+11x+3\right)^3+\left(4x^2+4x+6\right)^3+\left(5x^2+5x-3\right)^3-\left(6x^2+8x+6\right)^3,$$

то, як нескладно переконатися,

$$f'(x)=3(6x+11)\left(3x^2+11x+3\right)^2+3(8x+4)\left(4x^2+4x+6\right)^2+$$
$$+3(10x+5)\left(5x^2+5x-3\right)^2-3(12x+8)\left(6x^2+8x+6\right)^2=$$
$$=3(6x+11)\left(9x^4+66x^3+139x^2+66x+9\right)+$$
$$+3(8x+4)\left(16x^4+32x^3+64x^2+48x+36\right)+$$
$$+3(10x+5)\left(25x^4+50x^3-5x^2-30x+9\right)-$$
$$-3(12x+8)\left(36x^4+96x^3+136x^2+96x+36\right)\equiv 0.$$

Тому $f(x)=const$. А оскільки $f(0)=0$, то $f(x)\equiv 0$.

Наведемо також інші представлення з використанням многочленів вищих степенів:

$$a=1,\ \ b=-1+72n^3,\ c=144n^4-6n,\ d=144n^4;$$
$$a=9n^3-1,\ b=9n^4-3n,\ c=1,\ d=9n^4;$$
$$a=3n^3-9,\ b=n^4-9n,\ c=9,\ d=n^4,\ n\ge 3.$$

Перше з них отримуємо із знайденого у 1740 році розв’язку Ейлера задачі про чотири куби:

$$a = 1 + (m - 3n)(m^2 + 3n^2),$$
$$b = -1 + (m + 3n)(m^2 + 3n^2),$$
$$c = -m - 3n + (m^2 + 3n^2)^2,$$
$$d = -m + 3n + (m^2 + 3n^2)^2,$$

в якому достатньо покласти $m = 3n$:

Друге маємо із розв'язку Морделла, отриманого ним 1956 року:

$$a = 9n^3 m - m^4,$$
$$b = 9n^4 - 3nm^3,$$
$$c = m^4,$$
$$d = 9n^4,$$

покладаючи в ньому $m = 1$.

12. Розглянемо спочатку випадок, коли $n - 1 \geq k + 1$, тобто різниця $p = n - k \geq 2$.

Якщо $p = 2$, то $n - 1 = k + 1$ і $C_{n-1}^{k+1} = 1$. Тому також $C_{n+1}^{k-1} = 1$ і, оскільки $n + 1 > k - 1$, це можливо лише за умови, що $k = 1$. При цьому $n = 3$.

Нехай тепер $p \geq 3$. Скориставшись формулами для біноміальних коефіцієнтів, запишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-k-2)!} = \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+2)!}.$$

Скоротивши обидві частини останньої рівності на спільні дільники і використовуючи позначення $p = n - k$, отримаємо рівняння

$$(p+2)(p+1)p(p-1) = (n+1)n(k+1)k.$$

Згрупувавши в обох його частинах перший множник з четвертим, а другий з третім, і використовуючи рівність $n = k + p$, будемо мати

$$\left(p^2 + p - 2\right)\left(p^2 + p\right) = \left(k^2 + kp + k\right)\left(k^2 + kp + k + p\right).$$

Позначивши $p^2 + p - 2 = s$ та $k^2 + kp + k = q$, запишемо останню рівність у вигляді $s(s+2) = q(q+p)$.

Для $p \geq 3$ вона можлива лише за умови $q < s$. Тому покладемо

$$q = \frac{a}{b} s = \frac{a}{b}\left(p^2 + p - 2\right),$$

де $\dfrac{a}{b}$ – нескоротний дріб, причому $a < b$. Тоді

$$q + p = \frac{b}{a}(s+2) \Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(p^2 + p - 2\right) + p = \frac{b}{a}\left(p^2 + p\right).$$

Внаслідок нескоротності дробу $\dfrac{a}{b}$ звідси випливає, що $p^2 + p - 2 \vdots b$, тому також $p^2 + p \vdots a$.

Запишемо останню рівність у вигляді

$$a^2\left(p^2 + p - 2\right) + abp = b^2\left(p^2 + p\right). \qquad (*)$$

З рівності (*) випливає, що $2a^2 \vdots p$. Оскільки $p \geq 3$, то $a \neq 1$. Також із взаємної простоти чисел p та $p+1$ і подільності $p^2 + p \vdots a$ випливає, що $p \vdots a$. Якщо при цьому p не ділиться на a^2, то з рівності (*) отримуємо суперечність: її ліва частина ділиться на a^2, а права – ні. Тому $p \vdots a^2$, що разом із подільністю $2a^2 \vdots p$ при $p \geq 3$ та $a \geq 2$ можливо лише у двох випадках: $p = a^2$ та $p = 2a^2$.

Нехай $p = a^2$. Тоді після скорочення на a^2 рівність (*) можна записати у вигляді $a^4 + a^2 - 2 + ab = b^2\left(a^2 + 1\right)$.

Оскільки $b \geq a + 1$, то з очевидних нерівностей $b^2 > ab$ та $b^2a^2 \geq (a+1)^2 a^2 = a^4 + 2a^3 + a^2 > a^4 + a^2 - 2$ отримуємо, що попередня рівність не справджується.

Аналогічно для $p = 2a^2$ рівність (*) після скорочення на a^2 набуде вигляду $4a^4 + 2a^2 - 2 + 2ab = b^2\left(4a^2 + 2\right)$.

Враховуючи тепер очевидні нерівності $2b^2 > 2ab$ та $4b^2a^2 \geq 4(a+1)^2 a^2 = 4a^4 + 8a^3 + 4a^2 > 4a^4 + 2a^2 - 2$, отримаємо, що й в цьому випадку рівність (*) не справджується.

Таким чином, при $p \geq 3$ задане в умові рівняння з біноміальними коефіцієнтами розв’язків не має.

Можна було міркувати ще й так.

З умови задачі отримуємо рівність

$$n(n+1)k(k+1)=(n-k-1)(n-k)(n-k+1)(n-k+2). \qquad (**)$$

Введемо позначення: $p=n-k$.

Якщо $p=2$, то (**) зведеться до рівняння

$$k(k+1)(k+2)(k+3)=4!,$$

яке має один корінь $k=1$ (тоді $n=3$).

Якщо $p>2$, то виконаємо такі перетворення рівності (**):

$$4n^2k^2+4nk(n+k)+4nk=4(p-1)p(p+1)(p+2),$$

$$(2nk+n+k)^2-(n+k)^2+4nk=4(p^2+p-2)(p^2+p),$$

$$(2nk+n+k)^2-(n-k)^2=(2p^2+2p-2)^2-4,$$

$$(2nk+n+k)^2=(2p^2+2p-2)^2+p^2-4.$$

А оскільки при $p>2$

$$(2p^2+2p-2)^2<(2p^2+2p-2)^2+p^2-4<(2p^2+2p-1)^2,$$

то число $(2p^2+2p-2)^2+p^2-4$ не може бути повним квадратом. Отже, в такому разі інших розв'язків початкового рівняння не отримаємо.

Для повноти розв'язання розглянемо також випадки, коли $p=n-k\le 1$. При цьому врахуємо, що для $l>m$ прийнято вважати $C_m^l=0$. Це цілком логічно, бо вибрати із множини більше елементів, ніж вона містить не можна.

Відповідно, для $p=1$, $p=0$, $p=-1$, та $p=-2$ для всіх натуральних чисел n, k у лівій частині рівності $C_{n-1}^{k+1}=C_{n+1}^{k-1}$ отримаємо нуль, а її права частина буде додатною. Тому у цих випадках рівняння не матиме розв'язків.

Якщо ж $p=n-k\le -3$, то в обох частинах заданого рівняння отримаємо нулі. Звідси знаходимо нескінченну множину його розв'язків з довільними натуральними n, k, які задовольняють нерівність $k\ge n+3$.

13. Умова задачі зводиться до виділення на дошці 8×8 деякої кількість клітинок так, щоб поруч з кожною клітинкою дошки

знаходилася рівно одна виділена клітинка? Вибираючи в довільному порядку по одному разові виділені клітинки, ми зможемо перефарбувати всі клітинки шахової дошки у протилежний колір.

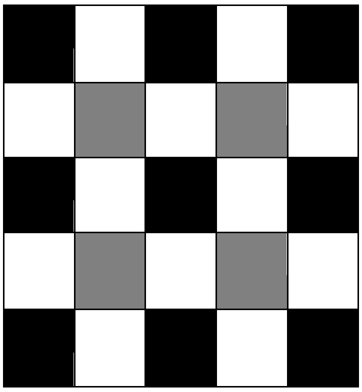
Розглянемо зразу загальнішу задачу про виділення таких клітинок на дошці розмірами $2n \times 2n$. Наступний ланцюжок табличок показує, як, рухаючись по спіралі, переходити від дошки $2n \times 2n$ до дошки $2(n+1) \times 2(n+1)$:

25	26			27	28			29	30		
											31
		9	10			11	12				32
24									13		
23				1	2				14		
		8					3				33
		7					4				34
22				6	5				15		
21									16		
		20	19			18	17				35
											36
42	41			40	39			38	37		

Тут клітинки 1, 2 виділені у зеленому квадраті 2×2. Далі, пропускаючи дві клітинки дошки і повертаючи під прямими кутами за стрілкою годинника перейдемо до квадрата 4×4 з використанням клітинок 1 – 6. Добавляючи за цим же принципом клітинки 7 – 12, отримаємо потрібний результат для квадрата 6×6. Ще одна пів-вітка спіралі з виділеними клітинками 13 – 20 приводить нас до квадрата 8×8, про який йшла мова в основній задачі. На рисунку зображене також продовження спіралі для перефарбування квадратів 10×10 та 12×12. Зрозуміло, що такий процес може бути продовжений до нескінченності, і в цей спосіб можна перефарбувати у протилежний колір навіть всі клітинки «шахової площини».

Зауважимо тільки, що для перефарбування дошки $2n \times 2n$ нам потрібно буде вибрати $2(1+2+\ldots+n) = n(n+1)$ клітинок.

Додатково розглянемо питання про перефарбування клітинок квадрата розмірами $(2n+1) \times (2n+1)$ і доведемо, що здійснити його не вдасться. Для цього розфарбуємо його клітинки, як на рисунку, зображеному нижче на прикладі $n = 2$.



Перефарбувати всі клітинки такого квадрата у протилежний колір не можна, бо помічених темним кольором клітин непарна кількість, а за кожен хід або не буде перефарбовано жодної, або будуть перефарбовані дві такі клітинки.

Відзначимо також, що для можливості перефарбування форма дошки не обов’язково повинна бути квадратною. Наприклад, відкинувши в наведеній вище таблиці два останні стовпчики, отримаємо спосіб перефарбування дошки розмірами 10×12.

Також не обов’язково обидва чи навіть один вимір дошки повинен бути парним. Наведемо відповідні приклади (нижче номерами позначені клітинки, які необхідно буде виділити для перефарбування):

1
2

	1	
	2	

1			3	
2			4	

1	2	

1	2			3	4	

Але, наприклад, для дошки розмірами 1×5 вказане перефарбування здійснити не вдасться. Справді, для перефарбування крайніх клітинок доведеться виділити прилеглі до них клітинки. Але у такому разі центральна клітинка не буде перефарбованою.

Пропонуємо читачам самостійно знайти приклади інших розмірів дошки, для яких такі перефарбування можливі чи, відповідно, не можуть бути виконані.

14. У Петрика є можливість після кожного ходу Марійки пофарбувати принаймні одну дошку в той самий колір, що й сусідня з нею уже пофарбована дошка. Тому він зможе добитися, щоб однокольорових переходів було не менше 10. Аналогічно Марійка, починаючи зі свого другого ходу, фарбуючи при цьому кожен раз дошку у протилежний колір до однієї з сусідніх з нею, зможе добитися не менше 9 різнокольорових переходів. А оскільки всіх переходів є 19, то в кінцевому результаті паркан матиме саме 9 різнокольорових переходів.

Одним з варіантів досягнення описаного ефекту є, наприклад, послідовне фарбування Марійкою та Петриком дощок паркана зліва направо. При цьому чергуватимуться пари з двох блакитних та двох жовтих дощок.

Міркуючи аналогічно при фарбуванні паркана, який має $n = 2k$ дощок, отримаємо, що після завершення фарбування паркан матиме $k - 1$ різнокольорових переходів.

Відповідно для паркана, який складається $n = 2k + 1$ дощок, такими ж міркуваннями отримаємо k різнокольорових переходів.

Оскільки задача виявилася доволі простою, то для $n = 2k$ наведемо ще один спосіб її розв’язування з використанням методу математичної індукції. Доведемо, що при кожному натуральному k перевага Петрика над Марійкою становитиме принаймні 1.

Для $k = 1$ це очевидно – Петрикові достатньо тільки другу дошку пофарбувати в той самий колір, в який пофарбована Марійкою перша дошка.

Припустимо, що для всіх $k \le m$ йому вдається отримати у такому фарбуванні перевагу над Марійкою принаймні на 1.

Тоді для $k = m + 1$ йому достатньо буде на перший хід Марійки відповісти фарбуванням у той самий колір сусідньої дошки таким чином, щоб з обох боків залишилася парна кількість нефарбованих дощок (або не залишалося жодної). Цим він зразу досягає перевагу на 1 над Марійкою. Далі, на кожній з двох частинок, які залишилися, згідно з припущенням у нього є можливість збільшити свою перевагу ще принаймні на 1. Але, враховуючи, що при цьому могли появитися різнокольорові переходи поруч з двома першими пофарбованими дошками, гарантована перевага Петрика над Марійкою дорівнює лише 1.

Звідси випливає, що для кожного натурального k Петрик зможе випередити Марійку принаймні на 1. Якщо при цьому Марійка, наприклад, буде дотримуватися описаної вище стратегії, то паркан матиме $k-1$ різнокольорових переходів.

Щодо інших ходів Петрика, то він може або поступати так, як описано вище, або ж, узгоджуючи свої дії з цим методом доведення, кожен раз фарбувати деяку дошку в один колір з довільною сусідньою уже пофарбованою дошкою таким чином, щоб після його ходу з іншого боку пофарбованої ним дошки залишалася парна кількість нефарбованих дощок (або не залишалося жодної). Зрозуміло, що така стратегія Петрика є частковим випадком стратегії, наведеної першою.

15. Оскільки в обох сторін має бути рівно один король, то королі можуть бути позначені лише буквами «к» та «К».

Буквами «р» та «Р» не може бути позначений ферзь, бо неможливі одночасні шахи різним королям.

Буквою «Р» не може бути позначений слон, бо попасти на поле a5 своїм останнім ходом він не міг, а якщо він попав туди раніше, то король суперника не мав права опинитися на полі b6.

Буквою «р» не може бути позначений кінь, бо попасти на поле a2 своїм останнім ходом він не міг, а якщо він попав туди раніше, то король суперника не мав права опинитися на полі c3.

Також буквою «р» не може бути позначений пішак, бо на полі c1, він зобов'язаний був перетворитися в деяку фігуру.

Тому буквами «р» та «Р» позначені тури.

Буквою «а» не можуть бути позначені ні ферзь, ні слон через неможливість одночасних шахів цими фігурами королю на полі c3.

Оскільки, крім того, «а» не позначає туру (бо тури позначені буквами «р» та «Р») і не позначає пішака (бо пішак на полі e1 мав перетворитися в деяку фігуру), то буквою «а» позначений кінь.

Буквою «У» не може позначений ферзь, бо неможливі одночасні шахи двом королям.

Оскільки, крім того, «У» не позначає ні туру, ні коня (бо ці фігури вже позначені іншими буквами), а також не позначає пішака (бо на b8 він мав перетворитися в деяку фігуру), то буквою «У» позначений слон.

Враховуючи сказане і те, що на полі a1 «ї» не може бути пішаком, отримуємо, що буквою «ї» позначений ферзь.

Тоді для букви «н» залишається єдина можливість позначати пішака.

Залишилося тільки пояснити можливість одночасних шахів королю на полі c3 ферзем з поля a1 та турою з поля c1. Таке могло статися в єдиному випадку, якщо останнім зробленим в цій партії ходом чорний пішак з поля b2 збив деяку фігуру білих на полі c1 і перетворився в туру.

Звідси, зокрема, випливає, що великими буквами позначені білі фігури, а малими – чорні.

Остаточно відновлена позиція має такий вигляд:

16. Позначимо через V_m кількість перестановок із m елементів, в яких жоден елемент не залишається на своєму місці. Очевидно, що $V_1 = 0$. Для зручності також покладемо, що $V_0 = 1$.

Виведемо формулу для обчислення $V_m,\ m \geq 2$. Позначимо через A_i множину перестановок, в яких $i-$тий елемент залишається на своєму місці. Вона складається з $(m-1)!$ елементів.

Перетин p із m множин A_i містить $(m-p)!$ елементів, а всього таких перетинів є C_m^p. Тому за формулою включень-виключень отримаємо число $W_m,\ m \geq 2,$ перестановок, в яких хоч один елемент залишається на своєму місці:

$$W_m = C_m^1 (m-1)! - C_m^2 (m-2)! + C_m^3 (m-3)! - \ldots + (-1)^{m-1} \cdot 1 =$$

$$= m!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}\right).$$

Оскільки всіх перестановок із m елементів є $m!$, то

$$V_m = m! - m!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m!}\right) = m!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{m} \frac{1}{m!}\right).$$

Оскільки ті k елементів, які залишаються на своїх місцях, можна вибрати $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ способами, то за правилом множення отримаємо

$$U_k = C_n^k \cdot V_{n-k} = \frac{n!}{k!}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!}\right),\ n-k \geq 2.$$

Крім того $U_{n-1} = C_n^{n-1} \cdot V_1 = 0$ та $U_n = C_n^n \cdot V_0 = 1$.

Надалі для зручності позначимо U_k, про які йде мова в умові задачі, через $U_k^{(n)}$, а для кількості перестановок множини із $n+1$ елементів, в яких k елементів залишаються на своїх місцях, використаємо позначення $U_k^{(n+1)}$.

З врахуванням записаних вище рівностей отримаємо

$$U_k^{(n+1)} = (n+1)U_k^{(n)} + (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k,\ k \leq n, \text{ та } U_{n+1}^{(n+1)} = 1.$$

Перейдемо тепер до доведення рівності

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k^{(n)} = n! \qquad (*)$$

Для $n=1$ вона правильна, бо $\sum_{k=1}^{1} kU_k^{(1)} = 1\cdot 1 = 1!$

Припустимо справедливість рівності (*) для деякого $n \geq 1$. Тоді для $n+1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1} kU_k^{(n+1)} = (n+1)\sum_{k=1}^{n} kU_k^{(n)} + (n+1)U_{n+1}^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k} =$$

$$= (n+1)n! + \sum_{k=1}^{n+1} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k}.$$

Оскільки $C_{n+1}^{k} = \dfrac{n+1}{k} C_n^{k-1}$, то з врахуванням формули бінома Ньютона

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(-1)^{n+1-k} C_{n+1}^{k} = (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_n^{k-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C_n^{p} = (n+1)(1-1)^n = 0.$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1} kU_k^{(n+1)} = (n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість рівності (*) для всіх натуральних n.

Як узагальнення задачі, для $n \geq 2$ доведемо наступну рівність

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k^{(n)} = 2\cdot n!\,, \qquad (**)$$

яка пропонувалася на заключному етапі турніру. (Для $n=1$ вона не справджується, бо $1 \neq 2$. Причину цього ми встановимо нижче.)

Для $n=2$ справджується рівність $\sum_{k=1}^{2} k^2 U_k^{(2)} = 1^2\cdot 0 + 2^2\cdot 1 = 2\cdot 2!$

Припустимо справедливість рівності (**) для деякого $n \geq 2$.

Тоді для $n+1$ отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2U_k^{(n+1)}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2U_k^{(n)}+(n+1)^2U_{n+1}^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}k^2(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^k=$$

$$=2\cdot(n+1)\cdot n!+\sum_{k=1}^{n+1}k^2(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^k.$$

Оскільки $C_{n+1}^k=\dfrac{n+1}{k}C_n^{k-1}$, то з врахуванням отриманого вище маємо

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^k=(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}k(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}=$$

$$=(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_n^{k-1}\right)=$$

$$=(n+1)\left(\sum_{p=0}^{n}p(-1)^{n-p}C_n^p+\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^p\right)=$$

$$=(n+1)\left(n\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-1-s}C_{n-1}^s+\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^p\right)=$$

$$=(n+1)\left(n(1-1)^{n-1}+(1-1)^n\right)=0.$$

Тому $\sum_{k=1}^{n+1}k^2U_k^{(n+1)}=2\cdot(n+1)!$, звідки внаслідок принципу математичної індукції випливає справедливість рівності (**) для всіх натуральних $n\geq 2$.

Враховуючи наявність множника $(1-1)^{n-1}$, стає зрозумілим, чому така рівність не справджувалася для $n=1$.

Пропонуємо читачам самостійно переконатися, що для $n\geq 3$ справджується рівність $\sum_{k=1}^{n}k^3U_k^{(n)}=5\cdot n!$

У загальному випадку справедливе таке твердження: при кожному фіксованому натуральному m для всіх $n\geq m$

$$\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^mU_k^{(n)}=const.$$

При цьому константи у правій частині цієї рівності є так званими числами Белла, які визначаються рівностями: $B_0 = 1$ та $B_m = \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} B_i$ для $m \geq 1$. Числа Белла утворюють послідовність: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 887, ..

17. Будемо розв'язувати загальнішу задачу, вимагаючи, щоб кожні два доданки такої суми були взаємно простими.

Доведемо таке узагальнене твердження: для довільного $m \geq 2$ існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на m попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

Для його доведення скористаємося посиленим постулатом Бертрана: між числами N та $1{,}5N$, де $N \geq 2$ завжди існує просте число.

Нехай $n = 2 \cdot 16^{m-1}$, $k > 2 \cdot 16^{m-1}$. Між числами $\frac{10}{16}k$ та $\frac{15}{16}k$ виберемо просте число p_m. Тоді $\frac{1}{16}k \leq k - p_m \leq \frac{6}{16}k$, тобто $2 \cdot 16^{m-2} < k - p_m < p_m$.

Аналогічно між числами $\frac{10}{16}(k - p_m)$ та $\frac{15}{16}(k - p_m)$ виберемо просте число p_{m-1}, причому $p_{m-1} < p_m$.

Продовжуючи цю процедуру, отримаємо прості числа $p_2 < \ldots < p_{m-1} < p_m$, причому $2 \leq k - p_2 - \ldots - p_{m-1} - p_m < p_2$, тобто доданки $k - p_2 - \ldots - p_{m-1} - p_m,\ p_2, \ldots, p_{m-1},\ p_m$ взаємно прості, й більші за 1.

Наприклад для $m = 5$ та числа $k = 200000 > 2 \cdot 16^4$ шукаємо просте число p_5 між числами 125000 та 187500. Візьмемо $p_5 = 150001$. Тоді $k - p_5 = 200000 - 150001 = 49999$.

Шукаємо просте число p_4 між числами 31249 та 46874. Візьмемо $p_4 = 40009$. Тоді $k - p_5 - p_4 = 49999 - 40009 = 9990$.

Шукаємо просте число p_3 між числами 6243 та 9365. Візьмемо $p_3 = 9349$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 = 9990 - 9349 = 641$.

Шукаємо просте число p_2 між числами 400 та 600. Візьмемо $p_4 = 401$. Тоді $k - p_5 - p_4 - p_3 - p_2 = 641 - 401 = 240$.

Отже, отримуємо таке розбиття:

$$200000 = 240 + 401 + 9349 + 40009 + 150001.$$

Зрозуміло, що отримане при цьому способі розв'язування задачі знайдене число n не є найменшим з можливих. У випадку п'яти доданків вкажемо спосіб пошуку найменшого з таких n.

Нехай три перші доданки – це 2, 3 та 5. З'ясуємо, які натуральні числа можна подати у вигляді суми двох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 2, 3, 5. Зрозуміло, що ці числа, як суми двох непарних доданків повинні бути парними.

Щоб такі доданки не були кратними ні 2, ні 3, ні 5, їх остача при діленні на 30 також не має бути кратною 2, 3, 5. Серед можливих остач такими є 1, 7, 11, 13 та їх доповнення до 30 – остачі 29, 23, 19, 17 відповідно.

Для довільного натурального m розглянемо представлення:

$$60m = (30m-1) + (30m+1),$$

$60m+2 = (30m-11) + (30m+13)$, $60m-2 = (30m-13) + (30m+11)$,

$60m+4 = (30m-7) + (30m+11)$, $60m-4 = (30m-11) + (30m+7)$,

$60m+6 = (30m-1) + (30m+7)$, $60m-6 = (30m-7) + (30m+1)$,

$60m+8 = (30m-11) + (30m+19)$, $60m-8 = (30m-19) + (30m+11)$,

$60m+10 = (30m-1) + (30m+11)$, $60m-10 = (30m-11) + (30m+1)$,

$60m+12 = (30m+1) + (30m+11)$, $60m-12 = (30m-1) + (30m-11)$,

$60m+14 = (30m+1) + (30m+13)$, $60m-14 = (30m-1) + (30m-13)$,

$60m+16 = (30m-1) + (30m+17)$, $60m-16 = (30m+1) + (30m-17)$,

$60m+18 = (30m+7) + (30m+11)$, $60m-18 = (30m-7) + (30m-11)$,

$60m+20 = (30m+7) + (30m+13)$, $60m-20 = (30m-7) + (30m-13)$,

$60m+22 = (30m-1) + (30m+23)$, $60m-22 = (30m+1) + (30m-23)$,

$60m+24 = (30m+11) + (30m+13)$, $60m-24 = (30m-11) + (30m-13)$,

$60m+26 = (30m+7) + (30m+19)$, $60m-26 = (30m-7) + (30m-19)$,

$$60m+28=(30m+11)+(30m+17),\quad 60m-28=(30m-11)+(30m-17),$$
$$60m-30=(30m-11)+(30m-19).$$

Всі виписані тут доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але легко перевірити, що такі різниці відмінних від 2, 3, 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне парне число, починаючи з 30 можна подати вказаним способом у вигляді потрібної суми двох доданків. А враховуючи ще й доданки 2, 3, 5, отримаємо потрібні представлення п’ятьма доданками для всіх парних чисел $k \geq 40$.

Щоб отримати непарні числа, покладемо перші два доданки рівними 3 та 5 і з’ясуємо, які непарні натуральні числа можна подати у вигляді суми трьох більших за 1 взаємно простих між собою натуральних чисел, не кратних 3 та 5.

Для довільного натурального m розглянемо представлення:

$$90m+1=(30m-1)+(30m-17)+(30m+19),$$
$$90m-1=(30m+1)+(30m+17)+(30m-19),$$
$$90m+3=(30m-1)+(30m-7)+(30m+11),$$
$$90m-3=(30m+1)+(30m+7)+(30m-11),$$
$$90m+5=(30m+1)+(30m-7)+(30m+11),$$
$$90m-5=(30m-1)+(30m+7)+(30m-11),$$
$$90m+7=(30m+1)+(30m-7)+(30m+13),$$
$$90m-7=(30m-1)+(30m+7)+(30m-13),$$
$$90m+9=(30m+1)+(30m-11)+(30m+19),$$
$$90m-9=(30m-1)+(30m+11)+(30m-19),$$
$$90m+11=(30m-1)+(30m+1)+(30m+11),$$
$$90m-11=(30m+1)+(30m-1)+(30m-11),$$
$$90m+13=(30m-17)+(30m+7)+(30m+23),$$
$$90m-13=(30m+17)+(30m-7)+(30m-23),$$

$$90m+15=(30m-1)+(30m-7)+(30m+23),$$
$$90m-15=(30m+1)+(30m+7)+(30m-23),$$
$$90m+17=(30m-1)+(30m+1)+(30m+17),$$
$$90m-17=(30m+1)+(30m-1)+(30m-17),$$
$$90m+19=(30m-1)+(30m+1)+(30m+19),$$
$$90m-19=(30m+1)+(30m-1)+(30m-19),$$
$$90m+21=(30m-13)+(30m+11)+(30m+23),$$
$$90m-21=(30m+13)+(30m-11)+(30m-23),$$
$$90m+23=(30m-7)+(30m+13)+(30m+17),$$
$$90m-23=(30m+7)+(30m-13)+(30m-17),$$
$$90m+25=(30m+1)+(30m+7)+(30m+17),$$
$$90m-25=(30m-1)+(30m-7)+(30m-17),$$
$$90m+27=(30m+1)+(30m+7)+(30m+19),$$
$$90m-27=(30m-1)+(30m-7)+(30m-19),$$
$$90m+29=(30m+1)+(30m+11)+(30m+17),$$
$$90m-29=(30m-1)+(30m-11)+(30m-17),$$
$$90m+31=(30m+1)+(30m+11)+(30m+19),$$
$$90m-31=(30m-1)+(30m-11)+(30m-19),$$
$$90m+33=(30m+1)+(30m+13)+(30m+19),$$
$$90m-33=(30m-1)+(30m-13)+(30m-19),$$
$$90m+35=(30m+7)+(30m+11)+(30m+17),$$
$$90m-35=(30m-7)+(30m-11)+(30m-17),$$
$$90m+37=(30m+7)+(30m+13)+(30m+17),$$
$$90m-37=(30m-7)+(30m-13)+(30m-17),$$
$$90m+39=(30m+7)+(30m+13)+(30m+19),$$
$$90m-39=(30m-7)+(30m-13)+(30m-19),$$
$$90m+41=(30m+7)+(30m+11)+(30m+23),$$

$$90m-41=(30m-7)+(30m-11)+(30m-23),$$
$$90m+43=(30m+7)+(30m+13)+(30m+23),$$
$$90m-43=(30m-7)+(30m-13)+(30m-23),$$
$$90m+45=(30m-1)+(30m+17)+(30m+29).$$

Всі виписані тут доданки не кратні ні 2, ні 3, ні 5 і в кожній записаній парі – взаємно прості між собою. Справді, якщо б якась пара доданків мала спільний дільник, то й їх різниця ділилась би на нього. Але легко перевірити, що такі різниці відмінних від 2, 3 та 5 дільників не мають.

Звідси випливає, що кожне непарне число, починаючи з 47 можна подати вказаним способом у вигляді суми трьох доданків. А враховуючи ще й доданки 3 та 5, отримаємо потрібні представлення п'ятьма доданками для всіх непарних чисел $k \geq 55$.

Об'єднуючи ці два випадки, приходимо до висновку, що потрібні представлення у вигляді суми п'яти попарно взаємно простих більших за 1 натуральних доданків існують для всіх $k > n = 53$.

Зауважимо, що $n = 53$ ще не є найменшим з можливих. Потрібні представлення існують також для чисел:

$$53=3+7+11+13+19,\ 51=3+7+11+13+17,\ 49=3+5+11+13+17,$$
$$47=3+5+7+13+19,\ 45=3+5+7+11+19,\ 43=3+5+7+11+17.$$

При цьому з останньої рівності зрозуміло, що для числа 41 такого представлення не існує.

Тому, враховуючи сказане вище, найменшим буде $n = 41$, щоб всі числа більші за нього можна було розбити на п'ять попарно взаємно простих доданків, які більші за 1.

18. Нехай $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа m на множники. Тоді кількість його дільників $d = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$.

Оскільки

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17=510510, \qquad 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19>1000000,$$

то $k \leq 7$. При цьому для числа $m = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 510510$ маємо $d = 2^7 = 128$. Таке ж значення d отримаємо і для інших допустимих чисел з $k = 7$.

Розглянемо тепер випадок $k=6$. Вилучивши з попереднього канонічного розкладу множник 17, нескладно отримати наступне допустиме число m, канонічний розклад якого має вигляд $m=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=720720$, для якого $d=5\cdot 3\cdot 2^4=240$.

Отримати для $k=6$ більше значення не вдасться, бо, наприклад, використовуючи ще й 5^2 за рахунок зменшення степеня числа 2, отримаємо $m=2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13=900900$, для якого $d=3^3\cdot 2^3=216$.

Проте для $k=6$ заміною 13 на 17 можна отримати ще одне допустиме число $m=2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 17=942480$ з $d=5\cdot 3\cdot 2^4=240$.

Нехай тепер $k=5$. Обмежуючись простими дільниками 2, 3, 5, 7, 11, отримуємо ще два допустимі числа з $d=240$:

$$m=2^5\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11=999920,\ d=6\cdot 5\cdot 2^3=240,$$

та

$$m=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11=831600,\ d=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^2=240.$$

Замінивши в останньому з них 11 на 13, знайдемо п'яте число $m=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13=982800$, для якого $d=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^2=240$.

Дальші зменшення k до збільшення d не приведуть, бо кожне зменшення k на 1, отримане відкиданням одного простого дільника, наприклад, дільника 11 чи 13, зменшує d вдвічі. Але простим перебором нескладно переконатися, що компенсувати це зменшення за рахунок збільшення степенів менших простих дільників чисел $m<1000000$ не вдасться.

Таким чином, щонайбільше може бути 240 різних дільників. Саме стільки їх мають 5 наведених вище чисел $m<1000000$.

Зауважимо, що програмно нескладно було б організувати й повний перебір канонічних розкладів чисел $m<1000000$ для всіх $k\le 7$. При цьому для визначення максимальних степенів, з якими простий дільник може входити в канонічний розклад, слід врахувати наступні нерівності:

$$2^{19}<1000000<2^{20},\ 3^{12}<1000000<3^{13},\ 5^8<1000000<5^9,$$
$$7^7<1000000<7^8,\ 11^5<1000000<11^6,\ 13^5<1000000<13^6,$$
$$17^4<1000000<17^5.$$

19. Оскільки послідовність a_{2k} є монотонно зростаючою, послідовність a_{2k+1} – монотонно спадною, то для існування границі необхідно, щоб всі елементи з непарними номерами були більшими кожного елемента з парним індексом.

З нерівності $2 \le \dfrac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2} \le 3 \Leftrightarrow 2 \le \dfrac{1-0}{1-a_2} \le 3$ маємо $\dfrac{3}{6} \le a_2 \le \dfrac{4}{6}$.

Враховуючи сказане вище, з нерівностей

$$2 \le \frac{a_{2k} - a_{2k-1}}{a_{2k} - a_{2k+1}} \le 3 \qquad \text{та} \qquad 2 \le \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \le 3$$

отримаємо оцінки

$$\frac{a_{2k-1} + 2a_{2k}}{3} \le a_{2k+1} \le \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2} \qquad \text{та} \qquad \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \le a_{2k+2} \le \frac{a_{2k} + 2a_{2k+1}}{3}$$

відповідно.

Зокрема, при $k = 1$ знайдемо, що $\dfrac{4}{6} \le a_3 \le \dfrac{5}{6}$.

Далі, припускаючи, що

$$\frac{3x_k}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4y_k}{6^k} \qquad \text{та} \qquad \frac{2z_k}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{t_k}{6^k},$$

з отриманих вище оцінок будемо мати

$$\frac{3\left(3x_k + 2z_k\right)}{6^{k+1}} \le a_{2k+2} \le \frac{4\left(t_k + 2y_k\right)}{6^{k+1}} \qquad \text{та} \qquad \frac{2\left(3x_k + 4z_k\right)}{6^{k+1}} \le a_{2k+3} \le \frac{5t_k + 4y_k}{6^{k+1}}$$

відповідно.

Таким чином, для знаходження чисел x_k, y_k, z_k, t_k отримуємо такі дві системи рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k + 4z_k, \end{cases} \qquad \text{та} \qquad \begin{cases} y_{k+1} = 2y_k + t_k, \\ t_{k+1} = 4y_k + 5t_k, \end{cases}$$

причому, враховуючи оцінки для a_2 та a_3, маємо

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ z_1 = 2,\ t_1 = 5.$$

А з записаних систем одержуємо також

$$x_2 = 7,\ y_2 = 7,\ z_2 = 11,\ t_2 = 29.$$

З другого рівняння першої системи знаходимо $x_k = \dfrac{z_{k+1} - 4z_k}{3}$.

Тоді $x_{k+1}=\frac{z_{k+2}-4z_{k+1}}{3}$. Підставляючи їх у перше рівняння цієї системи, отримаємо різницеве рівняння $z_{k+2}-7z_{k+1}+6z_k=0$, для якого коренями характеристичного рівняння $\lambda^2-7\lambda+6=0$ є числа $\lambda_1=1$ та $\lambda_2=6$. Тому $z_k=C_1+C_2\cdot 6^k$. Враховуючи значення $z_1=2$ та $z_2=11$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1+6C_2=2, \\ C_1+36C_2=11, \end{cases}$ знайдемо $C_1=\frac{2}{10}$ та $C_2=\frac{3}{10}$. Отже, остаточно отримуємо $z_k=\frac{2+3\cdot 6^k}{10}$ та далі знаходимо $x_k=\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}$.

Так само, виражаючи з першого рівняння другої системи $t_k=y_{k+1}-2y_k$, прийдемо до аналогічного різницевого рівняння $y_{k+2}-7y_{k+1}+6y_k=0$. Тому $y_k=C_1+C_2\cdot 6^k$. Враховуючи значення $y_1=1$ та $y_2=7$, з системи рівнянь $\begin{cases} C_1+6C_2=1, \\ C_1+36C_2=7, \end{cases}$ знайдемо $C_1=-\frac{2}{10}$ та $C_2=\frac{2}{10}$. Тоді $y_k=\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}$ і також знаходимо $t_k=\frac{2+8\cdot 6^k}{10}$.

Повертаючись до нерівностей $\frac{3x_k}{6^k}\le a_{2k}\le\frac{4y_k}{6^k}$ та $\frac{2z_k}{6^k}\le a_{2k+1}\le\frac{t_k}{6^k}$, отримуємо наступні оцінки для елементів заданої послідовності:

$$\frac{3\cdot\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k}\le a_{2k}\le\frac{4\cdot\frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k} \quad \text{та} \quad \frac{2\cdot\frac{2+3\cdot 6^k}{10}}{6^k}\le a_{2k+1}\le\frac{\frac{2+8\cdot 6^k}{10}}{6^k}.$$

Перейшовши в цих подвійних нерівностях до границі при $k\to\infty$, отримуємо $\frac{3}{5}\le\lim_{k\to\infty}a_{2k}\le\frac{4}{5}$ та $\frac{3}{5}\le\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}\le\frac{4}{5}$. В цих же ж межах буде знаходитися і границя заданої послідовності.

Для кожного $a\in\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ нескладно навести приклад такої послідовності, яка збігається до a і задовольняє умови задачі:

$$a_0=0,\ a_1=1,\ \ a_{2n}=a-\frac{a}{6^n} \ \text{ та } \ a_{2n+1}=a+\frac{1-a}{6^n}.$$

Зауважимо, що для аналогічної послідовності, елементи якої при всіх $n \ge 1$ задовольняють нерівність $m \le \dfrac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \le M$, $1 < m \le M$, її границя $a \in \left[\dfrac{Mm - M}{Mm - 1}, \dfrac{Mm - m}{Mm - 1} \right]$.

Якщо $a -$ довільне число з цього проміжку, то прикладом послідовності, яка збігається до a і задовольняє вказану нерівність, є:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{2n} = a - \frac{a}{(Mm)^n} \text{ та } a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{(Mm)^n}.$$

20. Вважатимемо, що розглядаються прямокутники, сторони яких паралельні до сторін квадрата і припустимо, що в $i -$тому стовпчику знаходиться a_i фішок. Кожній з $C_{a_i}^2$ пар фішок цього стовпчика відповідає пара рядків, що проходять через цю пару фішок. Зауважимо, що ця пара рядків не перетинає жоден інший стовпчик в двох фішках. Таких пар рядків по всіх стовпчиках буде $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2$. З іншої сторони, всього пар рядків C_n^2. Отже, маємо нерівність $\sum_{i=1}^{n} C_{a_i}^2 \le C_n^2$.

Звідси $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le n^2 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i$ і з нерівності про середні отримуємо:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le n^2 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - n\left(\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + n\left(\sqrt{n - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\right)\right) \le 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le n\left(\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right).$$

Така оцінка трохи краща, ніж $n\left(\sqrt{n} + 1\right)$.

Додатково розглянемо питання до цієї задачі з заключного етапу Всеукраїнського ТЮМ імені професора М.Й. Ядренка про розміщення $n\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)$ фішок на дошці $n\times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника?

Нехай $n=k^2+a$, де k – натуральне число, $0\le a\le 2k$. Тоді піднесенням до квадрату отримуємо нерівності:

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]<n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } 0\le a\le k,$$

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]=n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } a=k+1,$$

$$\left[n\left(\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right)\right]>n\left([\sqrt{n}]+1\right) \text{ для } k+2\le a\le 2k.$$

В першому випадку розв’язків, очевидно, немає.

Пропонуємо читачам самостійно навести приклад розташування шести безконфліктних фішок на дошці розмірами 3×3 та виявити можливість розміщення $n\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)$ безконфліктних фішок на дошках розмірами $4\times 4,\ 5\times 5,\ 6\times 6$.

Нижче для другого та третього випадків наводимо приклади такого розміщення з дошками розмірами $7\times 7,\ 8\times 8$ $(k=2)$ та $13\times 13,\ 15\times 15$ $(k=3)$:

	+	+				+
+	+				+	
+				+		+
			+		+	+
		+		+	+	
	+		+	+		
+		+	+			

	+	+					+
+	+					+	
+					+		+
				+		+	+
			+		+	+	
		+		+	+		
	+		+	+			
+		+	+				

	+						+				+	+
+						+				+	+	
					+				+	+		+
				+				+	+		+	
			+				+	+		+		
		+				+	+		+			
	+				+	+		+				
+				+	+		+					
			+	+		+						+
		+	+		+						+	
	+	+		+						+		
+	+		+						+			
+		+						+				+

	+						+				+			+
+						+				+			+	
					+				+			+		+
				+				+			+		+	
			+				+			+		+		
		+				+			+		+			
	+				+			+		+				
+				+			+		+					
			+			+		+						+
		+			+		+						+	
	+			+		+						+		
+			+		+						+			
		+		+						+				+
	+		+						+				+	
+		+						+				+		

ТУРНІРИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ТА НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

Ще понад 250 років тому Леонард Ейлер у листі до петербурзького академіка Хрістіана Гольдбаха писав, що витратив чимало зусиль для розв'язання однієї задачі. Її суть полягала у знаходженні трійок натуральних чисел $a,b,c,$ для яких $a+b+c,$ $ab+bc+ca$ та abc є квадратами натуральних чисел, причому найбільший спільний дільник трійки цих чисел $(a,b,c)=1.$

Максимальна знайдена Ейлером трійка натуральних чисел a,b,c містила два 13-цифрові та одне 12-цифрове число. Але довго залишалося нерозв'язаним питання – скінченною чи нескінченною є множина таких трійок.

24 – 29 жовтня 2011 року у Львові проходив XIV Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. Одним з переможців турніру стала команда «Париська Сорбонна» Парищенської ЗОШ І-ІІІ ступенів Надвірнянської районної ради Івано-Франківської області.

У процесі підготовки команди до турніру вдалося розв'язати проблему, яка залишалася невирішеною ще з часів Ейлера:

Доведемо тут дещо сильніше твердження.

Теорема. Множина трійок натуральних чисел $a,b,c,$ для яких $a+b+c,$ $ab+bc+ca,$ abc та $a^2+b^2+c^2$ є квадратами натуральних чисел, причому $(a,b,c)=1,$ є нескінченною.

Доведення. Умови теореми задовольняє трійка чисел:

$$a=136=8\cdot(8+9),\ \ b=153=9\cdot(8+9),\ c=72=8\cdot 9.$$

Справді,

$$a+b+c=19^2,\ \ ab+bc+ca=204^2,\ \ abc=1224^2,\ a^2+b^2+c^2=217^2.$$

Покладемо $a=x(x+y),\ \ b=y(x+y),\ \ c=xy,\quad x,y\in N.$ Тоді

$$abc=\left(xy(x+y)\right)^2,\ a^2+b^2+c^2=\left(x^2+xy+y^2\right)^2,$$

$$ab+bc+ca=2xy(x+y)^2,\ a+b+c=x^2+3xy+y^2.$$

Тому достатньо знайти такі натуральні числа $x,y,$ для яких $2xy$ та

$x^2+3xy+y^2$ є квадратами натуральних чисел та $(x,y)=1.$

Нехай для натуральних чисел $x,y,$ де $(x,y)=1,$ виконуються рівності

$$2xy=r^2,\ x^2+3xy+y^2=t^2,\ r,t\in N.$$

Позначимо $|x-y|=q,\ \ x+y=s$ і покладемо

$$X=2r^2t^2>x,\ Y=q^2s^2>y.$$

Маємо

$$2XY=(2qrst)^2,\quad X^2+3XY+Y^2=\left(X+Y+q^2r^2\right)^2.$$

Доведемо, що $(X,Y)=1.$ З рівності $2xy=r^2$ і умови $(x,y)=1$ випливає, що числа x та y різної парності. Тому числа q та s – непарні. Крім того,

$$q^2+2r^2=s^2,\ 2s^2+r^2=2t^2,\ q^2+4t^2=5s^2.$$

Припустивши, що $(X,Y)\neq 1,$ звідси для кожного з можливих при цьому чотирьох випадків:

$$(q,r)\,\vdots\,p,\ (s,r)\,\vdots\,p,\ (q,t)\,\vdots\,p,\ (s,t)\,\vdots\,p,$$

де p – деяке просте число, отримаємо, що $(q,s)\,\vdots\,p.$ Тоді й $(x,y)\,\vdots\,p,$ що суперечить умові $(x,y)=1.$

Нехай тепер

$$x_1=8,\quad y_1=9,$$

$$x_{n+1}=4x_ny_n\left(x_n^2+3x_ny_n+y_n^2\right),\ y_{n+1}=(x_n-y_n)^2(x_n+y_n)^2,\quad n\in N.$$

З доведеного випливає, що трійки чисел

$$a_n=x_n(x_n+y_n),\quad b_n=y_n(x_n+y_n),\quad c_n=x_ny_n$$

задовольняють умови теореми для кожного натурального $n,$ причому $(a_n,b_n,c_n)=1,\ n\in N.$ Теорема доведена.

Були знайдені також усі пари натуральних чисел $x,y,$ для яких значення виразу $x^2+3xy+y^2$ є квадратом натурального числа, причому $(x,y)=1:$

1) $x=8k,\ y=20k^2-12k+1,\ \ x^2+3xy+y^2=\left(20k^2-1\right)^2;$

2) $x = 8k,\ y = 4k^2 - 12k + 5,\ k \geq 3,\ k \neq 5l,\quad x^2 + 3xy + y^2 = \left(4k^2 - 5\right)^2;$

3) $x = 5k^2 + 2k, y = 2k + 1,\ x^2 + 3xy + y^2 = \left(5k^2 + 5k + 1\right)^2;$

4) $x = k^2 - 2k, y = 2k + 1,\ k \geq 3,\ x^2 + 3xy + y^2 = \left(k^2 + k - 1\right)^2.$

Зокрема, з 1) для $k = 1$ чи з 4) для $k = 4$ отримуємо $x_1 = 8,\ y_1 = 9,$ а з 3) для $k = 144$ знайдемо $x_2 = 103968,\ \ y_2 = 289.$ Такі пари чисел є першими двома елементами послідовності пар $\left(x_n, y_n\right)$, яку ми побудували при доведенні теореми.

Але виявити хоч одну пару чисел $\left(x, y\right)$, відмінну від елементів побудованої вище послідовності пар $\left(x_n, y_n\right)$, для якої $2xy$ також є квадратом натурального числа, так і не вдалося.

Відкритим залишається і питання про існування трійок $a, b, c,$ які задовольняють умови теореми, але не представляються у вигляді

$$a = x\left(x + y\right),\ \ b = y\left(x + y\right),\ \ c = xy,\quad x, y \in N.$$

Додаток 1

Витяг з Правил проведення обласного турніру юних математиків у Івано-Франківській області

Турнір юних математиків проводиться згідно ***Положення Про Всеукраїнські олімпіади з базових і спеціальних дисциплін, турніри, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт і конкурси спеціальної майстерності***, затвердженого наказом Міністерства Освіти і науки України від 18 серпня 1998 року №305.

Мета турніру – залучити учнів до практичної наукової діяльності, навчити нормам і стилю роботи у творчих колективах, підсилити міжпредметні зв'язки, активізувати позакласну роботу з математики, підвищити професійний рівень вчителів математики, а також привернути увагу провідних вчених, студентів та аспірантів до роботи зі школярами.

У турнірі беруть участь команди які представляють загальноосвітні навчальні та професійно-технічні заклади області або є збірними командами від районів (міст). Кожна команда складається з п'яти учнів і супроводжується на турнір одним керівником. Оргкомітет може дозволити взяти участь у турнірі командам, які складаються з чотирьох чи трьох учнів.

Для оцінювання виступів команд під час проведення турніру обласним департаментом освіти і науки затверджується журі турніру, яке очолюють голова журі та його заступник – провідні спеціалісти відповідного профілю .

До складу журі входять незалежні представники з числа викладачів, студентів та аспірантів вищих навчальних закладів, викладачів закладів нового типу, вчителів загальноосвітніх шкіл, методистів відділів освіти, методистів обласного інституту післядипломної освіти педагогічних працівників – фахівців відповідного профілю.

Для складання завдань турніру оргкомітет турніру не пізніше як за чотири місяці до його проведення формує комісію на чолі з головою журі. Комісія готує до 20 задач відкритого типу. Командиучасниці турніру мають бути ознайомлені з умовами задач не пізніше, як за три місяці до проведення турніру. Задачі фінального бою визначаються журі турніру під керівництвом голови журі безпосередньо підчас проведення турніру.

В рамках турніру проводяться такі заходи:

- Жеребкування
- Відбіркові турнірні бої.
- Фінальний бій
- Індивідуальна першість.
- Нагородження переможців.

Кількість відбіркових груп визначають з розрахунку, щоб у кожній групі змагалися 3 або 4 команди. Після визначення кількісного складу груп капітани команд витягують жетони з номерами груп та своєю роллю у першій дії першого відбіркового бою. Ролі команд у наступних діях відбіркових боїв визначаються згідно описаних нижче схем дискусій.

Групи для другого відбіркового бою формуються за принципом циклічності: команда-переможець групи зустрічається з командою, яка зайняла друге місце у наступній групі, з командою, яка зайняла третє місце у третій по порядку групі, та, якщо така є, з командою, яка зайняла четверте місце у четвертій по колу групі. У такому ж порядку ці команди мають право вибирати собі роль у першій дії другого відбіркового бою.

Якщо кількість команд-учасниць менша шести, оргкомітет турніру може запропонувати іншу процедуру жеребкування та іншу схему боїв.

Схеми дискусій:

Чотирьохкомандний бій

Команда	Дія 1	Дія 2	Дія 3	Дія 4
1	Доповідач	Спостерігач	Рецензент	Опонент
2	Опонент	Доповідач	Спостерігач	Рецензент
3	Рецензент	Опонент	Доповідач	Спостерігач
4	Спостерігач	Рецензент	Опонент	Доповідач

Трьохкомандний бій

Команда	Дія 1	Дія 2	Дія 3
1	Доповідач	Рецензент	Опонент
2	Опонент	Доповідач	Рецензент
3	Рецензент	Опонент	Доповідач

Обов’язки ведучого: представити команди та членів журі; організувати розподіл ролей; слідкувати за дотриманням регламенту; слідкувати за змістом запитань і за тим, щоб вони не повторювалися; зачитувати оцінки журі.

Ведучий має право: зупиняти учасника, який порушує регламент; знімати питання, яке повторюється; припиняти дискусію, коли вона стає неконструктивною; за згодою журі додавати хвилину додаткового часу для учасників дискусії, але не більше п’яти хвилин на протязі однієї дії.

В обов’язки ведучого не входить: задавати навідні питання; перевіряти правильність висловів учасника; коментувати виступ; пояснювати оцінки членів журі.

Регламент дискусії:

Опонент викликає Доповідача розв’язувати задачу, яка ще не доповідалася. Доповідач приймає чи відхиляє виклик	2 хв.
Підготовка до доповіді та доповідь Доповідача	10 хв.
Уточнюючі питання Опонента до Доповідача, підготовка до опонування та саме опонування	8 хв.
Відповіді Доповідача на зауваження Опонента та полеміка між Доповідачем та Опонентом	5 хв.
Запитання Рецензента до Доповідача та Опонента, відповіді на них, рецензування	7 хв.
Відповіді на зауваження Рецензента Доповідачем та Опонентом. Загальна дискусія між ними та за участю команд	7 хв.
Підсумкове слово Доповідача	1 хв.
Уточнюючі питання членів журі до учасників дискусії, відповіді на них	5 хв.
Виставлення оцінок, слово журі	5 хв.
Всього	***50 хв.***

Кожен учасник (Опонент, Рецензент) протягом однієї дії бою може задати не більше 5 питань. Відповідь на питання не повинна тривати більше 1 хв.

До початку турніру кожна команда має право визначити одну задачу як вічну відмову на всі відбіркові бої. Перед початком кожної дії бою Доповідач має право без штрафних санкцій визначити будь-яку одну із задач як стратегічну відмову на даний бій.

Задачі, які у відбіркових боях доповідалися принаймні тричі, не можуть брати участі у наступних відбіркових турах і підлягають виключенню оргкомітетом.

Опонент може викликати Доповідача на розв'язування будь-якої задачі, крім тієї, яка: 1. Виключена оргкомітетом. 2. Вже доповідалася у попередніх діях даного бою. 3. Включена командою чи Доповідачем у список відмов. 4. Вже доповідалася Доповідачем у попередніх боях. 5. Вже доповідалася Опонентом у попередніх боях. 6. Вже опонувалася Опонентом у попередніх боях.

Доповідач має право без штрафних санкцій двічі відхиляти виклик Опонента. Наступні відмови приводять до зниження коефіцієнта Доповідача за такою схемою:

Номер відмови	1	2	3	4	5	6	7, 8, …
Коефіцієнт Доповідача	3,0	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0

У випадку, коли Доповідач відповів відмовою на всі запропоновані йому задачі, його коефіцієнт дорівнює 0, а Опонент опонує останню запропоновану ним задачу з точки зору того, що він хотів би почути по ній у доповіді. При цьому Рецензент оцінює лише роботу Опонента.

Кожен учасник команди протягом одного бою може виступити не більше двох разів у ролі Доповідача, Опонента чи Рецензента.

Кожен бій судять від чотирьох до семи членів журі. При цьому у всіх групах кожного туру кількість членів журі має бути однаковою.

Після кожної дії бою кожен член журі виставляє оцінки за виступи Доповідача, Опонента та Рецензента, які переводяться у бали за наступною шкалою:

Оцінка	5+	5	5-	4+	4	4-	3+	3	3-
Бал	16	15	14	13	12	11	10	9	8

Якщо членів журі, які судять даний бій, більше, ніж п'ять, то найвища та найнижча оцінки не враховуються. При п'яти членах журі відкидають лише найнижчу оцінку. При чотирьох членах журі враховуються всі оцінки.

З решти оцінок обчислюють середнє арифметичне значення і множать його на коефіцієнт: 3,0 (або менше згідно схеми) – оцінку Доповідача; 2,0 – оцінку Опонента; 1,0 – оцінку Рецензента. У результаті отримуємо очки, які будуть нараховані команді у даній дії бою. Для оцінювання бою в цілому очки, набрані командами в окремих його діях, додаються.

Заліковий бал команди у турнірному бою визначають як цілу частину від розділеної на три кількості набраних командою на даному етапі очок. Крім залікових, за результатами турнірного бою командам нараховуються також бонусні бали за такою схемою:

Місце\ \Очки	86,00 – 96,00	76,00 – 85,99	66,00 – 75,99	56,00 – 65,99	48,00 – 55, 99
1	6	5	4	3	2
2	5	4	3	2	1
3, 4	4	3	2	1	0

Рейтинг команди у конкретному бою визначається за сумою набраних нею у цьому бою залікових та бонусних балів. Загальний рейтинг команди визначається за сумою її рейтингів у всіх проведених нею відбіркових боях.

За рівних рейтингів перевага надається команді, яка за сумою всіх етапів: 1. Має вищий рейтинг. 2. Набрала більше очок. 3. Набрала більше очок у ролі Доповідача. 4. Набрала більше очок у ролі Опонента. 5. Набрала більше балів у додатковому конкурсі між цими командами.

За рішенням журі рейтинг команд може визначатися лише за бонусними балами. Про це команди повинні бути повідомлені до початку відбіркових боїв.

Три команди, які мають найвищі рейтинги за сумою двох відбіркових боїв, попадають у фінал турніру. Решта, але не більше 12 команд, беруть участь у третьому турнірному бою.

Метою проведення фінального бою є більш об’єктивне визначення переможця турніру та демонстрація всім учасникам турніру виступів кращих команд-учасниць.

Фінальний бій проводиться за тими ж правилами, що й попередні бої, за винятком дозволу на включення командою та Доповідачем задач до списку вічних та стратегічних відмов.

Фінальний бій проходить за задачами, які учасники бою розв’язують безпосередньо перед його проведенням. На розв’язання восьми задач відводиться до чотирьох годин. Письмове оформлення розв’язань не вимагається.

Як виняток, за рішенням оргкомітету фінальний бій може проводитися за десятьма найбільш рейтинговими на думку команд-учасниць турніру задачами, які розігрувалися у відбіркових боях.

До суддівства фінального бою залучаються не менше семи найбільш кваліфікованих членів журі.

Перше місце присуджується команді, яка набрала найбільше очок у фінальному бою. Якщо загальна кількість команд-учасниць турніру була не менше 9, то іншим двом учасникам фінального бою присуджується друге місце. В іншому разі присуджується одне друге та одне третє місце.

За рівної кількості очок у кількох команд-фіналістів перевага надається команді, яка: 1. У фінальному бою набрала більше очок у ролі Доповідача. 2. У фінальному бою набрала більше очок у ролі Опонента. 3. Має вищий рейтинг за сумою всіх етапів. 4. Набрала більше очок за сумою всіх етапів. 5. Набрала більше балів у додатковому конкурсі між цими командами.

Призові місця командам, які не потрапили до фіналу, присуджується згідно їхніх рейтингів з розрахунку, щоб загальна кількість всіх команд-призерів становила половину (із заокругленням до цілого числа) всіх команд-учасниць, а кількість перших та других місць разом – половину всіх нагороджених .

За рішенням журі команди, які не стали призерами турніру, але продемонстрували високий рівень підготовки, можуть бути відзначені грамотами за якісну підготовку до турніру.

Переможці в індивідуальній першості визначається за сумою балів у трьох ролях: Доповідач, Опонент, Рецензент. Для визначення переможців враховуються лише по чотири кращі не відкинені у кожному з відбіркових та фінальному боях оцінки за виступи у відповідних ролях, які переводяться у бали за наступною шкалою:

Оцінка	5+	5	5-	4+, 4, …, 3-
Бал доповідача	9	6	3	0
Бал опонента	6	4	2	0
Бал рецензента	3	2	1	0

Якщо деяку з ролей виконували два учасники команди, то отриманий бал ділиться між ними пополам.

Місце учасника визначається за сумою набраних ним балів на всіх етапах турніру. За однакових показників перевага надається учневі, який: 1. Набрав більше балів у ролі Доповідача; 2. Набрав більше балів у ролі Опонента; 3. За рішенням журі.

Загальна кількість переможців в індивідуальній першості не повинна перевищувати 30% від кількості учасників турніру.

Фінансування турніру здійснюється за рахунок коштів департаменту освіти і науки облдержадміністрації, коштів місцевих бюджетів та інших джерел, що не заборонені чинним законодавством.

Витрати на проживання учасників турніру та керівників команд, харчування учасників, членів оргкомітету, нагородження переможців турніру цінними подарунками, оплата роботи членам журі та експерту-консультанту здійснюються за рахунок коштів департаменту освіти і науки облдержадміністрації.

Витрати на проїзд команд, відрядження керівника команди здійснюється за рахунок коштів відділів (управлінь) освіти райдержадміністрацій (міських рад) або навчальних закладів, які відряджають команди.

Додаток 2

Рекомендації до оцінювання виступів учнів на турнірах юних математиків

Доповідач	*Оцінка*
Чітко проаналізував модель задачі; виділив етапи її розв'язання та методи реалізації цих етапів. Лаконічно і послідовно виклав повне розв'язання задачі чи суттєве просування у задачах суто дослідницького характеру. Зробив необхідні висновки та узагальнення. Грамотно вів дискусію та відповідав на пропоновані йому питання.	5+ 5
Виділив етапи розв'язання задачі та методи реалізації цих етапів. Лаконічно і послідовно виклав повне розв'язання задачі чи суттєве просування у задачах суто дослідницького характеру. Зробив необхідні висновки. Грамотно вів дискусію та відповідав на пропоновані йому питання, але не розглянув можливих узагальнень задачі чи допускав незначні недоліки.	5- 4+
В основному виклав розв'язання задачі або її нетривіальної частини чи суттєве просування у задачах суто дослідницького характеру. Зробив необхідні висновки. Грамотно вів дискусію та відповідав на пропоновані йому питання, але не виділив етапів розв'язання задачі чи не акцентував увагу на методах реалізації цих етапів. Не розглянув можливих узагальнень. Виклад не у всьому був послідовним та лаконічним. Були допущені суттєві недоліки під час виступу чи дискусії.	4 4-
Виклав часткове розв'язання задачі чи незначне просування у задачах суто дослідницького характеру. У разі правильного розв'язання задачі під час дискусії зорієнтувався у своїх недоліках і проявив розуміння поставленої проблеми. Проте не виділив етапів розв'язання задачі та методів їх реалізації. Допускав грубі помилки у викладі. Не зробив необхідних висновків та	3+ 3

узагальнень. Не завжди міг правильно відповісти на питання щодо деталей запропонованого ним розв'язання. Проявив часткове незнання математичних термінів та формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась.	
Виклав неправильне розв'язання задачі і при цьому в ході дискусії не зумів зорієнтуватися у неправильності свого підходу. Допускав помилки, які свідчили про нерозуміння того, про що доповідається. Проявив повне незнання математичних термінів і формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась. Не відповідав на питання, які безпосередньо стосувалися його доповіді.	3-
Опонент	***Оцінка***
Чітко відзначив всі позитивні моменти виступу доповідача. Продемонстрував розуміння кожного з етапів пропонованого розв'язання. Зробив правильний висновок щодо його правильності та повноти, вміння використовувати знання предмета, робити висновки та узагальнення. У толерантній формі вказав на всі недоліки. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання.	5+ 5
Відзначив окремі позитивні моменти виступу доповідача. Продемонстрував розуміння кожного з етапів пропонованого розв'язання. Зробив правильний висновок щодо його правильності та повноти, вміння використовувати знання предмета, робити висновки та узагальнення. У толерантній формі вказав на окремі недоліки. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання, але допускав деякі незначні недоліки.	5- 4+
Відзначив окремі позитивні моменти виступу доповідача. Продемонстрував розуміння пропонованого розв'язання, але не акцентував уваги на його етапах. Зробив правильний висновок щодо його правильності та повноти, вміння використовувати знання предмета, робити висновки та узагальнення. Вказав на окремі недоліки доповіді. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання,	4 4-

але допускав суттєві недоліки під час виступу чи дискусії. Саме опонування в цілому не було послідовним і лаконічним.	
Відзначив лише окремі позитивні моменти виступу доповідача. В основному продемонстрував своє розуміння пропонованого розв'язання, але не зробив висновку чи зробив неправильний висновок щодо його правильності та повноти, вміння використовувати знання предмета, робити висновки та узагальнення. Вказав на окремі недоліки доповіді, але не побачив суттєвих помилок при їх наявності. Під час виступу чи дискусії допускав помилкові твердження. Саме опонування в цілому не було послідовним і лаконічним. Проявив часткове незнання математичних термінів та формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась.	3+ 3
Продемонстрував повне нерозуміння запропонованого доповідачем розв'язання. Не відзначив наявних позитивних моментів чи помилкових тверджень доповідача або зробив неправильний висновок щодо правильності та повноти розв'язання і під час дискусії не зорієнтувався у своїх помилках. Проявив повне незнання математичних термінів і формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась.	3-
Рецензент	***Оцінка***
Чітко відзначив всі позитивні моменти виступу доповідача. Зробив правильний висновок щодо: правильності та повноти розв'язання; послідовності, зв'язності, логічності та лаконічності виступів доповідача та опонента; вміння використовувати ними знання предмета, робити висновки та узагальнення; а у опонента – ще й уміння швидко вникати у пропонований матеріал. У толерантній формі вказав на всі недоліки доповідача та опонента. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання.	5+ 5

Відзначив окремі позитивні моменти виступу доповідача. Зробив правильний висновок щодо: правильності та повноти розв'язання; послідовності, зв'язності, логічності та лаконічності виступів доповідача та опонента; вміння використовувати ними знання предмета, робити висновки та узагальнення; а у опонента – ще й уміння швидко вникати у пропонований матеріал. У толерантній формі вказав на окремі недоліки доповідача та опонента. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання, але допускав деякі незначні недоліки.	5- 4+
Відзначив окремі позитивні моменти виступу доповідача. Зробив правильний висновок щодо: правильності та повноти розв'язання; послідовності, зв'язності, логічності та лаконічності виступів доповідача та опонента; вміння використовувати ними знання предмета, робити висновки та узагальнення; а у опонента – ще й уміння швидко вникати у пропонований матеріал. Вказав лише на окремі недоліки доповідача та опонента. Грамотно вів дискусію та відповідав на питання, але допускав суттєві недоліки під час виступу чи дискусії. Саме рецензування в цілому не було послідовним і лаконічним.	4 4-
Відзначив лише окремі позитивні моменти виступу доповідача. Зробив неконкретний або неправильний висновок щодо: правильності та повноти розв'язання; послідовності, зв'язності, логічності та лаконічності виступів доповідача та опонента; вміння використовувати ними знання предмета, робити висновки та узагальнення; а у опонента – ще й уміння швидко вникати у пропонований матеріал. Вказав лише на окремі недоліки доповідача та опонента, а у випадку наявності у доповіді помилок, не помічених опонентом, не акцентував на них увагу. Під час виступу чи дискусії допускав помилкові твердження. Саме рецензування в цілому не було послідовним і лаконічним. Проявив часткове незнання	3+ 3

математичних термінів та формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась.	
Продемонстрував повне нерозуміння запропонованого доповідачем розв'язання. Не відзначив наявних позитивних моментів доповідача або опонента. Зробив неправильний висновок щодо правильності та повноти розв'язання і під час дискусії не зорієнтувався у своїх помилках. При наявності в доповіді грубих помилок, не помічених опонентом, не акцентував на них увагу. Проявив повне незнання математичних термінів і формул, пов'язаних із задачею, яка доповідалась. Звів все своє рецензування до фрази типу: «Я у всьому погоджуюся з доповідачем та опонентом».	3-

Список рекомендованої літератури

1. Вибрані матеріали турнірів юних математиків України: Навчальний посібник / Укладач та загальний редактор К.В. Рабець. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2007. – 296 с.
2. XIII Всеукраїнський турнір юних математиків. – Математика. – 2011. – №8(596). – С. 3 – 18.
3. Кукуш О.Г., Мітельман І.М., Нестеренко О.Н., Рабець К.В., Федак І.В., Ясінський В.А. XIV Всеукраїнський турнір юних математиків. – У світі математики. – 2012. – Т.18, вип. 1. – С. 41 – 60.
4. Кукуш О.Г., Мітельман І.М., Нестеренко О.Н., Рабець К.В., Федак І.В., Ясінський В.А. XV Всеукраїнський турнір юних математиків. – У світі математики. – 2013. – Т.19, вип. 1. – С. 41 – 62.
5. Кукуш О.Г., Мітельман І.М., Радченко В.М., Федак І.В., Ясінський В.А. Вибрані задачі XVI Всеукраїнського турніру юних математиків. – У світі математики. – 2014. – Т.20, вип. 1. – С. 53 – 64.
6. Вибрані задачі 17–го Всеукраїнського турніру юних математиків. – У світі математики. – 2015. – Т.21, вип. 1. – С. 71 – 81.
7. Вибрані задачі XVIII Всеукраїнського турніру юних математиків. – У світі математики. – 2016. – Т.22, вип. 1. – С. 69 – 80.
8. Федак І. В. Деякі рівняння та нерівності XVIII турніру юних математиків. – Математика в школах України. Позакласна робота. – 2016. – №4 (64). – С. 2 – 4.
9. Федак І.В. Несподівані точні квадрати і проблема Ойлера. – У світі математики. – 2011. – Т.17, вип. 4 – С. 57 – 59.
10. Федак І.В. Обласні турніри юних математиків: 2005 – 2016 рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 160 с.
11. Федак І.В. Турніри юних математиків та нерозв’язані проблеми математики. – Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2012. – 1(17) – С. 131 – 135.

Електронні ресурси

http://www.tym.in.ua – сайт Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка.

http://www.mif.pu.if.ua – сайт факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

Зміст

ББК: 22.1
УДК: 51(075.8)
Ф 45

Федак І. В. Тринадцять турнірів юних математиків Прикарпаття (2005 – 2017 рр.). – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2017. – 196 с.

Навчальний посібник

Підписано до друку 26 грудня 2017р.
Формат 61x84 1/16, папір офсетний, друк цифровий.
Ум. обсяг 12,25 друк. арк. Наклад 100 пр.
Замовлення № 128 від 22.12.17

Друк: підприємець Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. (0342) 58 04 32